Irena Budínová

Lenka Pavlíčková

Konstrukční úlohy

MASARYKOVA UNIVERZITA

Konstrukční úlohy

Učební text pro studenty učitelství matematiky 2. stupně základní školy

Irena Budínová, Lenka Pavlíčková

Masarykova univerzita

Brno 2020

Recenze:

RNDr. Růžena Blažková, CSc.

RNDr. Milena Vaňurová, CSc.

ISBN 978-80-210-9819-0
ISBN 978-80-210-9818-3 (brožováno)

Obsah

Úvod

Tento učební text je určen studentům učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy jako učební pomůcka při studiu problematiky konstrukčních úloh ve výuce matematiky na základní škole. Text obsahuje nezbytné teoretické poznatky a řadu neřešených i řešených konstrukčních úloh, jak přímými konstrukcemi, tak s využitím programu GeoGebra. Text je rozdělen do dvou hlavních částí.

První část textu obsahuje celkem sedm kapitol. První kapitola s názvem „Konstrukční planimetrické úlohy“ se zabývá obecným úvodem do výuky konstrukčních úloh na základní škole, jsou zde uvedeny fáze řešení konstrukční úlohy, metody řešení konstrukčních úloh, základní konstrukční úlohy a způsoby řešení konstrukčních úloh, které se používají na základní škole. V návaznosti na učivo geometrie 1. stupně základní školy je uvedena fázová kresba (druhá kapitola), rozložení konstrukce do jednotlivých kroků. Fázovou kresbu je možné využívat u jednodušších konstrukčních úloh, je vhodná především pro začátečníky v nižších ročnících základní školy (včetně šestého ročníku). Třetí, čtvrtá a pátá kapitola textu se zabývají konstrukčními úlohami využívajícími množinu všech bodů s danou vlastností, konstrukčními úlohami využívajícími shodných zobrazení a konstrukčními úlohami řešenými algebraickou metodou. Náročností některé úlohy přesahují úroveň základní školy. Považujeme za nezbytné, aby studenti získali nadhled v problematice řešení konstrukčních úloh. Úlohy však svou obtížností nepřekračují středoškolskou matematiku. Šestá kapitola obsahuje konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků vepsaných do kružnice. Konec první části, sedmá kapitola, zahrnuje množství neřešených úloh s návodem k jejich řešení, které slouží k hlubšímu pochopení a současně procvičení probírané látky.

Druhá část textu obsahuje rozsáhlý úvod do řešení konstrukčních úloh v programu GeoGebra. Je určena nejen začínajícím uživatelům tohoto programu, ale upozorňuje studenty i na některé nedokonalosti programu a možnosti jeho využití ve výuce geometrie na základní škole. Studentům nabízí tento software řadu využití nejen ve výuce geometrie na základní škole. Tato část učebního textu může být studentům užitečným průvodcem při využívání výpočetní techniky v geometrii. Avšak nesmí zapomínat, že úloha konstrukčních dovedností žáků bez využití výpočetní techniky je nezastupitelná.

Děkujeme recenzentkám, RNDr. Růženě Blažkové, CSc. a RNDr. Mileně Vaňurové, CSc., za cenné připomínky, kterými přispěly k zvýšení celkové úrovně studijního textu.

Irena Budínová a Lenka Pavlíčková

Konstrukce byly prováděny v programu GeoGebra a upravovány v programech Corel a Malování (Windows). Konstrukce jsou zmenšeny.

Seznam používaných symbolů

$A, B, \ldots$	Bod $A, B, \ldots$
$a, b, \ldots$	Přímka $a, b, \ldots$
$\leftrightarrow AB$	Přímka určená body A, B
$\mapsto AB$	Polopřímka AB (polopřímka s počátkem A a vnitřním bodem B)
$\longleftarrow\!\!\shortmid AB$	Polopřímka opačná k polopřímce AB (polopřímka s počátkem A)
AB	Úsečka AB (úsečka s krajními body A, B)
$\mapsto ABC$	Polorovina s hraniční přímkou AB a vnitřním bodem C
$\mapsto pC$	Polorovina s hraniční přímkou p a vnitřním bodem C
$\sphericalangle AVB$	Konvexní úhel AVB (konvexní úhel s vrcholem V a rameny v polopřímkách VA, VB)
R	Pravý úhel
$k(S, r)$	Kružnice se středem S a poloměrem r
d	Průměr kružnice
$K(S, r)$	Kruh se středem S a poloměrem r
τ_{AB}	Thaletova kružnice s průměrem AB; případně budeme značit τ a průměr doplníme v popisu
$\widehat{AB}$	Kružnicový oblouk AB (kružnicový oblouk s krajními body A, B)
$A \in p$ ($A \notin p$)	Bod A leží (neleží) na přímce p
$AB \subset p$ ($AB \not\subset p$)	Úsečka AB je (není) částí přímky p
$A = B$ ($A \neq B$)	Bod A je totožný s bodem B (různý od bodu B)
$a = b$ ($a \neq b$)	Přímka a je totožná (splývající) s přímkou b (různá od přímky b)
$a \parallel b$ ($a \nparallel b$)	Přímka a je (není) rovnoběžná s přímkou b
$a \perp b$	Přímka a je kolmá k přímce b
$P \in a \cap b$	Průsečík P přímek a, b
$a \cap b = \{P\}$	Průsečík P přímek a, b
$AB \cong CD$	Úsečka AB je shodná s úsečkou CD
$\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle CUD$	Konvexní úhel AVB je shodný s konvexním úhlem CUD
$\Delta ABC \cong \Delta KLM$	Trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem KLM
$\Delta ABC \sim \Delta KLM$	Trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku KLM
$\lvert AB \rvert$	Délka úsečky AB
$\lvert Ap \rvert$	Vzdálenost bodu A od přímky p
$\lvert ab \rvert$	Vzdálenost rovnoběžných přímek a, b
$\lvert \sphericalangle AVB \rvert$	Velikost konvexního úhlu AVB
$\lvert \sphericalangle ab \rvert$	Odchylka přímek a, b
$\boldsymbol{AB}$	Orientovaná úsečka AB
$\lvert \boldsymbol{AB} \rvert$	Velikost orientované úsečky AB
$Z: X \rightarrow X'$	Bod X' je obrazem bodu X v zobrazení Z

$O(o)$	Osová souměrnost s osou souměrnosti o
$S(S)$	Středová souměrnost se středem souměrnosti S
$T(\boldsymbol{AB})$	Posunutí určené orientovanou úsečkou $\boldsymbol{AB}$
$R(S,\varphi)$	Otočení se středem S a úhlem otočení φ
$H(S,\kappa)$	Stejnolehlost se středem S a koeficientem κ

1 Konstrukční planimetrické úlohy

Konstrukční úlohy mají v komplexu geometrického učiva nezastupitelnou roli. Učí žáky novému způsobu přemýšlení, nové symbolice a novému jazyku. Mají vždy jasný cíl, kterým je sestrojení geometrického útvaru se zadanými vlastnostmi. Učí žáky myslet globálně (sestavit plán postupu a tento plán pak konkrétně realizovat). Při řešení konstrukčních úloh žáci aplikují dříve získané geometrické poznatky, mohou tedy prokázat neformální znalosti. Konstrukční úlohy vedou žáky k přesnému vyjadřování, k přesnosti a pečlivosti při rýsování, pěstují u žáků umění číst obrázky a vytvořit obrázky z daného textu.

Konstrukční úlohy provázejí žáky po celou dobu školní docházky a mají rostoucí náročnost. Na 1. stupni se žáci seznamují s rýsováním útvarů, jako jsou úsečka, kolmice, rovnoběžky, kružnice, trojúhelník, čtverec, obdélník. Na tyto dovednosti se pak navazuje na 2. stupni základní školy náročnějšími úlohami.

Konstrukční úlohou rozumíme úlohu, která vyžaduje sestrojit určitý geometrický útvar (alespoň jeden, případně všechny geometrické útvary) splňující dané podmínky.

Konstrukční úlohy třídíme (1) podle počtu neznámých bodů na úlohy **s jedním neznámým bodem** nebo **více neznámými body**, (2) podle polohy daných prvků na úlohy **nepolohové** a **polohové**. U polohových úloh je dána poloha zadaných prvků (jestliže úloha začíná slovy „Je dán prvek…“, musíme začít rýsování tímto prvkem). Z nepolohové úlohy vznikne úloha polohová umístěním prvního prvku. (3) Podle zadání třídíme konstrukční úlohy na **obecně zadané** a **konkrétně zadané**. U konkrétně zadaných úloh jsou známy velikosti všech prvků. U obecně zadaných úloh jsou jeden nebo více prvků zadány bez velikosti. Řešitel řeší úlohu obecně, pro konstrukci volí takovou velikost, aby úloha měla řešení. Uvádí se diskuse počtu řešení vzhledem k parametru.

Sestrojení hledaných útvarů realizujeme užitím pravítka a kružítka. Konstrukce proveditelné použitím pouze těchto dvou rýsovacích prostředků se nazývají **eukleidovské konstrukce**.

Hledání řešení konstrukční úlohy spočívá v nalezení takové posloupnosti základních konstrukcí, které umožní sestrojit všechny neznámé body nebo útvary. **Řešením konstrukční úlohy** rozumíme výsledek konstrukční úlohy.

Fáze řešení konstrukční úlohy

Hledání řešení konstrukční úlohy se člení zpravidla na čtyři části: rozbor, konstrukci, zkoušku a diskusi.

Cílem **rozboru** je nalézt takové souvislosti mezi danými a hledanými prvky, které umožní objevit posloupnost základních konstrukcí, jejichž realizací sestrojíme hledané body nebo útvary. Úvahy opíráme o náčrt situace, v němž zakreslíme jak dané, tak hledané prvky. Hledaný útvar načrtneme tak, jako by úloha byla vyřešena a útvar byl již narýsován. Pro dobrou orientaci můžeme zadané prvky barevně zvýraznit. Do náčrtu zakreslíme také další geometrické útvary (přímky, kružnice, body), které při řešení úlohy využijeme.

Konstrukce spočívá ve stanovení předpisu – posloupnosti základních konstrukcí, podle kterého z daných prvků sestrojíme hledané prvky. Zahrnuje také grafické provedení konstrukce.

Zkouškou správnosti ověřujeme, zda body nebo útvary získané konstrukcí splňují všechny požadavky dané zadáním úlohy.

Diskuse se provádí pouze tehdy, je-li úloha obecně zadaná a obsahuje-li proměnné prvky – parametry. Úkolem diskuse je stanovení podmínek řešitelnosti a roztřídění množiny úloh na úlohy neřešitelné, úlohy s jedním výsledkem a úlohy s více výsledky, a to v závislosti na hodnotách a poloze parametrů vyskytujících se v úloze.

Poznámka: Diskuse je pro žáky základní školy náročná, a z toho důvodu se na základní škole úlohy zadané obecně zpravidla nezadávají. Pokud je úloha konkrétně zadaná a nevyskytují se v ní proměnné prvky, neprovádíme diskusi, ale zjišťujeme **počet vyhovujících výsledků úlohy**, tj. počet všech bodů nebo útvarů, které splňují požadavky stanovené zadáním úlohy. Tato činnost se však považuje za součást konstrukce. Není nutné všechny vyhovující výsledky narýsovat.

Při rýsování používáme různé druhy čar. Čáry třídíme podle tloušťky na tenké (0,25 mm), tlusté (0,5 mm) a velmi tlusté (1 mm). Podle způsobu provedení třídíme čáry na plné, čárkované a čerchované. Obrázky rýsujeme tenkými čarami a výsledek vytahujeme tlustými čarami. Čárkovanými čarami zpravidla rýsujeme neviditelné objekty. Čerchovanými čarami většinou rýsujeme osy souměrnosti.

Bod rýsujeme jako průsečík dvou přímek, přímky a kružnice nebo dvou kružnic (případně dalších křivek). Pokud rýsujeme body v programu GeoGebra, mohou být předdefinovány malým puntíkem.

1.1 Základní konstrukce

Základními eukleidovskými konstrukcemi rozumíme:

1. Narýsování přímky procházející dvěma danými různými body.
   Narýsování kružnice o daném středu a poloměru.
   Určení bodu jako společného bodu dvou různoběžných přímek.
   Určení bodu jako společného bodu přímky a kružnice.
   Určení bodu jako společného bodu dvou kružnic.
2. Některé další jednodušší konstrukce vytvořené jistou posloupností výše uvedených pěti základních konstrukcí, například:
   Přenesení dané úsečky na danou polopřímku.
   Sestrojení kolmice k dané přímce tak, aby procházela daným bodem.
   Sestrojení rovnoběžky s danou přímkou procházející daným bodem.
   Přenesení konvexního úhlu k dané polopřímce do dané poloroviny.
   Sestrojení středu úsečky.
   Rozdělení úsečky na n stejných dílů, rozdělení úsečky v daném poměru.
   Sestrojení osy úsečky.
   Sestrojení osy úhlu.

Později budeme kromě uvedených eukleidovských konstrukcí termínem základní konstrukce nazývat další konstrukce nejdůležitějších množin všech bodů s danou vlastností v rovině, např. trojúhelníku, Thaletovy kružnice, množiny bodů, z nichž je daná úsečka vidět pod daným úhlem, konstrukci obrazu bodu nebo geometrického útvaru v daném zobrazení apod.

Kromě těchto základních konstrukcí se žáci učí také sestrojit úsečku dané délky a sestrojit úhel dané velikosti.

V počátečních úlohách je dobré mít na paměti, že symbolický jazyk je pro žáky náročný. Musí se ho učit jako každý jiný jazyk a každý žák se ho učí jinou rychlostí. Proto doporučujeme zpočátku používat běžný jazyk, který je postupně nahrazován jazykem symbolickým.

Nejprve se řeší úlohy, které využívají vztahů mezi stranami a úhly v trojúhelníku. Užívají se při nich **věty o určenosti trojúhelníku** se zkratkami sss, sus, usu, Ssu. V následující tabulce jsou pro věty sss, sus, usu křížkem označeny zadané prvky u příslušného typu úlohy.

Věty o určenosti	Dáno						Podmínky
	Strany			Úhly			
	a	b	c	α	β	γ	
sss	x	x	x				Trojúhelníkové nerovnosti
sus	x	x				x	
	x		x		x		
		x	x	x			
usu	x				x	x	$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
		x		x		x	
			x	x	x		
Ssu	x	x		x			$a > b$
	x		x	x			$a > c$
	x	x			x		$b > a$
	x		x			x	$c > a$
		x	x		x		$b > c$
		x	x			x	$c > b$

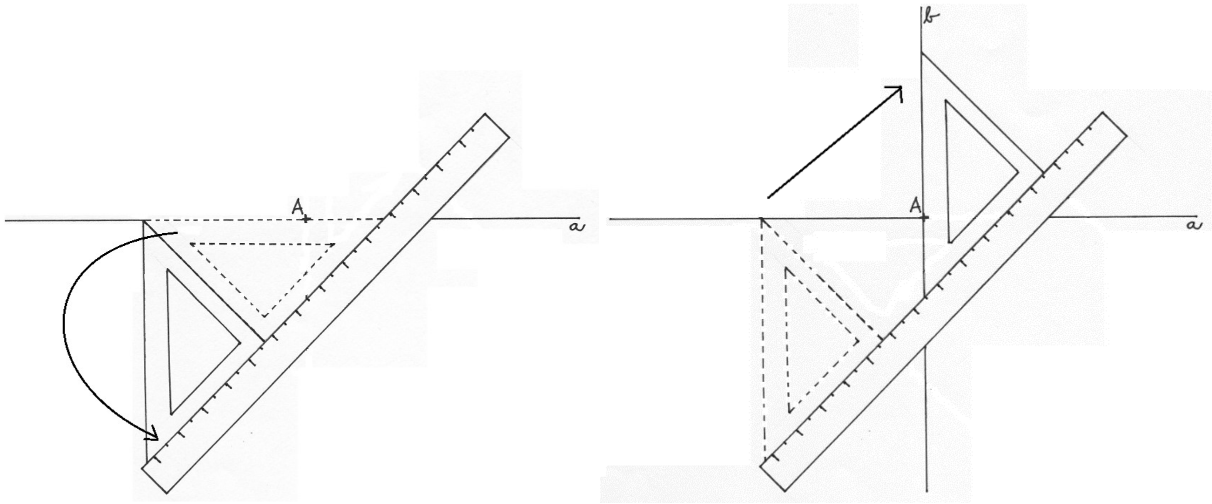
Další konstrukce trojúhelníku využívají prvků jako jsou výšky, těžnice, střední příčky, poloměr kružnice opsané a poloměr kružnice vepsané. Tyto úlohy neřadíme mezi základní konstrukční úlohy.

Příklad 1. Je dána přímka a a bod A ležící na přímce a. Bodem A veďte přímku b, která je kolmá k přímce a.

Rozbor: Nejčastějším způsobem rýsování kolmice je použití trojúhelníkového pravítka s ryskou. Druhým způsobem je použití dvou pravítek, z nichž alespoň jedno je pravoúhlý trojúhelník:

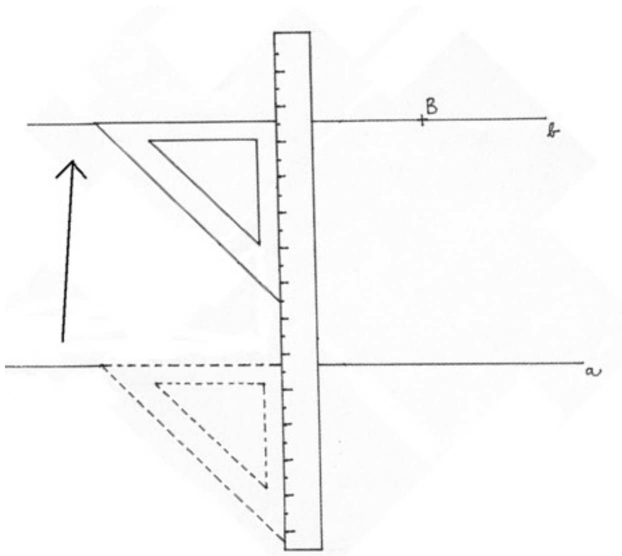
- K narýsované přímce přiložíme přeponu pravoúhlého trojúhelníku.
- K jedné odvěsně trojúhelníku přiložíme pomocné pravítko.
- Trojúhelník otočíme k pomocnému pravítku druhou odvěsnou o 90° (nesmíme jej při tom překlopit).

Podél přepony trojúhelníku narýsujeme přímku kolmou k zadané přímce.



Příklad 2. Je dána přímka a a bod B, který neleží na přímce a. Sestrojte přímku b, která je rovnoběžná s přímkou a a prochází bodem B.

Rozbor: Rovnoběžné přímky rýsujeme použitím dvou pravítek, z nichž alespoň jedno je trojúhelník. Jednu stranu trojúhelníku (přeponu nebo jednu odvěsnu) přiložíme k narýsované přímce. K druhé odvěsně trojúhelníku přiložíme druhé pravítko, podél kterého trojúhelník posunujeme až k danému bodu. Pak narýsujeme rovnoběžku.



Příklad 3. Sestrojte osu úsečky AB.

Připomeňme definici osy úsečky: Osa úsečky je přímka, která prochází středem úsečky a je na úsečku kolmá.

Rozbor: Při konstrukci osy úsečky využíváme její vlastnosti, že každý bod osy úsečky má od krajních bodů úsečky stejnou vzdálenost.

Konstrukce:

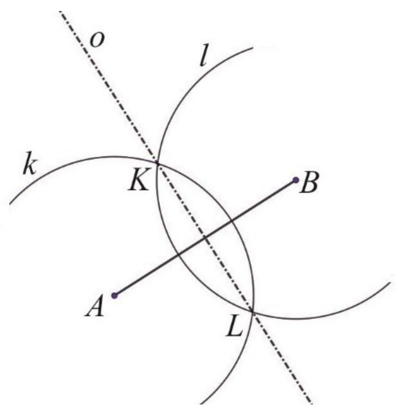
V krajních bodech úsečky A, B sestrojíme oblouky kružnic stejného poloměru, který je větší než polovina úsečky. Přímka, která prochází oběma průsečíky kružnic, je osa úsečky. Bod na úsečce, který protíná osa úsečky, je střed úsečky.

Zkráceně:

1) úsečka AB
2) kružnice k se středem v A a poloměrem r větším než polovina $|AB|$
3) kružnice l se středem v B a poloměrem r
4) body K, L – průsečíky kruhových oblouků k, l
5) osa úsečky AB – přímka, která prochází body K, L (osa úsečky AB)

Symbolický zápis:

1) AB
2) $k; k\left(A, r > \frac{1}{2}|AB|\right)$
3) $l; l(B, r)$
4) $K, L; K, \in k \cap l$ a $L \in k \cap l$[1]
5) $\leftrightarrow KL = o_{AB}$



[1] Je možný také kratší zápis $k \cap l = \{K, L\}$, avšak tento množinový zápis je náročný například pro žáky 6. nebo 7. ročníku.

Příklad 4. Sestrojte osu ostrého úhlu AVB.

Připomeňme: Osa úhlu je polopřímka, která má počátek ve vrcholu úhlu a dělí úhel na dva shodné úhly.

Rozbor: Při konstrukci osy konvexního úhlu využíváme její vlastnosti, že každý bod osy úhlu má od obou ramen úhlu stejnou vzdálenost.

Konstrukce:

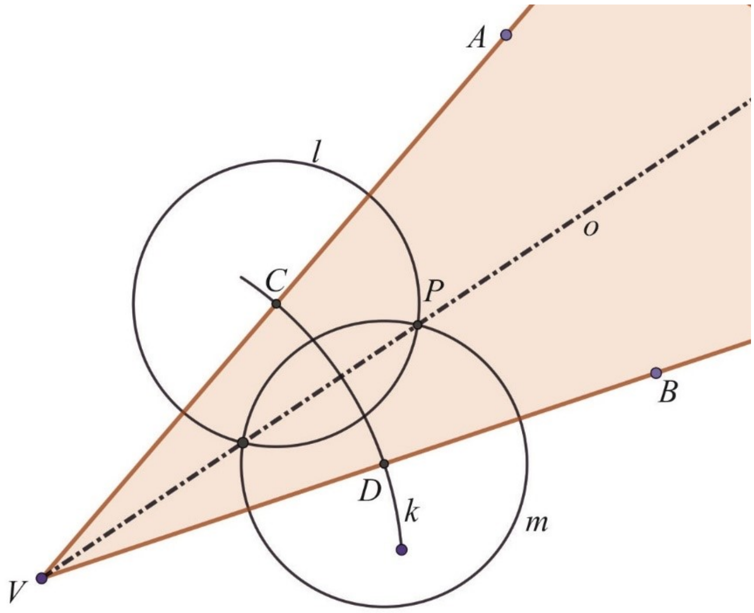
Sestrojíme oblouk kružnice k, která má střed ve vrcholu úhlu V a vhodný poloměr tak, aby protínal obě ramena úhlu. Průsečíky oblouku s rameny úhlu označíme C, D. Sestrojíme oblouk kružnice l, který má střed v bodě C a poloměr s a dále sestrojíme oblouk kružnice m, který má střed v bodě D a poloměr s tak, aby se oba oblouky protínaly. Průsečíky oblouků označíme P. Polopřímka VP je osou konvexního úhlu AVB.

Zkráceně:

1) úhel AVB
2) oblouk k se středem ve V a poloměrem r
3) body C, D průsečíky oblouku k s rameny úhlu
4) oblouk l se středem v C a poloměrem s větším než polovina úsečky CD
   oblouk m se středem v D a poloměrem s
5) bod P – průsečík kružnicových oblouků l, m
6) polopřímka, která má počátek v bodě V a prochází bodem P a leží uvnitř daného úhlu

Symbolický zápis:

1) $\sphericalangle AVB$
2) $k; k(V, r)$
3) $C, D; C \in k \cap \mapsto VA, D \in k \cap \mapsto VB$
4) $l, m;\ l(C, s), m(D, s)$
5) $P; P \in l \cap m$
6) $\mapsto VP$



Příklad 5. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže je dáno $a = 4$ cm, $b = 7$ cm, $c = 9$ cm.

Rozbor: Provedeme kontrolu, zda je splněna trojúhelníková nerovnost, tj. zda součet velikostí dvou libovolných stran je větší než velikost strany třetí. Postupujeme podle věty sss.

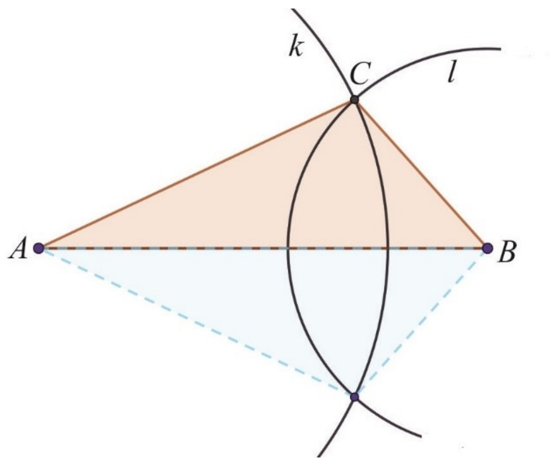
Pokud jako první narýsujeme úsečku $c = AB$, pak neznámým bodem je bod C. Bod C leží na kružnici, která má střed v bodě A a poloměr 7 cm a zároveň na kružnici, která má střed v bodě B a poloměr 4 cm.

Konstrukce (zkrácený zápis):

1) úsečka AB, $|AB| = c = 9$ cm
2) kružnice $k(A, b = 7 \text{ cm})$
3) kružnice $l(B, a = 4 \text{ cm})$
4) bod C – průsečík kružnic k, l
5) trojúhelník ABC

Symbolicky:

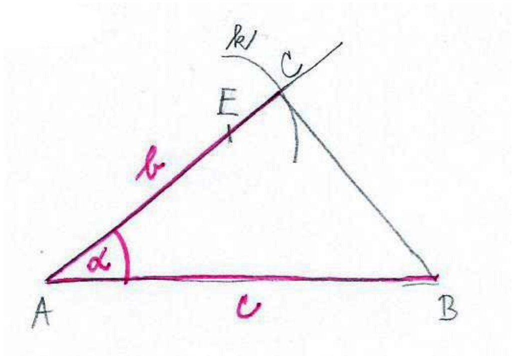
1) $AB; |AB| = c = 9$ cm
2) $k;\ k(A, b = 7 \text{ cm})$
3) $l;\ l(B, a = 4 \text{ cm})$
4) $C; C \in k \cap l$
5) trojúhelník ABC



Poznámka: Kružnice k, l se protínají ve dvou bodech, které se nacházejí v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB. Při konstrukci obvykle vybíráme jednu polorovinu a v té rýsujeme. Ke konstrukci poté dopíšeme poznámku, že „konstrukční úloha má jedno řešení v jedné polorovině určené přímkou AB“. Pokud jsou řešením úlohy dva trojúhelníky, které nejsou shodné, pak tato úloha má dvě řešení.

Příklad 6. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže je dáno: $b = 4\ \mathrm{cm}, c = 5\ \mathrm{cm}, \alpha = 38°$.

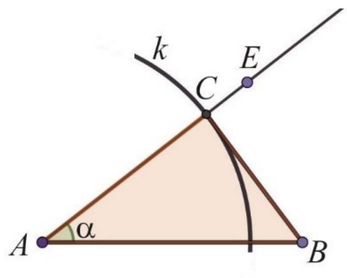
Rozbor: Známé body: A, B. Neznámý bod: C.



Bod C leží na polopřímce $\mapsto AE$, která svírá s úsečkou AB úhel α, a zároveň leží na kružnici k se středem v bodě A a poloměrem $b = 4\ \mathrm{cm}$.

Konstrukce:

1) $AB;\ |AB| = 5\ \mathrm{cm}$
2) $\mapsto AE;\ |\sphericalangle BAE| = \alpha = 38°$
3) $k; k(A, b = 4\ \mathrm{cm})$
4) $C; C \in \mapsto AE \cap k$
5) trojúhelník ABC

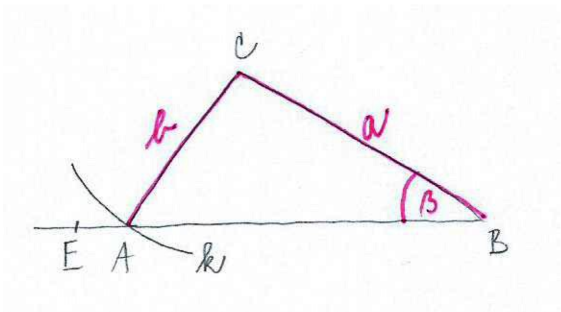


V jedné polorovině určené přímkou AB má úloha právě jedno řešení, protože existuje jeden průsečík polopřímky AE s kružnicí k.

Zkouška: Měřením zadaných prvků se přesvědčíme o tom, že úloha odpovídá zadání.[2]

Příklad 7. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže je dáno: $a = 7\text{ cm}, b = 5\text{ cm}, \beta = 40°$.

Rozbor: Známé body: B, C. Hledaný bod: A.

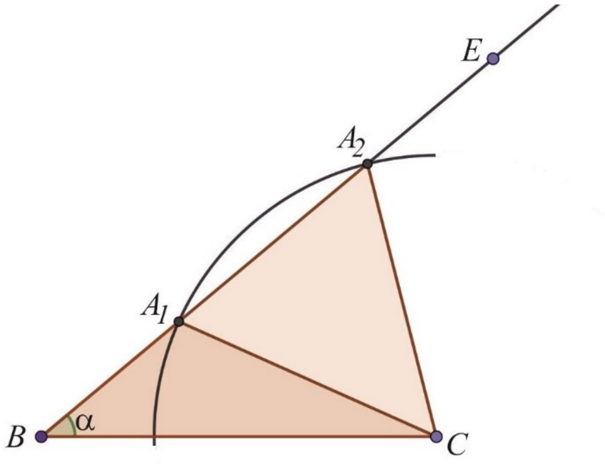


1) Bod E je bodem polopřímky BE, která svírá s úsečkou BC úhel β.
2) Vrchol A leží na polopřímce AE a zároveň na kružnici k, která má střed v bodě C a poloměr b.

Konstrukce:

1) BC; $|BC| = 7\text{ cm}$
2) $k; k(C, b = 5\text{ cm})$
3) $\mapsto BE$; $|\sphericalangle CBE| = \beta = 40°$
4) $A; A \in k \cap \mapsto BE$
5) trojúhelník ABC

[2] V konkrétně zadané úloze ověřujeme zadané prvky, v tomto případě b, c, α.



V jedné polorovině určené přímkou BC má úloha dvě různá řešení, protože kružnice k se s polopřímkou BE protíná ve dvou různých bodech.

Zkouška: O tom, že sestrojený trojúhelník odpovídá zadání, se přesvědčíme měřením zadaných prvků.

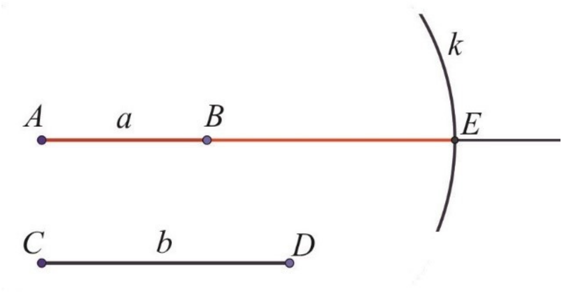
Příklad 8. Jsou dány úsečky AB, CD. Sestrojte grafický součet těchto úseček.

Rozbor: K sestrojení grafického součtu úseček využíváme přenášení úseček na danou polopřímku. Můžeme postupovat tak, že buď využijeme další polopřímku PX, ke které úsečky postupně přenášíme, nebo z jedné ze zadaných úseček vytvoříme polopřímku například prodloužením za bod B. Popíšeme druhý způsob.

Konstrukce: Narýsujeme úsečky AB a CD. Úsečku AB prodloužíme na polopřímku $\longmapsto AB$. Sestrojíme oblouk kružnice, který má střed v bodě B a poloměr CD. Průsečík oblouku a polopřímky $\longmapsto AB$ označíme písmenem E. Úsečka AE je grafickým součtem úseček AB, CD, protože úsečka BE je shodná s úsečkou CD.

Symbolický zápis:

1) AB
2) CD
3) $\longmapsto$AB
4) $k; k(B, b = |CD|)$
5) $E; E \in k \cap \longleftarrow BA$
6) $AE = AB + CD$



Poznámka: Při grafickém součtu úseček, ale i jiných geometrických útvarů, neměříme délky úseček, ale postupujeme přenášením úseček (geometrických útvarů) pomocí kružítka nebo proužku papíru.

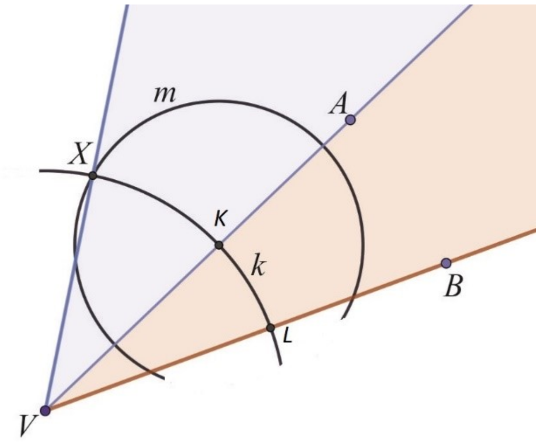
Příklad 9. Jsou dány konvexní úhly AVB a CYD. Sestrojte jejich grafický součet.

Rozbor: Jestliže máme narýsovat grafický součet úhlů $\sphericalangle\, AVB$ a $\sphericalangle$ CYD, využíváme přenášení úhlů k dané polopřímce (kterou je rameno jednoho z úhlů) do dané poloroviny.

Konstrukce: Jsou dány úhly $\sphericalangle\, AVB$ a $\sphericalangle CYD$. K narýsování grafického součtu úhlů můžeme využít jednoho ze zadaných úhlů. V tomto případě využijeme úhlu AVB. Úhel $\sphericalangle\, CYD$ přeneseme k polopřímce VA do poloroviny opačné k polorovině AVB, označme ji BVU. Přenášení úhlu k dané polopřímce do dané poloroviny provádíme tak, že sestrojíme oblouk se středem v bodě Y a o vhodném poloměru r tak, aby protnul obě ramena úhlu. Průsečíky s rameny úhlu CYD označíme K, L. Dále sestrojíme oblouk k se středem v bodě V se stejným poloměrem r. Průsečík oblouku l s rameny úhlu označíme po řadě M, N. Sestrojíme oblouk n se středem v bodě N a poloměrem KL. Průsečík obou oblouků označíme P a narýsujeme polopřímku VX. Úhel BVX je grafickým součtem úhlů $\sphericalangle\, AVB + \sphericalangle\, CYD$.

Symbolický zápis:

1) $\sphericalangle\, AVB, \sphericalangle\, CYD$
2) $k; k(V, r)$
3) $K, L;\ K \in \longmapsto VA \cap k$ a $L \in \longmapsto VB \cap k$
4) $l; l(Y, r)$
5) $M, N; M \in \longmapsto YC \cap l$ a $N \in \longmapsto YD \cap l$
6) $m; m(K, |MN|)$
7) $X; X \in m \cap k$
8) $\sphericalangle BVX = \sphericalangle AVB + \sphericalangle CYD$, protože $\sphericalangle AVX \cong \sphericalangle CYD$



Poznámka: Opět je třeba rozlišovat mezi grafickým součtem (rozdílem) úhlů a součtem (rozdílem) velikostí úhlů.

Příklad 10. Je dána úsečka AB. Rozdělte ji na 5 shodných částí.

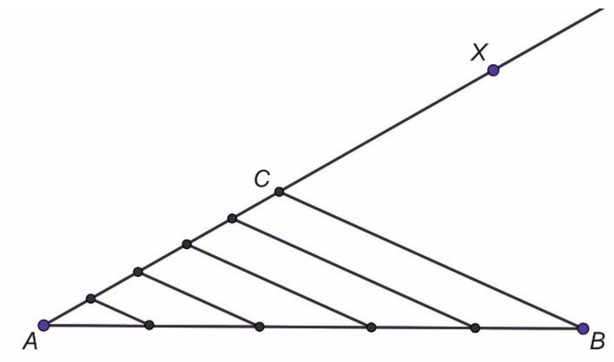
Rozbor: Úsečku AB máme rozdělit na 5 shodných částí. Ke konstrukci využijeme podobnosti trojúhelníků.

Konstrukce:

Jedním krajním bodem úsečky vedeme pomocnou polopřímku, např. polopřímku AX, a to tak, aby úhel BAX byl menší než pravý úhel. Zvolíme jednotkovou úsečku a kružítkem naneseme vedle sebe na polopřímku AX pět těchto jednotkových úseček. Poslední bod na pomocné polopřímce spojíme s druhým krajním bodem úsečky. Rovnoběžky s danou spojnicí vedené každým bodem na pomocné polopřímce rozdělí úsečku na 5 shodných částí.

Symbolicky:

1) AB
2) $\mapsto AX$; $\sphericalangle BAX < R$
3) na polopřímku AX naneseme kružítkem postupně od bodu A 5krát za sebe jednotkovou úsečku; poslední bod označíme C
4) BC
5) ostatními dělícími body vedeme rovnoběžky s úsečkou BC
6) průsečíky těchto rovnoběžek s úsečkou AB jsou hledané dělící body



Metody řešení dalších konstrukčních úloh

Další konstrukční úlohy jsou úlohy, které využívají několik základních konstrukcí. Při řešení dalších konstrukčních úloh užíváme nejčastěji následující metody:

1. Konstrukce metodou množin všech bodů s danou vlastností – tj. neznámé body určujeme jako prvky průniku dvou takových množin.
2. Konstrukce metodou zobrazení – tj. užitím geometrických zobrazení, v nichž si např. některé dané nebo hledané útvary odpovídají jako vzor a obraz.
3. Konstrukce algebraicko-geometrickou metodou – tj. konstrukční metody, při nichž využíváme tzv. geometrických výpočtů některých prvků.

Uvedené konstrukce popíšeme v následujícím textu. Nejdříve se budeme zabývat výukou konstrukčních úloh v nižších ročnících základní školy, kdy žákům může hodně pomoci v orientaci tzv. fázová kresba.

2 Využití fázové kresby v počátcích výuky konstrukčních úloh

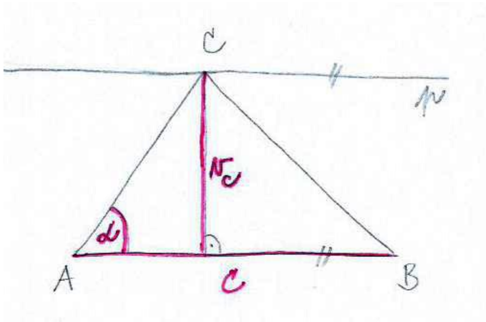
Konstrukční úlohy jsou pro žáky zpočátku náročné, a to hned z několika důvodů. Žáci mohou mít nedostatečně rozvinutou geometrickou představivost, což jim brání vidět v hotové konstrukci jednotlivé kroky, nebo naopak představit si, jak ze zadaných prvků vytvoří posloupnost jednotlivých kroků, aby úlohu vyřešili. Druhým problémem je schopnost zapsat postup řešení konstrukční úlohy s využitím symbolických zápisů.

Ke snadnějšímu pochopení řešení konstrukční úlohy může sloužit **fázová kresba**[3], což je rozložení konstrukce do jednotlivých kroků. Fázovou kresbu je možné využívat u jednodušších konstrukčních úloh.

[3] Fázovou kresbu je možné vytvořit pomocí programu GeoGebra.

Příklad 11. Narýsujte trojúhelník ABC, jestliže znáte: $c = 6\ \mathrm{cm}, v_c = 4\ \mathrm{cm}, \alpha = 70°$.

Rozbor: Známé body: A, B. Neznámý bod: C.



Bod C leží na polopřímce AX, která svírá s úsečkou AB úhel α, a zároveň na přímce, která je rovnoběžná s úsečkou AB a má od ní vzdálenost 4 cm.

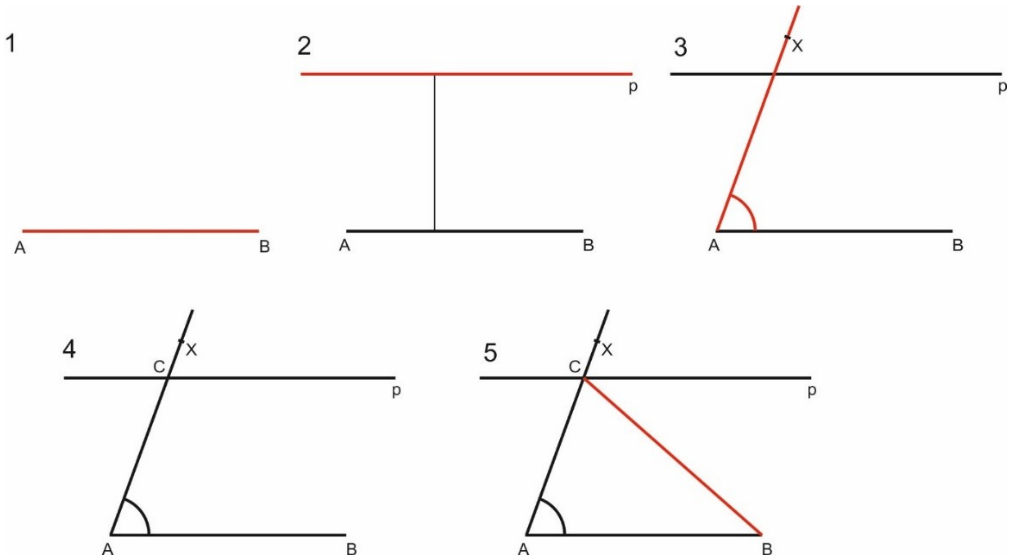
Konstrukce:

1) Narýsujeme úsečku AB; délka úsečky AB je 6 cm. Vybereme jednu polorovinu s hranicí AB, ve které budeme rýsovat.
2) Narýsujeme pomocnou přímku p; přímka p je rovnoběžná s přímkou AB a vzdálenost přímky p od AB jsou 4 cm.
3) Narýsujeme úhel BAX. Velikost úhlu BAX je 70°.
4) Bod C je průsečíkem přímky p a polopřímky AX
5) Narýsujeme trojúhelník ABC.

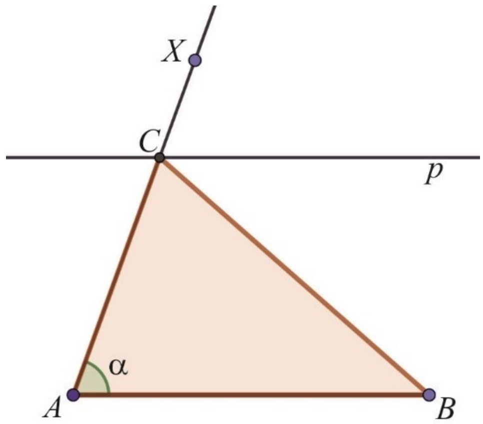
Symbolicky:

1) $AB; |AB| = 6$ cm
2) $p; p|| \leftrightarrow AB \wedge |p \leftrightarrow AB| = 4$ cm
3) $\mapsto AX;\ |\sphericalangle BAX| = \alpha = 70°$
4) $C; C \in p \cap\!\longmapsto AX$
5) ΔABC

Fázová kresba:



Konstrukce:



Úloha má v polorovině určené přímkou AB právě jedno řešení.

Zkouška: Měřením ověříme, že trojúhelník ABC odpovídá zadání.

3 Konstrukce využívající množinu všech bodů s danou vlastností

Množiny všech bodů dané vlastnosti

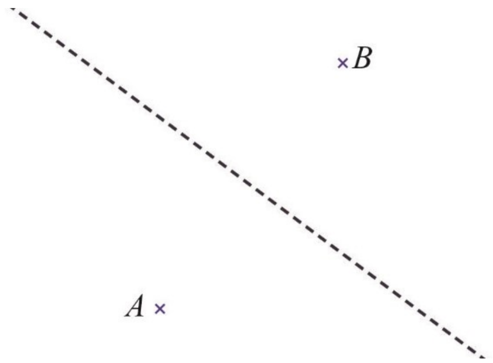
Definice: Množina M je množinou všech bodů s danou vlastností v právě tehdy, když platí:

a) každý bod množiny M má vlastnost v,
b) každý bod, který má vlastnost v, patří množině M.

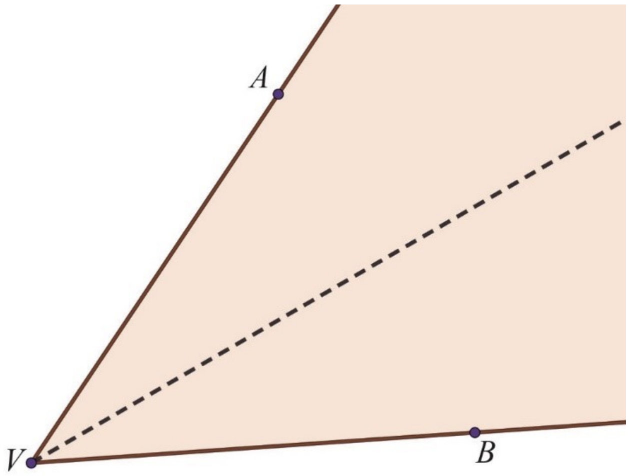
Základní množiny bodů s danou vlastností

Základními množinami bodů s danou vlastností budeme rozumět některé jednoduché a v geometrických úvahách často se vyskytující množiny bodů s danou vlastností. Ve školské geometrii se používají hlavně při řešení konstrukčních úloh a jejich bezpečná znalost je nezbytná. V následujícím textu uvádíme přehled některých základních množin bodů s danou vlastností spolu se symbolikou, kterou budeme pro jejich označení užívat v konstrukčních úlohách.

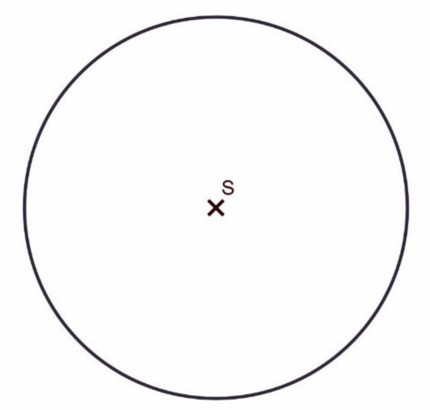
1. Množinou všech bodů roviny, které mají od dvou různých bodů A, B stejnou vzdálenost, je **osa úsečky AB**.
   Symbolicky: $M = \{X \in \rho;\ |AX| = |BX|\}$



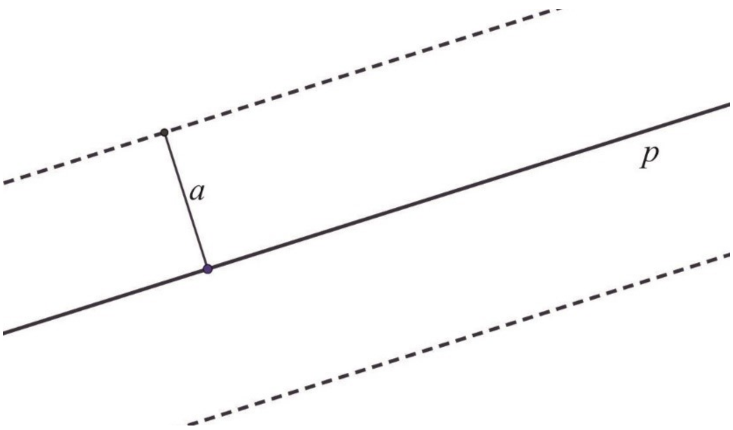
2. Množinou všech bodů konvexního úhlu $\sphericalangle AVB$, které mají stejnou vzdálenost od obou ramen úhlu, je **osa úhlu $\boldsymbol{\sphericalangle AVB}$**.
   Symbolicky: $M = \{X \in \sphericalangle AVB;\ |X \mapsto VA| = |X \mapsto VB|\}$



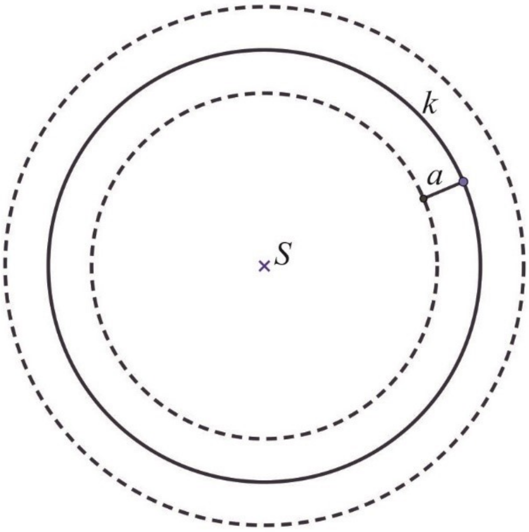
3. Množinou všech bodů roviny, které mají od daného bodu S vzdálenost $r \in R^+$, je **kružnice** se středem S a poloměrem r.
Symbolicky: $M = \{X \in S; |SX| \ = r\} = k(S, r)$



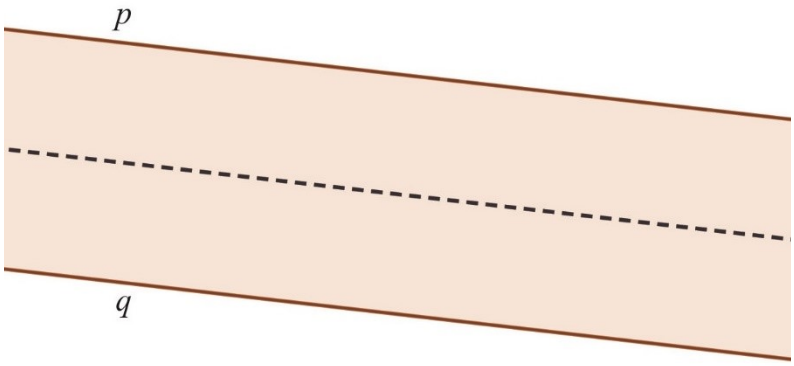
4. Množinou všech bodů roviny, které mají od dané přímky p vzdálenost $a \in R^+$, je **ekvidistanta přímky**, tj. sjednocení dvou rovnoběžek s přímkou p, jejichž vzdálenost od přímky p je a.
Symbolicky: $M = \{X \in \rho;\ |Xp| = a\}$



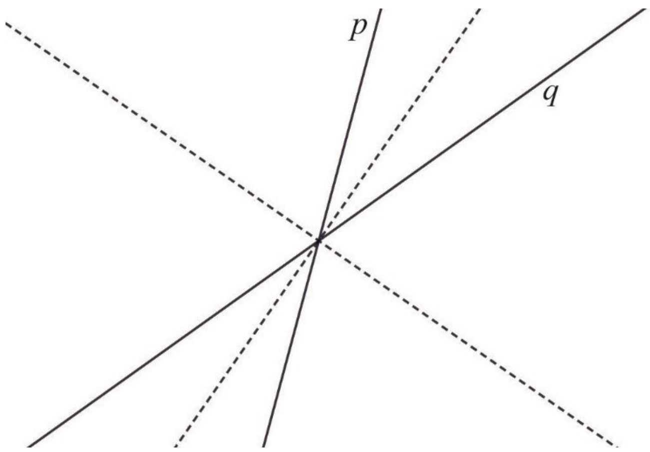
5. Množinou všech bodů roviny, které mají od dané kružnice $k(S, r)$ vzdálenost $a \in R^+$, $0 < a < r$, je **ekvidistanta kružnice $\boldsymbol{k}$** o poloměrech $r - a, r + a$.
Symbolicky: $M = \{X \in \rho;\ |Xk| = a\}$



6. Množinu všech bodů roviny, které mají od dvou daných rovnoběžných přímek p, q stejnou vzdálenost, je **osa rovinného pásu**$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ určeného těmito rovnoběžkami.
   Symbolicky: $M = \{X \in \rho;\ |Xp| = |Xq|\}$

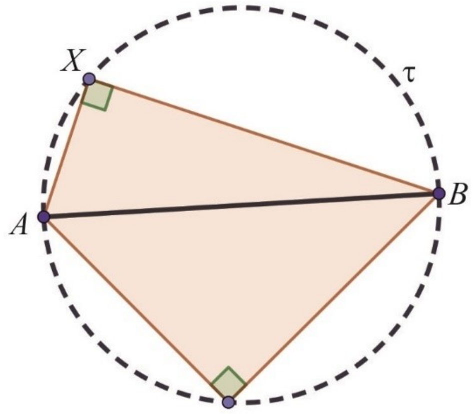


7. Množinou všech bodů roviny, které mají od dvou daných různoběžných přímek p, q stejnou vzdálenost, je **sjednocení os všech úhlů** určených těmito různoběžkami.
   Symbolicky: $M = \{X \in \rho;\ |Xp| = |Xq|\}$

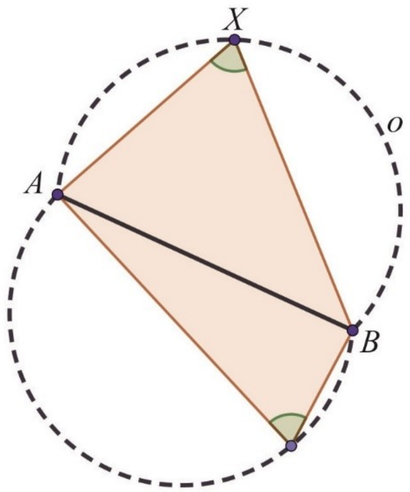


8. Množinou vrcholů všech pravých úhlů v rovině, jejichž ramena procházejí dvěma různými body A, B, je tzv. **Thaletova kružnice s průměrem $\boldsymbol{AB}$**, tj. kružnice s průměrem AB s výjimkou bodů A, B.

Symbolicky: $M = \{X \in \rho;\ |\sphericalangle AXB| = 90°\}$



9. Jsou dány dva různé body A, B a konvexní úhel velikosti α, který není plný, přímý ani nulový. Množinu všech bodů X v rovině, pro které platí, že velikost úhlu AXB je α, je **sjednocení dvou kružnicových oblouků $\boldsymbol{o_1}$, $\boldsymbol{o_2}$** s krajními body A, B (s výjimkou bodů A, B), které jsou souměrně sdružené podle přímky AB.
   Symbolicky: $M = \{X \in \rho;\ |\sphericalangle AXB| = \alpha\}$



3.1 Konstrukce trojúhelníků

Při konstrukci trojúhelníků se setkáváme s těmito dalšími pojmy, které nyní připomeneme:

Výška trojúhelníku je kolmice spuštěná z vrcholu na přímku, která obsahuje protější stranu. Výškou chápeme i úsečku, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a pata kolmice na protější straně, a rovněž velikost této úsečky.

Těžnice trojúhelníku je úsečka, jejíž krajní body jsou vrchol trojúhelníku a střed protější strany.

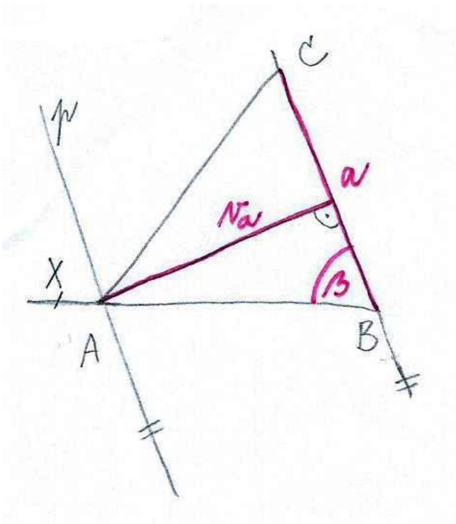
Střední příčka trojúhelníku je úsečka, která spojuje středy dvou stran trojúhelníku.

Kružnice trojúhelníku opsaná je kružnice, která prochází všemi vrcholy trojúhelníku. Její střed je průsečíkem os stran trojúhelníku.

Kružnice trojúhelníku vepsaná je kružnice, která se dotýká všech stran trojúhelníku. Její střed je průsečíkem os vnitřních úhlů trojúhelníku.

Příklad 12. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže je dáno: $v_a = 6\ \mathrm{cm}, a = 7{,}6\ \mathrm{cm}, \beta = 42°$.

Rozbor: Jedná se o nepolohovou[4], konkrétně zadanou úlohu.
Známé body: B, C. Hledaný bod: A.

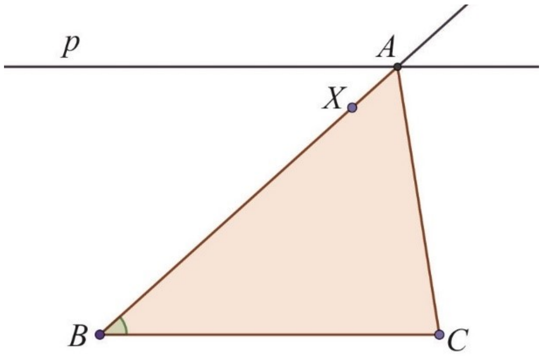


Bod A má od přímky BC vzdálenost 6 cm, leží tedy na přímce p, která je rovnoběžná s přímkou BC a má od ní vzdálenost 6 cm. Bod A zároveň leží na polopřímce BX, kde bod X je bodem polopřímky BX, která svírá se stranou BC úhel o velikosti $\beta = 42°$.

[4] Konstrukci můžeme tedy začít libovolným ze zadaných prvků. Nejjednodušší je v tomto případě začít stranou a.

Konstrukce:

1) BC; $|BC| = 6\ \mathrm{cm}$
2) $p; p \parallel\leftrightarrow BC$ a $|p \leftrightarrow BC| = v_a = 6\ \mathrm{cm}$
3) $\mapsto BX$; $|\sphericalangle CBX| = 42°$
4) $A; A \in p \cap\mapsto BX$
5) trojúhelník ABC

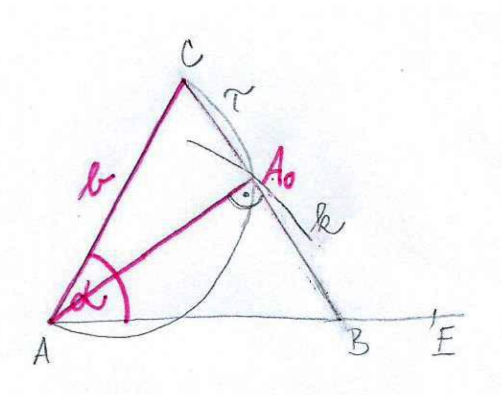


Úloha má jediné řešení v polorovině určené přímkou BC.

Zkouška: Měřením zkontrolujeme velikost prvků α a β a vzdálenost bodu A od přímky BC (sestrojíme kolmici na přímku BC, která prochází bodem A, průsečík s BC označíme P a změříme délku úsečky AP).

Příklad 13. Je dána úsečka $AC, |AC| = 5\ \mathrm{cm}$. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dále dáno $v_a = 4{,}5\ \mathrm{cm}$, $\alpha = 55°$.

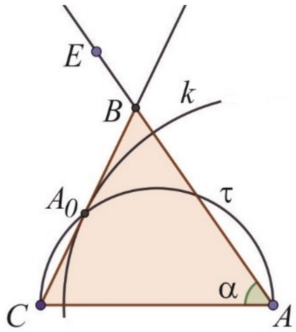
Rozbor: Jedná se o polohovou, konkrétně zadanou úlohu. Vzhledem k tomu, že úloha je polohová, je nutné začít rýsovat úsečkou AC.
Známé body: A, C. Hledaný bod: B.



Bod B leží na polopřímce CA_0 a zároveň na polopřímce AE, která s úsečkou CA svírá úhel α. Bod A_0 leží na Thaletově kružnici nad úsečkou AC a zároveň leží na kružnici k se středem v bodě A a poloměrem v_a.

Konstrukce:

1) $AC;\ |AC| = 5\ \text{cm}$
2) τ (Thaletova kružnice nad AC)
3) $k; k(A, v_a = 4{,}5\ \text{cm})$
4) $A_0;\ A_0 \in \tau \cap k$
5) $\mapsto CA_0$
6) $\mapsto AE;\ |\sphericalangle CAE| = 55°$
7) $B; B \in \mapsto CA_0 \cap \mapsto AE$
8) trojúhelník ABC

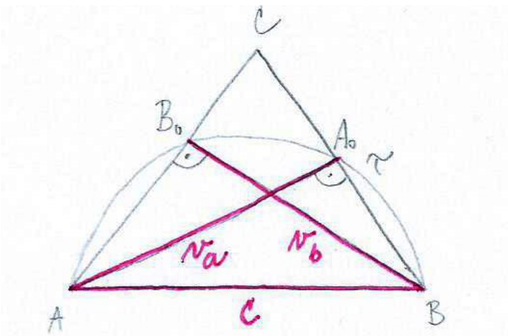


Úloha má v jedné polorovině určené přímkou AC jedno řešení.

Zkouška: Měřením zkontrolujeme, že prvky b a α mají velikost dle zadání, dále že úsečka AA_0 je výška (tj. je kolmá ke straně a) a má velikost dle zadání.

Příklad 14. Je dána úsečka AB. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, znáte-li velikost výšek v_a, v_b.

Rozbor: Jde o polohovou úlohu s jedním neznámým bodem C a dvěma parametry – velikostmi výšek v_a, v_b.
Známé body: A, B. Hledaný bod: C.

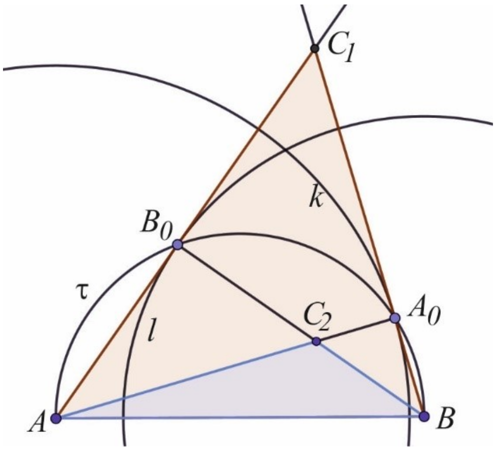


Označme A_0 patu výšky v_a na přímce BC. Bod A_0 leží na Thaletově kružnici s průměrem AB. Zároveň leží na kružnici k, která má střed v bodě A a poloměr v_a.
Označme B_0 patu výšky v_b na přímce AC. Bod B_0 rovněž leží na Thaletově kružnici s průměrem AB. Zároveň leží na kružnici l, která má střed v bodě B a poloměr v_b.
Bod C leží na průsečíku polopřímek AB_0 a BA_0.

Konstrukce:

1) $AB;\ |AB| = c$
2) τ (Thaletova kružnice nad AB)
3) $k; k(A, v_a)$
4) $A_0;\ A_0 \in \tau \cap k$
5) $l; l(B, v_b)$
6) $B_0;\ B_0 \in \tau \cap l$
7) $C; C \in \mapsto AB_0 \cap \mapsto BA_0$
   nebo $C \in \mapsto BB_0 \cap \mapsto AA_0$
8) trojúhelník ABC

Před rýsováním zvolíme velikosti prvků tak, aby úloha měla řešení: $|AB| = 7{,}4\ \mathrm{cm}$, $v_a = 7{,}1\ \mathrm{cm}, v_b = 6{,}0\ \mathrm{cm}$.



Zkouška: Měřením zkontrolujeme, zda velikosti prvků c, v_a, v_b odpovídají námi zvoleným hodnotám a zda úsečky AA_0 a BB_0 jsou výšky trojúhelníku.

Diskuse: Podmínka řešitelnosti úlohy je dána vztahem

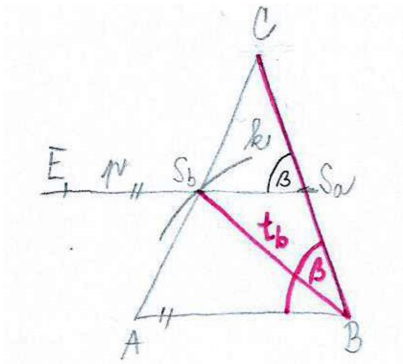
$$[(v_a < c) \wedge (v_b \leq c)] \vee [(v_a \leq c) \wedge (v_b < c)].$$

Je-li $(v_a = v_b < c) \vee [(v_a = c) \wedge (v_b < c)] \vee [(v_b = c) \wedge (v_a < c)]$, existují v rovině dva trojúhelníky požadovaných vlastností souměrné podle přímky AB.

Je-li $(v_b \neq v_a) \wedge (v_a < c) \wedge (v_b < c)$, existují čtyři trojúhelníky požadovaných vlastností, vždy dva a dva souměrné podle přímky AB.

Příklad 15. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li $a = 5\ cm, \beta = 65°, t_b = 4\ cm$.

Rozbor: Známé body: B, C. Hledaný bod: A.



Úlohu můžeme řešit buď doplněním trojúhelníku na rovnoběžník (s využitím středové souměrnosti) nebo pomocí střední příčky. Popíšeme druhou možnost.

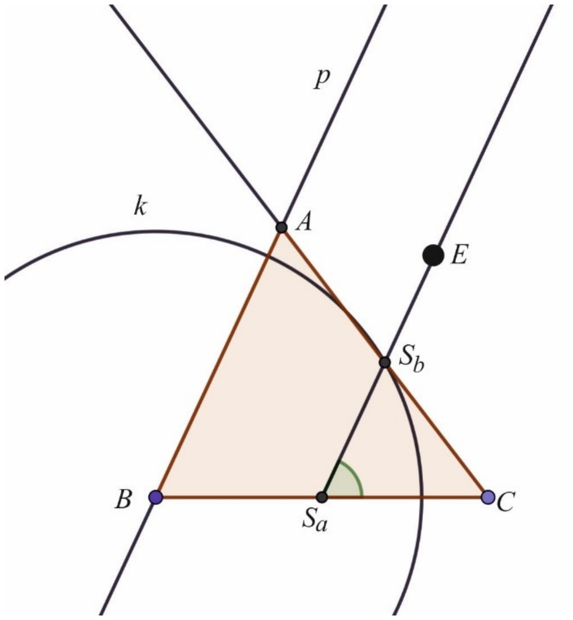
Bod S_a je středem úsečky BC.

Bod S_b je středem strany b. Leží na kružnici k se středem v bodě B a poloměrem t_b. Zároveň leží na polopřímce S_aE, která svírá s úsečkou BC úhel β.

Bod A leží na polopřímce CS_b a na přímce p, která je rovnoběžná s přímkou S_aS_b a prochází bodem B.

Konstrukce:

1) $BC;\ |BC| = a = 5\ \text{cm}$
2) $S_a;\ S_a \in BC$ a $BS_a \cong S_aC$
3) $\mapsto S_aE;\ |\sphericalangle CS_aE| = 65°$
4) $k; k(B, t_b = 4\ \text{cm})$
5) $S_b; S_b \in \mapsto S_aE \cap k$
6) $\mapsto CS_b$
7) $p; B \in p$ a $p \parallel \mapsto S_aE$
8) $A; A \in p \cap \mapsto CS_b$
9) trojúhelník ABC

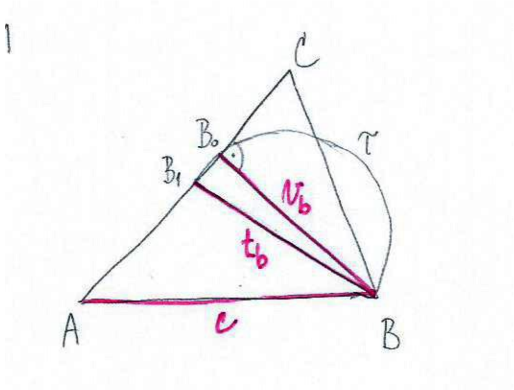


Úloha má v polorovině určené přímkou BC jedno řešení.

Zkouška: Měřením ověříme, zda zadané prvky odpovídají zadání.

Příklad 16. Je dána úsečka BB_1, $|BB_1| = 7\ \mathrm{cm}$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je BB_1 těžnicí t_b a pro které platí $v_b = 6\ \mathrm{cm}, c = 8\ \mathrm{cm}$.

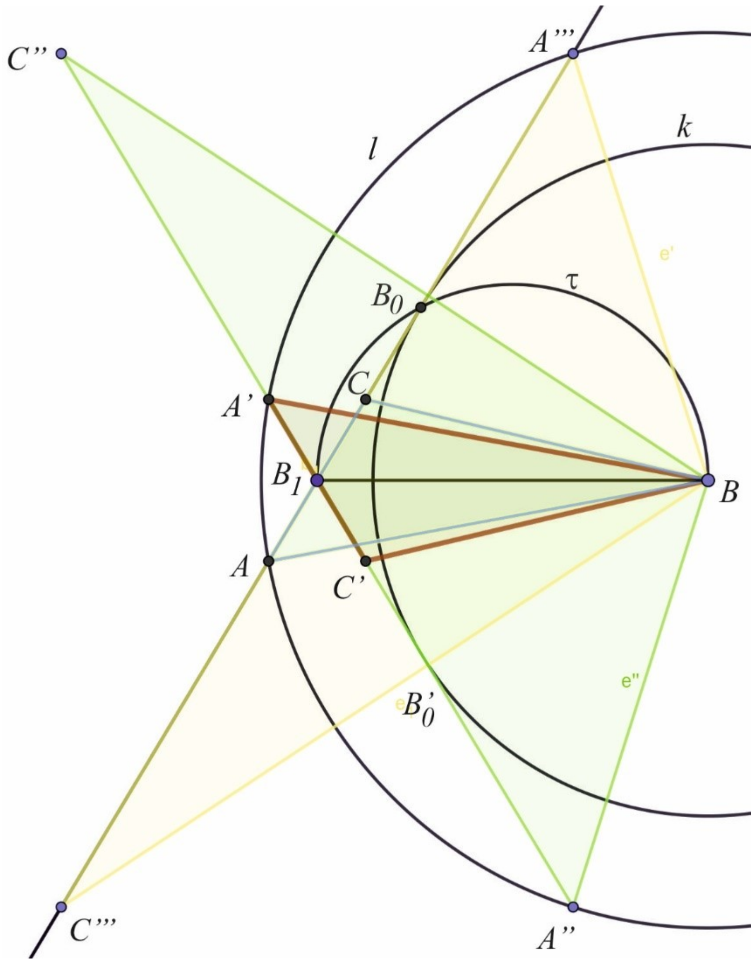
Rozbor: Jedná se o polohovou, konkrétně zadanou úlohu.
Známé body: B, B_1. Hledané body: A, C.



Bod A leží na polopřímce B_0B_1 a zároveň na kružnici l, která má střed v bodě B a poloměr c.
Bod B_0 leží na Thaletově kružnici nad úsečkou BB_1 a zároveň na kružnici k, která má střed v bodě B a poloměr v_b.
Bod C leží na polopřímce AB_0 a platí $AB_1 \cong B_1C$.

Konstrukce:

1) $BB_1;\ |BB_1| = t_b = 7\ \mathrm{cm}$
2) τ (Thaletova kružnice nad úsečkou BB_1)
3) $k; k(B, v_b = 6\ \mathrm{cm})$
4) $B_0;\ B_0 \in \tau \cap k$
5) $\leftrightarrow B_0B_1$
6) $l; l(B, c = 8\ \mathrm{cm})$
7) $A; A \in\leftrightarrow B_0B_1 \cap l$
8) $C; C \in\leftrightarrow AB_0$ a $AB_1 \cong B_1C$
9) trojúhelník ABC

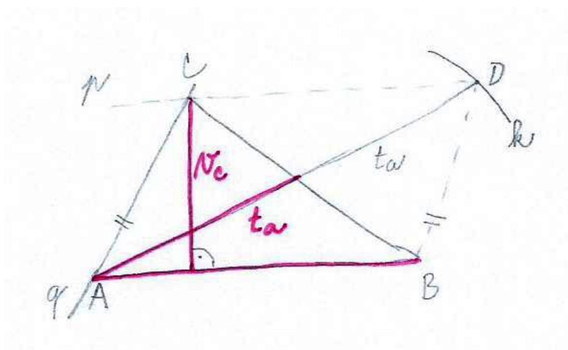


Úloha má v rovině čtyři řešení: trojúhelníky ABC, $A'BC'$, $A''BC''$ a $A'''BC'''$.

Zkouška: Měřením zkontrolujeme, zda prvky t_b, v_b, c odpovídají zadání a dále, zda bod B_1 je středem úsečky AC a že úsečka BB_0 je výškou na stranu b.

Příklad 17. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $c = 5{,}5 \text{ cm}, t_a = 3 \text{ cm}, v_c = 3 \text{ cm}$.

Rozbor: Známé body: A, B. Hledaný bod: C. Trojúhelník ABC sestrojíme pomocí rovnoběžníku $ABDC$, kde bod D je středově souměrný podle středu strany a.

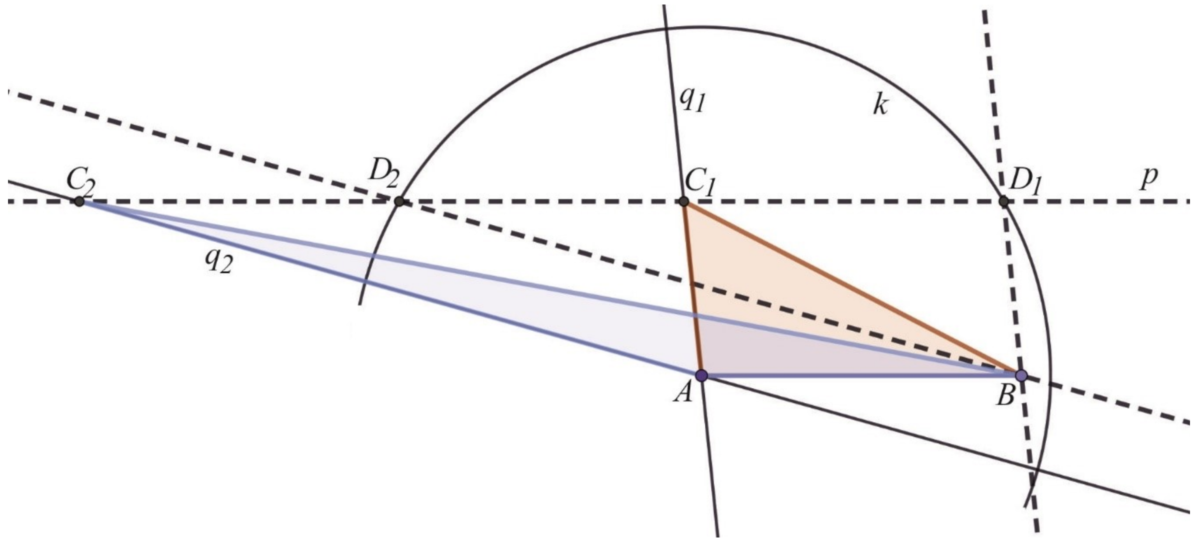


Trojúhelník doplníme na rovnoběžník $ABDC$. Bod D leží na kružnici k, která má střed v bodě A a poloměr $2t_a$, a zároveň leží na přímce p, která je rovnoběžná s přímkou AB a její vzdálenost od přímky AB je $v_c = 3$ cm. Bod C leží na přímce p a zároveň na přímce q, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou BD.

Úlohu by bylo možné také řešit využitím středové souměrnosti. Pokud bychom sestrojili bod S_a (střed strany a), zobrazili bychom vrchol B do vrcholu D ve středové souměrnosti se středem S_a.

Konstrukce:

1) $AB, |AB| = c = 5{,}5$ cm
2) $p; p \parallel\leftrightarrow AB$ ve vzdálenosti $v_c = 3$ cm
3) $k; k(A, 2t_a = 6\text{ cm})$
4) $D; D \in p \cap k$
5) $q; q \parallel BD$ a $A \in q$
6) $C; C \in p \cap q$
7) trojúhelník ABC

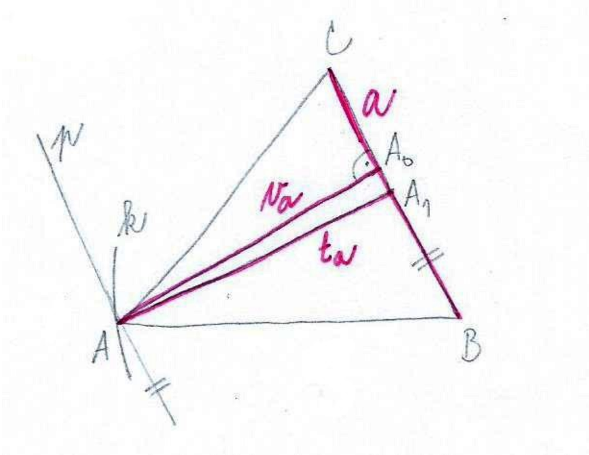


Úloha má dvě řešení v polorovině dané přímkou AB.

Zkouška: Měřením ověříme, že prvky c a v_c mají zadanou velikost. Pro těžnici t_a je nutné nyní sestrojit úsečku AD, bod S_a, ověřit, že je středem strany a, a měřením ověřit délku úsečky AS_a.

Příklad 18. Je dána úsečka BC. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, jestliže dále znáte v_a, t_a.

Rozbor: Jedná se o polohovou úlohu se dvěma parametry, v_a a t_a.
Známé body: B, C. Hledaný bod: A.

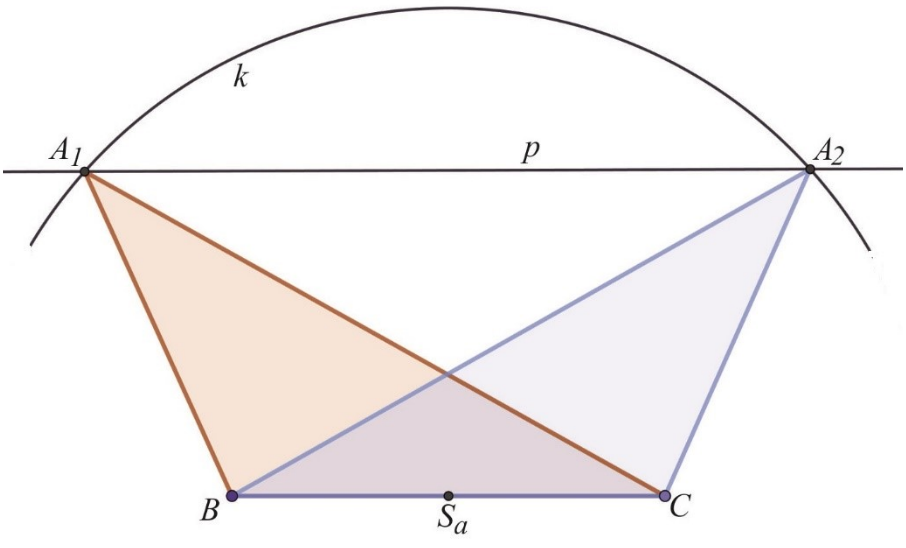


Bod A_1 je středem úsečky BC.
Bod A leží na přímce p, která je rovnoběžná s přímkou BC a má od ní vzdálenost v_a. Zároveň leží na kružnici k, která má střed v bodě A_1 a poloměr t_a.

Konstrukce:[5]

1) BC
2) S_A; $S_A \in BC$ a $BS_A \cong S_AC$
3) $k; k(S_A, t_a)$
4) $p; p \parallel\leftrightarrow BC$ a $|p \leftrightarrow BC| = v_a$
5) $A; A \in k \cap p$
6) trojúhelník ABC

Zvolíme velikosti prvků: $a = 8\ cm, t_a = 9\ cm, v_a = 6\ cm$.



Úloha má dvě řešení v polorovině určené přímkou BC.

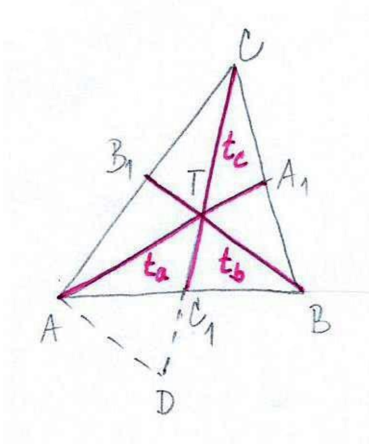
[5] Je-li úloha obecně zadaná, píšeme zápis konstrukce obecně a pro konstrukci volíme velikosti prvků tak, aby úloha měla řešení.

Zkouška: Měřením ověříme, že prvky a a t_a odpovídají zvoleným rozměrům. U výšky v_a musíme nyní sestrojit patu kolmice na stranu BC a ověřit její velikost.

Diskuse: Úloha je řešitelná tehdy, když $t_a \geq v_a$. Úloha má jedno řešení v polorovině, je-li $t_a = v_a$, a dvě řešení v polorovině, je-li $t_a > v_a$.

Příklad 19. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno t_a, t_b, t_c.

Rozbor: Známé body: A, T. Hledané body: B, C.



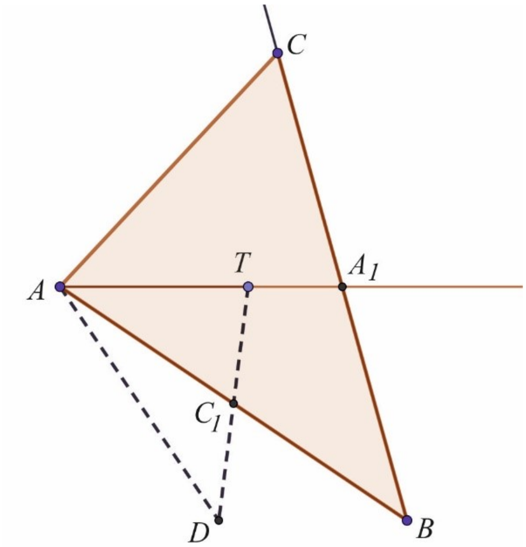
Trojúhelník ABC sestrojíme pomocí trojúhelníku ADT, jehož strany mají délku $\frac{2}{3}$ délek těžnic. Využijeme přitom poznatku, že těžiště dělí těžnici v poměru $2 : 1$. Dále využijeme poznatku, že rovnoběžník je středově souměrný útvar, jehož protější strany jsou shodné.

Bod D je vrcholem trojúhelníku ADT. (Sestrojíme podle věty sss.)
Bod C_1 je středem úsečky DT.
Bod B leží na polopřímce AC_1 ve vzdálenosti $|AC_1|$ od bodu C_1. (Lze také získat zobrazením bodu A ve středové souměrnosti se středem C_1.)
Bod A_1 leží na polopřímce AT ve vzdálenosti t_a od bodu A.
Bod C leží na polopřímce BA_1 a zároveň na polopřímce DT. (Lze také získat zobrazením bodu B ve středové souměrnosti se středem A_1.)

Konstrukce:

1) $AT;\ |AT| = \frac{2}{3}t_a$
2) $D; D$ je vrcholem trojúhelníku $ADT, |AD| = \frac{2}{3}t_b, |TD| = \frac{2}{3}t_c$
3) $C_1; C_1 \in DT$ a $DC_1 \cong C_1T$
4) $B; B \in\longmapsto AC_1$ a $AC_1 \cong C_1B$
5) $A_1;\ A_1 \in\longmapsto AT$ a $|AA_1| = t_a$
6) $C; C \in\longmapsto BA_1$ a $BA_1 \cong A_1C$
7) trojúhelník ABC

Zvolíme velikosti těžnic: $t_a = 6\text{ cm}, t_b = 9\text{ cm}, t_c = 7{,}5\text{ cm}$.



Úloha má v rovině právě jedno řešení.

Zkouška: Sestrojíme střed úsečky AC a ověříme, zda úsečky AA_1, BB_1, CC_1 splňují vlastnosti těžnice a zda odpovídají zvoleným velikostem.

Diskuse: Úloha je řešitelná tehdy, když délky stran trojúhelníku ADT splňují trojúhelníkovou nerovnost, tj. po úpravě např. $|t_a - t_c| < t_b < t_a + t_c$.

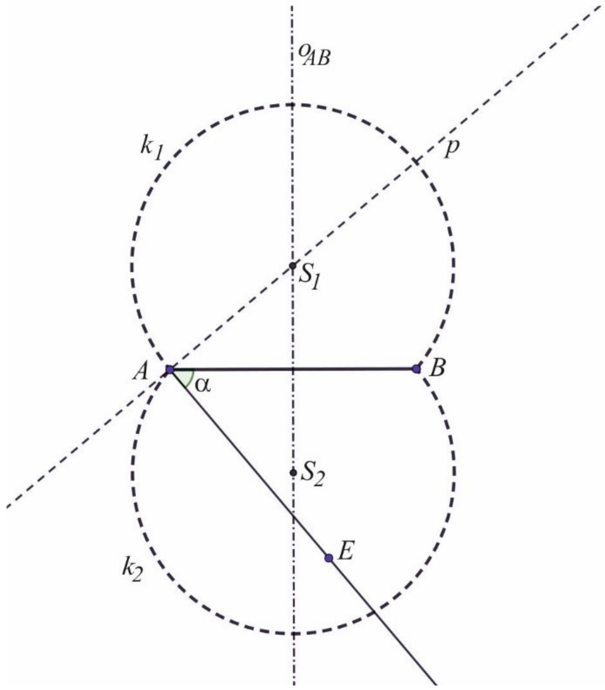
Příklad 20. Sestrojte množinu vrcholů všech úhlů o velikosti α, jejichž ramena procházejí body AB.

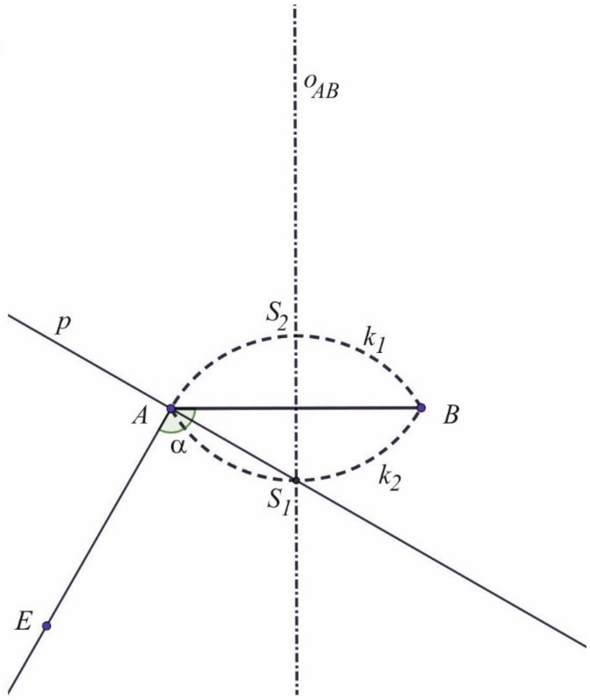
Rozbor: Využíváme věty o obvodových úhlech v kružnici: Všechny obvodové úhly příslušející témuž oblouku jsou shodné. Pro $\alpha = 90°$ je množinou vrcholů všech úhlů o velikosti α Thaletova kružnice. Pro $\alpha < 90°$ jsou to dva větší kružnicové oblouky AB, pro $90° < \alpha < 180°$ dva menší kružnicové oblouky AB, jimž přísluší obvodový úhel α (kromě bodů A, B).

Konstrukce dané množiny bodů probíhá na základě vlastností obvodového a úsekového úhlu příslušejících témuž oblouku kružnice. Tato konstrukční úloha je v dalších konstrukcích považována za základní konstrukci.

Konstrukce:

1) AB
2) $\mapsto AE;\ |\sphericalangle BAE| = \alpha$
3) $p; A \in p$ a $p \perp\leftrightarrow AE$
4) o_{AB}
5) $S; S \in p \cap o$
6) $k; k(S, |AS|), k = \{X \in \rho;\ |\sphericalangle AXB| = \alpha\}$



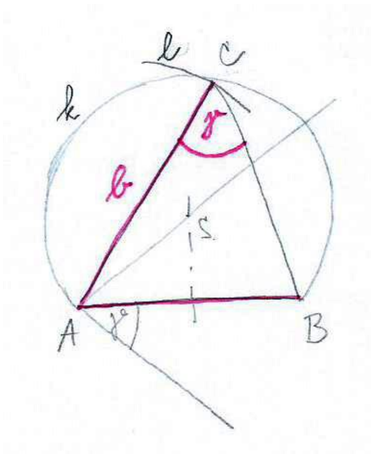


Příklad 21. Je dána úsečka AB, $|AB| = 6$ cm. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dále dáno: $b = 5\text{ cm}, \gamma = 43°$.

Rozbor: Úloha je polohová s jedním neznámým bodem C.

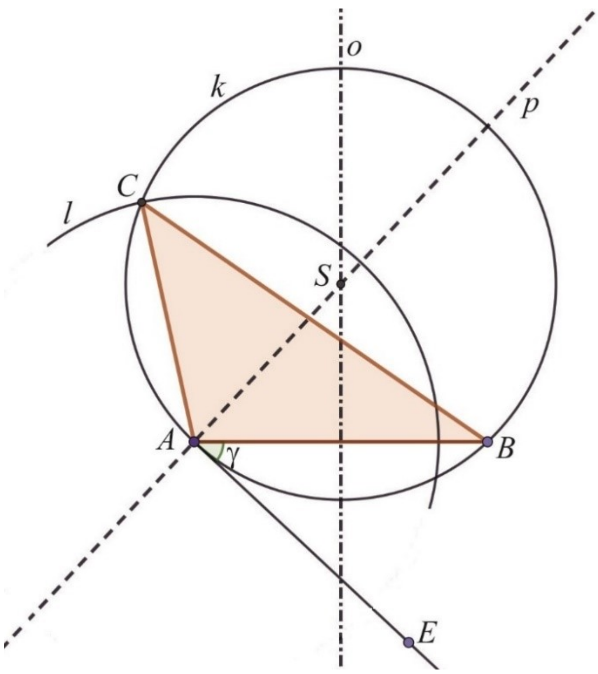
Známé body: A, B. Hledaný bod: C.

Bod C leží na oblouku k, který je množinou vrcholů všech úhlů o velikosti $\gamma = 43°$. Zároveň leží na kružnici l, která má střed v bodě A a poloměr $b = 5$ cm.



Konstrukce:

1) AB; $|AB| = 6\text{ cm}$
2) $k; k = \{X \in \rho;\ |\sphericalangle AXB| = \gamma = 43°\}$
3) $l; l(A, b = 5\text{ cm})$
4) $C; C \in k \cap l$
5) trojúhelník ABC

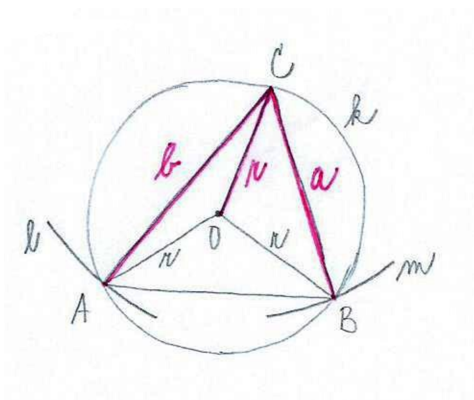


Úloha má právě jedno řešení v jedné polorovině určené přímkou AB.

Zkouška: Zkoušku správnosti provedeme měřením.

Příklad 22. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a = 5\text{ cm}, b = 6{,}5\text{ cm}, r = 4\text{ cm}$ (poloměr kružnice opsané).

Rozbor: Jedná se o nepolohovou úlohu, proto si můžeme vybrat, kterým prvkem začneme. Je možné postupovat tak, že nejdříve sestrojíme trojúhelník AOC podle věty sss, poté kružnici se středem v bodě O a poloměrem r, na které najdeme vrchol B.
Druhá možnost je začít umístěním bodů O, C tak, že jejich vzdálenost je r, a pokračovat kružnicí $k(O, r)$. Vrcholy A a B najdeme jako průsečíky dvou kružnicových oblouků. Vybereme druhou možnost.

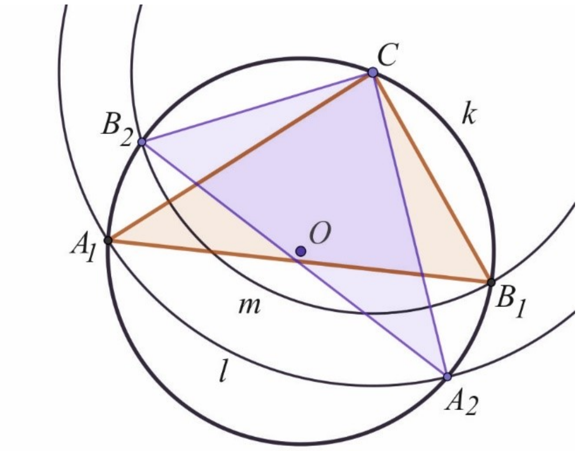


Známé body: O, C. Hledané body: A, B.

Bod A leží na kružnici k a zároveň leží na kružnici se středem v bodě C a poloměrem b.
Bod B leží na kružnici k a zároveň na kružnici se středem v bodě C a poloměrem a.

Konstrukce:

1) $O, C;\ |OC| = 4\ \mathrm{cm}$
2) $k; k(O, |OC|)$
3) $l; l(C, b = 6{,}5\ \mathrm{cm})$
4) $A; A \in k \cap l$
5) $m; m(C, a = 5\ \mathrm{cm})$
6) $B; B \in k \cap m$
7) trojúhelník ABC

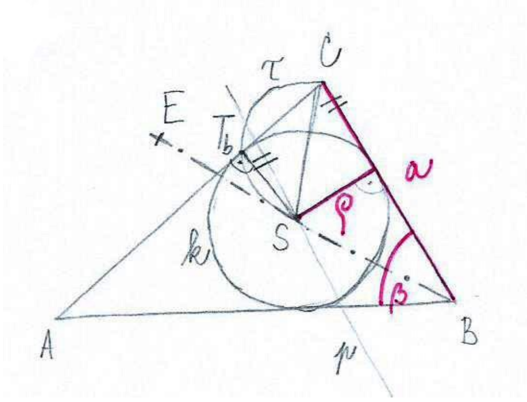


Úloha má v rovině po umístění bodů O, C čtyři řešení, a to A_1, B_1C, A_2B_2C, A_1B_2C a A_2B_1C.

Zkouška: Měřením ověříme velikost poloměrů AO, BO, CO a dvou zadaných stran.

Příklad 23. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a = 7{,}5\ \mathrm{cm}, \beta = 62°, \rho = 2\ \mathrm{cm}$ (poloměr kružnice vepsané).

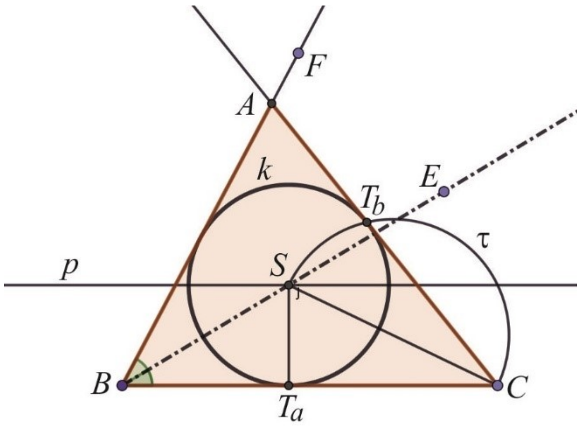
Rozbor: Známé body: B, C. Hledaný bod: A. Využijeme toho, že střed kružnice trojúhelníku vepsané je průsečík os vnitřních úhlů.



Bod S leží na přímce p, která je rovnoběžná s přímkou BC ve vzdálenosti ρ od BC. Zároveň leží na ose úhlu CBF – polopřímce BE.
Bod T_b leží na Thaletově kružnici nad úsečkou SC. Zároveň leží na kružnici k.
Bod A leží na polopřímce CT_b a zároveň na polopřímce BF, která svírá s úsečkou BC úhel β.

Konstrukce:

1) $BC, |BC| = a = 7{,}5\ \text{cm}$
2) $p; p \parallel BC$ a $|pBC| = \rho = 2\ \text{cm}$
3) $\mapsto BE$; osa úhlu CBF
4) $S; S \in p \cap \mapsto BE$
5) $k; k(S, \rho)$
6) τ (Thaletova kružnice nad úsečkou SC)
7) $T_b; T_b \in k \cap \tau$
8) $\mapsto CT_b$
9) $\mapsto BF;\ |\sphericalangle CBF| = \beta = 62°$
10) $A; A \in \mapsto CT_b \cap \mapsto BF$
11) trojúhelník ABC



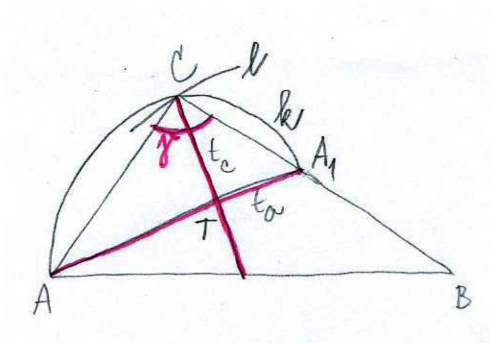
Úloha má v polorovině určené přímkou BC jedno řešení.

Zkouška: Zkoušku správnosti provedeme změřením zadaných prvků.

Příklad 24. Je dána úsečka $t_a = 5$ cm. Narýsujte všechny trojúhelníky ABC, jestliže dále znáte: $t_c = 6\ \text{cm}, \gamma = 60°$.

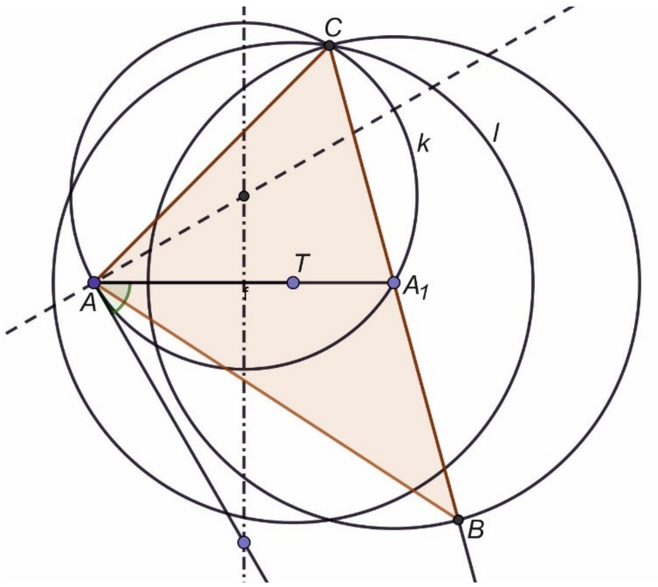
Rozbor: Známé body: A, A_1. Hledané body: C, B.

Bod T rozděluje úsečku AA_1 v poměru 2 : 1. Bod C leží na oblouku k, z něhož je vidět úsečku AA_1 pod úhlem γ, a zároveň na kružnici $l\left(T, \frac{2}{3}t_c\right)$.
Bod B leží na polopřímce CA_1 a platí $CA_1 \cong A_1T$.



Konstrukce:

1) $AA_1;\ |AA_1| = t_a = 5$ cm
2) $T; T \in AA_1$ a $|AT| = 2|TA_1|$
3) $k; k = \{X \in \rho;\ |\sphericalangle ACA_1| = \gamma = 60°\}$
4) $l; l\left(T, \frac{2}{3}t_c\right)$
5) $C; C \in k \cap l$
6) $B; B \in \mapsto CA_1$ a $CA_1 \cong A_1T$
7) $\triangle\ ABC$



Úloha má v dané rovině dvě řešení.

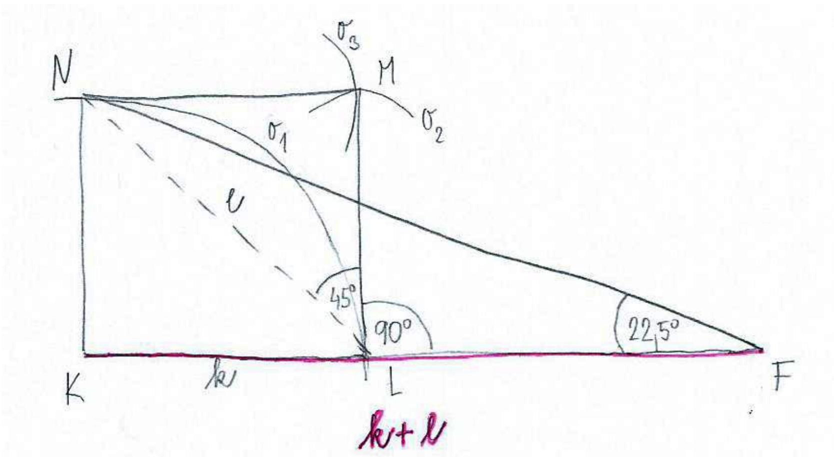
Zkouška: Měřením zadaných prvků a rovněž ověřením, že úsečky t_a a t_c jsou těžnice, se přesvědčíme o správnosti konstrukce.

3.2 Konstrukce čtyřúhelníků

Příklad 25. Sestrojte čtverec $KLMN$, když součet délky jeho strany a délky jeho úhlopříčky je 12 cm ($k + e = 12$ cm).

Rozbor: Známé body: K, F; $|KF| = k + e$. Hledané body: N, L, M.

Konstrukci začneme sestrojením pravoúhlého trojúhelníku KFN, jehož úhel u vrcholu F určíme z trojúhelníku FNL, který je rovnoramenný a snadno lze (konstrukčně) určit velikosti jeho vnitřních úhlů 22,5°, 22,5°, 135°.[6]



Bod N je vrcholem pravoúhlého trojúhelníku KFN s pravým úhlem u vrcholu K, který se sestrojí podle věty usu.

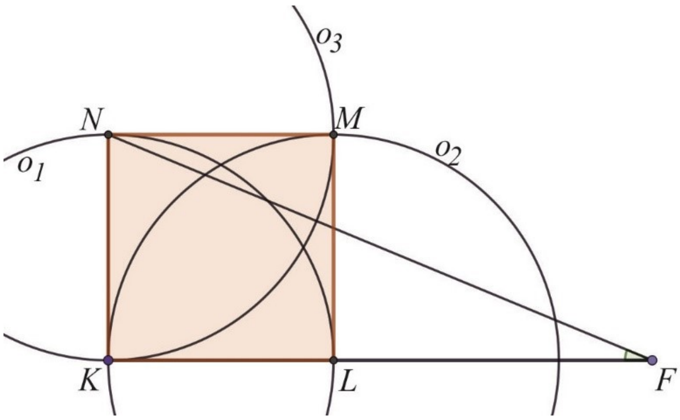
Bod L leží na kružnici o_1, která má střed v bodě K a poloměr KN, a zároveň leží na úsečce KF.

Bod M je průsečíkem kružnic $o_2(L, KN)$ a $o_3(N, KN)$.

Konstrukce:

1) KF; $|KF| = k + e$
2) trojúhelník KFN (věta usu: $|KF| = 12\ cm, |\sphericalangle FKN| = 90°, |\sphericalangle KFN| = 22{,}5°$)
3) o_1; $o_1(K, KN)$
4) L; $L \in o_1 \cap KF$
5) o_2, o_3; $o_2(L, |KN|)$, $o_3(N, |KN|)$
6) M; $M \in o_1 \cap o_2$
7) čtverec $KLMN$

[6] Tyto „výpočty" by měly probíhat konstrukčně. Můžeme sestrojit libovolný čtverec a pomocí něj sestrojit hledané úhly.

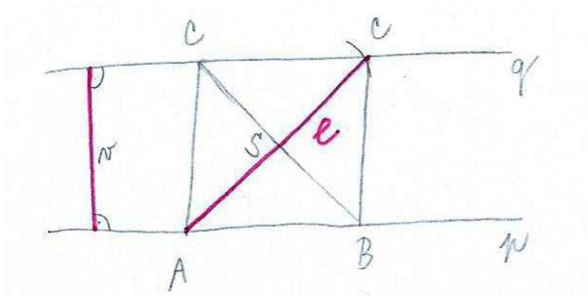


Zkouška: Zkonstruujeme úsečku $k + l$ a měřením ověříme její délku. Zkontrolujeme vlastnosti čtverce, tedy shodnost všech stran a kolmost sousedních stran.

Příklad 26. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, jestliže $e = 8\ \mathrm{cm}, v = 5\ \mathrm{cm}$ (e je úhlopříčka AC).

Rozbor: Známý bod: A, ležící na přímce p. Hledané body: C, B, D.

Při konstrukci využijeme poznatků, že kosočtverec má protější strany rovnoběžné, všechny strany shodné a že jeho úhlopříčky jsou na sebe kolmé.

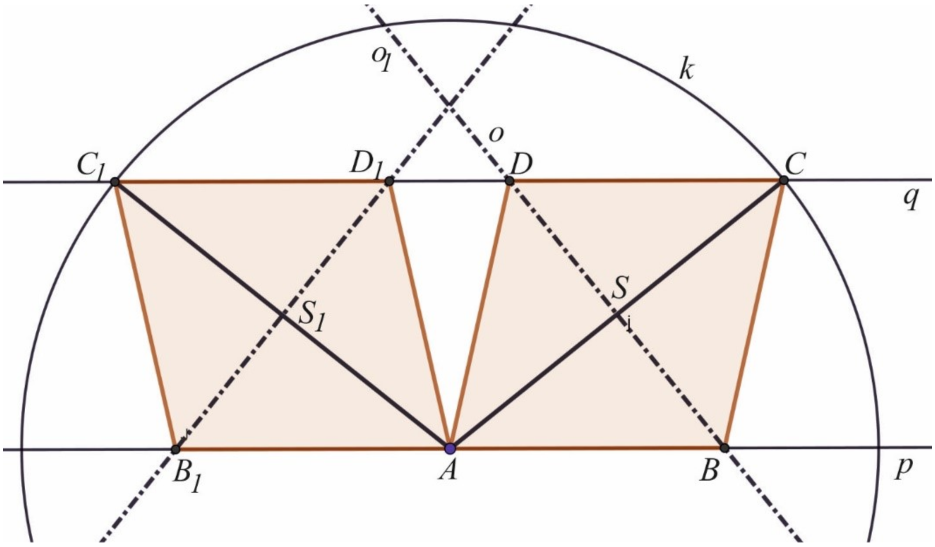


Přímka q je rovnoběžná s přímkou p ve vzdálenosti v.
Bod C leží na přímce q a zároveň na kružnici k, která má střed v bodě A a poloměr e.
Bod S je střed úsečky AC.
Bod B leží na přímce p a zároveň na přímce r, která je kolmá k přímce AC a prochází bodem S (je to osa úsečky AC).
Bod D leží na přímce q a zároveň na přímce r.

Konstrukce:

1) $A, p;\ A \in p$
2) $q; p \parallel q$ a $|pq| = v = 5\ \mathrm{cm}$
3) $k; k(A, e = 8\ \mathrm{cm})$
4) $C; C \in q \cap k$

5) $S; S \in AC$ a $AS \cong SC$
6) o (osa úsečky AC)
7) $B; B \in p \cap o$
8) $D; D \in q \cap o$
9) kosočtverec $ABCD$



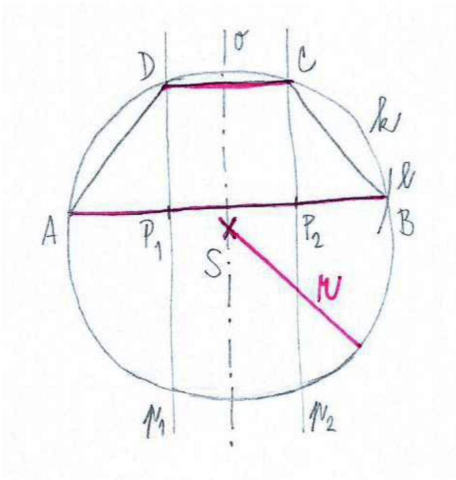
V polorovině určené přímkou p má konstrukční úloha dvě řešení, neboť kružnice k se s přímkou p protíná ve dvou bodech.

Zkouška: Měřením se přesvědčíme, že sestrojený útvar je kosočtverec (má čtyři shodné strany) a že zadané prvky odpovídají velikostí.

Příklad 27. Je dána kružnice $k(S, 4\text{ cm})$. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ vepsaný do této kružnice, je-li dále $a = 7\text{ cm}, c = 2\text{ cm}$.

Využijeme poznatku, že jestliže má lichoběžník opsanou kružnici, je rovnoramenný. Dále platí, že rovnoramenný lichoběžník má jednu osu souměrnosti, která prochází středy jeho základen.

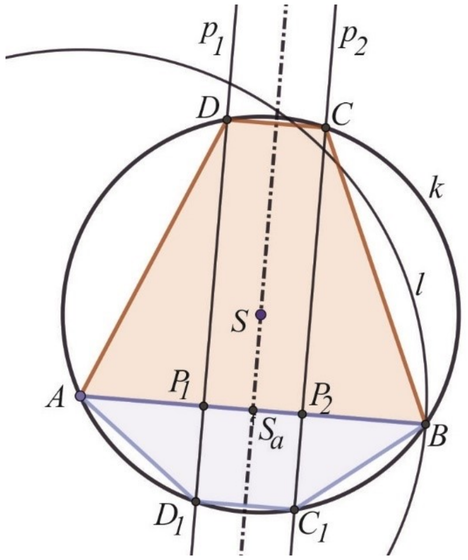
Rozbor: Daný prvek: $k(S, 4\ \mathrm{cm})$. Hledané body: A, B, C, D.



1) Bod A volíme na kružnici k libovolně.
2) Bod B leží na kružnici k a zároveň na kružnici l, která má střed v bodě A a poloměr $a = 7\ \mathrm{cm}$.
3) Bod S_a je středem úsečky AB.
4) Body P_1, P_2 leží na úsečce AB ve vzdálenosti 1 cm od S_a.
5) Body C, D leží po řadě na přímkách p_2, p_1, které prochází body P_2, P_1 a jsou kolmé na AB.

Konstrukce:

1) $k; k(S, 4\ \mathrm{cm})$
2) $A; A \in k$ libovolně
3) $l; l(A, a = 7\ \mathrm{cm})$
4) $B; B \in k \cap l$
5) $P_1, P_2; P_1 \in AB, P_2 \in AB$ a $|SP_1| = |SP_2| = 1\ \mathrm{cm}$
6) $p_1, p_2; p_1 \perp AB, p_2 \perp AB$ a $P_1 \in p_1, P_2 \in p_2$
7) $C, D; C \in p_2 \cap k, D \in p_1 \cap k$
8) lichoběžník $ABCD$

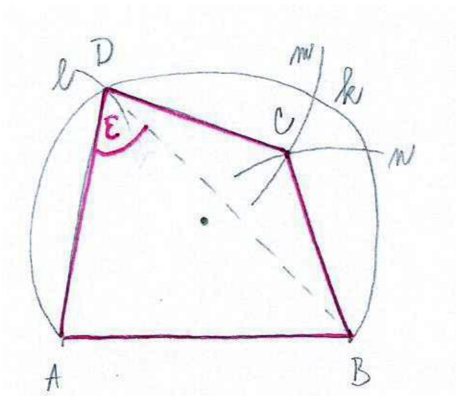


Úloha má při volbě bodu A v rovině čtyři řešení, protože kružnice k a l se protínají ve dvou bodech.

Zkouška: Měřením ověříme velikosti zadaných prvků a ověříme vlastnosti lichoběžníku.

Příklad 28. Je dána úsečka AB, $|AB| = 7\text{ cm}$. Narýsujte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dále dáno: $d = 6\text{ cm}, |\sphericalangle ADB| = 60°, b = 4{,}5\text{ cm}, c = 5\text{ cm}$.

Rozbor: Známé body: A, B. Hledané body: D, C.

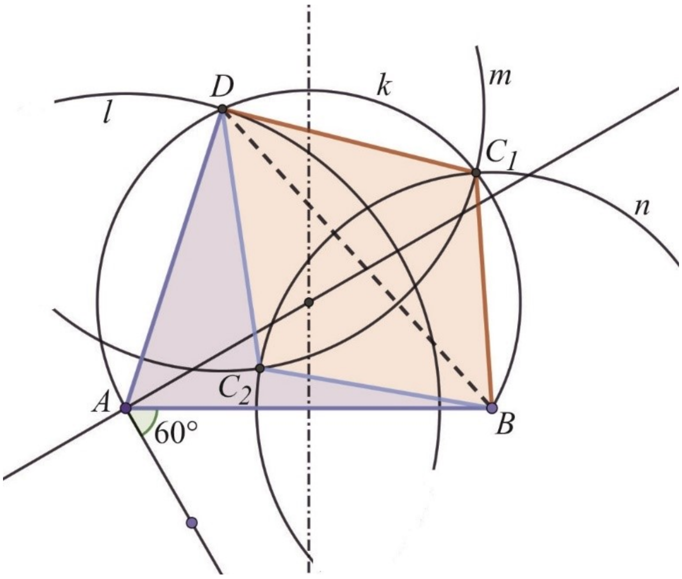


1) Bod D leží na kružnici l, která má střed v bodě A a poloměr $d = 6$ cm, a zároveň leží na oblouku, z něhož je vidět úsečku AB pod úhlem ADB, $|\sphericalangle ADB| = 60°$.
2) Bod C leží na kružnici m se středem v bodě D a poloměrem $c = 5$ cm a zároveň na kružnici n se středem v bodě B a poloměrem b.

Konstrukce:

1) AB; $|AB| = 7\text{ cm}$
2) $k; k = \{X \in \rho: |\sphericalangle AXB| = \varepsilon = 60°\}$
3) $l; l(A, d = 6\text{ cm})$

4) $D; D \in k \cap l$
5) $m; m(D, c = 5 \text{ cm})$
6) $n; n(B, b = 4{,}5 \text{ cm})$
7) $C; C \in m \cap n$
8) čtyřúhelník $ABCD$



Úloha má v jedné polorovině určené přímkou AB dvě řešení, protože kružnice m, n se protínají ve dvou bodech. Jeden čtyřúhelník je konvexní a druhý nekonvexní.

Zkouška: Měřením ověříme, že sestrojený útvar odpovídá zadání.

4 Konstrukční úlohy využívající shodných zobrazení

Definice: Shodným zobrazením v rovině nazýváme takové zobrazení v rovině, které každému bodu X roviny přiřazuje jistý bod X' téže roviny, přičemž pro libovolné body X, Y a jejich obrazy X', Y' platí $XY \cong X'Y'$.

Pro shodná zobrazení v rovině platí:

1. Vzdálenost kterýchkoli dvou bodů v rovině se rovná vzdálenosti jejich obrazů, tj. shodné zobrazení v rovině zachovává vzdálenost libovolných dvou bodů.
2. Každé shodné zobrazení v rovině je prosté.
3. Zobrazení inverzní k danému shodnému zobrazení je opět shodné zobrazení.
4. Ve shodném zobrazení v rovině je obrazem

a) úsečky AB úsečka $A'B'$ shodná s úsečkou AB,
b) polopřímky AB polopřímka $A'B'$; obrazem přímky AB je přímka $A'B'$,
c) poloroviny pA polorovina $p'A'$,
d) úhlu AVB úhel $A'V'B'$ shodný s úhlem AVB,
e) dvojice rovnoběžných přímek opět dvojice rovnoběžných přímek.

5. Složením dvou shodných zobrazení v rovině vznikne opět shodné zobrazení v rovině.

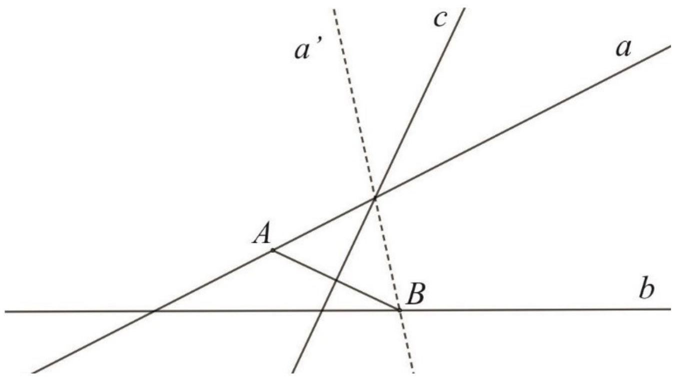
Základní druhy shodných zobrazení v rovině jsou: **identita**, **osová souměrnost**, **středová souměrnost, otočení** (**rotace**), **posunutí** (**translace**).

Příklad 29. Jsou dány tři navzájem různé přímky a, b, c. Na přímce a sestrojte bod A tak, aby bod B byl k němu souměrný podle přímky c a ležel na přímce b.

Rozbor: Jedná se o polohovou úlohu se dvěma neznámými body A, B, které si odpovídají jako vzor a obraz v **osové souměrnosti** s osou c. Přitom bod A má ležet na přímce a, bod B na přímce b. Protože nevíme, který bod přímky a je hledaným bodem A, zobrazíme v osové souměrnosti s osou c „všechny body přímky a“, tj. určíme obraz a' přímky a v této souměrnosti. Bod B je pak průsečíkem přímek b a a'. Bod A sestrojíme jako bod souměrně sdružený s bodem B podle přímky c.

Konstrukce:

1) $a, b, c; a \neq b \neq c$
2) $a'; O(c): a \to a'$
3) $B; B \in a' \cap b$
4) $A; O(c): B \to A$

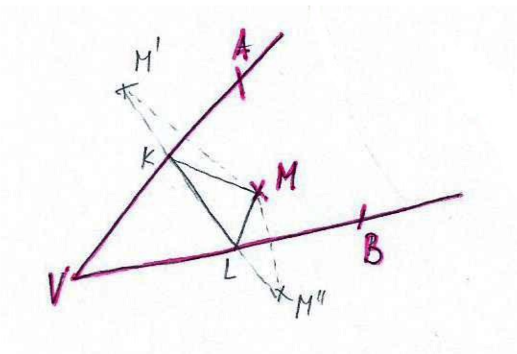


Zkouška: Kružítkem a pravítkem s ryskou zkontrolujeme, že body A, B jsou souměrné podle osy c, tj. že mají stejnou vzdálenost od přímky c a úsečka AB je kolmá na přímku c.

Diskuse: Počet řešení závisí na vzájemné poloze zadaných přímek. Úloha má **jedno řešení** právě tehdy, když alespoň dvě z přímek a, b, c jsou vzájemně různoběžné, kromě dvou případů: 1) Jestliže přímka c je osa úhlu určeného různoběžkami a, b, má úloha **nekonečně mnoho řešení**. 2) Jestliže přímka a je osou úhlu určeného přímkami b, c, úloha **nemá řešení**. Úloha nemá **žádné řešení** právě tehdy, když jsou všechny tři přímky vzájemně rovnoběžné, kromě případu, že c je osa pásu a, b. Úloha má **nekonečně mnoho řešení** právě tehdy, když přímka c je osou pásu a, b.

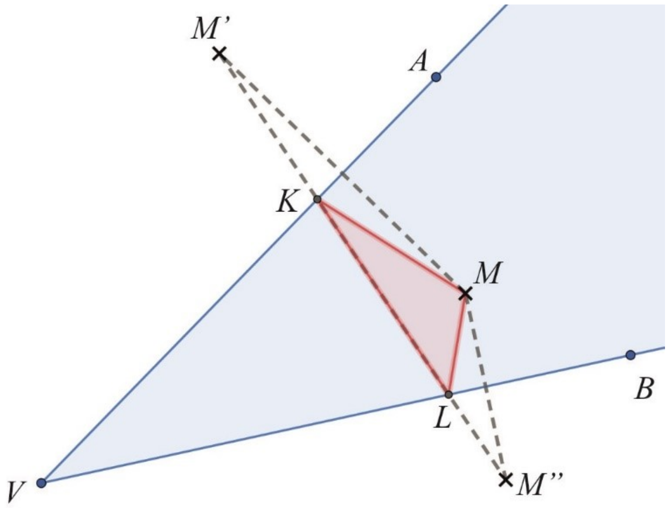
Příklad 30. Je dán ostrý úhel AVB a jeho vnitřní bod M. Sestrojte trojúhelník KLM tak, aby jeho vrcholy K, L ležely po řadě na polopřímkách VA a VB a obvod trojúhelníku byl minimální.

Rozbor: Jedná se o polohovou úlohu s neznámými body K, L. Vyjdeme z myšlenky, že nejkratší spojnicí dvou bodů v rovině je úsečka. Proto zobrazíme bod M v **osové souměrnosti** $O(\mapsto VA)$ a $O(\mapsto VB)$. Úsečka $M'M''$ protne ramena úhlu ve hledaných bodech K, L.



Konstrukce:

1) $\sphericalangle AVB, M; M \in \sphericalangle AVB$
2) $M'; O(\mapsto VA): M \to M'$
   $M''; O(\mapsto VB): M \to M''$
3) $M'M''$
4) $K; K \in M'M'' \cap \mapsto VA$
   $L; L \in M'M'' \cap \mapsto VB$
5) trojúhelník KLM



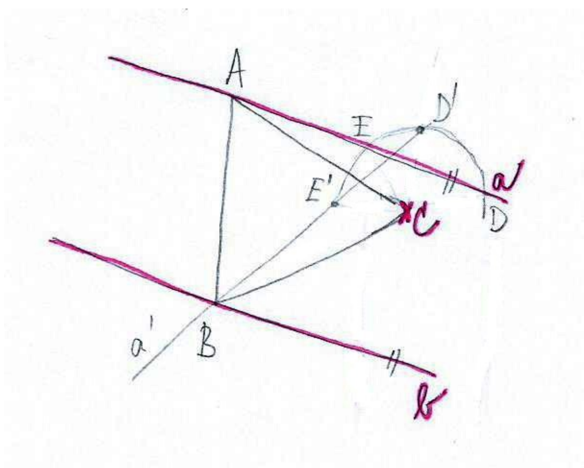
Úloha má právě jedno řešení v dané rovině.

Zkouška správnosti: Pomocí kružítka zkontrolujeme, že obvod trojúhelníku ABC má stejnou délku jako úsečka $M'M''$.

Diskuse: Úloha má právě jedno řešení v dané rovině. Jestliže bod M leží na jednom z ramen, úloha nemá žádné řešení.

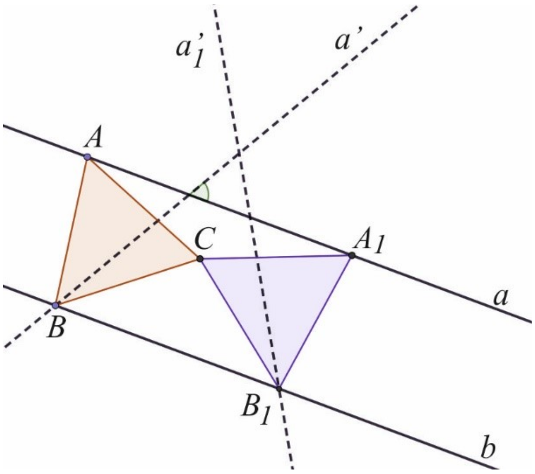
Příklad 31. Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky a, b a bod C, který je vnitřním bodem pásu určeného přímkami a, b. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC takové, že $A \in a$ a $B \in b$.

Rozbor: Jde o polohovou úlohu se dvěma neznámými body A, B. Pro tyto body platí $CA \cong CB$ a $|\sphericalangle ACB| = 60°$, neboť trojúhelník ABC má být rovnostranný. To znamená, že body A a B si odpovídají jako vzor a obraz v **rotaci** se středem v bodě C a orientovaným úhlem o velikosti $60°$ (eventuálně $-60°$). Přitom bod A má ležet na přímce a a bod B na přímce b. V této rotaci tedy sestrojíme obraz přímky a, tj. přímku a'. Bod B náleží průniku přímek b a a'. Bod A sestrojíme jako obraz bodu B v rotaci, která je inverzní k použité rotaci.



Konstrukce:

1) $a, b, C; a \parallel b$, C je vnitřní bod pásu určeného přímkami a, b
2) $a'; R(C, 60°): a \to a'$
3) $B; B \in b \cap a'$
4) $A; R(C, -60°): B \to A$
5) $\triangle ABC$



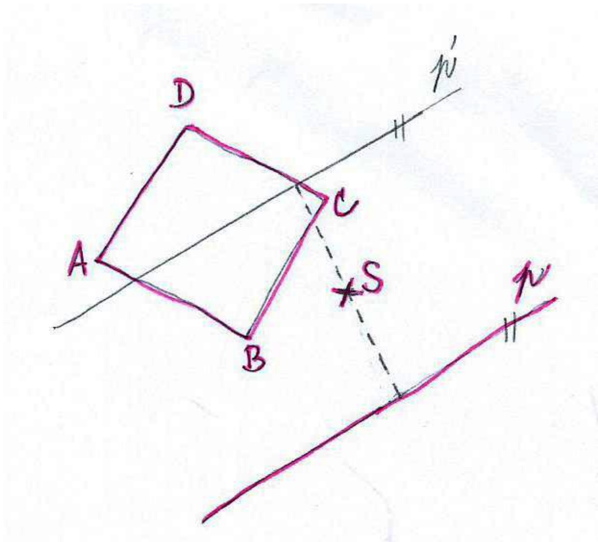
Úloha má dvě řešení, neboť přímku a (a potažmo bod A) lze kolem bodu C otočit dvěma způsoby.

Zkouška správnosti: Kružítkem zkontrolujeme, zda má trojúhelník všechny strany shodné, úhloměrem zkontrolujeme, zda všechny vnitřní úhly trojúhelníku mají velikost 60°.

Diskuse: Úloha má vždy právě dvě řešení.

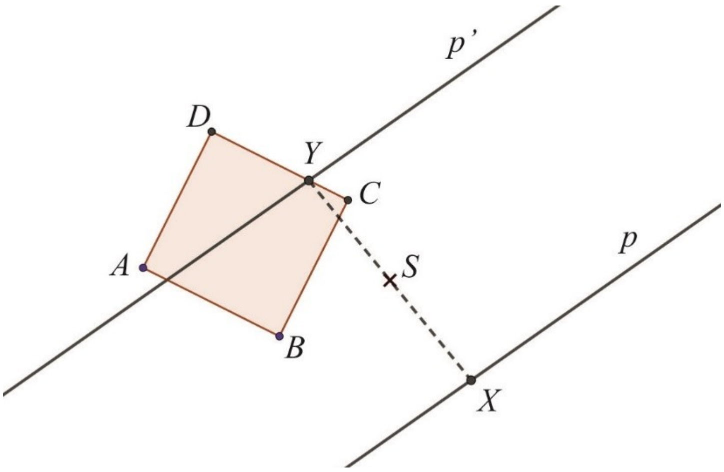
Příklad 32. Je dán čtverec $ABCD$, přímka p a bod S, $S \notin p$. Sestrojte úsečku XY tak, aby bod S byl jejím středem, bod X náležel přímce p a bod Y náležel některé ze stran čtverce $ABCD$.

Rozbor: Jedná se o polohovou úlohu se dvěma neznámými body X, Y, které si odpovídají jako vzor a obraz ve **středové souměrnosti** se středem S. Proto zobrazíme přímku p ve středové souměrnosti se středem S. Průsečík přímky p' s hranicí čtverce $ABCD$ je bod Y, bod X je obrazem bodu Y ve středové souměrnosti se středem S.



Konstrukce:

1) čtverec $ABCD, p, S, S \notin p$
2) $p'; S(S): p \rightarrow p'$
3) $Y; Y \in ABCDA \cap p'$
4) $X; S(S): Y \rightarrow X$
5) XY



Úloha má dvě řešení, neboť přímka p' má s lomenou čarou $ABCDA$ dva průsečíky.

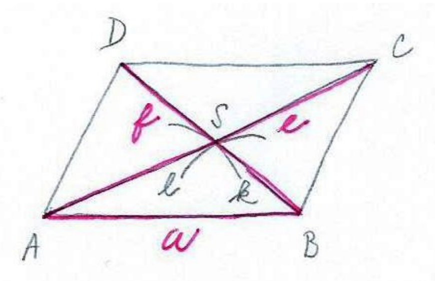
Zkouška: Kružítkem zkontrolujeme, zda je bod S středem úsečky XY.

Diskuse: Úloha má **právě jedno řešení**, jestliže se přímka p' dotkne jednoho vrcholu čtverce. Úloha má **právě dvě řešení**, jestliže přímka p' protíná čtverec. Úloha má **nekonečně mnoho řešení**, jestliže jedna ze stran čtverce leží na přímce p'. Úloha nemá **žádné řešení**, jestliže čtverec nemá s přímkou p' žádný společný bod.

Příklad 33. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno: $a = 7\ \mathrm{cm}, e = 9\ \mathrm{cm}, f = 6{,}6\ \mathrm{cm}$.

Rozbor: Známé body: A, B. Hledané body: C, D.

Při konstrukci využijeme poznatku, že úhlopříčky rovnoběžníku se vzájemně půlí, a toho, že je rovnoběžník středově souměrný.



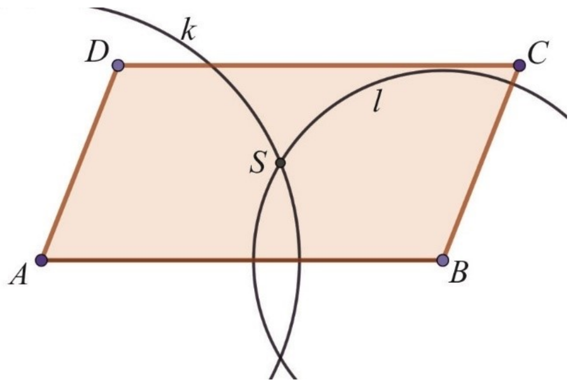
Bod S je středem obou úhlopříček, je tedy průsečíkem kružnic k a l, kde kružnice k má střed v bodě A a poloměr $\frac{1}{2}e = \frac{9}{2}$ cm a kružnice l má střed v bodě B a poloměr $\frac{1}{2}f = \frac{6,6}{2}$ cm.[7]

Bod C je obrazem bodu A ve středové souměrnosti se středem v bodě S.

Bod D je obrazem bodu B ve středové souměrnosti se středem v bodě S.

Konstrukce:

1) $AB, |AB| = a$
2) $k, l; k\left(A, \frac{1}{2}e = \frac{9}{2}\ \mathrm{cm}\right), l(B, \frac{1}{2}f = \frac{6,6}{2}\ \mathrm{cm})$
3) $S; S \in k \cap l$
4) $C; S(S): A \to C$
5) $D; S(S): B \to D$
6) rovnoběžník $ABCD$



Úloha má v polorovině určené přímkou AB jedno řešení.

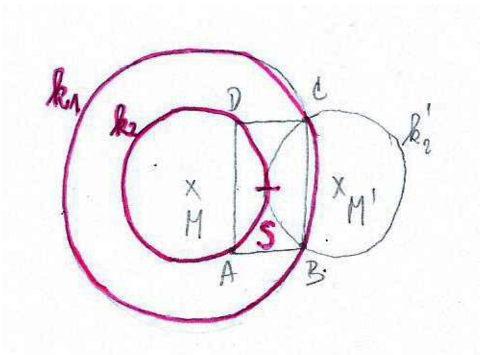
---

7 Úsečky poloviční délky konstruujeme pomocí středů stran příslušných úseček.

Zkouška: Zkoušku správnosti provedeme měřením zadaných prvků. Dále zkontrolujeme, zda se jedná o rovnoběžník, tedy rovnoběžnost protějších stran.

Příklad 34. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(M, r_1), k_2(M, r_2), r_1 > r_2$ a bod S ležící na menší z nich. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ se středem S, jehož vrcholy leží na daných kružnicích.

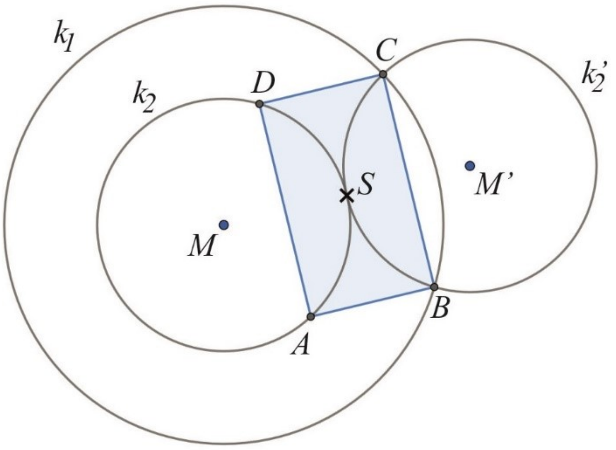
Rozbor: Rovnoběžník je středově souměrný podle svého středu. Bod A se v této středové souměrnosti zobrazuje na bod C a bod B na bod D. Proto zobrazíme jednu z kružnic, např. kružnici k_2 ve středové souměrnosti se středem S. Průsečíky s kružnicí k_1 jsou dva z hledaných vrcholů rovnoběžníku. Ostatní dva vrcholy získáme zobrazením ve středové souměrnosti se středem S.



Je zřejmé, že rovnoběžník bude obdélník – jeho úhlopříčky jsou shodné.

Konstrukce:

1) $k_1, k_2, S; k_1(M, r_1), k_2(M, r_2), r_1 > r_2, S \in k_2$
2) $k'_2; S(S): k_2 \rightarrow k'_2$
3) $C, B;\ \{C, B\} = k_1 \cap k'_2$
4) $A, D; S(S): C \rightarrow A,$
   $S(S): B \rightarrow D$
5) rovnoběžník $ABCD$



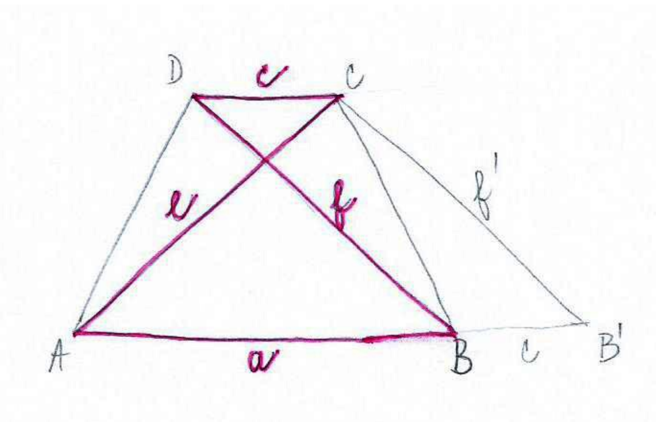
Úloha má v rovině právě jedno řešení (pokud neuvažujeme otočení obdélníku).

Zkouška: Ověříme, zda vzniklý čtyřúhelník má vlastnosti rovnoběžníku – rovnoběžnost, případně shodnost protějších stran.

Diskuse: Úloha má jediné řešení, jestliže se kružnice k_1 a k'_2 protnou. To nastane tehdy, když $r_2 > \frac{1}{3}r_1$.

Příklad 35. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základen a, c a obou jeho úhlopříček e, f.

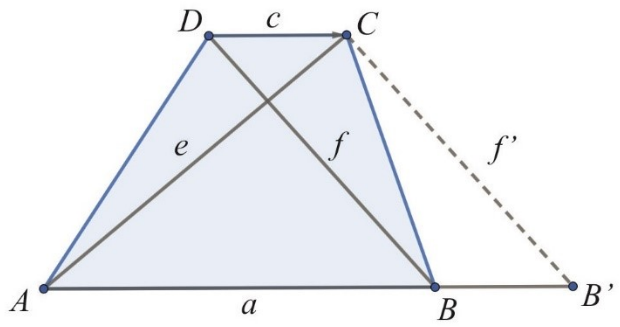
Rozbor: Jedná se o nepolohovou úlohu s danými body A, B (volíme) a neznámými body C, D. Do roviny jako první umístíme body A, B. **Posunutí** $T(\boldsymbol{DC})$ zobrazí bod D do bodu C a bod B do bodu B'. Sestrojíme trojúhelník $AB'C$ podle věty sss, přitom platí $|AB'| = a + c$. Body B a D jsou pak obrazy bodů B' a C v posunutí $T^{-1}(\boldsymbol{DC})$.



Konstrukce:

1) $AB;\ |AB| = a$
2) $B';\ T(\boldsymbol{DC}): B \to B'$
3) trojúhelník $AB'C;\ |AB'| = a + c, |B'C| = f, |AC| = e$
4) $D; T^{-1}(\boldsymbol{DC}): C \to D$
5) lichoběžník $ABCD$

Zvolíme velikosti prvků: $a = 3{,}5$ cm, $c = 1{,}2$ cm, $e = 3{,}5$ cm, $f = 3$ cm.



Zkouška: Zkontrolujeme, zda velikosti zadaných prvků odpovídají zvoleným hodnotám a zda je útvar lichoběžník, tj. zda má kolmé základny.

Diskuze: Úloha má v polorovině určené přímkou AB právě jedno řešení tehdy, když lze sestrojit trojúhelník $AB'C$.

5 Konstrukční úlohy řešené algebraickou metodou

Při řešení konstrukčních úloh máme někdy sestrojit úsečku takové délky, kterou nelze přesně určit. Příkladem mohou být čísla $\sqrt{2}$ či $\frac{21}{4}$. Pokud to lze, vyhneme se přibližnému vyčíslení a najdeme takové algebraické vyjádření, které nám umožní spolu s použitím známých geometrických vět sestrojit úsečku „přesně“.

Nejjednodušší jsou konstrukční úlohy, v nichž máme sestrojit úsečku, jejíž délka závisí na délkách jiných úseček a tato závislost je dána jednoduchým algebraickým výrazem. Některé z nich zde uvedeme:

1) sestrojení úsečky délky $x = \frac{a \cdot b}{c}$ (tzv. **čtvrtou geometrickou úměrnou**),
2) sestrojení úsečky délky $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, kde x vyjadřuje délku přepony v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami o délkách a, b (využití **Pythagorovy věty**),

3) sestrojení úsečky délky $x = \sqrt{c^2 - b^2}$, kde x vyjadřuje délku odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, jehož přepona má délku c a druhá odvěsna délku b (využití **Pythagorovy věty**),
4) sestrojení úsečky délky $x = \sqrt{a \cdot b}$ (tzv. **geometrický průměr**, využití **Eukleidových vět**),
5) rozdělení úsečky na dvě části tak, aby poměr menší části k větší byl stejný jako poměr větší části k celé úsečce (rozdělení úsečky v poměru **zlatého řezu**).

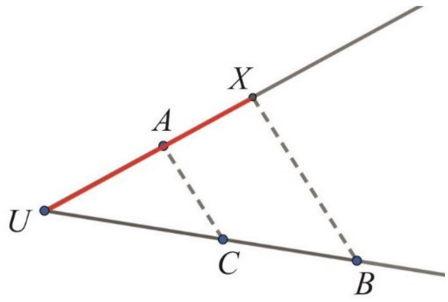
Tyto případy nyní ukážeme na příkladech.

Poznámka: Délky úseček v následujících příkladech budeme psát pouze číselně a budeme tím myslet, že je velikost dána ve zvolené délkové jednotce.

Příklad 36. Sestrojte úsečku délky $x = \frac{21}{4}$ (při zvolené jednotkové úsečce).

Rozbor: Platí $\frac{21}{4} = 5{,}25$, tuto délku nejsme schopni za běžných podmínek (tj. pokud by zvolená jednotková délka odpovídala jednomu centimetru) na pravítku s měřítkem odměřit. Proto si výraz upravíme na $x = \frac{3 \cdot 7}{4}$, neboli $x : 3 = 7 : 4$. Z podobnosti trojúhelníků budeme schopni úsečku x sestrojit „přesně“.

Konstrukce: Zvolme libovolný konvexní úhel s vrcholem U. Na jednom rameni sestrojíme úsečky UA ($|UA| = a = 3$) a hledanou úsečku UX ($|UX| = x$), na druhém rameni úhlu sestrojíme úsečky UC ($|UC| = c = 4$) a UB ($|UB| = b = 7$). Pro jednoduchost si jako délkovou jednotku zvolíme 1 cm.



Zkouška: Pravítkem s měřítkem ověříme, že délka sestrojené úsečky je přibližně 5,3 cm.

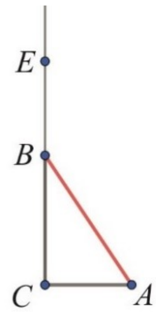
Příklad 37. Sestrojte úsečku délky $\sqrt{13}$.

Rozbor: Platí $\sqrt{13} = \sqrt{4+9} = \sqrt{2^2 + 3^2}$. Využijeme **Pythagorovy věty** a sestrojíme pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu C s odvěsnami délky 2 a 3 délkové jednotky a přeponu s délkou $\sqrt{13}$ jednotky.

Známé body jsou A, C (kratší z odvěsen), neznámý je bod B. Bod B leží na polopřímce CE, která je kolmá k přímce CA ve vzdálenosti $a = 3$ cm od bodu C.

Konstrukce: Jako jednotku zvolíme pro jednoduchost 1 cm.

1) CA; $|CA| = 2$ cm
2) $\mapsto CE$; $\mapsto CE \perp CA$
3) $B; B \in \mapsto CE$ a $|CB| = 3$ cm
4) AB; $|AB| = \sqrt{13}$ cm



Zkouška: Pomocí pravítka s měřítkem zkontrolujeme, zda úsečka AB má délku přibližně 3,6 cm.

Poznámka: Tímto geometrickým způsobem můžeme elegantně určovat přibližné hodnoty některých odmocnin. Všechny druhé odmocniny z přirozených čísel lze potom sestrojit pomocí Eukleidovy věty, jak uvidíme níže.

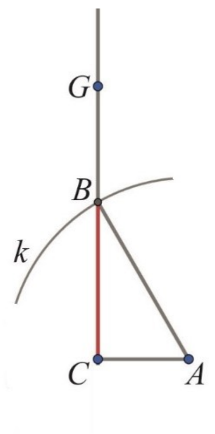
Příklad 38. Sestrojte úsečku délky $\sqrt{12}$.

Rozbor: Platí $\sqrt{12} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{4^2 - 2^2}$. Využijeme Pythagorovy věty a sestrojíme pravoúhlý trojúhelník s přeponou o délce 4 a odvěsnou o délce 2. Trojúhelník sestrojíme podle věty Ssu.

Známé body jsou body A, C (jedna z odvěsen), neznámý je bod B. Bod B náleží polopřímce CG, která je kolmá k úsečce CA. Zároveň leží na kružnici, která má poloměr $c = 4$ a střed v bodě A.

Konstrukce: Pro jednoduchost zvolíme jednotku délky 1 cm.

1) CA; $|CA| = b = 2$ cm
2) $\mapsto CG$; $\mapsto CG \perp CA$
3) $k; k(A, 4\text{ cm})$
4) $B; B \in \mapsto CG \cap k$
5) BC; $|BC| = \sqrt{12}$ cm

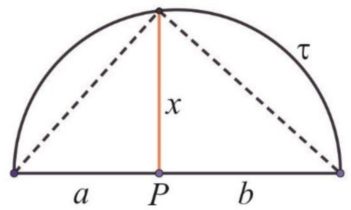


Zkouška: Měřením se přesvědčíme o tom, že úsečka BC má délku přibližně 3,5 cm.

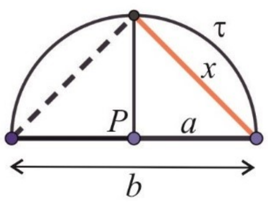
Příklad 39. Obdélník má strany o délkách 4 cm a 5 cm. Sestrojte čtverec o stejném obsahu.

Rozbor: Obsah obdélníku je $S = a \cdot b$ a obsah hledaného čtverce o straně délky x je $x^2 = a \cdot b$. Pro délku strany čtverce x tedy platí $x = \sqrt{a \cdot b}$. Můžeme řešit pomocí **Eukleidových vět**:

a) Pomocí **Eukleidovy věty o výšce** a **Thaletovy věty** sestrojíme pravoúhlý trojúhelník, který má úseky přepony o délce a, b a výšku x.



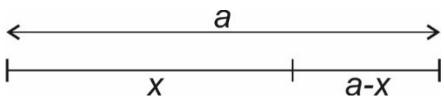
b) Je splněna podmínka $b > a$, proto lze použít **Eukleidovu větu o odvěsně** a s pomocí **Thaletovy věty** narýsovat pravoúhlý trojúhelník, v němž je b délka přepony, x je jedna odvěsna a a je délka úseku přilehlého této odvěsně.



Nyní zbývá sestrojit čtverec se stranou délky x.

Zkouška: Měřením se přesvědčíme, že úsečka x má délku přibližně 4,5 cm.

Příklad 40. Úsečku AB rozdělte na dvě části tak, aby poměr menší části k větší byl stejný jako poměr větší části k celé úsečce.



Rozbor: Na úsečce AB hledáme bod X, který rozdělí úsečku uvedeným způsobem. Označíme celou úsečku $|AB| = a$, delší úsek $|AX| = x$ a kratší úsek $|XB| = a - x$. Má platit

$$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a}$$

a po úpravách dostáváme $a^2 - ax = x^2$, neboli $x^2 + ax - a^2 = 0$.

Řešením této rovnice jsou čísla

$$x_1 = \frac{1}{2}a\left(\sqrt{5} - 1\right), x_2 = \frac{1}{2}a\left(-\sqrt{5} - 1\right),$$

druhý kořen je záporný, a nevyhovuje tudíž úloze. Delší úsek má tedy v závislosti na délce celé úsečky a velikost $x = \frac{1}{2}a\left(\sqrt{5} - 1\right)$. Zkontrolujeme poměry:

$$\frac{a-x}{x} = \frac{a - \frac{1}{2}a\left(\sqrt{5}-1\right)}{\frac{1}{2}a\left(\sqrt{5}-1\right)} = \frac{2 - \left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)} = \frac{3-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}-1\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\frac{x}{a} = \frac{\frac{1}{2}a\left(\sqrt{5}-1\right)}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

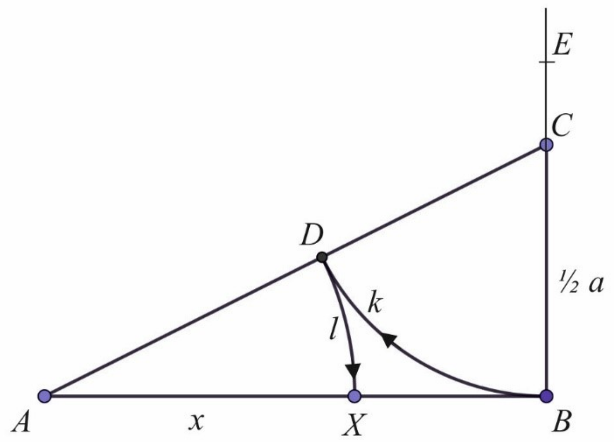
Pro konstrukci upravíme délku x na tvar

$$x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} - \frac{1}{2}a.$$

Úsečku $\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2}$ sestrojíme užitím Pythagorovy věty, od ní graficky odečteme úsečku $\frac{1}{2}a$ a získanou úsečku přeneseme na úsečku a.

Konstrukce:

1) AB
2) $\mapsto BE;\ \mapsto BE \perp AB$
3) $C; C \in \mapsto BE$ a $|BC| = \frac{1}{2}a$
4) AC
5) $k; k\left(C, \frac{1}{2}a\right)$
6) $D; D \in AC \cap k$
7) $l; l(A, |AD|)$
8) $X; X \in AB \cap l$



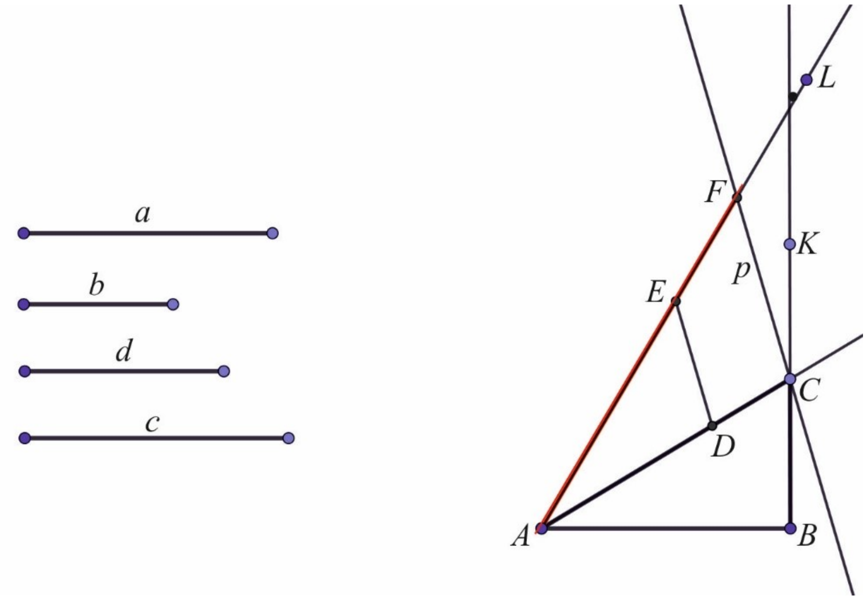
Poznámka: Předešlé konstrukce lze různě kombinovat. Nemusíme přitom znát ani délku zadaných úseček, jak ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 41. Sestrojte úsečku délky $\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot c}{d}$.

Rozbor: Máme sestrojit úsečku $x = \frac{e \cdot c}{d}$, kde $e = \sqrt{a^2+b^2}$. Úsečku e sestrojíme pomocí Pythagorovy věty a úsečku x jako čtvrtou geometrickou úměrnou, $\frac{x}{c} = \frac{e}{d}$.

Konstrukce: Zvolíme úsečky a, b, c, d.

1) AB; $|AB| = a$
2) $\mapsto BK$; $\mapsto BK \perp AB$
3) $C; C \in \mapsto BK$ a $|BC| = b$
4) AC; $|AC| = e$
5) D; $|AD| = d$
6) konvexní úhel DAL (úhel sestrojíme nad trojúhelníkem ABC)
7) E; $E \in AL$ a $|AE| = c$
8) $p; C \in p$ a $p \parallel DE$
9) $F; F \in p \cap \mapsto AE$
10) AF; $|AF| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot c}{d}$



Zkouška: Zkoušku můžeme provést tak, že zvolíme konkrétní délky úseček, algebraicky vypočteme hodnotu x a měřením ověříme délku úsečky AF.

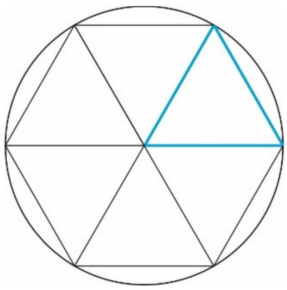
Diskuse: Úloha má vždy jedno řešení.

6 Konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků vepsaných do kružnice

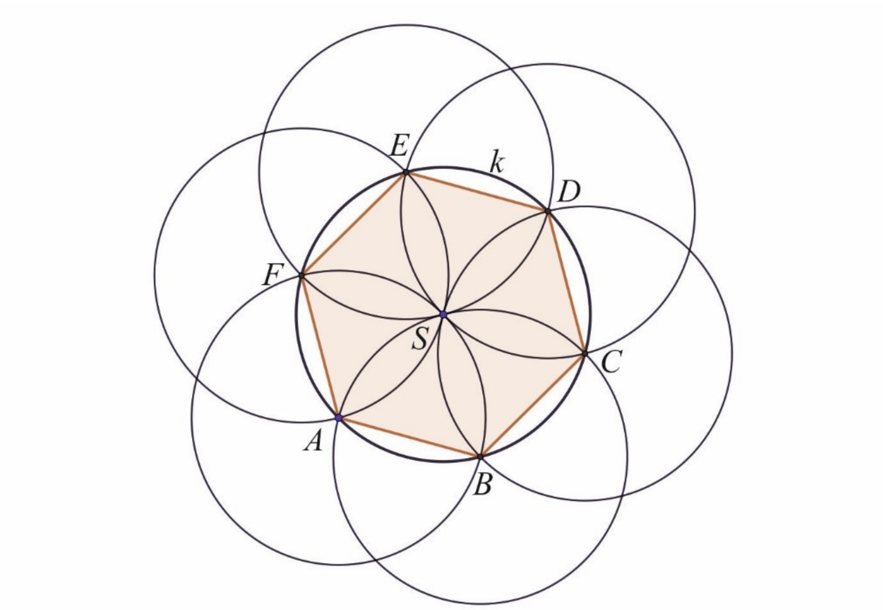
Mezi konstrukční úlohy můžeme řadit i úlohy, kdy máme do dané kružnice vepsat pravidelný mnohoúhelník. Některé konstrukce pravidelných mnohoúhelníků zde uvedeme.

6.1 Šestiúhelník, trojúhelník a dvanáctiúhelník

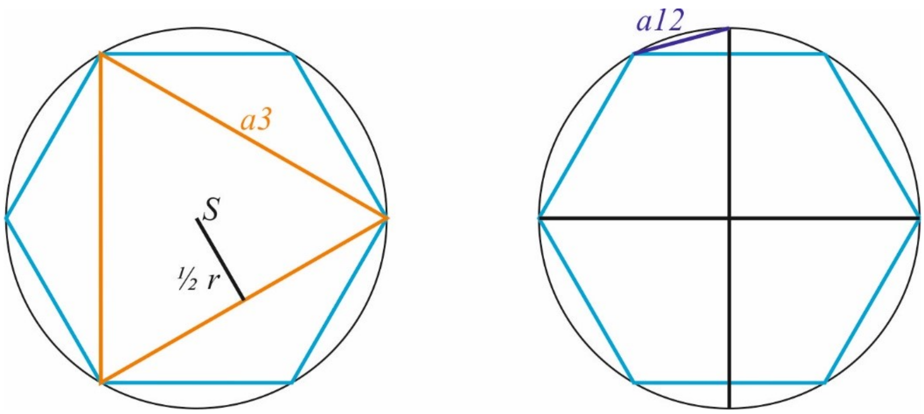
Pro délku strany pravidelného šestiúhelníku vepsaného do kružnice platí, že je rovna poloměru kružnice. Situaci můžeme ilustrovat na následujícím obrázku:



Při konstrukci pravidelného šestiúhelníku postupujeme tak, že na kružnici se středem S a poloměrem r zvolíme bod A a od něj začneme nanášet poloměr na kružnici. Při rýsování mohou žáci obdržet „kytičku“, jako na následujícím obrázku.



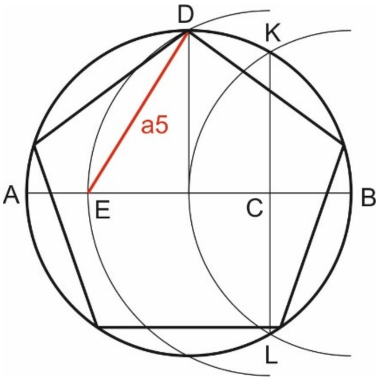
Narýsujeme-li šestiúhelník, velmi lehce můžeme sestrojit také rovnostranný trojúhelník a pravidelný dvanáctiúhelník, jak znázorňuje obrázek. Strana rovnostranného trojúhelníku je označena $a3$ a pravidelného dvanáctiúhelníku $a12$.



6.2 Pětiúhelník a desetiúhelník

Přesná metoda sestrojení pětiúhelníku, kterou zde uvádíme, se objevila již v Eukleidových Základech ve 4. století před naším letopočtem.

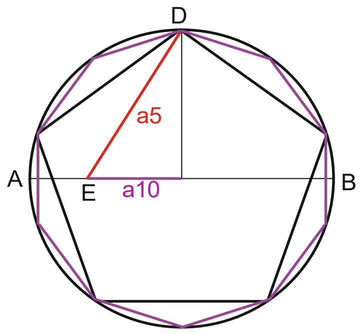
Narýsujeme kružnici k s průměrem $AB, |AB| = 2r$ a středem S. Sestrojíme střed C úsečky SB. Sestrojíme bod D jako průsečík průměru kolmého na průměr AB a kružnice k. Sestrojíme kružnici se středem v bodě C a poloměrem CD, která protne úsečku AB v bodě E. Délka úsečky ED je hledaná délka strany pětiúhelníku.



Postup zapíšeme také symbolicky:

1. $k(S, r)$
2. $B; B \in k$
3. $l(B, r)$
4. $K, L; K, L \in k \cap l$
5. KL
6. $C; C \in KL \cap SB$ a $|SC| = |CB|$
7. $SD; SD \perp SB \wedge D \in k$
8. $m(C, |CD|)$
9. $E; E \in m \cap \rightarrow BS$
10. DE… strana pravidelného pětiúhelníku

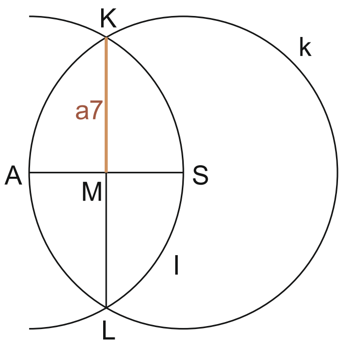
Můžeme využít předchozí konstrukce a narýsovat pravidelný desetiúhelník. Délka úsečky ES je totiž délka strany desetiúhelníku.

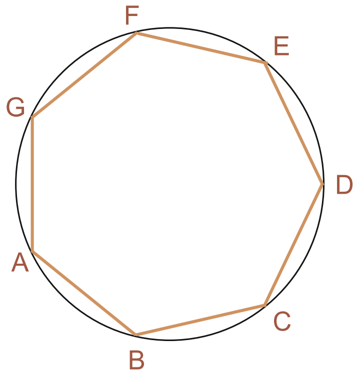


6.3 Sedmiúhelník, devítiúhelník

Pomocí pravítka a kružítka nelze sedmiúhelník přesně sestrojit. Přesto známe několik přibližných konstrukcí, které nám délku strany pravidelného sedmiúhelníku pomohou s jistou přesností určit. Jednu z nich uvedeme.

Narýsujeme kružnici k se středem S a kružnici l se středem A, kde A je libovolný bod kružnice k. Kružnice k, l se protnou v bodech K, L, sestrojíme úsečku KL. Dále sestrojíme úsečku $A\,S$ a průsečík úseček AS a KL označíme M. Délka úsečky KM je přibližně velikost strany pravidelného sedmiúhelníku.



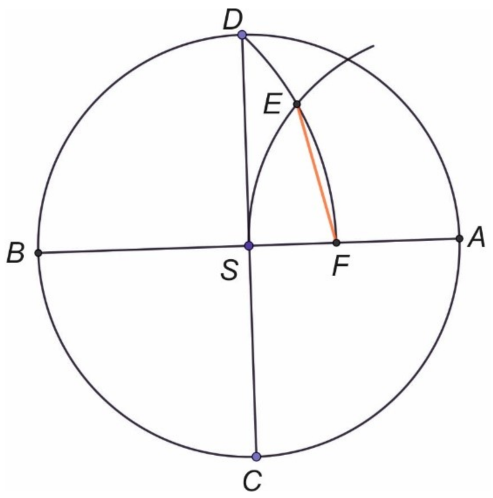


Postup zapíšeme také symbolicky:

1. $k(S;r)$
2. $A; A \in k$
3. $l; l(A,r)$
4. $K, L; \{K, L\} = k \cap l$
5. KL, AS
6. $M; M \in KL \cap AS$
7. KM – přibližně strana sedmiúhelníku
8. sedmiúhelník $ABCDEFG$

Devítiúhelník je další mnohoúhelník, který nelze narýsovat přesně pouze s použitím pravítka a kružítka. Opět existuje několik přibližných konstrukcí, z nichž jednu uvedeme.

1. $k; k(S,r)$
2. $AB \perp CD$ – dva k sobě kolmé průměry
3. $l; l(A,r)$
4. $m; m(B, BD)$
5. $E; E \in l \cap m$
6. $F; F \in m \cap AB$
7. $EF; EF$ je přibližně strana pravidelného devítiúhelníku



7 Neřešené konstrukční úlohy s návody

7.1 Základní konstrukce

1. Sestrojte střed úsečky AB.
2. Sestrojte osu tupého úhlu AVB.
3. Sestrojte grafický rozdíl úseček $AB, CD, AB > CD$.
4. Sestrojte grafický rozdíl úhlů AVB a CYD, je-li $\sphericalangle AVB > \sphericalangle CYD$.
5. Pomocí pravítka a kružítka (nikoli pomocí úhloměru) sestrojte úhel, který má velikost:
a) 60° **b)** 30° **c)** 45°
6. Pomocí pravítka a kružítka sestrojte úhel, který má velikost:
a) 105° **b)** 150° **c)** 75° **d)** 165°
7. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže je dáno: $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $c = 5$ cm.
8. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže je dáno: $a = 4{,}5$ cm, $b = 6{,}5$ cm, $\gamma = 135°$.
9. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže je dáno: $c = 7$ cm, $\alpha = 60°, \beta = 50°$.
10. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže je dáno: $a = 8$ cm, $b = 3$ cm, $\alpha = 90°$.
11. Je dána úsečka AB. Rozdělte ji v poměru $m : n$.

7.2 Konstrukce trojúhelníku

12. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $b = 7$ cm, $v_b = 3$ cm, $\beta = 90°$.
13. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $c = 4{,}5\ cm, v_b = 2{,}5\ cm, \beta = 120°$.
14. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, b, v_a.
15. Narýsujte trojúhelník ABC, jestliže znáte: $c = 7$ cm, $v_a = 4{,}5$ cm, $v_b = 5$ cm.
16. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a = 5{,}5$ cm, $c = 7$ cm, $t_a = 5$ cm.
17. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a = 7$ cm, $v_b = 3$ cm, $t_a = 2{,}5$ cm.

18. Je dána úsečka $v_b = 3$ cm. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dále dáno: $\alpha = 105°$, $t_b = 6$ cm.
19. Je dána úsečka AC, $|AC| = 5$ cm. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dále dáno: $v_b = 5$ cm, $t_c = 5$ cm.
20. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže $a = 6$ cm, $t_c = 6$ cm, $t_b = 6$ cm.
21. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, b, t_c.
22. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány středy stran S_a, S_b, S_c.
23. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a = 5$ cm, $\alpha = 40°$, $r = 4$ cm.
24. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $c = 7$ cm, $v_c = 3$ cm, $r = 5$ cm.
25. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $\alpha = 60°$, $\beta = 50°$, $\rho = 2$ cm.
26. Je dána úsečka $v_c = 6$ cm. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dále dáno: $\beta = 120°$, $\rho = 2$ cm.

7.3 Konstrukce čtyřúhelníku

27. Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li poloměr kružnice opsané čtverci $r = 3{,}5$ cm.
28. Sestrojte obdélník $KLMN$, je-li dáno: $k = 8$ cm, $u = 10$ cm (úhlopříčka).
29. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li $r = 3$ cm, $|\sphericalangle BAC| = 25°$.
30. Je dána úsečka AC, $|AC| = 3{,}5$ cm. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dále dáno $b = 2$ cm.
31. Sestrojte obdélník $EFGH$ s průsečíkem úhlopříček S, je-li dáno: $|GH| = 7{,}2$ cm, $|\sphericalangle FSG| = 82°$.
32. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno $a = 47$ mm, $e = 76$ mm (úhlopříčka AC).
33. Sestrojte kosočtverec $KLMN$, je-li dáno: $e = 35$ mm (úhlopříčka KM), $\lambda = 129°$ (úhel u vrcholu L).
34. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno: $a = 6$ cm, $\rho = 2{,}5$ cm.
35. Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno: $a = 64$ mm, $b = 39$ mm, $e = 50$ mm.
36. Sestrojte rovnoběžník $MNOP$, je-li dáno: $|MO| = 7$ cm, $|NP| = 5$ cm, $|\sphericalangle PON| = 30°$.
37. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno: $\alpha = 70°$, $v_a = 55$ mm, $v_b = 35$ mm.
38. Sestrojte lichoběžník $EFGH$, je-li dáno: $|EF| = 2$ cm, $|EG| = 6$ cm, $|FG| = 5$ cm, $|\sphericalangle EPF| = 90°$ (P je průsečík úhlopříček).
39. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ se základnami a, c a rameny b, d.

7.4 Konstrukce využívající shodných zobrazení

40. Je dána přímka a, kružnice k a bod A. Sestrojte všechny úsečky XY tak, aby bod X ležel na přímce a, bod Y na kružnici k a bod A byl středem úsečky XY.
41. Do čtverce $KLMN$ vepište rovnostranný trojúhelník LXY tak, aby $X \in MN, Y \in NK$.
42. Je dána přímka d a body K, L ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou d. Sestrojte na přímce d bod D tak, aby

a) úsečky KD a LD byly shodné,

b) lomená čára KDL měla nejmenší délku.

43. Je dána přímka c a dvě kružnice k_1, k_2 v různých polorovinách určených přímkou c. Sestrojte body $X \in k_1$ a $Y \in k_2$ tak, aby $XY \perp c$ a úsečka XY byla přímkou c půlena. Přemýšlejte, jak zvolit vzájemnou polohu přímek a kružnice, aby úloha měla řešení.

44. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b a přímka c, která není s přímkami a, b rovnoběžná. Dále je dán bod C, který je vnitřním bodem pásu určeného rovnoběžkami a, b. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC s hlavním vrcholem C tak, aby $AB \parallel c$ a $A \in a, B \in b$.

45. Sestrojte deltoid $ABCD$ (přímka AC je osou souměrnosti deltoidu), je-li dáno: $a = |AB| = 7\text{ cm}, e = |AC| = 10\text{ cm}, f = |BD| = 8\text{ cm}$.

46. Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M. Sestrojte všechny úsečky XY se středem v bodě M a s krajními body X, Y na hranici trojúhelníku.

47. Jsou dány tři různé body A, B, S, které neleží na jedné přímce. Sestrojte čtverec $KLMN$ se středem v bodě S tak, aby bod A ležel na přímce KL a bod B na přímce MN.

48. Pomocí středové souměrnosti sestrojte rovnoběžník $EFGH$, je-li dáno: $|EF| = 45\text{ mm}$, $|EH| = 35\text{ mm}, |FH| = 55\text{ mm}$.

49. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 takové, že $k_1 \cap k_2 \neq \emptyset$. Bodem $X \in k_1 \cap k_2$ veďte všechny přímky, které vytínají na obou kružnicích shodné tětivy.

50. Jsou dány soustředné kružnice k_1, k_2 a bod M, který je vnitřním bodem mezikruží určeného kružnicemi k_1, k_2. Sestrojte rovnostranný trojúhelník MAB tak, aby $A \in k_1$ a $B \in k_2$.

51. Jsou dány dvě různoběžné přímky a, b a bod A, který neleží na žádné z nich. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $B \in a$, $D \in b$.

52. Do daného rovnoběžníku $EFGH$ vepište čtverec $ABCD$ tak, aby $A \in EF, B \in FG$, $C \in GH, D \in HE$.

53. Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka GH. Sestrojte čtverec $ABCD$, pro který platí: $A \in a,\ b \in B,\ AB \parallel GH$ a $AB \cong GH$.

54. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b a přímka c, která tyto rovnoběžky protíná. Sestrojte kružnici, která se dotýká všech daných přímek.

55. Jsou dány různoběžky a, b a úsečka délky r. Sestrojte všechny kružnice k se středem na přímce a, poloměrem r, které na přímce b vytínají tětivu délky r.

56. Je dána kružnice $k(S, r)$ a ve vnitřní oblasti kružnice k bod $A \neq S$. Sestrojte všechny rovnoběžníky $ABCD$, jejichž vrcholy B, C, D leží na kružnici k a strana AB má délku r.

7.5 Konstrukce využívající algebraickou metodu

57. Sestrojte úsečky, které při zvolené jednotkové úsečce mají délky $\sqrt{10}, \sqrt{14}, \sqrt{27}, \sqrt{30}$.

58. Je dána úsečka délky a. Sestrojte úsečky, které mají délky $a\sqrt{3}, a\sqrt{5}, \frac{a}{\sqrt{2}}$.

59. Jsou dány úsečky délek a, b $(a > b)$. Sestrojte úsečky, které mají délky $a + 2b$, $3a - 2b, \frac{a}{b}, \frac{a^2}{b}, \frac{ab}{a-b}, \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

60. Je dán obdélník $KLMN$. Nad jeho úhlopříčkou KM sestrojte obdélník $KMST$ o stejném obsahu.

61. K danému pravoúhlému trojúhelníku ABC s odvěsnami délek a, b sestrojte čtverec, který má stejný obsah jako daný trojúhelník.

7.6 Návody na řešení

1. 1) úsečka AB, 2) kružnice k se středem v A a poloměrem r větším než polovina $|AB|$, 3) kružnice l se středem v B a poloměrem r, 4) přímka, která prochází průsečíky kružnic k, l, 5) bod S je průsečík této přímky s úsečkou AB.
2. 1) kružnice k se středem ve vrcholu úhlu a libovolným vhodným poloměrem, 2) body L, M – průsečíky kružnice k s rameny úhlu, 3) kružnice l se středem v L a poloměrem r větším než polovina $|AB|$, 3) kružnice m se středem v M a poloměrem r, 5) průsečík kružnic m, l označíme X, polopřímka VX je osou úhlu AVB.
3. Máme-li narýsovat grafický rozdíl úseček, pracujeme jen s těmito dvěma úsečkami. Narýsujeme úsečky AB a CD $(AB > CD)$. Do kružítka vezmeme úsečku CD a sestrojíme oblouk, který má střed v bodě B a poloměr CD. Průsečík oblouku a úsečky AB označíme písmenem E. Úsečka AE je shodná s úsečkou $AB - CD$, jedná se tedy o hledaný grafický rozdíl úseček.
4. 1) úhly AVB a CYD, 2) kružnice k se středem v Y a libovolným poloměrem r, 3) body E, F – průsečíky kružnice k s rameny úhlu CYD, 4) kružnice l se středem v V a poloměrem r, 5) body G, H – průsečíky kružnice l s rameny úhlu AVB, 6) kružnice m se středem v bodě G (na rameni VA) a poloměrem EF, 7) bod J – průsečík kružnic l a m uvnitř úhlu AVB, 8) $\sphericalangle JVB \cong \sphericalangle AVB - \sphericalangle CYD$.
5. 1) úhel o velikosti 60° sestrojíme kružítkem na základě konstrukce rovnostranného trojúhelníku podle věty sss, 2) úhel o velikosti 30° sestrojíme z úhlu o velikosti 60° pomocí osy úhlu, 3) úhel o velikosti 45° sestrojíme z pravého úhlu pomocí osy úhlu.
6. 1) graficky sečteme úhly o velikosti 60° a 45°, 2) graficky sečteme úhly o velikosti 90° a 60°, 3) úhel o velikosti 75° získáme pomocí osy úhlu o velikosti 150°, 4) graficky odečteme úhel o velikosti 15° od přímého úhlu, přičemž úhel o velikosti 15° získáme z úhlu o velikosti 30°pomocí osy úhlu.
7. 1) úsečka $AB, |AB| = c$, 2) kružnice $k(A, b)$, 3) kružnice $l(B, a)$, 4) bod C – průsečík kružnic k a l.
8. 1) úsečka $BC, |BC| = a$, 2) kružnice $k(C, b)$, 3) polopřímka BE, která svírá se stranou BC úhel γ, 4) bod A – průsečík polopřímky BE s kružnicí k.
9. 1) úsečka AB, 2) polopřímka AE, která svírá s úsečkou AB úhel α, 3) polopřímka BF, která svírá s úsečkou AB úhel β, 4) bod C – průsečík polopřímek AE a BF.

10. úsečka AB, $|AB| = c$, 2) kružnice k se středem v bodě B a poloměrem a, 3) polopřímka AE, která svírá s úsečkou AB úhel α, 4) bod C – průsečík kružnice k a polopřímky AE.
11. Úsečku AB máme rozdělit v poměru $m : n$. Sestrojíme pomocnou polopřímku AX, na kterou od bodu A kružítkem naneseme $m + n$ shodných dílů. Poslední bod (označíme N) na polopřímce AX spojíme úsečkou s bodem B. Vedeme rovnoběžku s úsečkou BN, která prochází m-tým bodem. Průsečík této přímky s úsečkou AB dělí úsečku AB v poměru $m : n$.
12. 1) b, 2) $p \parallel b$ ve vzdálednosti v_b, 3) τ – Thaletova kružnice nad b, 4) C průsečík p a τ.
13. 1) AB, 2) $k(B, v_b)$, 3) τ – Thaletova kružnice nad AB, 4) $E \in \tau \cap k$, $\mapsto AE$, 5) $\mapsto BF$; $|ABF| = 120°$, 6) $C \in\mapsto AE \cap\mapsto BF$.
14. 1) $BC, |BC| = a$, 2) $p \parallel BC$ ve vzdálenosti v_a od BC v příslušné polorovině vyťaté přímkou BC, 3) $k(C, b)$, 4) $A \in p \cap k$. Podmínky řešitelnosti: $b \geq v_a$. Počet řešení: je-li $b = v_a$, úloha má jedno řešení, je-li $b > v_a$, úloha má dvě řešení.
15. 1) AB, 2) τ_{AB}, 3) $k(A, 5\text{ cm})$, 4) $D \in \tau_{AB} \cap k$, 5) $\mapsto BD$, 6) $p; p||AB \wedge |p, AB| = 4{,}5\text{ cm}$, 7) $C; C \in\mapsto BD \cap p$, 8) trojúhelník ABC.
16. 1) BC, 2) $k(B, c)$, 3) S – střed BC, 4) $l(S, t_a)$, 5) $A \in k \cap l$.
17. 1) BC, 2) τ – Thaletova kružnice nad průměrem BC, 3) $k(B, v_b)$, 4) $D \in \tau \cap k$, 5) $\mapsto BD$, 6) S – střed úsečky BC, 7) $l(S, t_a)$, 8) $A \in\mapsto BD \cap l$.
18. 1) $BB_0 = v_b$, 2) $k = \{X \in \rho : |\notin \sphericalangle BXB_0| = \alpha\}$, 3) $p; p \perp BB_0$ a $B_0 \in p$, 4) $A \in k \cap p$, 5) $l(B, t_b)$, 6) $B_1 \in p \cap l$, 7) $C; S(B_1): A \to C$.
19. 1) AC, 2) $p; p \parallel AC$ ve vzdálenosti v_b, 3) $k(C, 2t_c)$, 4) $D \in p \cap k$, 5) S – střed úsečky CD, 6) $\mapsto AS$, 7) $B \in p \cap\mapsto AS$.
20. Trojúhelník BCT sestrojíme podle věty sss: 1) BC, 2) $k\left(B, \frac{2}{3}t_b\right)$, 3) $l\left(C, \frac{2}{3}t_c\right)$, 4) $T \in k \cap l$, 5) $\mapsto BT$, 6) $\mapsto CT$, 7) $S_1; S_1 \in\mapsto BT$ a $|BS_1| = t_b$, 8) $S_2; S_2 \in\mapsto CT$ a $|CS_1| = t_c$, 9) $A \in\leftrightarrow BS_1 \cap\leftrightarrow BS_2$.
21. Doplníme trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABCD$, kde $|AB| = c, |CD| = 2t_c, |CA| = b$; platí $|AD| = |BC| = a$. Konstrukce: 1) trojúhelník ADC (podle věty sss), 2) rovnoběžník $ADBC$. Podmínky řešitelnosti: trojúhelníkové nerovnosti $(b + a > 2t_c) \wedge (a + 2t_c > b)$ $\wedge (2t_c + b > a)$. Počet řešení: jedno.
22. Využíváme vlastností střední příčky trojúhelníku: 1) S_a, S_b, S_c, 2) trojúhelník $S_aS_bS_c$, 3) $p \parallel S_bS_c$ a $S_a \in p$, 4) $r \parallel S_aS_c$ a $S_b \in r$, 5) $q \parallel S_bS_a$ a $S_c \in q$, 6) $A \in r \cap q, B \in p \cap q$, $C \in p \cap r$. Podmínky řešitelnosti: Jestliže zadané body nejsou kolineární, úloha má vždy právě jedno řešení. Jsou-li zadané body kolineární, úloha nemá řešení.
23. 1) BC, 2) trojúhelník BCS, kde S je střed kružnice opsané (podle věty sss), 3) $k(S, r)$, $l = \{X \in \rho : |\sphericalangle BXC| = \alpha\}$, 4) $A \in k \cap l$.
24. 1) $AB = c$, 2) $p \parallel\leftrightarrow AB$ ve vzdálenosti v_c, 3) o – osa úsečky AB, 4) $k(A, r)$, 5) $S \in k \cap o$ – střed kružnice opsané, 6) $l(S, r)$, 7) $A \in p \cap l$.
25. 1) $\mapsto AX$, 2) $\mapsto AY$; $|\sphericalangle XAY| = \alpha$, 3) $p; p \parallel\leftrightarrow AX$ v polorovině AXY ve vzdálenosti ρ, 4) $q; q \parallel\leftrightarrow AY$ v polorovině AYX ve vzdálenosti ρ, 5) $S \in p \cap q$ – střed kružnice

vepsané, 6) $k(S,\rho)$, 7) $s; S \in s$ a přímky p, s svírají úhel β, 8) t; $S \in t$ a $s \perp t$, 9) $T \in k \cap t$, 10) $v; T \in v$ a $v \perp t$, 11) $B \in \mapsto AX \cap v$, 12) $C \in \mapsto AY \cap v$.

26. 1) $CC_0 = v_c$, 2) $k = \{X \in \rho: |\sphericalangle CXC_0| = \beta\}$, 3) $p; p \perp CC_0$ a $C_0 \in p$, 4) $B \in k \cap p$, 5) $q \parallel p$ ve vzdálenosti ρ, 6) $r \parallel\leftrightarrow BC$ ve vzdálenosti ρ, 7) $S \in q \cap r$ – střed kružnice vepsané, 8) $k(S,\rho)$, 9) τ – Thaletova kružnice nad průměrem SC, 10) $T \in k \cap \tau$, 11) $A \in \mapsto CT \cap\mapsto BC_0$.
27. 1) AC; $|AC| = 2r$, 2) τ – Thaletova kružnice nad průměrem AC, 3) o – osa úsečky AC, 4) $B \in \tau \cap o, D \in \tau \cap o$.
28. 1) trojúhelník KLM (věta Ssu: $KL = k, KM = u, |\sphericalangle KLM| = 90°$), 2) $k_1(L,u)$, 3) $k_2(M,k)$, $N \in k_1 \cap k_2$.
29. 1) $AC, |AC| = 2r$, 2) $\mapsto AX$; $|\sphericalangle CAX| = 25°$, 3) τ – Thaletova kružnice nad průměrem AC, 4) $B \in \tau \cap\mapsto AX$, 5) S – střed úsečky AC, 6) $D; S(S): B \to D$.
30. 1) AC, 2) τ – Thaletova kružnice nad průměrem AC, 3) $k(C,b)$, 4) $B \in k \cap \tau$, 5) $p; p \parallel BC$ a $A \in p$, 6) $D; D \in p \cap \tau$. Dvě řešení v rovině.
31. 1) p, q; $p \parallel q$ a $|pq| = |GH|$, 2) o – osa pásu pq, 3) $S \in o$, 4) $r; r \perp o$ a $S \in r$, 5) $S_a \in r \cap p$, 6) $\mapsto SX$; $|\sphericalangle S_a SX| = \frac{82°}{2}$, 7) $A \in\mapsto SX \cap p$, 8) ostatní vrcholy zobrazením v osové souměrnosti s přímkami o, r.
32. 1) trojúhelník ABC (věta sss: $|AB| = |BC| = a, |AC| = e$), 2) $p; p \parallel AB$ a $C \in p$, 3) $q; q \parallel BC$ a $A \in q$, 4) $D \in p \cap q$.
33. 1) $\sphericalangle XLY, |\sphericalangle XLY| = \lambda$, 2) o – osa úhlu λ, 3) $s(L,e)$, 4) $N \in o \cap s$, 5) body K, M pomocí rovnoběžnosti.
34. 1) $AB = a$, 2) $p; p \parallel AB$ ve vzdálenosti 2ρ od AB, 3) $k(B,a)$, 4) $C \in p \cap k$, 5) o – osa úhlu ABC (nebo bodem C sestrojíme rovnoběžku se stranou AB), 6) $D \in o \cap p$.
35. 1) trojúhelník ABC (věta sss), 2) S – střed AC, 3) $D; S(S): B \to D$.
36. 1) PN, 2) S – střed úsečky PN, 3) $k = \{X \in \rho: |\sphericalangle PXN| = 30°\}$, 4) $l\left(S, \frac{1}{2}|MO|\right)$, 5) $O \in k \cap l$, 6) $M; S(S): O \to M$.
37. 1) $p, q; p \parallel q$ ve vzdálenosti v_a, 2) $A \in p$ libovolně, 3) $r; A \in r$ a r svírá s p úhel o velikosti α, 4) $s; s \parallel r$ ve vzdálenosti v_b od r, 5) $B \in p \cap s$, 6) $C \in q \cap s$, 7) $D \in q \cap r$.
38. 1) EF, 2) trojúhelník EFG (věta sss), 3) τ – Thaletova kružnice nad průměrem EF, 3) $P \in EG \cap \tau$, 4) $\mapsto FP$, 5) $p; p \parallel EF$ a $G \in p$, 6) $H \in\mapsto FP \cap p$.
39. Předpokládejme, že $a > c$. 1) $AB = a$, 2) $E; E \in AB$ a $AE \cong c$, 3) trojúhelník EBC (podle věty sss: $|EB| = a - c$, $|BC| = b$, $|CE| = d$, 4) $D; T(\boldsymbol{EA}): C \to D$. Podmínky řešitelnosti: Jsou splněny trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník EBC, tj. $(a - c) + b > d, b + d > (a - c), (a - c) + d > b$. Pak existuje jedno řešení v polorovině dané přímkou AB.
40. Sestrojte obraz přímky a ve středové souměrnosti se středem v bodě A. Podle polohy zadaných útvarů má úloha dvě, jedno nebo nula řešení.
41. Přímka LN je osou souměrnosti trojúhelníku LXY.

42. 1) Sestrojte osu úsečky KL a průsečík této osy s přímkou d je hledaný bod D. 2) Zobrazte jeden z bodu v osové souměrnosti s osou d, spojte druhý bod s tímto zobrazeným bodem.
43. Využijte osovou souměrnost s osou c.
44. Využijte osovou souměrnost s osou o takovou, že $C \in o$ a $o \perp c$.
45. 1) $DB = f$, 2) o – osa úsečky DB, 3) $k(B, a)$, 4) $A \in o \cap k$, 5) $l(A, e)$, 6) $C \in o \cap l$.
46. Zobrazte trojúhelník ABC ve středové souměrnosti se středem v bodě M.
47. Zobrazte body A, B ve středové souměrnosti se středem v bodě S, tím získáte přímky KL a MN.
48. 1) trojúhelník EFH (podle věty sss), 2) S – střed úsečky FH, 3) $G; S(S): E \rightarrow G$.
49. Jednu z kružnic zobrazte ve středové souměrnosti se středem X. Jestliže kružnice nesplývají nebo se nedotýkají jedním bodem, úloha má dvě řešení.
50. Jednu z kružnic otočte kolem bodu M o $60°$, eventuálně o $-60°$.
51. Jednu z přímek otočte kolem bodu A o úhel o velikosti $90°$, eventuálně $-90°$.
52. Určete střed rovnoběžníku a rovnoběžník kolem něj otočte o úhel o velikosti $90°$, eventuálně $-90°$.
53. Jednu z přímek posuňte v translaci $T(\boldsymbol{GH})$.
54. Sestrojte osu pásu ab, přímku c posuňte ve směru kolmém o r (r je polovina vzdálenosti přímek a, b). V průsečíku leží střed kružnice.
55. Sestrojte pomocnou kružnici k' o poloměru r tak, aby na b vytínala tětivu délky r; užijte posunutí, jehož směr je rovnoběžný s přímkou b.
56. $B \in k \cap l(A, r)$; užijte $T(\boldsymbol{AB})$.
57. Použijte Pythagorovu větu nebo Eukleidovu větu.
58. Např. $x = a\sqrt{2}$, tedy $x : a = \sqrt{2} : 1$, x je čtvrtá geometrická úměrná úseček $a, 1, \sqrt{2}$.
59. Užijte grafické sčítání a odčítání úseček, čtvrtou geometrickou úměrnou a Pythagorovu větu.
60. $|KL| = k, |LM| = l, |KM| = o, |MS| = \frac{kl}{o}$.
61. Délka strany čtverce $x = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$.

8 Konstrukční úlohy řešené v GeoGebře

8.1 Úvod

GeoGebra je multiplatformní dynamický software, který umožňuje vytvářet dynamické geometrické objekty, vykreslovat grafy funkcí, počítat s derivacemi, maticemi a mnoho dalšího. S používáním softwarů tohoto typu se rozšířil do světa výuky matematiky nový pojem, tzv. **dynamická geometrie**, příp. dynamická matematika. Dynamická geometrie přináší do roviny „třetí rozměr“ – pohyb. Využití pohybu je tím, co nám v prostředí dynamické geometrie umožňuje bádat a objevovat zcela novým způsobem.

Učiteli a žákům nabízí tento software ve výuce matematiky řadu využití. Učitel může připravené dynamické modely využít k výuce při demonstraci probíraného učiva, aby si žáci učivo lépe vizualizovali a došlo k jeho porozumění. Statické modely vytvořené v GeoGebře může učitel zařadit například do pracovních listů. Žák se při práci s tímto softwarem setkává s větším množstvím modelů (překvapivých modelů). Žák může v matematice bádat i ověřovat platnost matematických vět na větším množství modelů, což může vést k zrychlení práce. Žákovi může modelování v GeoGebře pomoci k hlubšímu porozumění matematickým pojmům, a to nejen tím, že je aktivita při modelování přenesena zejména na žáka, ale i tím, že učiteli může sloužit jako zpětná vazba o dosavadních znalostech žáka v daném učivu, jelikož k úlohám musí žák přistupovat mnohdy komplexněji a musí při řešení přemýšlet v širších souvislostech. V neposlední řadě může práce s tímto softwarem žáky motivovat ve výuce a být určitým zpestřením dosavadní výuky. Při řešení konstrukčních úloh může žák pomocí GeoGebry kompenzovat své grafomotorické deficity (žáci s dysgrafií) a narýsovat přesnější konstrukci. Avšak nesmíme zapomínat, že úloha konstrukčních dovedností žáků bez využití tohoto softwaru je nezastupitelná.

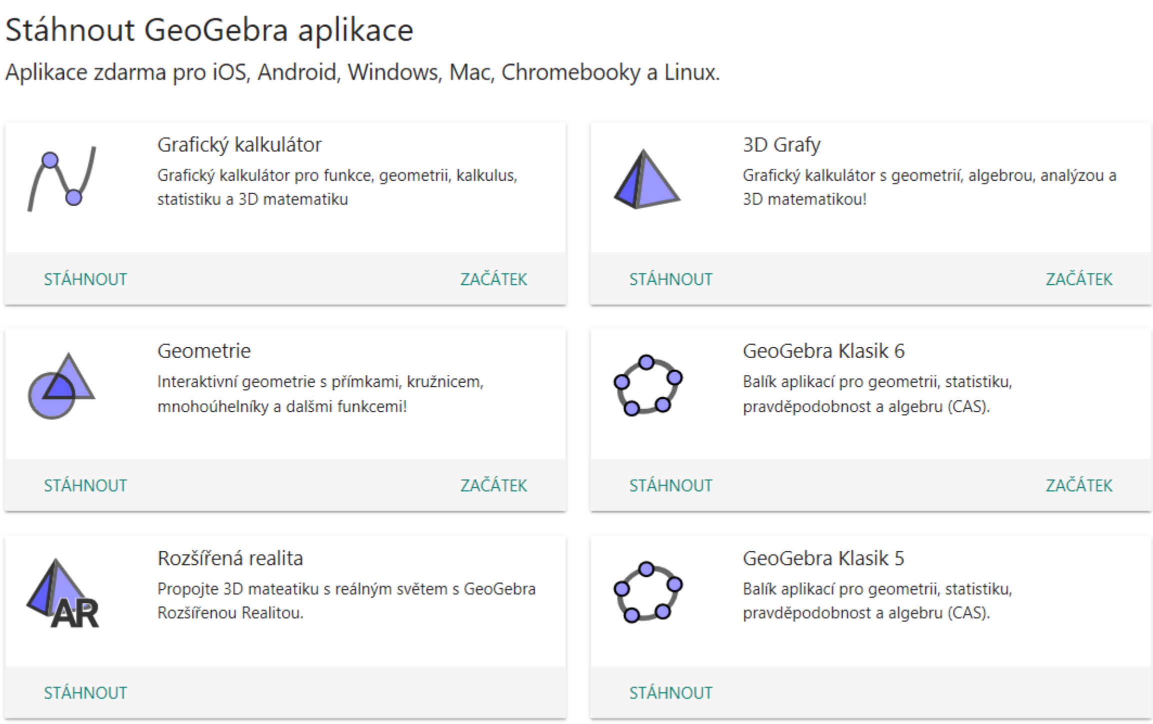
Při užití softwaru GeoGebra ve výuce matematiky je důležité žáky upozornit na to, že software není dokonalý a vyskytují se v něm některé matematické nepřesnosti. Například nerozlišuje pojmy kružnice a kruh nebo kulová plocha a koule.

8.2 Instalace

Matematický software je volně stažitelný na stránkách https://www.geogebra.org/download (obr. 8.1). Zde si můžeme software stáhnout bezplatně do libovolného počtu počítačů. K dispozici je ke stažení: Grafický kalkulátor, Geometrie, Rozšířená realita, 3D Grafy, GeoGebra Klasik 5 a GeoGebra Klasik 6[8]. Stačí mít v počítači (tabletu[9]), kam aplikaci chceme stáhnout, nainstalovanou Javu (lze stáhnout zdarma na webu https://www.java.com/en/download/) a kliknout na tlačítko „stáhnout“. Pokud si nechceme program stáhnout do počítače, můžeme zvolit jeho online verzi, kterou nalezneme také na těchto stránkách. Stačí kliknout na tlačítko „začátek“ a můžeme ihned pracovat online v daném prostředí. V rámci toho textu budeme používat program GeoGebra Klasik 6, který nabízí soubor vzájemně propojených prostředí.

[8] Aplikace GeoGebra Klasik 5 a GeoGebra Klasik 6 nabízí uživateli soubor vzájemně propojených prostředí pro dynamickou geometrii v rovině (jmenuje se Nákresna) i v prostoru (tzv. Grafický náhled 3D), počítačovou algebru (CAS) a tabulkový procesor (Tabulka).

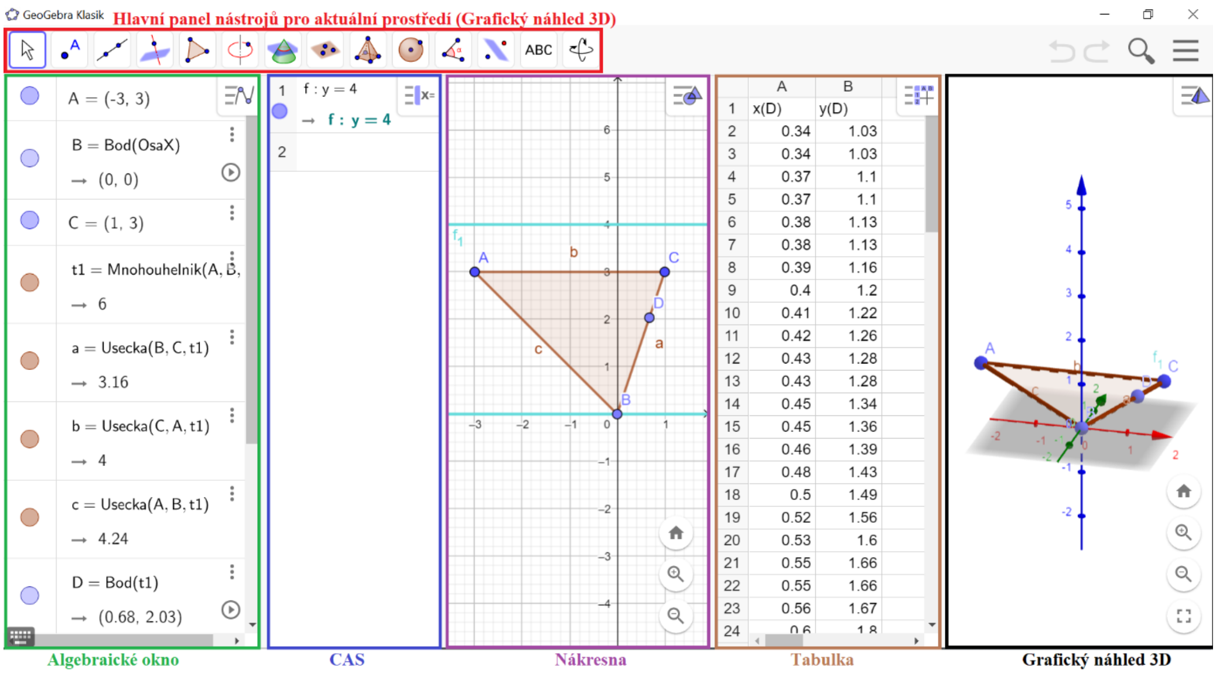
[9] Program je dostupný pro všechny rozšířené operační systémy a je možno ho instalovat i na tablety.



Obrázek 8.1: Aplikace ke stažení na www.geogebra.org

Prostředí GeoGebry Klasik 6

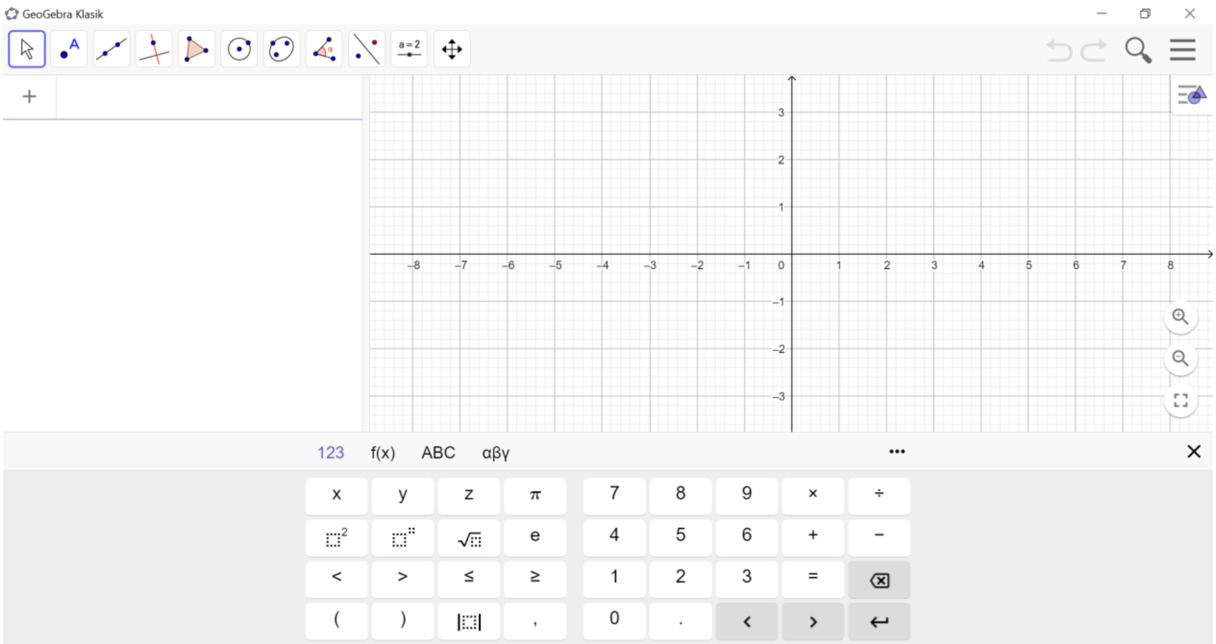
GeoGebra Klasik 6 nabízí uživateli soubor vzájemně propojených prostředí (obr. 8.2) pro dynamickou geometrii v rovině (Nákresna) a v prostoru (Grafický náhled 3D), počítačovou algebru (CAS) a tabulkový procesor (Tabulka).



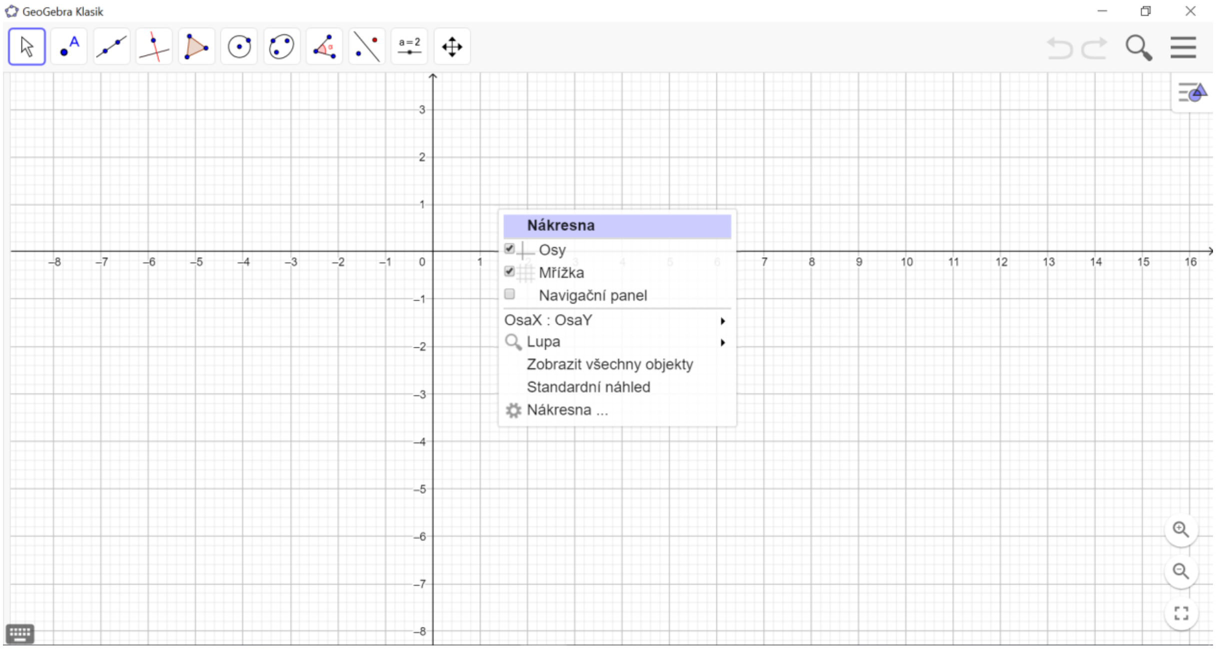
Obrázek 8.2: Propojenost prostředí v GeoGebře

Na obrázku 8.2 můžeme vidět propojenost jednotlivých prostředí. V Nákresně jsme zobrazili body A, B, C, které jsou nutné ke konstrukci trojúhelníku, následně jsme trojúhelník ABC zkonstruovali. Jelikož v Nákresně máme předkreslenou kartézskou soustavu souřadnic, v Algebraickém okně se nám zobrazí souřadnice bodu A, B, C. V Algebraickém okně máme také zaznamenanou posloupnost jednotlivých kroků. Trojúhelník ABC se nám zobrazil také v Grafickém náhledu 3D. V CAS jsme zapsali předpis lineární funkce d: $y = 4$, graf lineární funkce se nám zobrazil v Nákresně. Body v tabulce zaznamenávají souřadnice bodu D, který leží na úsečce BC. Jelikož jsme v prostředí dynamické geometrie, můžeme bod D na úsečce BC posouvat. Poloha bodu D se pak zaznamenává do tabulky. Vlastnost vícenásobné reprezentace zadaných objektů v GeoGebře vede přirozeně k pochopení vztahu mezi geometrií a algebrou nebo k objevení možnosti vyjádření nějaké závislosti jak předpisem, tak i tabulkou a grafem. Uživatel si může zvolit, zda bude současně využívat více prostředí, nebo bude pracovat v jednom a ostatní skryje.

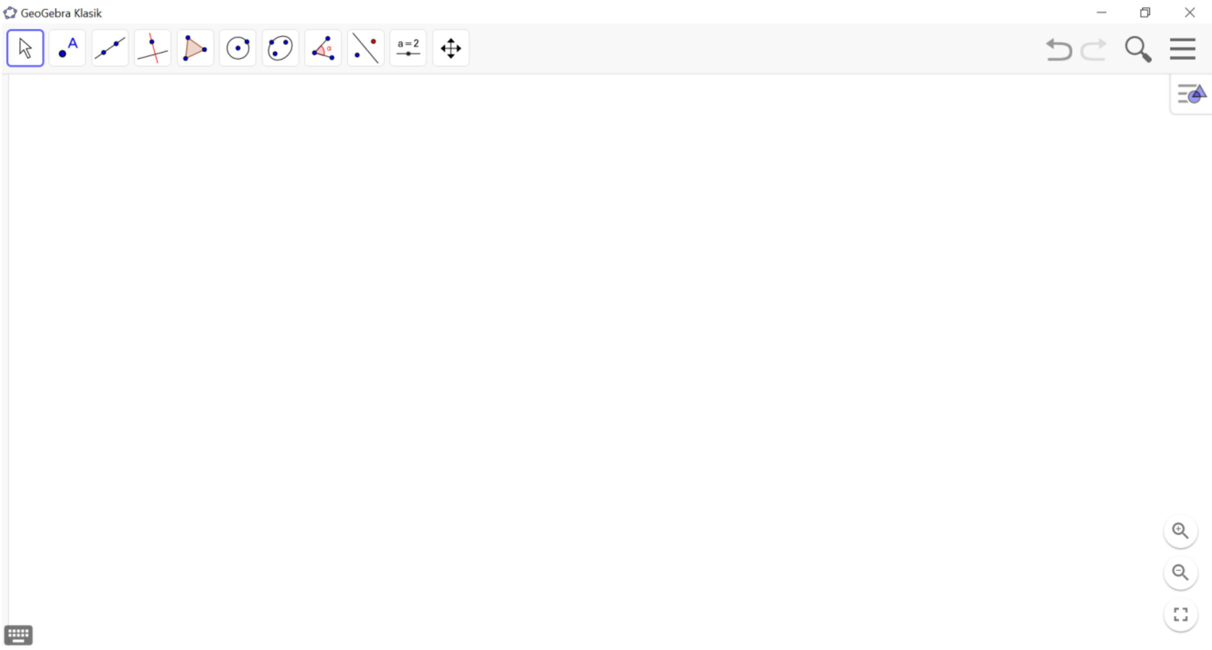
V dalším textu budeme používat prostředí Nákresny. Po spuštění nainstalované aplikace se GeoGebra zobrazí ve výchozím nastavení (obr. 8.3). Toto nastavení si přizpůsobíme. Minimalizujeme Algebraické okno a zavřeme „klávesnici“. Kliknutím pravým tlačítkem myši na Nákresnu se zobrazí nabídka „Nákresna“ (obr. 8.4). V nabídce vypneme políčko Osy a Mřížka (obr. 9.4). Dostaneme upravené nastavení GeoGebry Klasik 6, s kterým budeme dále pracovat.



Obrázek 8.3: Výchozí nastavení GeoGebry Klasik 6



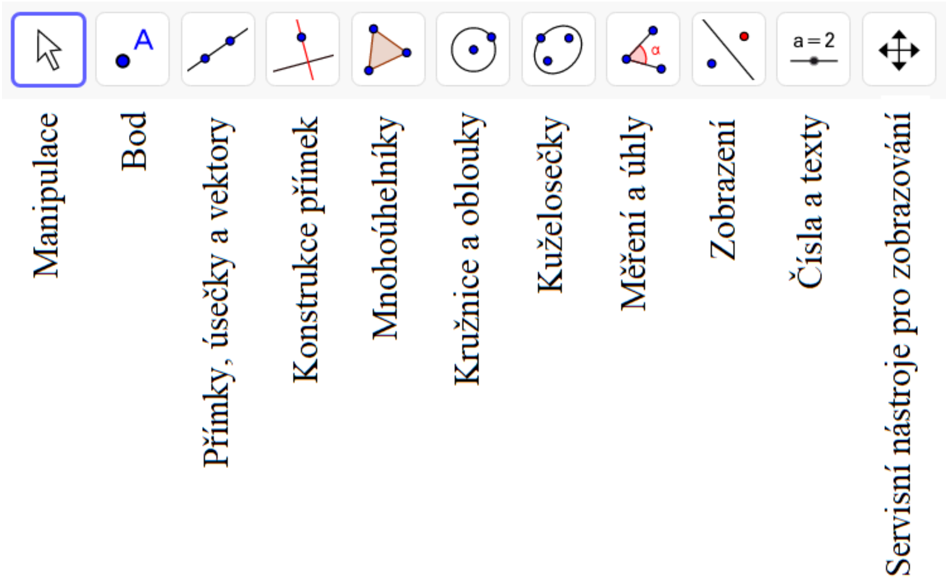
Obrázek 8.4: Úprava výchozího nastavení GeoGebry Klasik 6



Obrázek 8.5: Upravené nastavení GeoGebry Klasik 6

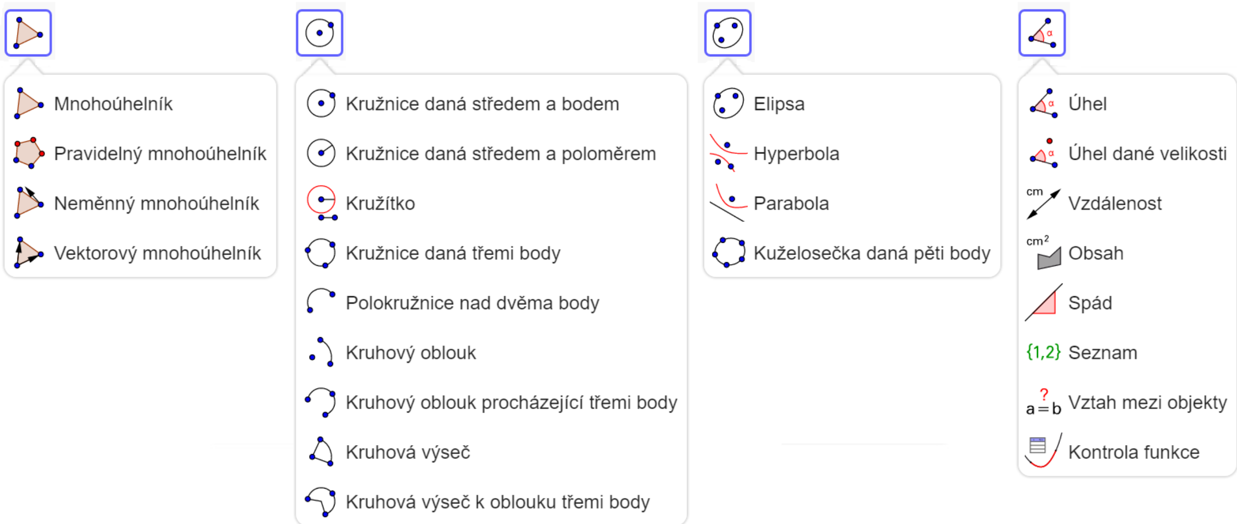
Hlavní panel nástrojů pro Nákresnu

Pomocí nástrojů umístěných v **Hlavním panelu nástrojů** (obr. 8.6) sestrojujeme v Nákresně geometrické konstrukce. K dispozici jsou následující sady nástrojů (obr. 8.7, 8.8, 8.9).

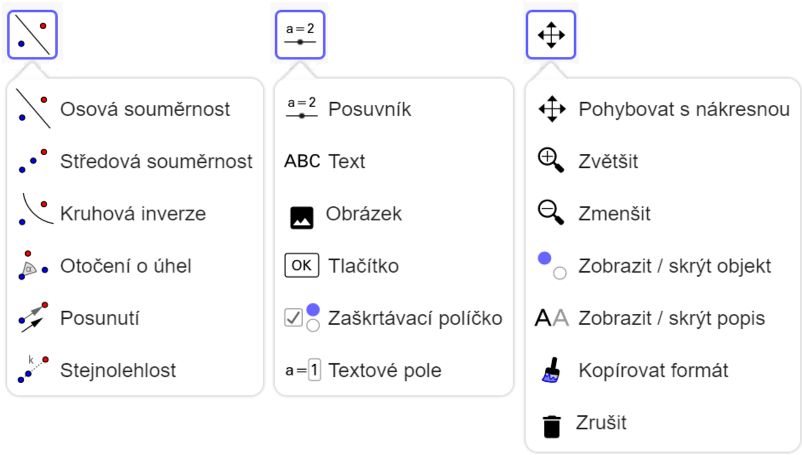


Obrázek 8.6: Hlavní panel nástrojů pro Nákresnu

Obrázek 8.7: Sady nástrojů 1



Obrázek 8.8: Sady nástrojů 2



Obrázek 8.9: Sady nástrojů 3

8.3 Základní konstrukce

V první části této publikace jsme k sestrojení hledaných útvarů využívali pouze pravítka a kružítka. Uvedli jsme si, že takto proveditelné konstrukce se nazývají **eukleidovské** a seznámili se se **základními eukleidovskými konstrukcemi** (viz kapitola 1). V následujícím textu budeme konstruovat hledané útvary pomocí programu GeoGebra Klasik 6, který nám nabízí různé sady nástrojů (viz Prostředí GeoGebry Klasik 6). Řešení konstrukční úlohy, stejně jako v eukleidovské geometrii, spočívá v nalezení takové posloupnosti základních konstrukcí, které umožní sestrojit všechny neznámé body nebo útvary.

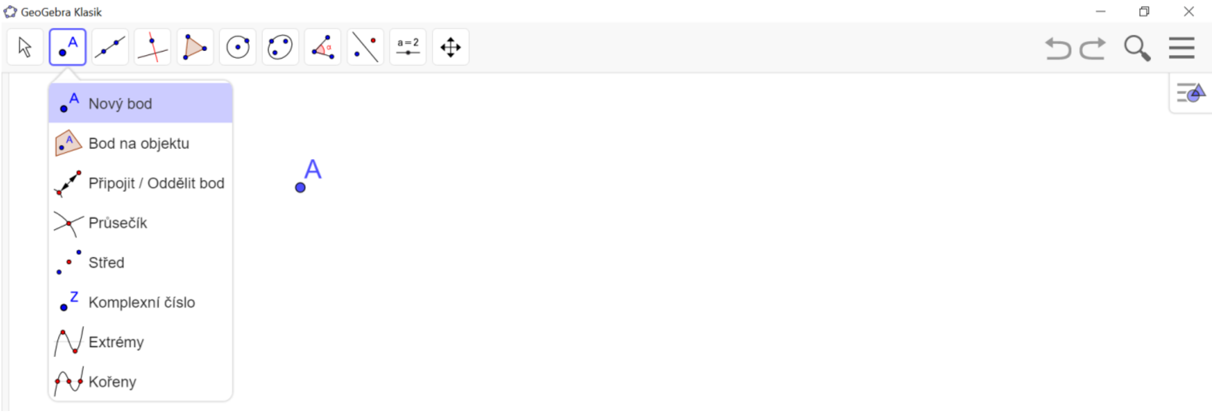
Základní konstrukce GeoGebry, které dále využíváme v prostředí Nákresny, jsou:

1. Sestrojit bod.
2. Sestrojit přímku, která prochází dvěma různými danými body.
3. Sestrojit polopřímku danou počátkem a jedním dalším bodem.
4. Sestrojit kolmici k dané přímce, která prochází daným bodem.
5. Sestrojit rovnoběžku k dané přímce, která prochází daným bodem.
6. Sestrojit úsečku, která je dána jejími krajními body.
7. Sestrojit úsečku dané velikosti, která je dána jedním jejím krajním bodem.
8. Sestrojit bod na objektu (na úsečce, polopřímce, přímce, kružnici aj.).
9. Sestrojit osu úsečky.
10. Sestrojit střed úsečky.
11. Sestrojit kružnici o daném středu a daném bodu, kterým prochází.
12. Sestrojit kružnici o daném středu a daném poloměru.
13. Sestrojit kruhový oblouk o daném středu a daných krajních bodech oblouku.
14. Sestrojit úhel daný vrcholem a dvěma body na ramenech.
15. Sestrojit úhel dané velikosti, při daném rameni úhlu.
16. Sestrojit osu úhlu.
17. Určit průsečík dvou křivek (dvou přímek, dvou kružnic, přímky a kružnice aj.).

18. Sestrojit mnohoúhelník.
19. Sestrojit objekt v daném shodném zobrazení (zobrazit daný objekt v osové souměrnosti s danou osou; zobrazit daný objekt ve středové souměrnosti s daným středem; otočit daný objekt s daným středem otočení o daný úhel; posunout daný objekt s daným počátečním bodem posunutí o daný vektor).

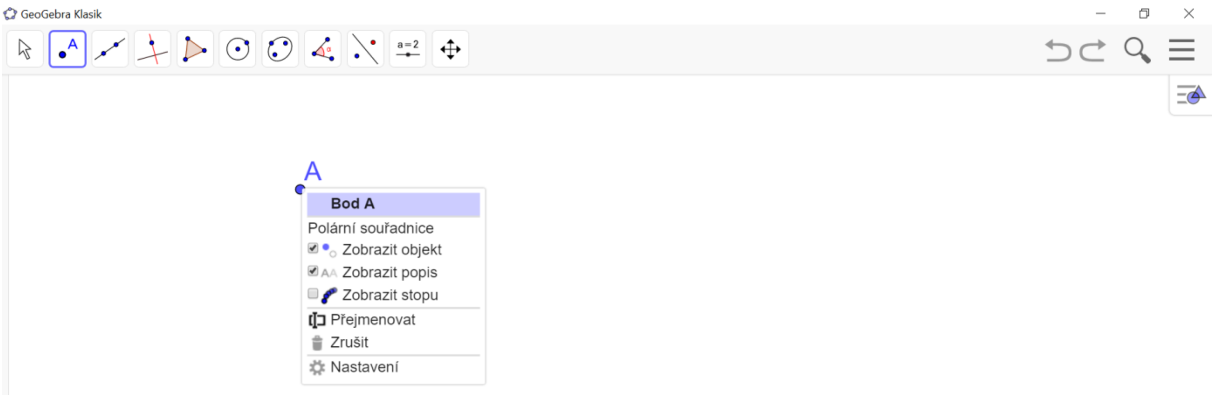
1. Sestrojit bod.

Užitím nástroje „Nový bod" (obr. 8.10) sestrojíme bod A v Nákresně.



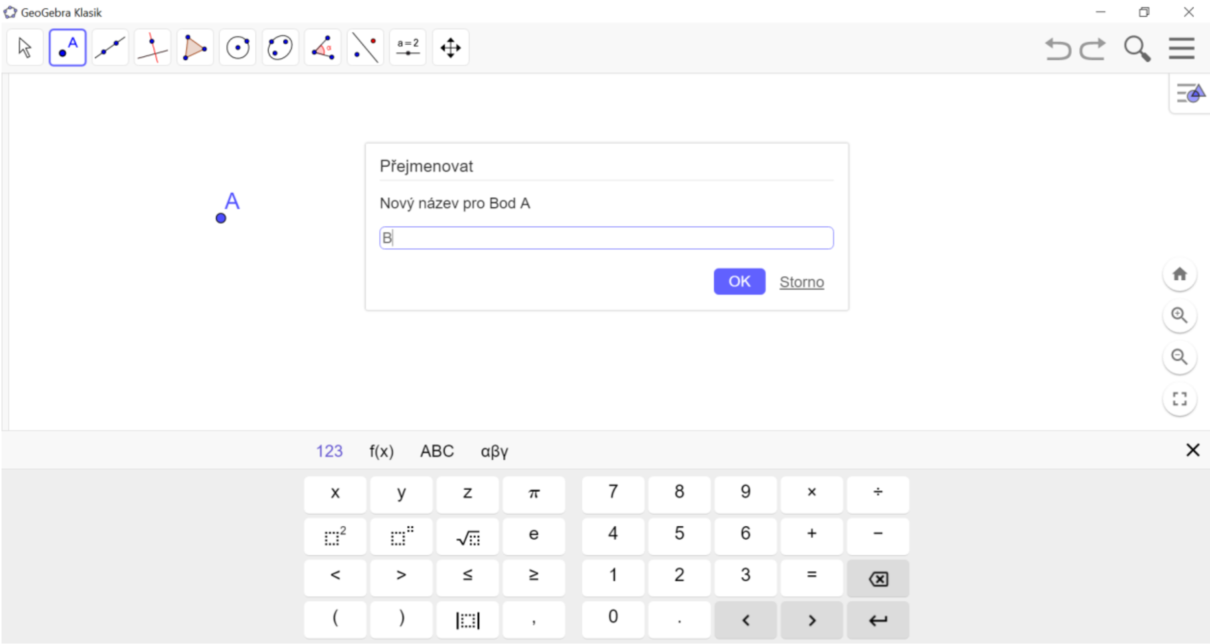
Obrázek 8.10: Základní konstrukce 1

Poznámka: V GeoGebře je přednastaveno pojmenovávání bodů, body se pojmenovávají písmeny postupně podle abecedy.[10] Často však potřebujeme objekty pojmenovat jinak. Bod přejmenujeme tak, že na bod klikneme pravým tlačítkem myši, objeví se nám nabídka „Bod A" (obr. 8.11). Po odkliknutí tlačítka přejmenovat se zobrazí okno „Přejmenovat" spolu s „klávesnicí" (obr. 8.12), kterou můžeme využít k přepsání objektu. Zadáme Nový název pro Bod A a klikneme na tlačítko OK (8.13). Pokud chceme zapsat bod s indexem, do okna pro přejmenování bodu napíšeme například A_1, potom se nám v Nákresně zobrazí bod A_1. Podobně můžeme měnit i názvy dalších objektů.

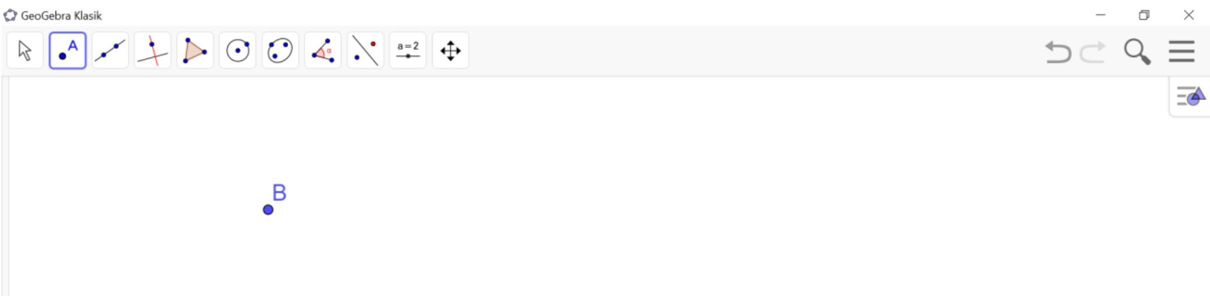


Obrázek 8.11: Přejmenování bodu (1)

[10] S tímto faktem musí učitel při zadávání úloh ve výuce počítat. Buď zadává úlohy tak, aby označování objektů odpovídalo postupnému pojmenovávání podle abecedy, nebo musí žáky upozornit, aby přejmenovali objekty podle zadání úlohy.



Obrázek 8.12: Přejmenování bodu (2)



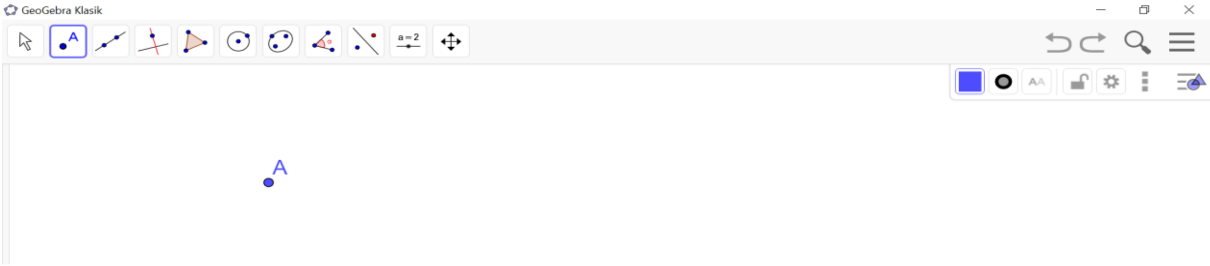
Obrázek 8.13: Přejmenování bodu (3)

Výchozí nastavení GeoGebry nám zobrazuje bod jako puntík. Ve školské matematice je však běžné, že znázorňujeme body jako průsečíky dvou čar.[11] V prostředí GeoGebry si můžeme změnit styl bodu, a to dvěma způsoby: 1. můžeme změnit výchozí nastavení stylu bodu, bod se od tohoto nastavení bude zobrazovat vždy v tomto stylu[12]; 2. můžeme změnit nastavení stylu bodu na jednotlivých bodech.

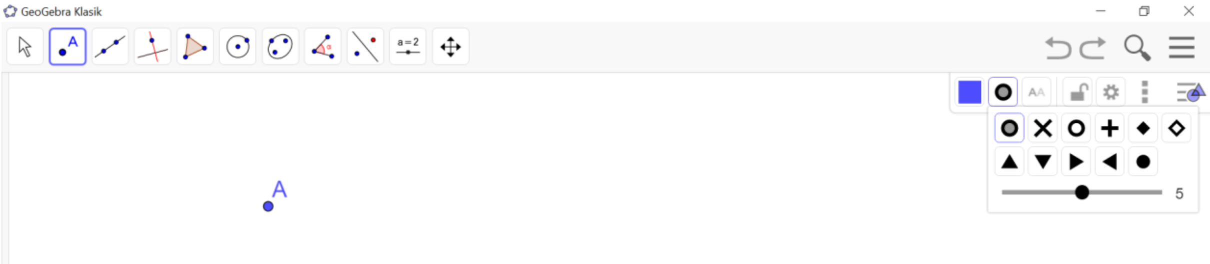
1. způsob: Nejdříve si musíme navolit, že budeme měnit výchozí nastavení pro bod. Kliknutím na sadu nástrojů bod se zobrazí modře ohraničená ikona pro bod . Následně klikneme na tlačítko umístěné v pravém horním rohu okna GeoGebry. Zobrazí se nám nabídka, viz obr. 8.14. Kliknutím na tlačítko se zobrazí nabídka se stylem bodu (obr. 8.15). Po vybrání požadovaného stylu se bude každý další nový bod zobrazovat v tomto stylu (obr. 8.16).

[11] Pokud bude učitel používat výchozí nastavení stylu bodu, je dobré žáky upozornit na fakt, že v programu GeoGebra je nastavení odlišné, než používáme při konstrukcích.

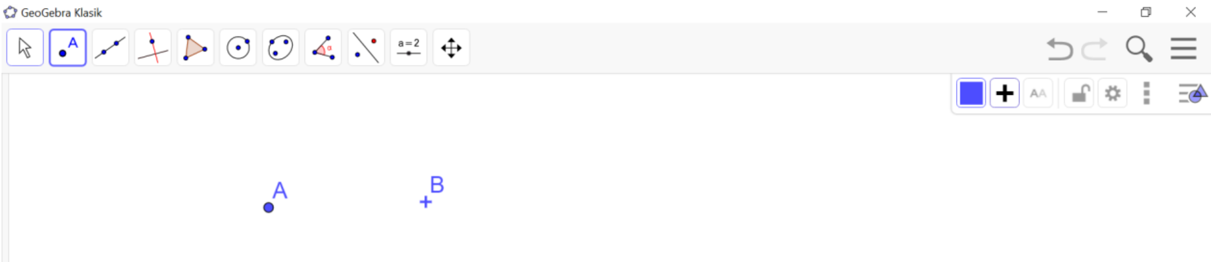
[12] Toto nastavení nelze uložit jako výchozí napořád. Nastavení musíme měnit vždy, když otevřeme program GeoGebra.



Obrázek 8.14: Změna stylu bodu (1)

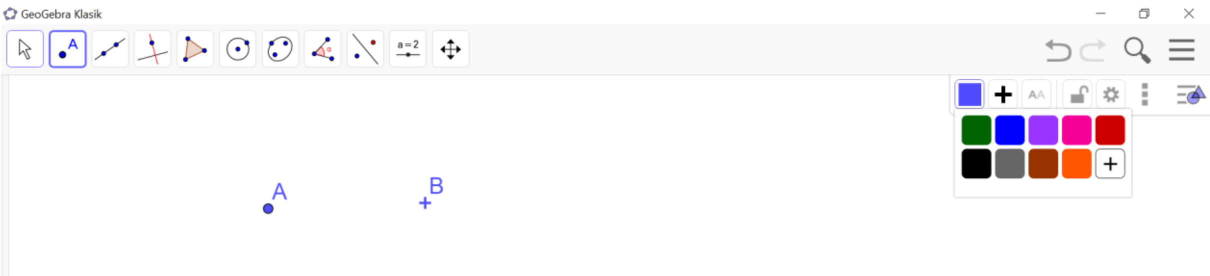


Obrázek 8.15: Změna stylu bodu (2)

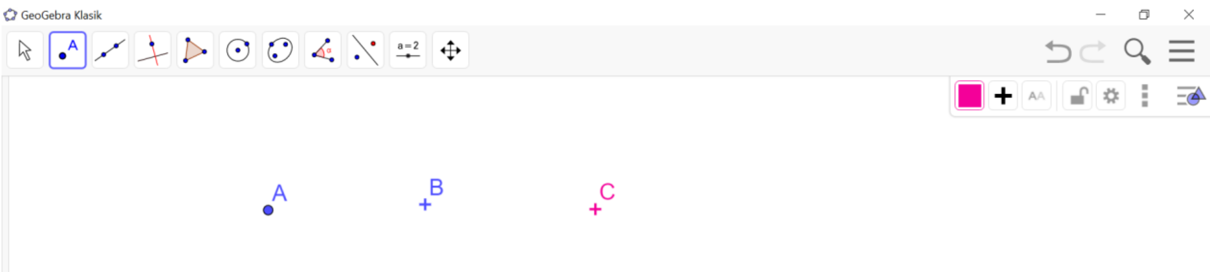


Obrázek 8.16: Změna stylu bodu (3)

Podobně můžeme měnit i výchozí nastavení pro barvu bodu (obr. 8.17, 8.18). U jiných objektů si můžeme obdobně nastavit výchozí nastavení stylu objektu nebo jeho barvu.

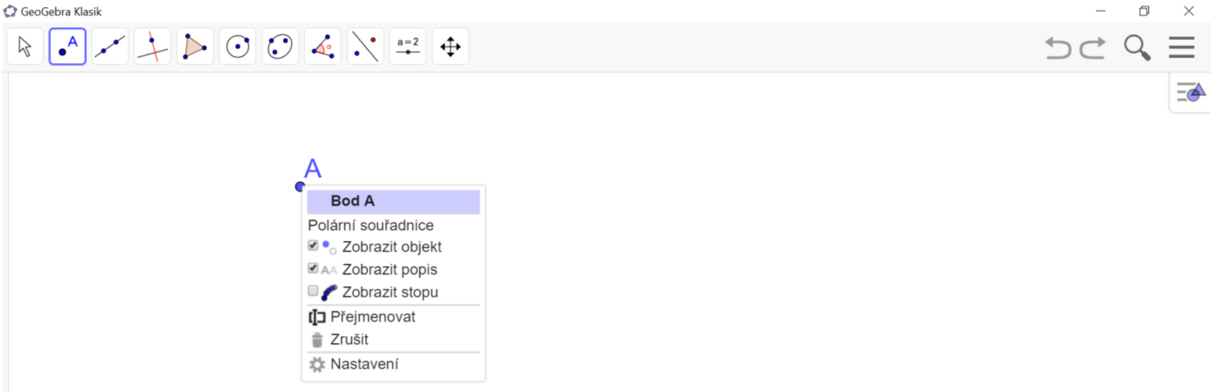


Obrázek 8.17: Změna stylu bodu (4)

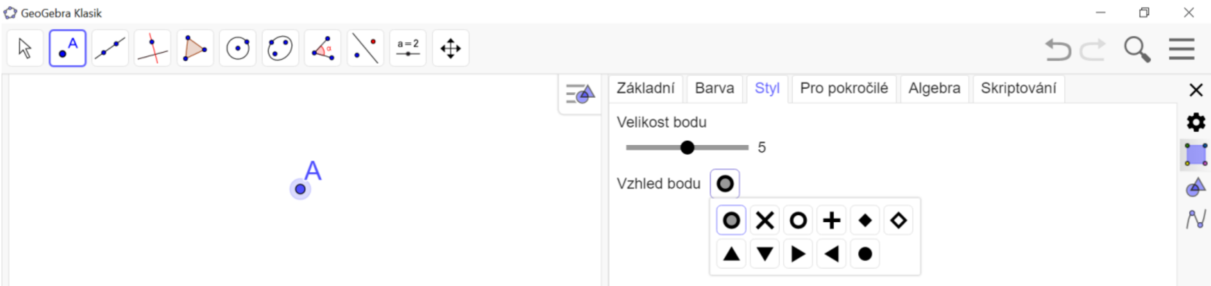


Obrázek 8.18: Změna stylu bodu (5)

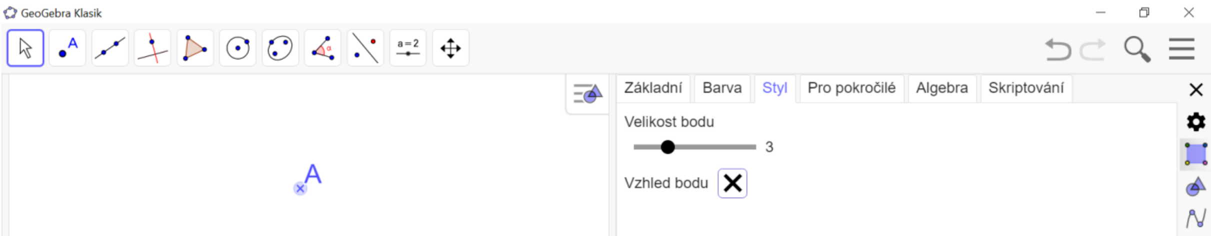
2. způsob: Styl bodu na jednotlivých bodech změníme tak, že na bod A klikneme pravým tlačítkem myši, objeví se nám nabídka „Bod A“ (obr. 8.19). Po odkliknutí tlačítka „Nastavení“ bodu A a kliknutím na tlačítko Styl se zobrazí nabídka pro velikost bodu a jeho vzhled (obr. 8.20, 8.21). Podobně se zobrazí lišta s nastavením bodu A, kde můžeme měnit barvu bodu A (obr. 8.22, 8.23). Podobně můžeme měnit styl a barvu dalších objektů.



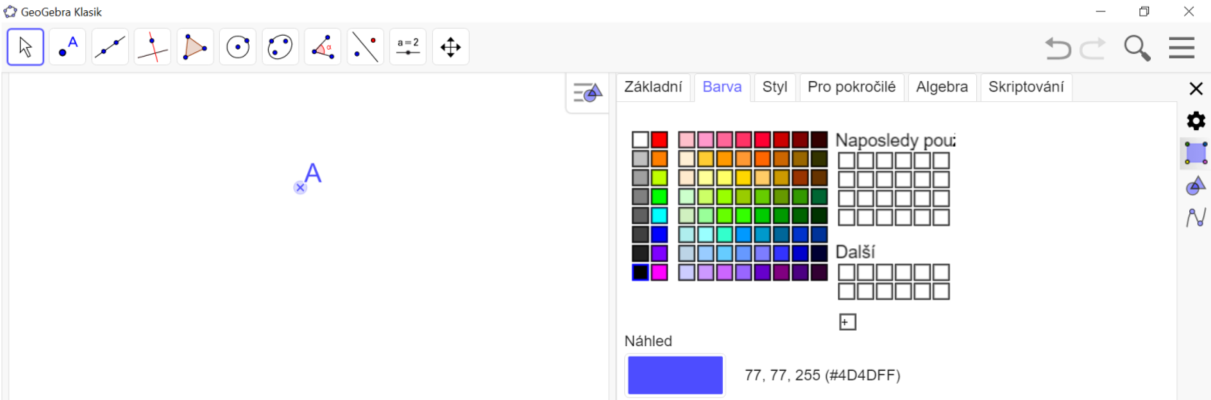
Obrázek 8.19: Změna stylu bodu (6)



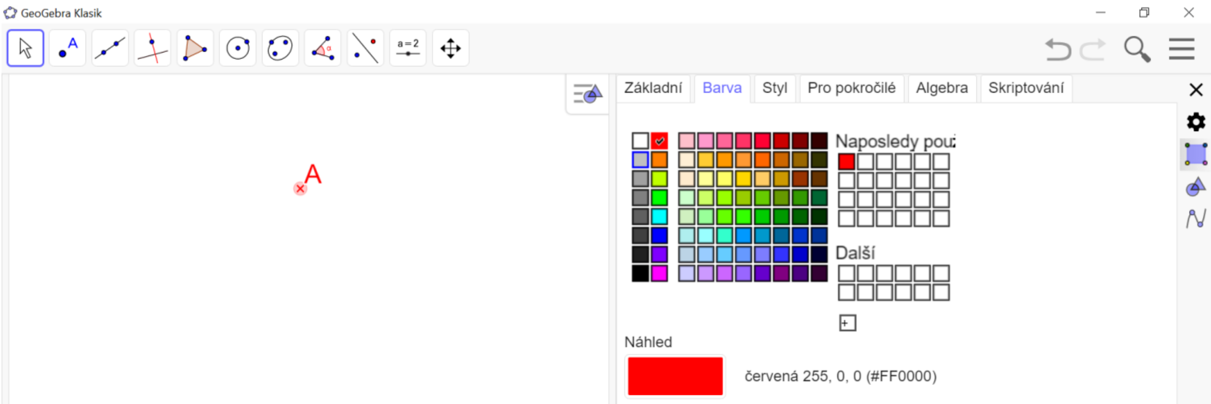
Obrázek 8.20: Změna stylu bodu (7)



Obrázek 8.21: Změna stylu bodu (8)



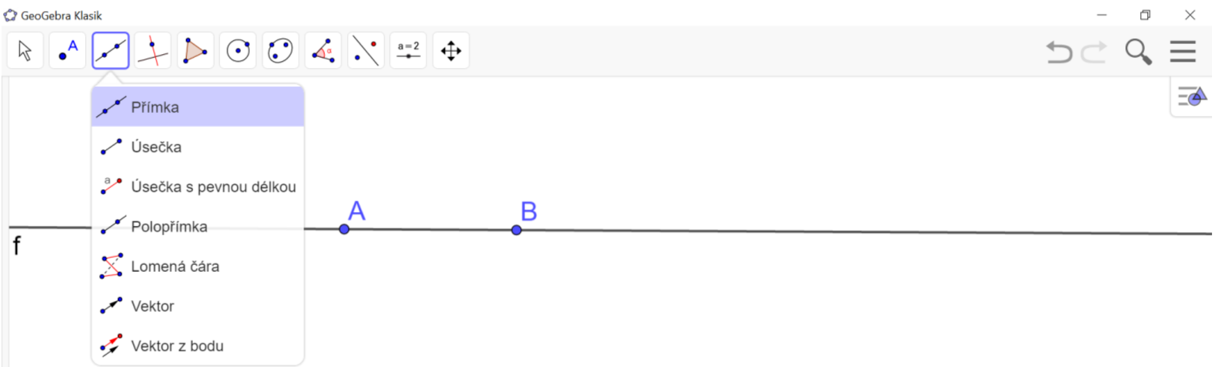
Obrázek 8.22: Změna stylu bodu (9)



Obrázek 8.23: Změna stylu bodu (10)

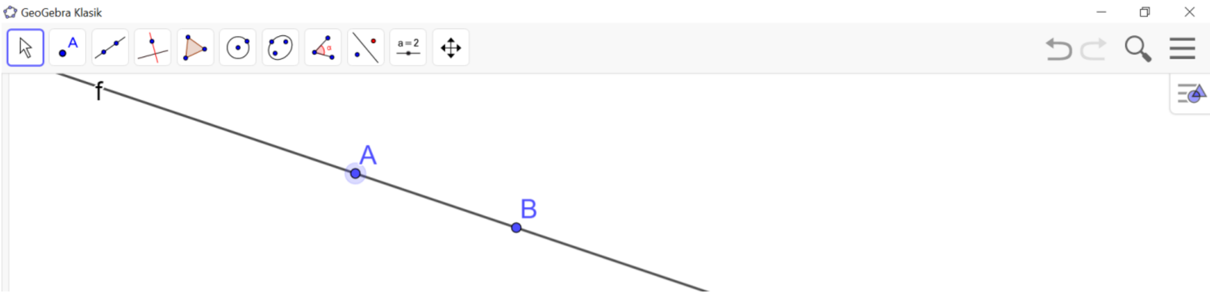
2. Sestrojit přímku, která prochází dvěma různými danými body.

Užitím nástroje „Přímka“ (obr. 8.24) sestrojíme přímku AB procházející body A, B. Přímku sestrojíme kliknutím na dva libovolné různé body (A, B) v Nákresně, na libovolný bod (A) v Nákresně a následně na libovolné místo v Nákresně nebo kliknutím na libovolná dvě různá místa v Nákresně.



Obrázek 8.24: Základní konstrukce 2

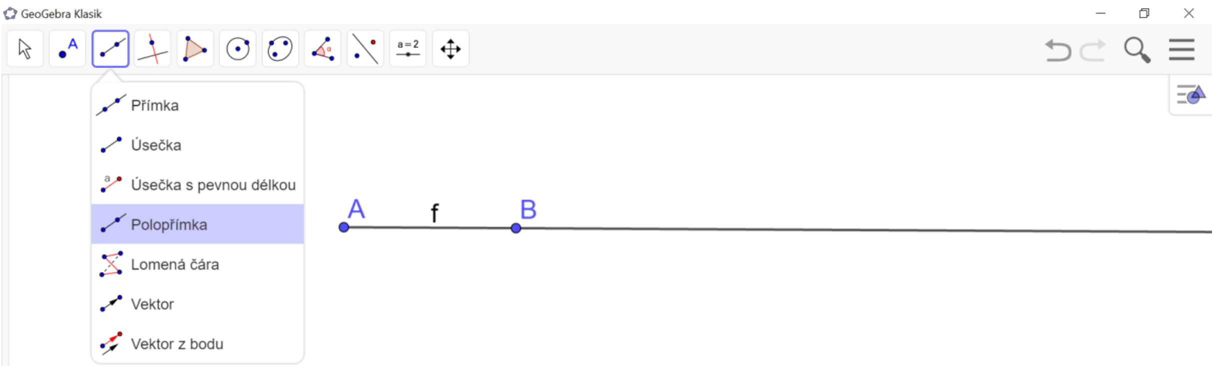
Poznámka: Konstrukce vytvořené v GeoGebře jsou dynamické. Body a útvary jsou na sebe vázané a lze s nimi v rovině (Nákresně) pohybovat. Například při základní konstrukci 2 jsou body A, B vázané na přímku f a přímka f na body A, B. Pokud budeme pohybovat (je třeba kliknout na tlačítko manipulace – ukazovátko) přímkou f, bude se měnit i poloha bodů A, B. Pokud budeme pohybovat bodem A (obr. 8.25) nebo bodem B, bude se měnit i poloha přímky AB.



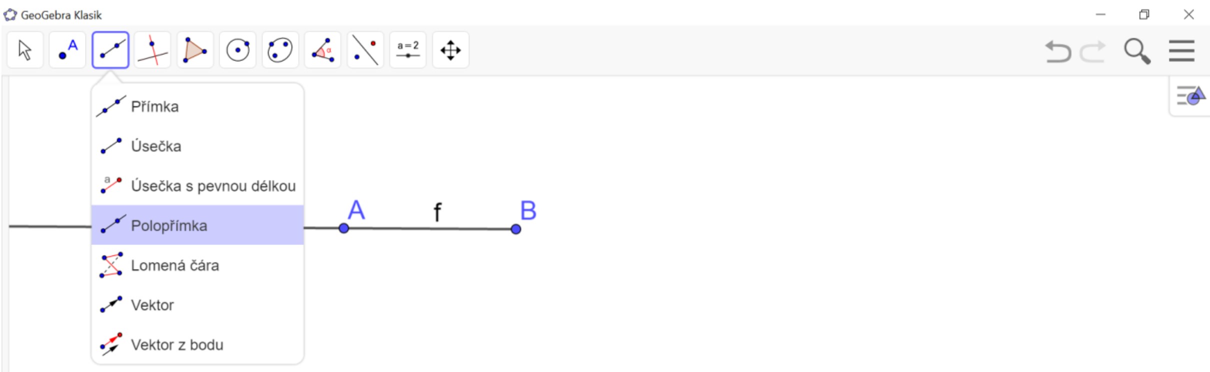
Obrázek 8.25: Dynamická konstrukce

3. **Sestrojit polopřímku danou počátkem a jedním dalším bodem.**

Užitím nástroje „Polopřímka" sestrojíme polopřímku AB danou počátkem A a jedním dalším bodem B. Polopřímku sestrojíme tak, že nejdříve klikneme na bod, který je jejím počátkem (A), a následně na její další bod (B). Body A, B jsou v Nákresně buď předem dané, nebo je můžeme vytvořit kliknutím na libovolná dvě různá místa v Nákresně. Pro sestrojení polopřímky AB (obr. 8.26) musíme kliknout napřed na bod A, následně na bod B; pro sestrojení polopřímky BA (obr. 8.27) musíme kliknout napřed na bod B, potom na bod A.

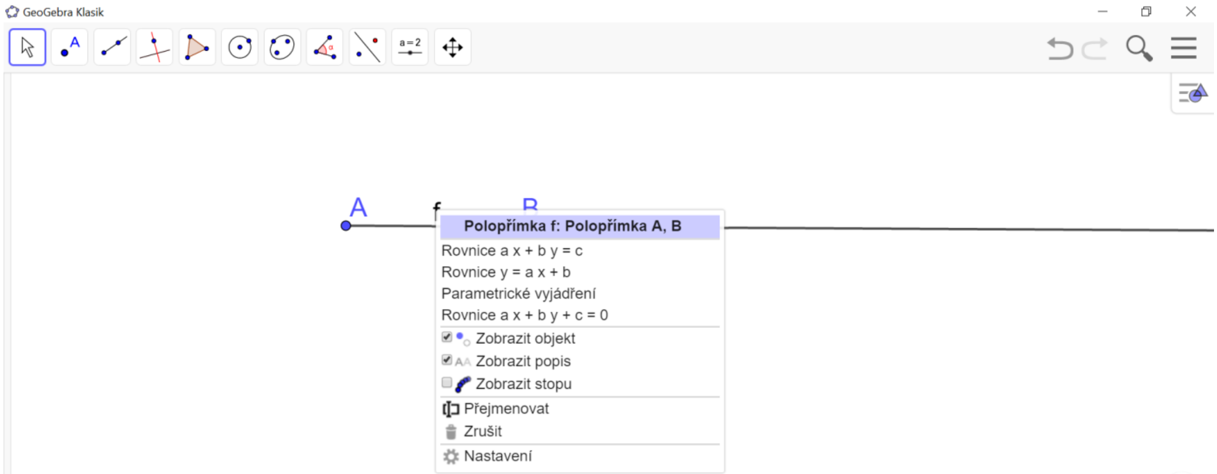


Obrázek 8.26: Základní konstrukce 3 (1)

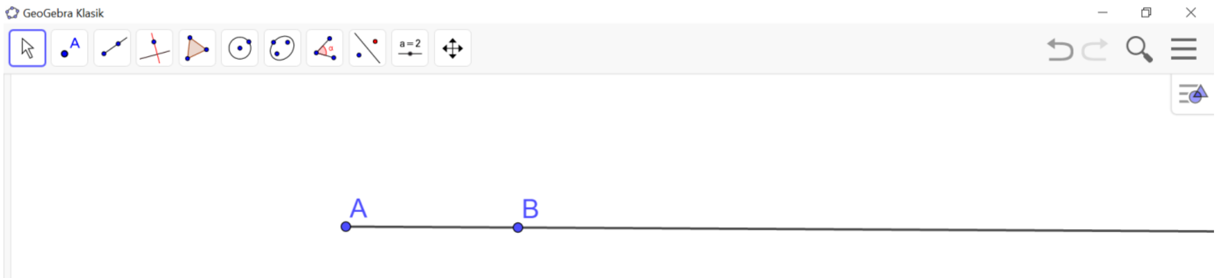


Obrázek 8.27: Základní konstrukce 3 (2)

Poznámka: Sestrojené objekty jsou v Nákresně pojmenovány. Toto pojmenování můžeme zrušit. Zrušení označení f u polopřímky AB provedeme tak, že na polopřímku klikneme pravým tlačítkem myši, objeví se nabídka „Polopřímka f: Polopřímka A, B“ (obr. 8.28). Po zrušení „Zobrazit popis“ se zruší popis f polopřímky AB (obr. 8.29). Obdobně můžeme zrušit zobrazení popisu dalších objektů nebo nastavit, aby se v Nákresně objekty nezobrazily[13] (viz tlačítko „Zobrazit objekt“).



Obrázek 8.28: Zrušení zobrazení popisu objektu (1)



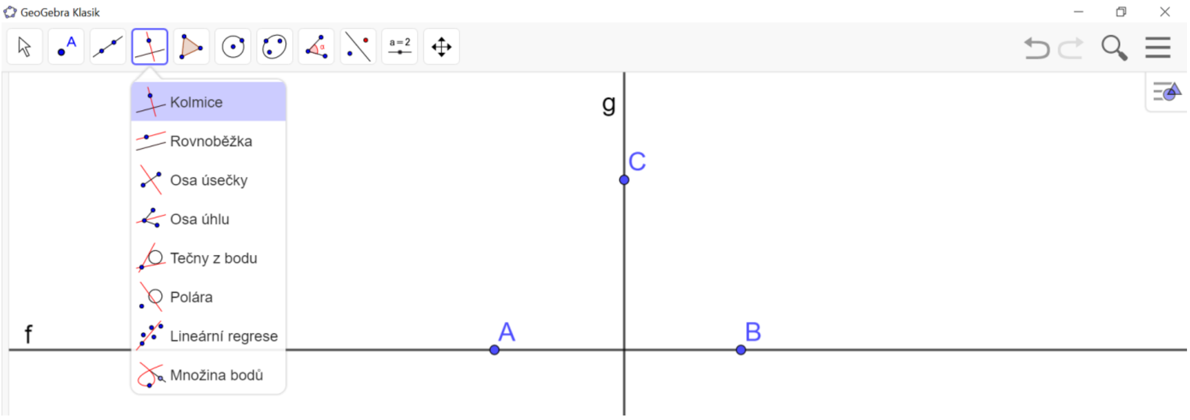
Obrázek 8.29: Zrušení zobrazení popisu objektu (2)

Poznámka: Sestrojené objekty můžeme vymazat jednotlivě kliknutím pravým tlačítkem myši na objekt, který chceme vymazat, a následně odkliknutím tlačítka zrušit (obr. 8.29) nebo můžeme vymazat vše v Nákresně kliknutím tlačítka ☰ a následně tlačítka + Nový .

4. Sestrojit kolmici k dané přímce, která prochází daným bodem.

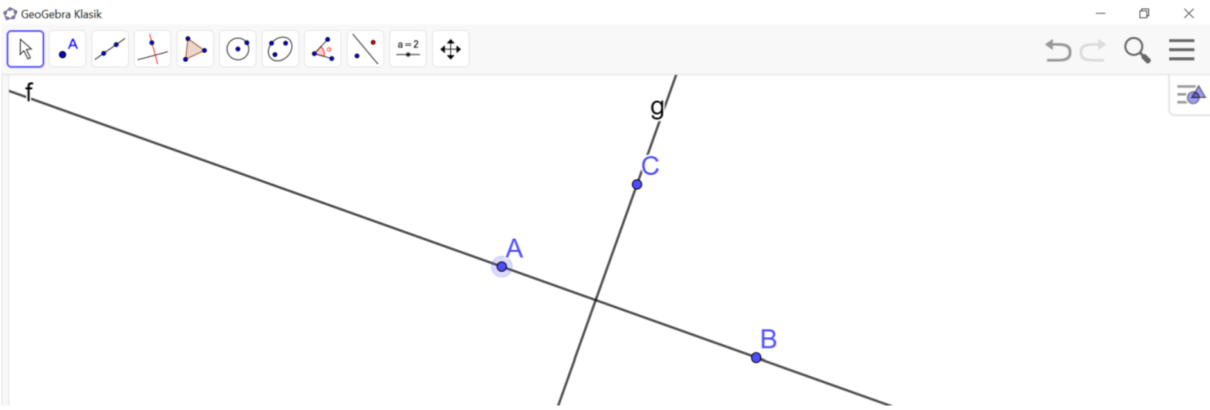
Užitím nástroje „Kolmice“ (obr. 8.30) sestrojíme kolmici g k dané přímce f, která prochází bodem C. Bod C je v Nákresně předem daný, nebo jej můžeme vytvořit kliknutím na libovolné místo v Nákresně.

[13] Tyto objekty sice nejsou na Nákresně zobrazené, ale pokud jsme je použili k definování dalších objektů, jsou v systému zahrnuty. Pokud bychom objekty vymazali, vymazaly by se s nimi i objekty, které jsou na ně vázané.



Obrázek 8.30: Základní konstrukce 4

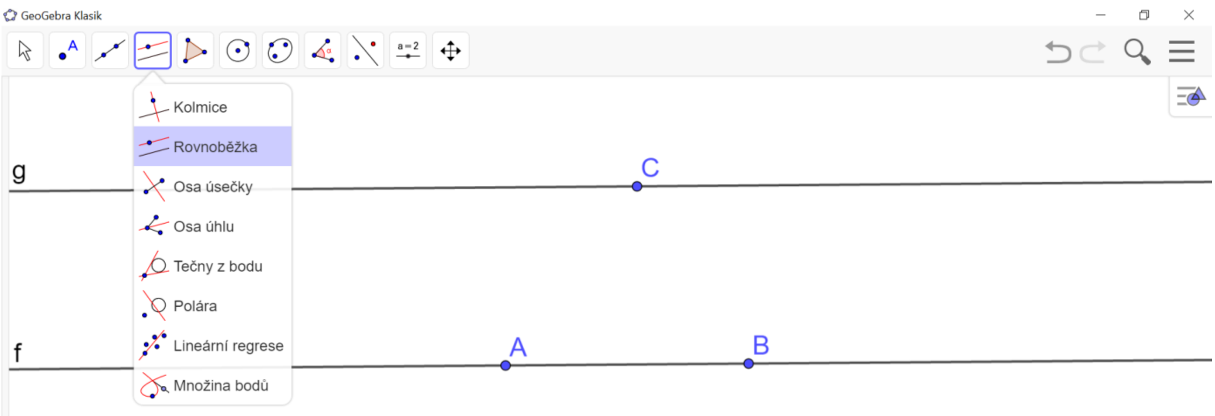
Poznámka: Kolmice *g* je vázána na přímku *f* a bod C. Pokud budeme například měnit polohu přímky *f* (obr. 8.31), bude se měnit poloha kolmice *g*. Podobně můžeme vyzkoušet dynamičnosti následujících základních konstrukcí.



Obrázek 8.31: Dynamičnost základní konstrukce 4

5. **Sestrojit rovnoběžku k dané přímce, která prochází daným bodem.**

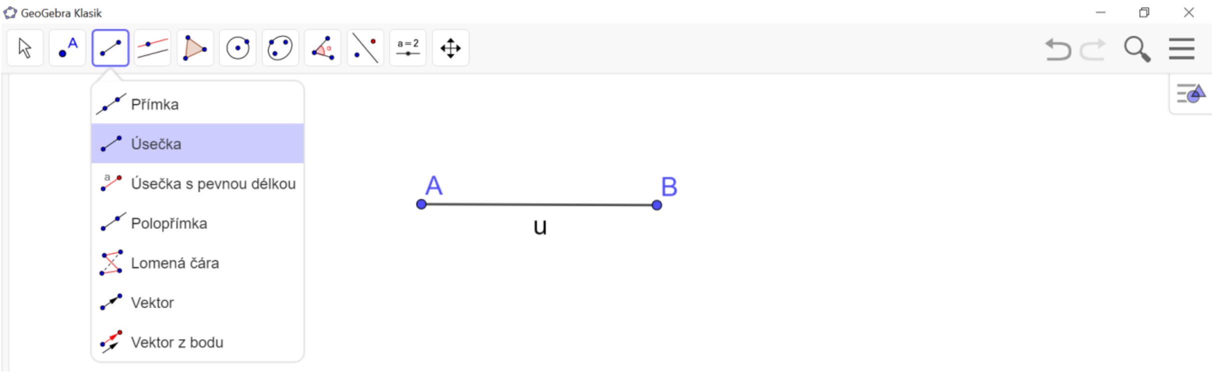
Užitím nástroje „Rovnoběžka“ (obr. 8.32) sestrojíme rovnoběžku *g* k dané přímce *f*, která prochází bodem C. Bod C je v Nákresně předem daný, nebo jej můžeme vytvořit kliknutím na libovolné místo v Nákresně.



Obrázek 8.32: Základní konstrukce 5

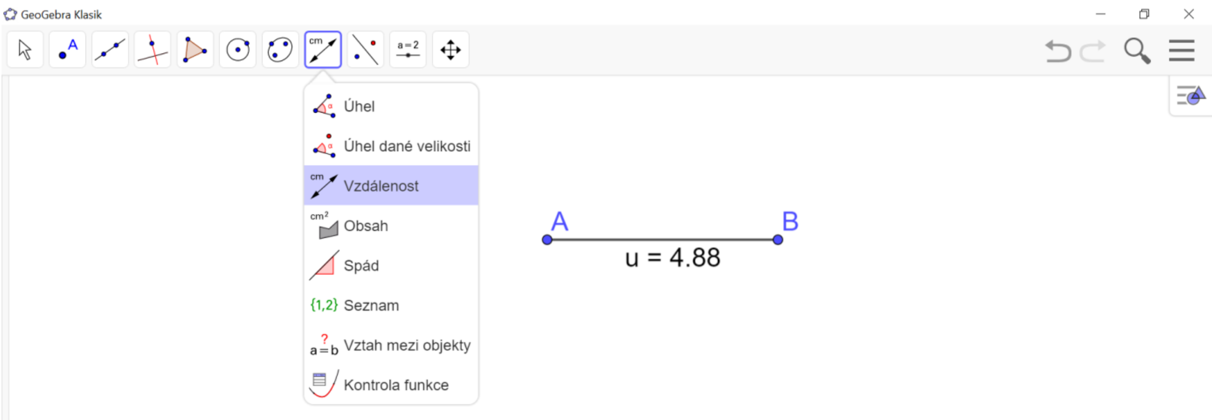
6. **Sestrojit úsečku, která je dána jejími krajními body.**

Užitím nástroje „Úsečka“ (obr. 8.33) sestrojíme úsečku AB s krajními body A, B. Úsečku sestrojíme buď kliknutím na dva libovolné různé body (A, B) v Nákresně, na libovolný bod (A) v Nákresně a následně na libovolné místo v Nákresně nebo kliknutím na libovolná dvě různá místa v Nákresně.



Obrázek 8.33: Základní konstrukce 6

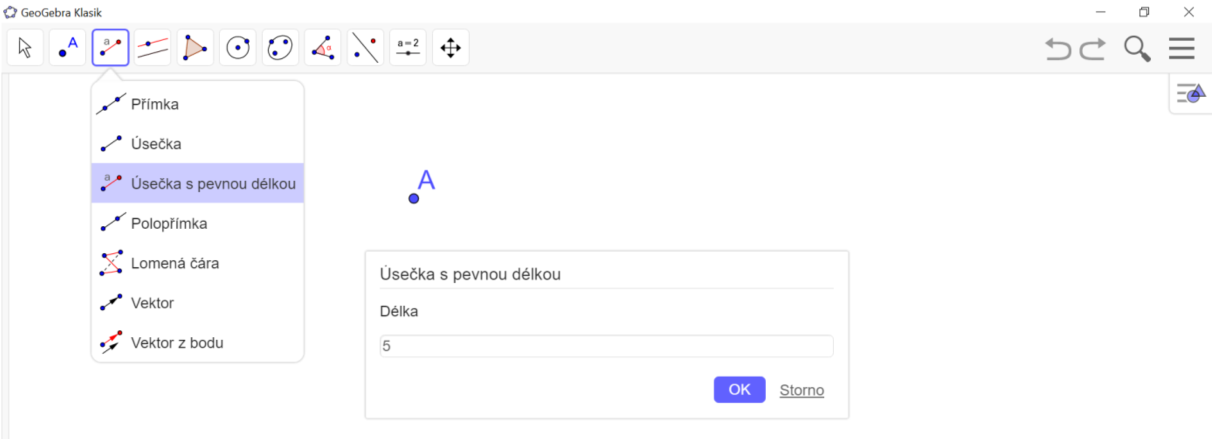
Poznámka: GeoGebra umožňuje změřit vzdálenost dvou bodů, délku úsečky, obvod kružnice nebo obvod mnohoúhelníku v jednotkách (výchozí nastavení zaokrouhluje vzdálenost na dvě desetinná místa). Délku úsečky u získáme kliknutím na tlačítko „Vzdálenost“ (obr. 8.34) a označením úsečky u nebo označením bodů A, B. Úsečka nebo body musím být v Nákresně dané.



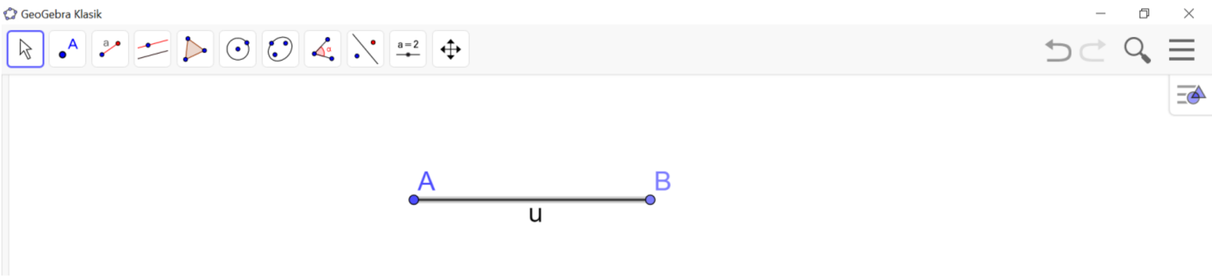
Obrázek 8.34: Délka úsečky

7. **Sestrojit úsečku dané velikosti, která je dána jedním jejím krajním bodem.**

Užitím nástroje „Úsečka s pevnou délkou“ sestrojíme úsečku AB s krajním bodem A a pevnou délkou. Bod A je v Nákresně sestrojený, nebo jej můžeme vytvořit kliknutím na libovolné místo v Nákresně. Po kliknutí na bod A nám GeoGebra nabídne okno, kde vepíšeme pevnou délku (obr. 8.35). Po odkliknutí tlačítka OK se v Nákresně zobrazí úsečka AB s pevnou délkou 5 jednotek (obr. 8.36).



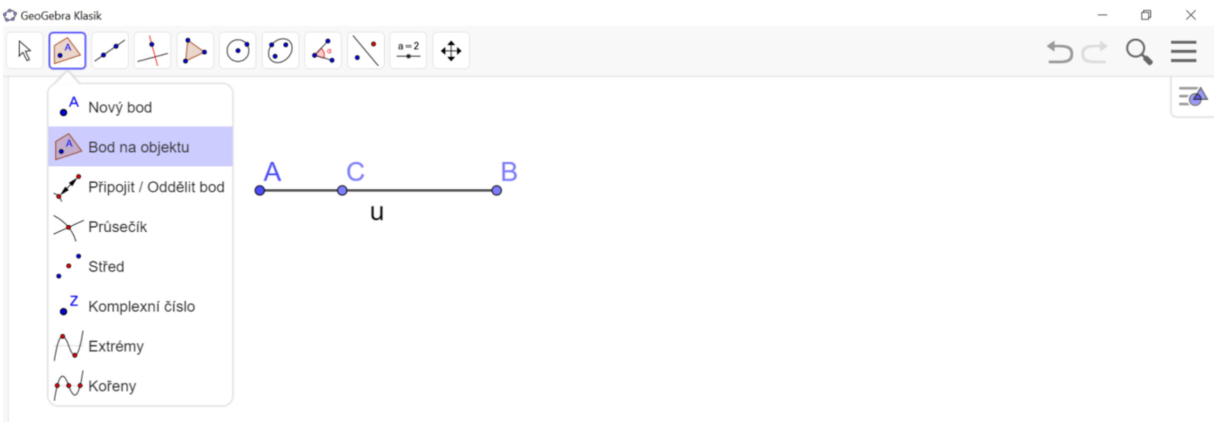
Obrázek 8.35: Základní konstrukce 7 (1)



Obrázek 8.36: Základní konstrukce 7 (2)

8. Sestrojit bod na objektu (na úsečce, polopřímce, přímce, kružnici aj.).

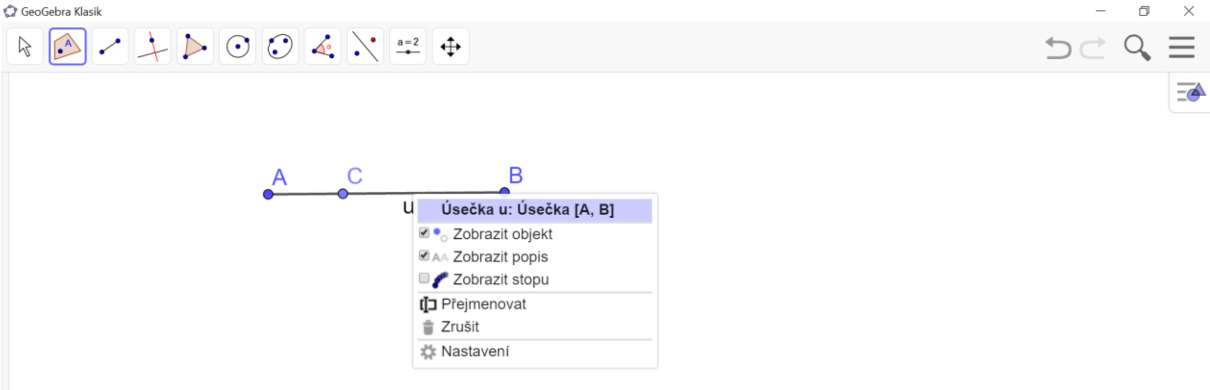
Užitím nástroje „Bod na objektu“ (obr. 8.37) sestrojíme bod C, který leží na úsečce AB. Takto zvoleným bodem na objektu můžeme pohybovat, a protože je na objekt vázán, bude se pohybovat jen po stanoveném objektu.



Obrázek 8.37: Základní konstrukce 8

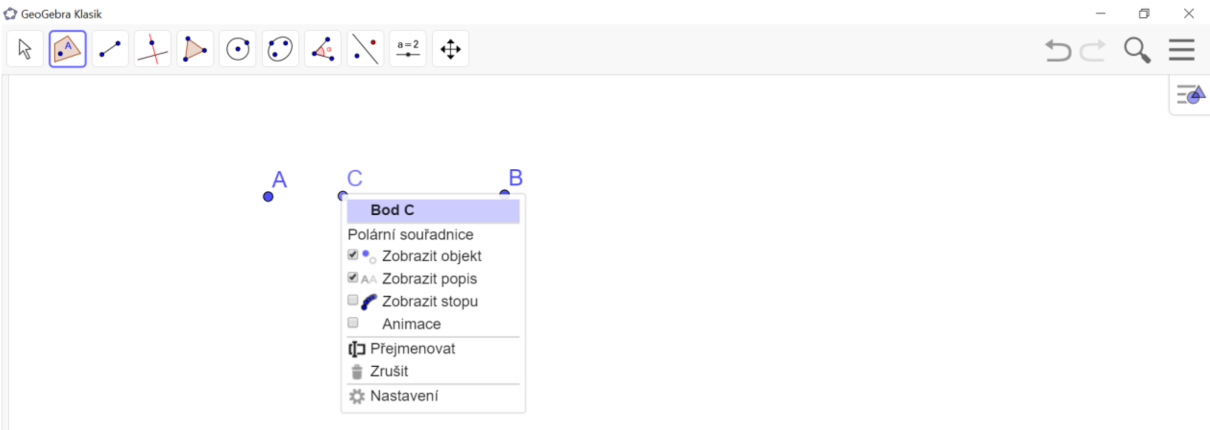
Poznámka: Dynamičnost GeoGebry můžeme využít pro propedeutiku definice úsečky jako množiny bodů roviny. Nejdříve si vypneme zobrazení objektu „Úsečka u“ (obr. 8.38). Úsečka u se v Nákresně nezobrazuje (obr. 8.39), avšak bod C je na úsečku stále vázán.

Následně si u bodu C zapneme „Zobrazit stopu“ a vypneme „Zobrazit popis“[14] (obr. 8.40). Posouváním bodu po úsečce AB se nám postupně zobrazuje jeho stopa (obr. 8.41), až nám „vyplní“ celou úsečku AB (obr. 8.42). Žáci si z tohoto modelu mohou odvodit, že úsečka je množina všech bodů v rovině, která obsahuje body A, B a dále všechny body, které leží mezi body A a B.[15]



Obrázek 8.38: Propedeutika definice úsečky (1)

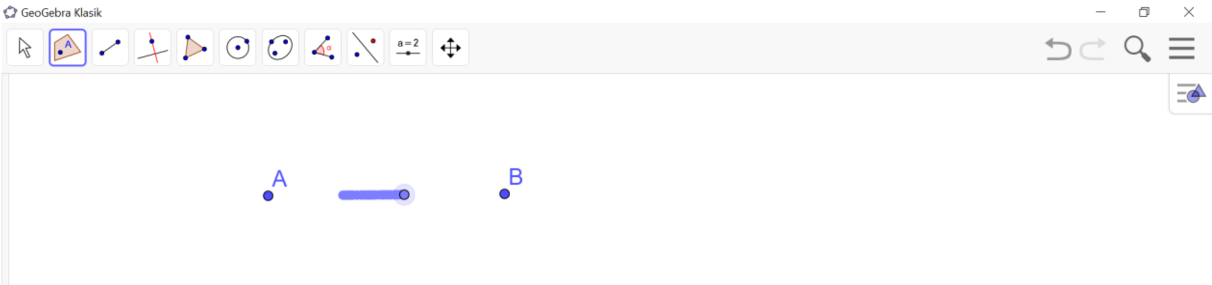
Obrázek 8.39: Propedeutika definice úsečky (2)



Obrázek 8.40: Propedeutika definice úsečky (3)

14 Bod C zastupuje různé body úsečky, proto si pro vhodnou představu množiny bodů vypneme jeho popis (označení).

15 Úsečka podle Eukleida patřila do základních pojmů a byla chápána intuitivně. Potom, co Hilbert vytvořil tzv. systém axiomů eukleidovské geometrie, je možné úsečku na základě axiómů incidence a uspořádání definovat. Definice: Úsečka AB je množina všech bodů prostoru, která obsahuje body A, B a dále všechny body, které leží mezi body A, B.

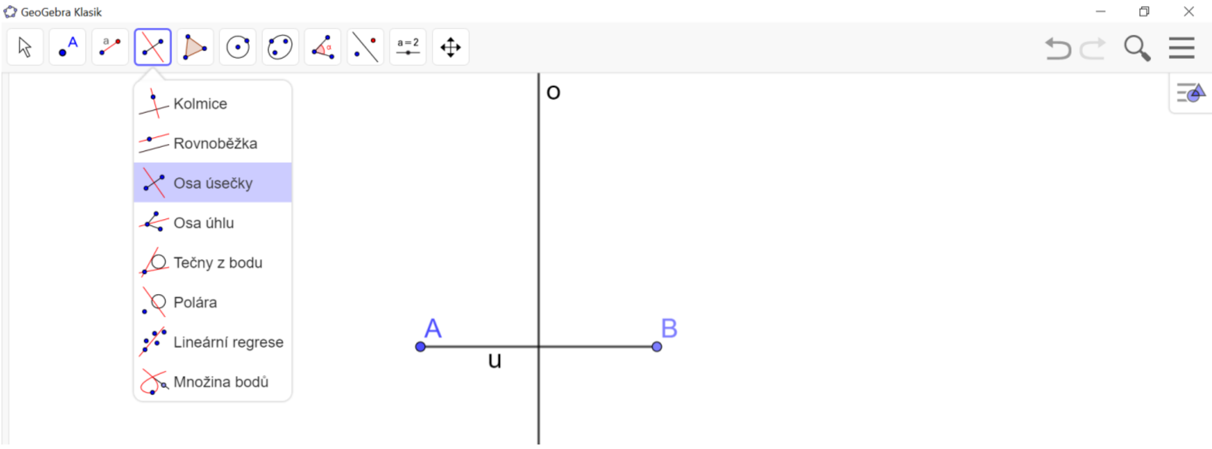


Obrázek 8.41: Propedeutika definice úsečky (4)

Obrázek 8.42: Propedeutika definice úsečky (5)

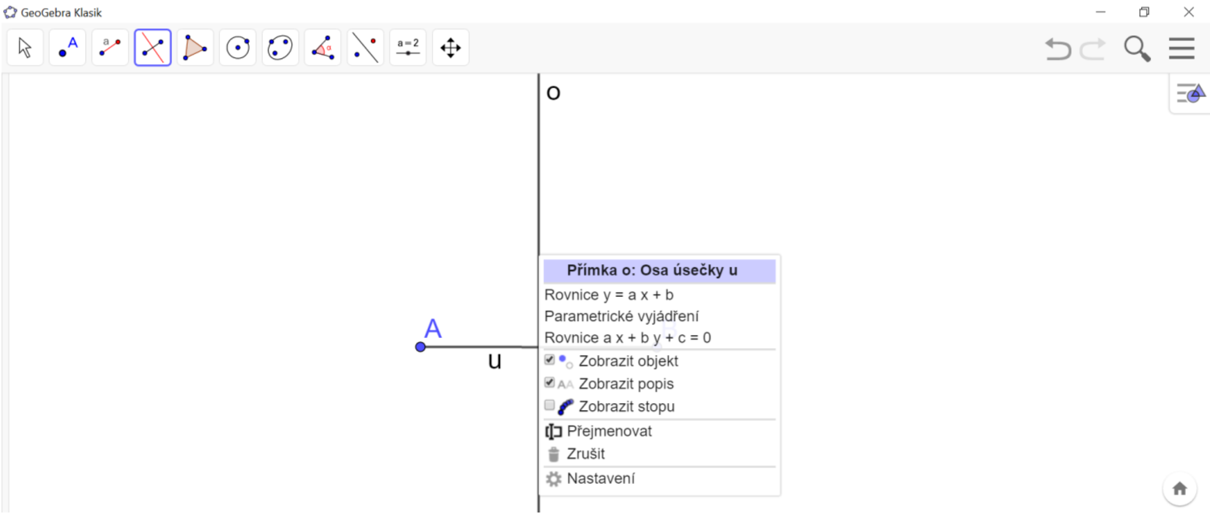
9. Sestrojit osu úsečky.

Užitím nástroje „Osa úsečky“ (obr. 8.43) sestrojíme osu o úsečky AB. K sestrojení osy úsečky musíme mít v Nákresně dány krajní body úsečky nebo úsečku.

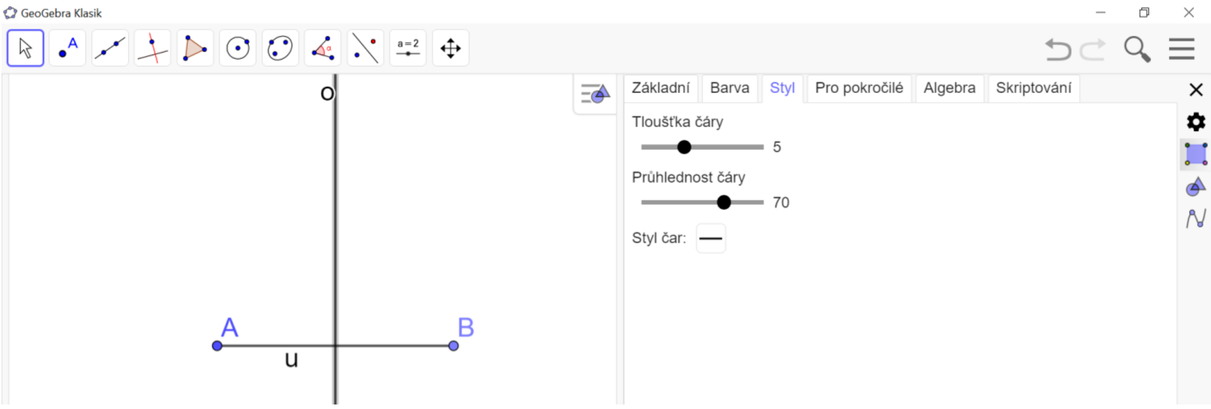


Obrázek 8.43: Základní konstrukce 9

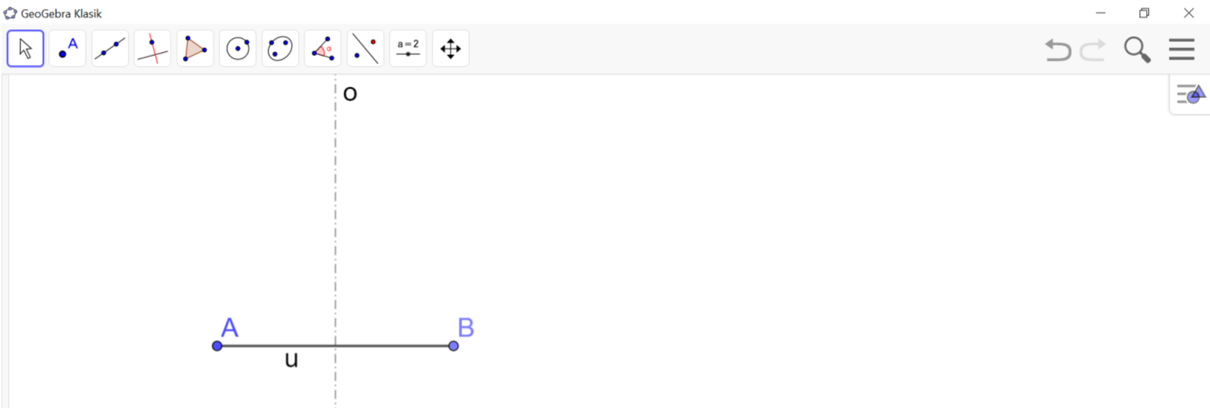
Poznámka: Osy (osu úsečky, osu úhlu aj.) zobrazujeme čerchovaně. V GeoGebře lze měnit styl čáry. Pravým tlačítkem myši klikneme na čáru, jejíž styl chceme změnit, zobrazí se nám nabídka „Přímka o: Osa úsečky u“ (obr. 8.44). Klikneme na tlačítko „Nastavení“, zobrazí se nám lišta pro nastavení daného objektu (obr. 8.45). Pro změnu stylu čáry použijeme tlačítko „Styl“, kde můžeme změnit tloušťku čáry, průhlednost čáry a styl čáry. Po nastavení těchto parametrů se osa zobrazí (obr. 8.46) v našem případě čerchovaně, s menší tloušťkou a světlejším odstínem než v předchozím nastavení.



Obrázek 8.44: Změna stylu čáry (1)

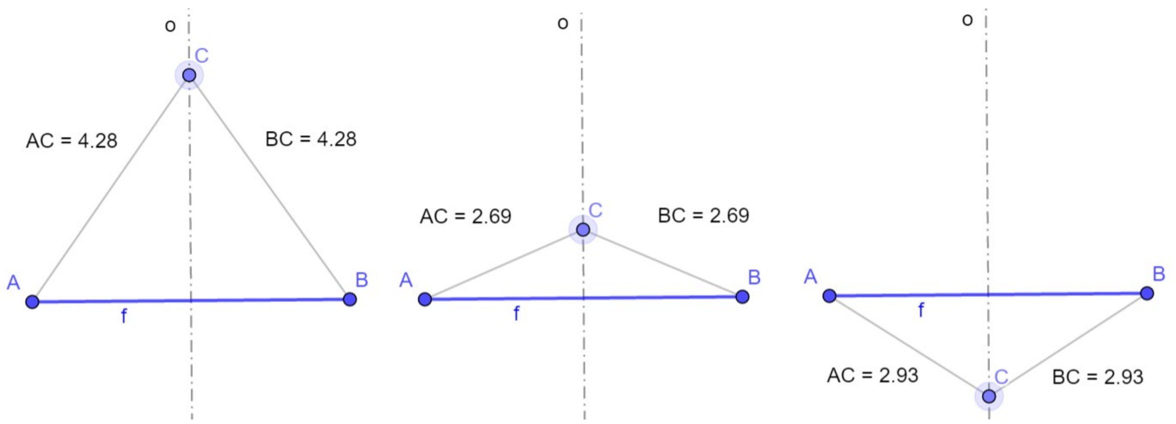


Obrázek 8.45: Změna stylu čáry (2)



Obrázek 8.46: Změna stylu čáry (3)

Poznámka: Pomocí GeoGebry můžeme ověřit, že osa úsečky AB je množina všech bodů roviny, které mají od dvou daných různých bodů A, B stejnou vzdálenost (obr. 8.47). Podobně můžeme ověřit další základní množiny bodů s danou vlastností.

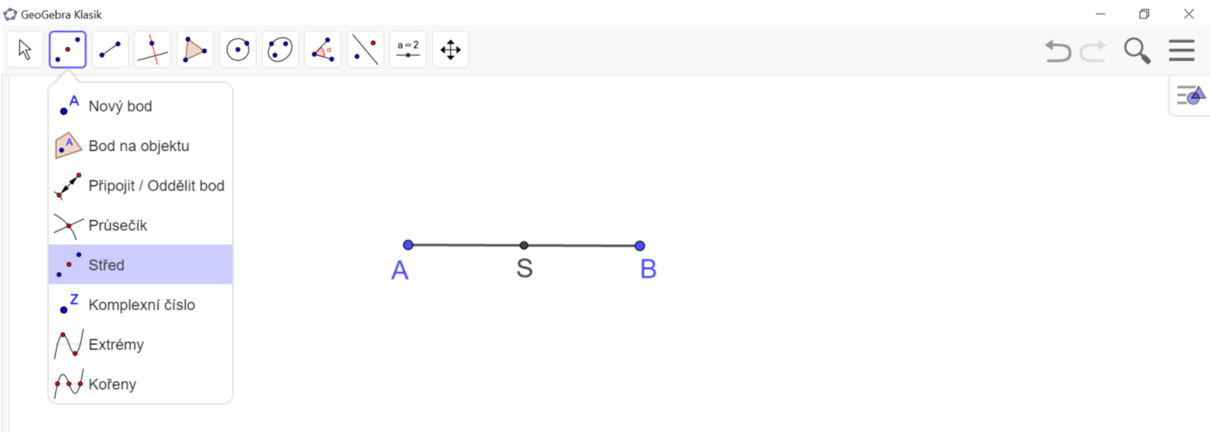


Obrázek 8.47: Osa úsečky

Poznámka: Označení délky úsečky, ev. vzdálenosti dvou bodů, v GeoGebře neodpovídá úmluvám o značení útvarů a jejich velikostí, které jsou běžné ve školské geometrii: AB označení úsečky, $|AB|$ označení délky úsečky AB, ev. vzdálenost bodů A, B. Žáky je nutné upozornit na to, že software není dokonalý a při označení nerozlišuje mezi úsečkou a její délkou.

10. Sestrojit střed úsečky.

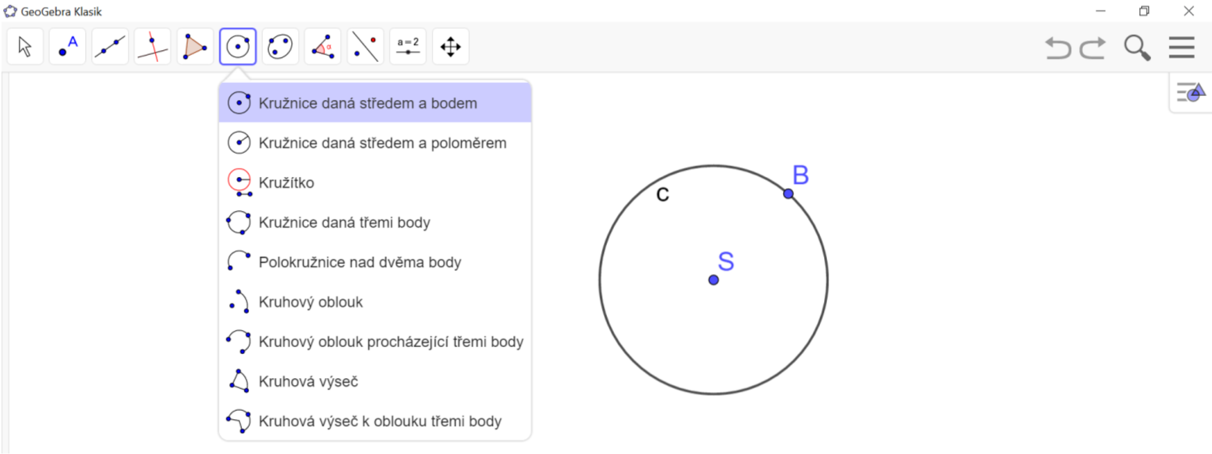
Užitím nástroje „Střed“ (obr. 8.48) sestrojíme střed S úsečky AB. Body A, B jsou v Nákresně předem dané, nebo je můžeme vytvořit kliknutím na libovolné místo v Nákresně.



Obrázek 8.48: Základní konstrukce 10

11. Sestrojit kružnici o daném středu a daném bodu, kterým prochází.

Užitím nástroje „Kružnice daná středem a bodem“ (obr. 8.49) sestrojíme kružnici c se středem S a poloměrem $|SB|$. K sestrojení této kružnice musíme označit body S (střed kružnice) a bod B. Body S, B jsou buď v Nákresně předem dané, nebo je můžeme vytvořit kliknutím na libovolné místo v Nákresně.

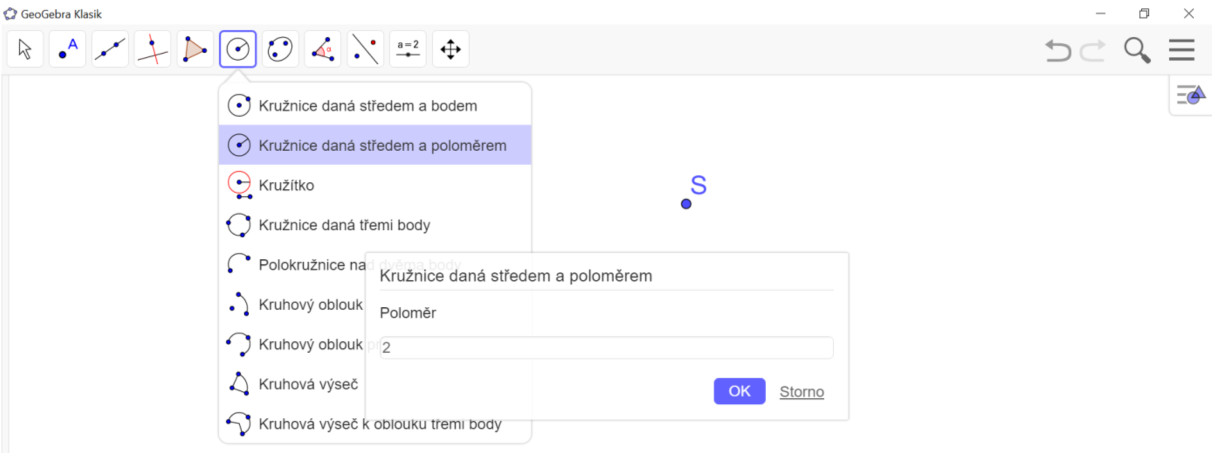


Obrázek 8.49: Základní konstrukce 11

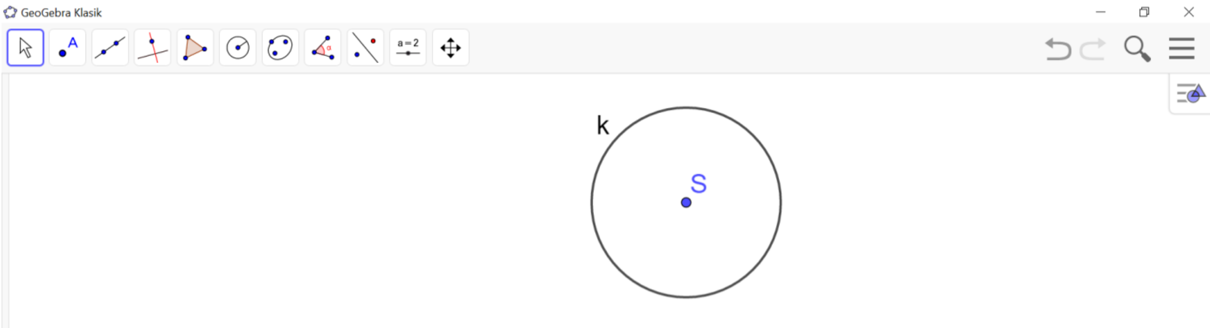
12. Sestrojit kružnici o daném středu a daném poloměru.

Sestrojit kružnici o daném středu a daném poloměru můžeme v GeoGebře dvěma způsoby, záleží na zadání poloměru, který může být zadaný jako délka úsečky nebo úsečka zobrazená v Nákresně.

První způsob sestrojíme pomocí užití nástroje „Kružnice daná středem a poloměrem“ (obr. 8.50). Střed S je v Nákresně předem daný nebo jej můžeme vytvořit kliknutím na libovolné místo v Nákresně. Po sestrojení bodu S nám GeoGebra nabídne okno, kde vepíšeme velikost poloměru (obr. 8.50). Po odkliknutí tlačítka OK se v Nákresně zobrazí kružnice se středem S a poloměrem 2 jednotky (obr. 8.51).

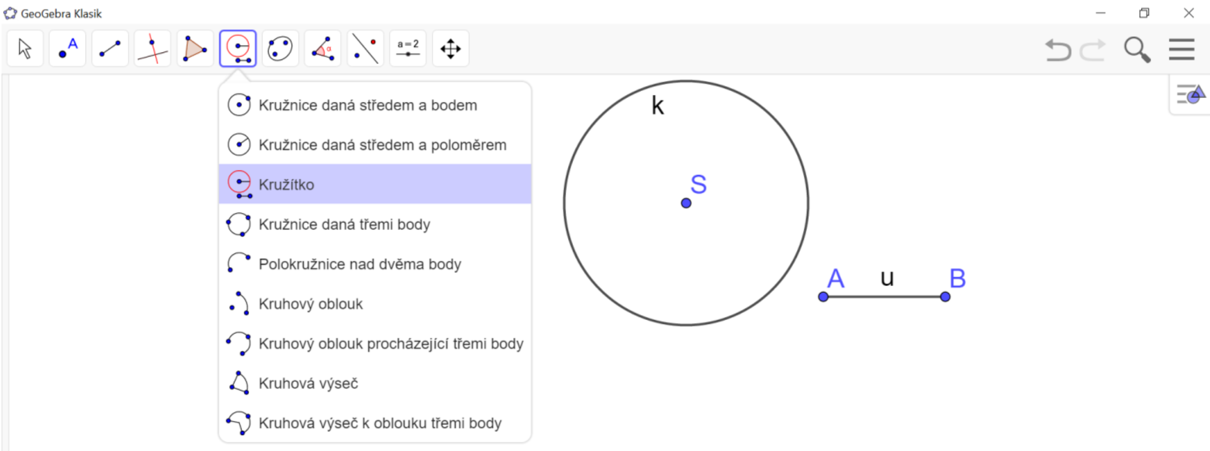


Obrázek 8.50: Základní konstrukce 12 (1)



Obrázek 8.51: Základní konstrukce 12 (2)

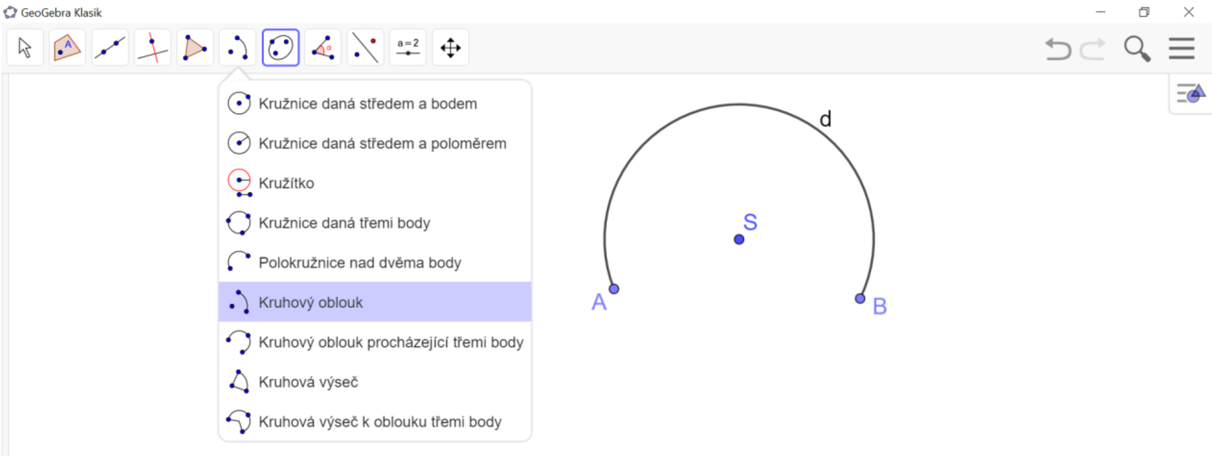
Druhý způsob konstrukce kružnice o daném středu a daném poloměru spočívá v užití nástroje „Kružítko“ (obr. 8.52). Ke konstrukci si nejprve označíme úsečku u (nebo dvojici bodů A, B), která bude reprezentovat poloměr kružnice. Následně vybereme střed S, který je buď v Nákresně předem daný, nebo jej můžeme vytvořit kliknutím na libovolné místo v Nákresně.



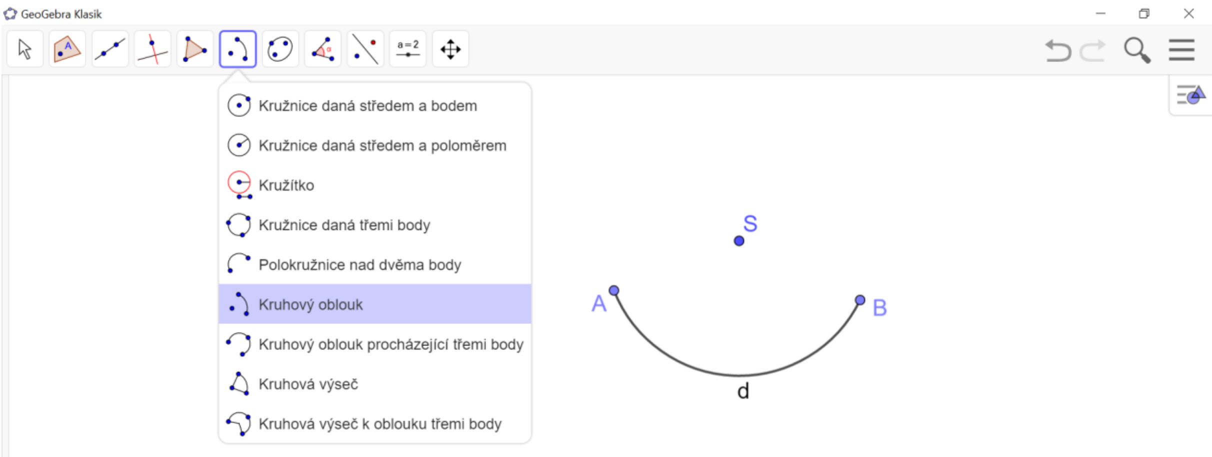
Obrázek 8.52: Základní konstrukce 12 (3)

13. Sestrojit kruhový oblouk o daném středu a daných krajních bodech oblouku.

Užitím nástroje „Kruhový oblouk“ sestrojíme oblouk kružnice se středem S a s jeho krajními body A, B. Krajní body A, B kružnicového oblouku a střed S musí být v Nákresně dány. Vytvoření většího nebo menšího oblouku kružnice závisí na pořadí označení jednotlivých bodů. Vytvoření většího kružnicového oblouku dostaneme označením bodů v tomto pořadí: S, B, A (obr. 8.53). Vytvoření menšího kružnicového oblouku označením bodů: S, A, B (obr. 8.54).



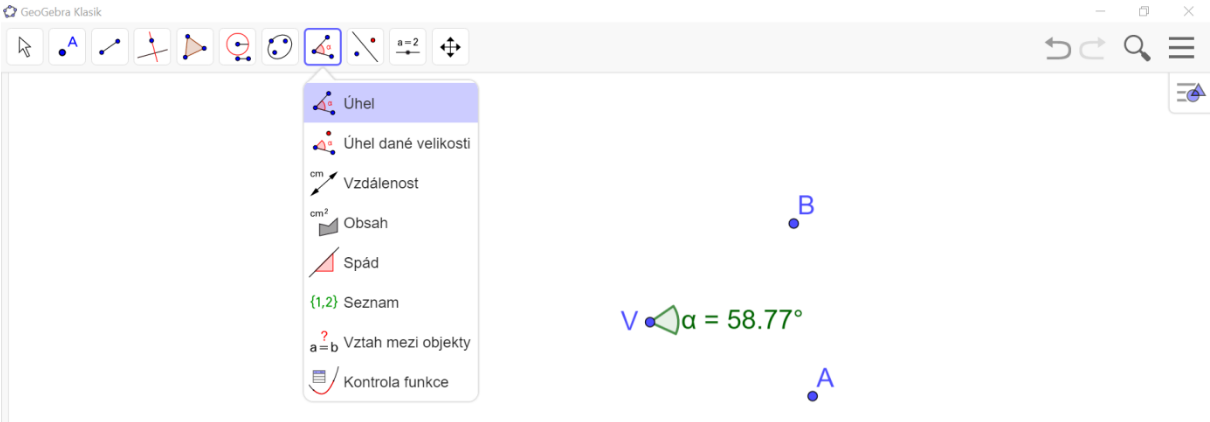
Obrázek 8.53: Základní konstrukce 13 (1)



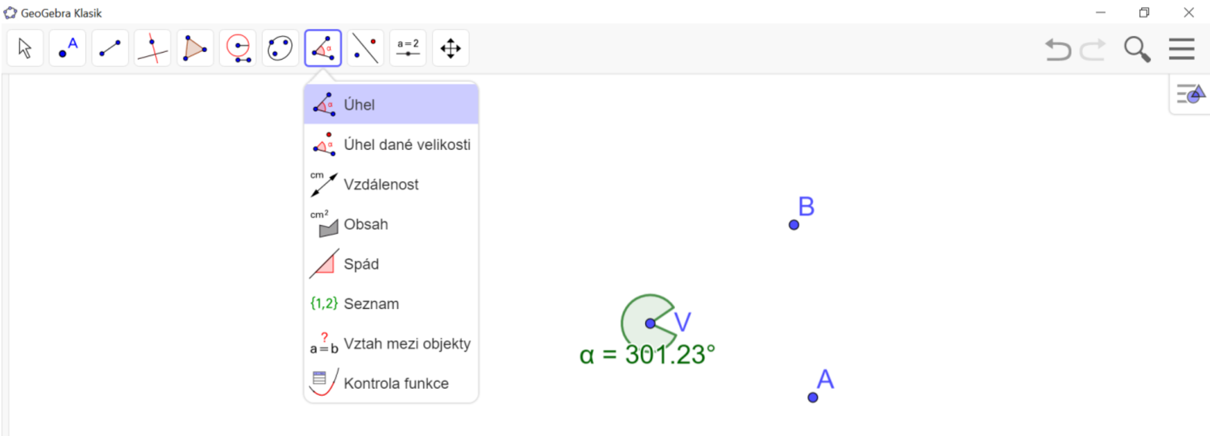
Obrázek 8.54: Základní konstrukce 13 (2)

14. Sestrojit úhel daný vrcholem a dvěma body na ramenech.

Užitím nástroje „Úhel“ sestrojíme úhel daný třemi body A, V, B. Konvexní úhel AVB (obr. 8.55) sestrojíme označením bodů v tomto pořadí: A, V, B; nekonvexní úhel AVB (obr. 8.56) označením bodů v tomto pořadí: B, V, A. Body A, V, B jsou buď v Nákresně předem dané, nebo je můžeme vytvořit kliknutím na libovolná místa v Nákresně. Při konstrukci úhlu tímto způsobem se nezobrazují ramena úhlu. Ramena úhlu můžeme sestrojit jako polopřímky s daným počátkem a jedním dalším bodem (základní konstrukce 3).

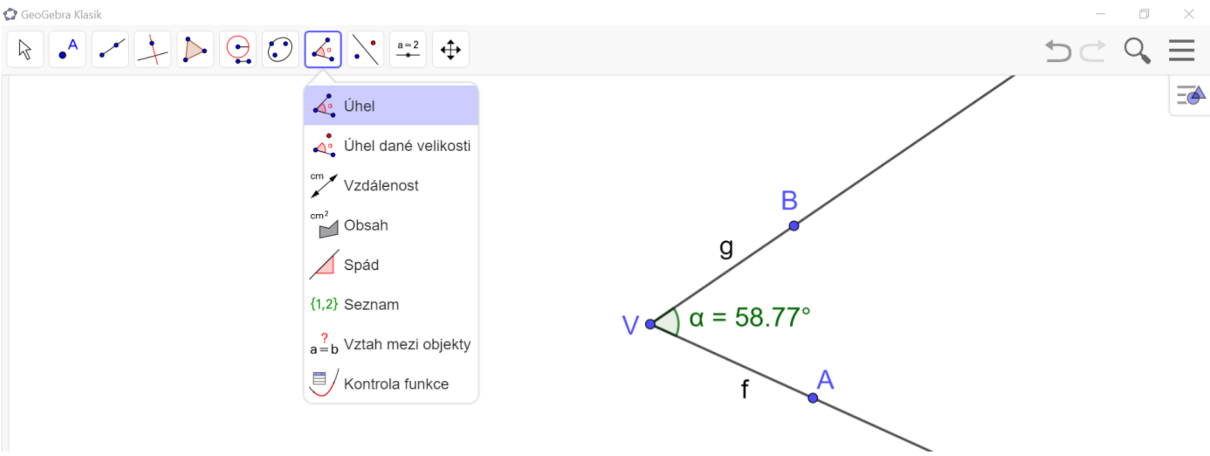


Obrázek 8.55: Základní konstrukce 14 (1)

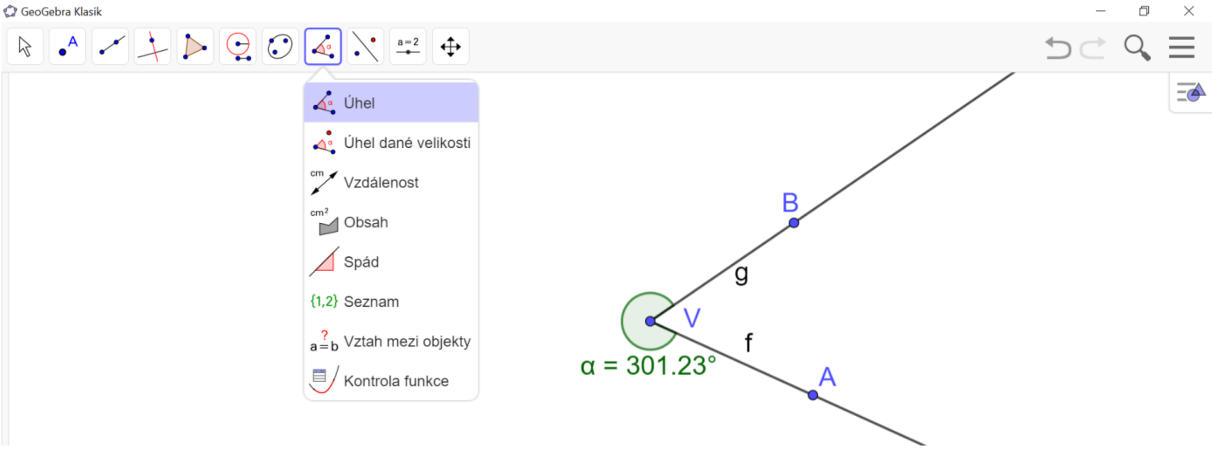


Obrázek 8.56: Základní konstrukce 14 (2)

Poznámka: Užitím nástroje „Úhel“ můžeme určit velikost úhlu, který je daný dvěma polopřímkami se společným počátkem. Velikost konvexního úhlu AVB (obr. 8.57) určíme označením polopřímek v tomto pořadí: polopřímka VA, polopřímka VB; velikost nekonvexního úhlu AVB (obr. 8.58) označením polopřímek v tomto pořadí: polopřímka VB, polopřímka VA. Polopřímky VA a VB musí být v Nákresně dané.



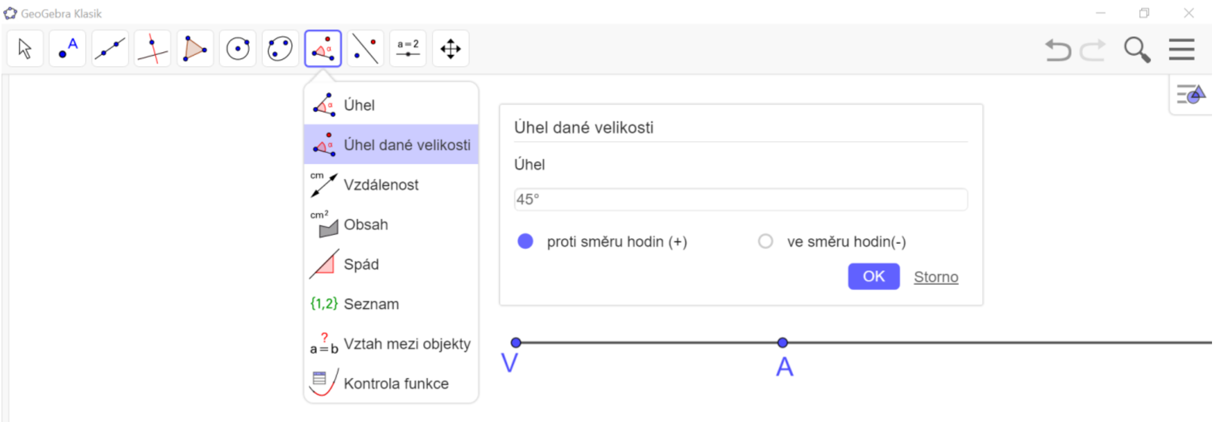
Obrázek 8.57: Určení velikosti úhlu (1)



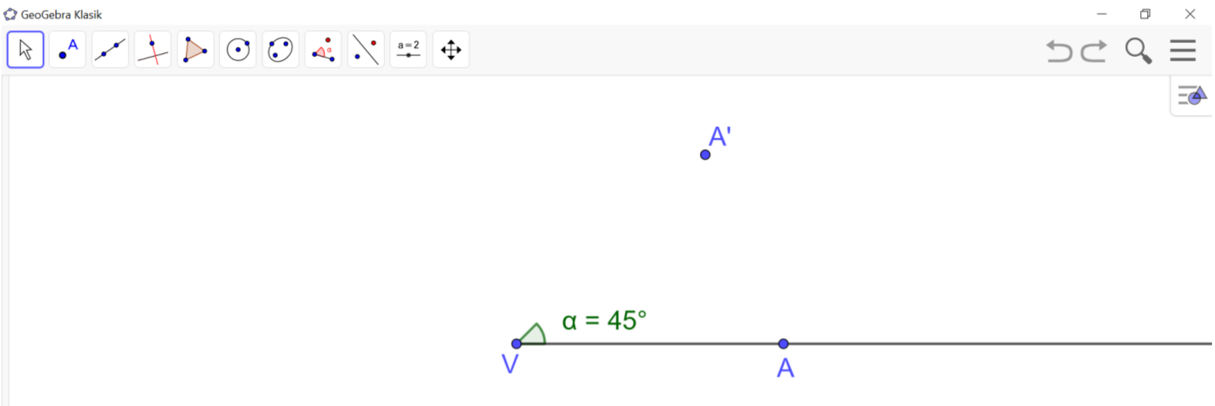
Obrázek 8.58: Určení velikosti úhlu (2)

15. Sestrojit úhel dané velikosti při daném rameni úhlu.

Užitím nástroje „Úhel dané velikosti“ (obr. 8.59) sestrojíme úhel dané velikosti při daném rameni úhlu. V Nákresně je dána polopřímka VA, kliknutím na bod A a následně na bod V se zobrazí okno „Úhel dané velikosti“ (obr. 8.59), kde zadáme velikost úhlu a jeho orientaci. Po odkliknutí tlačítka OK se v Nákresně zobrazí úhel AVA' (obr. 8.60). Rameno VA' je potřeba vyznačit pomocí nástroje „Polopřímka“.



Obrázek 8.59: Základní konstrukce 15 (1)

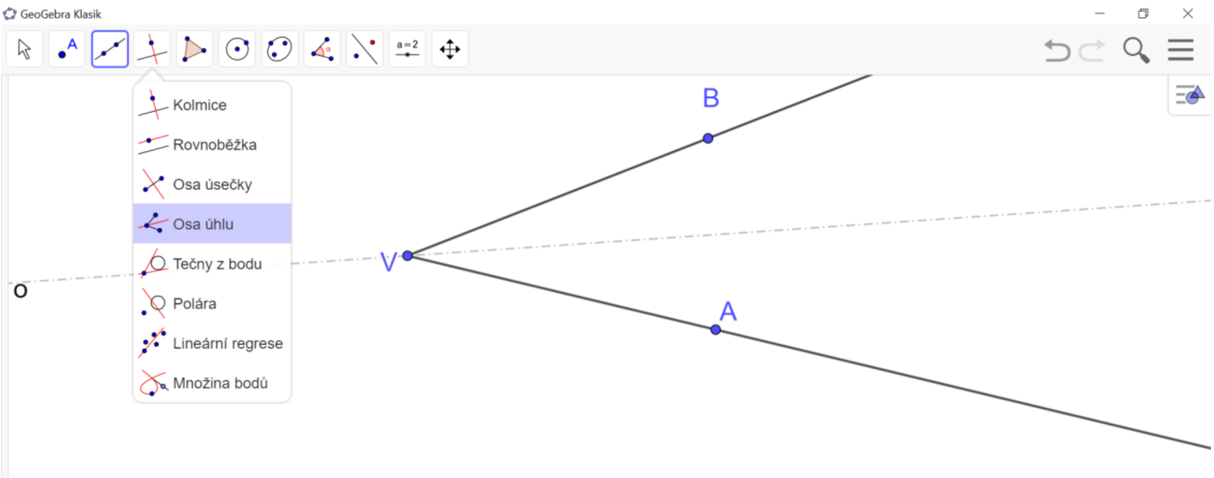


Obrázek 8.60: Základní konstrukce 15 (2)

16. Sestrojit osu úhlu.

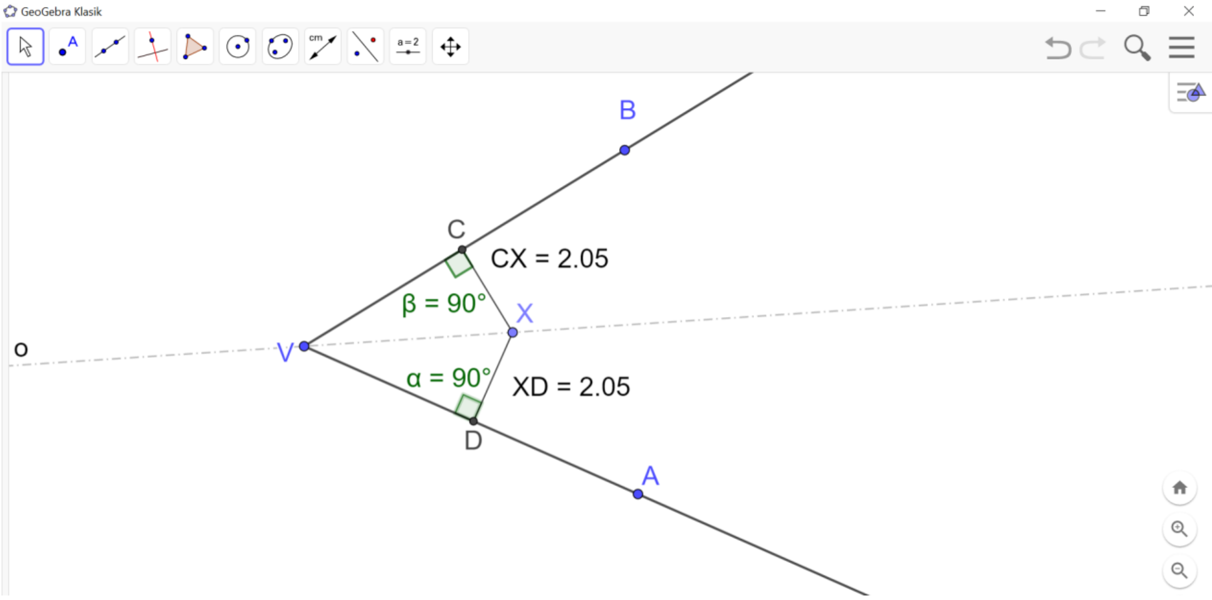
Užitím nástroje „Osa úhlu“ (obr. 8.61) sestrojíme osu o úhlu AVB. K sestrojení osy úhlu musíme mít v Nákresně dány buď tři různé body nebo dvě různoběžné polopřímky se společným počátečním bodem.

Poznámka: V GeoGebře se osa úhlu AVB zobrazuje jako přímka o. My však víme, že osu konvexního úhlu AVB můžeme definovat (a často také vnímáme) i jako polopřímku, s počátečním bodem V, která úhlu náleží.

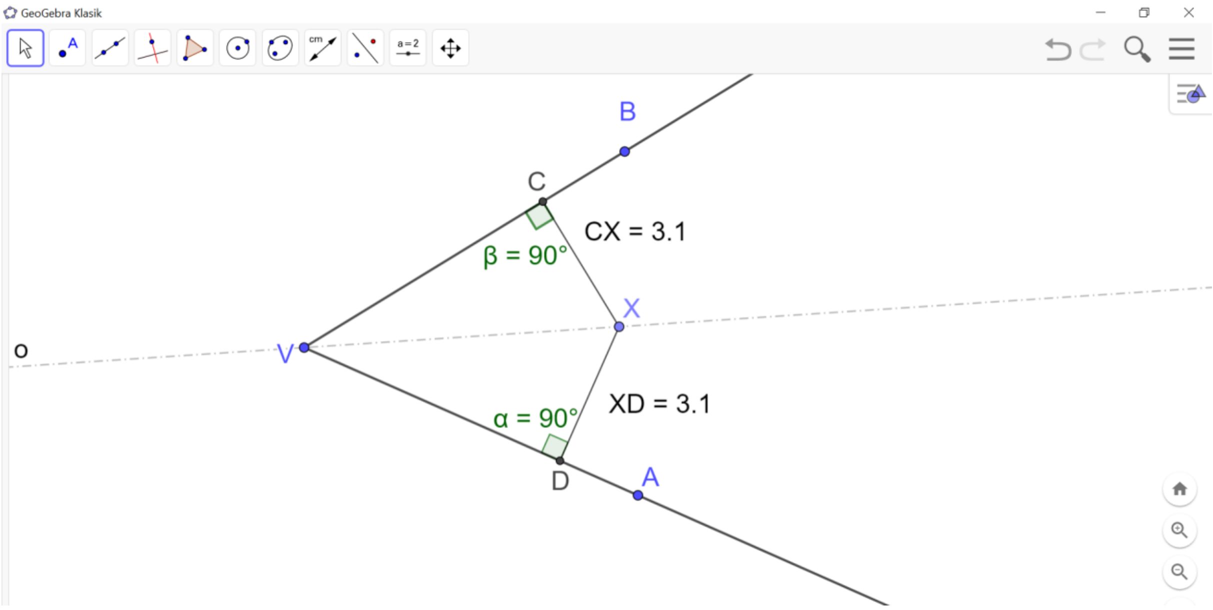


Obrázek 8.61: Základní konstrukce 16

Poznámka: Opět můžeme pomocí GeoGebry ověřit, že osa konvexního úhlu AVB je množina všech bodů X tohoto úhlu, které mají stejnou vzdálenost od obou ramen úhlu (obr. 8.62, 8.63). Bod X je v GeoGebře definovaný jako „bod na objektu“, tedy na polopřímce s počátečním bodem V, která náleží konvexnímu úhlu. Úsečku CX, která je kolmá na polopřímku VB, a úsečku DX, která je kolmá na polopřímku VA, jsme zkonstruovali pomocí „Kolmice“, kde jsme získali průsečíky kolmic procházejících bodem X s rameny úhlu. Následně jsme vytvořili úsečky CX a DX. Zobrazením jejich velikostí a dynamičností bodu X můžeme ilustrovat osu konvexního úhlu jako množinu všech bodů dané vlastnosti.



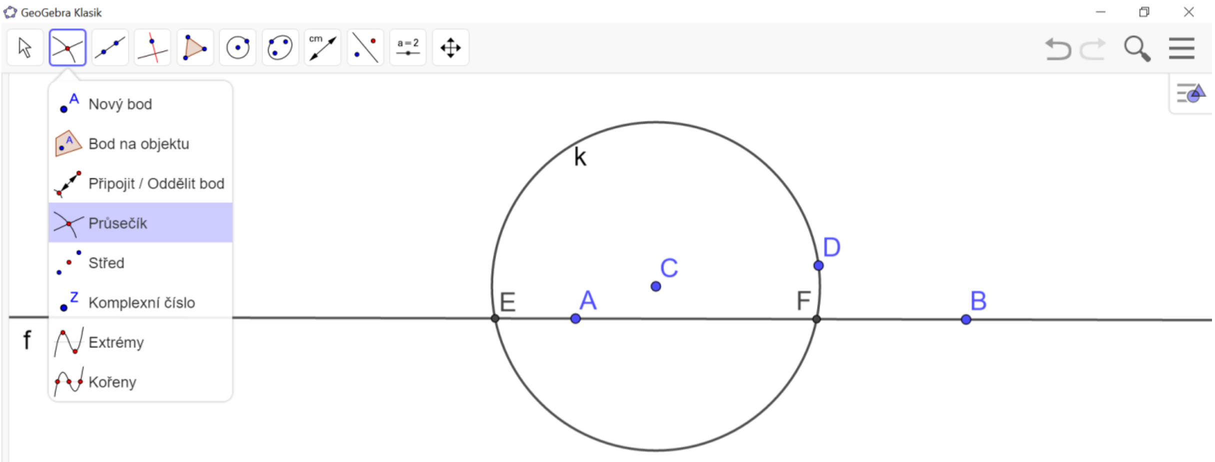
Obrázek 8.62: Osa úhlu (1)



Obrázek 8.63: Osa úhlu (2)

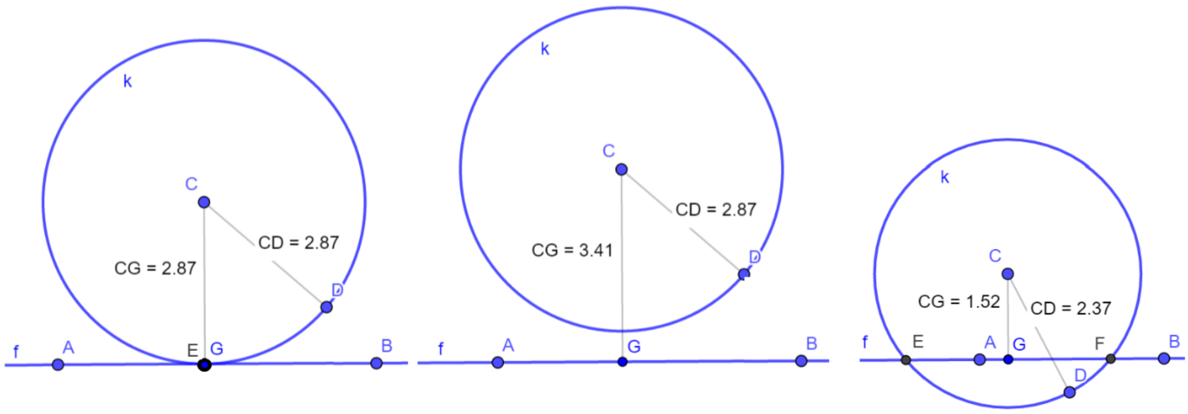
17. Určení průsečíku dvou křivek (dvou přímek, dvou kružnic, přímky a kružnice aj.).

Užitím nástroje „Průsečík“ (obr. 8.64) sestrojíme průsečíky E, F přímky f a kružnice k. K určení průsečíku dvou křivek je potřeba na křivky kliknout pravým tlačítkem myši, následně GeoGebra zobrazí všechny možné průsečíky dvou křivek. Obě křivky musí být předem dané v Nákresně.



Obrázek 8.64: Základní konstrukce 17

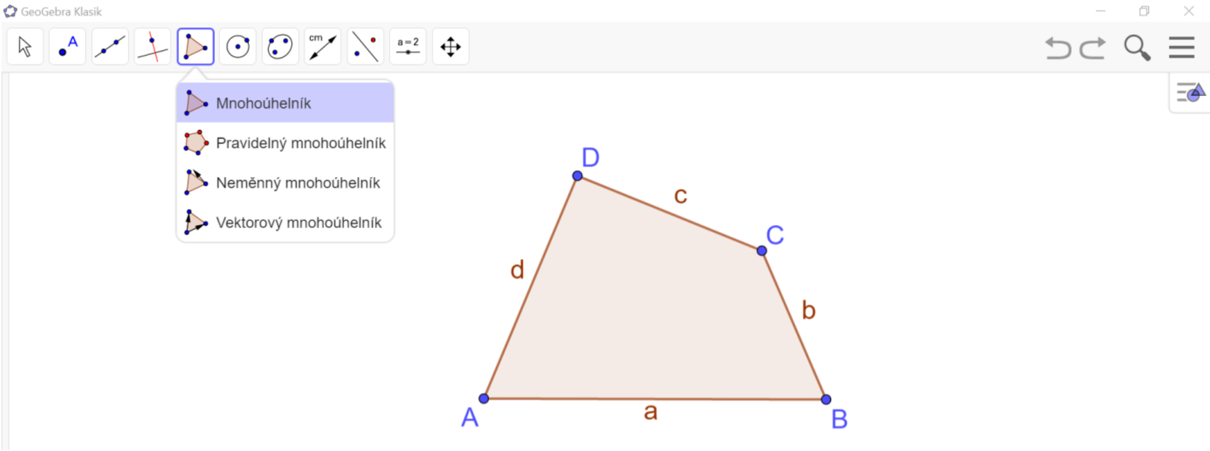
Poznámka: Pomocí GeoGebry můžeme snadno ukázat žákům, jak se mění počet společných bodů přímky a kružnice podle jejich vzdálenosti (obr. 8.65). Tento typ úloh rozvíjí způsob myšlení, který je důležitý k vytvoření diskuze při řešení obecně zadaných konstrukčních úloh.



Obrázek 8.65: Poloha kružnice a přímky

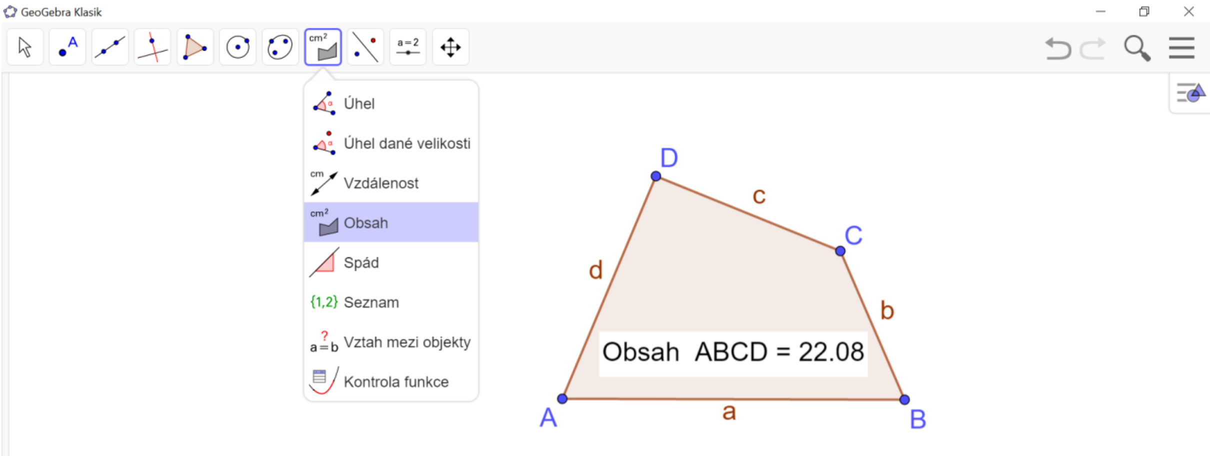
18. Sestrojit mnohoúhelník.

Užitím nástroje „Mnohoúhelník“ (obr. 8.66) sestrojíme čtyřúhelník $ABCD$ kliknutím na body v tomto pořadí: A, B, C, D, A. Body A, B, C, D jsou v nákresně předem dané, nebo je můžeme vytvořit kliknutím na čtyři různá místa v Nákresně.



Obrázek 8.66: Základní konstrukce 18

Poznámka: GeoGebra umožňuje vyjádřit obsah mnohoúhelníku[16] nebo kruhu. Bohužel GeoGebra nerozlišuje pojmy kruh a kružnice, pro zjištění obsahu kruhu musíme zvolit: „Obsah kružnice“. Kliknutím na tlačítko „Obsah“ (obr. 8.67) a označením mnohoúhelníku $ABCD$ se v Nákresně zobrazí obsah $ABCD$ v jednotkách čtverečných.



Obrázek 8.67: Obsah mnohoúhelníku

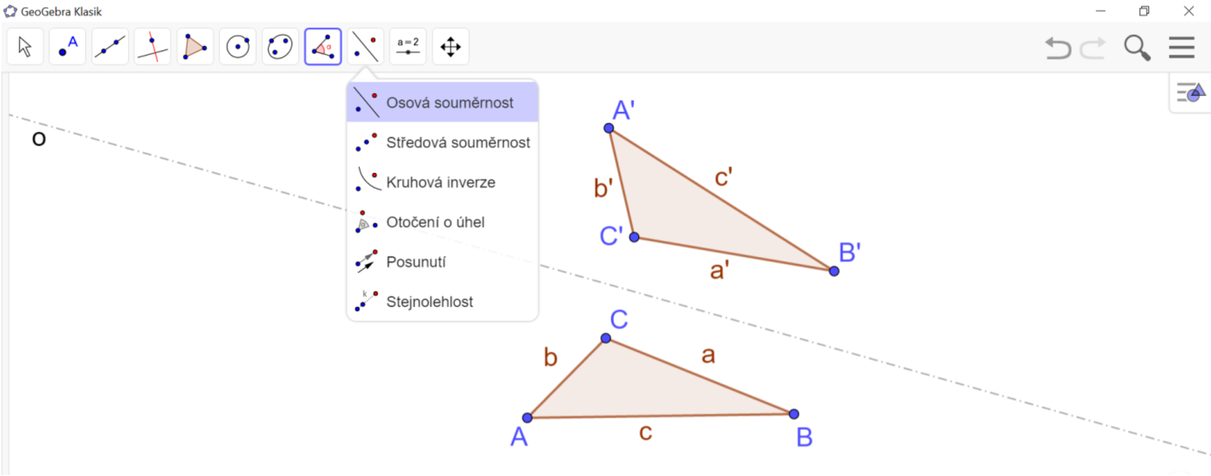
19. Sestrojit objekt v daném shodném zobrazení.

Základní druhy shodných zobrazení v rovině, které budeme v GeoGebře využívat, jsou: osová souměrnost, středová souměrnost, otočení, posunutí.

- **Zobrazit daný objekt v osové souměrnosti s danou osou.**

Užitím nástroje „Osová souměrnost“ (obr. 8.68) zobrazíme trojúhelník ABC v osové souměrnosti s osou o. Trojúhelník ABC a osa o musí být před zobrazením dány v Nákresně.

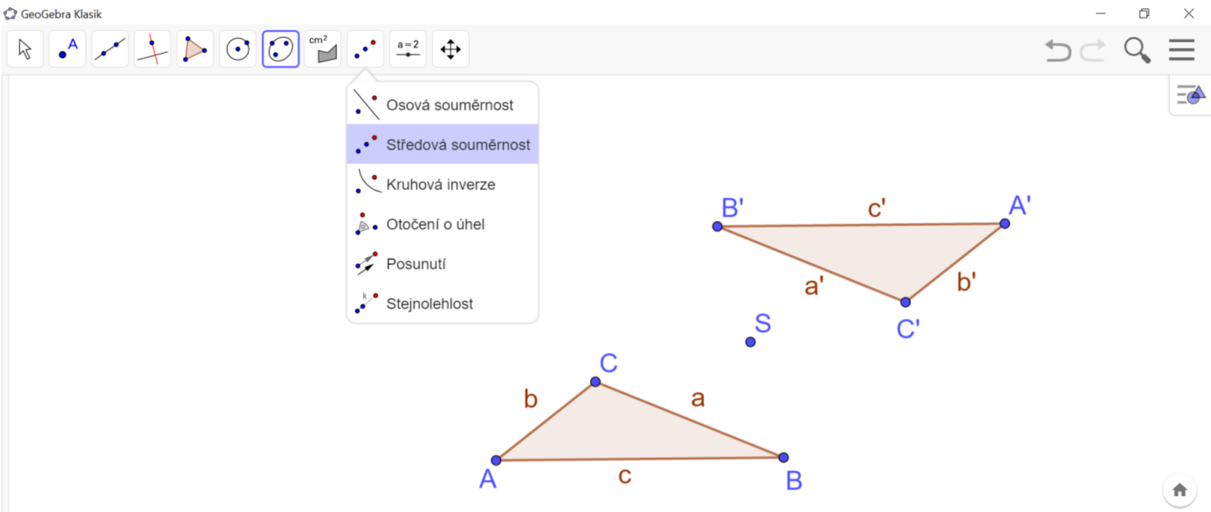
[16] Obsah lze vyjádřit jen tehdy, když je v GeoGebře označený mnohoúhelník podle nástroje „Mnohoúhelník“. Bez označení se daný obsah nezobrazí. Podobně je tomu u vyjádření obvodu mnohoúhelníku.



Obrázek 8.68: Osová souměrnost

- **Zobrazit daný objekt ve středové souměrnosti s daným středem.**

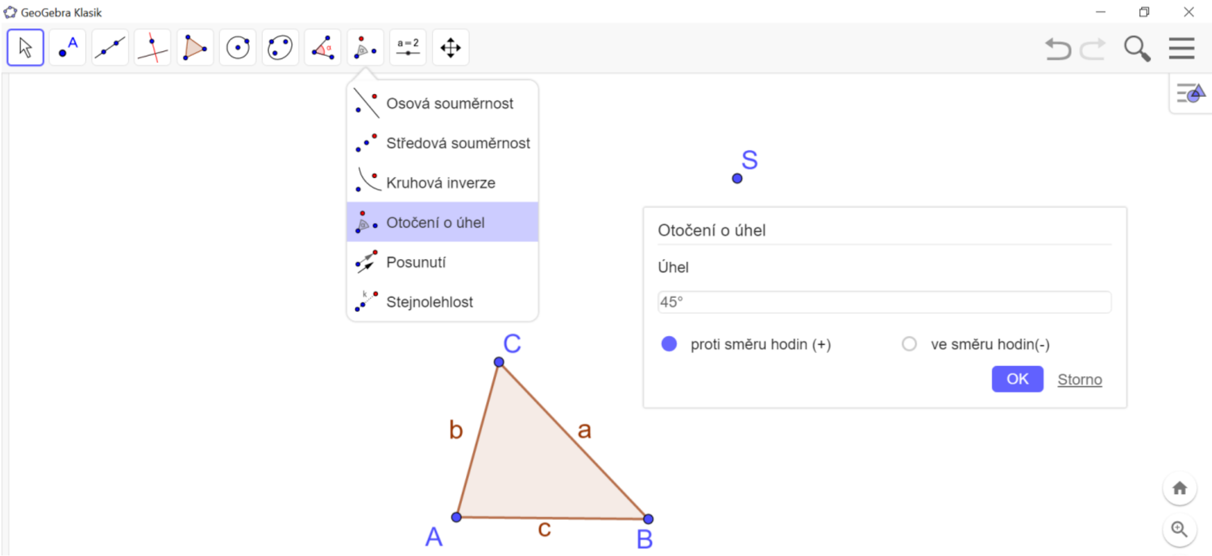
Užitím nástroje „Středová souměrnost“ (obr. 8.69) zobrazíme trojúhelník ABC ve středové souměrnosti se středem S. Trojúhelník ABC a střed S musí být před zobrazením dány v Nákresně.



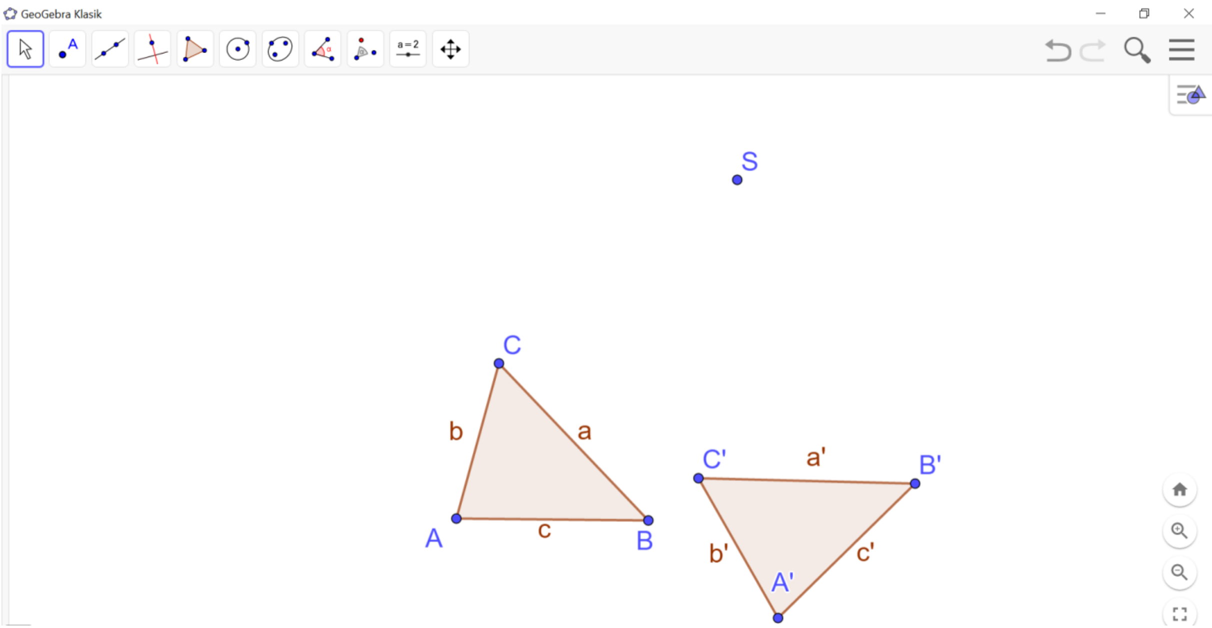
Obrázek 8.69: Středová souměrnost

- **Otočit daný objekt s daným středem otočení o daný úhel.**

Užitím nástroje „Otočení o úhel“ (obr. 8.70) otočíme trojúhelník ABC se středem otočení S o úhel zvolené velikosti (obr. 8.71). Trojúhelník ABC a střed otáčení S musí být před zobrazením dány v Nákresně.



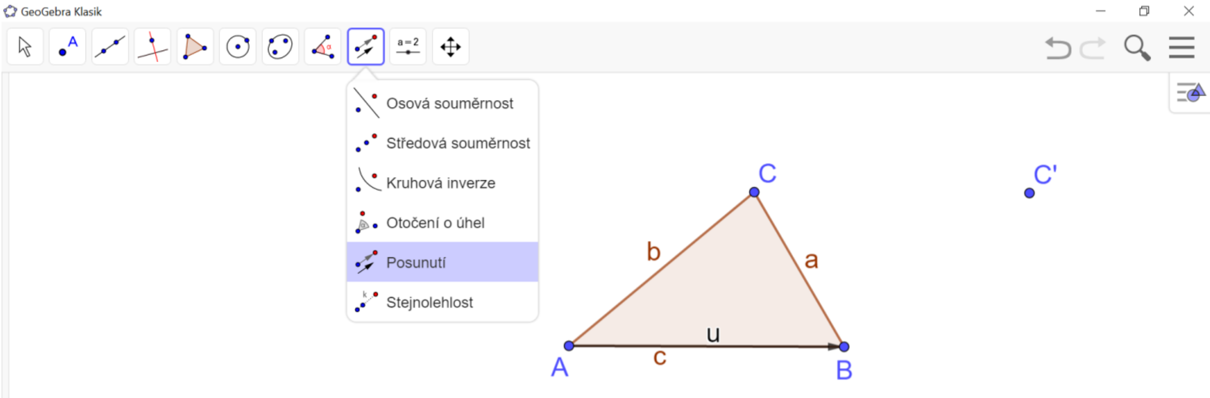
Obrázek 8.70: Otočení (1)



Obrázek 8.71: Otočení (2)

- **Posunout daný objekt s daným počátečním bodem posunutí o daný vektor.**

Užitím nástroje „Posunutí“ (obr. 8.72) se zobrazí bod C v posunutí určeném vektorem (orientovanou úsečkou) AB do bodu C'. Bod C a vektor (orientovaná úsečka) AB musí být před zobrazením dány v Nákresně (stačí postupně označit body A a B).



Obrázek 8.72: Posunutí

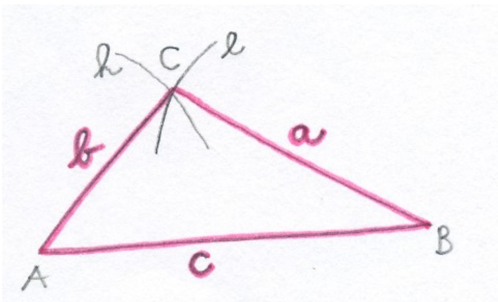
8.4 Konstrukční úlohy

V následujícím textu si ukážeme, jak lze GeoGebru využít pro řešení konstrukčních úloh, které můžeme s žáky řešit na základní škole. Víme, že řešení konstrukční úlohy spočívá v nalezení takové posloupnosti základních konstrukcí, které umožní sestrojit všechny neznámé body nebo útvary a že se člení zpravidla na čtyři části: rozbor, konstrukci, zkoušku a diskusi (viz kapitola 1).

Jak bylo uvedeno výše, v GeoGebře je přednastaveno pojmenovávání objektů, objekty se pojmenovávají písmeny postupně podle abecedy. S tímto faktem musí učitel při zadávání úloh ve výuce počítat. Při konstrukci následujících úloh musí žáky upozornit, aby přejmenovali objekty podle zadání úlohy. Dále v GeoGebře nelze nastavit konkrétní jednotka délky. Proto všechny konstrukční úlohy budou rýsované obecně v jednotkách j.

Příklad 1. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže je dáno: $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm.

Náčrt:

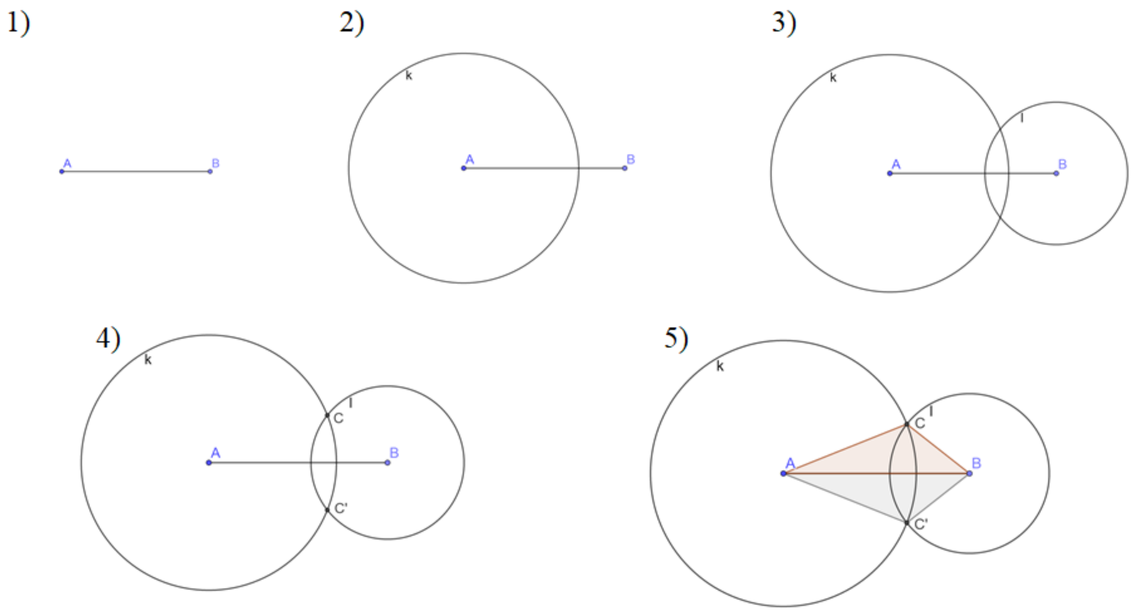


Rozbor: Jedná se o konkrétní zadání nepolohové konstrukční úlohy. Nepolohové úlohy převádíme na polohové umístěním některého prvku. Umístíme úsečku c. Potom budou známé body: A, B. Neznámý bod: C. Podmínky pro neznámý bod: Bod C leží na průsečíku kružnice k se středem A a poloměrem 5 cm a kružnice l se středem B a poloměrem 3 cm.

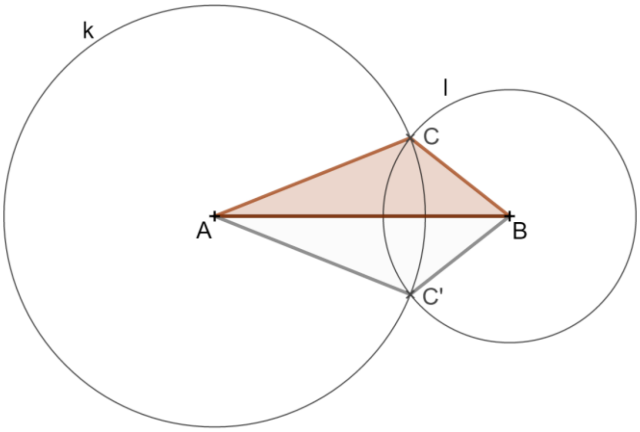
Popis konstrukce:

1) $AB;\ \lvert AB\rvert = c = 7\ \mathrm{cm}$	Užitím nástroje „Úsečka s pevnou délkou“ sestrojíme úsečku AB s délkou 7 j.
2) $k;\ k(A, b = 5\ \mathrm{cm})$	Užitím nástroje „Kružnice daná středem a poloměrem“ sestrojíme kružnici k se středem A a poloměrem 5 j.
3) $l;\ l(B, a = 3\ \mathrm{cm})$	Užitím nástroje „Kružnice daná středem a poloměrem“ sestrojíme kružnici l se středem B a poloměrem 3 j.
4) $C; C \in k \cap l$	Užitím nástroje „Průsečík“ označíme průsečík C kružnic k a l.
5) ΔABC	Užitím nástroje „Mnohoúhelník“ sestrojíme trojúhelník ABC.

Fázová konstrukce v GeoGebře:

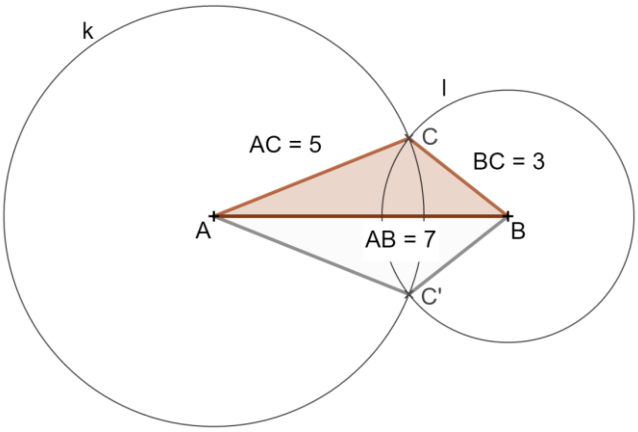


Konstrukce:



Úloha má v polorovině určené přímkou AB jedno řešení.

Zkouška: Užitím nástroje „Vzdálenost“ jsme ověřili (obr. 8.73), že trojúhelník ABC odpovídá zadání.



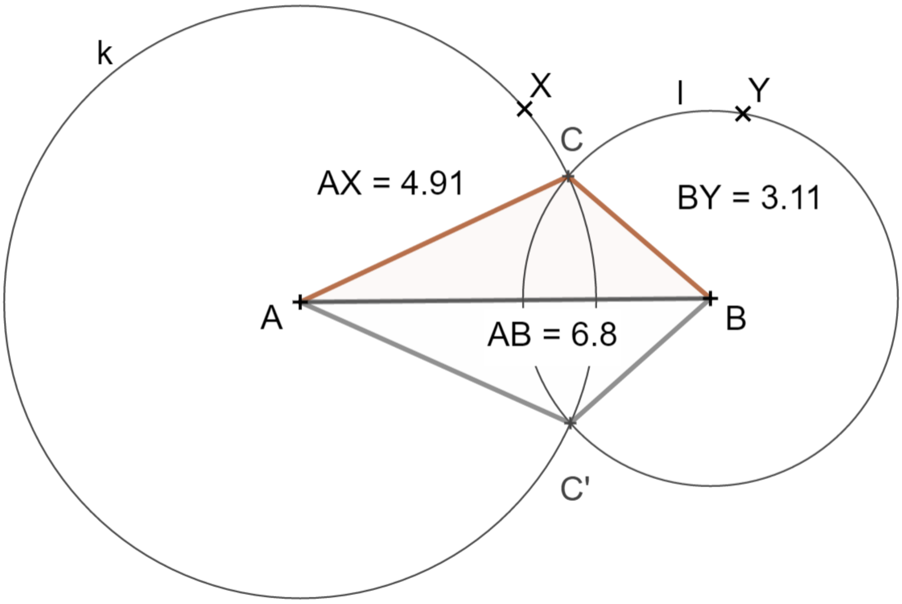
Obrázek 8.73: Zkouška konstrukce příkladu 1

Poznámka: Pokud budeme mít úlohu 1 zadanou obecně, řešení se bude lišit v užití základních konstrukcí GeoGebry (viz popis konstrukce).

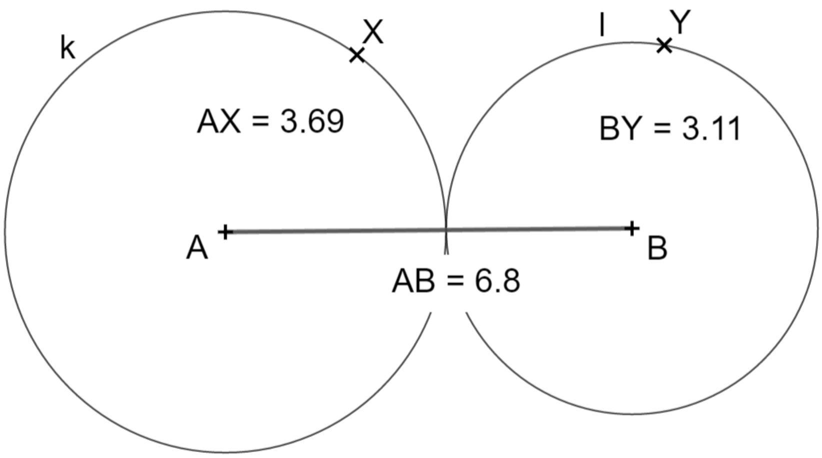
Popis konstrukce pro obecně zadanou úlohu 1:

1) $AB;\ \lvert AB\rvert = c$	Užitím nástroje „Úsečka“ sestrojíme úsečku AB s délkou c.
2) $k;\ k(A, \lvert AX\rvert = b)$	Užitím nástroje „Kružnice daná středem a bodem“ sestrojíme kružnici k se středem A a poloměrem b.
3) $l;\ l(B, \lvert BY\rvert = a)$	Užitím nástroje „Kružnice daná středem a bodem“ sestrojíme kružnici l *se středem* B *a poloměrem* a.
4) $C; C \in k \cap l$	Užitím nástroje „Průsečík“ označíme průsečík C kružnic k a l.
5) ΔABC	Užitím nástroje „Mnohoúhelník“ sestrojíme trojúhelník ABC.

Obecně zadaná úloha 1 může mít ve zvolené polorovině **jedno** nebo **žádné řešení**. Počet řešení obecně zadané úlohy 1 závisí na velikosti stran *a, b, c*. Úloha bude mít **jedno řešení** ve zvolené polorovině, pokud bude splněna trojúhelníková nerovnost[17]: $a + b > c \wedge b + c > a \wedge a + c > b$ (obr. 8.74). V opačném případě **úloha nemá řešení** (obr. 8.75, 8.76).

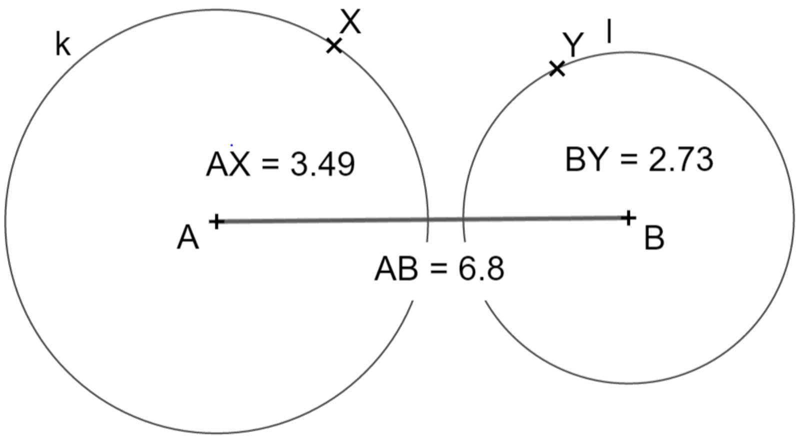


Obrázek 8.74: Diskuze k obecnému zadání (1)



Obrázek 8.75: Diskuze k obecnému zadání (2)

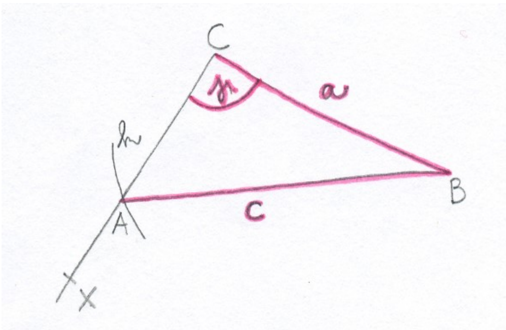
[17] Trojúhelníkovou nerovnost můžeme jednoduše ilustrovat, využijeme-li dynamičnost GeoGebry.



Obrázek 8.76: Diskuze k obecnému zadání (3)

Příklad 2. Narýsujte trojúhelník ABC, jestliže znáte: $a = 4\text{ cm}, c = 8\text{ cm}, \gamma = 60°$.

Náčrt:

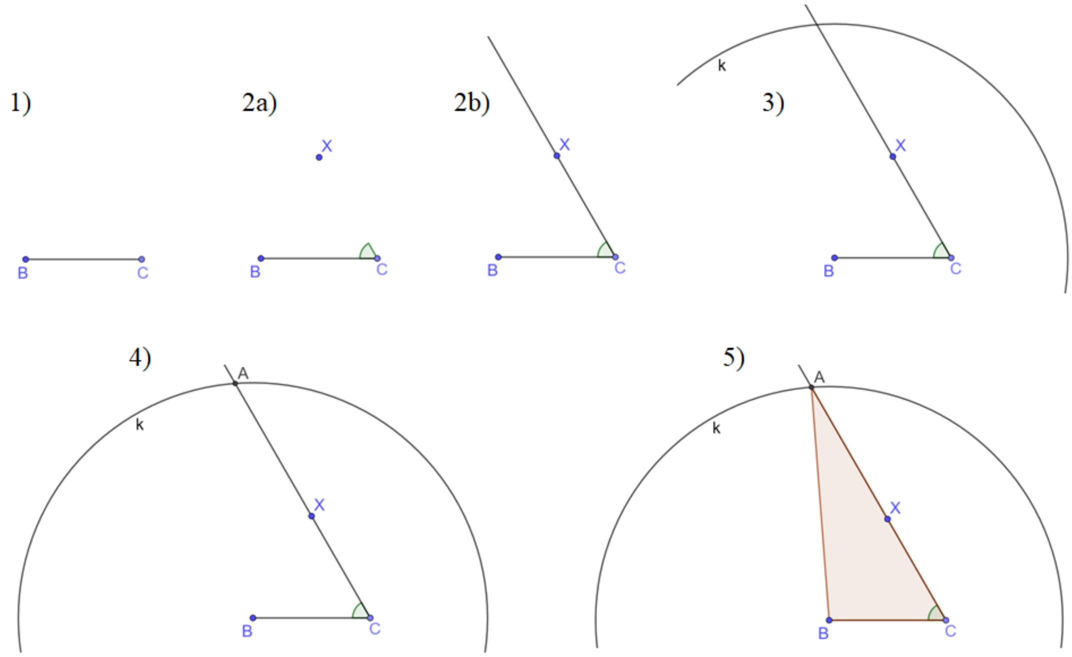


Rozbor: Jedná se o konkrétní zadání nepolohové konstrukční úlohy. Z náčrtku vidíme, že je vhodné nejprve umístit úsečku BC. Potom budou známé body: B, C. Neznámý bod: A. Podmínky pro neznámý bod: Bod A je průsečíkem polopřímky CX, kde $|\sphericalangle BCX| = 60°$ a kružnice *k* se středem B a poloměrem 8 cm.

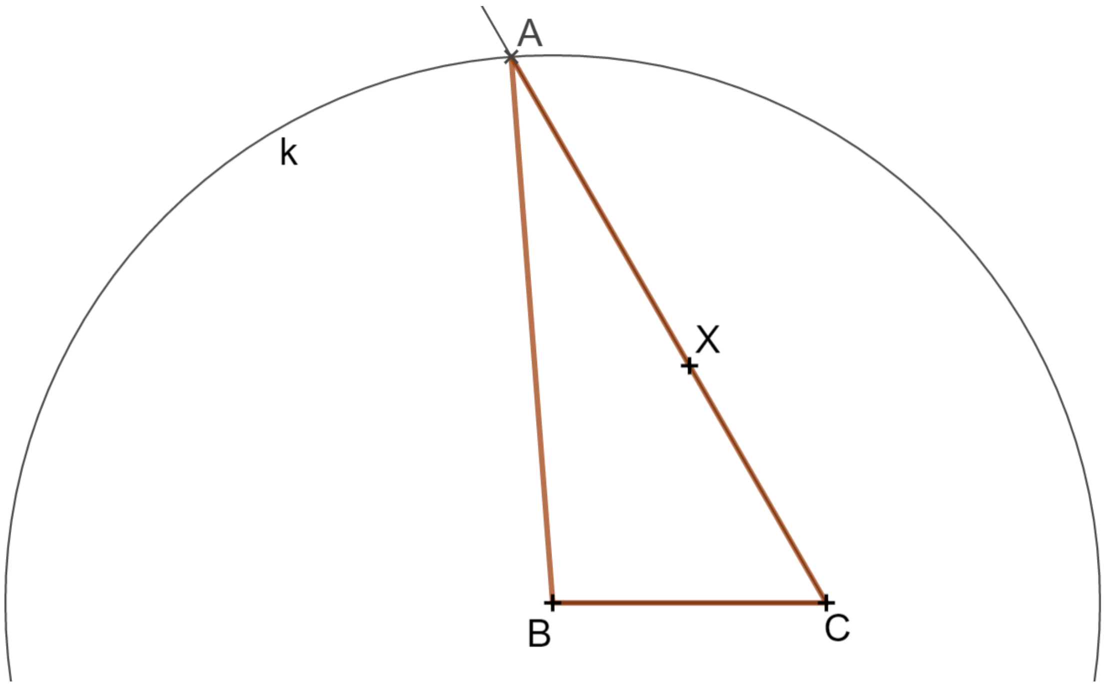
Popis konstrukce:

1) BC; $|BC| = a = 4$ cm — Užitím nástroje „Úsečka s pevnou délkou" sestrojíme úsečku BC s délkou 4 j.
2) $\mapsto CX$; $|\sphericalangle BCX| = \gamma = 60°$ — Užitím nástroje „Úhel dané velikosti" sestrojíme úhel o velikosti 60°. Užitím nástroje „Polopřímka" sestrojíme polopřímku CX (rameno úhlu BCX).
3) k; $k(B, c = 8\text{ cm})$ — Užitím nástroje „Kružnice daná středem a poloměrem" sestrojíme kružnici k se středem B a poloměrem 8 j.
4) A; $A \in \mapsto CX \cap k$ — Užitím nástroje „Průsečík" označíme průsečík A ramene úhlu CX a kružnice k.
5) ΔABC — Užitím nástroje „Mnohoúhelník" sestrojíme trojúhelník ABC.

Fázová konstrukce v GeoGebře:

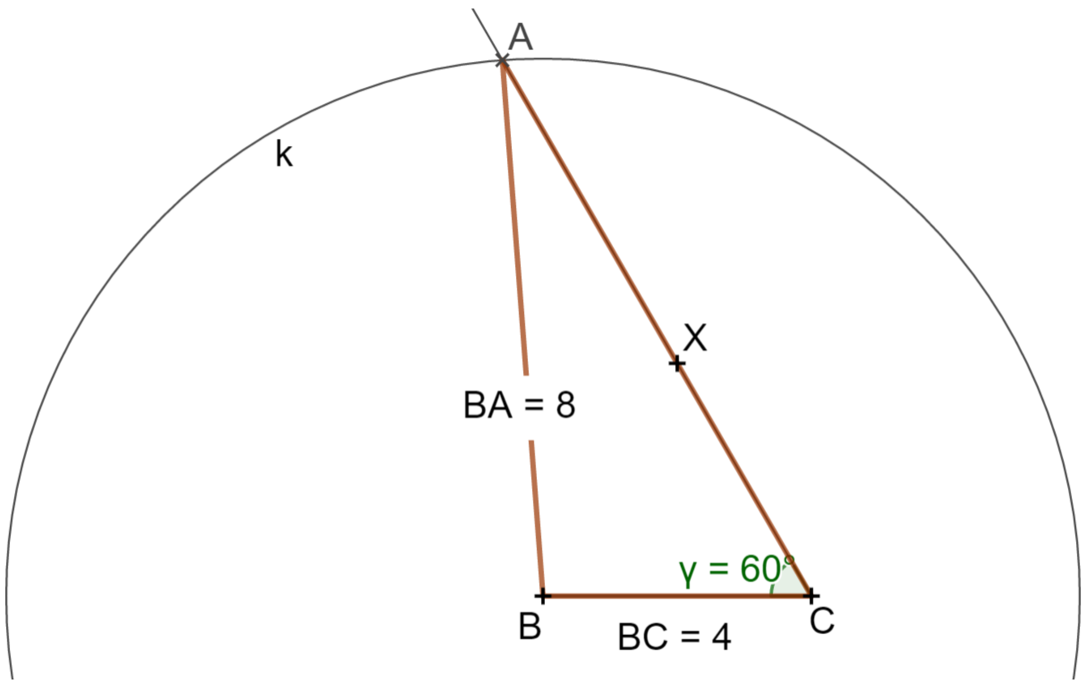


Konstrukce:



Úloha má v polorovině určené přímkou BC jedno řešení.

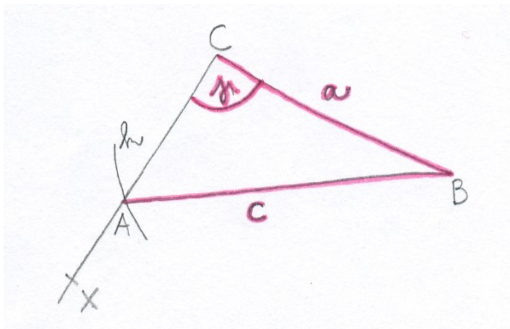
Zkouška: Užitím nástroje „Vzdálenost“ a „Úhel“ jsme ověřili (obr. 8.77), že trojúhelník ABC odpovídá zadání.



Obrázek 8.77: Zkouška konstrukce příkladu 2

Příklad 3. Narýsujte trojúhelník ABC, jestliže znáte: a, c, γ.

Náčrt:



Rozbor: Jedná se o obecné zadání nepolohové konstrukční úlohy. Z náčrtku vidíme, že je vhodné nejprve umístit úsečku BC. Potom budou známé body: B, C. Neznámý bod: A. Podmínky pro neznámý bod: Bod A leží na průsečíku polopřímky CX, kde $|\sphericalangle BCX| = \gamma$, a kružnice k se středem B a poloměrem c.

Popis konstrukce:

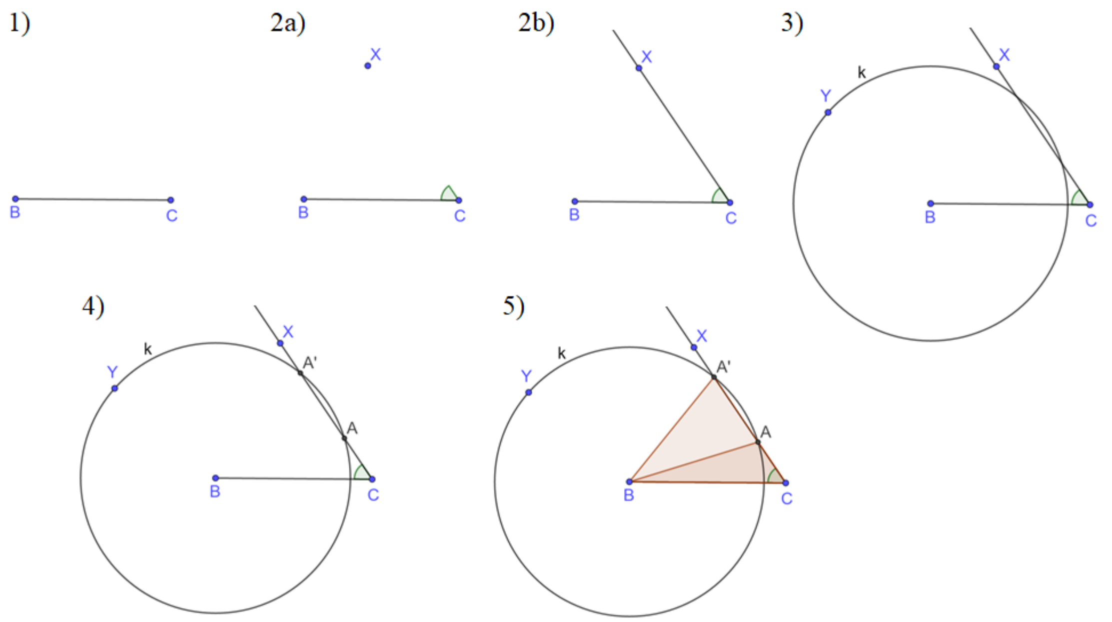
1) $BC;\ |BC| = a$ — Užitím nástroje „Úsečka" sestrojíme úsečku BC s délkou a.
2) $\mapsto CX;\ |\sphericalangle BCX| = \gamma$ — Užitím nástroje „Úhel" sestrojíme úhel γ. Užitím nástroje „Polopřímka" sestrojíme polopřímku CX (rameno úhlu BCX).

3) k; $k(B, |BY| = c)$ — Užitím nástroje „Kružnice daná středem a bodem“ sestrojíme kružnici k se středem B a poloměrem c.

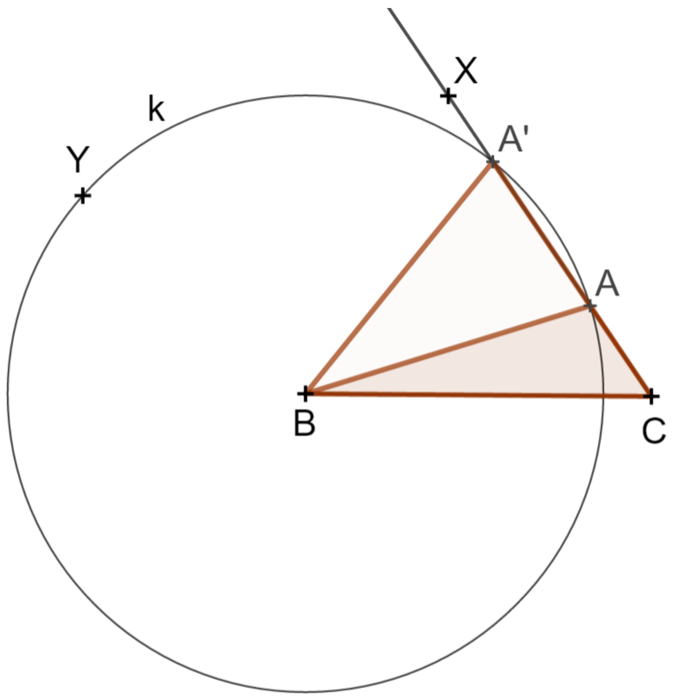
4) A; $A \in \mapsto CX \cap k$ — Užitím nástroje „Průsečík“ označíme průsečík A ramene úhlu CX a kružnice k.

5) ΔABC — Užitím nástroje „Mnohoúhelník“ sestrojíme trojúhelník ABC.

Fázová konstrukce v GeoGebře:



Konstrukce:

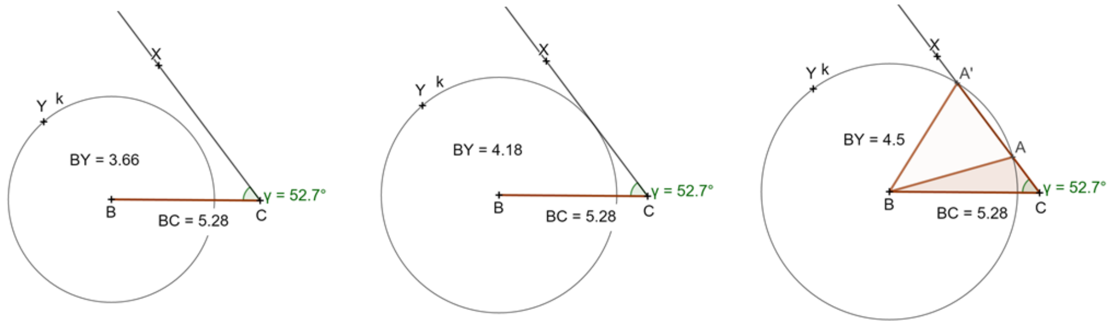


Úloha má v dané polorovině dvě řešení (při $a = 5{,}28$ cm, $c = 4{,}55$ cm, $\gamma = 55{,}47°$).

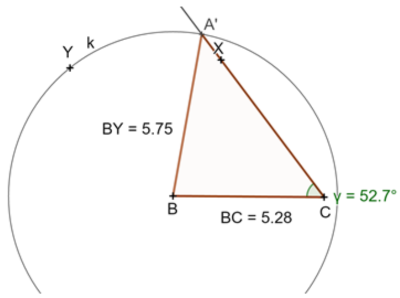
Zkouška: Ověříme, že sestrojený útvar je trojúhelník (podobně jako u příkladu 2).

Diskuze: Úloha může mít ve zvolené polorovině **jedno**, **dvě** nebo **žádné řešení**. Počet řešení závisí na velikosti *a, c,* γ. Pokud $0° < \gamma < 90°$ (obr. 8.78, 8.79): úloha má právě **jedno řešení** ve zvolené polorovině právě tehdy, když $c > a$ ($|BY| > |BC|$, obr. 8.79). Pokud $\gamma = 90°$ (obr. 8.80, 8.81): úloha má právě **jedno řešení** ve zvolené polorovině právě tehdy, když $c > a$ ($|BY| > |BC|$, obr. 8.81); úloha nemá **žádné řešení** ve zvolené polorovině právě tehdy, když $c \leq a$ ($|BY| \leq |BC|$, obr. 8.80). Pokud $90° < \gamma < 180°$ (obr. 8.82, 8.83): úloha má právě **jedno řešení** ve zvolené polorovině právě tehdy, když $c > a$ ($|BY| > |BC|$, obr. 8.83); úloha nemá **žádné řešení** ve zvolené polorovině právě tehdy, když $c \leq a$ ($|BY| \leq |BC|$, obr. 8.82).

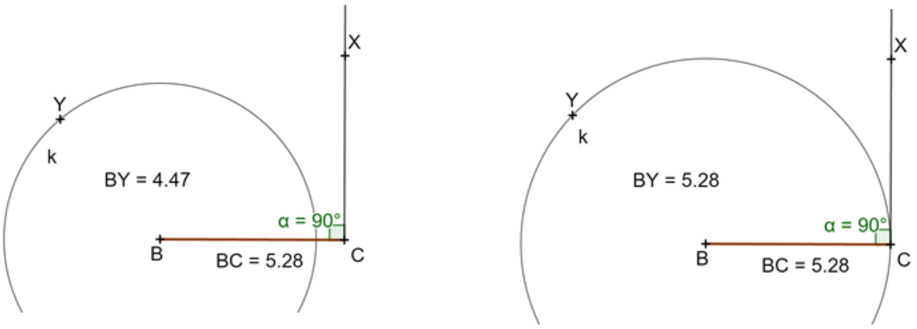
Poznámka: Jak vidíme na obr. 8.78, tak úloha může mít i dvě řešení v dané polorovině, které závisí na velikosti *a, c,* γ. Formulovat diskuzi pro tyto možnosti by však bylo už velmi složité. My se omezíme na formulaci konkrétních vyjádření.



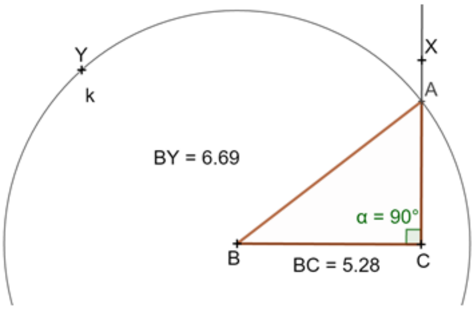
Obrázek 8.78: Diskuze příkladu 3 (1)



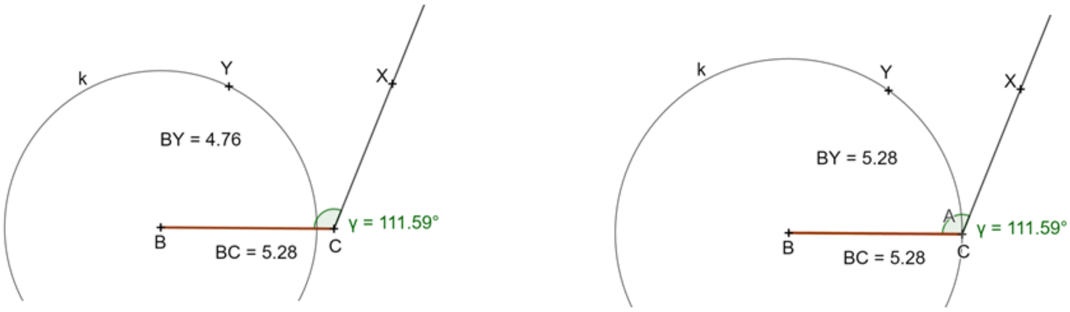
Obrázek 8.79: Diskuze příkladu 3 (2)



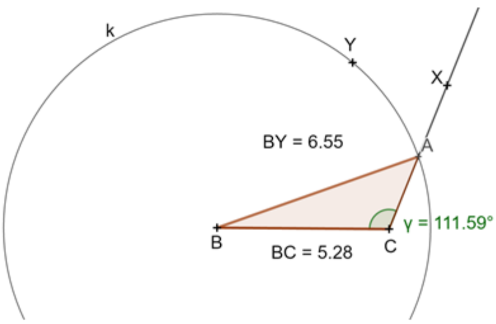
Obrázek 8.80: Diskuze příkladu 3 (3)



Obrázek 8.81: Diskuze příkladu 3 (4)



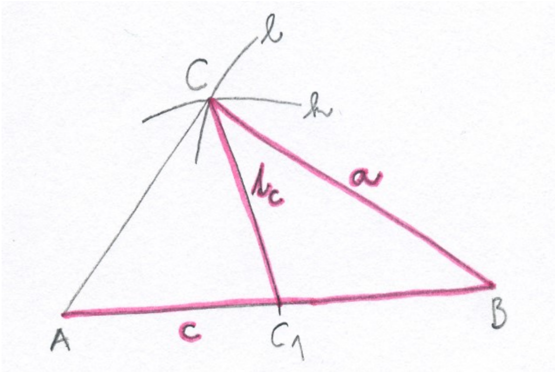
Obrázek 8.82: Diskuze příkladu 3 (5)



Obrázek 8.83: Diskuze příkladu 3 (6)

Příklad 4. Je dána úsečka AB, $|AB| = 6\ \mathrm{cm}$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí: $a = 5\ \mathrm{cm}, t_c = 5\ \mathrm{cm}$.

Náčrt:

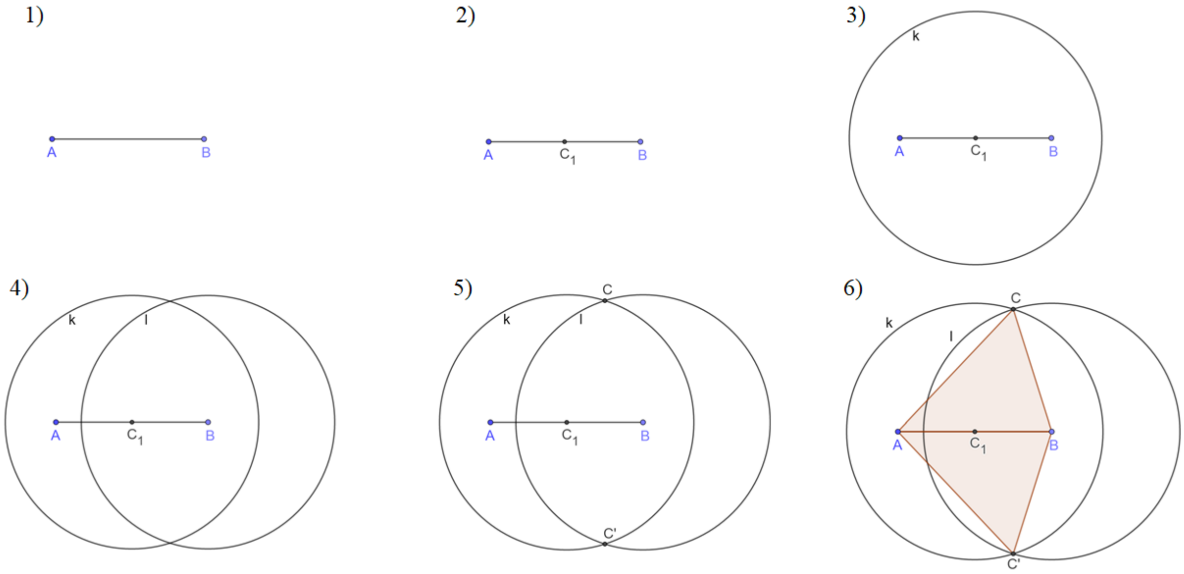


Rozbor: Jedná se o konkrétní zadání polohové konstrukční úlohy. Známé body: A, B. Neznámé body: C. Podmínky pro neznámé body: Bod C je vrcholem trojúhelníku C_1BC, kde C_1 je středem strany AB. Tedy C leží na kružnici k se středem C_1 a poloměrem 5 cm a na kružnici l se středem B a poloměrem 5 cm.

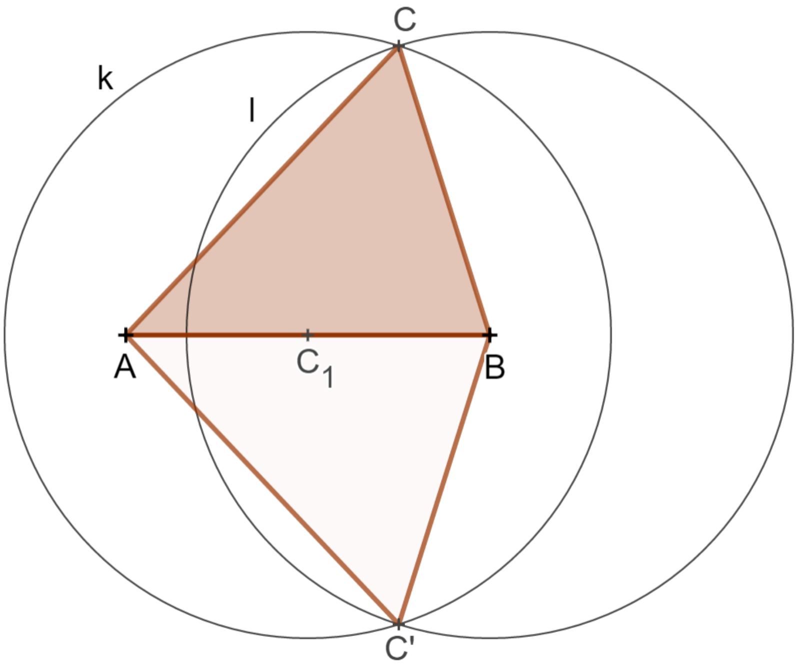
Popis konstrukce:

1) $AB;\ |AB| = 6\ \mathrm{cm}$	Užitím nástroje „Úsečka s pevnou délkou“ sestrojíme úsečku AB s délkou 6 j.
2) $C_1;\ C_1 \in AB \wedge AC_1 \cong C_1B$	Užitím nástroje „Střed“ sestrojíme střed úsečky AB.
3) $k;\ k(C_1, t_c = 5\ \mathrm{cm})$	Užitím nástroje „Kružnice daná středem a poloměrem“ sestrojíme kružnici k se středem C_1 a poloměrem 5 j.
4) $l;\ l(B, a = 5\ \mathrm{cm})$	Užitím nástroje „Kružnice daná středem a poloměrem“ sestrojíme kružnici l se středem B a poloměrem 5 j.
5) $C; C \in k \cap l$	Užitím nástroje „Průsečík“ označíme průsečík C kružnic k a l.
6) ΔABC	Užitím nástroje „Mnohoúhelník“ sestrojíme trojúhelník ABC.

Fázová konstrukce v GeoGebře:

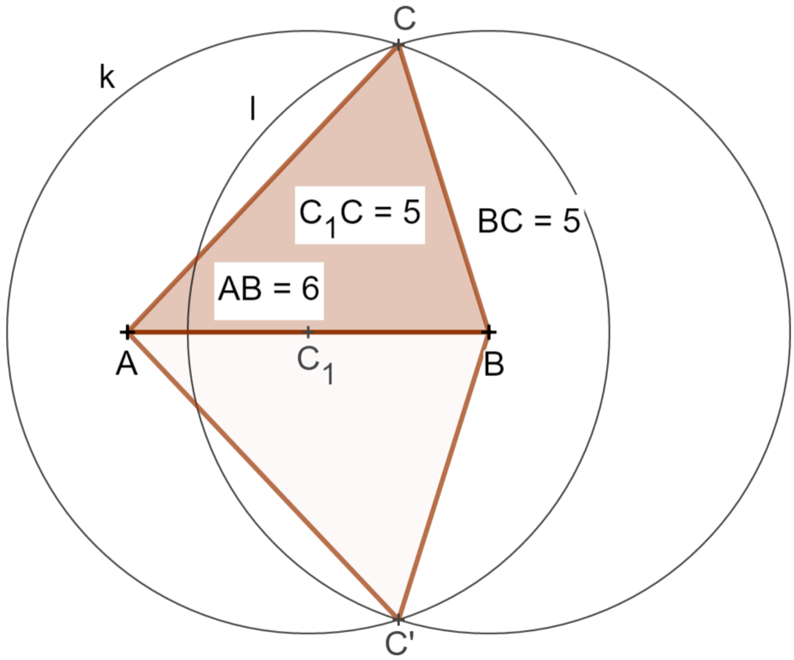


Konstrukce:



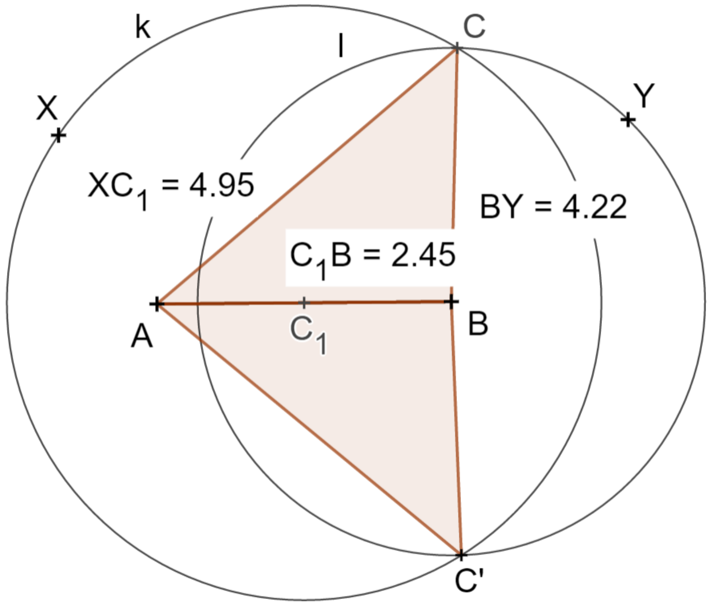
Úloha má v polorovině určené přímkou AB jedno řešení.

Zkouška: Užitím nástroje „Vzdálenost“ (obr. 8.84) jsme ověřili, že trojúhelník ABC odpovídá zadání.

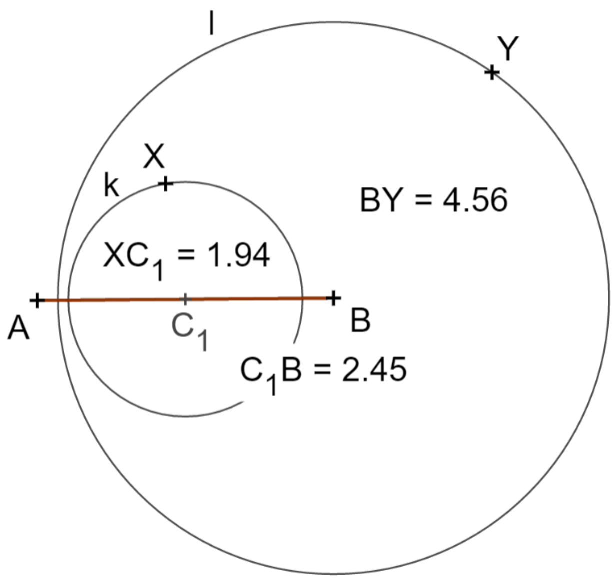


Obrázek 8.84: Zkouška příkladu 4

Poznámka: Prostředí GeoGebry můžeme plně využít u obecného zadání tohoto příkladu (Je dána úsečka *c*. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, jestliže je dáno: a, t_c.) při formulaci diskuze. Obecně zadaná úloha může mít v dané polorovině buď **jedno**, nebo **žádné řešení**. Počet řešení závisí na velikosti *a, c,* t_c. Úloha má právě **jedno řešení** v dané polorovině, jestliže $a + t_c > \frac{c}{2} \wedge a + \frac{c}{2} > t_c \wedge t_c + \frac{c}{2} > a$ (obr. 8.85). Úloha nemá **žádné řešení** v dané polorovině, jestliže $a + t_c \leq \frac{c}{2}$ nebo $a + \frac{c}{2} \leq t_c$ nebo $t_c + \frac{c}{2} \leq a$ ($|C_1X| + |C_1B| \leq |BY|$, obr. 8.86).



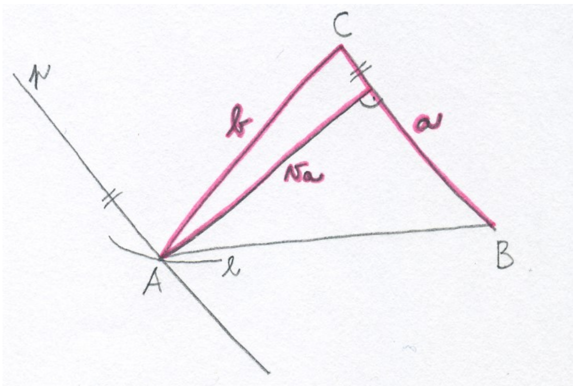
Obrázek 8.85: Diskuze příkladu 4 (1)



Obrázek 8.86: Diskuze příkladu 4 (2)

Příklad 5. Je dána úsečka BC, $|BC| = 7\ \text{cm}$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí: $v_a = 4\ \text{cm}, b = 5\ \text{cm}$.

Náčrt:



Rozbor: Jedná se o konkrétní zadání polohové konstrukční úlohy. Známé body: B, C. Neznámý bod: A. Podmínky pro neznámý bod: Bod A leží na přímce p, která je rovnoběžná s úsečkou BC a má od ní vzdálenost 4 cm. Zároveň bod A leží na kružnici l se středem C a poloměrem 5 cm.

Popis konstrukce:

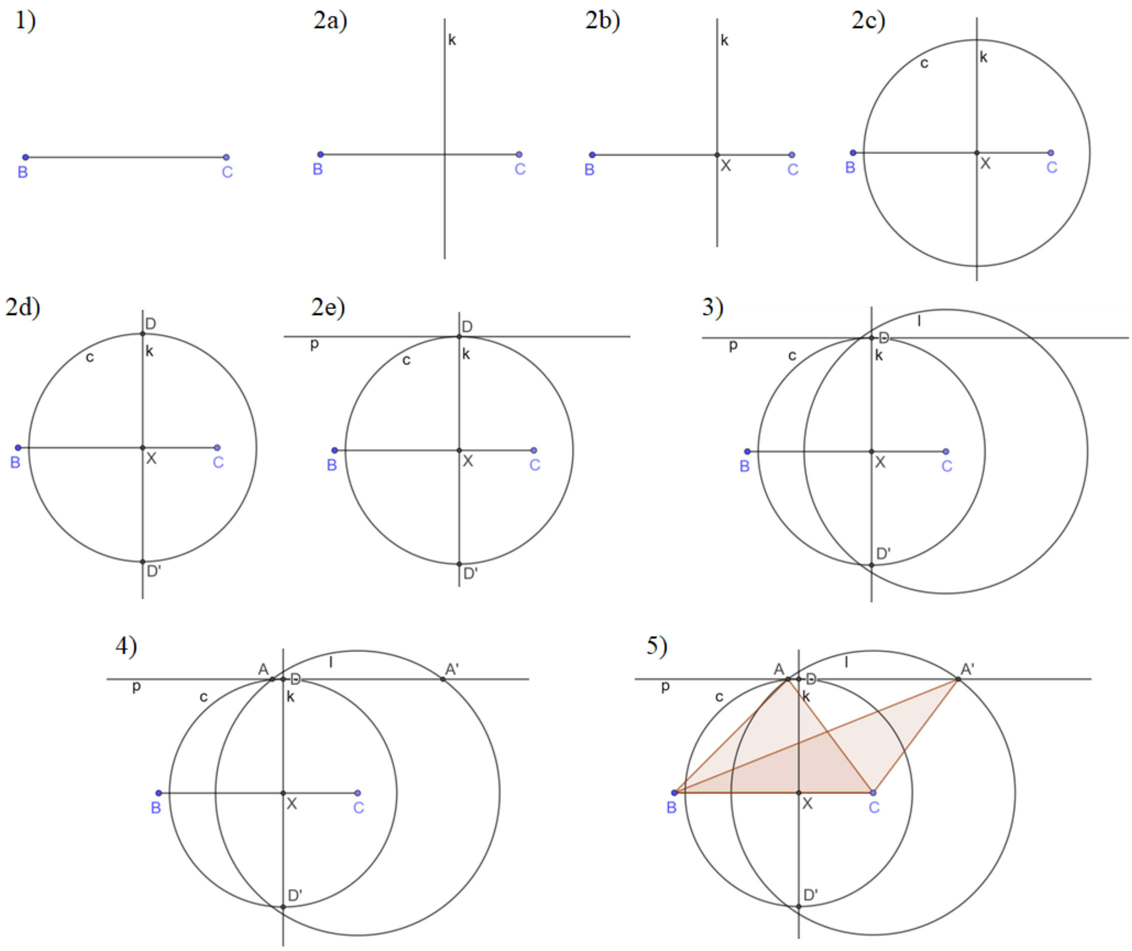
1) BC; $|BC| = 7\ \text{cm}$ — Užitím nástroje „Úsečka s pevnou délkou" sestrojíme úsečku BC s délkou 7 j.
2) p[18]; $p|| \leftrightarrow \text{BC} \wedge |p \leftrightarrow BC| = v_a = 4\ \text{cm}$ — Užitím nástroje „Kolmice"

[18] V GeoGebře nelze sestrojit rovnoběžku s přímkou BC v určité vzdálenosti. Je nutné nejdříve sestrojit bod této rovnoběžky pomocí nástroje „Kolmice".

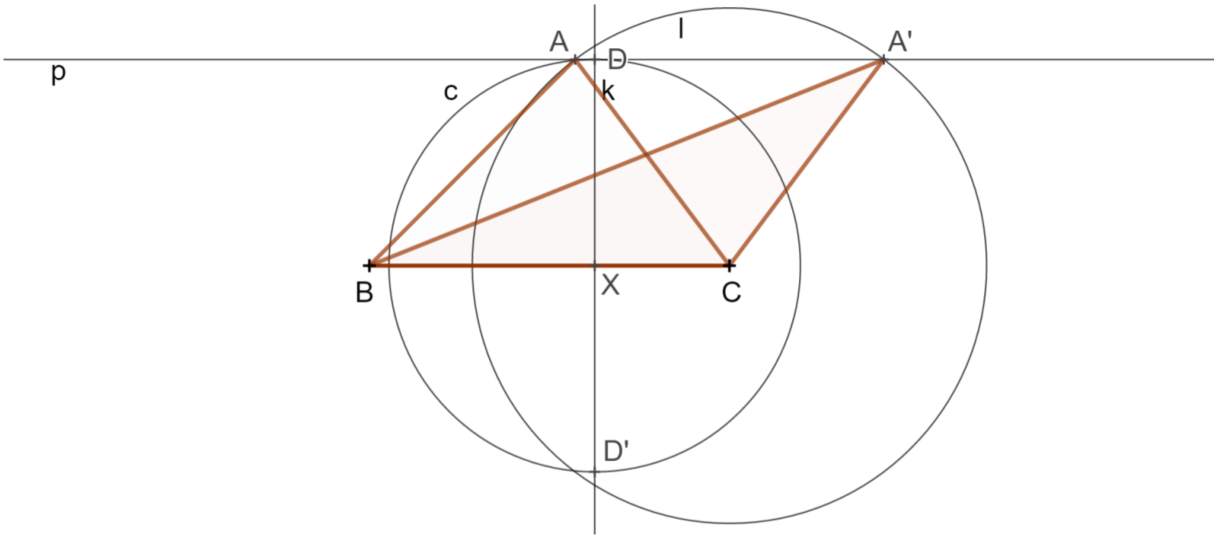
sestrojíme kolmici k na přímku BC. Užitím nástroje „Průsečík“ sestrojíme průsečík X kolmice k a přímky BC. Užitím nástroje „Kružnice daná středem a poloměrem“ sestrojíme kružnici c se středem X a poloměrem 4 j. Užitím nástroje „Průsečík“ sestrojíme průsečík D kolmice k a kružnice c. Užitím nástroje „Rovnoběžka“ sestrojíme rovnoběžku p procházející bodem D a rovnoběžnou s přímkou BC.

3) $l;\ l(C, b = 5\ \text{cm})$	Užitím nástroje „Kružnice daná středem a poloměrem“ sestrojíme kružnici l se středem C a poloměrem 5 j.
4) $A; A \in p \cap l$	Užitím nástroje „Průsečík“ označíme průsečík C přímky p a kružnice l.
5) ΔABC	Užitím nástroje „Mnohoúhelník“ sestrojíme trojúhelník ABC.

Fázová konstrukce v GeoGebře:

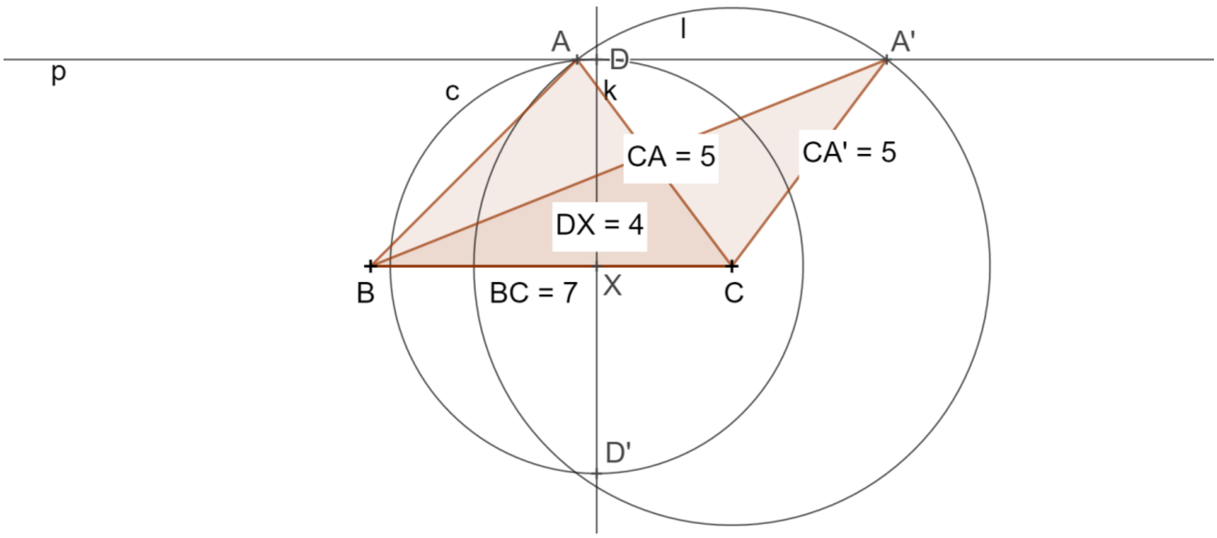


Konstrukce:



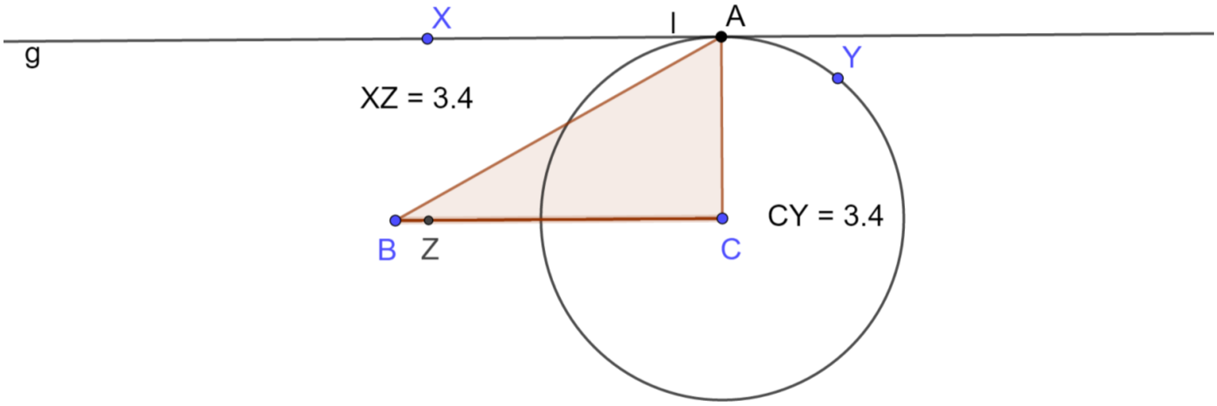
Úloha má v polorovině určené přímkou *BC* dvě řešení.

Zkouška: Užitím nástroje „Vzdálenost“ (obr. 8.87) jsme ověřili, že trojúhelník ABC odpovídá zadání.

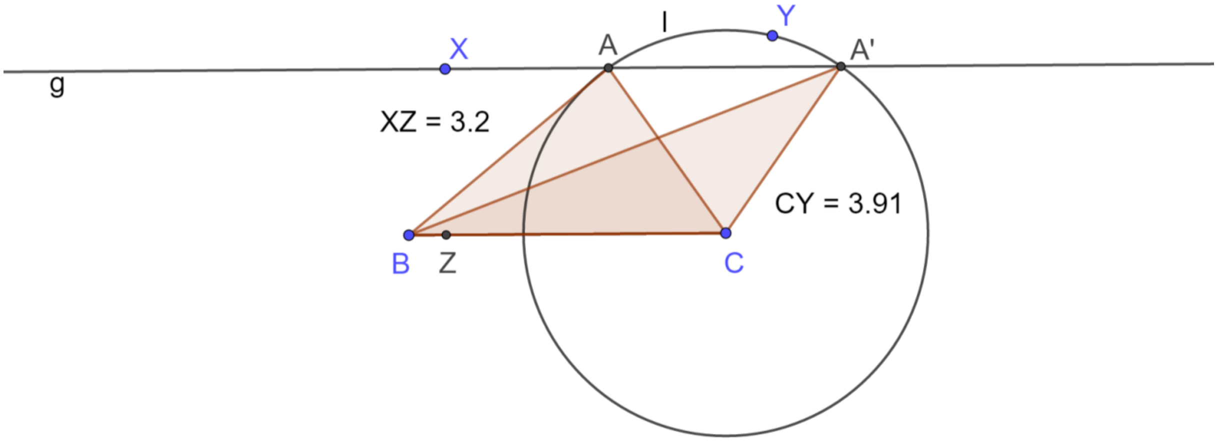


Obrázek 8.87: Zkouška příkladu 5

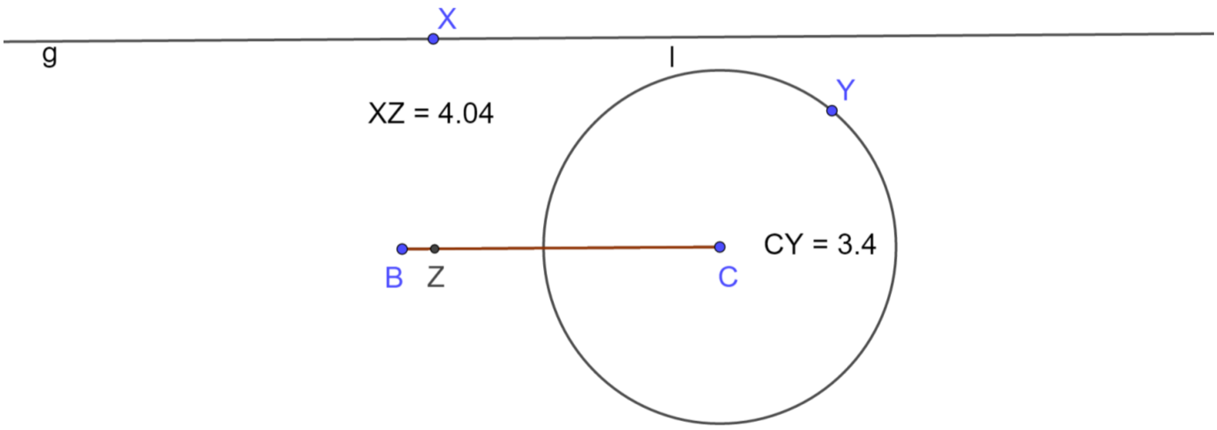
Poznámka: I v tomto příkladu můžeme využít prostředí GeoGebry u diskuze obecného zadání tohoto příkladu. Úloha může mít ve zvolené polorovině **jedno**, **dvě** nebo **žádné řešení**. Počet řešení závisí na velikosti v_a, b. Úloha má právě **jedno řešení** v dané polorovině právě tehdy, když $v_a = b$ ($|ZX| = |CY|$, obr. 8.88). Úloha má právě **dvě řešení** v dané polorovině pokud $v_a < b$ ($|ZX| < |CY|$, obr. 8.89). Úloha nemá **žádné řešení** v dané polorovině, jestliže $v_a > b$ ($|ZX| > |CY|$, obr. 8.90).



Obrázek 8.88: Diskuze příkladu 5 (1)



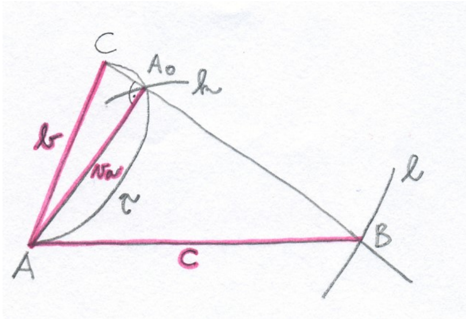
Obrázek 8.89: Diskuze příkladu 5 (2)



Obrázek 8.90: Diskuze příkladu 5 (3)

Příklad 6. Je dána úsečka AC, $|AC| = 6$ cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí: $v_a = 5{,}5$ cm, $c = 7$ cm.

Náčrt:

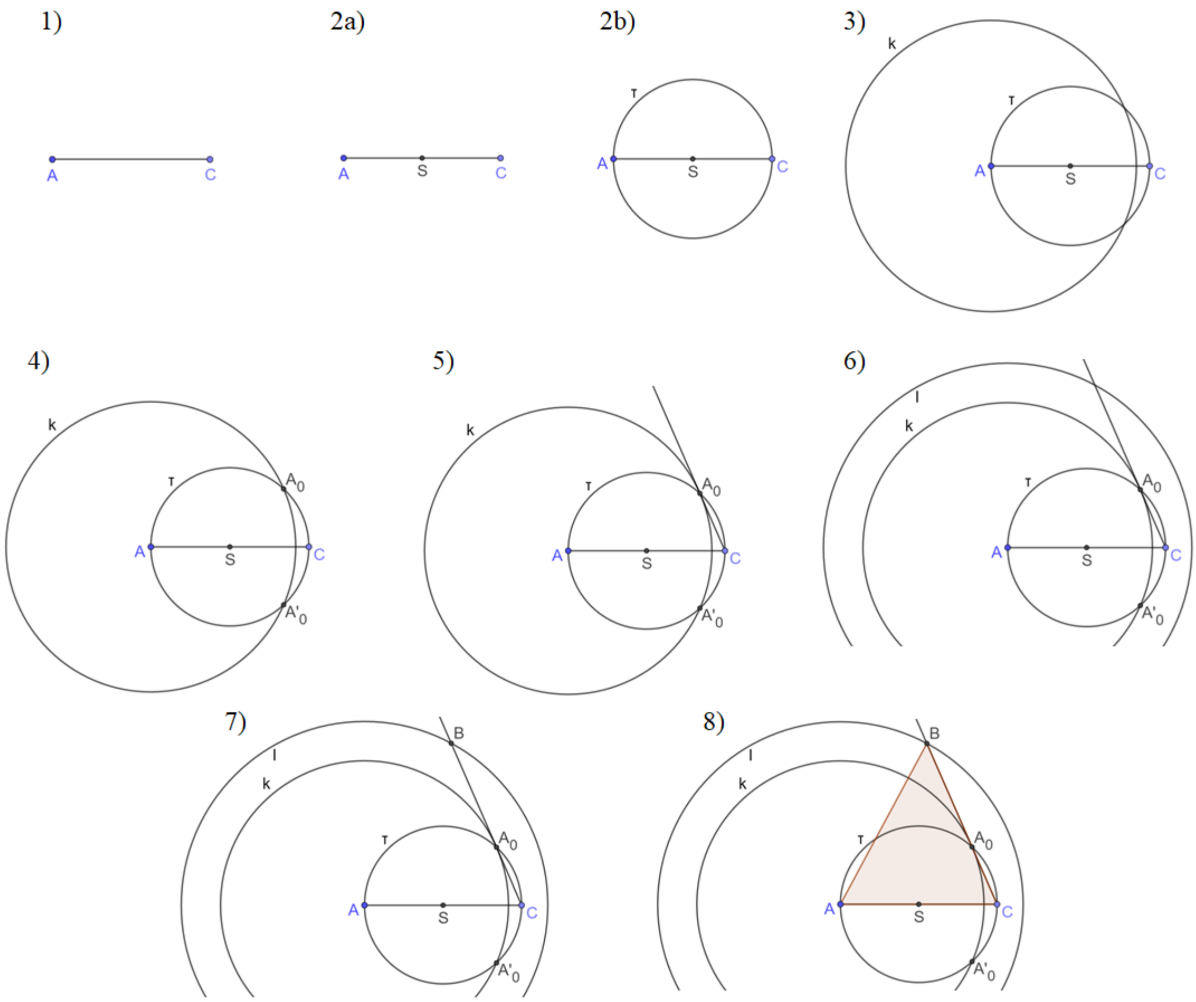


Rozbor: Jedná se o konkrétní zadání polohové konstrukční úlohy. Známé body: A, C. Neznámé body: B. Podmínky pro neznámé body: Bod B leží na kružnici l se středem v A a poloměrem 7 cm a na polopřímce CA_0, kde A_0 je vrcholem pravého úhlu nad úsečkou AC – leží tedy na Thaletově kružnici nad průměrem AC.

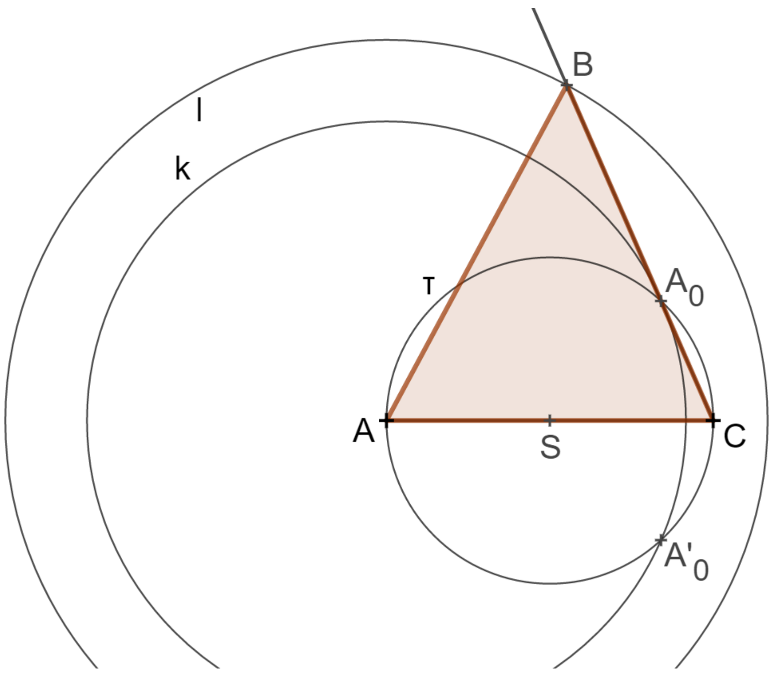
Popis konstrukce

1) $AC;\ |AC| = 6$ cm	Užitím nástroje „Úsečka s pevnou délkou" sestrojíme úsečku AC s délkou 6 j.
2) τ (Thaletova kružnice nad AC)	Užitím nástroje „Střed" sestrojíme střed S úsečky AC. Užitím nástroje „Kružnice dána středem a bodem" sestrojíme kružnici τ se středem S a poloměrem $|SC|$.
3) $k;\ k(A, v_a = 5{,}5\text{ cm})$	Užitím nástroje „Kružnice daná středem a poloměrem" sestrojíme kružnici k se středem A a poloměrem 5,5 j.
4) $A_0; A_0 \in \tau \cap k$	Užitím nástroje „Průsečík" označíme průsečík A_0 kružnic τ a k.
5) $\mapsto CA_0$	Užitím nástroje „Polopřímka" sestrojíme polopřímku CA_0.
6) $l;\ l(A, c = 7\text{ cm})$	Užitím nástroje „Kružnice daná středem a poloměrem" sestrojíme kružnici l se středem A a poloměrem 7 j.
7) $B; B \in \mapsto CA_0 \cap l$	Užitím nástroje „Průsečík" označíme průsečík B polopřímky CA_0 a kružnice l.
8) ΔABC	Užitím nástroje „Mnohoúhelník" sestrojíme trojúhelník ABC.

Fázová konstrukce v GeoGebře:



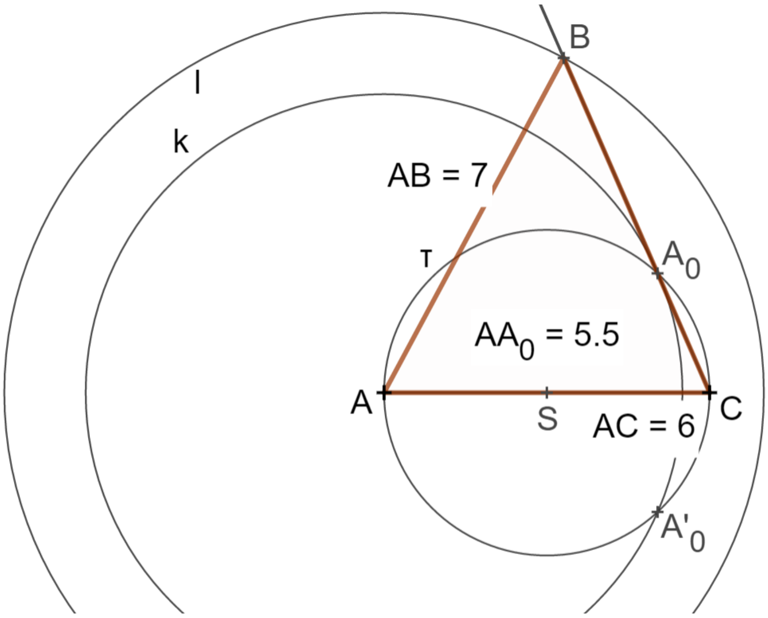
Konstrukce:



Úloha má v polorovině určené přímkou AC jedno řešení.

Poznámka: Kdyby daná úloha nebyla polohová, měla by v dané polorovině dvě řešení. Čtenář může vyzkoušet.

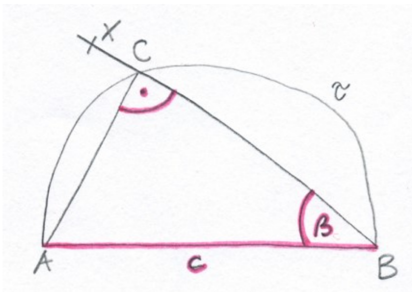
Zkouška: Užitím nástroje „Vzdálenost“ (obr. 8.91) jsme ověřili, že trojúhelník ABC odpovídá zadání.



Obrázek 8.91: Zkouška příkladu 6

Příklad 7. Narýsujte pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, jestliže znáte: $|AB| = 5{,}5\ \mathrm{cm}, |\sphericalangle ABC| = 75°$.

Náčrt:

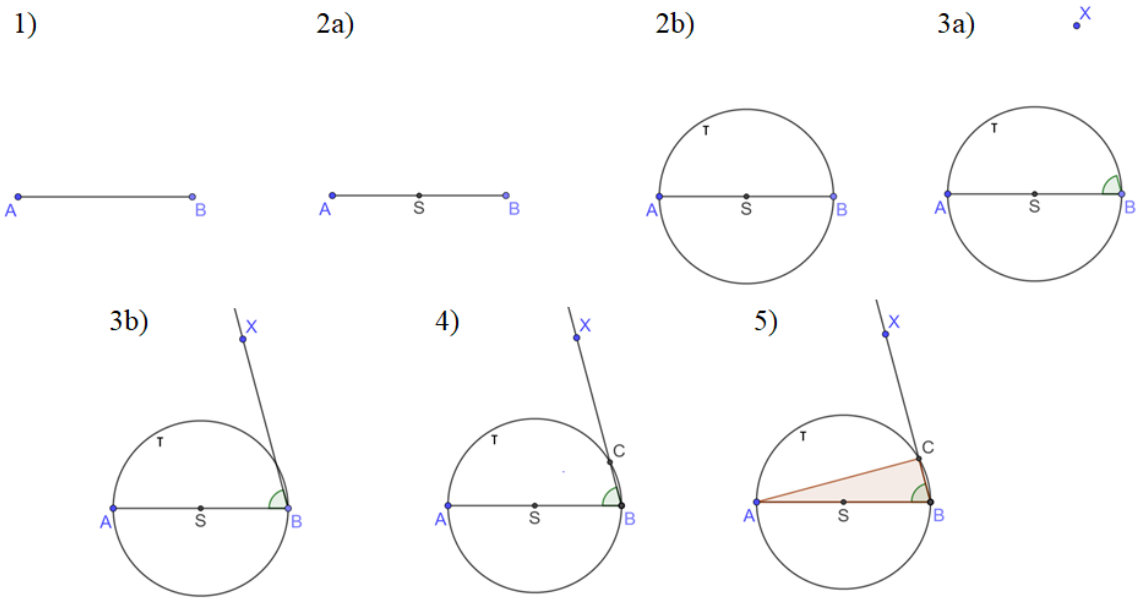


Rozbor: Jedná se o konkrétní zadání nepolohové konstrukční úlohy. Nejprve umístíme úsečku AB. Známé body: A, B. Neznámý bod: C. Podmínky pro neznámý bod: Bod C leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB a zároveň na polopřímce BX, kde $|\sphericalangle ABX| = 75°$.

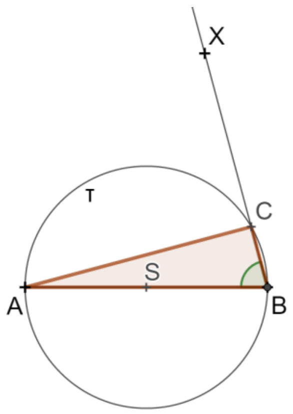
Popis konstrukce:

1)	AB; $\lvert AB\rvert = 5{,}5$ cm	Užitím nástroje „Úsečka s pevnou délkou“ sestrojíme úsečku AB s délkou 5,5 j.
2)	τ (Thaletova kružnice nad AB)	Užitím nástroje „Střed“ sestrojíme střed S úsečky AB. Užitím nástroje „Kružnice dána středem a bodem“ sestrojíme kružnici τ se středem S a poloměrem $\lvert SB\rvert$.
3)	$\mapsto BX$; $\lvert\sphericalangle ABX\rvert = 75°$	Užitím nástroje „Úhel“ sestrojíme úhel ABX o velikosti 75°. Užitím nástroje „Polopřímka“ sestrojíme polopřímku CX (rameno úhlu BCX).
4)	$C; C \in \tau \cap \mapsto BX$	Užitím nástroje „Průsečík“ označíme průsečík C kružnice τ a polopřímky BX.
5)	ΔABC	Užitím nástroje „Mnohoúhelník“ sestrojíme trojúhelník ABC.

Fázová konstrukce v GeoGebře:

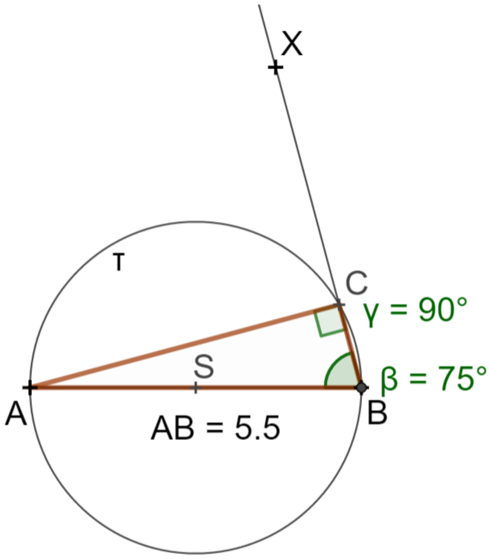


Konstrukce:



Úloha má v polorovině určené přímkou AB jedno řešení.

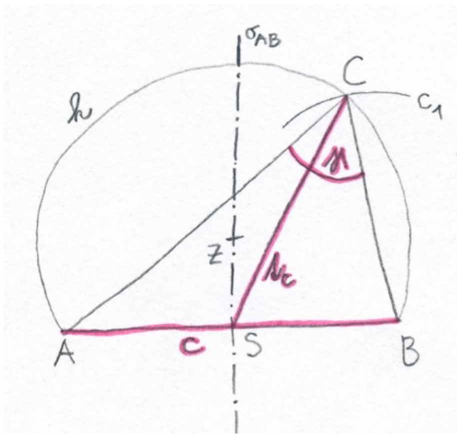
Zkouška: Užitím nástroje „Vzdálenost“ (obr. 8.92) jsme ověřili, že trojúhelník ABC odpovídá zadání.



Obrázek 8.92: Zkouška příkladu 7

Příklad 8. Je dána úsečka AB, $|AB| = 7\ \mathrm{cm}$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí: $t_c = 5\ \mathrm{cm}, \gamma = 60°$.

Náčrt:

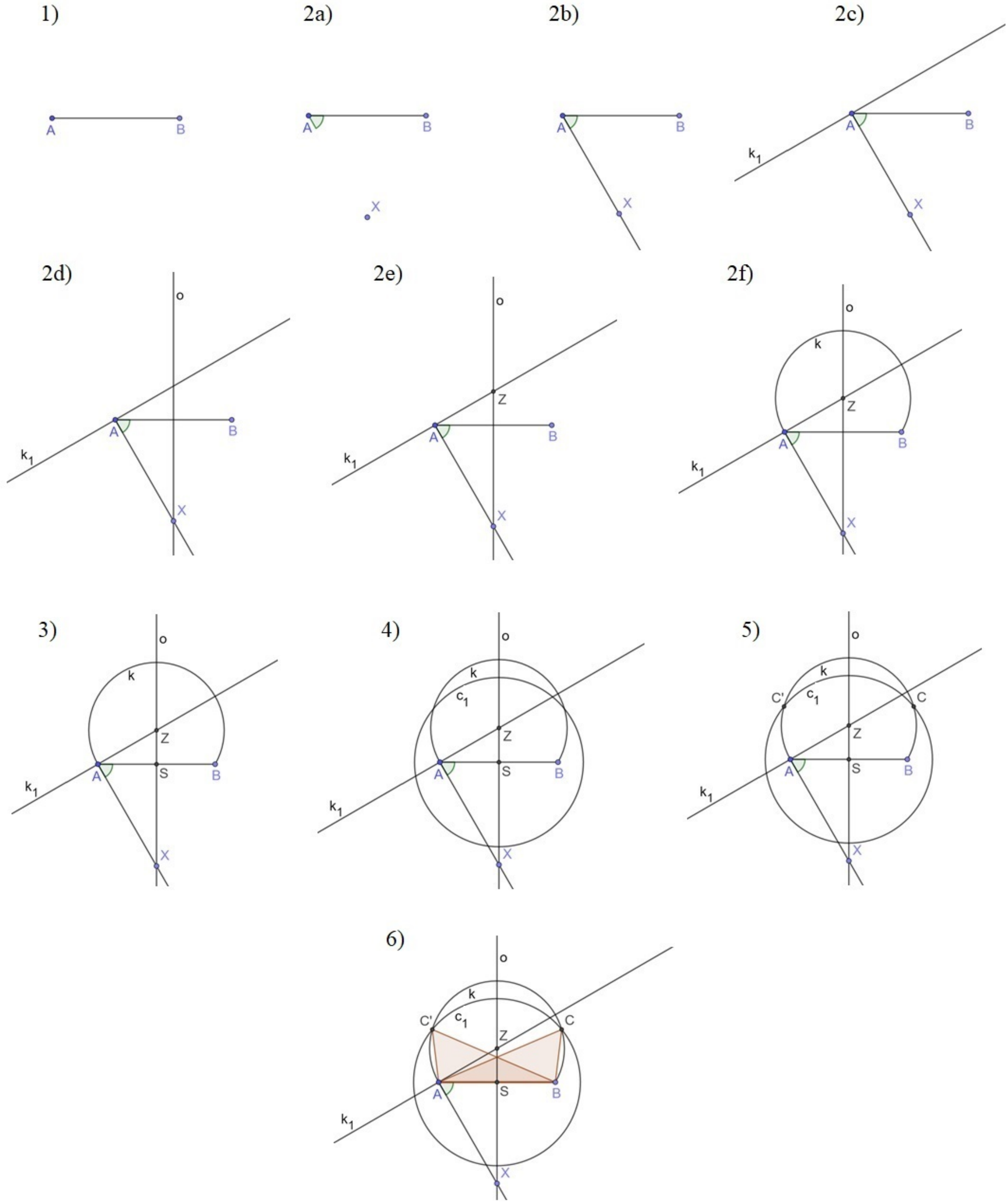


Rozbor: Jedná se o konkrétní zadání polohové konstrukční úlohy. Známé body: A, B. Neznámý bod: C. Podmínky pro neznámé body: Bod C je vrcholem obvodového úhlu příslušný oblouku s krajními body A, B (ke konstrukci využijeme úsekového úhlu). Bod C leží na kružnici c_1 se středem S a poloměrem 5 cm, kde S je střed AB.

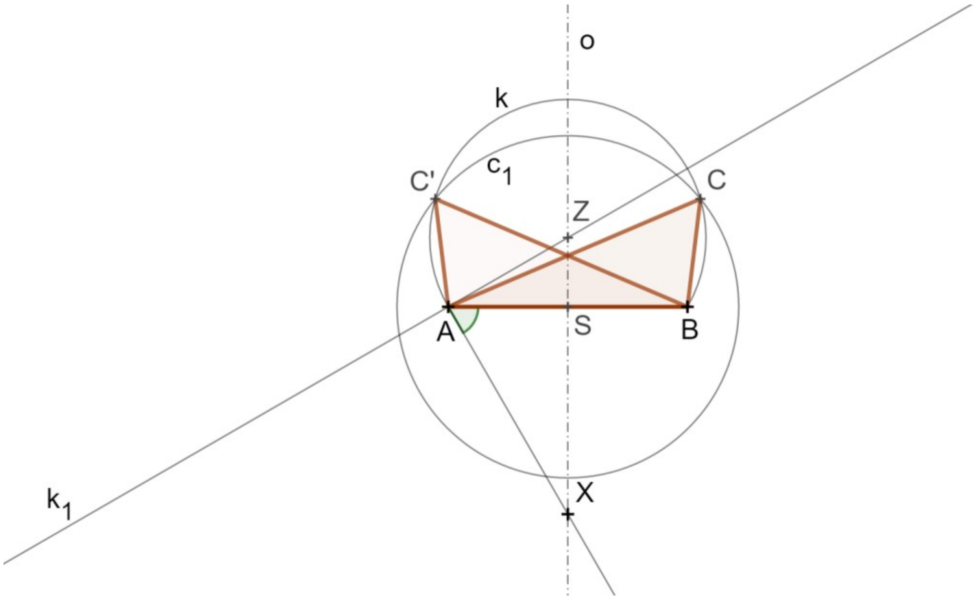
Popis konstrukce:

1) $AB;\ \lvert AB\rvert = 7$ cm	Užitím nástroje „Úsečka s pevnou délkou“ sestrojíme úsečku AB s délkou 7 j.
2) $k,; k = \{Y \in \rho; \lvert\sphericalangle AYB\rvert = \gamma = 60°\}$	Užitím nástroje „Úhel dané velikosti“ sestrojíme úhel BAX o velikosti 60°. Užitím nástroje „Polopřímka“ sestrojíme polopřímku AX. Užitím nástroje „Kolmice“ sestrojíme kolmici k_1 procházející bodem A a kolmou na polopřímku AX. Užitím nástroje „Osa úsečky“ sestrojíme osu úsečky AB. Užitím nástroje „Průsečík“ sestrojíme průsečík Z kolmice k_1 a osy úsečky AB. Užitím nástroje „Kruhový oblouk“ sestrojíme oblouk kružnice k se středem Z.
3) $S;\ S \in AB \wedge AS \cong SB$	Užitím nástroje „Střed“ sestrojíme střed S úsečky AB.
4) $c_1;\ c_1(S, t_c = 5\ \mathrm{cm})$	Užitím nástroje „Kružnice daná středem a poloměrem“ sestrojíme kružnici c_1 se středem S a poloměrem 5 j.
5) $C; C \in k \cap c_1$	Užitím nástroje „Průsečík“ sestrojíme průsečík C oblouku k a kružnice c_1.
6) ΔABC	Užitím nástroje „Mnohoúhelník“ sestrojíme trojúhelník ABC.

Fázová konstrukce v GeoGebře:

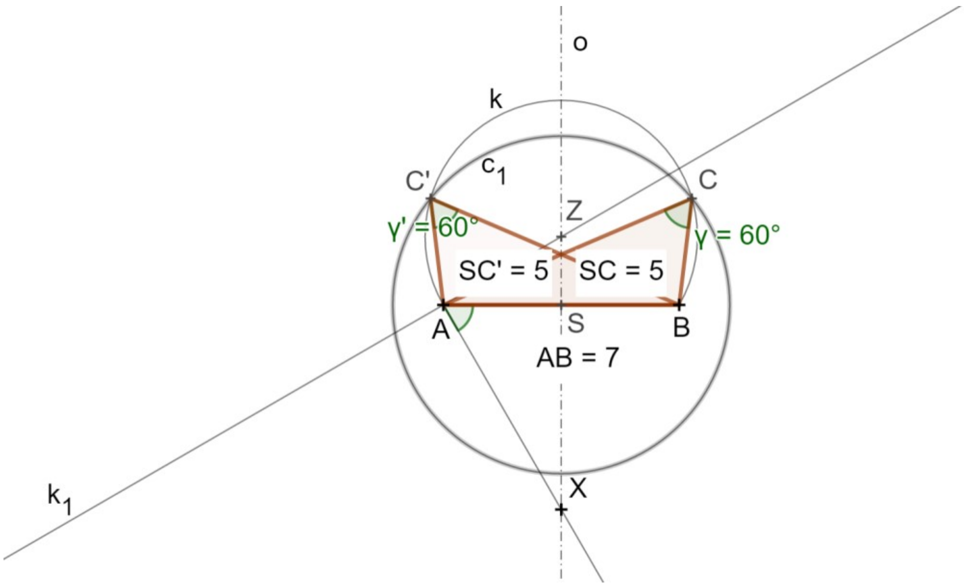


Konstrukce:



Úloha má v polorovině určené přímkou AB dvě řešení.

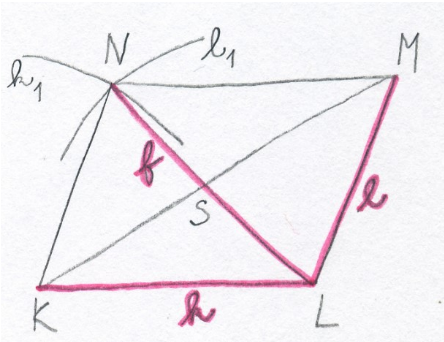
Zkouška: Užitím nástroje „Vzdálenost“ (obr. 8.93) jsme ověřili, že trojúhelník ABC odpovídá zadání.



Obrázek 8.93: Zkouška příkladu 8

Příklad 9. Sestrojte kosodélník $KLMN$, je-li dáno: $|KL| = 6{,}5\ \mathrm{cm}, |LM| = 4\ \mathrm{cm}, |LN| = 5\ \mathrm{cm}$.

Náčrt:



Rozbor: Jedná se o konkrétní zadání nepolohové konstrukční úlohy. Ke konstrukci kosodélníku využijeme jeho vlastnosti: protější strany kosodélníku jsou rovnoběžné a shodné a úhlopříčky kosodélníku se navzájem půlí. Nejprve umístíme úsečku KL, potom budou známé body: K, L. Neznámé body: N, M. Při hledání neznámých bodů můžeme uvažovat různými způsoby:

I. Bod N je průsečíkem kružnice k_1 se středem K a poloměrem 4 cm a kružnice l_1 se středem L a poloměrem 5 cm. Bod M leží na rovnoběžce p s přímkou KL vedené bodem N a na kružnici m_1 se středem N a poloměrem 6,5 cm.

II. Bod N je průsečíkem kružnice k_1 se středem K a poloměrem 4 cm a kružnice l_1 se středem L a poloměrem 5 cm. Bod M je průsečíkem kružnice m_1 se středem N a poloměrem 6,5 cm a kružnice n_1 se středem L a poloměrem 4 cm.

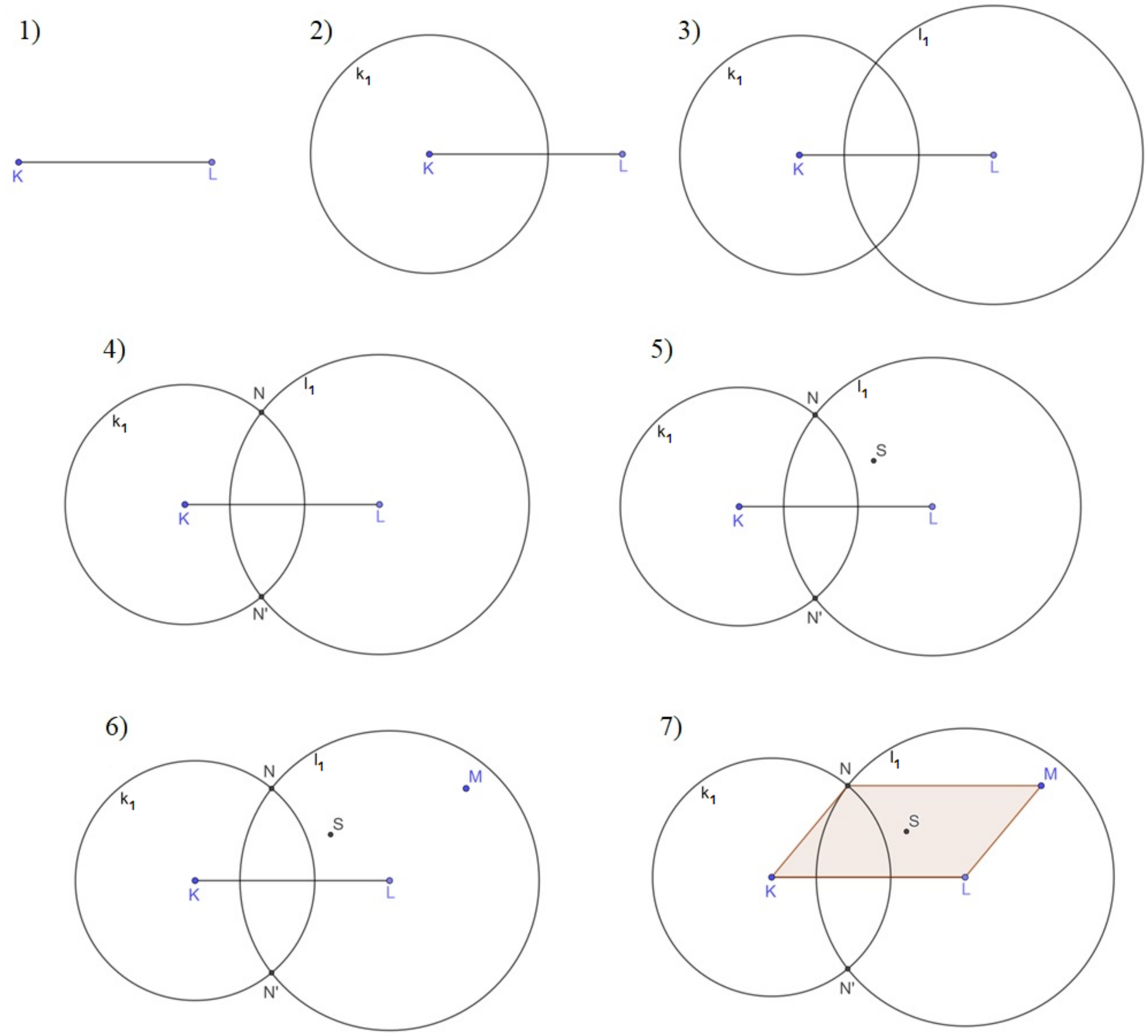
III. Bod N je průsečíkem kružnice k_1 se středem K a poloměrem 4 cm a kružnice l_1 se středem L a poloměrem 5 cm. Bod M je obrazem bodu K ve středové souměrnosti se středem S. Bod S je střed úsečky LN.

Z uvedených možností si vybereme třetí, abychom ukázali další nástroj GeoGebry.

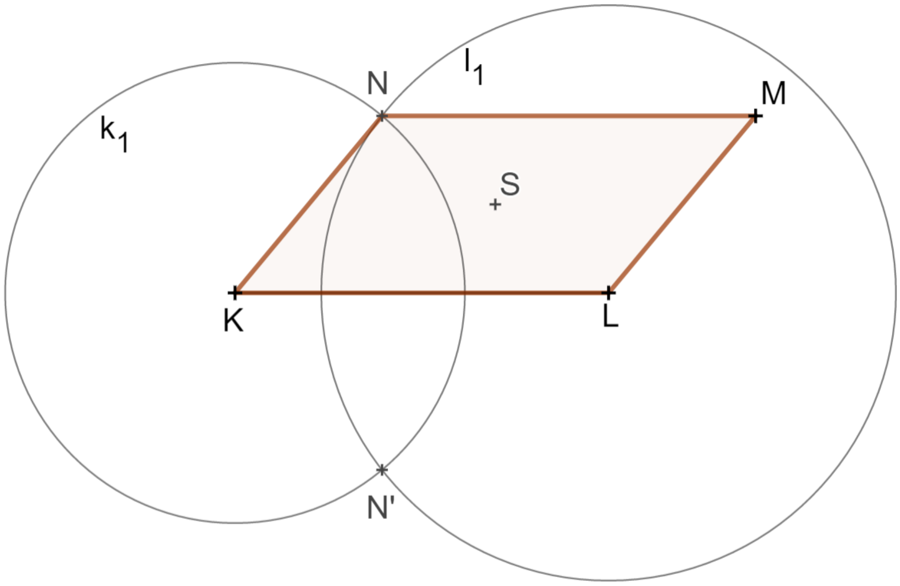
Popis konstrukce:

1) $KL;\ \lvert KL\rvert = 6{,}5\ \mathrm{cm}$	Užitím nástroje „Úsečka s pevnou délkou“ sestrojíme úsečku AB s délkou 6,5 j.
2) $k_1;\ k_1(K, 5\ \mathrm{cm})$	Užitím nástroje „Kružnice daná středem a poloměrem“ sestrojíme kružnici k_1 se středem K a poloměrem 5 j.
3) $l_1;\ l_1(L, 4\ \mathrm{cm})$	Užitím nástroje „Kružnice daná středem a poloměrem“ sestrojíme kružnici l_1 se středem L a poloměrem 4 j.
4) $N; N \in k \cap l$	Užitím nástroje „Průsečík“ označíme průsečík N kružnice k a l.
5) $S;\ S \in LN \wedge LS \cong SN$	Užitím nástroje „Střed“ označíme střed S úsečky LN.
6) M, $S(S): K \rightarrow$M	Užitím nástroje „Středová souměrnost“ sestrojíme bod M jako obraz bodu K ve středové souměrnosti se středem S.
7) kosodélník $KLMN$	Užitím nástroje „Mnohoúhelník“ sestrojíme kosodélník $KLMN$.

Fázová konstrukce v GeoGebře:

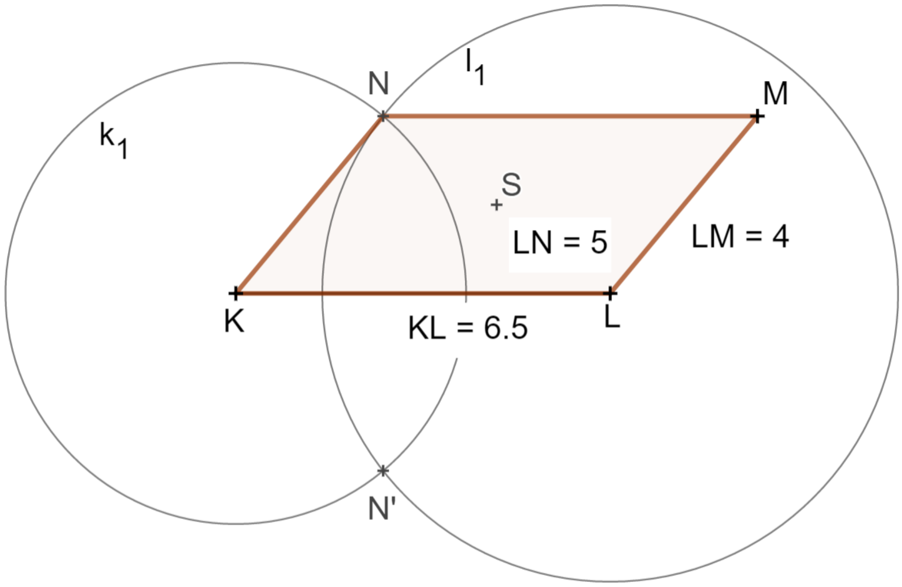


Konstrukce:



Úloha má v polorovině určené přímkou KL jedno řešení.

Zkouška: Užitím nástroje „Vzdálenost“ (obr. 8.94) ověříme, že kosodélník $KLMN$ odpovídá zadání.



Obrázek 8.94: Zkouška příkladu 9

Cvičení (řešte s pomocí programu GeoGebra):

1. Vyzkoušejte si neřešené konstrukční úlohy z kapitoly 6 sestrojit v GeoGebře.
2. Ověřte, že těžnice trojúhelníku se protínají v jednom bodě.
3. Nalezněte dělicí poměr těžnic.
4. Jakým způsobem dělí těžnice trojúhelník na jednotlivé části?
5. Pokuste se najít co nejvíce vlastností trojúhelníku a jeho těžnic.
6. Zkonstruujte kružnici vepsanou trojúhelníku ABC.
7. Každý trojúhelník lze rozdělit jedním řezem na dva trojúhelníky. Rozhodněte, zda totéž platí i pro čtyřúhelníky, tedy zda lze každý čtyřúhelník jedním řezem rozdělit na dva čtyřúhelníky.
8. Je zadána úsečka AB. Určete množinu bodů, které tvoří středy kružnice vepsané všech pravoúhlých trojúhelníků s pravým úhlem u vrcholu C.
9. Narýsujte libovolný konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a sestrojte středy všech jeho stran S_1, S_2, S_3, S_4. V jakém poměru jsou obsahy čtyřúhelníku $ABCD$ a čtyřúhelníku $S_1S_2S_3S_4$?
10. Je zadána úsečka AB. Určete množinu bodů, které tvoří těžiště všech pravoúhlých trojúhelníků tvořených pouze stranami s pravým úhlem u vrcholu C.

9 Literatura

Běloun, F. (2010). *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* Praha: Prometheus.

Francová, M., Matoušková, K., & Vaňurová, M. (2013). *Sbírka úloh z elementární geometrie.* Brno: MU PdF.

Francová, M., & Lvovská, L. (2014). *Texty k základům elementární geometrie. Pro studium učitelství 1. stupně základní školy.* Brno: MU PdF.

Gergelitsová, Š. (2012). *Počítač ve výuce nejen geometrie – průvodce Geogebrou*. Praha: Generation Europe.

Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E. & Šimša, J. (1998). *Matematika Tercie: Geometrické konstrukce.* Praha: Prometheus.

Hozová, L. a kol. (2005). *Konstrukční úlohy.* Praha: Sdružení podnikatelů HAV.

Krupka, P. (1995). *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií. Geometrie.* Praha: Global.

Jančařík, A. (Ed.). (2014a). *Dynamická matematika (využití programu GeoGebra ve výuce matematiky na středních školách).* Dostupné z
https://docs.google.com/file/d/0B0vRYwckMceZaFhnWEJnUG9QazQ/edit?pli=1

Jančařík, A. (Ed.). (2014b). *Matematický software.* Dostupné z
https://docs.google.com/file/d/0B1Up5zguaHrlbldpRnVPcmRqbXc/edit?pli=1

Krupka, P. (1995). *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základních škol a nižší ročníky víceletých gymnázií, 2. díl.* Praha: Prometheus.

Kuřina, F. a kol. (2009). *Matematika a porozumění světu.* Praha: Academia.

Pomykalová, E. (1993). *Matematika pro gymnázia – Planimetrie.* Praha: Prometheus.

Švrček, J. & Vanžura, J. (1988). *Geometrie trojúhelníka.* Praha: SNTL.

Konstrukční úlohy

Učební text pro studenty učitelství matematiky 2. stupně základní školy

Mgr. Irena Budínová, Ph.D., Mgr. Lenka Pavlíčková, Ph.D.

Vydala Masarykova univerzita, Žerotínovo nám. 617/9, 601 77 Brno
Jazykové korektury: Mgr. Ondřej Zabloudil Pechník
Návrh obálky: Alena Poláčková
1., elektronické vydání, 2020

ISBN 978-80-210-9819-0

MUNI PRESS

MUNI PED