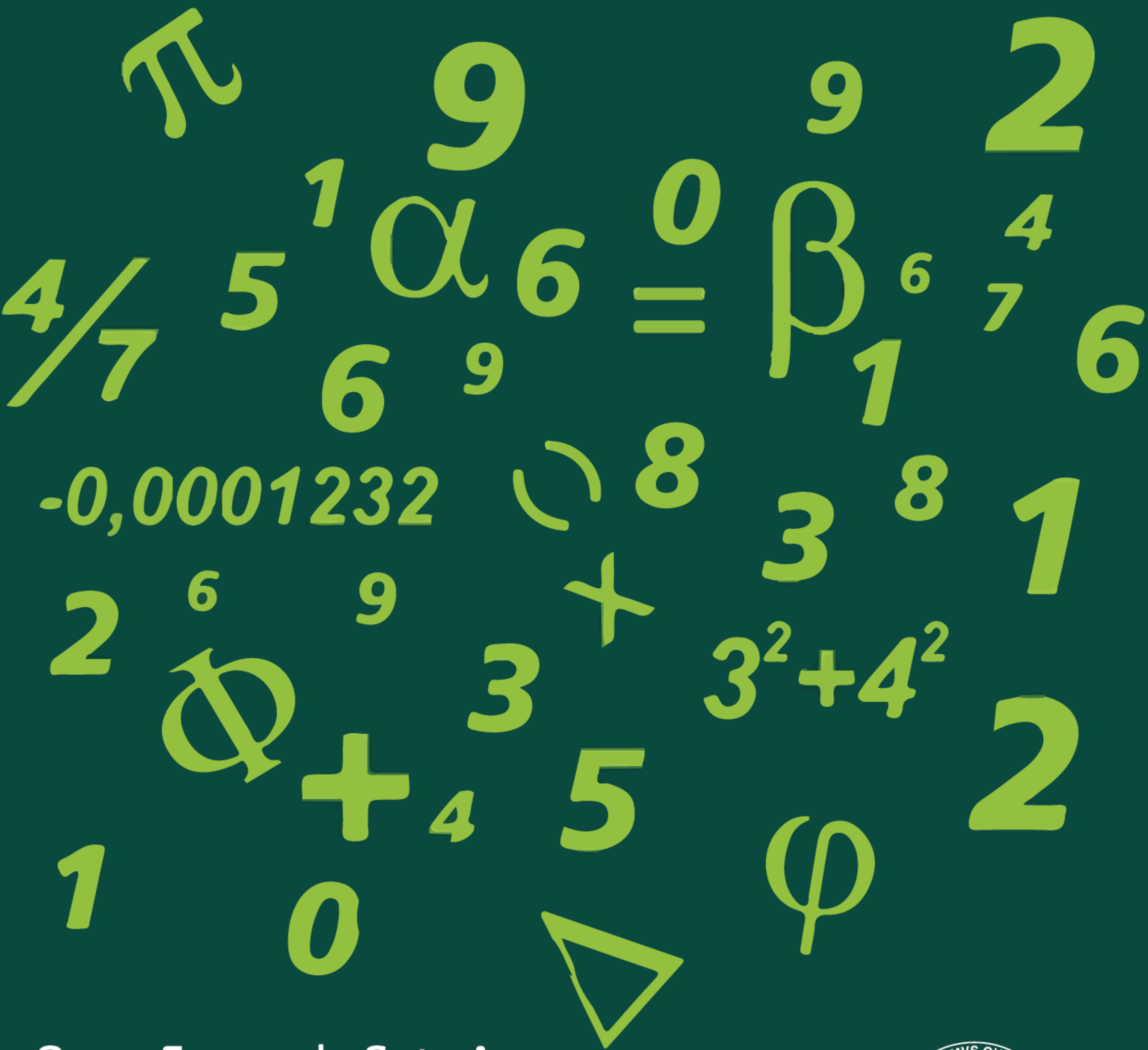
Lecciones de Aritmética

-Un recurso para Docentes-



Oscar Fernando Soto A.
Segundo Javier Caicedo Z.
Hernán Alberto Escobar J.

Editorial
Universidad de Nariño

Editorial
Universidad de **Nariño**

LECCIONES DE ARITMÉTICA

UN RECURSOS PARA DOCENTES

LECCIONES DE ARITMÉTICA

UN RECURSOS PARA DOCENTES

Oscar Fernando Soto Ágreda

Segundo Javier Caicedo Zambrano

Hernán Alberto Escobar Jiménez

Editorial
Universidad de Nariño

Soto A, Oscar Fernando

Lecciones de Aritmética: un recurso para docentes / Oscar Fernando Soto A, Segundo Javier Caicedo Z, Hernán Alberto Escobar J. -San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño, 2021.

208p.: figuras

Incluye Bibliografía

ISBN 978-958-5123-71-7 (digital)

1.Principios Generales de Matemáticas 2. Aritmética – problemas—ejercicios 3. Aritmética—enseñanza – básica.

511 S718 – SCDD ed. 22 Biblioteca Alberto Quijano Guerrero

Lecciones de Aritmética: un recurso para docentes.

Talleres y Evaluaciones

Oscar Fernando Soto A.
Segundo Javier Caicedo Z.
Hernán Alberto Escobar J.

ISBN: 978-958-5123-71-7

Editorial Universidad de Nariño

Diseño y diagramación: Diana Sofía Salas Chalapud

San Juan de Pasto – Nariño – Colombia.

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN

A finales del siglo XIX ya eran conocidos los conjuntos del sistema numérico: naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, complejos e hipercomplejos. Su introducción al mundo académico y científico y su manejo, creaba resistencias por los resultados sorpresivos que conllevaban el misterio de los naturales en el cual subyacen resultados asombrosos: el producto de dos reales negativos es uno positivo, la suma y el producto de irracionales puede ser un racional, una sucesión de racionales puede converger a un irracional, la suma y el producto de complejos puede ser un real, las potencias de complejos pueden ser reales, en los complejos no existe orden, en los hipercomplejos desaparece la conmutatividad y, si fuese más adelante, en los octiones, se pierde la propiedad asociativa. Por ejemplo, los números negativos no fueron comprendidos hasta esta época contemporánea; el gran Leonhard Euler (1707, 1783), en la última mitad del siglo $XVIII$ creía que los números negativos eran mayores que el infinito. Carnot, Geómetra Francés, pensó que los números negativos conducían a conclusiones erróneas.

Los números complejos fueron veneno para algunos matemáticos del siglo $XVIII$. Desde Cardano (1501, 1576) hasta cerca del año 1700 se ignoró a estos números. Esta y otras dificultades no son gratuitas; la humanidad tardó miles y miles de años en pasar de la simple percepción de la cantidad al concepto de número. Número es una idea que parece evidente pero forjado a través de un arduo trabajo de abstracción del pensamiento. Un número se hace teniendo en cuenta la existencia singular de la cantidad como cualidad de las cosas y rechazando todas las otras diferencias particulares, esto determina el carácter abstracto de la Matemática.

Unido al desarrollo del concepto de número, está la dificultad de representarlos; aparecen sistemas de representación como el romano y el mal llamado arábigo (en realidad, hindú), caracterizado por estar concentrado en lo posicional. Este modo de representación posicional es potente, como los mismos números; es capaz de acompañar a cualquier número que surja por muy lejos que vaya, por tan grande que sea.

La frase "el 1 del 1000 vale mucho más que cualquiera de los 9 del 999" se expresa en un adagio popular: "Un asno en el peldaño más alto vale más que un león en el más bajo" (Guedj, 1998). Y comenta el poder de un sistema de numeración posicional. Para el hombre contemporáneo, esto es una evidencia;

escribe con facilidad lo referente a un cálculo, una suma, una diferencia, un producto, un cociente, una raíz cuadrada, un cambio de base; efectúa directamente sobre los números lo referente a una operatoria en particular; pero esto se revela como una práctica tardía y excepcional en la historia de la humanidad; es un hito dentro de la matemática, un paso trascendental, el último escalón hacia la dignificación creativa. Antes de esto, las tareas de llevar cuentas eran arduas, engorrosas y sólo unos pocos hombres adiestrados podían efectuarlas. De este modo, se permitía guardar el secreto de las contabilidades de los pueblos y las tareas de auditoría sobre las mismas eran casi prohibitivas.

El cálculo escrito pudo llevarse gracias a la numeración hindú; sistema posicional provisto de un cero, que apareció hacia el siglo V de nuestra era. ¡Grandioso! ¡Bastan diez figuras para representar todos los números! Aparte de la numeración india, existen vestigios de otros sistemas posicionales que aparecen de modo independiente: en Babilonia, a comienzos del segundo milenio de nuestra era; en China, durante el siglo V, y en el imperio Maya, entre los siglos V y IX. Los mayas, parece que utilizaban la base 20, pero en lugar de dotarse de 20 símbolos sólo presentaban tres: el uno, el cinco y el cero. La numeración sumeria, de base 60, también, en lugar de dotarse de 60 símbolos, presenta sólo dos: el uno y el diez. Estas formas de representación, complicaban su utilización y hacían del sistema un método infértil y débil, poco amigable al ámbito operativo.

La sucesión $0, 1, 2, 3, 4, \cdots,$ manifiesta una gran realidad (el cero tiene su propia historia) y por ello se denominan números naturales. Es una inagotable sucesión de números enteros familiar a todos los pueblos civilizados y a quienes han asistido a ese parto del conocimiento que se produce en las escuelas. Sin embargo, esa serie sencilla y familiar, oculta sorprendentes e inesperadas regularidades, pero a la vez, pasmosas e inexplicables distribuciones. Estudiar a profundidad al conjunto de los números naturales, constituye una rama aparte que, a decir de Carl Friedrich Gauss, el príncipe de los Matemáticos, es la reina de las matemáticas, en un área perfectamente definida, denominada teoría de números en cuyo eje fundamental aparece el estudio de los números primos.

A Euclides, uno de los más grandes matemáticos del siglo III a. C. se le atribuyen muchos resultados de aritmética; el primero de ellos, es la técnica de división euclideana o la división con resto, en la que, por ejemplo, 23 dividido entre 5 es igual a 4 y deja residuo 3. Este hecho se escribe como 23=5 $\times\, 4 \;+\; 3$.

El estudio de los divisores es el primer recurso de clasificación de los números naturales; los números divisibles por 2 se dicen pares y los que al dividirse por 2 dejan residuo 1 se llaman impares. Los pares se escriben como $2n$ y los impares como $2n + 1$. Y respecto de las operaciones, se afirma que la adición no respeta la paridad, mientras que la multiplicación sí lo hace.

Una segunda clasificación en el establecimiento de una tipología para los números, la constituyen aquellos que no son divisibles en absoluto, excepto por el 1 y por ellos mismos. A este tipo de números se les llama primos. La secuencia de números de esta clase inicia como 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23⋯.

El gran Euclides, demostró que la secuencia de números primos es infinita y una de las tareas clásicas en el aprendizaje de la aritmética lo constituye la descomposición de un número en sus factores primos. En realidad, todo número es susceptible de descomponerse de manera única como el producto de factores primos; resultado denominado Teorema Fundamental de la Aritmética.

No ha nacido el primer gigante capaz de dominar los números. En su estructura aparecen tantas conjeturas como se resuelven. Los números naturales siguen siendo para los matemáticos una de las mayores incógnitas. Las herramientas del álgebra, el análisis, la topología, la geometría algebraica, etcétera, se emplean para conocer mejor su sistema, pero basta con contemplar su turbadora arquitectura, para encontrar en ellos tantas maravillas como se desee.

Estas consideraciones sirven de motivación hacia el estudio de los sistemas numéricos y particularmente al estudio del conjunto de los números reales, su arquitectura, sus procesos operativos, la funcionalidad y diversidad de representación de los mismos, su orden. Todos los tipos de números surgen del cero y el uno, con ellos es suficiente para construir los enteros, los racionales, los irracionales, los trascendentes, los complejos. Desde allí, se configura la densidad de los racionales, la continuidad de los reales, la numerabilidad de los racionales algebraicos, la no numerabilidad de los trascendentes. Con tan poco, se hace tanto; en ningún otro caso, se puede ver tan alto la elevación del espíritu humano.

Como todos los textos de matemáticas, es un texto sin fin, que cada usuario debe encargarse de completar con las indagaciones que realice dentro de los materiales a su alcance e ir aumentando el acervo de problemas y preguntas que puedan surgir. En ese ambiente, aparece la libertad de organizar su propio abanico de preguntas, ejercicios, problemas y avanzar en el mundo de las conjeturas. Aunque se aleja de un esquema enteramente formal, no deja de liberarse de presentar algunas demostraciones, entre las que resalta la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos y la abundancia de primos frente, por ejemplo, a la de cuadrados perfectos.

El texto de Lecciones de Aritmética es de carácter divulgativo; en tal sentido, el lector encontrará que el lenguaje utilizado no es plenamente técnico, como sí ocurre en el texto científico; de manera que, puede ser comprendido por lectores sin formación matemática. No obstante, descarta la ambigüedad, a la vez que, no renuncia al rigor y a la precisión de los conceptos. El uso de una sintaxis sencilla, eso sí, sin pérdida de rigor, hace que las ideas y los conceptos sean claros y comprensibles.

La ordenación apropiada del contenido, la presentación de nociones generales, seguida del desarrollo de aspectos relacionados de tales nociones, posibilita el acceso a la Aritmética a un variado universo de lectores y, de paso, contribuye a disminuir la brecha educacional entre diversos sectores de la población por constituir una nueva fuente de conocimiento y un recurso para el fortalecimiento del aprendizaje.

Al escribir el texto de Lecciones de Aritmética, los autores exponen y difunden los elementos e ideas básicas de la Aritmética, por considerar que son de interés para los estudiosos de las matemáticas; e incluso, para aquellos que no lo son. En este punto, es apropiado decir que, en particular, los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, los egresados del programa y, en general, docentes de todos los niveles educativos, tienen la posibilidad de apropiarse del contenido del texto, de aproximarse a la comprensión cabal de los elementos básicos de la Aritmética y disponer de algunos referentes sobre su desarrollo histórico.

El libro está estructurado en seis capítulos. El primero, Una aproximación a los números naturales, aborda temáticas relacionadas con los sistemas de numeración, divisibilidad y resolución de problemas, concentrado en algunos principios matemáticos. El segundo, números naturales, enteros y racionales, trata temáticas de números primos y criterios de divisibilidad, divisibilidad de números naturales, máximo común divisor y mínimo común múltiplo, aritmética con los números naturales y números racionales. El tercero, Números reales, contiene el estudio del concepto de igualdad y la recta numérica. El capítulo cuarto, potenciación y números decimales, aborda contenidos relacionados con el estudio de la potenciación, números decimales y sumatorias. El quinto, Radicales y logaritmos, trata las temáticas de radicales con sus propiedades, los logaritmos y sus propiedades y aplicaciones. El capítulo 6, Razones y proporciones, contiene temas relacionados con razones, proporciones, aplicaciones, magnitudes proporcionales, regla de tres compuesta y porcentajes.

Los autores

Enero de 2021

CAPÍTULO 1.

ACERCAMIENTO A LOS NÚMEROS NATURALES

CAPÍTULO 1. ACERCAMIENTO A LOS NÚMEROS NATURALES

1.1 LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Las marcas numéricas, que datan del paleolítico, en huesos, piedras y otras superficies, cuentan la necesidad del hombre en conservar la cantidad. Las muescas en huesos tienen 30.000 años de antigüedad. Para preservar la memorización de la cantidad, vertida a número, ha utilizado su cuerpo, incluso proponiendo para ellos efectos operatorios. La idea de número, en consecuencia, contiene un extenso trabajo de abstracción. Resultan ser el producto de mirar lo que se parece distinguiendo lo diferente. Así, se enumeran los objetos que poseen una cualidad común separándolas en el sentido que son diferentes, así, se dice que en un grupo de gallinas hay quince de ellas, porque todas poseen la característica intrínseca de ser gallinas y se las enumera porque cada una de ellas es una entidad diferente, entre dos de ellas, al menos una cualidad física las hace diferentes.

1.1.1 La sucesión natural

El hombre ha elaborado un sistema de representación de los números, potente, con capacidad de acompañarlos por lejos que vayan y por grandes que sean; es un sistema donde todo número tiene nombre, y en consecuencia, tiene representación; con solo agregarle un uno ya se concibe otro; con la capacidad de nombrar lo inédito. Tal sistema es el sistema de numeración hindú.

Un número aparece vinculado a la cantidad que representa y decir que un conjunto de números pertenece o está en una sucesión natural no es una idea simple. El concepto de sucesión procede a la de número que permite establecer el concepto de orden. Solo esto permite decidir que el 3 está antes del 9. Y es que la cantidad se ligaba a cosas físicas, el <<dos>> estaba vinculado al par de alas de las aves, el <<cuatro>> a las patas de un bisonte, el <<uno>> al a la boca de un hombre, el <<cinco>> a los dedos de una mano humana, en consecuencia, no existía forma de establecer una relación entre ellos. (Guedj, 1998).

Para satisfacer las necesidades de las múltiples actividades que emergían desde el carácter social y de agremiación o agrupación, fue apropiado la construcción de numeraciones, es decir, de sistemas de representación de los números. El mundo de los números consolida un universo exclusivo en el que interviene la mente y las enumeraciones son un tríptico en los que aflora lo visual, lo oral y lo semiótico. Es suficiente con ver un símbolo como “7” y de inmediato aparece la voz “siete” como un nombre que se puede consignar en un sistema escritural.

El hecho de que la escritura sea pieza fundamental de las numeraciones da vía al paso operatorio. De nada sirve una numeración sin el ingreso consecuente del cálculo. Calcular, es una tarea que solo es posible con la representación escrita. Las numeraciones someras, cuyas formas de representación eran escuetas y pobres, cayeron en desuso al igual que las numeraciones digitales que impedían el paso a lo operatorio. (Guedj, 1998).

La primera numeración escrita se origina en Sumeria, por los años 3300 antes de nuestra era, en la vieja Mesopotamia, gran planicie bañada por los ríos Tigris y Eufrates. La administración del imperio Sumer requirió el establecimiento de un sistema contable que con el aumento de su población y de sus actividades se tornó complejo. En las tablillas de arcilla, regalos arqueológicos que persisten, junto al origen de la escritura se revela la numeración escrita. Los signos que representaban a los números sufrieron pocas transformaciones pues se convirtieron en elementos que representaban cosas específicas, es el mundo de las cifras.

Una cifra, también es un número que recibe la tarea de ayudar en la representación de cualquier otro número. En el caso de la numeración arábiga o hindú, las cifras son los correspondientes a los diez símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Haciendo analogía, las cifras desempeñan igual trabajo que el alfabeto para el lenguaje escrito: el alfabeto es a las palabras como las cifras a los números. Y claro, se guardan hechos proporcionales, mientras una combinación de letras del alfabeto puede o no ser una palabra, toda combinación de cifras es un número. Así, mjhaach no significa nada en el idioma español, mientras 345011 tiene un significado lleno de exactitud así no se corresponda con una cantidad que represente la longitud, el peso, el área, el volumen u otra magnitud de algo físico en un momento dado.

Este particular arranque y resumido de un proceso histórico en el que la humanidad ha invertido miles de años, permite generar conciencia sobre el hecho de que los números permiten entender el mundo, interpretar su fenomenología y también ayudar a comprender y explicar el comportamiento humano. Y que el momento actual, se reviste de instrumentos que permiten representar con facilidad lo complejo e incursionar en conceptos, teorías y problemas que sin las formas de representación y sin la tecnología moderna, serían inconcebibles e inabordables.

1.1.2 Sistemas de numeración posicionales

Cifra, es cada uno de los números a los que se encarga la tarea de representar los números. (Guedj, 1998). El sistema decimal posee diez cifras. Es una forma de hacer mucho con poco. En realidad, el sistema de numeración que se usa es un procedimiento que da cuenta de la construcción de todos los números a partir de las cifras $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\ y\ 9$; con ellas, es posible representar de forma sencilla, rápida y económica, todos los números posibles. Son suficientes el 0 y el 1 para obtener a cada uno y a todos los números naturales, incluso a los enteros y dar paso a los racionales y reales.

Todo sistema de numeración requiere de una base, en la hindú, es la base 10. Las bases impiden que los números sean tan solo enumeraciones como $n = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ y, en consecuencia, se tenga que contar por paquetes. Esto es válido para los sistemas de numeración posicionales, no así en otros, como el sistema romano.

La numeración romana contiene en esencia siete símbolos: I, V, X, L, C, D y M. Este sistema es débil, impide la representación de grandes números. Por ejemplo, ¿cómo representar un gúgol que es un uno seguido de cien ceros?

(Un $Gugol = 10^{100}$). También es ineficaz para la parte operatoria, ¿cómo multiplicar $CCXLIX$ por $LVII$? (El producto es $\overline{XIV}CXCIII$). Para el efecto se requieren procesos costosos, en el sentido que demandan mucho trabajo.

John Allen Paulus, cuenta en su texto "Más allá de los números" (Paulus, 1993) la anécdota de un mercader del siglo XV que pide de consejo a un profesor sobre el sitio en el que su hijo pudiese recibir una buena formación mercantil. El profesor le sugirió que si solo se tratara de aprender a sumar y restar debía enviarlo a Alemania, pero para aprender a multiplicar y dividir, requería enviarlo a Italia. La respuesta es una gran broma; intente calcular la suma, la diferencia, el producto o el cociente sin el paso a la conversión decimal de cualquier par números como $MDCCIX$, $MMLXXXIV$, $MXCIII$ y $MLCCVI$. Va con un peso sustancial la dificultad inmersa en esta tarea.

La historia de los sistemas de numeración se empareja con la de la escritura tal como transcurre el aspecto semiótico de los numerales que son los símbolos con que se representa los números. En el sistema de numeración indo-arábiga se concentra el arduo trabajo de escribas, monjes, contables y astrónomos que sentaron sus bases al descubrir los principios básicos de la representación de los números.

La numeración india aparece en el siglo V de nuestra era, en ella se hacen suficientes diez figurillas para representar cualquier número. En esta numeración "Un asno en el peldaño más alto vale más que un león en el más bajo"; o dicho de otro modo, el 1 del 1000, vale mucho más que cualquiera de los tres 9 del 999. Este sistema, indo-arábigo alcanza su esplendor en el Renacimiento. Hace más de veinte siglos, los chinos inventaron el sistema de numeración posicional con base en la potencia 10 y posteriormente en el sur de la India, se llegó al mismo descubrimiento que avanzó con la invención del cero. El cero, imprimió al sistema su carácter operatorio y facilitó la representación de cualquier número. El mundo no se concibe sin esta forma simple de representar, calcular y manipular cantidades y por ello se cataloga como una de las mejores invenciones de la mente humana.

En varios sistemas de numeración, el valor de una cifra es independiente de la posición que ocupa en un número. Por ejemplo, en el romano, el I vale igual en los números $VIII$, XI, IX o CI, o en cualquier otro. La numeración de posición vence este paradigma; el valor de una cifra no es constante, depende de la posición en que aparece en la escritura de un número; en este sentido, fue necesaria la aparición del cero como cifra, pues en algunas posiciones, para infinitos números, se hace necesario representar la ausencia de la unidad, es decir, la ausencia de cantidad. De este modo, en el número 101, las decenas no cuentan y por ello el 1 a la izquierda del número vale cien veces más que el 1 a derecha. En realidad, con la aparición del cero, el hombre pasó de hacer mucho con poco, a hacerlo todo.

Una característica del sistema de numeración posicional hindú es que la longitud de la escritura del número (nombre), se vincula con el tamaño del número. De modo que, todos los números con escritura decimal de longitud 4, por ejemplo 5603, son mayores que cualquiera de longitud tres, dos o uno. Por ejemplo 765 es mayor que 23 y este es mayor que 7. Este criterio de mayoridad, no es válido en otros sistemas. Por ejemplo, en el romano el número $XLVII$ tiene mayor longitud que MI pero no es mayor que este: pues, es sabido que:

$MI = 1001$ el cual es mayor que $XLVII = 47$.

1.1.3 Definición generalizada de producto y potencia en el sistema de los números naturales

La manipulación de los números que se permite dentro del sistema de numeración posicional indo-arábigo y el carácter operatorio que emerge en el mismo hace que los números se relacionen unos con otros de múltiples formas. De otro lado, la explicación que hace el hombre de los fenómenos y en los argumentos que explican y describen los hechos, aparecen formas vinculantes entre dos o más cantidades. Es usual verter las relaciones entre números con fórmulas o ecuaciones que se denominan funciones y con ello se logra explicar e intervenir en las cosas del mundo y del hombre. El costo de producción de un elemento, la ganancia en la venta de objetos, el crecimiento en talla promedio entre los miembros de una comunidad, la tasa de crecimiento de una comunidad, la temperatura media de una población, el índice de mortalidad en una región, el promedio goleador de un futbolista, el tiempo en que se salda una deuda, las fórmulas de conversión de medidas de un sistema a otro, las fórmulas de área de figuras acotadas, son algunos entre lo múltiples ejemplos de funciones.

En particular, las operaciones ordinarias corrientes entre los elementos de los conjuntos numéricos, relacionan dos números de ese conjunto con otro que suele pertenecer al mismo conjunto. Cuando esto ocurre, la operación es una función con un estatus diferente y se denomina, ley de composición interna. Al tomar el conjunto de los números naturales, se encuentra que la adición y la multiplicación son ejemplos típicos de leyes de composición interna, de funciones binarias, pues relacionan a dos elementos del conjunto con un único número del mismo conjunto. Estas operaciones se definen como sigue.

$+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $+(a, b) = a + b$. $a + b$ se llama la suma de a y b.

$\times: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\times\,(a, b) = a \times b$. $a \times b$ se llama el producto de a y b.

Una forma simple de referirse a estas dos operaciones en el conjunto de los naturales es la de advertir que la suma y el producto de naturales, es un número natural. El paso a seguir, es buscar las propiedades que satisfacen estas operaciones o las relaciones y formas que las vinculan entre sí cuando los números obedecen a leyes de formación perfectamente definidos, estudio que se hará más adelante.

Como ejemplo se tiene que:

$+(13{,}25) = 38$; $+(103{,}205) = 308$; $+(1003{,}2005) = 3008$.

$\times\,(2{,}7) = 14$; $\times\,(3{,}7) = 14$; $\times\,(3{,}8) = 24$; $\times\,(3{,}80) = 240$; $\times\,(30{,}8) = 240$.

El carácter binario de estas operaciones, no se pierde al calcular la suma y el producto de un grupo de más de dos números y esto obedece al carácter iterativo que tiene cada función. En el caso de las operaciones binarias se adopta la propiedad denominada asociativa que, se indica para tres elementos, pero que se aplica para cualquier número finito de naturales. De este modo, se tiene:

Para la adición: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$.

Para la multiplicación: $a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

Para el cálculo de la suma de los diez números naturales $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$, media la propiedad asociativa; también es factible recurrir a la fórmula: $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ que hace el cálculo infalible de la suma de los números naturales entre 1 y n sin importar qué tan grande es n.

Por ejemplo: $1 + 2 + \cdots + 100 = 5050$.

Para el cálculo del producto de los diez naturales $1 \times 2 \times \ldots \times 10 =$ 3628800 también media la asociatividad y el carácter iterativo de una función. Este ejemplo corresponde a un producto finito de factores que pertenecen a la sucesión natural de los números menores que n y se denomina factorial de n, y se denota por $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$, mediante esta fórmula se tiene $5! = 120$, $6! = 720$, $14! = 87178291200$, lo que predice la forma desmesurada en que crecen los valores de esta función. Junto al factorial, en ocasiones se requiere el concepto similar de doble factorial que respeta la paridad del argumento, de modo que $n!!$ es el producto de todos los naturales no mayores que n que tienen su misma paridad; por ejemplo:

$5!! = 5 \times 3 \times 1 = 15\,;\ 8!! = 8 \times 6 \times 4 \times 2 = 384\,.$

Los elementos que se operan suelen tener reglas de formación. Como en el cálculo de la suma de los diez primeros números oblongos $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 10 \times 11 = 440$, en la que cada sumando es el producto de dos naturales consecutivos. Por fortuna, en la matemática se tiene, para este e infinitos casos, una representación por fórmula de la suma y se corresponde con la expresión:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

De modo que, la suma de los cien primeros números oblongos es 343400.

En apariencia, los ejemplos propuestos contienen una dificultad que supera la intención del libro. Cada una de las fórmulas en que terminan tales ejemplos se demuestra por el método de inducción matemática o también de forma directa y se pueden encontrar en varios ejemplares de las referencias consignadas en este texto.

En la búsqueda de las relaciones que vinculan a las operaciones entre sí; basta decir que el producto $m \times n$ se define como una suma $n + n + \cdots + n$ en la que el sumando n, aparece m veces; o al contrario, se define como $m + m + \cdots + m$

donde el sumando m aparece n veces, todo esto, debido a que las operaciones en estudio cumplen con la propiedad conmutativa; así:

$a + b = b + a\ ;\ a \times b = b \times a$

La escuela lo explica bien, un producto indica una suma en forma abreviada y dado que en los niveles bajos de formación el ámbito operatorio de los números hace que se descuiden tareas matemáticas de importancia, como medir, estimar, clasificar, recuperar, diferenciar y otras en los que intervienen proceso mentales superiores, la manipulación de los números persigue que el estudiante adquiera la capacidad de la generalización, aparte de advertir que desde allí, procede la capacidad de proponer ejemplos y estudiar casos particulares.

Si en un producto se encuentra que un mismo sumando se repite determinada cantidad de veces y que por la conmutatividad de la multiplicación cada uno de los factores tiene el mismo nivel de importancia, la potencia m^n se define como el producto $m \times m \times \ldots \times m$, donde el factor m, aparece repetido exactamente n veces y aquí se encuentra por primera vez, una transformación entre dos números que deja de ser conmutativa. Por tomar una caso en los escalones bajos de la sucesión natural $2^3 = 8$ mientras $3^2 = 9$.

Por ahora, es conveniente definir que $n^0 = 1$, para cualquier número natural n.

La actividad matemática se fundamenta en las definiciones, desde donde busca establecer regularidades absolutas. Por ejemplo, basados en la monotonía que presenta la sucesión natural de los números, se advierte que las potencias de números respetan el orden. Así, desde que $a < b$ se sigue que $a^n < b^n$, tal es el caso con $2 < 3$ desde donde $2^2 < 3^2$, $2^3 < 3^3, \cdots$, $2^n < 3^n$, para cualquier n. Estos resultados se convierten en paradigmas que se destruyen cuando el conjunto de números se convierte en otro, por decir algo, deja de ser cierto con solo cambiar de los naturales a los enteros.

El sentido de escribir a través de la multiplicación y la potenciación de manera condensada sumas y productos, posibilita la escritura de números grandes que de otra forma ocuparían mucho espacio por su cantidad de cifras. Tal es el caso del gúgol, un número con anatomía simple, un uno seguido de cien ceros, $1\ \underbrace{00\ldots0}_{\text{100 ceros}}$ que se escribe de manera simple por 10^{100} en un espacio reducido. Incluso, con la potencia de potencias se pueden describir sin calcular su exacto valor, números que deben contener gran cantidad de cifras, como ocurre al ir pasando por la secuencia 3^3, 3^{3^3}, $3^{3^{3^3}}$ $\cdots$ que va elevando sus pisos y para la que Donald Knuth, profesor en la Universidad de Stanford propuso la simbología $3 \uparrow 3 = 3^3$, con $3 \uparrow\uparrow 3$ se designa a $3 \uparrow (3 \uparrow 3)$ que es $3^{27} =$ 7625597484987, número bastante grande, con $3 \uparrow\uparrow\uparrow 3$ se representa al natural $3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow 3)$, de modo que el significado de ir aumentando pisos como potencias, se puede resumir en $3 \uparrow\uparrow \ldots \uparrow 3$ en la que cada flecha indica bloques con número de flechas menor en uno en el paso precedente. De hecho, la base 3 puede ser cambiada. Buena manera de producir números inconcebiblemente grandes.

Ejercicios:

Proponer cinco ejemplos de números en escritura romana que rompan con el paradigma del criterio de la longitud de su escritura para determinar su mayoridad.

Proponer cinco ejemplos de números naturales tales que en escritura romana tengan longitud mayor que en su escritura decimal posicional y concuerden con su mayoridad.

Proponer cinco ejemplos de números tales que en escritura romana tengan longitud mayor que en su escritura decimal, pero no cumplan el paradigma de mayoridad.

Encontrar la suma de los primeros mil naturales desde uno.

Encontrar el producto de los primeros trece naturales.

Calcular la suma de los primeros cien números oblongos.

1.1.4 Curiosidades

Un juego divertido denominado el problema de los cuatro cuatros, consiste en que con cuatro 4 y las cuatro operaciones básicas, se escriben en sucesión los primeros números naturales, hasta que sea posible, por ejemplo, los primeros diez números naturales, de los cuales a continuación se escriben algunos.

Ejemplo:

$$0 = 44 - 44 = \frac{4}{4} - \frac{4}{4}$$

$$1 = \frac{44}{44} = \frac{4+4}{4+4} = \frac{4+4-4}{4}$$

$$2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$$

$$3 = \frac{4+4+4}{4}$$

Dando libertad al ejercicio se pueden escribir los números utilizando el 8.

Ejemplo:

$$1 = \frac{8}{8} \qquad 2 = \frac{8+8}{8} \qquad 3 = \frac{88 - 8\times 8}{8} \qquad 4 = \frac{8\times 8}{8+8}$$

$$5 = \frac{88-8}{8+8} \qquad 6 = \frac{88+8}{8+8} \qquad 7 = \frac{8\times 8 - 8}{8} \qquad 8 = 8$$

$$9 = \frac{8 \times 8 + 8}{8} \qquad 10 = \frac{88 - 8}{8} \qquad 11 = \frac{88}{8} \qquad 12 = \frac{88 + 8}{8}$$

Ejercicios:

Continúe escribiendo con los cuatro cuatros y las cuatro operaciones básicas de la aritmética, la sucesión ascendente de los números naturales.

Suponga que tiene un naipe con cartas de cifras $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y que en una mano se le entregan cuatro cartas al azar. Recuerde que de cada cifra hay cuatro cartas. Si se le entregan las cartas $\{2, 4, 6, 7\}$emule el juego de los cuatro cuatros escribiendo cada uno de los números del uno al diez de manera ascendente. Recuerde que dispone de las cuatro operaciones aritméticas: adición, sustracción, multiplicación y división.

Por ejemplo: $1 = \frac{4}{2} - (7 - 6)$; $2 = \frac{4}{2} \times (7 - 6)$.

Repita el juego anterior si se le entregan los siguientes juegos en cada mano: $\{3, 4, 5, 7\}$, $\{4, 4, 5, 8\}$, $\{4, 9, 5, 8\}$, $\{1, 7, 4, 2\}$, $\{3, 7, 4, 2\}$, $\{3, 7, 8, 5\}$, $\{3, 2, 5, 5\}$.

1.1.4.1 Algunas distribuciones

Distribuir la sucesión de los números naturales en diversas formas, sugiere establecer relaciones de alto sentido educativo y formativo. En la distribución

1	2	3										
4	5	6	7	8								
9	10	11	12	13	14	15						
16	17	18	19	20	21	22	23	24				
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35		
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48

…

La primera columna está formada por los cuadrados perfectos, cada renglón tiene dos números más que el anterior, con lo que se arma la secuencia de los números impares 3,5,7, y además, cada renglón establece sumas iguales como:

$1+2=3,\ 4+5+6=7+8,\ 9+10+11+12=13+14+15,\cdots$

En la distribución que sigue, con forma cónica, sobresalen varias relaciones entre las que se cuentan la que la diagonal inferior es la sucesión de los cuadrados perfectos, el número de elementos en las columnas, constituye la secuencia de los números impares, la fila central es la de los promedios de los datos de cada columna, entre otras.

						37
					26	38
				17	27	39
			10	18	28	40
		5	11	19	29	41
	2	6	12	20	30	42
1	3	7	13	21	31	43
	4	8	14	22	32	44
		9	15	23	33	45
			16	24	34	46
				25	35	47
					36	48
						49

…

Una de las más famosas distribuciones, no ordenadas, es la conocida con el nombre de triángulo de Pascal que permite calcular los coeficientes de la expansión del llamado binomio de Newton $(x+y)^n$. La distribución es constructiva y en ella cada elemento de un renglón es la suma de sus dos vecinos cercanos del renglón superior.

Esta distribución presenta regularidades significativas, cualquiera de las dos diagonales establece la constante 1, la segunda diagonal es la secuencia de números naturales 1, 2, $3,\cdots$, la tercera diagonal es la lista infinita de los llamados números triangulares, que son las sumas parciales de la sucesión natural $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, tal sucesión es 1, 3, 6, 10, $15,\cdots$, la siguiente diagonal es la de los números tetraedrales y así de seguido.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

…

Como se anotó, el renglón n reproduce los coeficientes de la expansión del desarrollo para $(x+y)^{n-1}$, de modo que por proponer algo, el cuarto renglón $1,3,3,1$ hace ver que $(x+y)^3=1x^3+3x^2y+3xy^2+1y^3$.

En la contraportada del libro El Arte de Programar de Donalt Knuth aparece la distribución radiográfica siguiente.

1

12

1112

3112

132112

1113122112

$\vdots$

Cada renglón describe de manera radiográfica la composición del renglón anterior; así, el cuarto renglón 3112 asegura que, el tercero tiene tres símbolos 1 y un numeral 2 y en consecuencia, para describirlo, el siguiente renglón debe anotar un 3, dos 1 y un 2.

Siguiendo el registro de construcción de la distribución, el renglón que sigue en la lista presentada es 311311222112.

1.1.5 Cualidades del sistema de numeración indo-arábigo

La calidad del sistema de numeración indo-arábigo supera a cualquier forma de representación del lenguaje corriente; cualquier sucesión finita de cifras concuerda con el nombre de un número. Por ejemplo y al azar, la sucesión $\{3, 2, 5, 5\}$ produce el número 3255 (Tres mil doscientos cincuenta y cinco); mientras que una sucesión cualquiera de letras del alfabeto árabe, digamos $\{x, r, s, i, t, o,\ H\}$ no produce una palabra; pues, $xrsitoH$, al menos en español, no significa nada; incluso si cambia el orden de aparición de las letras. Lo mismo ocurre con una secuencia arbitraria y finita de cifras del sistema numeración romano, es improbable que represente un número. Por ejemplo, la sucesión de símbolos $\{I, X, I, I, V, V, D\}$, no representa un número, puesto que la secuencia de símbolos $IXIIVVD$ no cumple las reglas de la numeración romana.

En el año 773 de nuestra era, arribó a Bagdad una embajada india y en su equipaje cargaban un inestimable tesoro de tres atavíos, el cálculo, las cifras y la voz sunya que significa vacío. (Guedj, 1998).

El califa Al-Mansur y los sabios acompañantes, reconocieron su valor. Muhammad ibn Musa al-Juwarizmi escribe en el siglo IX el Libro de la adición y de la sustracción según el cálculo de los indios; libro que a partir del siglo XII fue traducido al latín, varias veces. En honor a su autor, las formas de cálculo hoy se denominan algoritmos.

De hecho, aparecieron otros sistemas de numeración posicional, en Babilonia, China y México, con la cultura maya. Estos tres sistemas adolecieron de no poseer independencia en la representación de las unidades de primer orden. Por ejemplo, el “dos” se representaba como la iteración de dos “unos” y esto hizo que siendo la base n, sus cifras no fuesen n, como lo es el sistema decimal. Recuerde que el sistema de numeración posicional de base 10, tiene “diez” símbolos para representar cualquier número.

El sistema maya era de base 20 y en lugar de dotarse de 20 símbolos, se dotó tan solo de tres. Igual situación ocurrió con el sistema sumerio, que es de base 60, solo tiene dos símbolos que representan al “uno” y al “diez”. Estos son ejemplos de algunos sistemas con pocas características prácticas, que lo que los hizo pobres e inoperantes.

1.2 SOBRE LA DIVISIBILIDAD DE LOS NÚMEROS NATURALES

La sucesión $0, 1, 2, 3, \cdots$ es común; desde la infancia se trabaja con estos números, con tanta naturalidad que, en efecto, se denominan “naturales”. Es suficiente con tener el “cero” y el “uno”, y con ellos se tiene todo. Es una sucesión inagotable, infinita, de fácil y útil concepción.

El estudio del conjunto de los números naturales se ha convertido en una rama especial de la matemática y se denomina Teoría de Números, que en esencia se preocupa de la resolución de problemas que se comprenden fácil, pero cuya solución es compleja; pues, suele requerir teorías que se escapan de su propio terreno. Carl Friedrich Gauss, conocido con el apelativo del príncipe de los matemáticos, denominó Reina de las Matemáticas a la aritmética de los números naturales.

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ tiene a 0 como su comienzo, pero en el 1 encuentra un generador inagotable; así el conjunto no tiene fin, no es posible escribir el último número natural; es decir, nadie puede hacer una lista completa de todos sus elementos.

Cada número natural n tiene un sucesor inmediato, llamado $n + 1$; y cada número n, excepto el cero, es sucesor de su predecesor $n - 1$. Con los números naturales se construyen los números negativos, las fracciones, los irracionales, los reales, los complejos, los hipercomplejos y los p-ádicos. Es decir, con el cero y el uno, la humanidad, lo tiene todo, todo un gran conjunto de números que conforman un mundo ideal en el que solo la mente del hombre posee un carácter interviniente.

Para comprender el significado de los números naturales no basta con exponer el conjunto $\mathbb{N} = \{0,1, 2, 3, \cdots\}$; se hace necesario considerar el orden que llevan sus elementos y algunas características como las que se señalan a continuación.

Hay un primer elemento llamado Cero.

La sucesión de números no termina ni se ramifica.

La sucesión no se cierra sobre sí misma.

Ningún elemento tiene dos antecesores.

No hay números naturales intercalados “entre” dos cualesquiera y consecutivos de la sucesión. (Es decir, a partir de 0 se obtiene todo $\mathbb{N}$).

Estas consideraciones llevaron a Richard Dedekind (1831-1916) y Giuseppe Peano (1858-1932) en1889 a fundamentar el concepto de número natural en cinco postulados, de donde surgen de un modo deductivo todas sus características, operaciones y propiedades, tal y como si en ellos se condensara toda la aritmética. Resulta atractivo considerar la gran similitud con Los Elementos de Euclides, donde, de manera análoga, todo el conocimiento geométrico de su modelo, surge desde cinco postulados.

Georg Cantor (1845-1918) y Gottlob Frege (1890-1900) llegaron al mismo resultado al concebir la idea de coordinabilidad entre conjuntos. A la pregunta, ¿Hay aquí tantos escritorios como estudiantes? Se puede responder por dos caminos: contando escritorios y estudiantes, o haciendo que los estudiantes se sienten en sendos escritorios. En el segundo caso puede suceder que:

Sobran escritorios

Faltan escritorios

Ni sobran ni faltan escritorios

En el caso c. se dice que el conjunto de escritorios es coordinable con el conjunto de estudiantes ya que tienen el mismo número de elementos. No interesa cuántos estudiantes haya, sino que los dos conjuntos tengan el mismo número de elementos. Por ello, se dice que el número cardinal de un conjunto C, es la clase de todos los conjuntos coordinables con C.

El criterio de la coordinabilidad de conjuntos se aplica a los conjuntos infinitos bajo idéntico modelo conceptual que se consolida con la configuración de relaciones biyectivas. A manera de ejemplo se considera el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números pares positivos. A cada $n \in \mathbb{N}$ le corresponde el número $2 \cdot n$ que es par.

$1 \to 2\,, 2 \to 4\,, 3 \to 6\,, \cdots, n \to 2n\,, \cdots$

Así que, $\mathbb{N}$ tiene el mismo número de elementos que P, considerando a P como el conjunto de los números pares, aunque se argumente que en $\mathbb{N}$, no se han contado los números impares.

Se puede probar que la función $f\colon \mathbb{N} \to P$ tal que $f(n) = 2n$ es biyectiva.

La cantidad de elementos de un conjunto A se denomina cardinal del conjunto y se denota por $card(A)$ sin importar si el conjunto es finito o infinito. Dos conjuntos que poseen el mismo cardinal se llaman coordinables o equinumerosos.

Galileo Galilei, en 1638, encontró la curiosa propiedad del cardinal de los naturales y es que se puede establecer una biyección entre los naturales y algunos subconjuntos propios más pequeños. Por ejemplo, $f(n) = n^3$ establece una función biyectiva entre los naturales y su subconjunto propio formado por los cubos perfectos. De este modo, el axioma de Euclides (Noción común), de que el todo es más grande que la parte, queda, en este caso, sin piso y se debería cambiar por otra más generosa, por ejemplo; el todo es mayor o igual que la parte.

El cardinal de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Q}$ es el mismo y se denota por la primera letra del alfabeto hebreo aleph con subíndice cero. ($\aleph_0$). También se puede establecer una función biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ para determinar su coordinabilidad; tal función es
$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que:

$$f(n) = \begin{cases} -\dfrac{n}{2} & si\ n\ es\ par \\ \dfrac{1+n}{2} & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

El cardinal de $\mathbb{R}$ se llama el continuo numérico y se denota por $\varsigma = 2^{\aleph_0}$.

1.2.1 Sobre la aritmética de los números naturales

Es factible encontrar nuevos números naturales a partir de otros conocidos; algunas de las formas usuales requieren la definición de dos operaciones básicas llamadas adición y multiplicación, de manera que sus resultados queden unívocamente determinados. Para ello es necesario concebir un proceso general y abstracto que abarque a todos los casos particulares.

Sea $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $(a,\ b) \rightarrow a + b$ y sea $: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $(a,\ b) \rightarrow a \cdot b$ tomando a y b arbitrarios en $\mathbb{N}$.

Ejemplo:

$3 + 4 = 7$ y $3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$; además, $4 + 3 = 7$ y $4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$, producto que se puede encontrar, como todos los productos de dos enteros, mediante distribuciones rectangulares.

La adición y multiplicación de naturales tienen las siguientes propiedades.

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ $\qquad$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

2) $a + b = b + a$ $\qquad$ $a \cdot b = b \cdot a$

3) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

4) $a + 0 = a$ $\qquad$ $a \cdot 1 = a$

Ejemplo:

$3 \cdot (2 + 4) = (3 \cdot 2) + (3 \cdot 4) = 6 + 12 = 18.$

La aritmética es la ciencia de los números, es compleja y misteriosa, difícil, pero curiosa, atractiva y atrayente; su estudio dignifica al hombre, lo hace más humano. La aritmética compendia el estudio de las cuatro operaciones: adición, sustracción, multiplicación y división; dos de las cuales no siempre son posibles en los naturales e impelen la necesidad de ampliar el dominio numérico, construyendo el conjunto de los números enteros y de los racionales y con el salto a la potenciación se requiere construir el conjunto de los números reales.

En la adición, los números naturales cimentan su existencia, pues, sumar 1 a cada número es cambiar la naturaleza de cada entidad: $1+1+1+1+\cdots$. Por su parte, en la multiplicación está el secreto en el cual se fundamentan los sistemas de numeración: cada número es la suma de múltiplos de diferentes potencias de la base.

Por ejemplo, en base 10, $5347 = 5\times 10^3 + 3\times 10^2 + 4\times 10^1 + 7\times 10^0$; y como se ve, la potenciación permite la numeración efectiva de un número por paquetes y la reina de las operaciones, que es la división, produce la posibilidad de conocer a fondo a cada natural, comprobando la divisibilidad que tienen con respecto a sus hermanos menores.

Por el siglo III antes de nuestra era, el matemático Euclides, ideó el método de la división con resto o residuo, que es una técnica paso a paso que ahora se conoce como el algoritmo de la división de Euclides. Por ejemplo, 27 dividido por 7 es igual a 3 y deja de residuo 6. El 3 se conoce con el nombre de cociente por defecto. Esto se escribe como $27 = 7\times 3 + 6$.

Si $a = d\cdot c$ en $\mathbb{N}$, se dice que d es un Divisor o factor de a. Por ejemplo; $36 = 9\times 4 = 2\times 18 = 3\times 12$, entonces, 2 es un factor de 36; 9 también es un factor o divisor de 36. 8 no es un factor de 36.

Cuando $a \in \mathbb{N}$ y sólo tiene dos factores o divisores a saber; el 1 y el mismo a, se asegura que a es un número primo o irreducible. Así, pues, los números $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\cdots$ son primos en $\mathbb{N}$ y tienen gran importancia en el sentido que son suficientes para que a través de la multiplicación se pueda representar cualquier natural. Su uso y trato es frecuente y por ello se estudiarán más adelante.

Cuando el residuo es “cero”, la división se dice exacta, y al número menor se le dice divisor del mayor. En este sentido el 2, el 5 y el 10 son divisores de todos los números que terminan en 0, como el número 7310 y el 113900 o el número $Gúgol$.

Ejercicios:

Exprese el siguiente listado de números como suma de productos en términos de base 10: 12893, 23451, 80007, 45097, 340891, 987300.

Determine los números que indican las siguientes sumas: $7\times 10^4 + 3\times 10^2 + 5\times 10^0$, $3\times 10^5 + 8\times 10^4 + 3\times 10^2 + 5\times 10^1$, $3\times 10^5 + 8\times 10^0$.

Aplicando el algoritmo de la división de Euclides, escriba la división de los números 700012, 876676, 6786, 56718, 67 y 175 al ser divididos por $2,3,4,5,6,7,8$ y 9.

Escriba de acuerdo con el algoritmo de la división de Euclides, la división de los números 700012, 876676, 6786, 56718, 67 y 175 al ser divididos por $10,11,12,13,14$ y 15.

Calcule los divisores de los siguientes números: 1000, 1440, 368, 540, 2800 y 8100.

1.2.2 Divisibilidad

El estudio de los divisores es el primer recurso de clasificación de los números naturales; los números divisibles por 2 se dicen pares y los que al dividirse por 2 dejan residuo 1 se llaman impares. Los pares se escriben como $2n$ y los impares como $2n+1$. Y respecto de las operaciones se asegura que la adición no respeta la paridad mientras que la multiplicación si lo hace.

El cálculo de los divisores de un número es el principal método para su clasificación y deriva en criterios de divisibilidad que permiten su caracterización.

La divisibilidad por 2 se sostiene en el criterio de la última cifra; es suficiente con determinar que la última cifra sea $0, 2, 4, 6$ u 8 para decir que tal número es divisible por dos; esto es equivalente a decir que dicho número es par.

El sucesor de un par es impar, y el sucesor de un impar es par. Esta alternancia es armónica, acompasa y acompaña a la naturaleza misma de los números naturales y hace prever que hay tantos naturales pares como impares; pues, se presentan en la sucesión natural por binas. Los pares son de la forma $2 \times n$ y los impares de la forma $2 \times n + 1$

Aquí se ha anotado la jerarquía que ameritan las operaciones: en el pedestal más alto están la multiplicación y la división, y en el pedestal de abajo la adición.

La multiplicación de naturales conserva la paridad; es decir, el producto de pares es par y el producto de impares es impar. En cambio, la adición no conserva esa propiedad, puesto que si bien, la suma de pares es par y la suma de impares no es impar, es par.

Cuando al aplicar el algoritmo de la división con resto de Euclides entre los números a y b se encuentra $a = bq + r$ y $r = 0$, se dice que b es un divisor de a y que la división es exacta y en este caso $a = bq$. Cuando $b < a$ el divisor se dice propio y para serlo debe satisfacer el requisito de ser menor que la mitad de a, esto se escribe como $b \leq \left[\frac{a}{2}\right]$, donde los corchetes indican la función "parte entera". Por ejemplo, los divisores propios de 115 no pueden ser mayores que 57.

Los divisores de 8 son $D_8 = \{1,2,4,8\}$, los divisores de 12 determinan el conjunto $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$, los divisores de 21, $D_{21} = \{1,3,7,21\}$. Como se ve, con estos ejemplos, la cardinalidad de los divisores de un número no tiene que ver que su tamaño sino con la radiografía expuesta en la naturaleza en que se descompone en factores primos. Más adelante se estudia la función ϕ de Euler, que permite calcular la cantidad de divisores de cualquier número natural.

Ejercicios:

Determine la paridad de los siguientes números: 23242001, $234 \times 1001 + 3$, $3^6 + 7$, $3^6 \times 2^5 + 7$, $3^{61} \times 2^{15} - 7$, $2^3 \times 3^5 + 7^{15}$, $2^3 \times 3^5 + 7^{15} + 1$, $2^3 \times 3^5 + 7^{15} + 6^3$.

Se define $n!$ y se lee "ene factorial", como el producto de todos los factores menores o iguales a n hasta llegar a 1. Así $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$

Por ejemplo $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Además, se define $0! = 1! = 1$.

Argumente la razón por la cual si $n > 1$, $n!$ es par.

Se define un número combinatorio de "n tomados de r en r" al siguiente número:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!} \text{ siendo } r \leq n$$

Ejemplo:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Determinar la paridad de los siguientes números combinatorios:

$\binom{6}{2}, \binom{6}{3}, \binom{9}{3}, \binom{9}{5}, \binom{11}{5}, \binom{11}{8}$.

4. Calcular el conjunto de todos los divisores de cada uno de los siguientes números; 124, 296, 96, 144, 92, 360 y 140.

1.2.3 Números primos

La siguiente y más famosa clasificación de los números naturales, es la de aquellos números que no son divisibles en absoluto por número alguno diferente a él mismo y a la unidad. Los números que gozan de esta particularidad, son el producto único de sí mismo por la unidad, es decir, $n = n \times 1$. Estos números naturales se denominan primos; son números de una clase diferente, números de primera clase, son números que, para expresarlos como un producto solo tienen una opción, son el producto de ellos mismos con la unidad.

Por jerarquía, la división juega un papel preponderante en la historia de los números. Los griegos ya conocían de su importancia y por ello se dedicaron a establecer teoremas que se centran en su aplicación: el algoritmo de la división de Euclides, la clasificación de los naturales en pares e impares, los conceptos de divisibilidad, divisor, de máximo común divisor y mínimo común múltiplo,… y en particular observaron que algunos de ellos poseían únicamente dos divisores, siendo uno de los divisores el 1 y el otro el mismo número. El hecho de poseer sólo dos divisores triviales permitió establecer una categoría específica entre los números; de alguna manera tenían algún tipo de primacía frente a los demás y conforman la familia de los números primos.

Para establecer que "todo número natural queda descrito por un único y exclusivo conjunto de números primos de modo que su producto es justamente igual a tal número", resultado que se denomina el Teorema Fundamental de la Aritmética se debe descartar al 1, así, todo número que queda determinado por un conjunto de al menos dos números (primos) se llama compuesto. La secuencia 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137,139, 149, 151, 157, 163,167, 173, 179, 181,191, 193, 197,199, 211, 223, 227, 229 presenta los primeros cincuenta números primos.

La lista, está compuesta por números impares exceptuando al primero que es el 2. Para seleccionar los primos existentes entre los n primeros números naturales se sigue un procedimiento que se denomina la Criba de Eratóstenes (vivió en el siglo III a.C, fue director de la biblioteca de Alejandría en Egipto y elaboró una medición de la circunferencia terrestre que asombra por su precisión).

El procedimiento se basa en dos hechos fundamentales que permiten descartar los números compuestos que aparecen en la lista; uno de ellos asegura que si d es un divisor de n entonces $\frac{n}{d}$ también es un divisor de n; y en este sentido, el divisor propio más grande de n, puede ser $\frac{n}{2}$ o $\frac{n-1}{2}$.

Recordamos que los divisores propios de un número natural son aquellos divisores menores que él.

El otro hecho llamativo es que, si p es un divisor primo de n, el valor más grande que alcanza es menor o igual que $\sqrt{n}$ ya que, al ser n un número compuesto, al menos debe contener dos factores primos y lo máximo posible es que ellos sean iguales, en cuyo caso n es un cuadrado perfecto.

El teorema de Eratóstenes afirma que todo número compuesto n contiene un factor primo p tal que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$. Supongamos que $n = pq$, siendo p y q divisores arbitrarios de n, tales que$p \leq q$. De aquí se obtiene que $p \cdot p \leq pq = n$, esto es
$p^2 \leq n$; por lo tanto, $p \leq \sqrt{n}$.

Uno de los grandes resultados griegos y demostrado por Euclides es el teorema sobre la infinitud de la existencia de primos; pero también asombra el hecho que, en toda progresión aritmética, como lo demostró Dirichlet en 1837, $a + b,\ a + 2b,\ a + 3b,\ a + 4b, \cdots$ en donde a y b son primos relativos, existe una infinitud de números primos.

El asombro ocurre porque, en la medida que se avanza sobre el conjunto de los números naturales, los primos escasean. En efecto, se pueden exhibir cadenas tan grandes como se quiera, configuradas por k números compuestos porque el conjunto consecutivo $(k+2)! + 2$, $(k+2)! + 3$, $(k+2)! + 4, \ldots$, $(k+2)! + (k+1)$,
$(k+2)! + (k+1)$ está conformada por k elementos compuestos, dado que

todos y cada uno de ellos es divisible por cualquiera de los naturales $2,\ 3,\ 4,\cdots,\ k+1$.

El teorema demostrado por Dirichlet impacta por sus contenidos tácitos; por ejemplo, la progresión $2+5,\ 2+2\times5,\ 2+3\times5,\ 2+4\times5,\ 2+5\times5,\cdots$ contiene tan solo naturales terminados en 2 o en 7 y siendo el máximo común divisor entre 2 y 5 el 1, se concluye que existen infinitos primos terminados en 7.

Los naturales 3 y 5 también son primos relativos; en consecuencia, la progresión $3+5,\ 3+2\times5,\ 3+3\times5,\ 3+4\times5,\ 3+5\times5,\ldots$ contiene una infinitud de primos terminados en 3. Siguiendo esta ruta, queda probada la existencia de una infinitud de primos terminados en cualquier número impar. Por ejemplo, existe una infinidad de números primos terminados en 999 contenidos en la progresión aritmética
$999+1000n$.

El hecho de que los números primos sean poco frecuentes dificulta su escogencia, determinar si un natural pertenece al conjunto de los números primos es un problema de gran complejidad para el que se han establecido algoritmos de corte probabilístico. ¿Cómo determinar si el natural 116447 es compuesto o nó? Debido a que se trata de un número impar mayor que 2 tiene buena posibilidad de primalidad y el teorema de la criba de Eratóstenes dice que de ser compuesto contiene un factor primo menor que $\sqrt{116447}\approx 341$ y esto sugiere la realización de 68 divisiones, dado que entre el 2 y 341 existe esa cantidad de números primos. Bueno, en realidad, el número 116447 es en la criba, el primo que ocupa el lugar 11000.

Si al avanzar sobre los naturales estos números son menos frecuentes, ¿cómo se distribuyen dado que son infinitos? La lista de los primos inicia de la forma 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, y muestra que existen dos naturales primos consecutivos que son el 2 y el 3; pero de allí en adelante, la menor distancia entre dos primos consecutivos es 2. A parejas de primos con la característica de diferenciarse en 2 se les llama primos gemelos; de modo que las parejas $(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$, $(17,19)$, $(29,31),\ldots$, $(55049,55051)$ son parejas de primos gemelos y hasta el momento no se ha podido demostrar si la cantidad de primos gemelos es infinita.

Por increíble que parezca, Bertrand conjeturó que en el intervalo entero $[n,\ 2n]$ aparece al menos un número primo. La conjetura de Bertrand fue demostrada por el matemático ruso Pafnuty Lvóvich Chebyshev. El asombro radica en que también se puede establecer intervalos de enteros de cualquier longitud que carecen de elementos primos.

Debido a su importancia teórica y a su aplicación en el mundo tecnológico, los primos han sido fuente de estudio e inspiración; en lugar del procedimiento de Eratóstenes para detectar primos o del algoritmo de la fuerza bruta que asegura que, para saber si un número n es primo o no, es suficiente con realizar a lo sumo $\left[\frac{n}{2}+1\right]$ divisiones, donde los corchetes corresponden a la función parte entera.

Si al dividir a n por los valores $2,3,4,\cdots,\left[\frac{n+1}{2}\right]$, se encuentra algún residuo cero, el número es compuesto; si esto no ocurre, se trata de un número primo. Este algoritmo de selección es más económico que el propuesto por Edward Waring en el siglo XVIII y que se llama teorema de Wilson en honor a un amigo: “p es un número primo si y sólo si $(p-1)!\ +1$ es divisible por p”, basta recordar que el cálculo del factorial de un número es un problema de gran complejidad computacional; los resultados crecen super-exponencialmente.

En 1896 los matemáticos Hadamard y Poussin demostraron la que, hasta entonces, era una conjetura formulada por Gauss en 1792, cuando tenía quince años y que establece una aproximación a la cantidad de primos que hay entre los naturales 1 y n; desde entonces, el resultado se conoce como Teorema del *número primo;* “El número de primos menores o iguales a n es aproximadamente $\frac{n}{ln(n)}$. Esto se escribe como $\pi(n) \approx \frac{n}{ln(n)}$.”

La Tabla 1. presenta algunas aproximaciones y el valor exacto de primos existentes en el intervalo natural $[1, n]$.

Tabla 1. Primos existentes en el intervalo natural $[1, n]$

n	$\pi(n)$	$\frac{n}{ln(n)}$	n	$\pi(n)$	$\frac{n}{ln(n)}$
100	25	21.71472409	1100	184	157.0740708
200	46	37.74783316	1200	196	169.2506340
300	62	52.59667621	1300	211	181.3079952
400	78	66.76164013	1400	222	193.2573206
500	95	80.45559624	1500	239	205.1079990
600	109	93.79499734	1600	251	216.8680245
700	125	106.8526050	1700	266	228.5442788
800	139	119.6778560	1800	278	240.1427426
900	154	132.3063467	1900	290	251.6686570

1000	168	144.7648273	2000	303	263.1266498

Estos datos y otros se visualizan mejor en la Figura 1.

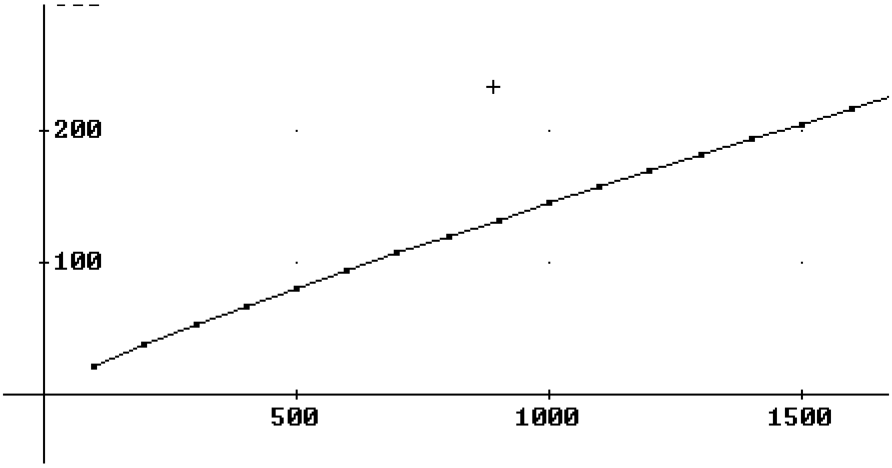


Figura 1. Primos existentes en el intervalo natural $[1, n]$

Existe una fórmula más precisa para valores n grandes y contempla tantos términos k como se requiera; tal fórmula también fue descubierta por Gauss (Clawson, 1999).

$$\pi(n) \approx n\left(\frac{0!}{ln(n)} + \frac{1!}{(ln(n))^2} + \frac{2!}{(ln(n))^3} + \ldots + \frac{(k-1)!}{(ln(n))^k}\right)$$

Algunos de los valores determinados por esta expresión, con quince términos, son: $\pi(10^3) \approx$ 226.4190221, $\pi(10^4) \approx$ 1255.393614, $\pi(10^5) \approx$ 9633.100633 y sus valores exactos son $\pi(10^3) = 168$, $\pi(10^4) = 1229$ y $\pi(10^5) = 9592$.

Se han formulado variadas preguntas en torno de los números primos, una de las más llamativas se refiere a la existencia de fórmulas que producen exclusivamente números primos. Al respecto, ya se mencionó el teorema de Dirichlet que asegura que, toda progresión aritmética de la forma que se indica en seguida, contiene infinitos primos, siempre y cuando el máximo común divisor entre a y b sea 1:

$a + b,\ a + 2b,\ a + 3b,\ a + 4b, \cdots$

Esto significa que las fórmulas del tipo:

$5n + 6, 6n + 7, 7n + 8, \cdots$, producen una infinidad de números primos; algunas de ellas producen porcentualmente más primos que otras.

En los primeros mil números naturales n en la expresión $5n + 6$ aparece un 39.6% de primos; en cambio, la expresión $30n - 13$ produce, en el mismo rango, el 41.1% de primos.

Las expresiones cuadráticas son mejores generadoras de primos que las lineales; en este sentido, Euler debió sentirse asombrado cuando descubrió que la fórmula $f(n) = n^2 + n + 41$, para los primeros 39 números naturales, produce solo primos, a saber: 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173,197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, , 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523 y 1601; pero $f(40) = 1681 = 41^2$ que, evidentemente, no es primo.

De hecho, este polinomio descubierto por Euler en 1772, sigue produciendo gran cantidad de primos: para los n entre 40 y 80 se producen 34 números primos, para los valores entre 100 y 200 aparecen 71 primos y para los naturales en el rango $[200,\ 300]$ se encuentran 55 números primos.

A propósito de expresiones cuadráticas, el matemático francés Pierre de Fermat, demostró la conjetura formulada por Albert Girard de que cualquier primo contenido en la progresión aritmética $1 + 4n$ se puede escribir como la suma de dos cuadrados.

Ejemplo:

$5 = 1^2 + 2^2$; $13 = 2^2 + 3^2$; $17 = 1^2 + 4^2$

Posteriormente demostró que todo número es la suma de cuatro cuadrados.

En 1974 E. Karst demostró que la expresión de segundo grado que produce mayor cantidad de primos para los primeros mil valores naturales es $2n^2 - 199$ que genera un 60% de primos.

Entre las expresiones cúbicas que producen gran cantidad de primos está $n^3 - n^2 - 349$ con la que se obtienen 411 primos para los primeros mil números naturales.

Ninguna expresión polinómica de coeficientes enteros produce de manera exclusiva números primos. Al suponer que $\sum_{i=0}^{r} a_i n^i = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_r n^r$ produce sólo primos, lo hace para un n en particular; digamos para $n = n_0$, lo cual significa que, $\sum_{i=0}^{r} a_i n_0^i = p$ siendo p un número primo.

Si en lugar de n_0 se escribe $n_0 + sp$ donde s es también un entero, se encuentra que cada potencia $(n_0 + sp)^i$ es de la forma $n_0^i + \alpha p$, donde α es un entero y en consecuencia, de una parte se tiene que $\sum_{i=0}^{r} a_i (n_0 + sp)^i$ es un número primo, y al expandir la expresión se encuentra que $\sum_{i=0}^{r} a_i (n_0 + sp)^i = \sum_{i=0}^{r} a_i n_0^i + \vartheta p$ donde ϑ es un número entero. De donde, $\sum_{i=0}^{r} a_i (n_0 + sp)^i = p + \vartheta p = p(1 + \vartheta)$, es decir $\sum_{i=0}^{r} a_i (n_0 + sp)^i$ es un número compuesto.

La consecuencia del aparecimiento de la contradicción encontrada de que $\sum_{i=0}^{r} a_i (n_0 + sp)^i$ es a la vez primo y compuesto, está en la imposibilidad de suponer la existencia de una fórmula polinómica $\sum_{i=0}^{r} a_i n^i = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_r n^r$ que produzca solo números primos.

Existen otras formas de expresiones que producen números primos; una de ellas se debe a Pierre de Fermat, el más grande de los matemáticos aficionados que

ha dado la historia de la humanidad. Fermat conjeturó que los números de la forma
$F_n = 2^{2^n} + 1$ son primos; sin embargo, se comprobó que F_5,F_6, F_7, F_8, F_9 y F_{11} son compuestos. La dificultad en determinar la primalidad entre los números de Fermat radica en su crecimiento desmesurado.

El monje Marín Mersenne que vivió en el siglo XVII, también fue un matemático aficionado y estudió los números de la forma $M_p = 2^p - 1$ donde p es un número primo; estos números se denominan números de Mersenne. Los primeros números de Merssenne son 3, 7, 31, 127, 2047, 8191, 131071, 524287, 8388607, 536870911; de los cuales, los cuatro primeros son números primos. Hasta el momento sólo se conocen 44 números de Mersenne que son primos; por ejemplo el número $2^{216091} - 1$ es un primo de Mersenne con 65050 dígitos. El mayor número de Mersenne conocido hasta 1997 y primo era el 34avo y se corresponde con $2^{1257287} - 1$, número que tiene algo más de 378 632 dígitos.

El 16 de Noviembre del 2006 se encontró el 44avo primo de Mersenne conocido y es $M_{32582657}$ que tiene 9808358 cifras según la noticia proveniente de la GIMPS, que es la Great Internet Mersenne Prime Search, fundada por George Woltman en 1996 y también existe la página www.mersenne.org, organización dedicada a la exploración y divulgación de este tipo de números.

Algunos de los últimos primos de Mersenne conocidos se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Últimos números primos de Mersenne conocidos

Orden	Primo de Mersenne	Cifras	Posición	Año
1	$M_{32582657}$	9808358	44	2006
2	$M_{30402457}$	9152052	43	2005
3	$M_{25964951}$	7816230	42	2005
4	$M_{24036583}$	7235733	41	2004

Cataldi, en 1588 demostró que el número de Mersenne $M_{19} = 2^{19} - 1 = 524287$ es primo, un siglo después Euler comprobó que $M_{31} = 2147483647$ también es primo; $M_{127} = 170141183460469231731687303715884105727$ también lo es siendo un número de 39 dígitos; su primalidad se verificó cien años después que M_{31}. En 1952, Robinson comprobó que M_{521}, M_{607}, M_{1279}, M_{2203} y M_{2281} son primos.

Nadie sabe hasta hoy, si existe un número finito o infinito de números naturales de Fermat y de Mersenne que a la vez sean primos. Hasta 1990 el mayor número primo conocido era $391581 \times 2^{216091} - 1$ y su determinación requirió el trabajo de un supercomputador por más de un año, este primo posee 149795 dígitos; otro primo conocido por estos años fue el $225 \times 2^{411408} + 1$ que tiene 123849 cifras.

La utilización de factorial en la consecución de primos es otra de las formas usuales de ir a la caza de los mismos y es común llamar a todo primo de la forma $n! \pm 1$ primo factorial; uno de ellos es $3610! - 1$ que tiene 11277 cifras y fue encontrado por Chris K. Caldwell en 1993. La Tabla XXX muestra algunos primos factoriales.

Tabla 3. Ejemplos de números primos factoriales

Orden	Primo Factorial	Dígitos	Año
1	$34790! - 1$	142891	2002
2	$26951! + 1$	107707	2002
3	$21480! - 1$	83727	2001
4	$6917! - 1$	23560	1998
5	$6380! + 1$	21507	1998

Los buscadores de primos también se dedican a explorarlos entre los números de la forma $n\# \pm 1$ donde $n\#$ es el producto de todos los primos menores o iguales que n; tales números se denominan primos primordiales. La Tabla 4. muestra algunos primos de esta categoría, entre los más recientes encontrados por Caldwell.

Tabla 4. Números primos primordiales

Orden	Primo Primordial	Dígitos	Año
1	$392113\# + 1$	169966	2001
2	$366439\# + 1$	158936	2001
3	$145823\# + 1$	63142	2000

4	$42209\# + 1$	18241	1999
5	$24029\# + 1$	10387	1993
6	$23801\# + 1$	10273	1993

1.2.3.1. La conjetura de Goldbach

Christian Goldbach (1690-1764), matemático alemán, en 1725 fue nombrado profesor en San Petersburgo y en 1728 se traslada a Moscú para ser el tutor del zar Pedro I. Tuvo la oportunidad de viajar por Europa y conocer a talentosos matemáticos, entre ellos a Leonhard Euler. El 7 de junio de 1742, en una carta dirigida a Euler, Goldbach especula que todo número par es la suma de dos primos y que todo número impar es la suma de tres primos.

Por aquel tiempo, la comunidad académica no tenía claro si el 1 debía considerarse primo, por eso y debido a que la especulación de Goldbach no se ha resuelto hasta ahora, la conjetura para los números pares ha dado un pequeño giro y aduce que “Todo número par mayor que dos es la suma de dos números primos.”

131118888 = 29 + 131118859

1378111888800002 $=$ 193 $+$ 1378111888799809

Algunos números naturales pares admiten ser expresados como la suma de dos primos en más de una forma.

El siguiente ejemplo determina en forma de triadas n, p, q las posibles maneras en que el par n se expresa como $n = p + q$ siendo p y q números primos:

60, 7, 53 ; 60, 13, 47 ; 60, 17, 43 ; 60, 19, 41; 60, 23, 37 ; 60, 29, 31

El millón, por tomar otro ejemplo, se puede escribir de 5402 maneras diferentes como la suma de dos primos. Este ejemplo precisa decir cuan asombroso resulta entender que la demostración de la observación de Goldbach a Euler en 1742, siendo tan natural, haya resistido los embates realizados por eximios matemáticos.

1.2.3 Teorema fundamental de la aritmética

Los números naturales se particionan en dos, los primos y los que resultan ser productos de números primos, llamados hace tiempo, números buenos y números malos, respectivamente.

El 5 es un número bueno, el 60 es un número malo. Esta particularidad está conferida por el Teorema Fundamental de la Aritmética, que establece que todo número natural mayor que 1, es el producto único de factores primos.

Como su nombre lo indica, el teorema fundamental de la aritmética es la propiedad más importante de los números primos en el sentido que a través de ellos, a todos y cada uno de los números naturales, este subconjunto de él mismo le pone su impronta, su sello, hace una verdadera radiografía del número.

El teorema se puede mencionar como sigue (Gentile, 1985): para todo natural a distinto de cero y de uno, existe una sucesión finita de números primos $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_r$ tales que: $a = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_r$.

Un mismo primo p_i puede repetirse un número α_i de veces, y por ello, su repetición se escribe de forma resumida, así: ${p_i}^{\alpha_i}$.

Ejemplo:

$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$

Se puede seguir paso a paso con cada uno de los números naturales, uno a uno. Por ejemplo, $145 = 5 \times 29$, $146 = 2 \times 73$, $147 = 3 \times 7^2$, $148 = 2^2 \times 37$, $149 = 1 \times 149, \cdots$.

Para números relativamente grandes, la descomposición en factores primos se torna difícil en el sentido en que los primos escasean en la medida que se avanza por la sucesión de los números naturales y no existe un algoritmo preciso para detectarlos o determinar si se trata o no de un primo. De este modo, por ejemplo $172800 = 2^8 \times 3^3 \times 5^2$, que en algún sentido, no se trata de un número grande.

Al combinar el teorema fundamental de la aritmética con resultados de otras operaciones o transformaciones se deducen resultados atrayentes, así es posible asegurar que no existen dos naturales a, bque satisfagan la relación $a^2 = 7 \times b^2$, fórmula que mezcla la propiedad de exponentes $(\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2$ o en general
$(\alpha\beta)^n = \alpha^n\beta^n$ con el hecho de que 7 no es el cuadrado perfecto de ningún número natural.

De hecho, tampoco existen naturales a, b que cumplan la relación $a^3 = 7 \times b^3$, ya que el siete no es cubo perfecto de ningún natural. Y así se pueden proponer infinitos ejemplos de igualdades absurdas.

Ejercicios:

En la tarea de clasificar a los números como buenos o malos, o también primos o compuestos, sirve acomodar en la memoria los criterios de divisibilidad. Criterios de la última cifra constatan la paridad o la divisibilidad por cinco, criterios como los de la suma de las cifras que sirven para examinar la divisibilidad por tres o nueve, criterios como el número que se configura con las dos o tres últimas cifras para ver la divisibilidad por cuatro u ocho. Su tarea consiste en estudiar estos criterios, sobre todo los de divisibilidad por los diez primeros primos y proponer ejemplos numéricos.

Aplique el teorema fundamental de la aritmética a los siguientes números: 245465, 3600, 1233, 56578, 768, 1000, 65465.

Revise en la literatura a su alcance el tema de La Criba de Eratóstenes y haga una lista de los números primos que aparecen entre los primeros cien números naturales.

Representar los siguientes naturales como el producto de primos: 124000, $(240)^5$, $(24+48)^2$, $63^3 \times 45^4 \times 72^2$, $63^3 + 45^4 + 72^2$, $(6^3 + 4^4 + 2^2)^3$, $(6^3 \times 4^4 \times 2^2)^3$.

1.2.4 Números compuestos

Un número primo solo tiene a un divisor menor que él y es el 1, un número compuesto siempre tiene al menos dos divisores diferentes. Los divisores propios de un número son menores o iguales a su mitad. Por ejemplo, ningún divisor de 100 es mayor que 50; ningún divisor de 360 supera al 180.

Resulta fastidioso calcular los divisores de un número por inspección y corazonada; el camino seguro es el de aplicar el Teorema Fundamental de la Aritmética y al tener todos los factores primos, formar todos los productos posibles de tales factores.

Los números compuestos abundan respecto de los primos, entre los cien primeros el 75% corresponde a compuestos, entre los primeros doscientos el 77% es de compuestos, al referenciar los mil primeros naturales, el 83,2% es la proporción de compuestos y entre los primeros dos mil, el 89,88% de números compuestos; sin embargo, la cantidad de números compuestos se equipara a la de números primos.

Hay tantos números compuestos como primos o como números pares o como impares; su cardinalidad que, por demás es infinita, se representa con $\aleph_0$.

La cantidad de primos, siendo infinita, es abundante en comparación con otros conjuntos igualmente infinitos como la de los cuadrados perfectos. Y curioso, de los cuadrados perfectos existen formas para ubicarlos en la recta numérica, se sabe de su ubicación, en cambio, de la colección de primos siendo en frecuencia más alta, dado uno de ellos, es imposible señalar su ubicación.

Ejemplo:

$1150 = 2 \times 5^2 \times 31$

En consideración a ello, sus divisores son: 2, $10 = 2 \times 5$, $50 = 2 \times 25$, $62 = 2 \times 31$, $155 = 5 \times 31$ y $775 = 25 \times 31$.

Ejercicio:

Aplicando el Teorema Fundamental de la Aritmética, determinar el conjunto de divisores de los siguientes números: 2250, 3000, 350, 1200, 1220 y 3530.

1.2.5 Números abundantes, escasos y perfectos

Se dice que un natural d es un divisor de otro número natural n si existe un número natural q tal que $n = dq$ y cuando $d < n$ se le llama divisor propio. Los divisores propios de cualquier natural n requieren de ser menores que la parte entera de la mitad de n.

Los divisores de 10 menores que él son $\{1, 2, 5\}$, los divisores de 12 menores que 12 forman el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, los divisores de 60 con la característica de ser divisores propios son $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30\}$. En apariencia, parece que, entre más grande es el número tiene mayor cantidad de divisores menores que él; lo cual es falso, ya que, por ejemplo, 20 es menor que 33; sin embargo, el conjunto de los divisores de 20 que es $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, tiene más elementos que el conjunto de los divisores de 33, conformado por $\{1, 3, 11, 33\}$.

Una manera sutil para determinar la divisibilidad de un número natural, es considerar y comparar con el mismo número la suma de todos sus divisores menores que el mismo número. Si la suma de las partes propias es mayor que el número, se dice que es abundante; si tal suma es menor, se aduce que el número es escaso o deficiente; y si la suma es igual, se dice que el número es perfecto.

Ejemplos:

Los divisores propios de 20 determinan el conjunto$\{1, 2, 4, 5, 10\}$ cuya suma es 22, entonces 20 es un número abundante superante; los divisores propios de 22 son $\{1, 2, 11\}$ cuya suma es 14, por lo cual, 22 es un número deficiente o escaso; los divisores de 28 son $\{1, 2, 4, 7, 14\}$ cuya suma es con exactitud 28, de modo que 28 es un número perfecto.

Esta temática deviene de la inquietud griega de estudiar los números compuestos, respuestas que subyacen en el tipo de números que se obtienen al sumar los divisores de cualquier número, excluyendo el mismo número. Los divisores propios de 6 son 1, 2 y 3 cuya suma es el mismo 6.

Este es el número perfecto más pequeño; el siguiente es el 28, pues $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ y para encontrar el siguiente se necesita un salto significativo para llegar a $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$ y para alcanzar al siguiente se tiene que avanzar hasta 8128. De allí, los saltos que se deben dar para encontrar los dos siguientes números perfectos se hacen abrumadores, ellos son 33550336 y 8589869056 y el que sigue, ya es un número con más de treinta cifras.

Hasta el momento, no se ha descubierto un número perfecto impar y se puede verificar que los encontrados hasta el momento, tienen la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$ con p primo y siempre que $(2^p - 1)$ también sea primo. Para $p = 2$, la fórmula bota al perfecto 6, con $p = 3$ se obtiene 28, con $p = 5$ se llega a 496. La fórmula falla, como se ha explicado, cuando $2^p - 1$ no es primo, hecho que ocurre con frecuencia, por ejemplo $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$.

Los números primos de la forma $2^p - 1$ se denominan primos de Mersenne en honor al matemático y fraile francés Marin Mersenne (1588-1648) (Clawson, 1999). Pero la fórmula también produce, como se ha expuesto con el ejemplo, números compuestos. Hacia 1992 se calculó el primo de Mersenne $2^{756839} - 1$ con el cual se reprodujo el número perfecto $2^{756838}(2^{756839} - 1)$ que se escribe con 455663 cifras, lo que requiere de al menos 144 páginas tamaño carta para su representación escrita en expansión decimal completa.

Como hasta el momento no se ha demostrado si los primos de Mersenne configuran un conjunto infinito, no es posible demostrar que existen infinitos perfectos pares. De modo que los griegos, organizaron una suerte de preguntas sobre las que ha progresado la ciencia y que en nuestros días siguen motivando al mundo académico.

1.2.6 Números amigos

Pitágoras, aquel hombre que tenía convencido a su séquito de que había nacido con un fémur de oro, respondió a la pregunta ¿Qué es un amigo? con la frase "El que es el otro yo mismo" y enseguida anotó "el que es el otro yo mismo como 220 y 284" y viene al caso porque la suma de los divisores del uno es igual al otro. Y como siempre, aparece la conjetura de que existen infinitos pares de números amigos.

Ejercicios:

Calcular el conjunto de los divisores de 124, 200, 206, 1004, 2356, 280 y 360; y determinar si es escaso, abundante o perfecto.

Proponga cinco parejas de números que rompan el paradigma de que entre más grande sean poseen mayor cantidad de divisores.

1.2.7 Máximo común divisor y Mínimo común múltiplo

Exceptuado el 1 que es un común divisor para todos los números naturales, dos o más números pueden poseer o no divisores comunes. Por ejemplo, los divisores comunes del 20 y el 36 determinan el conjunto $\{1, 2, 4\}$, el mayor de los cuales se denomina máximo común divisor.

Es poco práctico calcular el máximo común divisor de dos o más números por la vía de la intersección de los conjuntos formados por los divisores de cada uno; la eficiencia se obtiene al aplicar el Teorema Fundamental de la Aritmética, donde, escrito cada número como el producto de los factores primos, el máximo común divisor es el producto de los factores primos comunes a los dos, con el menor exponente. Una vía algorítmica elemental para calcular el máximo común divisor de dos números la estableció Euclides en sus Elementos.

La matemática se alimenta de sus propias teorías de forma involutiva y varios resultados de una rama atraviesan los dominios de otras ramas; tal es el caso de resultados del análisis en variable real que se consiguen desde el análisis en variable compleja.

Desde este ángulo, la identidad $\frac{(n(a,b),ab)}{(n,a)(n,b)} = \frac{(a,b)}{(n,(a,b))}$ en la que el símbolo (a,b) representa al máximo común divisor de los naturales (enteros) a y b se encuentra como una aplicación elemental de la teoría de grupos.

Entre miles de ejemplos que ilustran que se cumple la identidad, se encuentran los siguientes:

$$\frac{(102(25,100),2500)}{(102,25)(102,100)} = \frac{(25,100)}{\big(102,(25,100)\big)} = 25$$

$$\frac{(70(88,100),8800)}{(70,88)(70,100)} = \frac{(88,100)}{\big(70,(88,100)\big)} = 2$$

Si a y b son números naturales, existe un único natural d que es el mayor entre todos los divisores comunes de a y b, que se denota por $d = MCD(a,b)$;o de forma sintética, como $d = (a,b)$. Por ejemplo: $(8,4) = 4$, $(36,54) = 18$, $(12,13) = 1$. En este sentido, d es el máximo común divisor de dos naturales a y $b$si d es el número más grande posible que divide a ambos.

Cuando el máximo común divisor de los naturales a y b es 1, se dice que tales números son primos entre sí, coprimos o primos relativos. Dos naturales consecutivos son primos relativos, al igual que dos impares consecutivos, de este modo, $(25,27) = 1$ y $(111,112) = 1$, por ejemplo y en general se tiene $(n, n+1) = 1$ y $(2n+1, 2n+3) = 1$ para cualquier n.

El máximo común divisor también tiene un carácter seudo multiplicativo por cuanto $(na, nb) = n(a,b)$.

El proceso de encontrar el máximo común divisor de nos números está expuesto en los elementos de Euclides como un método de descenso finito. y parte de lo que se denomina el algoritmo de la división de Euclides (Euclides, 1994), en la que para dos números a y $b$siempre es posible encontrar naturales q y r tales que $a = bq + r$ siendo $0 \leq r < b$, con lo cual $(a,b) = (b,r)$.

Para a y b, naturales, las divisiones sucesivas proponen que

$a = bq_1 + r_1$ con $0 \leq r_1 < b$,

$b = r_1 q_2 + r_2$ con $0 \leq r_2 < r_1$,

$\vdots$

$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n$ con $0 \leq r_{n-1} < r_{n-1}$ y $r_{n-1} = r_n q_{n+1} + 0$, lo que indica que (a,b) es igual al último resto mayor que cero en la sucesión decreciente de residuos
$r_1 > r_2 > \cdots > r_n > 0$ y siendo $(a,0) = a$ para cualquier a, se consigue que $(a,b) = (b,r_1) = (r_1,r_2) = \cdots = (r_n,0) = r_n$. Esto ocurre por ejemplo con el cálculo del máximo común divisor entre 1830 y 750.

$(1830{,}750) = (750{,}330) = (330{,}90) = (90{,}60) = (60{,}30) = (30{,}0) = 30$ al efectuar las divisiones sucesivas.

De las divisiones correspondientes al descenso finito, se deduce por la vía de los remplazos, que si $d = (a, b)$, existen dos números enteros α y β que permiten escribir la combinación $d = a\alpha + b\beta$. Para el ejemplo precedente se tiene:

$(1830{,}750) = 1830(-9) + 750(22)$.

Cabe resaltar que el máximo común divisor como función binaria goza de mantener las propiedades conmutativa, asociativa y modulativa y en consecuencia se escribe $(a, b) = (b, a)$, $\big(a, (b, c)\big) = \big((a, b), c\big)$ y $(a, 0) = a$ para cualquier terna de números naturales.

Mínimo Común Múltiplo

Todo número natural a genera una colección infinita de sus múltiplos: $a \times 1,\ a \times 2,\ \cdots,\ a \times n, \cdots$ Si $a = 3$ tal colección es $3\mathbb{N} = \{3, 6, 9, 12, \cdots\}$, por proponer un ejemplo. Dos naturales a y $b$tienen infinitos múltiples comunes; el menor de todos ellos se denomina mínimo común múltiplo y se escribe $MCM(a, b) = [a, b]$.

Por ejemplo $6\mathbb{N} = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \cdots\}$ y $8\mathbb{N} = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, \cdots\}$ y el conjunto de los múltiplos comunes es $\{24, 48, 72, 96 \ldots\}$, en consecuencia $[6{,}8] = 24$.

Cuando a y b son coprimos, el mínimo común múltiplo es el producto de ellos ab. Como en el cálculo de máximo común divisor, aparte del recurso de la intersección de conjuntos, existen dos vías para calcular el mínimo común múltiplo, una de ellas utiliza el teorema fundamental de la aritmética y la otra la relación que existe de este elemento con el máximo común divisor y que se hace a través de la fórmula $[a, b] = \frac{ab}{(a,b)}$. Con esto se tiene $[34{,}60] = 1020$, $[18{,}45] = 90$.

La otra vía, es usar el teorema fundamental de la aritmética y teniendo la descomposición de cada uno de los números en sus factores primos, el mínimo común múltiplo es el producto de los factores comunes y no comunes con mayor exponente. Para el primer ejemplo expuesto arriba, se tiene $34 = 2 \times 17$ y $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, por ello, $[34{,}60] = 2^2 \times 3 \times 5 \times 17 = 1020$.

En el sentido operatorio de esta aplicación binaria, también goza de mantener las propiedades conmutativa, asociativa y modulativa y de este modo se escribe en general que $[a, b] = [b, a]$, $\big[a, [b, c]\big] = \big[[a, b], c\big]$ y $[a, 1] = a$ para cualquier terna de números naturales.

Ejemplo:

$1000 = 2^3 \times 5^3$ mientras $1600 = 2^6 \times 5^2$; por lo cual, su máximo común divisor es $2^3 \times 5^2$, es decir $8 \times 25 = 200$.

Lo anterior se escribe como: $MCD(1000,1600) = 200$. Se puede verificar que $MCD(270,390) = 30$ y $MCD(273,820) = 1$.

Ejercicios:

Calcular el máximo común divisor de los siguientes pares de números: $(1200,46)$, $(120,464)$, $(440,560)$, $(1440,560)$, $(444,568)$, $(1444,2568)$ y $(424,68)$.

Escoger al menos cinco pares números de la lista 3, 5,15, 24,36,60,75,80, 144, 56 y 120 y calcular su máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Escoger al menos cinco ternas números de la lista 30, 50,155, 245,360,600,750,808, 144, 56 y 128 y calcular su máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Verificar mediante cinco ejemplos que, para los naturales a y $b$se cumple la relación $(a, b) = (a + b, [a, b])$.

La suma de dos números es 27 y su mínimo común múltiplo 60; calcular tales números.

1.2.8 Números primos relativos

Si el máximo común divisor de dos números es 1, esos números son primos relativos, coprimos o primos entre sí. Es el caso que un número n y su sucesor $n + 1$, siempre son primos relativos; igual que dos impares consecutivos $2n - 1$ y $2n + 1$, son primos entre sí; asimismo, son números relativos, pares de números de la forma $4n - 1$ y $4n + 1$.

Existe una función, denominada Función de Euler que cuenta la cantidad de primos relativos de un número n, menores que tal n. Note que NO tiene sentido que sean mayores que n, pues, de antemano se sabe que son infinitos.

Por ejemplo, los primos relativos de 10 menores que el mismo 10 son $\{1,3,7,9\}$; esto es, son “cuatro” números; hecho que se escribe como $\varphi(10) = 4$.

Esta función se calcula de manera simple con el uso del Teorema Fundamental de la Aritmética. En efecto, suponga que $n = p^a q^b r^c$, donde p, q y r números primos. Esta es una suposición puesto que n puede expresarse como producto de más o menos primos.

Para el ejemplo supuesto, la fórmula expresa que:

$$\varphi(n) = n\frac{(p-1)(q-1)(r-1)}{pqr}$$

Ejemplos:

Dado que $20 = 2^2 \times 5$, se tiene $\varphi(20) = \frac{20\times1\times4}{2\times5} = 8$ y además los primos relativos de 20 son $\{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$.

Vale destacar que la función de Euler no identifica los primos relativos, solo determina cuántos son.

Dado que $8085 = 3 \times 5 \times 7^2 \times 11$, se tiene que $\varphi(8085) = \frac{8085\times2\times4\times6\times10}{3\times5\times7\times11} = 3360$. Imagínese la cantidad de tiempo invertido, calculando uno a uno todos los primos relativos de 8085.

Si p es un número primo, todos los números naturales anteriores son primos relativos con él; eso está en su naturaleza, por ello $\varphi(p) = p - 1$. Su recíproco, sirve de test, aunque costoso: es decir, si $\varphi(n) = n - 1$ es porque n es un número primo, pero que tal determinar manualmente que $\varphi(200191) = 200190$ con lo cual es posible garantizar que 200191 es un número primo.

La función phi de Euler tiene un carácter multiplicativo cuando dos números son primos entre sí. Si $MCD(a, b) = 1$, entonces $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$.

Ejemplo:

$\varphi(56) = \varphi(8 \times 7) = \varphi(8) \times \varphi(7) = 4 \times 6 = 24.$

1.2.9 Función φ de Euler

La función de Euler $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cuenta para cada n, la cantidad de coprimos no mayores que $n - 1$ y, como muchos objetos matemáticos, posee un comportamiento extraño y misterioso que atrae su estudio. Tiene una conexión directa con el teorema fundamental de la aritmética y por ello con el concepto de divisibilidad.

Por su simple definición $\varphi(p) = p - 1$ cuando p es un número primo, igualdad que convierte a la función en un pésimo test de primalidad. Si n es compuesto, por el teorema fundamental de la aritmética se escribe la descomposición de tal número en sus factores primos $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ y con ello se encuentra una forma práctica de calcular los valores de la función como $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$.

Una lista de algunos valores es:

$\varphi(2) = 1$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(8) = 4\varphi(10) = 4$, $\varphi(12) = 4$, $\varphi(20) = 8$, $\varphi(26) = 12$, $\varphi(28) = 12$, $\varphi(33) = 20$, $\varphi(60) = 16$.

Estos valores acentúan el carácter extraño de esta función con sentido multiplicativo. Sorprende aún más, que para infinitos números, se prevé un divisor de su valor. En efecto, si $n = m^s - 1$, el natural s es un divisor de $\varphi(m^s - 1)$ y si $n = m^s + 1$, el número par $2s$ es un divisor de $\varphi(m^s + 1)$ y en consecuencia, 3 divide a $\varphi(3^3 - 1)$ y 6 a $\varphi(3^3 + 1)$; 4 divide a $\varphi(5^4 - 1)$ y 8 a $\varphi(5^4 + 1)$, 5 divide a $\varphi(2^5 - 1)$ mientras 10 es un divisor de $\varphi(2^5 + 1)$.

La demostración de estos resultados atraviesa la teoría de automorfismos y endomorfismos de grupos cíclicos y se escapa al objetivo de este texto.

Al combinar estos resultados con la teoría de números primos se tiene de inmediato que si $m^s - 1$ es un número primo, entonces s es un divisor de $m^s - 2$ ya que en este caso $\varphi(m^s - 1) = m^s - 2$ y también, cuando $m^s + 1$ es número primo, $2s$ es uno divisor de $\varphi(m^s + 1)$ puesto que para el caso $\varphi(m^s + 1) = m^s$. Así, para infinitos primos de la forma $n^2 - 1$, para los cuales se tiene que 2 es un divisor de $n^2 - 2$ como ocurre con los primos de la forma $n^2 + 1$, y para ellos se obtiene que 4 es un divisor de n^2.

Por ejemplo $4^2 + 1$ es primo y con ello, como es natural, 4 divide a 16; $14^2 + 1$ es primo y por ello, 4 es un divisor de 14^2.

Estas aserciones pueden leerse de manera recíproca; es decir, si s no divide a $m^s - 2$ se tiene que $m^s - 1$ no es un número primo.

Por ejemplo, 4 no divide a $2^4 - 2$ y por ello $2^4 - 1$ no es primo; igual, si $2s$ no es divisor de m^s, $m^s + 1$ no es primo tal y como ocurre con 14 que no divide a 6^7 y por ello $6^7 + 1 =$ 279937 no es primo. En efecto, 279937=7$^2 \cdot 29 \cdot 197$.

Ejercicios:

Calcular la función "phi de Euler" para los siguientes enteros: 123, 245, 111, 120, 100 y 1000.

Calcular la función de Euler para los siguientes productos de números 11×12, 23×24, 23×25, 35×37 y 135×137.

Argumentar la razón por la que todos los valores de la función phi de Euler siempre es un número par, excepto en el caso de $\varphi(2) = 1$.

A lo largo del texto aparecerán y han aparecido nombres como Euclides, Alwarizmi, Leonhard Euler, Carl Gauss, Eratóstenes. Buscar alternativas biográficas de estos gigantes y lo atinente al aporte que hicieron a las Matemáticas.

1.2.10 Descomposición en factores primos

Escribir cualquier número n en la única forma que existe como producto de sus factores primos, es lo que en la escuela se llama, la descomposición en factores primos, tarea en la que resulta de utilidad poner en uso los criterios de divisibilidad. Esta descomposición resulta ser la radiografía de cada número, su impronta, su firma y es el procedimiento que hace práctico el teorema fundamental de la aritmética Esta tarea construye una lista números primos para los cuales el número resulta divisible y con ello la lista de sus divisores.

Desde la practicidad, la idea es efectuar la división reiterada de los cocientes que van resultando a partir del número inicial, entre la lista de primos tomada de manera ordenada y cuya división es exacta.

Ejemplo:

El número 245644 es divisible por cada primo del conjunto $\{2,7,31,283\}$ y por ningún otro; de modo que este conjunto se convierte en el distintivo de tal número.

La tabla asociada al procedimiento reiterativo que se debe efectuar, es la siguiente:

Cociente	245644	122822	61411	8773	283	1
Primo	2	2	7	31	283	

Con esto se tiene que $245644 = 2^2 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 283$ y aparece el vestigio de la necesidad de tener a la mano una lista de primos y al tiempo, criterios de divisibilidad para cada uno de ellos, en cuanto sea posible.

1.2.11 Densidad de los números primos

Los números primos generan a todos los números naturales; es decir, con el puñado de primos que hay en $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, se tiene a todos, siendo que, como fórmula de constitución de los mismos, se adopte a la operación de multiplicación.

Se ha indicado en los párrafos precedentes que entre más grande sea un número es mayor la posibilidad de encontrar un divisor diferente de 1 para tal número y en consecuencia, se reduce la posibilidad de que sea primo. En términos técnicos, la densidad de primos disminuye al avanzar por la secuencia de los números naturales, se hacen escasos, pero siempre aparecen; por lejos que se transite por el camino de los números naturales, aparecerá un primo en el momento menos esperado.

Euclides, el gran Euclides, demostró por el método de la reducción al absurdo que el conjunto de los números primos es infinito; es decir, no existe el primo que sea más grande que todos. El esbozo de la demostración está en pensar que el número de primos es finito $p_1,\, p_2,\, p_3, \ldots,\, p_n$ y ver que el sucesor del producto de todos ellos $p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 1$ no es divisible por ninguno de la lista y por ello, el mismo número debe ser primo o debe haber un primo por fuera de la lista que lo divida. Con esta idea en mente, se obtiene como conclusión que no se puede pensar en tener una lista de todos los primos y en consecuencia, se trata de un conjunto infinito que al poderse ordenar, es susceptible de enumeración con lo que además se tiene que existen tantos primos, como números naturales.

Al respecto, se cuenta que Gauss en torno de sus quince años de edad, estableció que la función de densidad de los números primos $\pi(n)$ que cuenta la cantidad de primos menores que n. Dentro de la lista natural de los números naturales, se acerca de manera asintótica a la función $\frac{n}{Ln(n)}$ y en consecuencia se convierte en una buena fórmula de aproximación. Así, entre el uno y el mil hay aproximadamente 145 primos, hasta el millón se encuentran 72382 primos. Valores que son cada vez más cercanos al valor real y que hacen ver como porcentualmente hay más números compuestos que primos. Hasta el millón, el 92,76% de números es compuesto y hace prever que en la lista infinita de naturales, la cantidad de primos se acerca en su promedio, de manera porcentual, a cero.

El hombre ha buscado fórmulas algebraicas con la capacidad de generar números solo primos, una de las más famosas es $p(n) = n^2 + n + 41$ descubierta por Leonhard Euler. Desde 1 hasta 39, la expresión genera sólo primos, se salta, algunos; pero a partir de $n = 40$ empiezan a aparecer números compuestos, a pesar de que la fórmula produce infinitos primos. Los primeros quince primos que se producen con esta expresión cuadrática son:

{43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281}.

Cuando MCD$(a, b) = 1$, la progresión $p(n) = an + b$ contiene infinitos primos, pero también infinitos compuestos.

Ejemplo:

Algunos términos de la progresión $p(n) = 4n + 15$ son:

$\{19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 59, 63, 67, 71, 75\}$ y entre ellos solo hay siete primos.

Ejercicios:

Determinar la cantidad de números primos generados por las progresiones que siguen, tomando como base los quince primeros términos de las mismas: $p(n) = 8n + 15,$ $p(n) = 3n + 5,$ $p(n) = 4n + 1,$ $p(n) = 5n + 6,$ $p(n) = 2n + 9$ y $p(n) = 6n + 5.$

Escribir una expresión algebraica de segundo grado y determinar con ejemplos, si ella contiene al menos dos números primos.

Cazar primos grandes, es deporte preferido por los matemáticos, hasta 1985 se tenía que el número $2^{216091} - 1$ era el mayor primo, número que tiene 65050 cifras y en el que un escolar, para escribirlo se gastaría unas 36 páginas. Este número es uno de los conocidos primos entre los números de Marín Mersenne. El 23^o número de Mersenne que es primo, se descubrió en 1963 y corresponde al número $2^{11213} - 1$ y su aparición suscitó la celebración de imprimir con él sellos postales. El 34^o primo de Mersenne es $2^{1257287} - 1$ y tiene no menos de 378632 cifras que requiere de un cuaderno de 120 hojas, 240 páginas atiborradas con sus cifras.

1.2.12 Números primos gemelos

Dos números primos son gemelos si entre ellos se entromete solo un número par; 3 y 5 son gemelos, 17 y 19 también, y andando un poco más lejos, 1000000061 y 1000000063 también lo son. Sorprende que haya primos gemelos más allá de los cien millones y es una conjetura conocida de que existen infinitos pares de primos gemelos.

Las conjeturas son sentencias de las que no se ha probado su veracidad; aquí se han mencionado algunas como la de que existen infinitos pares de números amigos. En 1742 Christian Goldbach envió una carta a Leonhard Euler en la que comentaba que todo número par mayor que 2 es la suma de exactamente dos números primos. Tres siglos y pico más tarde, ese aserto aún no ha sido demostrado.

Ejemplo:

$50 = 19 + 31$, $100 = 29 + 71$.

Ejercicios

Escribir al menos diez números como la suma de dos primos.

1.2.13 Triadas pitagóricas

Pierre de Fermat en 1637 realizó una conjetura que con métodos modernos fue demostrada por Andrew Wiles en 1995; la misma establece que para todo n mayor que 2 NO existen tres enteros x, y, z tales que $x^n + y^n = z^n$. De este modo, por ejemplo, un cubo, no puede escribirse como la suma de dos cubos.

Al fijarse bien, la conjetura proviene del famoso Teorema de Pitágoras en el que es válido asegurar que $x^2 + y^2 = z^2$, teorema referido a las áreas de los cuadrados, construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Los babilonios, siglos antes que Pitágoras y Euclides, proveyeron una forma creativa de producir triadas pitagóricas (x, y, z) con la capacidad de satisfacer la relación $x^2 + y^2 = z^2$.

Se toma enteros $a > b$ y se llama $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$ y $z = a^2 + b^2$, con ello se configuran infinitas triadas pitagóricas como $(3, 4, 5)$, $(7, 24, 25)$ o $(107, 84, 205)$.

Lo asombroso de este resultado, está en que no existe otra forma de construir una terna pitagórica fundamental; esto es, una terna (x, y, z) con los números naturales más pequeños, tal que, a partir de ella, triadas de la forma (nx, ny, nz) también son pitagóricas. Así las cosas, una triada pitagórica fundamental, genera infinitas triadas pitagóricas. Por ejemplo, a partir de $(3,4,5)$ se consigue la inmensa estela de triadas $(6,8,10)$, $(9,12,15)$, $(12,16,20)$,$\cdots$

Con sentido utilitario, se asegura que albañiles y carpinteros utilizan cuerdas con testigos en las dimensiones 3,4 y 5 como sustituto de las escuadras, cuando requieren construir un triángulo rectángulo en actividades de su oficio.

Ejercicios:

Escribir cinco triadas pitagóricas siguiendo el método de los babilonios.

A partir de triadas pitagóricas fundamentales, generar al menos cinco triadas.

1.3 SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

John Allen Paulus (Paulus, 1998), matemático norteamericano, llama anumerismo a la incapacidad de manejar con holgura los conceptos fundamentales del número. Estos conceptos que se encierran de manera global en la matemática atormentan y frustran a los ciudadanos y crean consecuentes aberraciones en los escolares. Por esta y otras razones ha aparecido en el ámbito académico una necesidad de organizar las formas de transmisión del conocimiento matemático que en el mundo académico se denomina Educación Matemática, compendio de métodos, investigaciones, indagaciones, búsqueda de recursos y mediadores, estudios de clase, estudio comparativo de métodos, etc., para hacer más enriquecedor y atractivo el aprendizaje de las matemáticas.

De otro lado, la actividad matemática es gratuita y gratificante; gratuita, en el sentido de la libertad que exige enfrentarse a un problema; y gratificante, porque genera sentimientos de alegría, autosuficiencia y confianza en sí mismo; valores individuales de los que requiere el humano para intentar trascender por el mundo.

1.3.1 Concepción de problema

En el modelo creado por George Polya, con agregados de Alan Schoenfeld y otros y que se ha constituido en la corriente denominada Planteamiento y Resolución de Problemas, como una estrategia de importancia para crear conocimiento matemático, se advierte que, un problema es una situación que se puede resolver por diversos caminos y con diferentes ingredientes. Esto lo estudia la heurística que es el conjunto de técnicas o métodos para resolver un problema. La palabra heurística es de origen griego: *εὑρίσκειν* que significa "hallar, inventar". La heurística es vista como el arte de inventar con la intención de procurar estrategias, métodos, criterios, que permitan resolver problemas a través de la creatividad, pensamiento divergente o lateral. También, se afirma que la heurística se basa en la experiencia propia del individuo y en la de otros para encontrar la solución más viable a un problema.

El compendio heurístico se alcanza de manera individual, estudiando los teoremas, definiciones, conceptos, principios y esencialmente, el método y significado de los objetos matemáticos, aparte de las estrategias coleccionadas en los trabajos de otros. En este sentido, los ejemplos son adecuadas ilustraciones que animan a estudiar otros problemas.

Ejemplo:

Piense que en una pequeña granja existen dos tipos de animales, entre marranos y gallinas, y que sumadas sus cabezas se suma 19 individuos, pero si se suman sus patas (extremidades inferiores), se establece en 60 el número de estos apéndices. Se desea establecer el número de gallinas y el número de marranos que tiene la granja.

En la heurística del matemático, es decir, un matemático que tiene como instrumento a mano las igualdades, las ecuaciones, los sistemas de ecuaciones, las identidades, de inmediato convierte el problema en un sistema de

ecuaciones:
$x+y=19$ y $4x+2y=60$ representando con x el número de marranos y con $y$el número de gallinas; por ello, la segunda ecuación cuenta con $4x$ la cantidad de patas que aportan los cuadrúpedos y con $2y$ las patas que aportan los seres bípedos.

Llegar al sistema y tener la solución es todo uno; pues de la primera se tiene $y=19-x$ que al ponerla en la segunda ecuación produce $4x+2(19-x)=60$ y con esto $4x-2x=60-38$ o mejor $2x=22$ que en definitiva asegura que $x=11$. Si, en la granja hay 11 marranos y por ello tan solo 8 gallinas. Y a volar. Deténgase, esta forma de proceder es recurrente, frecuente en los matemáticos, está en el alma de su heurística, todo lo reducen a igualdades y por ello se ve simple y en apariencia, simula como el único camino de solución. Cuidado, examine la heurística del ingeniero de sistemas. A ellos les encanta las tablas, como la siguiente, en la que se ha fijado el número de animales en 19 y se va variando el número de extremidades que aportan, cada tipo.

La Tabla 5. establece unas consecuencias naturales de acción, al fijar la existencia de individuos en 19, se ve en la medida en que se quita una gallina y se mete un cerdo, el número de extremidades inferiores aumenta en 2, por ello, la fila final es una secuencia ordenada de números pares. El resto es solo echar ojo, al ver el 60, se consigue como consecuencia que se corresponde en la columna con los valores de 11 cerdos y 8 gallinas. Y arreglado el asunto. ¡Un momento! También se puede elaborar una tabla con un número fijo (constante) de extremidades inferiores.

Tabla 5. Ejemplo sobre el número de extremidades de 19 animales entre bípedos y cuadrúpedos

Cerdos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Gallinas	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
Total extremidades	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64

La Tabla 6. propone unas acciones naturales simples, al fijar el número de patas en 60, por cada cerdo que se quita en la tabla se deben introducir 2 gallinas. Claro, las gallinas tienen la mitad de patas que un cerdo y cincuenta veces menos patas que un ciempiés. Y otra vez, a puro ojo, se ve que la solución se fija por la última columna en la que el 19 está en la columna en la que aparecen 11 cerdos y 8 gallinas.

A cualquiera se le puede ocurrir que los animales (al menos los de esta granja) pueden obedecer órdenes, de modo que, a la voz, “levanten las dos manos” (Por decir, levanten dos patas), en el aire se verían 38 patas (Porque hay 19 animales) y en consecuencia sobre el suelo tan solo 22 y todas son de marranos, pues las de las gallinas están en el aire. Así, las 22 patas son de los 11 marranos y por ello hay en la granja, también 8 gallinas. Esta es la heurística de un tipo práctico.

Tabla 6. Ejemplo número de animales entre bípedos y cuadrúpedos cuyas extremidades sumen 60

Cerdos	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Gallinas	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
Total de animales	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Entre los métodos heurísticos de los estadistas aparece el promedio; la verdad, casi todo quieren resolverlo con promedios. Si en la granja se tuvieran tantas gallinas como cerdos, el promedio de patas es 3. En efecto, si n es el número de gallinas y de cerdos, el promedio de patas es: $\frac{4n+2n}{2n} = 3$

Si el promedio fuese mayor que 3, se estaría frente al caso en que hay mayor cantidad de cerdos y, si el promedio fuese menor que 3, predominarían las gallinas. Con esto en mente, se ve que el promedio según los datos es $\frac{60}{19} \approx 3{,}15789474\cdots$; por ello, hay más cerdos que gallinas.

En relación con los datos, al aumentar una gallina, el número de animales aumenta en uno, pero el número de patas aumenta en dos. Al hacer esta pequeña variación indicada, causada por el ingreso de una gallina, el promedio cambia a $\frac{62}{20} = 3{,}1$ que sigue siendo mayor que tres. Al ingresar una nueva gallina, el promedio se modifica a $\frac{64}{21} \approx 3{,}04761905$ y solo, desde este momento, ingresando una nueva gallina se tiene como promedio $\frac{66}{22} = 3$.

En este momento, solo en este momento, siendo que solo se han ingresado gallinas a intervenir en el promedio, se tiene que hay tantas gallinas como cerdos. Siendo 22 el número de individuos en el momento, originalmente se tenían 11 cerdos y con ello 8 gallinas.

En la heurística del tipo práctico, si se pidiera que los animales levanten cuatro patas, quedaría faltando en el aire 16 apéndices; pues, se esperaría contar en el aire 76 miembros, pero solo se ven 60, que se corresponden con las 8 gallinas que no pueden hacerlo porque solo tienen dos patas.

¿Cuál de las soluciones es la mejor? ¿Cuál la más linda? Encanta la que emplea el uso de los promedios, pero la belleza y su atractivo va en gustos.

Para enriquecer la heurística como característica individual y personal y siendo que la actividad matemática no solo consiste en emplear y mejorar la fluidez algorítmica de las operaciones, sino también, en estimar, clasificar, comparar, medir, escoger, seleccionar, aproximar, cuantificar,⋯; enseguida se proponen algunos principios matemáticos clásicos.

1.3.3 Algunos principios de la matemática

Entre cinco números naturales siempre es posible escoger 3, cuya suma, es divisible por 3. Vale la pena recordar que el criterio de la suma de las cifras asegura que un número es divisible por tres si la suma de sus cifras es cero o divisible por tres. Por ejemplo, 111 es divisible por 3 porque $1+1+1=3$. Si el azar, le escoge los números $17, 78, 143, 97$ y 200, de inmediato se ve que el número $17+143+200=360$ es divisible por 3.

¿Cómo escogerlos? La razón indica que al dividir por 3, los números dejan residuo 0, 1 o 2 y siempre es posible escoger tres números cuyos residuos sumen un múltiplo de 3. Hay cinco números y tres posibilidades (cinco palomas y tres nidos) y diversas posibilidades de ubicación de esos números en concordancia con sus residuos; algunas de ellas se indican en la Tabla 7.

Tabla 7. Casos de números que al dividirlos por 3 tiene residuo 0, 1 o 2

	Caso 1	**Caso 2**	**Caso 3**	**Caso 4**	**Caso 5**	**Caso 6**	**Caso 7**	**Caso 8**	**Caso 9**
Residuo 0	xxx	xx	x	x		xxx	xx	x	xx
Residuo 1	x	xx	x	xxx	xxx	xx	xxx	x	
Residuo 2	x	x	xx	x	xx			xxx	xxx
Escogencia	0-0-0	0-1-2	0-1-2	1-1-1	1-1-1	0-0-0	1-1-1	0-1-2	2-2-2

La última fila indica que los números se escogen por su residuo; así, la escogencia 0-1-2 advierte que hay que escoger uno que genere residuo 0, otro que produzca residuo 1 y el último que tenga residuo 2. La resolución del problema obedece a la aplicación de un método llamado el principio del palomar, el cual asegura que si hay n nidos, pero en el cielo vuelan más de n palomas, en la noche en algún nido hay al menos 2 palomas. En la Tabla 7. no aparecen todas las posibilidades; una que no aparece, por ejemplo, es que las cinco palomas duerman en el mismo nido.

En concordancia con este método es que se pueden afirmar asertos como que, entre tres individuos, siempre hay dos que tienen el mismo sexo; que en un regimiento de 366 soldados hay al menos dos que cumplen años el mismo día; que entre seis de las nueve cifras de nuestro sistema decimal siempre es posible escoger dos con un producto mayor que diez; o que en un grupo de más de once personas, siempre hay dos cuya última cifra de su cédula coincide.

En la técnica del Planteamiento y Resolución de Problemas se hace menester explicar algunos principios de la matemática. Existen dos principios que los escolares usan poco porque los desconocen. Allí también cabe el anumerismo, no solo en la incapacidad de referir y relacionar los números sino en el desconocimiento o no uso de las reglas, propiedades y principios que tienen los números y que los maestros no explican, muchas veces por desconocimiento. Y con esto se cae en el carácter mítico de la enseñanza matemática en el que se propaga la creencia de que los problemas difíciles o complicados solo los puede resolver el maestro. Los dos principios de los que se habla aquí, son el Principio del Palomar y el Principio Fundamental del Conteo; principios a los que los maestros generalmente no acuden, posiblemente por desconocimiento o por asumir que son de difícil comprensión.

1.3.4 Principio del palomar o de Dirichlet

El principio del palomar o de Dirichlet (Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)) es simple de formular, ya se expuso antes; está ligado a la lógica y no necesita demostrarse por lo obvio que es. A pesar de su sencillez, el principio del palomar es una herramienta poderosa dentro de la combinatoria, con aplicaciones en campos tan diversos como la teoría de grafos, la geometría, el análisis matemático, la teoría de números, las ciencias de la computación o en el planteamiento y resolución de problemas.

El principio del palomar dice lo siguiente: si hay más palomas que palomares, alguno de los palomares deberá contener por lo menos dos palomas. En general, podemos hablar de objetos y cajas donde guardar estos objetos.

A continuación, se esbozan ejemplos sencillos de aplicación de este principio a situaciones corrientes.

Ejemplos:

Probar que entre más de 750 personas, siempre hay al menos dos que su primer nombre inicia y finaliza con las mismas letras, como decir Constanza y Carlota, o Fernando y Federico.

Solución:

Aplicando el principio del palomar, el número de personas se considera como el conjunto de palomas y los nidos el conjunto de las posibles parejas de letras que son la combinación de la letra inicial y final de los nombres de las mismas personas. Siendo que hay 27 letras en el alfabeto hay $27^2 = 729$ pares de combinaciones posibles, desde la (a, a), (a, b),(a, c),$\cdots$, hasta la (z, z) que configuran el total de nidos. Como hay más palomas (personas) que nidos (pares de letras), entonces al menos dos personas deberán compartir la primera y la última letra de su nombre.

Probar que en una fiesta siempre hay dos personas con el mismo número de amigos entre los invitados a esa misma fiesta.

Solución:

En este caso, se pude considerar que las personas son las palomas y las cantidades de amigos los palomares.

Suponga que, a esa fiesta han asistido 50 personas (igual si fuesen n personas). Si todas las personas de la reunión tienen al menos un amigo, cada una de esas 50 personas pueden tener entre un (1) amigo, ya que todas tienen al menos un amigo, y 49 amigos, ya que suponemos que "cada persona no es amiga de sí misma".

Aplicando el principio del palomar existen dos personas con el mismo número de amigos, por el simple hecho que $50 > 49$. ¡Un momento! A las fiestas suelen ir individuos solitarios, así, si hubiese personas en la fiesta que no tienen ningún amigo, por ejemplo 13 en este ejemplo, se aplica el razonamiento anterior con las 37 personas restantes, que ahora pueden tener entre 1y 36 amigos.

Momento de la escena del camarote de la divertida película "Una noche en la ópera", de los Hermanos Marx, en el que hay ya nueve personas en el camarote: siempre que haya 9 personas de edades comprendidas entre 18 y 58 años. Demostrar que es posible elegir dos grupos de personas tal que las sumas de las edades de las personas de cada grupo sean iguales.

Solución:

Vale recordar que dado un conjunto de n objetos, existen 2^n subconjuntos. Así las cosas, aparecen 2^9 grupos de personas, es decir 512 que son, para el caso, las palomas. Ahora, como las edades de las personas de la reunión están comprendidas entre los 18 y los 58 años, las sumas de las edades de cualquier subconjunto de personas están comprendidas entre $18 \times 1 = 18$ para un grupo de una persona con la menor edad posible y $58 \times 9 = 522$ años para el máximo grupo de nueve personas con la edad máxima; por ello existen $522 - 18 = 504$ posibles sumas, que vienen a convertirse en los nidos del problema. De nuevo $522 > 504$, más palomas que nidos. Simple, siempre habrá al menos dos grupos de invitados cuyas edades sumen igual.

Sin embargo, podría ocurrir que en esta conclusión, consecuencia del principio de Dirichlet, hubiese alguna persona que estuviese siendo considerada a la vez en esos dos subconjuntos que existen. Si esto ocurriese, nada más que eliminar a esa persona de cada uno de los dos subconjuntos y los dos nuevos subconjuntos siguen cumpliendo la propiedad de que la suma de las edades de sus miembros es la misma, ya que, al eliminar a la misma persona de ambos, se quita el mismo número a las sumas de las edades y se continúa manteniendo la igualdad.

Estos ejemplos sencillos hacen entender la fuerza del principio. Lo interesante es que se puede aplicar a diferentes situaciones y constituye una potente herramienta en matemáticas.

1.3.5 Aplicación del principio del palomar a la teoría de números

El primer matemático en utilizar el principio dentro de su investigación fue el matemático prusiano Gustav L. Dirichlet (1805-1859); lo aplicó para demostrar un resultado de aproximación de números irracionales mediante racionales. En particular, se pueden demostrar muchos resultados de teoría de números haciendo uso del principio del palomar.

Recuerde que el principio dice que si en un palomar constituido por n nidos habitan más de n palomas; entonces, en el palomar, por las noches, en algún nido dormitan al menos dos palomas.

Con tan poco presupuesto se logran demostrar resultados dentro del sistema de los números enteros que son llamativos. Aquí se prueban, como ejemplo dos de ellos.

Primero. El producto de tres números naturales consecutivos es divisible por seis.

En efecto, $6|n(n+1)(n+2)$ ya que entre tres números consecutivos aparece al menos un número par y exactamente un número divisible por tres, es decir $2|n(n+1)(n+2)$ y $3|n(n+1)(n+2)$ y como $M.C.D(2,3)=1$ se tiene que su producto es divisor de tal número, esto es $6|n(n+1)(n+2)$.

De hecho, existe la tentación de aplicar el principio de inducción matemática para demostrar este hecho mientras el ejemplo es un indicio de demostración directa al que se le puede sacar más provecho puesto que si de los tres números consecutivos el primero es un número par, en la terna consecutiva figuran dos pares y un impar y entre los dos pares uno es múltiplo de 4 y en consecuencia su producto es múltiplo de 8 y como además, uno de ellos es múltiplo de 3 su producto también lo es. Con todo esto se tiene que el producto de tres naturales consecutivos siendo el primero de ellos par es múltiplo de 8 y de 3 y dado que $M.C.D(3,8)=1$ se concluye que $2n(2n+1)(2n+2)$ es divisible por 24 $\forall n \in \mathbb{N}$.

Segundo. El hecho de establecer que $\forall n \in \mathbb{N}$ y para cualquier par de números enteros a y b se tiene que $a-b$ es un divisor de $a^n - b^n$, brinda la posibilidad de demostrar una infinidad de casos de divisibilidad, de manera directa; por ejemplo, si $a = 2^3$ y $b = 1$ se tiene de inmediato que todos los números de la forma $8^n - 1$ son divisibles por 7, los números de la forma $9^n - 1$ son divisibles por 8, los de la forma $1000^n - 1$ son múltiplos de 999 y así puede procederse para infinitos casos.

Ejemplos:

Considere un conjunto arbitrario de 47 números, entonces existen al menos dos cuya diferencia es divisible por 46.

Solución:

Se recuerda el caso de los cinco números naturales de los cuales siempre hay tres cuya suma se deja dividir por tres. Aquí también, hay 46 nidos conformados por los restos de dividir cualquier número por 46 y que son los restos $0, 1, 2, \cdots, 45$ y como se tienen 47 números que son las palomas, hay al menos dos que duermen en el mismo nido. La diferencia entre esas dos deja residuo "cero" al dividirse por 46.

Este simple resultado invoca un resultado general que sería así: en un número arbitrario de n números naturales, existen al menos dos cuya diferencia es divisible por $n-1$.

Probar que para 100 números enteros $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ siempre existen dos enteros positivos r y s tales que $0 < r < s \leq 100$ de modo que la suma:

$a_{r+1} + a_{r+2} + a_{r+3} + \cdots + a_s$ es múltiplo de 100.

Solución:

Como los números son enteros y arbitrarios, pueden ser negativos, positivos e incluso aparecer más de una vez en la lista, lo que sí, es que se enumeran de modo efectivo; es decir, una lista es algo así como: $a_1 = 5674$, $a_2 = -4547$, $a_3 = -8945478$,
$a_4 = 108, \cdots, a_{99} = 83$, y $a_{100} = -834398$.

La afirmación es sorprendente, pero la simpleza de la argumentación de su veracidad, con la aplicación del principio del palomar, sorprende aún más, sobre todo, al notar que la suma $a_{r+1} + a_{r+2} + a_{r+3} + \ldots + a_s$ es la suma ordenada por la enumeración establecida.

Es suficiente considerar las sumas parciales de la secuencia finita que sigue, de las cuales hay exactamente 100 que se consideran las palomas: $S_m = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m$.

Si alguna de esas sumas parciales es divisible por 100, se satisface de inmediato el aserto, pero si no, al ser divididas cada una por 100, dejan 99 residuos R_m, a saber: $1, 2, 3, \cdots, 99$ que son los nidos; y como $100 > 99$, entonces existen al menos 2 palomas, que duermen en el mismo nido. Esto es, hay al menos dos sumas parciales S_r, $S_s$con $r \neq s$ que dejan el mismo residuo $R_r = R_s$.

Suponiendo que $r < s$, al hacer la diferencia $S_s - S_r$ se consigue un múltiplo de 100 ya que los residuos se anulan. Observe que $S_s - S_r = a_{r+1} + a_{r+2} + a_{r+3} + \cdots + a_s$.

Es de anotar que el número 100 no juega un papel trascendental y el resultado es válido para cualquier número natural. Para $n = 5$, se tiene que, para cinco números enteros a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 siempre existen dos enteros positivos r y s tales que

$0 < r < s \leq 5$ de modo que la suma $a_{r+1} + a_{r+2} + a_{r+3} + \cdots + a_s$ es múltiplo de 5.

Para la lista enumerada (no ordenada), por proponer uno entre los miles de miles de ejemplos, $a_1 = 4341$, $a_2 = -434$, $a_3 = -12434$, $a_4 = 24341$,$a_5 = 83423$ se tienen las sumas parciales $S_1 = 4341$, $S_2 = 3907$, $S_3 = -8527$, $S_4 = 15814$ y $S_5 = 99237$. Estas sumas dejan por defecto, los residuos $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$,
$R_4 = 4$ y $R_5 = 2$.

Siendo $R_2 = R_5$, se tiene que las sumas parciales $S_2 = a_1 + a_2$ y $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ producen el mismo residuo y con ello se verifica que $S_5 - S_2 = a_3 + a_4 + a_5$ es divisible por 5. En efecto: $a_3 + a_4 + a_5 = 95330$.

Ejercicios:

Demostrar que en un grupo de 13 personas siempre hay 2 que cumplen años el mismo mes.

¿Cuántas personas tendría que haber en una sala para asegurar que hay 3 que cumplen años el mismo día?

Una diana tiene la forma de un triángulo equilátero de lado 2. Prueba que si tiramos 5 dardos a la diana habrá 2 que se quedarán clavados a distancia menor que 1.

Escoger 12 números de dos cifras cualesquiera, demostrar que siempre habrá dos cuya resta tendrá la forma aa.

Suponga que hay n personas en una reunión y no todas se conocen entre sí. Demostrar que hay al menos dos (2) personas que tienen el mismo número de conocidos.

1.3.6 Principio fundamental del conteo

El principio fundamental del conteo ofrece un método general para contar el número de posibles arreglos de objetos dentro de un solo conjunto o entre varios conjuntos. Las técnicas de conteo son usadas para enumerar eventos difíciles de cuantificar.

El Principio fundamental del conteo asegura que si una tarea o suceso se puede realizar de n formas y otra tarea o suceso ocurre de m formas, el número de maneras para desarrollar las dos tareas o sucesos es $n \times m$.

El principio se extiende a cualquier número de acciones. Este principio puede ser visto en términos de la potencia o cardinalidad del producto cartesiano de dos conjuntos dados A y B, el cual es el conjunto formado por las combinaciones producidas por el emparejamiento de cada elemento de A con cada elemento de B.

Una estrategia de conteo planteada desde experiencias manipulativas, aparece desde la necesidad de vincular los elementos de conjuntos discretos de una manera sistemática, para formar todas las combinaciones posibles (estrategia del odómetro). Bajo esta estrategia cuando las combinaciones de dos elementos se forman a partir de dos conjuntos dados con un artículo de cada conjunto, un elemento de un conjunto se mantiene constante mientras que los elementos del otro conjunto varían sistemáticamente hasta que todas las combinaciones posibles con el elemento constante se han formado. Un nuevo elemento invariable desde el primer conjunto es entonces seleccionado. El agotamiento de todos los elementos constantes en el primer conjunto indica la generación de todas las combinaciones posibles.

Ejemplo:

Para viajar por la vía aérea entre Pasto y Medellín se puede hacer escala en Cali o en Bogotá. Pasto-Cali tiene dos frecuencias de vuelo y Cali-Medellín tres frecuencias diarias de vuelo; Pasto-Bogotá tiene tres vuelos diarios mientras que Bogotá-Medellín tiene siete vuelos. ¿Cuántas alternativas se tiene en total para viajar entre Pasto y Medellín?

Solución:

Aplicando el principio del conteo es claro que de Pasto a Medellín, pasando por Cali, hay $6 = 2 \times 3$ alternativas de vuelo y entre Pasto y Medellín, con escala en Bogotá, se tiene $21 = 3 \times 7$ formas de adquirír su tiquete. Por ello, en total se tiene $27 = 6 + 21$ opciones para realizar ese viaje.

1.3.6.1 Permutaciones

Con el principio fundamental del conteo aparecen conceptos de arreglos fundamentales como los de permutación, combinación, permutación con repetición, variación y el factorial, entre otros.

Permutar es "variar la disposición u orden en que estaban dos o más cosas". Es necesario precisar si estas cosas son o no indistinguibles, para asegurar que la nueva configuración sea en esencia distinta a la antigua.

Las permutaciones ordinarias o sin repetición de n elementos se denotan por P_n y con ello se nombra a los distintos grupos que se pueden formar, de tal manera que en cada grupo entren los n elementos y que un grupo se diferencie de los demás en el orden de ubicación de los elementos.

Se tiene que $P_n = n!$ donde $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$, es decir que $n!$ es el producto de todos los enteros positivos no mayores que n. Es el caso, entonces, que $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ que es una entre las infinitas formas de escribir 120.

El factorial de un número es algo que crece en forma desbordada; por ejemplo, $13! =$ 6227020800; no obstante, en apariencia, 13 es un número pequeño. Al mismo tiempo se define $1! = 0! = 1$. Imagine como vendría el doble factorial, en el que, por decir algo, $13!! =$ 6227020800!

Las permutaciones con repetición son las ordenaciones distintas que pueden obtenerse con n elementos si hay $k < n$ grupos cuyos objetos son indistinguibles entre sí y cada grupo contiene $a_1, a_2, \cdots, a_k$ elementos respectivamente, de forma que
$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n.$

El total de permutaciones con repetición, en este caso, obedece a la siguiente fórmula:

$$P'_n = \frac{n!}{a_1! \times a_2! \times \cdots \times a_k!}$$

Piense en un grupo de diez (10) canicas entre las cuales hay seis (6) amarillas, dos (2) azules y dos rojas y quiere armar la simbología de la bandera de Colombia, entonces se tiene $P'_{10} = \frac{10!}{6! \times 2! \times 2!} = 1260$ maneras de producir tales ordenamientos.

El número de ordenaciones distintas de n objetos distintos es $P_n = n!$

Cuando los objetos están distribuidos en una circunferencia, se tendrá un menor número de ordenaciones. El criterio que define una nueva configuración es la posición relativa de unos elementos con respecto a los demás. Denotando PC_n a los distintos grupos que se pueden formar, se tiene que: $PC_n = (n-1)!$.

Ejemplo:

Los tres mosqueteros sentados alrededor de una mesa al desayuno, pudieron sentarse de $4! = 24$ maneras diferentes. (Recuerde que los tres mosqueteros fueron cuatro).

1.3.6.2 Variaciones

En lenguaje vernáculo, variar significa “hacer que una cosa sea diferente en algo de lo que era antes”. En matemáticas, la palabra variación tiene una acepción más precisa: una variación de una familia de elementos es una modificación de alguno de sus elementos o del orden en que se presentan.

Las variaciones ordinarias o sin repetición de n elementos tomados de k en k y denotado por $V_{n.k}$, son los distintos grupos que se pueden formar con los n elementos de tal forma que en cada grupo entren k elementos distintos y que un grupo se diferencie de los demás, bien en alguno de sus elementos o en su orden de ubicación.

De este modo se encuentra que:

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ejemplo:

Cinco personas entran a una furgoneta en la que hay siete asientos; ¿de cuántas maneras pueden sentarse?

Solución:

La respuesta se obtiene así: $V_{n,k} = V_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840.$

Por lo tanto, hay 840 alternativas de ubicarse en la furgoneta.

Se llaman variaciones con repetición de n elementos, tomados de k en k y denotado por $VR_{n,k}$ a los distintos grupos que se pueden formar con los n elementos, de tal manera que en cada grupo entren k elementos iguales o distintos y que un grupo se diferencie de los demás, bien en algún elemento, bien en su orden de ubicación:

$$VR_{n,k} = \frac{n!}{k!}$$

1.3.6.3 Combinaciones

En lenguaje vernáculo, combinar es "unir cosas diversas, de manera que formen un compuesto".

Al igual que las variaciones y las permutaciones, el concepto de combinación tiene un significado concreto en matemáticas (en matemáticas, las palabras comunes tienen significados especiales; grupo, anillo, cuerpo, dominio, quebrado, fracción, parte, función dominio, rango, …).

Combinación es el número de conjuntos de un determinado número de elementos que se pueden formar con un universo de objetos, sin importar el orden de selección, solo importa qué elementos se toman. Las combinaciones ordinarias o sin repetición de n elementos, tomados de k en k y denotado por $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ a los diferentes conjuntos de k elementos distintos; esto es, un conjunto que se distinga de los demás en al menos un elemento (no importa el orden de ubicación o selección):

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

Ejemplos:

Entre diez músicos de la misma calidad interpretativa, se desea conformar un trío. De cuántas maneras se puede hacer.

Solución:

Se tiene la posibilidad de obtener $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = 120$ tríos.

En una esquina se encuentran cinco amigos que se saludan de apretones de mano, Determinar el número de apretones manos que se producen.

Se producen $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\times 2!} = 10$ apretones de mano.

1.3.7 Aplicación del principio fundamental del conteo

1.3.7.1 Ejemplos

Imagine que para un viaje una persona ha llevado en su maleta una camiseta, una camisa de manga larga y una de manga corta. También ha llevado un jean y unos pantalones de cuadros. Esta persona puede organizar su vestuario durante el viaje de $3 \times 2 = 6$ maneras solo utiliza lo que lleva en la maleta.

Un juego denominado Beyblade permite la personalización de trompos construidos por el ensamble de 5 partes: una clavija, un anillo de energía, una rueda de fusión, una pista de giro y una punta de giro. Se disponen de 5 opciones de clavija, 8 diferentes anillos de energía, 2 ruedas de fusión, 2 pistas de giro y 6 puntas de giro, con toda esta suerte de elementos se pueden producir $5 \times 8 \times 2 \times 2 \times 6 = 960$ tipos diferentes de trompo.

La combinación de un candado funciona girando consecutivamente tres discos numerados cada uno del 0 al 9. Para formar su clave inicial debe elegir en cada disco un número. Como consecuencia de ello, una persona puede disponer de $10 \times 10 \times 10 = 1000$ maneras de organizar su clave.

Las placas de los automóviles están formadas por 6 caracteres: Letra - letra - letra - número – número- número. Si para cada carácter letra se tienen en cuenta 27 alternativas y para los números 10 opciones se pueden fabricar $27^3 \times 10^3 = 19683000$ placas.

Si cuatro personas llegan al mismo tiempo a la taquilla de Transmilenio se pueden formar de $4! = 24$ maneras diferentes para comprar el pasaje.

Si en la final de un campeonato de fútbol se ha ido a penalties, los jugadores $A, B, C, D\ y\ E$ son los encargados de cobrar por el equipo local; entonces se pueden ordenar estos deportistas de $120 = 5!$ maneras para la ronda de penalties.

Si en un juego de carreras automovilísticas participan cuatro competidores, Alonso, Button, Webber y Massa, entonces se puede dar el orden de llegada de $4! = 24$ maneras diferentes.

Si en su bolsillo lleva cuatro monedas de diferente valor, una de 100, una de 200, una de 500 y una de 1000, y si se sacan sin mirar dos de estas monedas, se obtienen $4 \times 3 = 12$ alternativas, pero solo $\frac{12}{2} = 6$ cantidades monetarias diferentes.

Si una camioneta, un taxi y un automóvil, llegan al mismo tiempo a un parqueadero con 4 espacios libres se pueden ubicar estos tres vehículos en los lugares disponibles de $4 \times 3 \times 2 = 24$, maneras diferentes.

Si hay diez carros que viajan de Funes a Pasto y viceversa, entonces una persona cualquiera tiene 10×9 de ir de una ciudad a otra, pero volver en un vehículo diferente.

Si tres turistas enemistados dos a dos llegan a una ciudad en la que solo hay 24 hoteles, tienen la alternativa de ubicarse de $24 \times 23 \times 22 = 12144$ maneras con tal de no coincidir ninguna pareja en hotel alguno.

Con las cifras del uno al nueve se pueden configurar 729 números de tres cifras, de los cuales 324 son pares y 504 no repiten cifra, además, 224 son pares y carecen de la repetición de cifra.

1.3.7.2 Ejercicios

¿De cuántas maneras puede seleccionarse una consonante y una vocal entre las letras que conforman la palabra murciélago?

Hay ocho candidatos para el concurso de literatura, siete para el de matemáticas y cinco para el de ciencias sociales, ¿De cuántas maneras pueden ser calificados los concursantes?

¿Cuántas ordenaciones diferentes pueden armarse al tomar cinco letras de la palabra cubierto? ¿Y si se cambia la palabra por encubierto?

¿Durante cuántas noches se puede establecer una guardia de cuatro hombres tomados de un grupo de 24 centinelas, de tal manera que ninguna pareja de veladores se repita?

¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra ternura si las letras u y a deben ocupar sitios impares?

Con cuatro oficiales y ocho soldados rasos ¿cuántos grupos de seis hombres pueden formarse de manera que:

a) en cada grupo entre un oficial y solo uno

b) el cada grupo aparezca al menos un oficial?

En un estante de una biblioteca hay 20 libros en español y 7 en inglés. ¿De cuántas maneras pueden escogerse estos libros en grupos de cinco de los cuales 3 estén en español y dos en inglés?

CAPÍTULO 2.

NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y RACIONALES

CAPÍTULO 2. NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y RACIONALES

2.1 NÚMEROS PRIMOS Y CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

2.1.1 Infinitud de los números primos

Ya se hizo una exposición sobre los números primos, este conjunto, desde la multiplicación, genera a todos los naturales y se requiere de establecer algunos criterios de divisibilidad para activar y emplear el teorema fundamental de la aritmética. El estudio de los primos, es reiterativo y tema central en la teoría de números.

El matemático Euclides demostró la infinitud del conjunto de los números primos. Los números primos son aquellos que no son producto de dos factores menores que él y diferentes de la unidad. El 13, por proponer algo, no es producto de un par de números naturales menores que él mismo y, en consecuencia, 13 es un número primo. Avanzando por la eterna cola de los números naturales $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$, los primos se hacen escasos a pesar de que en cualquier intervalo de la forma $[n, 2n]$ siempre hay un primo. En el intervalo $[40,80]$ se encuentran los primos $41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73$ y 79.

Las dos parejas de primos de esta lista, $41, 43$ y $71, 73$ tienen la particularidad de ser impares consecutivos. A este tipo de primos se les llama primos gemelos y se conjetura que el conjunto de los números naturales posee infinitos pares de primos gemelos.

Los números naturales que no son primos se llaman compuestos. 2394 es compuesto ya que $2394 = 38 \times 63$. Euclides demostró que todo número compuesto se escribe de manera única como el producto de factores primos. $2394 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 19$, $631472 = 2^4 \times 61 \times 647$ y así se puede seguir con una lista interminable, resultado que constituye, por sí solo, un gran alcance; al punto que se denomina Teorema Fundamental de la Aritmética.

Siendo infinito el conjunto de los números primos, es abundante; esto es, hay más números de este tipo que de otros con el mismo carácter infinito.

Ejemplo:

Probar que hay más primos que cuadrados perfectos $1, 4, 9, 16, 25, \cdots$.

Solución:

Esto se deduce del hecho que, mientras la suma de los inversos de los cuadrados perfectos converge, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$, la suma de los inversos de los primos $\sum_{p\ primo}^{\infty} \frac{1}{p}$, diverge; es decir, se hace tan grande como se quiera (Fresán & Rué, 2013).

El concepto de infinito actual, desarrollado por George Cantor se utiliza como criterio de abundancia, así, a partir del hecho de que la serie armónica diverge, y sin embargo, partes de ella, divergen o convergen; por ejemplo la serie de los inversos de los cuadrados converge, $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ (Más adelante se muestra el cálculo desarrollado por Euler, para encontrar esta suma) y como se ve, lo hace a un número no racional y trascendente, en cambio, la serie de los inversos de los números primos $\sum_{pprimo}^{\infty}\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$ diverge y se hace tan grande como se quiera y esto significa, de hecho, que hay más números primos que cuadrados perfectos, hecho misterioso e insondable por lo irregular de la distribución de los números primos, frente a la de los cuadrados perfectos en la que la distancia entre ellos configura la secuencia de los números impares.

Nicole Oresme (1323???, 1382), fue el primero en demostrar que la serie armónica: $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ diverge; también demostró que $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^i}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}\cdots=2$; además, que $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3i}{4^i}=\frac{3}{4}+\frac{6}{4^2}+\frac{9}{4^3}+\cdots=\frac{4}{3}$.

Jacob Bernoulli (1654-1705) probó que la serie de los inversos de los cuadrados $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$es convergente; y fue Leonard Euler el que demostró que $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{6}$ utilizando funciones trigonométricas.

También encontró que $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$ dando paso a que la suma de los inversos de los cuadrados de los pares, así:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i)^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{8}$$

Euler también encontró la suma de la serie alternante:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

Estos resultados son importantes pues determinan que sumas infinitas de números racionales producen irracionales, en este caso trascendentes pues vinculan de manera misteriosa y asombrosa al trascendente π, es decir, a la circunferencia.

El infinito es una noción importante, es un concepto que atraviesa diversos campos del conocimiento y resulta vital su comprensión y utilización en los engranajes de otros conceptos. En las sucesiones de Cauchy, en las sumas de Riemann para el cálculo integral, en las series de Taylor, entre tantas, es claro que no importa la cercanía a cero de sus sumados pues se convierte en una condición necesaria pero no suficiente. El juego visual logra ejercer influencia en la comprensión de este concepto como se señala en los siguientes ejemplos.

El problema de Basilea (Bernoulli- Euler) que consiste en calcular la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales, hace apertura a la función z de Riemann que es, acaso, la función más importante en matemáticas.

Se parte del hecho que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ para todo número natural n; en consecuencia, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Dado que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \cdots = 1$$

se tiene que la suma de los inversos de los cuadrados es creciente y acotada, pero menor que la suma de los inversos de los números triangulares, la cual converge a 2. Tal suma debe ser convergente; sin embargo, en su momento, los esfuerzos de los expertos para probar este hecho, resultaron infructuosos.

Euler utilizó métodos finitos para hacer un cálculo infinito. Parte de la aproximación potencialmente infinita (Taylor- Maclaurin) del $sen\, x$, así:

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

Por lo cual,

$$\frac{Sen(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^{2(i-1)}}{(2i-1)!}$$

que tiene las mismas raíces que $sen\, x$, exceptuando 0 (Todas son múltiplos enteros de π).

Simulando correspondencia con el teorema fundamental del álgebra, se puede escribir lo siguiente:

$$p(x) = \frac{Sen(x)}{x} = (x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)\cdots = p(x)$$

Siendo $p(0) = (-1)^n \pi^2 (2\pi)^2 (3\pi)^2 \cdots$, entonces, al multiplicar por $\frac{p(0)}{p(0)}$ que es una de las infinitas formas de escribir 1, se obtiene:

$$\frac{Sen(x)}{x} = p(0)\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots = p(0)\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots$$

y siendo $p(0) = 1$ (Aquí hay que recordar el clásico límite $\lim_{x\to 0} \frac{Sen(x)}{x} = 1$, que sirve para definir la función $\frac{Sen(x)}{x}$, o simplemente remplazar en: $p(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$).

En definitiva, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{2i-1}\frac{x^{2(i-1)}}{(2i-1)!}=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 i^2}\right)$$

Y ahora, es suficiente con aplicar el principio de identidad que señala que cada objeto es idéntico consigo mismo, así, en ambos miembros de la igualdad, los coeficientes de x^2 o de x^4 o de… deben ser los mismos. En el primer caso, el coeficiente de x^2 en el primer miembro es $\frac{(-1)^3}{6}$ y del otro lado hay que ir fijando en cada factor un término $\frac{x^2}{\pi^2 i^2}$ y tomar los 1 (infinitos) de los restantes factores; este hecho produce que $\frac{(-1)^3}{6}=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$ y de allí se deriva que $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

En el infinito potencial, con cada paso se obtiene un racional próximo a $\frac{\pi^2}{6}$ y al tener todos los sumandos en el infinito actual, se está sobre el irracional $\frac{\pi^2}{6}$.

Con algunos malabares algebraicos, al comparar e igualar los coeficientes, en ambos términos de x^4, se obtiene $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4}=\frac{\pi^4}{90}$ y así se pueden obtener más resultados.

Al pensar de un modo general en $\xi(k)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^k}$ como la suma de los inversos de las potencias de orden $k\geq 2$ de todos los números naturales, no solo resulta que son infinitas, si no también, que son convergentes; en particular, resulta que $\xi(2)=\frac{\pi^2}{6}$.

Esto genera un gran misterio, al menos sorpresa; pues, de los cuadrados perfectos se sabe su localización. Entre dos cuadrados perfectos aparece un número creciente de impares, mientras que, dado un primo, no existe un número determinado de pasos hasta encontrar el siguiente; saltan cuando menos se los espera.

2.1.2 Introducción a los criterios de divisibilidad

Para aplicar el Teorema Fundamental de la Aritmética es necesario aplicar criterios de divisibilidad para algunos primos. Los criterios de divisibilidad son pautas que permiten reconocer si un número es divisible entre otro sin necesidad de efectuar la división. Los criterios son condiciones necesarias y suficientes de divisibilidad.

Los criterios de divisibilidad son útiles, por ejemplo, para encontrar con facilidad los divisores de un número, para reconocer si un número es primo o compuesto, en el arte de la simplificación de fracciones, en el cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo entre dos números.

2.1.2.1 Criterio de la última cifra

Cada número natural n particiona al conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ en dos grandes conjuntos: los múltiplos de n y los que no lo son; o si se quiere, lo divisibles por n y los que no. Por ejemplo, el 2 particiona al conjunto $\mathbb{N}$ en números pares y números impares.

Los números pares, por muchas cifras que contengan, se reconocen examinando la cifra de las unidades. Si es $0, 2, 4, 6$ u 8 el número considerado es par y esa es una condición necesaria y suficiente.

Así las cosas, el número 123123901317 no es par, pero 5553901314 sí lo es. El hecho de que para determinar la paridad de un número se tenga que examinar su última cifra es buena pauta, tan buena que se constituye por sí solo en un criterio, en un test de categoría y que se llama el criterio de la última cifra.

El criterio de la última cifra sirve también para examinar la divisibilidad de un número por 5 o por 10. Un número es divisible por 5 si su última cifra es 5 o 0; en cambio, es divisible por 10 si la última cifra es 0.

2.1.2.2 Criterio de la suma de cifras, divisibilidad por 3

Permite decidir si un número es múltiplo de 3 o de 9, bueno de 3^2. Si la suma de las cifras de un número es divisible por 3, el número también lo es; igual, si la suma de las cifras es divisible por 9, el número dado, también.

De modo que, a pesar de saber que el criterio se puede utilizar de manera reiterativa, resulta positivo el tener instalada en la mente una buena lista de los múltiplos de 3, a saber: $3, 6, 9, 12, 15, 18, \cdots$ y también del 9, que son $9, 18, 27, 36, 45, 54, \cdots$

Ejemplos:

Determinar si 35497601 es divisible por 3.

Solución:

La suma de las cifras es $3 + 5 + 4 + 9 + 7 + 6 + 0 + 1 = 35$ y $3 + 5 = 8$, al no ser 8 múltiplo de 3, tampoco lo es 35497601.

Probar si 76868943 es múltiplo de 3.

Solución:

Dado que $7 + 6 + 8 + 6 + 8 + 9 + 4 + 3 = 51$ y $5 + 1 = 6$ es múltiplo de 3, se concluye que 76868943 tiene en el 3 a uno de sus divisores.

2.1.2.3 Criterio de divisibilidad por 7

El sistema de numeración hindú, es un sistema decimal, es decir, tiene base 10. La escuela enseña que se compone en orden ascendente en el valor de sus unidades, decenas, centenas, unidades de mil, unidades de diez mil, …, millones, etc.

En el número 8764 hay $876{,}4$ decenas, que redondeado al menor entero mayor es igual a 876; también contiene $87{,}64$ centenas que al redondear al menor entero mayor es igual a 87.

El criterio de divisibilidad por 7 asegura que un número n es divisible por 7 si la diferencia entre el número de decenas del número y el doble de la cifra de las unidades es cero o un múltiplo de 7.

En el criterio de divisibilidad por 7 se toma la parte entera de las decenas que contiene el número a examinar. Para la aplicación del criterio conviene tener una lista de los múltiplos de 7, entre ellos: $7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, \cdots$.

Ejemplos:

Determinar si el número 467653 es divisible por 7.

Solución:

Es simple darse cuenta que el total de decenas que tiene 467653 es 46765 y el doble de la cifra de las unidades es 6, con lo cual, la diferencia $46765 - 6 = 46759$. Este número es todavía grande para usar el criterio, de modo que se lo aplica nuevamente, pero esta vez al número 46759.

Se encuentra que $4675 - 18 = 4657$, del que no se sabe de inmediato si es múltiplo de siete; entonces, nuevamente se aplica el criterio, encontrando que $465 - 14 = 451$; por lo cual, aplicando nuevamente el criterio se tiene que $45 - 2 = 43$. Dado que 43 no es un múltiplo de 7, se deduce que el número 467653 no es divisible por 7.

Examinar si406896 es divisible por 7.

Solución:

Para el efecto, se produce una secuencia de pruebas del siguiente modo:

$40689 - 12 = 40677$

$4067 - 14 = 4053$

$405 - 6 = 399$

$39 - 18 = 21$

Dado que 21 es divisible por 7, se concluye que el número 406896 también lo es.

2.1.2.4 Criterio de divisibilidad por 11

Recitar el criterio de divisibilidad del 11 es proponer un poema de suspenso. Un número es divisible entre 11 cuando la diferencia entre las sumas de las cifras que ocupan posición par y las que ocupan posición impar es 0 o un múltiplo de 11.

Vaya criterio, pero en realidad, es simple. La diferencia de las sumas se realiza tomando como minuendo el mayor valor y como sustraendo el menor valor. Note que es indistinto si las sumas son iguales.

Ejemplos:

Decidir si el número 67572178 es divisible por 11.

Solución:

Se remarcan las cifras que ocupan posición par, con lo cual se obtiene: 67572178.

Las cifras que ocupan posición par son: 7, 2, 5 y 6; y las de posición impar son: 8, 1, 7, 7. Con ello, las sumas de las cifras de posición par y las de posición impar son:
$7+2+5+6=20$ y $8+1+7+7=23$. La diferencia de estas sumas es $23-20=3$, número que no es divisible por 11 y, en consecuencia, 67572178 tampoco lo es.

Estudiar si 1084017 es divisible por 11.

Solución:

El número 1084017 es divisible por 11 ya que al emplear el criterio demarcando las cifras de posición par se obtiene 1084017 y en consecuencia $1+8+0+7=16$ y $0+4+1=5$, así $16-5=11$ que obviamente es múltiplo de 11. Consecuencia inmediata, 1084017es divisible por 11.

2.1.2.5 Criterio de divisibilidad por 13

La divisibilidad por 13 arrastra un aroma similar al de la divisibilidad por 7. En efecto, un número es divisible por 13 cuando la diferencia entre el total de sus decenas y nueve veces la cifra de las unidades es 0 o un múltiplo de 13.

Vale la pena tener a mano una lista de los primeros múltiplos de 13, a saber: $13, 26, 39, 52, 65, \cdots$.

Ejemplo:

Examinar si 116441 es divisible por 13.

Solución:

Aparece la secuencia reiterativa del uso del criterio como sigue:

$11644 - 9 = 11635$ $\qquad$ $1163 - 45 = 1118$ $\qquad$ $111 - 72 = 39$

Se sabe que 39 es múltiplo de 13, con esta consideración, es claro que 116441 goza de la cualidad de tener al número 13 como uno de sus divisores.

2.1.2.6 Criterio de divisibilidad por 23

No viene al caso, pero sin ser matemático profesional y con solo aplicar principios de aritmética modular (Una de las tantas teorías surgidas desde el pensamiento de Carl F. Gauss) se construyen criterios que ponen a prueba la habilidad con el cálculo de sumas y con las tablas de multiplicar.

En efecto, el criterio de divisibilidad por 23 asegura que lo es en cuanto la suma entre el total de centenas y el triplo del número formado por sus dos últimas cifras es 0 o múltiplo de 23. Conviene, entonces, tener en el arca de conocimientos una lista pequeña de múltiplos de 23, a saber: $23, 46, 69, 92, \cdots$; y además poseer la capacidad para reconocer el número exacto de centenas que posee cualquier número.

Ejemplos:

Examinar si 206402 es uno de los infinitos múltiplos de 23 empleando el criterio descrito.

Solución:

El número 206402 tiene 2064 centenas y el triplo del número formado por las dos últimas cifras es 6; la suma entre estos dos valores es 2070 y aquí conviene aplicar de nuevo el criterio; lo que obliga a calcular la suma $20 + 210 = 230$ que, a todas luces, es múltiplo de 23. Así que, 206402 es múltiplo de 23.

Determinar si el número 565731 es múltiplo de 23.

Solución:

La aplicación sucesiva del criterio de divisibilidad por 23 produce la siguiente secuencia: $5657 + 93 = 5750$ y de allí $57 + 150 = 207$ y por último $2 + 21 = 23$, y esto es concluyente frente al examen, indicando que el número dado es divisible por 23, o equivalentemente, que es uno de los múltiplos de 23.

NOTA: observe que la aplicación del criterio resulta menos costosa que efectuar la división; entre otras razones, porque su algoritmo es el menos simple que el de las cuatro operaciones básicas.

2.1.2.7 Otros criterios de divisibilidad por: 4, 6, 8, 21 o 100

A partir de los criterios expuestos se pueden configurar otros para números compuestos, pues resulta que, si un número par es divisible por tres, tal número es divisible por seis; si un número es divisible al mismo tiempo por tres y siete, lo es por veintiuno; si un número termina en dos ceros, es divisible por cien.

Otros criterios, son los siguientes: un número es divisible por 4 si sus dos últimas cifras conforman un número divisible por 4; un número es divisible por 8 si sus tres últimas cifras configuran un número divisible por 8.

A la luz de los dos últimos criterios se tiene que, el número 565708 es divisible por 4 pero 3434 no loes; y 7553088 es múltiplo de 8, pero el número 75530818 no es divisible por 8.

2.1.2.8 Una aplicación de los criterios de divisibilidad

Una de las aplicaciones inmediatas de los criterios de divisibilidad es la de accionar el teorema fundamental de la aritmética. La idea es casi de manera mental, producir una secuencia decreciente de cocientes que van resultando de dividir cada uno de ellos entre el primo divisor que satisfaga el criterio de divisibilidad.

Ejemplo:

Descomponer en sus factores primos el número 311256.

Solución:

Cocientes	**Divisores**
311256	2
155628	2
77814	2
38907	3
12969	3
4323	3
1441	11
131	131

Conviene indicar que la escritura de cualquier número compuesto como producto de factores primos tiene carácter único; en este caso, se tiene que:

$311256 = 2^3 \times 3^3 \times 11 \times 131$ y es el estilo que se estila escribir los factores primos en orden ascendente; así, con esta forma única se conforma en la rúbrica del número.

$121286 = 2 \times 11 \times 37 \times 149$

$151500 = 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 101$

Ejercicios:

Aplicar los criterios de divisibilidad estudiados para determinar si entre los primeros primos aparecen divisores de los siguientes números: 1352, 14872, 7546, 37730, 16016, 1925, 23100, 50050, 876876, 65423, 7020, 231231, 72600, 78975, 86661 y 4093.

Aplicar el Teorema Fundamental de la Aritmética, escribiendo cada uno de los números de la lista anterior como producto de factores primos.

2.2 DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES

Si bien, los primos imprimen un sello particular a cada número al escribirlo de una única forma como producto de ellos, salvo para la multiplicación y la división, su uso aritmético resulta poco práctico en las cosas comunes. No es sugerente decir que un año tiene 5×73 días o que un siglo se compone de $2^2 \times 5^2$ unidades de tiempo del mismo tipo; que el comisionista arrastró con el tres por ciento de $2^3 \times 5^5 \times 7^6$ que fue el importe del carro, o que nos vemos en el cine dentro de $2^2 \times 3 \times 5$ minutos, o que si el camino está bien, se tardará en llegar $3^2 \times 7$ horas; o que todo soneto tiene 2×7 versos, o que por fin la abuela va a cumplir $2^2 \times 3 \times 5$ años.

Incluso, establecer relaciones de orden en la que a simple vista la longitud en cantidad de cifras juega preponderancia, con este tipo de escritura, se ve una tarea poco sencilla; pues, si bien, 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, $\cdots$, es una secuencia ordenada de menor a mayor, la de sus inversos $\frac{1}{3^0}, \frac{1}{3^1}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \cdots$, se ordena de mayor a menor. ; a simple vista reconocer el mayor entre los números $37^5 \times 43^3$, $37^3 \times 43^4$, $37^5 \times 43^2$ y $37^2 \times 43^6$ ya no es tan fácil.

En fin, la matemática contiene hechos misteriosos y sospechosos, varios de entre ellos se convierten en divertimentos. Un hecho sorprendente es que se puede calcular la cantidad de divisores que tiene un número al tener su escritura como producto de factores primos.

En efecto, si la escritura del número es $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ (por fin se desecha el $\times$) el número de divisores de n está dado por la expresión $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$, valor que incluye al 1 y al mismo n.

Así las cosas, dado que $20 = 2^2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$, se ve que $\tau(20) = (2+1)(1+1) = 6$ y en su orden los divisores de 20 son $1, 2, 4, 5, 10$ y 20. Desde que $3762616 = 2^3 \times 11^2 \times 13^2 \times 23$, se tiene $\tau(3762616) = 72$.

Una mente inquieta puede conjeturar que entre más grande sea un número, la cantidad de divisores aumenta, ¡falso!; todos los infinitos números que son solo el producto directo de dos primos, por proponer un ejemplo, solo tiene "cuatro divisores" y es simple proponer parejas en las que $m > n$ pero $\tau(n) > \tau(m)$, como el par 60 y 70.

Al hablar en términos técnicos, se dice que el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ es cerrado para las operaciones de adición y multiplicación, en consecuencia, contiene a todas la sumas, diferencias y productos posibles. Con la división no ocurre igual. Salvo casos excepcionales, un número es divisible por otro; en realidad en infinitos casos, pero excepcionales. Es conveniente, casi necesario, estudiar más a fondo la divisibilidad.

2.2.1 Definición de divisibilidad

Se dice que un número a es divisible por el número b, si existe un número c de modo que $a = bc$. En este caso, se dice de manera indistinta que a es un múltiplo de b o que b es un divisor o factor de a y se escribe $b|a$. Es el caso, entonces que $15|75$, $13|169$ u $11|22517$. Además, el número $c$es único.

2.2.2 Propiedades de la divisibilidad

La divisibilidad es un objeto que no se separa de la inquietud de buscar propiedades que satisface como transformación y se ha visto que goza de las propiedades reflexiva y transitiva, así $a|a$ (propiedad reflexiva) y, si al mismo tiempo y $c|b$ y $b|a$, se tiene que $c|a$ (propiedad transitiva).

Por ejemplo, $5|15$ y $15|75$, por lo cual, $5|75$.

No sobra advertir que dos números que se dividan mutuamente son iguales o el uno es el opuesto del otro.

Si un conjunto de números tiene un divisor común, la suma y el producto de tales números también tienen el mismo divisor. Se entiende mejor con símbolos.

Si $b|a_1$, $b|a_2, \cdots$ y $b|a_r$, entonces $b|(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)$ y $b|(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_r)$.

Una consecuencia simple de este hecho está en afirmar que, si la suma de dos números y uno de los sumandos son divisibles por un número b, entonces el otro sumando tiene en b a uno de sus divisores.

2.2.3 Algoritmo de Euclides para la división con residuo

Debido a que no siempre un número natural es divisible por otro, aparece la división con residuo que salva todo el andamiaje teórico.

Dividir con residuo un número a por un número b implica representar al primero en la forma $a = qb + r$, donde $0 \leq r < b$.

Esto siempre es posible ya que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ impide el descenso infinito y por ello, la secuencia a, $a - b$, $a - 2b$, $a - 3b, \cdots$, dentro de $\mathbb{N}$ se detiene en algún momento $q + 1$, es decir, $a - qb$ es positivo; pero $a - (q + 1)b$ se obliga a ser negativo. Este número se llama r; esto es, $a - qb = r$ y por ello $a = qb + r$, siendo r un número natural. El número q es el cociente de la división de a entre b y r el residuo de dicha división. Por su parte, a es el dividendo y b el divisor.

Ejemplo:

Aplicar el algoritmo de Euclides para dividir 27 entre 5.

Solución:

Al ejecutar el procedimiento indicado para 27 y 5, se tiene la secuencia que sigue:

$27,\ 27 - 5 = 22,\ 27 - 2 \times 5 = 17,\ 27 - 3 \times 5 = 12,\ 27 - 4 \times 5 = 7,\ 27 - 5 \times 5 = 2$ y para allí, ya que $27 - 6 \times 5$ es negativo. Entonces, $27 = 5 \times 5 + 2$.

En los siguientes casos se han expresado algunas divisiones con residuo:

$100 = 27 \times 3 + 19$, $854 = 59 \times 14 + 28$, $3354 = 45 \times 74 + 24$.

Determinar a, b, q y r en cada caso.

Solución:

Teniendo en cuenta que $a = qb + r$, se tiene respectivamente:

$a = 100, b = 27, q = 3$ y $r = 19$

$a = 854, b = 59, q = 14, r = 28$

$a = 3354, b = 74, q = 45, r = 24$ o también $a = 3354, b = 45, q = 74$ y $r = 24$

2.2.4 Números equirresiduales

Dos números a y b se llaman equirresiduales con respecto a m cuando al ser divididos por m dejan el mismo residuo.

Cuando dos parejas de números (s, t) y (u, v) son respectivamente, dos a dos equirresiduales con respecto a m, sus sumas y productos también lo son.

Ejemplos:

Los pares de números $(44{,}97)$ y $(164{,}77)$ satisfacen este requisito respecto de 20; pues, 44 y 164 dejan el mismo residuo 4 al dividirse por 20; lo mismo pasa con 97 y 77 que dejan como residuo 17 al dividirse por 20. Entonces, sus sumas $44 + 97 = 141$ y $164 + 77 = 241$ dejan el mismo residuo al dividirse por 20, que en este caso es 1; lo mismo ocurre con $44 \times 97 = 4268$ y $164 \times 77 = 12628$ que dejan residuo 8 al dividirse por 20.

Este resultado sigue siendo válido para cualquier número de parejas de números que vayan teniendo sus primeras componentes equirresiduales y las segundas componentes también equirresiduales respecto de un número m. Se destacan dos resultados: el primero, está referido al hecho en que si, a y b son equirresiduales con respecto a m y d es un divisor de m, entonces a y b son equirresiduales con respecto a d; el segundo, se deriva del hecho que todo número a es equirresidual con su propio residuo r respecto de un entero m y, en consecuencia, las respectivas potencias a^n y r^n son equirresiduales respecto del mismo m.

Ejemplo:

El número 23 y su residuo 3 son equirresiduales respecto de 5, entonces $23^2 = 529$ y $3^2 = 9$ también, pues dejan el mismo residuo 4 al dividirse por 5.

$23^3 = 12167$ y $3^3 = 27$ dejan el mismo residuo 2 al dividirse por 5 y por ello son equirresiduales; y así se puede proseguir por siempre.

67 y 7 son equirresiduales respecto de 15, pues dejan residuo 7; sus cuadrados 4489 y 49 dejan residuo 4 al dividirse por 15, y sus cubos y sus cuárticas, etc.

2.2.5 Criterios de divisibilidad y números equirresiduales

Es posible combinar estos últimos resultados con criterios de divisibilidad para examinar si un número de exóticas y sorprendentes formas es divisible por otro al calcular su residuo. La pregunta sobre la divisibilidad de un número por otro se puede hacer indagando por el residuo de la división.

Ejemplos:

Determinar si $17^8 \times 56^7 \times 121^5 + 58^9 \times 14^7$ es divisible por 3.

Solución:

Hay que fijarse $17^8 \times 56^7 \times 121^5 + 58^9 \times 14^7$ ese equirresidual con $2^8 \times 2^7 \times 1^5 + 1^9 \times 2^7$; para lo cual, se remplazan los números originales con sus residuos de dividir por 3. Este último número, por obra y gracia de la potenciación se puede escribir como $2^{15} + 2^7$ y de aquí $2^{15} + 2^7 = 2 \times (2^2)^7 + 2 \times (2^2)^3$ que es equirresidual con $2 \times (1)^7 + 2 \times (1)^3$, es decir, con 4; y como este número no es divisible por 3, el número $17^8 \times 56^7 \times 121^5 + 58^9 \times 14^7$ tampoco lo es.

Determinar el residuo de dividir $13^{16} + 2^{25} \times 5^{15}$ por 3

Solución:

Se sustituye cada número base por sus residuos $1^{16} + 2^{25} \times 2^{15} = 1 + 2^{40} = 1 + 4^{20}1$. El residuo de esa división por 3 es $1 + 1^{20} = 2$.

Para los incrédulos hay que decir que $13^{16}+2^{25}\times 5^{15}$ es en la escritura corriente 1689416609183179841 cuyas cifras suman 92.

Determinar el residuo de dividir $13^{16}+2^{25}\times 5^{15}$ por 11.

Solución:

El residuo deviene en cálculos simples. Un primer remplazo permite escribir $2^{16}+(2\times(2^4)^6)\times(5\times(5^2)^7)$ y enseguida $(2^4)^4+(2\times(5)^6)\times(5\times(3)^7)$ y de nuevo $(5)^4+(2\times(3)^3)\times(5\times 3\times(3^3)^2)$ que se convierte en $3^2+10\times(5\times 3\times(5)^2)$ o mejor en $9+10\times(5\times 3\times 3)$, que a su vez es equirresidual con $9+10\times 1$ o con 19 que deja residuo 8.

Determinar el residuo de dividir $13^2\times 15^3\times 17^4$ por 11.

Solución:

El proceso consigue una secuencia equirresidual del tipo $2^2\times 4^3\times 6^4$ que da paso a $4\times 4\times 4^2\times 36^2$ o sea $5\times 5\times 3^2$ o sea 3×9, de donde se ve que el residuo buscado es 5.

Calcular el residuo de dividir $13^{16}+2^{25}\times 5^{15}$ por 37.

Solución:

$13^{16}+2^{25}\times 5^{15}=(13^2)^8+2\times(2^6)^4\times(5^3)^5$ y aquí hacer el cambio por sus residuos a $(21)^8+2\times(27)^4\times(14)^5$ y de allí a $(34)^4+2\times(26)^2\times 14\times(11)^2$ que da paso a $9^2+2\times 10\times 14\times 10$, esto es, $7+2\times 31$ o sea $7+25$ que es 32.

Ejercicios:

Determinar los residuos de dividir por cada uno de los veinte números naturales mayores que dos a los siguientes números: $23^5\times 29^6$, $23^5\times 29^6+34^7\times 89^{20}$, $3^{15}\times 2^{60}+34^7\times 89^{20}$, $53^8+2^{45}\times 7^{15}$, $3^{18}\times 11^8+2^{45}\times 7^{15}$y $3^{18}\times 13^8+2^{45}\times 5^{25}$.

2.3 MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Cualquier número que divida a otros de forma simultánea se llama común divisor de los mismos y el mayor número de entre ellos se denomina mayor común divisor. Para dos números a y $b$se escribe $MCD(a,b)$ y por brevedad (a,b).

Si el máximo común divisor de a y b es la unidad, se dice que los números son primos entre sí. Dos enteros consecutivos, son primos entre sí, dos impares consecutivos son primos entre sí; en general, cualquier pareja de primos diferentes, son primos entre sí. De este modo $MCD(14,15)=(14,15)=(21,23)=(59,73)=1$.

Es útil recordar que dos números a y b son primos entre sí cuando a la vez carecen de divisores comunes, exceptuando a la unidad.

Cuando a y p son números naturales y p es primo se tiene que $p|a$ o que $(a,p) = 1$; es decir, p es un divisor de a o los dos números son primos entre sí.

A su vez, cualquier número que tenga al mismo tiempo a a y a b entre sus divisores, se denomina múltiplo común y al menor de entre ellos se le denomina mínimo común múltiplo.

De hecho, si Mes un múltiplo común y m es el mínimo común múltiplo de dos números, se tiene que $m|M$ y en el caso en que los dos números sean primos entre sí, su mínimo común múltiplo es el producto de tales números. Esto es, si $(a,b) = 1$ entonces $MCM(a,b) = ab$. Es frecuente escribir en lugar de $MCM(a,b)$, tan solo $[a,b]$.

Existen varios resultados que son de rápido entendimiento por la necesidad que le imprimen sus requisitos.

Piense en que un número c divide a un producto ab pero que c es primo relativo con uno de los factores, dígase b, la conclusión es que por necesidad c debe dividir al otro factor, en este caso al número a.

También se cumple que, si p es un número primo que divide a un producto finito de factores, necesariamente debe dividir al menos a uno de ellos.

La división con residuo permite escribir $a = bq + r$ cuando $b > 0$, siendo $0 \leq r < b$; esto permite establecer una secuencia de descenso finito para el cálculo del máximo común divisor entre a y b. Pues, dado $a = bq + r$ se ha demostrado, entonces, $MCD(a,b) = MCD(b,r)$, o de la manera simple, $(a,b) = (b,r)$.

Ejemplo:

Calcular el máximo común divisor de 360 y 114, es decir.

Solución:

Se observa que $360 = 114 \times 3 + 18$ y en este punto $(360{,}114) = (114{,}18)$. Aplicando de nuevo el algoritmo de la división, se tiene: $114 = 18 \times 6 + 6$ y por ello
$(114{,}18) = (18{,}6)$. Llegado a este punto, es suficiente ver que $6|18$ y con ello se tiene, en definitiva, que $(360{,}114) = 6$.

Calcular $(2268, 630)$.

Solución:

$(2268{,}630) = (630{,}378) = (378{,}126)$ y con esto $(2268{,}630) = 126$.

2.3.1 Propiedades del máximo común divisor

1) $(a,b) = (b,a)$

2) $((a,b),c) = (a,(b,c))$

3) Si $(a,b) = d$ se tiene que $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

4) Si $(a,b) = d$ entonces $(ak,bk) = dk$ para cualquier valor k

5) Relación del máximo común divisor con el mínimo común múltiplo: $(a,b) = \frac{ab}{[a,b]}$.

El máximo común divisor de dos números se puede efectuar aplicando el Teorema Fundamental de la Aritmética. Una vez descompuesto cada número en sus factores primos, el MCD es el producto de los factores primos comunes a los dos números, con su menor exponente; el MCM es el producto de los factores comunes y no comunes con mayor exponente. Este es un juego de palabras potente.

Ejemplo:

Determinar el MCD de 15750 y 11340.

Solución:

$15750 = 2 \times 3^2 \times 5^3 \times 7$ y $11340 = 2^2 \times 3^4 \times 5 \times 7$

$(15750{,}11340) = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ es decir $(15750{,}11340) = 630$.

Ejercicios:

Calcular el MCD y el MCM de los siguientes grupos de números: $\{45{,}100\}$, $\{144{,}300\}$, $\{1440{,}380\}$, $\{1512{,}972\}$, $\{1512{,}972{,}81\}$, $\{1512{,}972{,}64\}$, $\{2^7 - 1, 2^7 + 3\}$ y $\{240{,}3400{,}840{,}100\}$.

2.3.2 Primos relativos y divisores de n

Existe una forma de contar la cantidad de números menores que n que no son divisores del mismo y que tienen con él algún divisor común diferente de la unidad. Esa cantidad está dada por la expresión $\theta(n) = n + 1 - \varphi(n) - \tau(n)$, donde φ es la función phi de Euler que cuenta los primos relativos y τ los divisores de n.

Para $n = 20$, $\varphi(20) = 8$, $\tau(20) = 6$ y por ello $\theta(20) = 7$; y los números $6, 8, 12, 14, 15, 16$ y 18, siendo menores que 20, poseen un divisor común con él, diferente de la unidad.

Se debe recordar que las funciones que calculan los primos relativos y el número de divisores, para calcular sus valores, requieren del uso del Teorema Fundamental de la Aritmética.

De igual modo $\theta(12) = 13 - \varphi(12) - \tau(12)$, y con $\varphi(12) = 4$ y $\tau(12) = 6$ se tiene que $\theta(12) = 3$. Es claro que $8, 9$ y 12 son números menores que 12 que tienen con él un divisor común diferente de la unidad.

Siendo $\varphi(25) = 20$ y $\tau(25) = 3$, es $\theta(25) = 3$ y tales números son $10, 15$ y 20.

2.3.3 Generación de números primos

Al hacer una lista ordenada de los números naturales escribiéndolos en cuatro columnas se vería lo siguiente.

Col. 1	**Col. 2**	**Col. 3**	**Col. 4**
1	**2**	**3**	4
5	6	**7**	8
9	10	**11**	12
13	14	15	16
17	18	**19**	20
21	22	**23**	24
25	26	27	28
29	30	31	32

Con rapidez, se observa que cada columna es lo que se ha dado en llamar una progresión aritmética. La primera columna tiene la forma $1 + 4n$, la segunda es $2 + 4n$, la tercera $3 + 4n$ y la última $4n$. Y claro, ni en la segunda ni en la cuarta columna aparecen números primos. Entonces decide que todos los infinitos primos del mundo son de la forma $4n + 1$ o $4n - 1$. Esta última progresión es la misma que $4n + 3$, salvo por el primer elemento. Además, todos los números de la primera y tercera columna son primos relativos con el 6, mientras los de las columnas dos y cuatro comparten al menos al número 2 como un divisor. Por último, todos los números de una columna son equirresiduales con respecto a 4.

Si se organizan los números naturales en seis columnas, se tiene una situación similar.

Col. 1	**Col. 2**	**Col. 3**	**Col. 4**	**Col. 5**	**Col.6**
1	**2**	**3**	4	**5**	6
7	8	9	10	**11**	12
13	14	15	16	**17**	18
19	20	21	22	**23**	24
25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	**41**	42
43	44	45	46	**47**	48
49	50	51	52	**53**	54

Y como antes, es claro que, salvando al dos y al tres, todos los demás primos son de la forma $6n + 1$ o $6n - 1$. Todo esto se reasegura con el conocimiento que se tiene respecto de que la forma lineal $f(n) = an + b$ produce infinitos números primos, siempre y cuando los números a y b sean primos relativos.

2.4 ARITMÉTICA CON LOS NÚMEROS NATURALES

Ya concebido desde los orígenes de los tiempos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ cimentado el sistema de numeración posicional que permite el sentido operatorio de su existencia, hace falta mencionar que los conjuntos se dotan de operaciones de carácter aditivo o de carácter multiplicativo. La adición y la multiplicación, son en esencia las operaciones sobre las que descansa todo el edificio aritmético y gozan de unas propiedades básicas.

2.4.1 Propiedades de los números naturales

La propiedad conmutativa: asegura que $a + b = b + a$ y $a \times b = b \times a$

Propiedad asociativa que aduce $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

La propiedad modulativa en la cual $a + 0 = a$ y $a \times 1 = a$

La propiedad que conecta a estas dos operaciones es la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Utilizar estas propiedades a fondo, permite hacer cálculos de manera eficiente y divertida. En este sentido, se recomienda estudiar y practicar el uso de la operatoria aritmética con el Microprocesador de Papy, instrumento que permite escribir un número en base diez, operarlo y procesar en base ocho y leer en base diez. Este elemento de amplio uso y fácil construcción enseña que el mejor camino es la descomposición de los números para luego componerlos configurando unidades de orden superior.

Ejemplos:

Sumar $47 + 56$

Solución:

Se puede proceder, entre tantas formas, así:

$47 + 56 = 47 + 3 + 50 + 3 = 50 + 50 + 3 = 100 + 3 = 103$

Sumar $376 + 273$

Solución:

Resulta elemental escribir:

$376 + 273 = 300 + 200 + 70 + 70 + 6 + 3 = 640 + 9 = 649$

Restar $376 - 273$

Solución:

La resta se puede hacer por la vía de la descomposición como sigue:

$376 - 273 = 300 - 200 + 70 - 70 + 6 - 3 = 103.$

Multiplicar 27×48

Solución:

Se puede escribir así:

$27 \times 48 = 27 \times (40 + 8) = 27 \times 40 + 27 \times 8 = (20 + 7) \times 40 + (20 + 7) \times 8 =$

$20 \times 40 + 7 \times 40 + 20 \times 8 + 7 \times 8 = 800 + 280 + 160 + 56 = 1240 + 56 = 1296.$

Ejercicios:

Proponer al menos diez ejemplos de sumas, restas y multiplicaciones en los que se aplique, como forma esencial, la descomposición de los números.

2.4.2 Números negativos y un poco de historia de su origen

Cuando se trata de agrimensura, de medir distancias y áreas, no aparece la necesidad de utilizar números distintos de los positivos. De hecho, las medidas geométricas carecen de sentido si tuvieran un valor negativo. Los primeros en usar números negativos fueron los matemáticos indios que en los siglos V y VI los emplearon en los aspectos contables. Y elemental, al contrario de los bienes que se representaban con cantidades positivas, las deudas se inscribieron con números negativos y en un punto de equilibrio está el cero; sin el cero no se concibe la presencia de los números negativos.

En occidente, solo hasta el siglo XV se esboza la aparición de los números negativos. A estos números se les llamaba números absurdos, y hasta el mismo Descartes aducía que al aparecer como solución de una ecuación debía considerársela como una “raíz falsa”.

La matemática ha sostenido un tortuoso camino, sería mucho más avanzada si desde la época griega se hubiese contado con el empleo generalizado de los símbolos $x, y, a, b, +, \times, \sqrt{\ }$ para dar cuenta de sus expresiones.

Por ejemplo, el signo $=$, sinónimo de equilibrio, fue inventado por el inglés Robert Record en 1557 (Guedj, 1998), y de hecho, no existía en ninguno de los períodos anteriores, ni griegos, ni babilonios, ni fenicios, ni mayas.

En lo referente a la representación cartesiana de las funciones, solo hasta mediados del siglo XVII el matemático John Wallis fue pionero en asignar coordenadas negativas a puntos de una curva.

Los enteros positivos, llamados naturales, junto con los enteros negativos, configuran el conjunto de los enteros relativos, llamado simplemente enteros, conjunto que se denota como $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Dentro del conjunto $\mathbb{Z}$ y solo para la multiplicación se cumple la famosa ley de los signos en los que se tiene que:

$- \times - = + \times + = +\,;\ - \times + = + \times - = -$

Los enteros negativos se consideran la solución de las ecuaciones lineales de la forma $x + n = 0$. Aquí se ve que su existencia; procede si existe el “cero”. En la estructura aditiva $(\mathbb{Z}, +)$ aparece una propiedad referida a la existencia de los opuestos; así, para cada uno de los números enteros n, existe dentro del mismo conjunto, un entero n^* tal que $n + n^* = 0$. n^* se llama el opuesto de n y viceversa. En este sentido, $n^* = -n$ y por ello, el opuesto de 5 es -5, el opuesto de -7 es $-(-7)$ que es igual a 7; en general se tiene que $-(-n) = n$.

Ejemplos:

$(-3) \times (-4) = (3) \times (4) = 12$

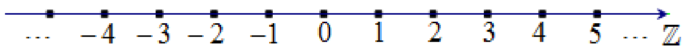
$(-3) \times (4) = (3) \times (-4) = -12.$

La operación inversa de la adición se llama sustracción y no siempre está bien definida en $\mathbb{N}$. Por ejemplo $7 - 3 = 4$ ya que $7 = 4 + 3$. Además $5 - 5 = 0$ y se ha tomado $0 \in \mathbb{N}$; pero $3 - 7$ no es posible en $\mathbb{N}$.

Esta pequeña consideración obliga a extender el conjunto $\mathbb{N}$, de manera que la sustracción pueda efectuarse sin restricciones en un nuevo conjunto y en el que se satisfaga la equivalencia $a - b = c$ ya que $a = b + c$.

En el conjunto de los números enteros las operaciones de adición y multiplicación son igualmente válidas; pero es necesario tener cuidado con sus elementos negativos, en particular, respetar la regla $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ para cada entero a.

Los números enteros se representan como puntos equidistantes en una recta orientada eligiendo de manera arbitraria un punto que sirva de origen y estableciendo a cada lado dos sentidos contrarios. La unidad o patrón de medida que separa a cada par de puntos es igualmente escogida al azar o por conveniencia.



La escala métrica para el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ facilita el cálculo de sumas algebraicas como $2 - 5 + 6$. Partiendo del origen se salta a 2 por la derecha y de aquí 5 unidades a la izquierda y por último 6 unidades a la derecha para llegar finalmente al punto rotulado con el 3, como se muestra en la Figura 2.

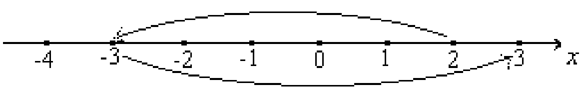


Figura 2. Representación gráfica de la suma de enteros

Luego $2 - 5 + 6 = 3$ puesto que $2 - 5 = -3$ y $-3 + 6 = 3$.

Operaciones Enteras

La adición y multiplicación definidas en $\mathbb{N}$ tienen plena validez en $\mathbb{Z}$, pero es necesario tener en cuenta varias propiedades, incluidas las leyes de los signos; por ejemplo, si se gastan \$20 diarios durante los 5 días siguientes, ¿cuánto se gasta en total? $5 \times \big(\$(-20)\big) = \$(-100)$. Si se gastan \$12 durante los últimos cuatro días, ¿cuánto se tenía entonces?

$(4) \times (\$12) = \$48.$

Para no recurrir a ejemplos cada vez, es necesario abstraer y demostrar cada resultado de una manera general. Al tomar dos rectas con sus escalas correspondientes configuradas con enteros y que se cortan en el punto común O que se rotula para los dos ejes con el número cero y siendo que los enteros aparecen distribuidos en los dos ejes no necesariamente perpendiculares; es factible multiplicar números enteros geométricamente utilizando la regla, el triángulo y la noción de paralelismo.

Para hallar el producto 2×3 empleando un sistema coordenado cartesiano, basta unir mediante un segmento el punto rotulado con 1 del eje y con el punto rotulado con 3 del eje horizontal y a continuación por el punto rotulado con 2 en el eje y se traza una paralela al primer segmento, tal paralela corta al eje x en un punto que equivale al producto 6. Esta construcción se observa en la Figura 3.

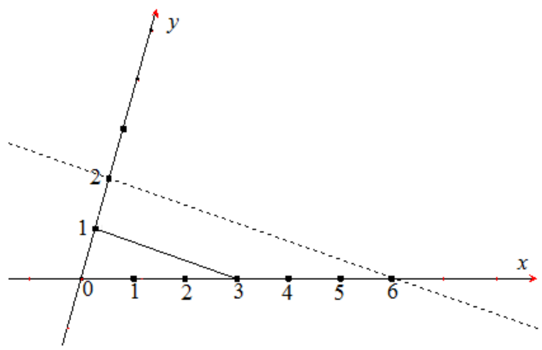


Figura 3. Construcción del producto 2×3

Las operaciones de adición y multiplicación en $\mathbb{Z}$ satisfacen las siguientes propiedades:

A1. $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, \forall b, \forall c\ en\ \ \mathbb{Z}$

A2. $\exists\ 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a,\ \forall a \in \mathbb{Z}$, 0 es el neutro aditivo.

A3. $\forall a \in \mathbb{Z},\ \exists(-a) \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$, $(-a)$ se llama el inverso aditivo de a.

A4. $a + b = b + a$, $\forall a,\ \forall b$ en $\mathbb{Z}$.

M1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a, \forall b, \forall c$ en $\mathbb{Z}$.

M2. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{Z}$; pero $1 \neq 0$.

M3. $a \cdot b = b \cdot a,\ \forall a,\ \forall b$ en $\mathbb{Z}$.

D. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ además, $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$, $\forall a,\ \forall b,\ \forall c$ en $\mathbb{Z}$.

2.4.3 Sustracción con complemento a 9

Para cerrar esta parte, se debe comentar una forma simple que puede aprender el escolar para calcular la diferencia entre dos números y no requiere la acción de pedir prestado a una unidad de orden superior; es el complemento sobre nueve.

Se supone que el minuendo es mayor que el sustraendo; si el sustraendo no tiene tantas cifras como el minuendo se completa con ceros a izquierda a fin de que posean la misma cantidad de cifras, es decir, la misma longitud.

La parte operativa es simple: al minuendo se le suma uno y enseguida se suma lo que le falta a cada cifra del sustraendo para ser 9. La suma total empieza siempre por 1, mismo que no se tiene en cuenta. La diferencia es el número que queda al descartar este 1.

Ejemplo:

Restar $3102 - 567$aplicando complemento a 9.

Solución:

Se dispone de la siguiente manera:

1 3102 $+9432$		1 Este número va siempre 3102 es el minuendo de la sustracción El número 9432 se obtiene tomando como referencia el sustraendo 567, así: la cifra 2: es lo que le falta a 7 para sumar 9; el 3 es lo que le falta al 6 para sumar 9; el 4 es lo que le falta al 5 para sumar 9; finalmente, se agregan números 9, los que sean necesarios hasta igualar el número de cifras del sustraendo con las cifras del minuendo
12535		Se suman los tres números y se cancela la primera cifra de la izquierda del número 12535; en este caso, el 1; con lo cual, el resultado final es 2535.

De este modo $3102 - 567 \ = 2535$.

La razón es simple, en realidad se han realizado las siguientes operaciones:

$3102 + 1 + 9999 - 0432 - 10000 = 2535$

Esto es, se ha utilizado la propiedad modulativa puesto que al tachar el uno a izquierda de la suma, en virtud del sistema posicional, se está restando “diez mil” que es la suma entre 1 y 9999, es decir, todo lo que se hizo equivale a $3102 - 567$.

Ejercicios:

Proponer y calcular al menos siete sumas y siete productos de números enteros, con variedad entre positivos y negativos.

Realizar las siguientes restas, siguiendo el método del complemento a 9: $2345 - 786$, $24345 - 1786$, $23459 - 20328$, $6542 - 4998$, $26542 - 4298$. Explique la validez del procedimiento empleado.

2.4.4 Una curiosidad

Manteniendo el orden de los nueve dígitos que se convierten en los primeros números naturales y teniendo como recurso las operaciones básicas de la aritmética, incluyendo la potenciación y la radicación, se hace divertido escribir de diversas maneras el número 100. Aquí se proponen algunos ejemplos.

$$1 + (2 \times 3) + 4 + (5 \times 6) + (7 \times 8) + \sqrt{9} = 100$$

$$123 + \sqrt{4} - (5 \times 6) + (7 \times 8) \div \sqrt{9} = 100$$

$$123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100$$

$$1 + 23 - 4 + 5 + 6 + 78 - 9 = 100$$

$$12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89 = 100$$

$$12 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 89 = 100$$

$$12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100$$

$$-1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100$$

$$1 + (23 \times 4) + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 = 100$$

$$(1 \times 2) - 3! + 4! + 56 + +7 + 8 + 9 = 100$$

$$1 - 2 - 3 + (4 \times 5) + 67 + 8 + 9 = 100$$

$$1 + (2 \times 3) + 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100$$

$$1 \times 2 + 34 + 56 + 7 - 8 + 9 = 100$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + (8 \times 9) = 100$$

$$1 + (2 \times 3) + (4 \times 5) - 6 + 7 + (8 \times 9) = 100$$

$$(1 + 2 - 3 + 4)(-5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 100$$

$$(1 \times 2 \times 3) + 4 + 5 + 6 + 7 + (8 \times 9) = 100$$

$$(1 \times 2 \times 3) - (4 \times 5) + (6 \times 7) + (8 \times 9) = 100$$

$$-1 + 2 + 3 + (4 \times 5 \times 6) - 7 - 8 - 9 = 100$$

$$12 \div (3 \times 4) + (5 \times 6) + 78 - 9 = 100$$

2.5 NÚMEROS RACIONALES

En actividades de la vida diaria para muchas personas no es suficiente saber contar ya que se requiere medir longitudes, calcular áreas, tomar tiempos, encontrar pesos, hacer conversiones de divisas, calcular husos horarios, fraccionar cantidades monetarias, hallar cifras equivalentes en diferentes sistemas de medida,… y algunas magnitudes son susceptibles de subdivisiones tan pequeñas o tan grandes como se quiera: kilómetro, hectómetro, decámetro, metro, decímetro, centímetro, milímetro, micra,…; tonelada, kilogramo, libra, onza, gramo, miligramo,…; milenio, siglo, década, lustro, año, mes, día, hora, minuto, segundo,… son ejemplos que muestran cómo la unidad inicial se ha dividido en otras partes más pequeñas o multiplicado en otras más grandes, pero de manera convencional. Es decir, si la unidad se divide en n partes, cada una mide $\frac{1}{n}$ y si se toma $m$de ellas, se encuentra $\frac{m}{n}$. Este símbolo se llama una fracción o una razón. Con el paso de los siglos, el símbolo $\frac{m}{n}$ fue desposeído de referencias concretas (medidas) y se consideró como un número cuando m y n son números enteros, con $n \neq 0$. El símbolo $\frac{m}{n}$ se llama número racional.

La división de enteros se toma como la operación inversa de la multiplicación y consiste en encontrar un número que multiplicado por el divisor reproduzca al dividendo

$a \div d = c$ siempre que $a = d \times c$

Por ejemplo $12 \div 3 = 4$ porque $12 = 3 \times 4$.

Sin embargo, el cociente no siempre es entero; como en $2 \div 5$; $3 \div 7$ o en $4 \div 9$.

La división no siempre es posible en $\mathbb{Z}$ y es necesario extender el conjunto $\mathbb{Z}$ mediante la introducción de lo inversos multiplicativos para elementos no nulos

$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$ para todo $a \neq 0$ en $\mathbb{Z}$

Por ejemplo, $2 \div 5 = 2 \times 5^{-1} = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$. En efecto, $\frac{2}{5} \times 5 = 2 \times \left(\frac{5}{5}\right) = 2 \times (1) = 2$ y análogamente $3 \div (-7) = 3 \times \left(-\frac{1}{7}\right) = -\frac{3}{7}$.

De esta manera se construye el conjunto de los números racionales:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \text{ en } \mathbb{Z}, \quad b \neq 0\right\}$$

Hecho esto, es factible ampliar la escala métrica que se construyó para $\mathbb{Z}$ con el objeto de posibilitar la representación de cualquier número racional en un sistema coordenado. Como antes, se usa la regla y el triángulo y el concepto de paralelismo.

La Figura 4, ilustra el uso de la regla y el triángulo con la representación del racional $\frac{3}{5}$; en el eje E_1 se representa la unidad de medida y en el eje E_2 se representa las partes en las que se divide la unidad con un patrón de medida uniforme (En este caso cinco partes).

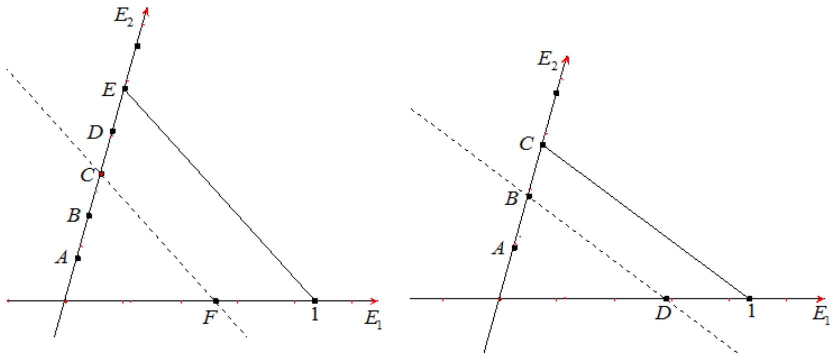


Figura 4. Representación racional de $\frac{3}{5}$

Se traza el segmento determinado por los puntos rotulados como E y 1 y por el punto C se traza una paralela que corta al eje E_1 en F y que corresponde al racional $\frac{3}{5}$. La gráfica anterior, hace que el punto D represente al racional $\frac{2}{3}$ y se ha construido con los conceptos y procedimientos geométricos indicados.

Las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división (excepto por cero) toman el nombre de operaciones racionales, puesto que son cerradas en el conjunto $\mathbb{Q}$. Estas operaciones obedecen a las siguientes definiciones.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ siempre que $ad = bc$.

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$; pero no es $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Bajo las condiciones indicadas, las operaciones de adición y multiplicación cubren el caso de los números enteros. Por tanto $(\mathbb{Q}, +, \times)$ forma un anillo conmutativo con unidad. Además, cada elemento no nulo, tiene inverso multiplicativo. Es decir $(\mathbb{Q}, +, \times)$ es un cuerpo en el sentido estructural. Cabe anotar que los términos número racional y fracción racional, son sinónimos y por tanto se pueden intercambiar. La palabra fracción indica cualquier expresión que tenga numerador y denominador, como $\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \cdots$ entre otros.

En consecuencia, una fracción no necesariamente representa a un número racional. Sin embargo, es válido y posible en algunos casos, transformar cualquier fracción a fracción racional (donde numerador y denominador son enteros siendo el último no nulo). Las dos siguientes líneas prueban la validez del aserto.

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4 \times 3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{1} \notin \mathbb{Q}$$

Las operaciones racionales se pueden efectuar geométricamente, utilizando la regla y el triángulo, como una aplicación del teorema de Tales (625 -546 a.C.). A manera de ejemplo, se presenta el cálculo del cociente $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$. Para ello se procede en concordancia con los siguientes pasos, mismos que se detallan en la Figura 5.

Se localiza $\frac{2}{3}$ sobre E_1 y $\frac{4}{5}$ en el eje E_2.

Se traza el segmento que une los puntos rotulados con los racionales anteriores.

Por el punto que representa a la unidad en E_2 se traza una paralela al segmento anterior.

La recta anterior corta al eje E_1 en el cociente $\frac{5}{6}$.

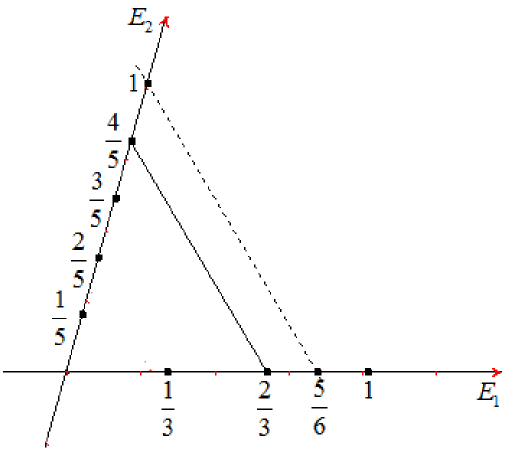


Figura 5. Representación de un cociente con fracciones: $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$

En efecto $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{2 \times 2} = \frac{5}{6}$.

Dados dos números racionales a y b tales que $a < b$, siempre se encuentra otro número racional r tal que $a < r < b$. Entonces se dice que “r está entre a y b.” Basta tomar su semisuma o promedio $a < \frac{a+b}{2} < b$ que, además, es el punto medio de los puntos que representa a los racionales a y b.

Ahora, entre a y r está su semisuma $a < \frac{a+r}{2} < r$ y entre r y b también está su semisuma $r < \frac{b+r}{2} < b$, entre a y $\frac{a+r}{2}$ vuelve a quedar su semisuma $a < \frac{3a+r}{4} < \frac{a+r}{2}$ y también se encuentra que $\frac{b+r}{2} < \frac{3b+r}{4} < b$ y así sucesivamente. Se hace evidente que entre dos números racionales por cercanos o distantes que se encuentren hay una infinidad de números racionales. Esto equivale a decir que el conjunto de los números racionales es denso con respecto a la relación "menor que". Dicho de otra manera, los puntos racionales se acumulan en todas partes de la recta. Por tanto, toda magnitud medible se puede expresar mediante números racionales con cualquier grado de aproximación (densidad), sin importar el instrumento de medida que se utilice.

Esta característica de densidad, burla a los principiantes y neófitos respecto de la numerabilidad del conjunto, pues a simple vista parece que tuviese muchísimos más elementos que el conjunto de los naturales sin sospechar siquiera que, por el contrario, estos dos conjuntos son coordinables, esto es; tienen la misma cantidad de elementos $\aleph_0$.

Desde el álgebra elemental se asegura, que las ecuaciones de la forma $a + x = b$, con números naturales, no siempre tienen solución en el conjunto $\mathbb{N}$ y por ello, se tiene la necesidad de ampliar el conjunto y se construye el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$. Allí, ecuaciones de la forma $ax + b = c$, con números enteros, no siempre encuentran solución.

Por ejemplo, $2x + 7 = -1$ es verdadera si $x = -4$, pero $3x + 21 = 5$ no tiene solución en este conjunto. Tal como se hizo antes, aparece la necesidad de ampliar el conjunto con el fin de poder resolver este tipo de ecuaciones, y de paso, satisfacer el apetito matemático.

2.5.1 Fracciones

La relación o razón entre dos enteros fue utilizada por los antiguos griegos en el siglo VI antes de nuestra era, sin ninguna restricción; sin embargo los babilonios, utilizaron fracciones con numerador 1.

La voz fracción deriva del latín fractio que se toma del árabe kasr que significa roto o quebrado. La escuela lo enseña así y está bien, los números fraccionarios son números quebrados; contrario a los números enteros. Un quebrado se compone de un numerador, un denominador y una raya horizontal que se llama vínculo. El denominador denomina (nombra) y el numerador numera (cuenta).

Por ejemplo, el quebrado $\frac{3}{7}$ indica que se cuentan tres partes de las siete en que se ha fraccionado una unidad.

Tal unidad, por su parte, constituye un todo y, en consecuencia, puede estar formada por tres manzanas, un ciento de cuadernos o una gruesa de lápices.

Los enteros y las fracciones configuran un todo que se denomina el conjunto de los números racionales, representado como $\mathbb{Q}$. Si bien en $\mathbb{Z}$ cada número es una multiplicidad de unidades que permite la enumeración, los racionales transforman esta noción y se convierten en un instrumento de medida; es decir, se pasa del concepto de número contable al número métrico; y según los pitagóricos, Siglo VI antes de nuestra era, tienen como función la de representar las medidas de las magnitudes geométricas, tales como: longitud, área, volumen, amplitud, curvatura, etc.

Para los pitagóricos, los números explican el mundo, los principios numéricos son los elementos de todos los seres y por la vía de la contemplación encontraron los números triangulares, los números cuadrados, los números rectangulares, los pentagonales, entre otros; y demostraron el que ahora se llama Teorema de Pitágoras, utilizado de manera proba por los babilonios un milenio antes y que hace que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos sea igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

El recíproco del teorema de Pitágoras también es cierto, es decir, que si se encuentran tres números x, y, z tales que $x^2 + y^2 = z^2$, las medidas x, y y z son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. En consecuencia, el teorema de Pitágoras establece una liga, un vínculo serio entre la geometría y la aritmética, entre los números y las magnitudes, entre las cifras y las formas.

El conjunto $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ permite toda la operatoria aritmética sin restricción.

La multiplicación es fácil, basta con multiplicar numeradores y denominadores para configurar la nueva fracción que es su producto; esto es $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ y con ello se tiene un surtidor infinito de ejemplos: $\frac{7}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{7 \times 2}{5 \times 3} = \frac{14}{15}, \frac{8}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{8 \times 3}{5 \times 2} = \frac{24}{10}, \cdots$

En el último ejemplo hay algo por hacer. Ya se dijo que el 1 en la multiplicación tiene un carácter especial, $r \times 1 = r$ cualquiera que sea el número r y resulta que el "uno" se puede escribir de infinitas formas, $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \cdots$ y con ello, escogiendo un "uno" de esta forma, en cada caso se consigue lo que se denomina una amplificación de un quebrado.

En este sentido, por ejemplo: $\frac{12}{5} = \frac{12 \times 2}{5 \times 2} = \frac{12 \times 3}{5 \times 3} = \cdots$ esto es: $\frac{12}{5} = \frac{24}{10} = \frac{36}{15} = \cdots$ y así por siempre, con todos y cada uno de los números racionales.

El convenio universal está en que, en todo proceso operatorio, su respuesta como fracción debe entregarse en la forma más simple y esto ocurre cuando, si la respuesta es la fracción $\frac{a}{b}$, entonces $MCD(a, b) = 1$.

El proceso de expresar una fracción en otra equivalente del que el numerador y el denominador sean primos relativos, se denomina simplificación.

En este proceso, lo recomendable es utilizar el Teorema Fundamental de la Aritmética, factorizando numerador y denominador en sus factores primos, para cancelar enseguida todos los factores 1 que puedan aparecer.

En el caso exhibido antes se tiene:

$$\frac{24}{10} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times 3}{\cancel{2} \times 5} = \frac{2 \times 2 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$$

Y así, una multitud de ejemplos como:

$$\frac{360}{1440}=\frac{2^3\times 3^2\times 5}{2^5\times 3^2\times 5}=\frac{\cancel{2^3}\times\cancel{3^2}\times\cancel{5}}{\cancel{2^3}\times 2^2\times\cancel{3^2}\times\cancel{5}}=\frac{1}{4}$$

El convenio universal de entregar toda respuesta de la manera más simple es de obligatorio cumplimiento y funciona no solo para las expresiones aritméticas sino también para las algebraicas.

Ejercicios:

Simplificar las siguientes fracciones:

$$\frac{810}{270},\frac{1810}{1270},\frac{3465}{21021},\frac{1443}{999},\frac{168}{352}.$$

La división es un procedimiento fácil, el numerador del cociente es el producto entre el numerados del dividendo y el denominador del divisor; y el denominador del cociente es el producto del denominador del dividendo y el numerador del divisor; esto es:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times c}.$$

También se puede decir que la división de $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$ corresponde a la multiplicación de $\frac{a}{b}$ por el inverso multiplicativo de $\frac{c}{d}$ es decir:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\right)^{-1}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}.$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}\div\frac{5}{4}=\frac{2\times 4}{3\times 5}=\frac{8}{15}$$

$$\frac{3}{4}\div\frac{5}{8}=\frac{3\times 8}{4\times 5}=\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$$

Es costumbre escribir la división como lo muestra la siguiente figura, lo cual, coloquialmente, se denomina “ley de la oreja” o principio de la herradura.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

Más adelante, en fracciones compuestas, se tendrá en cuenta que el vínculo principal se dispone de modo horizontal, tal como si fuera a pasar por en medio de las dos barras del igual.

La división permite responder a inquietudes, como el cálculo de la mitad de tres quintos, o los siete tercios de dos séptimos. Sacar la mitad, es dividir por dos y para ello es buena idea completar el 2 con un denominador 1; esto indica que la unidad se toma en su totalidad.

Ejemplos:

Determinar la mitad de tres quintos.

Solución:

La mitad de tres quintos, se calculan así:

$$\frac{\frac{3}{5}}{2}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{1}}=\frac{3\times 1}{5\times 2}=\frac{3}{10}$$

Determinar la séptima parte de tres octavos.

Solución:

$$\frac{\frac{3}{8}}{7}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{1}}=\frac{3}{56}$$

La séptima parte de tres octavos se puede indicar como $\frac{1}{7}$ de $\frac{3}{8}$ que se puede escribir así:

$\frac{1}{7}\times\frac{3}{8}$.

Simplificando se tiene:

$$\frac{1}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{1\times 3}{7\times 8}=\frac{3}{56}$$

Calcular las tres séptimas partes de dos quintos.

Solución:

Corresponde calcular el siguiente producto: $\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}$.

Realizando el producto se tiene que: $\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$.

2.5.2 Fracciones homogéneas y heterogéneas

Encontrar sumas significa entender que en las fracciones los que dominan, los que nombran, son los denominadores; esto obliga a clasificar un conjunto de fracciones en homogéneas y heterogéneas.

Las homogéneas tienen el mismo denominador, el mismo nombre y las heterogéneas, poseen diferente denominador.

Sumar fracciones homogéneas equivale a operar tan solo con los numeradores-

Ejemplo:

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{7}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{3}{17}-\frac{15}{17}=\frac{3-15}{17}=-\frac{12}{17}$$

Para sumar fracciones heterogéneas, el mejor camino es amplificar cada una de ellas, a fin de que, en conjunto, se convierta en un conjunto de fracciones homogéneas. Para ello es útil calcular el mínimo común múltiplo de los dos denominadores.

Conviene recordar que el MCM de dos números es el menor número natural que los contiene a ellos como divisores; su cálculo tiene una relación vinculante con el MCD, a saber:

$$MCM(a,b)=\frac{a\times b}{MCD(a,b)}$$

Ejemplos:

Calcular el $MCM(36{,}54)$

Solución:

$MCM(36{,}54)=\frac{36\times 54}{MCD(36{,}54)}=\frac{1890}{18}=108.$

Sumar $\frac{7}{15}+\frac{11}{18}$

Solución:

Observe que $MCM(15{,}18)=90$

Para convertir la fracción dada en homogénea, el primer sumando debe amplificarse por 6 y el segundo por 5; así:

$$\frac{7}{15}+\frac{11}{18}=\frac{7\times 6}{15\times 6}+\frac{11\times 5}{18\times 5}=\frac{42+55}{90}=\frac{97}{90}$$

Simplificar $\frac{13}{12}+\frac{5}{3}-\frac{7}{4}$

Solución:

En infinitas ocasiones se encuentra que el mínimo común múltiplo es uno de los dos denominadores y en consecuencia la tarea es más fácil.

$$\frac{13}{12}+\frac{5}{3}-\frac{7}{4}=\frac{13+20-35}{12}=-\frac{2}{12}=-\frac{1}{6}$$

Ejercicios:

Realizar las operaciones indicadas en seguida:

$$\frac{3}{13}-\frac{5}{13}+\frac{7}{13} \qquad \frac{3}{131}-\frac{5}{131}+\frac{7}{131} \qquad \frac{8}{131}-\frac{10}{131}+\frac{17}{131} \qquad \frac{18}{1313}-\frac{100}{1313}+\frac{175}{1313}$$

$$\frac{1}{9}-\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{14}{9} \qquad \frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{12} \qquad \frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{3}{20} \qquad \frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{3}{20}+\frac{7}{40}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{7}{16} \qquad \frac{1}{9}+\frac{31}{27}+\frac{73}{81} \qquad \frac{1}{11}+\frac{7}{121} \qquad \frac{1}{14}+\frac{3}{28}+\frac{7}{42}$$

2.5.3 Fracciones Compuestas

Con al abanico de las fracciones y su esquema operatorio, la imaginación induce a que un numerador puede escribirse como una fracción, o como una suma de fracciones; igual, el denominador puede ser la composición operatoria de ellas. Así las cosas, es factible enfrentarse a composiciones de la siguiente forma:

$$a+\frac{b+\dfrac{c+d}{e+\dfrac{f}{g}}}{t-\dfrac{m+p}{q+\dfrac{1}{r}}}$$

La complejidad de la anatomía de estas expresiones, se minimiza frente a la tarea que aparece de inmediato y es la de su simplificación; es decir, conducir la expresión a la forma: $\frac{a}{b}$.

En esta figura, la longitud de los vínculos (las líneas horizontales) señalan la importancia, es decir, la jerarquía que ocupa la división dentro de la fracción, lo que indica que se debe ir operando de adentro hacia afuera; entendiendo adentro, como los vínculos de menor longitud.

Ejemplo:

Simplificar la expresión:

$$2+\cfrac{1+\cfrac{2}{3}}{3+\cfrac{2}{4+\cfrac{5}{6}}}$$

Solución:

Se debe procederse como se indica en seguida:

$$2+\cfrac{1+\cfrac{2}{3}}{3+\cfrac{2}{4+\cfrac{5}{6}}}=2+\cfrac{\cfrac{5}{3}}{3+\cfrac{2}{\cfrac{29}{6}}}=2+\cfrac{\cfrac{5}{3}}{3+\cfrac{1}{87}}=2+\cfrac{\cfrac{5}{3}}{\cfrac{262}{87}}=2+\frac{5\times 87}{3\times 262}$$
$$=2+\frac{5\times 87}{3\times 262}=\quad 2+\frac{145}{162}=\frac{669}{162}$$

Ejercicios:

Simplificar las dos siguientes fracciones compuestas:

$$1+\cfrac{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{3}}} \qquad\qquad 3+\cfrac{1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5}}}{1-\cfrac{2}{3-\cfrac{4}{5}}}$$

2.5.4 Expansión decimal de una Fracción

Cada fracción es una razón e indica una división que al efectuarla deriva en una expresión decimal, en un número con coma. El algoritmo de la división, en cada caso puede hacerse hasta el infinito, por siempre; pero en todas ellas, llega a un momento “cuasi final” en el que todo comienza de nuevo.

Ejemplo:

$\frac{5}{7}=0{,}714285714285714285\cdots$ y se escribe $\frac{5}{7}=0,\overline{714285}\ldots$ o $\frac{5}{7}=0,\overline{714285}$.

El bloque de longitud 6, 714285 se le llama periodo y es un ciclo que se repite indefinidamente.

$\frac{1}{3}=0{,}333333\cdots$, de modo que $\frac{1}{3}=0,\overline{3}\ldots=0,\overline{3}$y el periodo tiene longitud 1.

$\frac{1}{4}=0{,}25000\cdots$, en este e infinitos casos más, la división es exacta y al continuar con el algoritmo se produce una cola infinita de ceros y en consecuencia se asevera que el periodo es de longitud cero.

El período tiene longitud cero; pero tiene la potencialidad de seguir el algoritmo de la división hasta el infinito.

La expansión decimal de todo número racional, es periódico.

$$\frac{23}{11} = 2,\overline{09}\cdots \qquad \frac{45}{13} = 3,\overline{461538}\cdots$$

Los periodos se describen como fracciones $\frac{a}{b}$ en las que el numerador a es el periodo y el denominador es un número con tantos nueves como la longitud del periodo $99\cdots9$, siendo que el periodo aparece después de la coma; en caso contrario, hay que ampliar la fracción decimal.

Ejemplos:

$$0,\overline{17}\ldots = \frac{17}{99} \qquad 0,\overline{128}\cdots = \frac{128}{999}$$

El periodo puede saltar en cualquier momento, por lo cual, se puede entrever casos como el que se describe enseguida:

$$0{,}00\overline{1324}\ldots = \frac{1}{100}\times 0,\overline{1324}\ldots = \frac{1}{100}\times\frac{1324}{9999} = \frac{1324}{999900} = \frac{331}{249975}$$

El periodo puede saltar de varias formas como en $1{,}23\overline{18}\cdots$

La habilidad aritmética señala que esto se puede escribir como $1{,}23\overline{18}\cdots = 1 + \frac{23}{100} + 0{,}00\overline{18}\cdots$, esto es, $1{,}23\overline{18}\cdots = \frac{123}{100} + \frac{1}{100}0,\overline{18}\cdots$, con lo cual $1{,}23\overline{18}\cdots = \frac{123}{100} + \frac{1}{100}\times\frac{18}{99}$

En definitiva $1{,}23\overline{18}\cdots = \frac{123}{100} + \frac{2}{1100} = \frac{271}{220}$

Ejercicios:

Calcular la expansión decimal infinita de los siguientes quebrados:

$$\frac{3}{11};\ \frac{7}{13};\ \frac{8}{15};\ \frac{9}{17};\ \frac{17}{9}$$

Escribir como fracción los siguientes números racionales que están escritos en su expansión decimal infinita:

$$0,\overline{561}\cdots \qquad 0,\overline{44561}\cdots \qquad 0,\overline{4}\cdots \qquad 3,\overline{408}\cdots$$

$2{,}000\overline{408}\cdots$ $\quad$ $1{,}00\overline{47}\cdots$ $\quad$ $2{,}11\overline{23}\cdots$ $\quad$ $2{,}110\overline{213}\cdots$

$3{,}1130\overline{213}\cdots$ $\quad$ $1{,}8\overline{9}\cdots$ $\quad$ $1{,}100\overline{47}\cdots$ $\quad$ $1{,}10000\overline{47}\cdots$

Los periodos tienen cualquier longitud, y en efecto, siendo los números entes, objetos ideales (viven en el mundo de las ideas), se puede pensar en un número como $2{,}0\overline{1000\cdots 08}\cdots$ en el cual, entre el uno y el ocho aparezca cualquier cantidad n de ceros; este número tiene, en consecuencia, un periodo con longitud de $n+2$ cifras.

De otro lado, es factible pensar en un número de estos con coma, un número de expansión decimal infinita sin periodo, como $0{,}1234567891011\cdots 100101102\cdots$ en la que va entera y de corrido la secuencia de los números naturales; una secuencia sin fin, deslizándose por la mesa, subiendo por las paredes, descendiendo por los postigos, por las puertas, inmiscuyéndose en los intersticios de los collados, ascendiendo por las laderas hacia el cielo, rodando por la ladera, un número con expansión decimal infinita sin periodo!!!

Piense en otro número decimal sin periodo como $0{,}101001000100001000001\cdots$ en el que la cantidad de ceros entre dos unos contiguos va aumentado de uno en uno: un cero, dos ceros, tres ceros entre dos unos vecinos. Si lo piensa bien, este número, carece de periodo.

Ejercicios:

Confeccionar al menos tres números tales que en su expansión decimal infinita carezca de periodo.

2.5.5 Números irracionales

A pesar de que la recta racional es densa, los números racionales no bastan para cubrir toda la línea recta. Para verificarlo, se puede realizar la división de m por n en el sistema decimal, encontrando inicialmente, que la expansión decimal de todo racional es periódica y que el periodo puede tener cualquier longitud. Pueden ocurrir dos casos:

a) La expansión decimal del número es finita (residuo cero) como en $\frac{1}{2}=0.5$, $\frac{3}{4}=0.75$, $\frac{3}{8}=0.375$, $\frac{5}{16}=0.325$; en este caso el período tiene longitud cero.

b) La expansión decimal del racional es infinita, tal como ocurre con los siguientes racionales.

$\frac{5}{3}=1.666\cdots=1.\overline{6}$, $\quad \frac{3}{11}=0.2727\cdots=0.\overline{27}$,

$\frac{31}{27}=1.148148\cdots=1.\overline{148}$, $\quad \frac{23}{41}=0.\overline{56097}$,

$$\frac{12}{23} = 0.\overline{5217391304347826086956}$$

La periodicidad en la expansión decimal infinita es exclusiva de los números racionales y puede contener cualquier longitud y esto es natural puesto que el racional $\frac{m}{n}$ indica la división de m por n y de acuerdo con el algoritmo de la división, en cada paso, existen n posibles residuos y por ello, a lo sumo, al cabo de n divisiones se encuentra un ciclo repetitivo. Al tener en la periodicidad un sello exclusivo de los números racionales, si se presenta un número cuya expansión decimal sea aperiódica, como en los números:

$$\sqrt{2} = 1.414213562\cdots$$
$$\sqrt{3} = 1.732050808\cdots$$
$$\pi = 3.141592654\cdots$$
$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398875\cdots$$

Se asegura que ninguno representa a un racional y ellos pertenecen al conjunto de los números irracionales. Su nombre se debe a que no son la razón entre dos enteros $\frac{m}{n}$ y por ello se asegura, un poco en broma, que son números que no pueden entrar en razón. Así, $\pi = \frac{C}{D}$ es la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, pero C de ninguna manera puede ser un número entero, aunque D sí lo sea. El conjunto de los números irracionales completa la representación de la recta numérica y por increíble que parezca son en cantidad, muchísimos más que el conjunto de los naturales o los racionales. Sin embargo, algunos números irracionales expresados como fracciones continuas simples poseen período dentro de este tipo de representación, cualidad que permite hacer un trabajo de ida y vuelta en este tipo de escritura, es decir, dado un irracional se puede hallar la fracción continua simple y periódica que le corresponde y viceversa.

A continuación, se demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional; este número fue el primer irracional que se descubrió y su aparición originó una crisis en la Matemática de la antigua Grecia. La demostración de su irracionalidad sigue la técnica clásica de las demostraciones indirectas o por reducción al absurdo.

Sea OABun triángulo rectángulo isósceles de cateto 1, tal como se indica en la Figura 6.

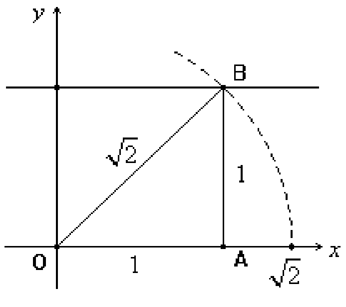


Figura 6. Representación del irracional $\sqrt{2}$

Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OB}^2$, así $\overline{OB}^2 = 1 + 1 = 2$ y así $\overline{OB} = \sqrt{2}$ Como $1^2 = 1 < 2$ y $2^2 = 4 > 2$ se tiene que $\sqrt{2}$ está entre 1 y 2; en consecuencia, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, quedando dos opciones, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ o bien $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Al suponer que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$; o sea $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ donde $a,\ b$ están en $\mathbb{Z}$, $b \neq 1$; a y b no tienen factores en común; es decir son primos relativos o primos entre sí, se conforma una fracción irreducible. Al elevar al cuadrado se consigue $2 = \frac{a^2}{b^2}$, es decir $a^2 = 2b^2$ [1], lo que significa que 2 es un divisor de a^2 y como 2 es un número primo, si $2|a^2$ no hay más alternativa que $2|a$ y por lo tanto a es un número par, esto es $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k$. De aquí se sigue que $a^2 = 4k^2$ y al remplazar en $[1]$ produce $4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2 \Rightarrow 2|b^2$ y siendo 2 un número primo se tiene que $2|b \cdot b \Rightarrow 2|b$ y por ello existe $t \in \mathbb{Z}$ de modo que $b = 2t$. Esto asegura que tanto a como b son múltiplos de 2, lo que contradice la condición inicial de que son irreducibles.

Luego, el supuesto $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ es falso; es decir, $\sqrt{2}$ no es racional. Por la misma vía (Reducción al Absurdo) se demuestra que $\sqrt{3}$ es irracional, al igual que la irracionalidad de muchos otros números. Por ejemplo, y siendo $\sqrt{2}$ un número irracional es elemental demostrar que todos los miembros de la secuencia $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \cdots, \frac{\sqrt{2}}{n}, \cdots$ también son irracionales.

Todos los números de la forma $\sqrt{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, son construibles con regla y compás; la construcción se fundamenta en un método auténticamente inductivo ya que para tal efecto se debe tener la construcción del segmento que representa a $\sqrt{n-1}$, de modo que es suficiente construir un triángulo rectángulo con catetos de dimensión $\sqrt{n-1}$ y 1; la hipotenusa de este triángulo, en concordancia con el teorema de Pitágoras, mide $\sqrt{\left(\sqrt{n-1}\right)^2 + 1} = \sqrt{(n-1)+1} = \sqrt{n}$. Como consecuencia inmediata de este hecho, si $m \in \mathbb{N}$, todos los números de la forma $\frac{\sqrt{n}}{m}$ también son construibles; lo mismo ocurre con otras de formas diversas, como $m\sqrt{n}, \sqrt{m} + \sqrt{n}, \sqrt{m} - \sqrt{n}, \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}, \cdots$

Si α es un número irracional y r es racional distinto de cero, las siguientes combinaciones y expresiones producen números irracionales:

$$\alpha + r\ ;\ \alpha - r\ ;\ r - \alpha\ ;\ r \times \alpha\ ;\ \frac{\alpha}{r}\ ;\ \frac{r}{\alpha}\ ;\ -\alpha\ ;\alpha^{-1}.$$

La demostración de este hecho se realiza de manera elemental por reducción al absurdo. En efecto, al suponer que $\alpha + r = r_1$ con $r_1 \in \mathbb{Q}$ se seguiría que $\alpha = r_1 - r$; y como $(r_1 - r) \in \mathbb{Q}$ se deduciría que α es racional, lo cual es contrario a la hipótesis de ser irracional. Como $\alpha \in \mathbb{Q}$ es imposible, se concluye entonces, que $\alpha + r$ es irracional.

Al suponer que $r \times \alpha$ sea racional, se tendría que $r \times \alpha = r_1$, con $r_1 \in \mathbb{Q}$; por tanto $\alpha = \frac{r_1}{r}$ con $r \neq 0$ y como $\frac{r_1}{r} \in \mathbb{Q}$, entonces $\alpha \in \mathbb{Q}$, lo que es imposible; por ello el número $r \times \alpha$ es irracional.

Al suponer que $\frac{r}{\alpha} = r_1$ sea un racional y siendo $r \neq 0$ y $\alpha \neq 0$, se tiene que $r_1 \neq 0$ y por ello $\alpha = \frac{r}{r_1} \in \mathbb{Q}$ lo que contraría a la hipótesis. Luego $\frac{r}{\alpha}$ es irracional.

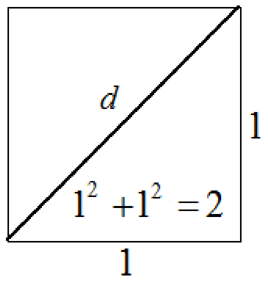
Estos números a-periódicos, de hecho, no son racionales, pues la característica fundamental de ellos es no ser periódicos en su expansión decimal infinita.

El irracional $0{,}1234567891011121314\cdots$ en la que va pintada en la parte decimal, la secuencia ordenada de los números naturales, se llama número de Champernowne por el apellido de su proponente D.G. Champernowne en 1933, sus dígitos arman la secuencia numerable de los números naturales de manera ordenada; la particularidad del número es que cualquier secuencia finita aparece inmersa en ella. Por ejemplo los bloques de todos los números telefónicos del mundo, los números de todos los pasaportes de los habitantes del planeta y todos los bloques numéricos de igual extensión tienen la misma probabilidad de aparecimiento, incluso, la edad actual de cualquier lector aparece infinitas veces, de modo que si tiene 24 años, este registro está en $\cdots 241242243 \cdots$ y también cuano se llegue a los miles en $\cdots 240524062407 \cdots$, por ejemplo.

A partir del número de Champernowne se puede construir una cantidad ilimitada, sin fin de irracionales; por ejemplo, intercalando un cero entre cada natural dentro de la secuencia, con lo que se consigue el irracional $0{,}10203040 \cdots 100110120130 \cdots$ o intercalando dos ceros entre ello para conseguir $0{,}100200300400 \cdots 1000110012001300 \cdots$ o intercalando cualquier bloque de dígitos de cualquier extensión, como en el número $0{,}1138213831384138 \cdots 100138101138 \cdots$ Vaya máquina de producir desde un irracional, una cantidad ilimitada de ellos, pero igualmente, numerable.

Un aspecto de crucial importancia es que entre dos racionales siempre aparece otro, al menos su promedio, que se ubica en el punto medio de cualquier representación lineal. Aunque hasta el momento no se ha definido ninguna relación de orden, es importante mencionar que el conjunto de los racionales configura un cuerpo ordenado, digamos, bien ordenado. Por ejemplo, entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$, está su promedio $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{12}$, donde se cumple que $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$. Siguiendo este método de ir llenando de manera potencialmente infinita los espacios medios por la vía de los promedios, toda mente deduce que, en realidad, entre dos racionales distintos se entrometen infinitos números racionales. Así, entre 0 y 1, aparecen al menos los infinitos racionales de la forma $\frac{1}{n}: \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$.

Esta característica hace que el conjunto $\mathbb{Q}$ sea denso, es decir, espeso, repleto de racionales en su representación; algo así como un queso compacto. Pero por más compacto que sea, en términos microscópicos, aparecen espacios vacíos, espacios del queso en los que no hay queso. ¿Cómo llenar la porosidad del queso?



Se demostró que la diagonal y el lado de un cuadrado no admiten una medida común, algo que les permita comparar, y en consecuencia, se dicen inconmensurables, y los griegos las llamaron alogon, esto es, inexpresables. No hay palabras numéricas para describirlas. Si se llama d a la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, no hay número en $\mathbb{Q}$, entre tantos, entre los infinitos racionales, que se equiparen con d.

Hubo necesidad de esperar cerca de dos mil años, para que entes ideales como $\sqrt{2}$, que es uno de los dos números que elevados al cuadrado producen 2, y por un camino real, se integran al gran imperio de los números.

Infinitos entes como $\sqrt{2}$ que fue el primero, y en seguida toda una colación de entes de la forma $\sqrt{n}$ y de otras formas asombrosas, que se niegan a mantener una relación racional, configuran el conjunto de los números irracionales.

Una aproximación de $\sqrt{2}$ es el siguiente número:

1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799073247846210703885038753432764157 2 ⋯

Los números irracionales tienen una arquitectura compleja y entre ellos hay algunos con mucha fama; acaso el más famoso entre ellos es π, que resulta de la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro; otro de fama y excesivo uso es e, base de los afamados logaritmos neperianos o logaritmos naturales y que es el punto donde confluyen los términos de una sucesión de números racionales (raro, números racionales, acercándose a un punto irracional). Así algunas otras constantes que se emplean en la ciencia y la tecnología. Los irracionales π y e pertenecen a una colección especial de números que se llaman trascendentes, en cambio los de la forma $\sqrt{n}$ son irracionales algebraicos debido al prurito de ser raíces de alguna ecuación polinómica con coeficientes enteros.

El conjunto de los números racionales con el conjunto de los irracionales configura el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. En este conjunto, aparece tal como como en el conjunto de los racionales, el inverso de un número. Así, para el caso de un real $x \neq 0$, se tiene que su inverso denominado x^{-1} es $\frac{1}{x}$.

En particular se cumple lo siguiente:

$$si\ x = \frac{a}{b} \text{ se tiene que } x^{-1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \text{ se escribe como: } \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

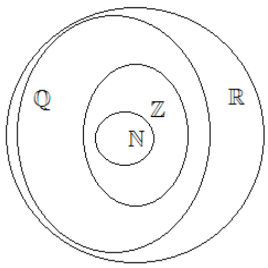
Este hecho particular, permite escribir un número racional de manera singular, haciendo que de cada fracción impropia, mayor que 1, se descomponga en su parte entera más su parte fraccionaria en cada denominador, y haciendo que los numeradores, en cada parte, sean 1.

Las fracciones cuyo numerador sea menor que su denominador se denomina propias y resultan menores que 1.

Ejemplo:

$$\frac{18}{7}=2+\frac{4}{7}=2+\frac{1}{\frac{7}{4}}=2+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

Este tipo de tarea, convierte cualquier fracción en una fracción compuesta denominada fracción continua simple y recalca el aserto que asegura que, cada número se puede representar de infinitas formas.



Con el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, casi se tienen todos los números con sus vicisitudes, desatinos e incomprensiones. Los números negativos hicieron tambalear el hermoso palacio de la aritmética, pues en algún momento se venía de un mundo en el que, si $x<y$, de inmediato se tenía que sus cuadrados preservaban esta relación, esto es $x^2<y^2$.

Pero, de pronto, con la aparición de los números negativos, si $x<y$ es posible que $x^2>y^2$, ya que, por ejemplo, $-3<2$ pero, $(-3)^2=9$, $2^2=4$, con lo cual, a pesar de que $-3<2$, se tiene que $(-3)^2>2^2$.

La multiplicación, también tuvo sus atajos, pisó grandes escollos; pues, se tiene la creencia paradigmática de que al igual que grande dividido entre grande puede ser grande, pequeño entre pequeño debe ser pequeño, y es claro que, en infinitas ocasiones, pequeño entre pequeño es grande, muy grande; tal como en el siguiente caso:

$$\frac{0{,}05}{0{,}00000000025}=200000000$$

¡Este número representa doscientos millones de unidades!

Un inmenso surtidor de números racionales o irracionales, es decir, con periodo o sin periodo en su expansión decimal infinita, son las ecuaciones reales de segundo grado.

Se conoce que la solución de una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones determinadas por la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este sentido, la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, produce las soluciones $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$, entre las cuales $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887\cdots$ número irracional que goza de particular fama y de muchos nombres: número de oro, razón dorada, divina proporción, número sagrado··· y pulula en la naturaleza; además, tiene alta aplicabilidad en el mundo de la ciencia y de las artes.

2.5.6 Fracciones continuas

Las fracciones continuas son un caso particular de las fracciones compuestas; son una herramienta útil en varias ramas de la matemática, se utilizan en el aislamiento y aproximación de raíces reales de polinomios con coeficientes enteros, en el cálculo del máximo común divisor de dos enteros y como test para determinar el carácter irracional de un número real.

Por analogía, la periodicidad de la expansión decimal de un real, determina si un número es racional; en cambio, si carece de periodo, se trata de un número irracional. En su lugar, si la escritura de tal irracional determina una fracción continua simple periódica, se trata de un racional algebraico, pero si la escritura obedece a una fracción continua simple infinita y aperiódica, se trata de un irracional trascendente o de un irracional algebraico, raíz de una ecuación de grado superior a dos.

Las fracciones continuas simples infinitas y periódicas se corresponden con raíces de ecuaciones cuadráticas de coeficientes enteros, y por ello, se llaman radicales sordos o números sordos; acepción que viene del hecho de que los sordos no pueden oír razones, o que no puede entrar en razón. En este caso, se trata de números que no se pueden escribir como la razón de dos enteros; es decir, no pueden entrar en razón. Así, las fracciones continuas simples infinitas y periódicas son números sordos o números irracionales de los que uno de sus representantes es el número de oro $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, también llamado, razón dorada o divina proporción.

El origen de estas fracciones se remonta a la antigua Grecia. Euclides las estudió en el Libro 8 de Los Elementos; más tarde fueron utilizadas por el matemático hindú Aryabhata (476-550) al resolver ecuaciones diofánticas.

En la edad moderna, los italianos Rafael Bombelli y Cataldi, en sus escritos sobre álgebra entre 1572 y 1579 *L'Algebra parte maggiore dell' aritmética* (Bologna 1572), desarrollan una forma de aproximar raíces resultantes de aplicar las fórmulas desarrolladas por Tartaglia, Cardano y Ferrari. Su método resulta ser la introducción a las fracciones continuas como aparece explicado en el texto de Miriam Acevedo de Manrique y Mary Falk de Losada titulado Recorriendo el Álgebra de la Universidad Nacional de Colombia, en las páginas 61 y 62.

Cien años después, Wallis en su obra Opera Mathematica (1695), comienza a dar los primeros pasos hacia la formalización del concepto; y más tarde, Euler en su memoria De fractionibus continuis de 1737 (1707-1783) avanza en la teoría, tal como se conoce en la actualidad.

Por su parte, Lambert (1728-1777) y Lagrange (1736-1813) establecen las bases teóricas firmes de este concepto; siendo Joseph Louis Lagrange quien en 1768 formalizó la teoría en su obra *Solution d'un problème d'arithmétique*. Lagrange resolvió la ecuación de Fermat $x^2 - y^2 = 1$ aplicando las fracciones continuas.

Una fracción continua es una fracción compuesta de la forma que se indica en seguida, donde los a_i y $b_i$son números enteros:

$$a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}}$$

Juega papel importante, aquellas fracciones en las que todos sus elementos son positivos; entre ellas, las conformadas por numeradores $a_i = 1$ que se denominan, fracciones continuas simples.

En el caso en que numeradores y denominadores sean positivos, pero todos los términos estén enlazados por el signo menos "–", la fracción se llama reducida.

La siguiente expresión constituye una fracción continua finita:

$$2 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{2}{5}}}$$

Una tarea que surge de inmediato, es conducirla a la forma convencional simplificada $\frac{a}{b}$ donde $MCD(A, B) = 1$, lo cual se logra operando desde los niveles bajos y ascendiendo en concordancia con la operatoria aritmética usual.

Ejemplo:

Simplificar la siguiente fracción compuesta:

$$2 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{2}{5}}}$$

Solución:

$$2 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{2}{5}}} = 2 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{3}{\cfrac{12}{5}}} = 2 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{5}{4}} = 2 + \cfrac{3}{\cfrac{9}{4}} = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

Simplificar la siguiente fracción continua reducida:

$$\frac{1}{2-\frac{3}{2-\frac{4}{5}}}$$

Solución:

$$\frac{1}{2-\frac{3}{2-\frac{4}{5}}}=\frac{1}{2-\frac{3}{\frac{6}{5}}}=\frac{1}{2-\frac{5}{2}}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$$

De hecho $-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=-2$, también es una fracción continua reducida que adquiere el mismo valor que fracción del ejemplo anterior. Esto indica que la escritura de números reales como fracciones continuas reducidas, no es única.

Rafael Bombelli, idea una forma algebraica para calcular fracciones continuas infinitas para números reales que son raíces cuadradas de naturales; el método consiste en iniciar con la parte entera del radical que puede ser por defecto o por exceso. En el primer caso, resulta una fracción continua infinita corriente; y en el segundo, una fracción continua infinita reducida.

Se expone como ejemplo el cálculo de la fracción correspondiente a $\sqrt{14}$ cuya parte entera por defecto es 3 y por exceso es 4. En el primer caso $\sqrt{14}=3+x$ siendo x la parte decimal menor que 1.

Elevando al cuadrado y realizando algunas transformaciones algebraicas, se consigue que $14=(x+3)^2=x^2+6x+9$ desde donde se puede escribir que $x(6+x)=5$, con lo cual se tiene que $x=\frac{5}{6+x}$.

En este punto, se hace suficiente ir disponiendo x de manera reiterativa, por el valor encontrado, así:

$$x=\frac{5}{6+\frac{5}{6+\frac{5}{6+\dots}}}$$

Por lo tanto, si se toma $\sqrt{14}=3+x$, donde 3 es el mayor entero menor de $\sqrt{14}$, entonces se puede representar $\sqrt{14}$ por la siguiente fracción continua:

$$\sqrt{14}=3+\frac{5}{6+\frac{5}{6+\frac{5}{6+\cdots}}}$$

Por otra parte, si se toma $\sqrt{14}=4-x$, donde 4 es la parte entera mayor de $\sqrt{14}$, entonces, se tiene la siguiente ecuación: $14=(4-x)^2$; de lo cual se obtiene la expresión $x=\frac{2}{8-x}$

Reemplazando de manera reiterada el valor de x se consigue la fracción:

$$x = \cfrac{2}{8 - \cfrac{2}{8 - \cfrac{2}{8 - \cdots}}}$$

Por lo tanto, $\sqrt{14}$ se puede expresar como la siguiente fracción continua reducida:

$$\sqrt{14} = 4 - \cfrac{2}{8 - \cfrac{2}{8 - \cfrac{2}{8 - \cdots}}}$$

En general, las raíces irracionales de ecuaciones cuadráticas con coeficientes enteros, se pueden escribir como fracciones continuas de infinitos pisos y, en consecuencia, al detenerse en cada uno de ellos, se genera una sucesión de números reales que converge a un límite.

Ejemplos:

Considerando la fracción continua de $\sqrt{14}$ que se indica en seguida, obtener una sucesión que converja a $\sqrt{14}$:

$$\sqrt{14} = 3 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{5}{6 + \cdots}}}$$

Solución:

Los valores aproximados en escritura decimal, determinan la siguiente sucesión:

$$3;\ 3 + \frac{5}{6} = \frac{23}{6} \approx 3.8333;\ 3 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{5}{6}} = \frac{153}{41} \approx 3.7317;\ 3 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{5}{6}}} = \frac{1033}{276}$$
$$\approx 3.7427$$

Como se observa, corresponde a una sucesión oscilante que converge a $\sqrt{14} \approx 3.741657.$

Al tomar la fracción continua reducida de $\sqrt{14}$ que se indica en seguida, se obtener una sucesión que converge a $\sqrt{14}$:

$$\sqrt{14} = 4 - \cfrac{2}{8 - \cfrac{2}{8 - \cfrac{2}{8 - \cdots}}}$$

Solución:

Utilizando valores aproximados en escritura decimal, se determina la siguiente sucesión:

$$4;\ 4-\frac{2}{8}=\frac{15}{4}\approx 3.75;\ 4-\frac{2}{8-\frac{2}{8}}=\frac{116}{31}\approx 3.7419;\ 4-\frac{2}{8-\frac{2}{8-\frac{2}{8}}}=\frac{449}{120}$$
$$\approx 3.7416666$$

Se observa que esta sucesión converge más rápido que la del ejemplo anterior, y de manera monótona decreciente, a su límite $\sqrt{14}\approx 3.741657$.

2.5.6.1 Convergencia de fracciones continuas

Es importante anotar que, no toda fracción continua reducida es convergente, en el caso que lo sea, su convergencia es más rápida que la fracción continua general y ésta a su vez, es más rápida que la de una fracción continua simple.

En algunos casos, el límite de convergencia para fracciones continuas se puede calcular por métodos algebraicos elementales.

Ejemplo:

Para la fracción continua que sigue, se puede proceder, inicialmente, calculando su inversa, así:

$$x=5+\frac{6}{5+\frac{6}{5+\cdots}}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{5+\frac{6}{5+\frac{6}{5+\cdots}}}$$

Multiplicando la expresión por 6 se obtiene:

$$\frac{6}{x}=\frac{6}{5+\frac{6}{5+\frac{6}{5+\cdots}}}$$

Sumando 5 a los dos términos de la igualdad, se consigue la expresión:

$$\frac{6}{x}+5=5+\frac{6}{5+\frac{6}{5+\frac{6}{5+\cdots}}}=x$$

En resumen, se tiene $\frac{6}{x}+5=x$ que de inmediato lleva a la ecuación cuadrática:

$x^2 - 5x - 6 = 0$ cuya raíz positiva es $x = 6$, valor que es el límite buscado. Por lo tanto:

$$5 + \cfrac{6}{5 + \cfrac{6}{5 + \cdots}} \cong 6$$

2.5.6.2 Un método para determinar el límite de algunas fracciones continuas

Se describe un método para calcular el límite de las fracciones continuas de la siguiente forma:

$$x = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cdots}}}$$

Se halla el inverso de los dos miembros de la igualdad:

$$\frac{1}{x} = \cfrac{1}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cdots}}}$$

Se multiplica por b los dos términos de la ecuación:

$$\frac{b}{x} = \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cdots}}}$$

Sumando a se obtiene:

$$\frac{b}{x} + a = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cdots}}}$$

Expresión que deriva en la ecuación:

$$\frac{b + ax}{x} = x$$

De aquí se obtiene la ecuación $x^2 - ax - b = 0$ que debe resolverse y escoger entre las dos raíces el límite de la fracción continua.

2.5.7 Fracciones continuas simples

Ya se mencionó que una fracción continua simple, es aquella fracción continua en la que todos los numeradores que la componen son 1; el carácter menos complicado de estas expresiones hace que su estudio y uso sea práctico y, en consecuencia, merece detenerse y estudiarlas.

Un primer resultado indica que, todo número racional, esto es, toda fracción racional, se puede escribir de manera única como una fracción continua simple finita (numeradores uno).

Ejemplo:

$$\frac{225}{157} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}$$

2.5.7.1 Escritura horizontal de una fracción continua simple

De hecho, fracciones resultantes de razones entre grandes números se escriben como fracciones continuas simples finitas, extensas y complejas, que pueden abarcar más de una página.

Por el volumen que puede abarcar la escritura de una fracción, se ha ideado una escritura horizontal que es la designación convencional sencilla $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]$.

El punto y coma delimita la parte entera y por ello es de gran importancia en la expresión; los restantes elementos son los denominadores consecutivos en su orden y se separan con coma $(,)$.

Esta convención determina una única forma de escribir una fracción continua simple que, su vez, se relaciona con un único número racional. Además, todo número racional se escribe de manera única como una fracción continua simple finita.

Con la notación descrita, la fracción del ejemplo anterior se representa así:

$$\frac{225}{157} = [1; 2,3,4,5]$$

En el tratamiento de las fracciones continuas simples, aparecen dos tareas:

Escribir como fracción continua simple cualquier número racional

Convertir en una razón una fracción simple continua y finita.

En las dos tareas, aparece de modo tácito el modo de extraer la parte entera de un número real y la conversión de su parte decimal inferior a uno, en su inverso, que es un real mayor que uno, y por ello, tiene parte entera mayor que cero.

Ejemplo:

Determinar la fracción continua simple del número racional $\frac{17}{11}$.

Solución:

Se procede de la siguiente manera:

$$\frac{17}{11}=1+\frac{6}{11}=1+\frac{1}{\frac{11}{6}}=1+\frac{1}{1+\frac{5}{6}}1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{6}{5}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}$$

Con la nueva notación, se escribe así: $\frac{17}{11}=[1;1,1,5]$

Números racionales con numeradores y denominadores grandes, determinan fracciones continuas simples de mayor extensión.

Ejemplo:

$$\frac{345}{7893}=[0;22,1,7,4,1,2]$$

$$\frac{34522}{8893}=[3;1,7,2,7,1,2,2,1,2,2]$$

2.5.7.2 Método de Bombelli para radicales cuadráticos

El método de Bombelli, suele entregar en ocasiones, fracciones continuas simples infinitas para radicales cuadráticos.

Ejemplo:

Para el número irracional $\sqrt{2}$ se obtienen los siguientes pasos:

$$\sqrt{2}=1+x\rightarrow\ 2=1+2x+x^2\rightarrow x(x+2)=1\rightarrow x=\frac{1}{2+x}$$

Al remplazar de manera reiterativa el valor de x se tiene en definitiva que:

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}=[1;2,2,2,\cdots]=\left[1;\overline{2}\right]$$

Existe una analogía entre la expansión decimal infinita de los racionales, que tienen periodo, versus los irracionales que no lo tienen. Las fracciones continuas simples de radicales cuadrados de números naturales son periódicas puesto que se corresponden con irracionales algebraicos; en cambio, los trascendentes tienen fracciones continuas aperiódicas. Al igual que en la escritura decimal de los reales, los periodos pueden tener cualquier longitud y el cálculo manual de los mismos compromete un volumen generoso de trabajo, en la que juega papel importante, la racionalización de las expresiones.

Ejemplo:

Determinar la fracción continua simple para el número irracional $\sqrt{3}$.

Solución:

$$\sqrt{3}=1+\sqrt{3}-1=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\sqrt{3}-1}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}}}$$

En este punto, es claro que se repite el punto de partida.

Por esta razón se encuentra que $\sqrt{3}=\left[1;\overline{1,2}\right]$, desde donde se avizora la sucesión oscilante de reales que se aproxima al valor $\sqrt{3}$; $[1,\ 2,\ 1.66,\ 1.75,\ 1.7272,\cdots]$, la aproximación decimal de $\sqrt{3}$ es 1.732050.

La alternancia de una fracción continua simple infinita, al acercarse a un punto de convergencia está que, en algún momento, una cola finita tiene la forma $\frac{1}{a}$ siendo a un número cualquiera; y en el otro paso se halla $\frac{1}{a+\frac{1}{a}}$ que tiene un denominador mayor que el primero.

$$a+\frac{1}{a}>a\to\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a}}<\frac{1}{a}\to a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a}}<a+\frac{1}{a}$$

Con lo cual se llega a la siguiente desigualdad:

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a}}<\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a}}}$$

Lo que determina la forma oscilante de acercarse al punto de convergencia.

De igual, manera, y con un trabajo extenuante se encuentra que $\sqrt{5}=\left[2;\overline{4}\right]$, $\sqrt{7}=\left[2;\overline{1,1,4}\right]$ donde la barra indica el periodo que se repite de forma indefinida, cuya longitud puede alcanzar cualquier valor entero.

2.5.7.3 Límite de una fracción continua simple infinita y periódica

Determinar el límite de una fracción continua simple infinita y periódica, es encontrar el número irracional que la representa; proceso que, si la longitud del periodo es grande, configura una tarea algebraica dispendiosa y compleja.

Ejemplo:

Calcular el límite para la fracción $\mu = \left[2; \overline{1,1,2}\right]$.

Solución:

Sea $x = \left[0; \overline{1,1,2}\right]$, entonces:

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + x}}}$$

Lo cual deriva en las siguientes expresiones algebraicas:

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{3 + x}{2 + x}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2 + x}{3 + x}} = \cfrac{1}{\cfrac{5 + 2x}{3 + x}} = \frac{3 + x}{5 + 2x}$$

En definitiva, se tiene que:

$$\frac{3 + x}{5 + 2x} = x \rightarrow 2x^2 + 4x - 3 = 0$$

La raíz positiva de la ecuación $2x^2 + 4x - 3 = 0$ es:

$$x = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}$$

Dado que $x = \left[0; \overline{1,1,2}\right]$ entonces, Con estas consideraciones se tiene que:

$$\mu = x + 2 = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} + 2 = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$$

Vale la pena recalcar sobre el exigente trabajo que conlleva el cálculo del límite si la longitud del período es grande y si su composición es compleja y con números de gran tamaño.

Ejercicios:

Calcular el límite para $\mu = \left[3; \overline{1,1,34,2,2,5}\right]$ y $\mu = \left[31; 1,12, \overline{14,21,23,51,34,34,1}\right]$.

2.5.7.4 Resultados de las fracciones continuas simples

Toda fracción continua finita representa un número racional; y de modo inverso, todo número racional se puede expresar de manera única como fracción continua finita simple.

Todo número irracional ξ, se expresa de manera única mediante una fracción continua simple infinita $\mu = [a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_s, \cdots]$, y de manera inversa, toda fracción continua infinita representa a un número irracional ξ.

Toda fracción continua infinita y periódica representa un número irracional de la forma $\sqrt{n}$ siendo n un número natural o un irracional que se corresponde con la raíz de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros.

Ejemplos:

$$\sqrt{2} = [1; \overline{2}] \qquad \sqrt{5} = [2; \overline{4}] \qquad \sqrt{7} = [2; \overline{1,1,4}] \qquad \frac{2+\sqrt{11}}{2} = [2; \overline{1,1,1,12,1,1,1,2}]$$

Los periodos se señalan con una barra, cuya longitud, al igual que en la expansión decimal infinita de los reales, puede tomar cualquier valor entero.

Todo número racional de la forma $\sqrt{n^2+1} = [n; \overline{2n}]$.

Una fracción continua es la raíz de una ecuación polinomial cuadrática si y solo si, es periódica.

En esta dirección se señalan dos resultados:

El irracional $\sqrt{n^2+1} = [0; \overline{m}]$es raíz de la ecuación cuadrática $x^2 + mx - 1 = 0$, puesto que tal ecuación se puede escribir como $x(m+x) = 1$, de donde $x = \frac{1}{m+x}$ y de manera reiterativa se escribe como $x = \frac{1}{m+\frac{1}{m+\frac{1}{m+\dots}}}$

Si m es un entero mayor que uno, entonces los irracionales $x_1 = [m; \overline{1, m-1}]$ y $x_2 = [0; m, \overline{1, m-1}]$ satisfacen la ecuación cuadrática $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$.

En 1737, Leonardo Euler demuestra que el valor de una fracción continua periódica infinita, constituye una irracionalidad cuadrática.

En 1770, Lagrange prueba el inverso del resultado anterior, esto es, que toda irracionalidad cuadrática se representa mediante una fracción continua infinita y periódica.

Este hecho se puede evidenciar, por ejemplo, con irracionales como:

$$\frac{2+\sqrt{5}}{3} = [2; 2,2,2, \overline{1,12,1,2,2,2}]$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; \overline{1}] = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

Estos ejemplos, aseguran, que al igual que en la expansión decimal infinita de racionales, en los cuales el periodo puede aparecer mucho después de las primeras cifras, la fracción continua simple de las raíces de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros, también puede aparecer, varios pisos debajo de la misma.

Las raíces positivas de polinomios con coeficientes enteros de grado superior a dos, no suelen expresarse como fracciones continuas simples periódicas.

Por ejemplo, las raíces positivas de $x^4 - 10x + 1 = 0$ son $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ y $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ que son mutuamente inversas; esto es, $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1$, hecho que se evidencia en la escritura como fracción continua simple de estas raíces, que carecen de período. Dichas raíces son:

$\sqrt{3} - \sqrt{2} =$ [0, 3, 6, 1, 5, 7, 1, 1, 4, 1, 38, 43, 1, 3, 2, 1, $\cdots$]

$\sqrt{3} + \sqrt{2} =$ [3, 3, 6, 1, 5, 7, 1, 1, 4, 1, 38, 43, 1, 3, 2, 1, $\cdots$]

En todos los casos, en los que $m > n$ se tiene que la ecuación cuártica $x^4 - 2(m+n)x^2 + (m-n)^2 = 0$ tiene como raíces positivas a los irracionales $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ y $\sqrt{m} - \sqrt{n}$ tales que $(\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt{m} - \sqrt{n}) = m - n$ y cuyas fracciones continuas simples carecen de periodo.

Ejercicios:

Llevar a la forma $\frac{a}{b}$ simple las siguientes fracciones continuas finitas:

$$2 + \cfrac{8}{3 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{2}{5}}} \qquad 2 + \cfrac{8}{2 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{4}}}} \qquad 2 + \cfrac{8}{5 + \cfrac{5}{5 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{5}{4}}}} \qquad 3 + \cfrac{8}{4 + \cfrac{5}{15 + \cfrac{2}{15 + \cfrac{5}{24}}}}$$

Llevar a la forma $\frac{a}{b}$ simple las siguientes fracciones continuas finitas:

$$2 - \cfrac{8}{3 - \cfrac{4}{3 - \cfrac{2}{5}}} \qquad 3 - \cfrac{8}{4 - \cfrac{5}{15 - \cfrac{2}{15 - \cfrac{5}{24}}}} \qquad 2 - \cfrac{8}{2 - \cfrac{4}{3 - \cfrac{2}{5 - \cfrac{1}{4}}}} \qquad 2 - \cfrac{8}{2 - \cfrac{4}{3 - \cfrac{2}{5 - \cfrac{1}{4}}}}$$

Llevar a la forma $\frac{a}{b}$ simple las siguientes fracciones continuas simples finitas:

$$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}} \qquad 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4}}}} \qquad 2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4}}}} \qquad 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{24}}}}$$

Llevar a la forma $\frac{a}{b}$ simple las siguientes fracciones continuas simples finitas:

$[2; 1,1,2,3,5,3]$ $\quad$ $[2; 1,3,2,10,2,1,12,2,5,3]$

$[3; 1,1,2,1,12,3,5,3]$ $\quad$ $[2; 1,3,2,10,2,1,11,2,2,2]$

Siguiendo el método de Rafael Bombelli, calcular las fracciones continuas infinitas y las fracciones continuas reducidas correspondientes a las raíces cuadradas de los primeros diez números primos, a saber: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{17}, \sqrt{19}, \sqrt{23}$, $\sqrt{29}$.

Calcular el límite correspondiente a las siguientes fracciones continuas infinitas:

$$\frac{4}{7+\frac{4}{7+\frac{4}{7+\cdots}}} \qquad \frac{3}{8+\frac{3}{8+\frac{3}{8+\cdots}}} \qquad \frac{2}{18+\frac{2}{18+\frac{2}{18+\cdots}}}$$

$$\frac{8}{5+\frac{8}{5+\frac{8}{5+\cdots}}} \qquad \frac{18}{11+\frac{18}{11+\frac{18}{11+\cdots}}} \qquad \frac{8}{3+\frac{8}{3+\frac{8}{3+\cdots}}}$$

Calcular las fracciones continuas simples de las raíces positivas de la ecuación que sigue, para cinco valores de n en los naturales, escogidos al azar: $x^2 - nx - n^2 = 0$.

Calcular las fracciones continuas simples de las raíces positivas de la ecuación que sigue, para cinco valores de n en los naturales, escogidos al azar: $x^2 - n^2x - n^3 = 0$.

Determinar la ecuación cuadrática de la que es raíz cada una de las siguientes fracciones continuas: $[1; 2,2,\overline{1,1,3}]$, $[2; \overline{1,2,3}]$, $[3; 5,1,\overline{2,2,5}]$, $[3; 2,7,\overline{1,4,3,4}]$.

A partir de las fracciones continuas simples correspondientes a $\sqrt{n}$ y deteniéndose en un piso determinado, calcule aproximaciones racionales, escritas es la forma $\frac{a}{b}$ para la raíz cuadrada de los primeros diez números primos.

Para algunos valores de n, encuentre la raíz positiva de las ecuaciones cuadráticas de la forma:

$x^2 - nx - 2n = 0$, $x^2 - nx - (2n)^2 = 0$, $x^2 + nx - (2n)^2 = 0$ y $x^2 + nx - 2n = 0$

Luego, determine la fracción continua simple que corresponde a la m-ésima parte de esa raíz, para algunos valores de m destacando su periodo y la longitud de ese periodo.

Por ejemplo, las raíces de $x^2 - 5x - 25 = 0$ son $\frac{5+5\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{5-5\sqrt{5}}{2}$, al tomar la raíz positiva, se debe desarrollar la fracción continua de $\frac{5+5\sqrt{5}}{4}$, $\frac{5+5\sqrt{5}}{6}$, $\frac{5+5\sqrt{5}}{8}$, que se corresponde con la mitad, la tercera, la cuarta parte, etc., siendo $m = 2,3,4,\cdots$; como caso particular, se puede determinar que la fracción $\frac{5+\sqrt{5}}{8} = [2, \overline{44, 2, 1, 3, 2, 1, 1, 10, 1, 1, 2, 3, 1, 2}]$ que evidencia un periodo de longitud 14.

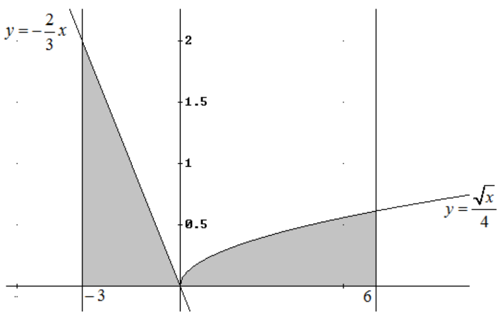
Estudiar la expresión de la suma de fracciones continuas simples para irracionales de la forma $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ decidiendo respecto de su periodicidad.

Estudiar el desarrollo de fracciones continuas simples para irracionales de la forma $\frac{\sqrt{n}}{m}$ donde n y m son números naturales.

Para la ecuación $x^4 - 2(m+n)x^2 + (m-n)^2 = 0$ sus raíces positivas son los irracionales $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ y $\sqrt{m} - \sqrt{n}$, escoja algunos pares de valores para m y n y desarrolle para algunos pisos, la fracción continua simple de tales raíces.

Los periodos, irracionales especiales

Los periodos son números irracionales especiales que emergen de los valores de áreas entre curvas definidas por ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales. Demostrar que las sumas que resultan de calcular la longitud de los caminos es un periodo, se convierte en probar que todo número de la forma $m + \sqrt{n}$ es el área determinada por curvas que definen a tales números. Y en efecto es así.



Para configurar el periodo $3+\sqrt{6}$, por estudiar un caso, se toman las funciones $y=\frac{\sqrt{x}}{4}$ y $y=-\frac{2}{3}x$ de modo que $-\frac{2}{3}\int_{-3}^{0} xdx = 3$ y $\int_0^6 \frac{\sqrt{x}}{4}dx = \sqrt{6}$ y con ello el irracional $3+\sqrt{6}$ es el área comprendida por las curvas $16y^2 - x = 0$, $y + 2x = 0$, $x = -3$, $x = 6$ y $y = 0$.

El periodo $m+\sqrt{n}$ es el área comprendida por las curvas $4n^2y^2 - 9x = 0$, $my + 2x = 0$, $x = -m$, $x = n$ y $y = 0$ en virtud a que $\frac{3}{2n}\int_0^n \sqrt{x}dx = \sqrt{n}$ y $-\frac{2}{m}\int_{-m}^{0} xdx = m$.

Cobra sentido creativo y recreativo el tomar esta postura didáctica que consiste en explotar al máximo el recurso temático, de interrelacionar conceptos, de permitir que intervengan asuntos superiores u otros conceptos viejos o nuevos que, con seguridad, ayudan a despertar el interés del lector o del escucha haciendo justicia al papel que debe desempeñar la escuela al mediar en el carácter dignificante, en el crecimiento personal de los jóvenes para que al fin, sean capaces de organizar sus propias preguntas.

CAPÍTULO 3.

NÚMEROS REALES

CAPÍTULO 3. NÚMEROS REALES

3.1 SOBRE EL CONCEPTO DE IGUALDAD

Sorprende que una dificultad entre los humanos es el adecuado manejo de los conceptos simples; la igualdad, por decir algo, se ha convertido en una idea irradiada de manera natural en toda actividad que se emplea de manera mecánica sin prever las propiedades que posee de identidad, simetría y transitividad.

Al poner en cada mano un trompo, es fácil decir que en cada mano existe la misma cantidad de trompos sin inmiscuirse en la naturaleza particular de cada uno porque pueden ser hechos de materiales diferentes, o el uno pintado de otra manera, o más grande el uno que el otro; el uno más pesado que el otro, o teniendo en cuenta la diferencia específica respecto de otra cualidad. La igualdad es un concepto incorruptible; si alguien dice que Juan y Raquel tienen la misma cantidad de dinero, aparece la igualdad como un concepto que aúna a los dos chicos desechando las ideas corruptas de la cantidad de billetes, o si algunos de los mismos están más deteriorados que el de los otros o si sus series no coinciden o si son de diferente denominación.

La igualdad, es un concepto que trasciende y es simple en el sentido que obedece a tres reglas:

El principio de identidad: $a = a$ “Aristóteles lo dijo: cada cosa es idéntica consigo misma”.

El principio de simetría: si $a = b$ entonces $b = a$

El principio de transitividad: si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$.

Simples principios que no se manejan a la perfección. Al preguntar cuántos números hay en la expresión $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ es usual escuchar “cinco”; la verdad es que con ella solo se está representando un número, el “quince”.

En la expresión $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \cdots}}}}$ que contiene infinitos radicales, no hay infinitos “unos”, en realidad solo hay un número, el número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ conocido como razón de oro, divina proporción, número de oro, número sagrado, razón aurea, razón dorada, media áurea o proporción áurea, entre otros nombres, como se dijo antes.

También, cuando alguien lee $5 + 3 + 7 = 15$ pierde la posibilidad de utilizar la expresión $15 = 5 + 3 + 7$ que puede favorecer, en el sentido de la descomposición de un número; método que permite realizar el cálculo aritmético de las operaciones, como cuando se pide sumar $47 + 56$ y se ejecuta esta acción por la vía de escribir $47 + 3 + 50 + 3$, es decir $50 + 50 + 3 = 103$.

Con la propiedad transitiva y recurriendo a la trampa de los matemáticos de llamar “equis” a lo desconocido, es claro que:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \cdots}}}} \quad (1)$$

Elevando al cuadrado los dos elementos de la igualdad, se encuentra la expresión (2):

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \cdots}}}} \quad (2)$$

Teniendo en cuenta la expresión (1), la (2) se puede escribir así:

$x^2 = 1 + x \quad (3)$

Esto dado que, de la expresión (1) se tiene que:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \cdots}}}}$$

De la expresión (3) se obtiene la ecuación:

$x^2 - x - 1 = 0$ cuya solución positiva es: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (4)$

Por transitividad, comparando las expresiones (1) y (4), se tiene que

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \cdots}}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

El resultado es un número irracional algebraico, es una de las raíces de una ecuación polinómica en una variable con coeficientes enteros.

Este tipo de números pertenecen al conjunto de los números reales y tienen la particularidad de que la expansión decimal infinita carece de periodo; por lo cual son números irracionales.

Hasta aquí, se ha considerado a los números reales como la unión de los racionales con los irracionales. Una clasificación distinta separa a los números reales en dos categorías; Algebraicos y Trascendentes.

Un número real x cualquiera, se llama algebraico si satisface una ecuación algebraica con coeficientes enteros o racionales, de la forma:

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$, $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{Z}$ y $a_n \neq 0$

Si el número x no satisface una ecuación polinómica con coeficientes racionales se llama trascendente (Más allá de...); entre estos números, como ya se dijo, se encuentran los famosos irracionales π y e.

Como se observa, el concepto de número algebraico es la generalización del concepto de número racional en el caso en que el grado del polinomio sea 1. ($n = 1$) así, $\sqrt{2}$ es algebraico porque satisface la ecuación $x^2 - 2 = 0$; $\sqrt[3]{3}$ es algebraico porque satisface la ecuación $x^3 - 3 = 0$.

Vale la pena advertir que mientras todo número irracional algebraico x (con expansión decimal infinita periódica) se puede aproximar mediante una sucesión de números racionales x: $\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \cdots, \frac{a_k}{b_k}, \cdots$ cuyos denominadores son crecientes pero es imposible hacer lo mismo con los números trascendentes, debido a que para ellos, en algún paso se encuentra que $\left|x - \frac{a}{b}\right| > \frac{1}{b^{n+1}}$ desde algún n en adelante.

3.1.1 El número π

El número π, irracional trascendente goza de tanta fama como el número e que es la base de los logaritmos neperianos o naturales dentro de la matemática; y la preocupación por su estudio se remonta a la antigüedad. En el libro I de Reyes, capitulo 7, versículo 23, al hablar de la construcción del palacio de Salomón, se lee:

Hizo así mismo un mar de fundición de 10 codos del uno al otro lado, redondo y de 5 codos de alto, y señaló en derredor un cordón de 30 codos

Este mar redondo, no era más que un pozo donde los egipcios se bañaban por costumbre. Según lo explica el versículo, el diámetro del pozo es de 10 codos y la longitud de la circunferencia es de 30 codos; existe pues, entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, una razón de 3 que es el valor de π revelado en la Biblia.

Los egipcios al estudiar el área de la esfera; 40 siglos antes de Cristo, encontraron una aproximación a π con un valor igual al cuadrado de la fracción $\frac{16}{9}$ o sea, $\frac{256}{81} =$ 3.160493 que es un valor de π con un error de aproximadamente 2 centésimas. Arquímedes, siglo III a. C. mostró que π está comprendido entre las fracciones $\frac{223}{71}$ y $\frac{22}{7}$ y se debe observar que $\frac{223}{71} =$ 3,140845070422535211267605633802 8, resultado cercano a π.

El interés por π ha sido y es importante, los poetas le han cantado; se han ideado versos como reglas mnemotécnicas para π en diversos idiomas. En el libro de *Las Matemáticas y la Imaginación*” de Kasner y Newman en la página 59 aparece: “Recurriendo a las series convergentes, Abrhamn Sharp en 1669, calculó π con 71 decimales. Dase, calculador rápido como el relámpago, orientado por Gauss, calculó en 1824 el número π con 200 decimales. En 1854 el alemán Ritcher halló 500 decimales para π y Shanks, algebrista inglés, alcanzó la inmortalidad de los geómetras, determinando el número π con 707 cifras decimales." William Shanks trabajó durante 20 años para obtener su resultado.

Se comprobó mucho más tarde (en 1945), que este último cálculo falla a partir de la cifra 528. Hacia 1980 se había calculado a π con más de diez mil cifras decimales. Actualmente π se ha calculado con más de un millón de cifras y una pareja de japoneses escribieron el que se conoce como el libro más aburrido del mundo, de 800 páginas, que contiene las primeras 16 millones de cifras decimales de π.

Existen muchas fracciones que se aproximan de forma sorprendente a π, una de ellas fue descubierta por Tsu Ch'ung Chih, astrónomo chino, en el siglo V de nuestra era, lo que indica un adelanto de mil años a los matemáticos occidentales; la fracción descubierta por el chino se puede formar mediante un truco de prestidigitación, basta tomar los tres primeros números naturales impares y escribirlos por pares; 1, 1; 3, 3; 5,5 y a continuación los tres últimos se colocan sobre los tres primeros formando el fraccionario $\frac{355}{113}$. Es increíble de creer, pero el cociente determina que $\frac{355}{113} = 3{,}14159292035398230088495575221 24$ mientras que π con treinta cifras de aproximación es 3.141592653589793238462643383 27; lo que señala que la fracción tiene las seis primeras cifras decimales igual a las de π. En la antigüedad se tomaba a π aproximadamente igual a la raíz cuadrada de 10 que es aproximadamente $\sqrt{10}$=3.162277660, valor un poco alejado de este número trascendente. La raíz cúbica de 31 se aproxima mucho más, tal número es igual a $\sqrt[3]{31}$=3.14138065239139; la suma de las raíces cuadradas de 2 y de 3, también es una buena aproximación $\sqrt{2}+\sqrt{3}$=3.14626436994197.

Las primeras tentativas para determinar el valor exacto de π están ligadas al problema de la cuadratura del círculo. A partir de la búsqueda de la solución de este problema, han aparecido varias construcciones gráficas que se aproximan a π. Una de las más sencillas se debe a Tsu Ch'ung Chih que se mencionó arriba y procede como sigue. se construye el primer cuadrante de una circunferencia de radio 1 (ver la Figura 7 con las líneas que se dibujan en el gráfico que se muestra abajo y de tal modo que bc sea $\frac{7}{8}$ del radio, dg sea $\frac{1}{2}$ del radio, de paralelo con ac y df paralelo con be. Se puede demostrar que la distancia fg es igual a:

$$\frac{16}{113} = 0{,}1415929203539823\cdots$$

Como $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113}$, si se dibuja un segmento igual al triple el radio y se le suma el segmento fg, el segmento resultante difiere de π en menos de una millonésima de unidad.

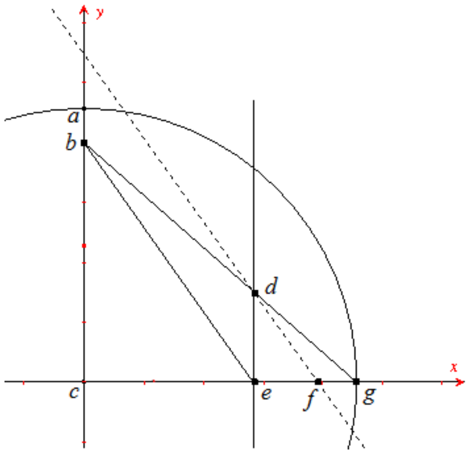


Figura 7. Construcción aproximada de π

Quienes trabajando en el problema de la cuadratura del círculo han creído haber descubierto el valor exacto de π forman un gran contingente; ninguno tan terco ni tan caprichoso en su soberbia como el filósofo inglés Thomas Hobbes (1588-1679), quien combinó su elevado pensamiento con la más profunda ignorancia en este particular tema geométrico. En la época de Hobbes no se enseñaba matemáticas a los ingleses cultivados y éste leyó por primera vez los Elementos de Euclides cuando ya había cumplido los cuarenta años. Al llegar al teorema de Pitágoras exclamó asombrado: “¡Por Dios! ¡Esto no es posible!” Y repasó con behemencia la demostración hasta quedar convencido. Durante el resto de su vida se entregó al estudio de la geometría con ardor. “La geometría tiene algo que se parece al vino”, argüía.

Si Hobbes se hubiera contentado con ser un matemático aficionado, el resto de su vida hubiese sido llevadera y tranquila, pero empecinado en su monstruosa egolatría se sintió dotado para realizar grandes descubrimientos en la matemática. En 1655, a los 67 años de edad publicó su libro De corpore (Sobre los cuerpos) que contiene un curioso método para cuadrar el círculo. El método; como todos los que existen referidos a la construcción con regla y compás de π; era una buena aproximación, pero Hobbes estaba convencido de su exactitud. Jhon Wallis (1616-1703), matemático y criptógrafo inglés, publicó un folleto en el que establece los errores de Hobbes y con esta publicación surge uno de los más largos, divertidos y estériles duelos, librado por dos espíritus selectos. Durante más de 25 años se dirigieron los más seleccionados sarcasmos y las más aceradas críticas. Wallis, mantuvo la disputa tan solo para ridiculizar a Hobbes, creando duda sobre las opiniones políticas y religiosas de Hobbes que Wallis detestaba.

Hobbes hace reimprimir su libro incluyendo un ultílogo titulado Six Lessons to the Professors of Mathematics (Seis lecciones para profesores de matemáticas); Wallis riposta con Due Correction for Mr Hobbes in School Discipline for not saying his Lessons right (Castigo escolar impuesto al Señor Hobbes, por no dar sus lecciones en forma debida). Hobbes va al contra ataque con Marks of the absurd Geometry, Rural Language, Scottish Church Politics, and Barbarisms of Jhon Wallis, (Notas sobre la geometría absurda, el lenguaje patán, la política de la Iglesia escocesa y otros barbarismos de Jhon Wallis). Wallis devuelve la afrenta con *¡Hobbiani Puncto Dispunctio! or the Undoing of Mr Hobbes'points* (¡Hobbiani Puncto Dispunctio! o la refutación de los puntos del Sr. Hobbes).

Mientras tanto, Hobbes había publicado en París, un absurdo método sobre la duplicación del cubo; Hobbes escribía: "O bien sólo yo estoy loco, o ellos (los profesores de matemáticas) han perdido por completo el juicio, no podemos, pues, aceptar una tercera opinión, a menos que aceptemos que todos estamos locos."

Wallis contestó: "La refutación está de más, pues si él está loco, seguramente no atenderá a razones; por otra parte, si somos nosotros los locos, tampoco nos encontraremos en condiciones de intentar convencerle."

Con algunas treguas, la disputa continuó hasta la muerte de Hobbes que ocurrió cuando ya tenía 91 años. En uno de los últimos ataques, Hobbes escribió: "El señor Hobbes jamás ha intentado provocar a nadie, pero quien lo provoque descubrirá que su pluma es al menos tan hiriente como la suya. Todos vuestros escritos no son sino errores o sarcasmos; esto es, nauseabundos flatos, hedores de mulo viejo cinchado con exceso tras un hartazgo. Yo he cumplido. Os he tenido en consideración por esta vez, pero no lo repetiré...".

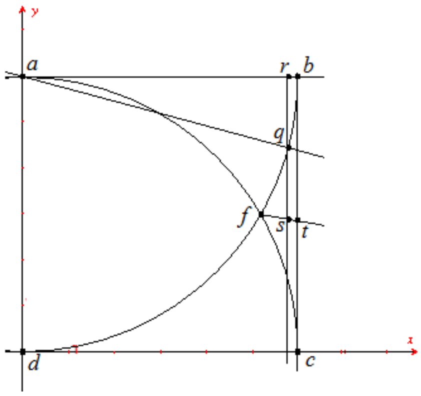


Figura 8. Método de Hobbes para cuadrar el círculo

Por su parte, Wallis se ufanaba de explicar a los demás de la "incapacidad del Señor Hobbes para aprender lo que no sabe". Hobbes publicó cerca de una docena de métodos diferentes para cuadrar el círculo. El primero, que es uno de los mejores se muestra a continuación y se corresponde con la Figura 8.

En un cuadrado de lado unidad se trazan los arcos ac y bd, que son cuadrantes de sendas circunferencias de radio unidad (ver Figura 8. Se biseca el arco bf y se rotula como q a este punto medio. Se traza la recta rq paralela a un lado del cuadrado y se prolonga hasta que qs sea igual a rq. Se dibuja a continuación la recta fs que corta al lado del cuadrado en t. Hobbes mantenía que la longitud del arco bf es exactamente igual al del segmento bt. Dado que la circunferencia contiene 12 veces el arco bf, π sería seis veces la longitud del segmento bt. De este modo el valor de π sería $3.1419\cdots$.

Hobbes constituye un caso típico de un hombre de genio que se aventura en exceso por una rama de la ciencia sin la preparación necesaria y que disipa sus facultades en vacuidades pseudocientíficas.

Hoy se sabe que ninguna construcción puede dar el valor exacto de π, asombra saber que Wallis sabía que la única forma posible de calcular su valor exacto era a través de un procedimiento algorítmico infinito que converja hacia π. Él mismo, descubrió uno de los más sencillos que tiene un asombroso parecido con la regla descubierta por el chino Tsu Ch'ung Chih y que se presenta por el cálculo de:

$$\pi = 2\left(\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}\times\frac{10}{9}\times\frac{10}{11}\times\cdots\right)$$

Una de las más curiosas características del cálculo de las 707 cifras calculadas por el inglés William Shanks es su aversión al 7 y es que cada uno de los dígitos aparece en promedio 70 veces, excepto el 7 que sólo aparece 51; pero es maravilloso saber que después de corregir los errores mencionados en los cálculos (falla a partir de la cifra 528), los 7 que hacían falta aparecieron inmediatamente; más aún, hay varias ternas de sietes en la expresión decimal de π. Se han encontrado quíntuplas de 7's; de hecho, se encuentran infinidad de ternas de cada uno de los dígitos, varias series de 7777 y la sorprendente 999999.

El número e, aproximadamente igual a 2.7182818284590452353 es un número real trascendente cuya fama se equipara a la de π; fue introducido en el ambiente matemático por el prolífico Leonhard Euler y empleado por el matemático escocés John Napier o John Neper (1550-1617) quien introdujo el primer sistema de logaritmos, descrito en Mirifici logarithmorum canonis descriptio (1614) para facilitar los cálculos en astronomía y según sus propias palabras, "reducir el trabajo a la mitad." El sistema establecido por Napier se conoce como logaritmos naturales o logaritmos neperianos.

3.1.2 El número e

El número se e calcula a través de aproximaciones sucesivas de números racionales de la forma $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ como se aprecia en la Tabla 8.

Tabla 8. Valores aproximados del número e

$\boldsymbol{n}$	$\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$	$\boldsymbol{n}$	$\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$
3	2.370370370	500	2.715568520
10	2.593742460	1000	2.716923932

50	2.691588029	2000	2.717602570
100	2.704813829	5000	2.718010046
200	2.711517122	10000	2.718145918

En consecuencia, la definición del trascendente e se adopta como el límite: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ y en consecuencia, los límites de la forma 1^∞ dependen de e, por ejemplo $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3n} = e^{-3}$, $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$, $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = \frac{\sqrt{e}}{e}$.

Contrario a lo que un neófito supondría, la aparición de e es muy frecuente. En el mundo comercial, aparece en los cálculos financieros, en particular, en los cálculos atinentes al interés compuesto; en los procesos de crecimiento y decrecimiento de poblaciones; en el cálculo de probabilidades, donde se establece a través de la distribución normal; en las funciones trigonométricas, en las ecuaciones diferenciales, en las series.

3.2 OPERACIONES

3.2.1 Adición y multiplicación de números reales

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ está provisto de dos operaciones: adición y multiplicación.

La adición es una operación que a cada par de números reales (a, b) le asigna un único número real llamado suma de a y b que se denota con $a + b$.

La multiplicación es una operación que a cada par (a, b) de números reales le asigna un número real llamado producto de a y b que se denota $a \times b$, $a \cdot b$ o simplemente por ab.

La adición y multiplicación de reales satisfacen las siguientes propiedades:

Asociatividad

A1: Asociatividad de la adición: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

M1: Asociatividad de la multiplicación $(ab)c = a(bc)$.

Conmutatividad

A2: Conmutatividad $a + b = b + a$.

M2 $ab = ba$.

Existencia y unicidad del neutro

A3: Existencia y unicidad del neutro de la adición: existe el cero, tal que $a + 0 = a$

M3: Existencia y unicidad del neutro de la multiplicación: existe un único real llamado uno, denotado con 1 y que cumple la igualdad: $1 \times a = a$.

Existencia y unicidad del opuesto y del inverso

A4: Existencia y unicidad del opuesto: para cada número real a existe un único número real denotado con $-a$, llamado opuesto de a que cumple la igualdad $a + (-a) = 0$.

M4: Existencia y unicidad del inverso: para cada número real a diferente de 0, existe un único número real, denotado con a^{-1} que cumple la igualdad $aa^{-1} = 1$

Distributiva de la multiplicación respecto de la adición

Las dos operaciones se relacionan a través de la distributividad de la multiplicación respecto de la adición, que cumple la siguiente igualdad $a(b + c) = ab + ac$

Columbrando en la alta cúspide de la lógica y con el uso de estas propiedades, se desprenden otras propiedades, como curiosas y prácticas deducciones.

Propiedad cancelativa

Aristóteles lo aseguró previamente: si a cosas iguales se agregan cosas iguales se siguen cosas iguales, esto es, $a = b$ es equivalente a decir que $a + c = b + c$, hecho que en uno de los dos sentidos se llama la propiedad cancelativa; además, si $a = b$ y $c = d$ entonces $a + c = b + d$. Igual, si se tienen números diferentes de cero, de $ac = bc$ se infiere que $a = b$.

Estas relaciones permiten establecer piruetas algebraicas que muchas veces se pasan por alto.

Ejemplo:

Resolver la ecuación $x + 5 = 7$

Solución:

Es posible escribir $x + 5 = 2 + 5$ y aplicando la propiedad cancelativa se llega a $x = 2$.

Igual, si por allí aparece el producto de a por 25; $a \times 25$ se puede escribir $25 = \frac{100}{2\times2}$, con lo cual, $a \times 25 = \frac{a\times100}{2\times2}$, que es equivalente a escribir $a \times 25 = \frac{\frac{a\times100}{2}}{2}$.

Esto significa que para multiplicar cualquier número por 25 es preferible agregarle dos ceros al número, lo que equivale a multiplicar por 100 y enseguida dividir tal número por 2, dos veces.

Ejemplo:

Realizar la multiplicación: 132×25

Solución:

Aplicando la regla anterior para multiplicar por 25, se tendría el siguiente esquema:

$132 \rightarrow 132 \times 100 \rightarrow 13200 \rightarrow 132200 \div 2 \rightarrow 6600 \div 2 \rightarrow 3300$

Con lo cual se obtiene que: $132 \times 25 = 3300$.

Esto de usar las propiedades incluyendo las que van apareciendo, recrean hechos conocidos por todos, como por ejemplo la tabla del cero: "todo número multiplicado por cero es cero".

Esto se ve combinando las propiedades $a \times 1 = a$ y $1 + 0 = 1$, porque al reemplazar la segunda en la primera se tiene $a \times (1 + 0) = a$, o lo que es lo mismo $a \times (1 + 0) = a + 0$, pero aplicando la propiedad distributiva se llega a que
$a \times 1 + a \times 0 = a + 0$, esto es $a + a \times 0 = a + 0$ y aquí es suficiente con cancelar a para obtener en definitiva que $a \times 0 = 0$.

Y lista la tabla del cero. Se dice, en este punto, que 0 tiene carácter absorbente, todo lo absorbe desde la multiplicación y lo reduce a cero. Y es el único número del mundo que logra eso, de modo que cuando se tenga la igualdad $ab = 0$, uno de los dos factores (O ambos), ineluctablemente tiene que ser 0.

A propósito, calcular el producto $(x - a)(x - b)(x - c) \cdots (x - z)$.La respuesta es 0 puesto que en algún momento aparecerá el factor $x - x$, que todo lo absorbe.

La práctica hace al albañil, es poco práctico seguir al milímetro cada uno de los principios que se han destacado al resolver una u otra ecuación. Las del tipo $ax + b = 0$, seguirían una trayectoria como $ax + b = 0 \rightarrow ax + b = b + (-b) \rightarrow ax = -b \rightarrow ax = \frac{a}{a} \times (-b) \rightarrow ax = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) \rightarrow x = -\frac{b}{a}$. Largo camino que un escolar lo reduce a dos pasos $ax + b = 0 \rightarrow ax = -b \rightarrow x = -\frac{b}{a}$.

3.2.2 Sustracción y división de números reales

A partir de las operaciones de adición y multiplicación se definen la sustracción y división de números reales, en esencia son lo mismo.

Se denomina sustracción de números reales a la operación que a cada par de números reales a y b le hace corresponder el número $a + (-b)$ que se denota con
$a - b$; el número $a - b$ se llama diferencia de a y b.

Se denomina división de números reales a la operación que a cada par de números reales a y b, $b \neq 0$, le hace corresponder el número real $a \div b = \frac{a}{b}$ que se denomina cociente de a y b.

3.2.3 Potencia de un número real

Para todo número real a, $a \neq 0$, y n en $\mathbb{N}$ se define $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^n = a^{n-1}a$ (n veces repetido el factor a) y al mismo tiempo se define $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

La expresión a^n se lee "potencia enésima de a".

Al número a se le llama base y a n exponente.

Esta definición se extiende al caso en que el exponente es un número racional con la definición $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

Desde esta simple ampliación de la definición y con el uso de las propiedades de la potenciación se encuentran hechos correspondientes al uso de radicales, por ejemplo $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, que se extiende a cualquier radical en $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ o simplificar expresiones radicales como $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \left(\left(\left(a^{\frac{1}{2}}\right)a\right)^{\frac{1}{2}}a\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{a^7}$.

Este tipo de relaciones permite entender objetos números como π^e, donde e se concibe como el límite de los términos de la secuencia $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ que contiene solo números racionales.

3.2.4 Relación de orden en los números reales

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es un conjunto ordenado, bien ordenado ya que existe un subconjunto propio de él que se denomina $\mathbb{R}^+$ de modo que para cualquier número real arbitrario a, se cumple que a está en $\mathbb{R}^+$, o bien $(-a)\mathbb{R}^+$ o, en últimas, $a = 0$, hecho que se conoce con el nombre de la ley de tricotomía.

Si se encuentra que a y $b$son elementos de $\mathbb{R}^+$se tiene de inmediato que su suma $a + b$ y su producto ab siguen dentro de $\mathbb{R}^+$.

Cada que un real a que esté en $\mathbb{R}^+$ se dice que se trata de un real positivo y se escribe $a > 0$; por su parte, si el opuesto a está en $\mathbb{R}^+$ es decir, si $(-a)$ está en$\mathbb{R}^+$se asevera que a es un real negativo y se escribe $a < 0$.

Así, el producto de dos números positivos es positivo y la suma de dos números positivos es un número positivo. Este es el prurito por el cual al conjunto de los números reales se le dice conjunto bien ordenado.

De inmediato, se tiene que el producto de dos números reales negativos es un número positivo, mientras que el producto de un número positivo por otro negativo es un número negativo. Como una consecuencia se tiene que el cuadrado de todo real a, nunca puede ser un real negativo, esto se escribe con la fórmula $a^2 \geq 0$.

3.2.5 Definición de la relación menor que

Si a y b son dos números reales, se dice que a es menor que b, y se escribe $a < b$, si $b - a$ es un número real positivo. Esta definición equivale a lo siguiente:

$a < b$ si existe c en $\mathbb{R}^+$ tal que $a + c = b$.

Si a es menor que b también significa que b es mayor que a, y se escribe $b > a$.

Así las cosas, $2 < 6$ porque $6 - 2 = 4$ es positivo, o porque justamente existe el 4 que hace que $2 + 4 = 6$.

Si a es un número mayor que 0 entonces a es un número positivo y, recíprocamente, si a es un número positivo, entonces a es mayor que 0. Esto da derecho a recitar que si a es un número menor que 0, a es un número negativo y, recíprocamente, si a es negativo, a es menor que cero.

Hablando con términos poco técnicos, lo números reales se particionan en los positivos, los negativos y el conjunto unitario conformado por el cero; y como se ha visto, el uso de las propiedades en el ámbito operativo aritmético, se enriquece con el empleo adecuado del cero y el uno.

La relación de igualdad satisface propiedades que derivan en reglas de uso; por su parte, las relaciones de orden también tienen sus propias reglas emanadas de los principios aristotélicos que aseveran, por ejemplo, que, si a cosas desiguales se le agregan cosas iguales, siguen cosas desiguales. Esto, apoyados en la semiótica, se representa con símbolos en las siguientes propiedades.

3.2.6 Propiedades de las relaciones de orden

Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.

Ejemplo:

a) Como $-3 < 7$ se sigue que $-3 + 5 < 7 + 5$, esto es $2 < 12$ (todo real negativo es menor que cualquier real positivo, es el sentido de la partición).

b) Desde $\sqrt{2 + \sqrt{2}} < 1 + 3\sqrt{5}$ se llega a $2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}} < 3 + 3\sqrt{5}$.

Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$. Se denomina propiedad de monotonía; es la monotonía propiamente dicha.

Ejemplo:

$-3 < 7$ y $4 < 6$, vía desde la que se consigue que $1 < 13$, sumando término a término las desigualdades.

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. Esta, tal como en la igualdad, se denomina propiedad transitiva.

Ejemplo:

Siendo $-1 < 13$ y $13 < \frac{33}{2}$, se conecta y diceque $-1 < \frac{33}{2}$.

Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$. Esta cuarta y la quinta propiedad son de cuidado, solo cuando el factor c es positivo se conserva el sentido de la desigualdad.

Ejemplo:

Desde $-2 < 3$, al escoger como factores a 2, 3, 4, 5, se consiguen los siguientes resultados $-4 < 6$, $-6 < 9$, $-8 < 12$, $-10 < 15$.

Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$. El factor interviniente es negativo, en consecuencia, el sentido de la desigualdad se invierte.

Ejemplo:

Siendo $-2 < 5$, al escoger como factores -1, -2, -3, -4,-5, aparecen las siguientes relaciones: $2 > -5$, $4 > -10$, $12 > -15$, $8 > -20$.

Si $0 < a < b$ entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Vale la pena anotar para el caso de números racionales positivos que: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ siempre que $ad < bc$

Ejemplo:

a) Siendo $\frac{2}{3} < \frac{5}{4}$ (toda fracción propia es menor que una impropia) se sigue que $\frac{3}{2} > \frac{4}{5}$

b) De $8 < 13$ se llega de inmediato a $\frac{1}{8} > \frac{1}{13}$.

Si $a < b$ entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$. El promedio aritmético siempre se pone en la mitad, esto es $\frac{a+b}{2} - a = b - \frac{a+b}{2}$

Ejemplo:

Dado que $1 < 11$, entonces $1 < \frac{1+6}{2} = 6 < 11$

Siendo $-4 < 16$ se llega a $-4 < \frac{-4+16}{2} = 6 < 16$.

Estas propiedades se convierten en un surtidor de más desigualdades, tal es el caso de $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

En efecto, dado que $(a-b)^2 \geq 0$ entonces, $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, donde:

$a^2 + b^2 \geq 2ab$, expresión que se reescribe como $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$.

Sustituyendo $a = \sqrt{x}$ y $b = \sqrt{y}$ se tiene que $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

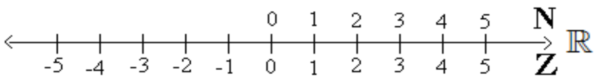
Resultado que establece que, el promedio aritmético de reales positivos nunca es menor que su promedio geométrico.

Ejemplo:

Si $x = 2$ y $y = 50$, realizando los respectivos remplazos se tiene que $26 > 10$.

3.3 LA RECTA NUMÉRICA

Una representación es la que se refiere a la ubicación de los números reales en una recta. Esta representación se basa en el axioma métrico que es el mejor ejemplo de lo que se denomina una escala y que establece la forma en que "a cada punto de la recta corresponde un único número real, y recíprocamente, a cada número real le corresponde un único punto de la recta".



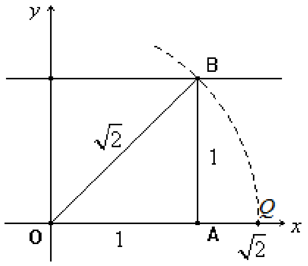
Se establece así una biyección entre los números reales y los puntos de la recta, lo que permite una identificación de cada punto A de la recta con un número real x que se llama su coordenada, y se escribe $A(x)$. De este modo, se construye un vínculo indisoluble entre un objeto geométrico a través de la magnitud de distancia y los números que representan la cantidad.

La biyección establece de manera efectiva la relación "menor que". Si un punto $O(0)$ se ubica como punto de partida de la escala, todos los puntos a la derecha de él se corresponden con números positivos, y los que se ubican a izquierda, son números negativos. Del mismo modo, establecer que el punto $P(u)$, si aparece en la recta a la izquierda de un punto $Q(v)$, señala que u es menor que v.

Representar números racionales en la recta real es simple, pero representar irracionales requiere utilizar recursos adicionales. Por ejemplo, todos los números irracionales de la forma $\sqrt{n}$ requiere del uso recursivo, iterativo, del famoso teorema de Pitágoras. Enseguida se propone la representación esquemática en la recta real de $\sqrt{2}$ y la demostración de su irracionalidad.

3.3.1 Representación del número irracional raíz cuadrada de 2

Sea OAB un triángulo rectángulo isósceles de cateto 1.



Por el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OB}^2$, así $\overline{OB}^2 = 1 + 1 = 2 \rightarrow$

$\overline{OB} = \sqrt{2}$

Como $1^2 = 1 < 2$ y $2^2 = 4 > 2 \rightarrow \sqrt{2}$ está entre 1 y 2 y en consecuencia $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, quedando dos opciones, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ o bien $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Por Pitágoras, $OB = \sqrt{2}$ y por ello es suficiente trazar un arco de circunferencia con centro en O y radio OBque corta al eje x en el punto Q cuya coordenada es justamente $\sqrt{2}$.

Siendo $\sqrt{2}$ un número irracional, es elemental demostrar que todos los términos de la secuencia $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \cdots \frac{\sqrt{2}}{n}, \cdots$ también son irracionales que se pueden contruir con regla y compás. Todos los números de la forma $\sqrt{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, son construibles con regla y compás; la construcción se fundamenta en un método auténticamente inductivo ya que, para tal efecto, se debe tener construido el número $\sqrt{n-1}$, de modo que es suficiente construir un triángulo rectángulo con catetos de dimensión $\sqrt{n-1}$ y 1; la hipotenusa de este triángulo, en concordancia con el teorema de Pitágoras, mide $\sqrt{\left(\sqrt{n-1}\right)^2 + 1} = \sqrt{(n-1)+1} = \sqrt{n}$. Como consecuencia inmediata de este hecho; si $m \in \mathbb{N}$, todos los números de la forma $\frac{\sqrt{n}}{m}$ también son construibles; lo mismo se puede afirmar de otros de formas diversas, como las siguientes: $m\sqrt{n}, \sqrt{m} + \sqrt{n}, \sqrt{m} - \sqrt{n}, \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$.

3.3.2 Definición de la relación menor o igual que

La ley de tricotomía, combinación del prefijo tri y de la palabra monotonía, de monótono, predice como verdad absoluta que al comparar dos números se cumple que: el primero es mayor que el segundo o el primero es menor que el segundo o los dos son iguales. Dos cualquiera de estas tres alternativas, se reúnen en una sola cuando se propone como alternativa que un número es menor o igual o mayor o igual que otro.

Se dice que $a$es menor o igual que b y se escribe $a \leq b$ si $a < b$ o bien $a = b$. Las expresiones $a \leq b$ y $b \geq a$ son equivalentes. Frente al caso en el cual $a \leq b$ y al mismo tiempo $b \leq a$, no existe otra alternativa que $a = b$.

En este punto hay que admitir que todas las propiedades establecidas para la relación “menor que” siguen subsistiendo.

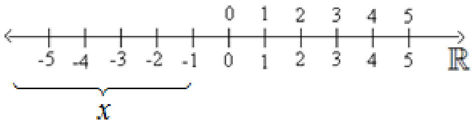
Por ejemplo, si $a \leq b$ y al mismo tiempo $b \leq c$ es válido anotar que $a \leq c$, propiedad que como antes, se llama transitiva. Se debe recordar que la propiedad de mayor cuidado es aquella que introduce el mismo factor a las dos partes de una desigualdad; el sentido de la desigualdad persiste si tal factor es positivo y se invierte en caso contrario.

El uso de las propiedades expuestas permite, con exceso grado de mutismo, deducir desde unas primeras expresiones, unas segundas como las siguientes.

Expresiones iniciales	**Expresiones transformadas**
$-1+\sqrt{5} \leq \frac{13}{2}$	$4+\sqrt{5} \leq 5+\frac{13}{2}$
$7+2\pi \leq 7+\pi^{\pi}$	$2\pi \leq \pi^{\pi}$
$2 \leq \pi$	$-2 \geq -\pi$
$-3 \leq 3^2$	$9 \geq -3^3$
$-1 \leq 2$ y $2 \leq \frac{11}{3}$	$-1 \leq \frac{11}{3}$
$4\left(\frac{2}{3}\right) \leq 4\left(\sqrt{7}\right)$	$\frac{2}{3} \leq \sqrt{7}$
$4\left(\frac{2}{3}\right) \leq 4\left(\sqrt{7}\right)$	$-2+4\left(\frac{2}{3}\right) \leq -2+4\left(\sqrt{7}\right)$
$2 \leq 6$ y $-\sqrt{2} \leq 6+\pi$	$2-\sqrt{2} \leq 12+\pi$
$\frac{2}{3} \leq \pi^2$	$\frac{3}{2} \geq \frac{1}{\pi^2}$

La relación de igualdad engendra las ecuaciones, las relaciones de orden engendran las inecuaciones; por su parte, las peripecias algebraicas que se hacen deben respetar las propiedades de las mismas.

El gráfico que sigue representa a todos los infinitos números que hacen que $x \leq -1$.



Por lo que se ha expuesto, por la vía de propiedades, también representa a la desigualdad como $2x \leq -2$ y desde allí a otra como $2x + 3 \leq 1$. Siendo $-5 \leq 7$, procede también escribir $2x - 2 \leq 8$, pero esta nueva desigualdad tiene soluciones adicionales.

Resolver una inecuación, es proceder al contrario de lo expuesto, con la rigurosidad de cumplir, a satisfacción, con cada una de las propiedades.

Ejemplo:

Encontrar los valores que satisfacen la relación $5 - 3x \leq -2$.

Solución:

Implica recorrer un camino como el que sigue:

$$5 - 3x \leq -2 \rightarrow -3x \leq -7 \rightarrow 3x \geq 7 \rightarrow x \geq \frac{7}{3}$$

De modo que, infinitos valores como 8, $\frac{46}{3}$, 3π, hacen que la expresión $5 - 3x \leq -2$ se configure como una verdad.

Ejercicios:

Resolver las siguientes inecuaciones: $2x - 5 \leq -8$, $3x - 5 \leq -8 + x$, $4x + 5 \leq -8$, $4x + 5 \leq -8 + x$, $4x + 5 \leq -8 - x$, $7x + 5 \leq 16$, $5 - 4x \leq 16$, $5 - 4x \leq 16 - 2x$, $5 - 4x \leq 1 + 2x$.

Proponer ejemplos de desigualdades y transformarlas en unas nuevas conservando las propiedades correspondientes.

3.3.3 Aplicación de las desigualdades

Las desigualdades se aplican en la solución de problemas científicos y tecnológicos y en la aritmética aparecen funciones importantes; por ejemplo, la parte entera de un número.

La parte entera de un número real x se define como el mayor número entero no mayor que x. La parte entera se designa como $[x]$ y en consideración a lo expuesto $[x] \leq x < [x] + 1$.

Ejemplo:

De la desigualdad $3 < \pi < 4$, se sigue que $[\pi] = 3$; de $-2 < -\sqrt{2} < -2 + 1$, se sigue que $[-\sqrt{2}] = -2$; y siempre así, como para ver que $\left[\frac{17}{3}\right] = 5$, $[6] = 6$, $[-6] = -6$.

El mundo de las desigualdades está repleto de resultados notables que resultan de utilidad, a veces incluso, hasta en eventos sociales. Uno de ellos y de simple comprensión, asegura que si el producto de n números reales positivos es igual a “uno”, su suma jamás es menor que n.

Con la simbología moderna y el uso de subíndices se escribe que si $x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = 1$, siendo cada factor un real positivo (observe como los números naturales sirven para enumerar los reales a través de sus subíndices).

Entonces $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \geq n$.

Se pueden tomar miles de miles de ejemplos, que conforman lo asegurado.

Con grupos de a dos:

$\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1$ y con ello $\frac{3}{5} + \frac{5}{3} = \frac{34}{15} \geq 2$

$\frac{31}{51} \times \frac{51}{31} = 1$ y se cumple que $\frac{31}{51} + \frac{51}{31} = \frac{3562}{1581}$ que aproximadamente es $2{,}253004427 \cdots$, con lo cual, $\frac{31}{51} + \frac{51}{31} \geq 2$.

Con grupos de a tres:

Si se escogieran grupitos de a tres se confeccionarían valores que superan al “tres”.

$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{35}{12} = 1$ se sigue que $\frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{35}{12} \geq 3$; y en efecto, $\frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{35}{12} = \frac{1717}{420}$ que se aproxima a 4,088095238 $\cdots$

Ejercicios:

Ejemplificar este resultado con grupos de dos, tres y cuatro números racionales positivos.

Un resultado que se deriva del anterior, asegura que si $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ son n, números reales positivos, entonces los números $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_3}{a_4}, \ldots, \frac{a_n}{a_1}$ suman al menos n. Observe que $\frac{a_1}{a_2} \times \frac{a_2}{a_3} \times \frac{a_3}{a_4} \times \cdots \times \frac{a_n}{a_1} = 1$.

Ejemplo:

Si $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_2 = \frac{4}{7}$ y $a_3 = \frac{3}{11}$ se obtiene que $\frac{a_1}{a_2} = \frac{7}{6}$, $\frac{a_2}{a_3} = \frac{44}{21}$ y $\frac{a_3}{a_1} = \frac{9}{22}$ y su suma es $\frac{7}{6} + \frac{44}{21} + \frac{9}{22} = \frac{848}{231}$ que es 3,67099567 $\cdots$ aproximadamente. Así, $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_1} \geq 3$.

Ejercicios:

De los siguientes seis números positivos racionales, escoja cinco grupos de a tres y verifique la veracidad de la afirmación anterior: $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{3}, \frac{6}{11}, \frac{13}{5}$ y $\frac{3}{8}$.

Es oportuno cerrar esta parte aduciendo que el producto de las sumas de n números reales positivos y de sus inversos, jamás es inferior al cuadrado de n. Esto significa que al adoptar a_1, a_2, …, a_n como números reales se cumple que:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Ejemplo:

Tan solo tres números se tiene $(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9$, como ocurre con $\left(\frac{2}{9} + \frac{3}{4} + \frac{5}{7}\right)\left(\frac{9}{2} + \frac{4}{3} + \frac{7}{5}\right) = \frac{2635}{216}$ que aproximadamente es 12,19907407 $\cdots$.

Ejercicios:

Escoger al menos cinco grupos de entre los seis reales positivos siguientes y verificar el resultado precedente: $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{7}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{12}{5}$ y $\frac{7}{4}$.

3.3.4 Orden de números pequeños

Escoger entre los números enteros 333, 876722, 88, 54545468 y 34 el más pequeño o el más grande es una tarea en la que el ojo juega un papel determinante de gran simpleza al revisar la cantidad de cifras de tales números, incluso si ellos fueran tomados en los enteros. ¿Qué número es más grande entre 5, 679, -45677 y -343?

No ocurre igual si los números se escogen del conjunto de los quebrados; por ejemplo, al tener el conjunto $\frac{343}{123}$, $\frac{43}{23}$, $\frac{63}{17}$, $\frac{676876873}{15337}$, $\frac{676876873}{576785337}$, no resulta evidente escoger el mayor o el menor, a pesar de que la razón dicta que entre un conjunto de fracciones homogéneas es mayor la de mayor numerador; en este sentido, la secuencia de fracciones $\frac{5}{29}$, $\frac{13}{29}$, $\frac{17}{29}$, $\frac{27}{29}$, $\frac{37}{29}$, $\frac{57}{29}$, se ha ordenado de menor a mayor. Igual, se aprende en la escuela que, entre un conjunto de quebrados de igual numerador, es mayor aquel que tiene menor denominador; de este modo, la secuencia $\frac{57}{29}$, $\frac{57}{24}$, $\frac{57}{14}$ y $\frac{57}{7}$, también se ha ordenado de menor a mayor. Estos dos criterios salvan la actividad de ordenar fracciones positivas, en contadas ocasiones. No siempre.

¿Qué ocurre si los números se dan en forma decimal? A simple vista, no es factible determinar cuál de los números $0{,}00000000045$, $0{,}00000000134$ y 7×10^{-9} es el más grande o el más chico. Incluso, si se escriben de manera potencial como 45×10^{-11} y 134×10^{-11} y 7×10^{-9}, la tarea de ordenar, no se ve tan simple.

Pero al hacerlo así, se ha dado un gran paso, pues el último número es igual a 700×10^{-11}. Siendo así, el conjunto dado se convierte en el trío 45×10^{-11}, 134×10^{-11} y 700×10^{-11}.

De hecho, 700×10^{-11} es el más grande, pues ahora es suficiente comparar los factores enteros y no las potencias. Siendo honestos, es tanto como utilizar el criterio de las fracciones homogéneas, en el sentido que es mayor la que tiene mayor numerador, pues el trío de números se escribe de manera fraccionaria como $\frac{45}{10^{11}}$, $\frac{134}{10^{11}}$ y $\frac{700}{10^{11}}$.

Si el deseo fuese escoger el decimal más pequeño existente dentro del conjunto de números $0{,}0004343$; $0{,}000047$; $0{,}0047$; $0{,}0000012$; $0{,}97$; $2{,}78$, su grafía amerita cambiarse a la forma potencial para ver que $0{,}0004343 = 4343 \times 10^{-7}$, $0{,}000047 = 470 \times 10^{-7}$, $0{,}0047 = 47000 \times 10^{-7}$, $0{,}0000012 = 12 \times 10^{-7}$, $0{,}97 = 9700000 \times 10^{-7}$ y $2{,}78 = 27800000 \times 10^{-7}$ y con ello determinar que el más pequeño entre todos los decimales dados es $0{,}0000012$.

El procedimiento exhibido aquí, es idéntico al de reducir las fracciones a común denominador, es decir, a convertirlas en fracciones homogéneas.

Ejercicios:

Ordenar de menor a mayor lo siguientes listados de números decimales: $(0.067,\ 0.000157,\ 0.0033)$, $(0.000617,\ 0.0000877,\ 0.0087200)$, $(2.67,\ 2.089,\ 2.00872)$.

CAPÍTULO 4.

POTENCIACIÓN Y NÚMEROS DECIMALES

CAPÍTULO 4. POTENCIACIÓN Y NÚMEROS DECIMALES

4.1 POTENCIACIÓN

La multiplicación se deriva de la adición y la potenciación de la multiplicación. En efecto, para un real positivo a, diferente de 1, se define $a^1 = a$, $a^2 = a^1 \times a$, $a^3 = a^2 \times a$ y, en general, $a^n = a^{n-1} \times a$.

Ejemplo:

Una expresión como 5^4 es la forma abreviada de representar el producto en el que el único factor es 5 y se repite 4 veces.

Si se escribe 7^8, se está expresando el producto $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$, sin saber cuánto efectivamente es este número, que con un simple cálculo produce
$7^8 = 5764801$.

4.1.1 Definición

En la expresión $p = a^n$, p se llama potencia, a es la base y n el exponente.

Ejemplo:

La potencia 5^4 es 625, está en base 5 y el exponente es 4.

La potenciación ofrece una forma resumida de representar grandes números; un gúgol, por ejemplo, que es un uno seguido de cien ceros, invento de un niño americano, deja de representarse como:

10000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
y simplemente se denota por 10^{100}.

La tierra entera sembrada desde el polo sur hasta el polo norte, no es capaz de producir durante un milenio esta cantidad en granos de trigo.

Siendo así, $7^7 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$, que de acuerdo a la propiedad asociativa puede reescribirse como $7^7 = (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7 \times 7)$, es decir, como $7^7 = 7^3 \times 7^4$, o así: $7^7 = 7^5 \times 7^2$.

Desde este caso particular, pasar al general, es todo un proceso, en verdad:

$a^n \times a^m = a^{m+n}$.

Ahora bien, como las letras son sordas, entonces: $a^p \times a^q \times a^r = a^{p+q+r}$ y en lugar de la base a, se puede utilizar la base u, o z; incluso, utilizar las letras del alfabeto griego α, β, χ, δ, como viniera al caso.

4.1.2 Propiedades

De ipso facto, y como ejercicio simple, aparecen varias reglas y/o propiedades simples.

1) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

2) $(a^m)^n = a^{m\times n}$

3) $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

La primera que se ha descrito, combinada con aquella norma de la división que asegura que todo número dividido por sí mismo es 1: $\frac{x}{x} = 1,\ x \neq 0$, y con ello, $\frac{a^n}{a^n} = 1$, consigue determinar que $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$. De hecho, $a^0 = 1$, para todo a, siempre que $a \neq 0$.

4.1.3 Juego de los cuatro cuatros

Con la alternativa de la potenciación surgen formas adicionales de escribir números naturales de gran tamaño, que emulan el juego de los cuatro cuatros y las cuatro operaciones básicas de la aritmética, que permite escribir una lista pequeña de números aquí van algunos:

$1 = 44^{4-4}, 3 = 4 - 4^{4-4}, 4 = \frac{4}{4^{4-4}},\ 5 = 4 + 4^{4-4}$; y otros números grandes, como: $4^4 + 4^4,\ 4 + 4^{44},\ 4^{444},\ 4^{4^{44}},\ 4^{4^{4^4}}$, etc.

El empleo de la radicación, la logaritmación, el factorial y otras funciones, permite escribir muchos números naturales más, como los que se anotan en la lista $10 = 4\sqrt{4} + \frac{4}{\sqrt{4}},\ 11 = \frac{44}{\sqrt{4}+\sqrt{4}},\ 12 = \sqrt{4}\left[\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4}\right],\ 13 = \frac{44}{4} + \sqrt{4},\ 19 = 4! - 4 - \frac{4}{4},\ \ 28 = 4! + 4\left(\frac{4}{4}\right),\ldots$ y con el uso de logaritmos la fórmula $n = -\log_{\sqrt{2}}\left[\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\ldots n \ldots \sqrt{4 - \sqrt{4}}}\right)\right]$ permite escribir cualquier natural n. En la fórmula, el símbolo $\ldots n \ldots$ indica que en ella aparecen n raíces cuadradas. Por ejemplo, si $n = 5$, la fórmula se traduce en $-\log_{\sqrt{2}}\left[\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4 - \sqrt{4}}}}}}\right)\right]$ que es $-\log_{\sqrt{2}}\left[\log_{\sqrt{2}}\left(2^{\frac{1}{32}}\right)\right] = -\log_{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{32}\right] = 5$.

Ejercicios:

Escribir de manera simple y haciendo uso de las propiedades de la potenciación, los siguientes números:

$\left(\frac{17}{11}\right)^4,\ \left(\frac{8}{11}\right)^4,\ (5 \times 7 \times 11)^{11},\ 7^3 \times 7^5 \times 7^8,\ 7^3 \times 5^6 \times 7^5 \times 7^8 \times 5^3,\ (7^3)^4,\ (5^6)^6.$

Proponer al menos tres ejemplos numéricos en el que se evidencie la utilización de cada una de las propiedades de la potenciación.

Como fin práctico, entendiendo que, en el ámbito matemático, práctico implica que un concepto se emplea dentro de las mismas matemáticas, estas reglas al combinarse con el teorema fundamental de la aritmética, permiten simplificar fracciones y cantidades expresadas como fracciones.

Ejemplo:

$$\frac{144^3 \times 145^6 \times 162^4}{360^7 \times 270^6} = \frac{(2^4 \times 3^2)^3 \times (5 \times 29)^6 \times (2 \times 3)^4}{(2^3 \times 3^2 \times 5)^7 \times (2 \times 3^3 \times 5)^6}$$
$$= \frac{2^{12} \times 3^6 \times 5^6 \times 29^6 \times 2^4 \times 3^4}{2^{21} \times 3^{14} \times 5^7 \times 3^{18} \times 5^6} = \frac{2^{16} \times 3^{10} \times 5^6 \times 29^6}{2^{21} \times 3^{32} \times 5^{13}}$$
$$= \frac{29^6}{2^{21-16} \times 3^{32-10} \times 5^{13-6}} = \frac{29^6}{2^5 \times 3^{22} \times 5^7}$$

Esta expresión es más simple que la original y está expresada en potencias de bases primas.

Es claro y, vale la pena anotar que, en el ejemplo, se ha utilizado como recurso que:
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$; con lo cual, de inmediato quedan definidas todas las potencias de exponente negativo, siendo que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ y también, si se quiere, $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

Una forma simple de invocar a un octavo de algo es llamar $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ de ese algo.

Esta observación permite escribir todo resultado en forma horizontal.

En este sentido, del ejemplo anterior se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{144^3 \times 145^6 \times 162^4}{360^7 \times 270^6} = \frac{29^6}{2^5 \times 3^{22} \times 5^7} = 29^6 \times 2^{-5} \times 3^{-22} \times 5^{-7}$$

Ejemplo:

1) $$\frac{33^6 \times 21^8 \times 35^{10}}{121^4 \times 15^6 \times 16^3} = \frac{(3 \times 11)^6 \times (3 \times 7)^8 \times (5 \times 7)^{10}}{(11^2)^4 \times (3 \times 5)^6 \times (2^3)^3} = \frac{3^{14} \times 5^{10} \times 7^{18} \times 11^6}{2^9 \times 3^6 \times 5^6 \times 11^8}$$
$$= 2^{-9} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^{18} \times 11^{-2}$$

2) $$\frac{25^3 \times 11^4 \times 33^2}{55^2 \times 9^3} = \frac{(5^2)^3 \times 11^4 (3 \times 11)^2}{(5 \times 11)^2 \times (3^2)^3} = \frac{3^2 \times 5^6 \times 11^6}{3^6 \times 5^2 \times 11^2} = 3^{-4} \times 5^4 \times 11^4$$

Ejercicios:

Simplificar siguiendo el precepto de la potenciación las siguientes expresiones:

$$\frac{114^3 \times 21^8 \times 63^7 \times 100^4}{1000^5 \times 45^{10} \times 49^6}; \frac{24^3 \times 210^8 \times 72^7 \times 10^4}{100^5 \times 405^{10} \times 39^4}; \frac{242^4 \times 21^{10} \times 56^7 \times 10^4}{100^5 \times 50^9 \times 39^4};$$

$$\frac{42^4 \times 21^{10} \times 56^7}{100^5 \times 36^9 \times 40^4}$$

Escribir al menos cinco expresiones similares a las del punto anterior y simplifíquelas.

En general, las propiedades de las operaciones y los sanos recursos lógicos se convierten en un arsenal que permite combatir de manera eficaz y eficiente cualquier ejército de problemas.

Ejemplo:

Hallar el valor de x para que la expresión:

$$\frac{(111)(10^{2015} + 10^{2014} + 10^{2013})}{1232100} = 10^x$$

Solución:

La propiedad distributiva de la multiplicación con respecto de la adición permite que, para comenzar, la expresión dada se transforme en:

$$\frac{(111) \times 10^{2013}(10^2 + 10^1 + 10^0)}{111 \times 111 \times 10^2} = 10^x$$

De algún modo, también se ha "factorizado" el denominador.

Observe que $10^2 + 10^1 + 10^0 = 111$ y ahora, la expresión se transforma en lo siguiente:

$$\frac{(111) \times 10^{2013-2} \times (111)}{111 \times 111} = 10^x$$

De aquí se tiene que:

$$10^{2011} = 10^x$$

Aplicando el principio de identidad que asegura que toda cosa es idéntica consigo misma, se tiene que $x = 2011$.

Pruebe a encontrar el valor de x en expresiones como:

$\frac{23\times(2\times10^{2014}+3\times10^{2013})}{529000000} = 10^{2x}$o $\frac{237\times(2\times10^{2015}+3\times10^{2014}+7\times10^{2013})}{5616900000} = 10^{x+7}$.

4.2 NÚMEROS DECIMALES

Estudiantes necios suelen preguntar, cuánto es $0{,}99999999\ldots$., con infinitos nueves; nueves hasta el infinito, hasta el aburrimiento final.

Los números reales y en particular los racionales se representan de manera decimal con el uso de la coma siendo que los primeros, los racionales, poseen un periodo de determinada longitud y los irracionales son aperiódicos.

Se sabe que:

$\frac{1}{3} = 0{,}33333333\cdots$, (infinitos 3) es decir

$\frac{1}{3} = 0{,}33333333\cdots$ lo repito

$\frac{1}{3} = 0{,}33333333\cdots$ y el gran Aristóteles enseñó que al agregar cosas iguales siguen cosas iguales; así que:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0{,}99999999\cdots$ pero $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, y como también enseñó Aristóteles, cosas iguales a una tercera, son iguales entre sí, se tiene que $0{,}99999999\cdots = 1$.

Por el año 952, el árabe al-Uqlidsi escribió que "con ayuda del principio de que la mitad de uno es un número, es posible sustituir la palabra medio por 0,5". El matemático persa al-Kashi, director del observatorio de Samarcanda, por allá en el siglo XV de nuestra era, fue el creador de la representación decimal de los números; apenas en 1427 al-Kashi propone la sencilla notación que remplaza la coma en diferentes lugares; por su parte, Simón Stevin, generalizó su uso en Europa por el año 1585 en adelante.

Respetando la posición de la coma, hallar sumas y diferencias de números es cosa de niños; en cambio, su multiplicación y división, de manera preferible, requiere el uso de los conceptos de potenciación con todo y sus propiedades.

Lo primero que debe buscar es escribir decimales, es decir reales con coma, haciendo uso del recurso potencial, en el sentido en que se hace uso del sistema decimal, así:

$0{,}0054 = 54 \times 10^{-4};\ 0{,}08 = 8 \times 10^{-2};\ 0{,}00015 = 15 \times 10^{-5}$.

$2{,}007 = 2007 \times 10^{-3};\ 34{,}072 = 34072 \times 10^{-3}$.

El número 247 está compuesto por dos centenas, cuatro decenas y siete unidades y, por ello, se escribe así:

$247 = 2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0$

Los decimales como $0{,}247$ se componen de dos décimas, cuatro centésimas y siete milésimas, por ello se puede escribir así:

$$0{,}247 = \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000} = \frac{2}{10^1} + \frac{4}{10^2} + \frac{7}{10^3} = 2 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 7 \times 10^{-3}$$

Pero también al escribir $0{,}247$, se lee “doscientos cuarenta y siete milésimos (o milésimas)” que de inmediato se representa como $\frac{247}{1000}$, esto es:

$$0{,}247 = \frac{247}{10^3} = 247 \times 10^{-3}$$

La actividad de escribir a los decimales desde el surtidor decimal de los exponentes, se hace simple:

$$0{,}25 = 25 \times 10^{-2};\ 0{,}025 = 25 \times 10^{-3};\ 0{,}0025 = 25 \times 10^{-4};\ 0{,}00025 = 25 \times 10^{-5};$$

$$1{,}2 = 12 \times 10^{-1};\ 0{,}0005 = 5 \times 10^{-4}.$$

Pero también con expresiones como $0{,}05000 = 5000 \times 10^{-5}$, que se reescribe como:

$$0{,}05000 = 5 \times 10^3 \times 10^{-5} = 5 \times 10^{3-5} = 5 \times 10^{-2}.$$

Lo que indica la forma en que se pueden tomar cifras significativas.

4.2.1 Multiplicación

Para la multiplicación se aplica las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación.

Ejemplos:

1) $0{,}045 \times 0{,}0008 = (45 \times 10^{-3}) \times (8 \times 10^{-4}) = (45 \times 8) \times (10^{-3} \times 10^{-4}) = 360 \times 10^{-7} = 0{,}0000360 = 0{,}000036.$

2) $0{,}03 \times 0{,}0015 = (3 \times 10^{-2}) \times (15 \times 10^{-4}) = (3 \times 15) \times (10^{-2} \times 10^{-4}) = 45 \times 10^{-6} = 0{,}000045.$

3) $1{,}1 \times 2{,}03 = (11 \times 10^{-1}) \times (203 \times 10^{-2}) = 2233 \times 10^{-3} = 2{,}233.$

Observe que el exponente es un contador de las cifras significativas que siguen después de la coma; indica a la vez, cuántas cifras deben contarse para emplazar la coma en un nuevo sitio, de modo que:

$$12{,}3 \times 10^{-1} = 1{,}23;\ 45{,}89 \times 10^{-1} = 4{,}589;\ 45{,}89 \times 10^{-2} = 0{,}4589$$

En el caso de exponente positivo:

1) $0{,}0056 \times 10^1 = 0{,}056$

2) $0{,}0056 \times 10^2 = 0{,}56$

3) $0{,}0056 \times 10^3 = 5{,}6$

4) $0{,}0056 \times 10^4 = 56$

5) $0{,}0056 \times 10^5 = 560$

4.2.2 División

Se procede de forma similar a la multiplicación.

Ejemplos:

1) $\dfrac{10^{-4}}{10^{-2}} = 10^{-4-(-2)} = 10^{-4+2} = 10^{-2}$

2) $\dfrac{10^{-6}}{10^{-8}} = 10^{-6-(-8)} = 10^{-6+8} = 10^{2}$

3) $\dfrac{0{,}0045}{0{,}5} = \dfrac{45 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-1}} = \dfrac{45}{5} \times \dfrac{10^{-4}}{10^{-1}} = 9 \times 10^{-3} = 0{,}009.$

4) $\dfrac{0{,}00056}{0{,}000008} = \dfrac{56 \times 10^{-5}}{8 \times 10^{-6}} = \dfrac{56}{8} \times \dfrac{10^{-5}}{10^{-6}} = 7 \times 10^{1} = 70$

5) $\dfrac{0{,}005}{0{,}00007} = \dfrac{5 \times 10^{-3}}{7 \times 10^{-5}} = \dfrac{5}{7} \times \dfrac{10^{-3}}{10^{-5}} = 0{,}71428\ldots \times 10^{2} = 71{,}428$

6) $\dfrac{0{,}0000015}{0{,}00027} = \dfrac{15 \times 10^{-7}}{27 \times 10^{-5}} = \dfrac{15}{27} \times \dfrac{10^{-7}}{10^{-5}} = 0{,}55555\ldots \times 10^{-2} = 0{,}00555$

Ejercicios:

Calcular los siguientes cocientes expresando su resultado en forma decimal:

$\dfrac{1{,}03}{2{,}056};\ \dfrac{0{,}03}{0{,}000056};\ \dfrac{0{,}0000037}{0{,}00005};\ \dfrac{2{,}7}{0{,}09};\ \dfrac{8{,}70}{0{,}000030};\ \dfrac{8{,}70}{1{,}6};\ \dfrac{25}{1{,}5};\ \dfrac{2{,}5}{0{,}00015};\ \dfrac{7{,}5}{0{,}000105};\ \dfrac{17{,}5}{2{,}5}$

Proponer a menos cinco cocientes de números expresados en forma decimal y conseguir su resultado.

Proponer expresiones que combinen las cuatro operaciones y simplificar al máximo alcanzando su resultado, como en los casos:

$\dfrac{(17{,}5 - 0{,}23) \times (2{,}3 + 0{,}67)}{(2{,}5 - 1{,}3) \times (0{,}56 - 0{,}34)};\ \dfrac{2{,}0089}{3{,}9 + 1{,}005};\ \dfrac{0{,}0089 + 0{,}0078}{0{,}0009 + 0{,}0057};\ \dfrac{0{,}00009 + 0{,}00078}{0{,}0003 + 0{,}00057}$

4.2.3 Aproximaciones

Los números decimales permiten el uso del libre albedrío y la libertad de acción en el ejercicio de calcular aproximaciones; pero en un acto de volición, la idea fundamental es acercar las expresiones por grupos de cifras en la cola final de modo que, en conjunto, configuren un número con varios ceros más cercano.

Ejemplo:

Aproximar $0{,}5432356$

Solución:

Al tomar el grupo de tres cifras final 356, se puede, con libertad, aproximar a 360 y por necesidad anotar, en lugar de $0{,}5432356$ está su aproximación $0{,}543236$.

Si se toma el grupo de cuatro cifras 2356, se puede aproximar a $0{,}5432400$ con lo cual se sigue que $0{,}5432356$ es próximo a $0{,}54324$.

Ejercicios:

Aproximar los siguientes números:

$0{,}11234446$; $0{,}345446$; $0{,}34075446$; $0{,}94075446$; $0{,}9874075446$; $0{,}9111874075446$;

$0{,}868756444$; $0{,}861111875644$

4.2.4 Algo sobre ecuaciones

Las igualdades son de tres tipos en concordancia con su verdad: aquellas que son ciertas, con independencia del valor que adopten las variables intervinientes, se denominan identidades; las que son ciertas ocasionalmente, se denominan ecuaciones; y las que jamás son ciertas, se llaman antinomias o absurdos.

Ejemplos:

La igualdad $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ es una identidad; es una igualdad cierta con independencia del valor que adopte x.

Si $x = 5$, se llega a la igualdad $5^2 - 1 = 6 \times 4$, que es equivalente a $5 - 1 = 24$; si $x = -3$ se obtiene $(-3)^2 - 1 = (-3+1)(-3-1)$ que es equivalente a $9 - 1 = (-2)(-4) = 8$.

La igualdad $x - 2 = 1$ tiene un único valor para el que se hace verdad, $x = 3$.

La igualdad $x + 5 = 1$ no tiene solución si se restringe la existencia de las mismas al conjunto de los naturales.

La igualdad $x + 5 = 1$ en el conjunto de los enteros tiene la solución $x = -4$.

La ecuación $3x - 5 = 2$ no admite solución entera, pero en el campo de los números racionales es $x = \frac{7}{3}$ y es el único valor que la eleva a verdad.

La ecuación de dos variables $x + y = 10$ tiene infinitas soluciones. En efecto, los pares (x, y): $(1,9)$, $(2,8)$, $(3,7)$, $\cdots$, $(-3,13)$, $(-31,41)$, $\cdots$ $\left(\frac{1}{3}, \frac{29}{3}\right)$, $\cdots$,$(0.01,9.99)$, son algunas de las soluciones; pero parejas como $(7,7)$, $\left(\frac{1}{17}, -123\right)$, $(1,2)$,

$\left(\frac{1}{7}, -\frac{2}{1002}\right)$ no lo son; y no lo son infinitas de ellas, en la medida que se tomen al azar, a la suerte. Es lógico admitir que, la probabilidad de que dos números tomados al azar sumen diez, es casi nula.

Existen infinitas igualdades que jamás son ciertas; infinitas igualdades con aspecto sospechoso como $x + 5 = x - 5$, $x + 3 = x + 1$, $x - 13 = x + 7$.

Se mencionó que las ecuaciones son surtidores de números, pues ellos se consideran soluciones de las mismas. Un número remplazado en la incógnita de la ecuación hace que ella sea una verdad o una falsedad.

Por ejemplo, si se remplaza x por 4 en la ecuación $2x - 7 = 1$, se consigue una verdad y, no existe otro valor que logre el mismo valor de verdad para esa ecuación; pero si se toma $x = 5$, se llega al exabrupto $3 = 1$.

El álgebra es una rama matemática encargada de las identidades y de las ecuaciones; sus inicios son árabes, aparecen estudios en Bagdad por el siglo IX con la obra de Al-Juawarizmi en el año 825 titulada Kitab al jabr i al muqabala (algo así, como tratado del empalme y de la puesta frente a frente). Al jabr, pronto se convirtió en álgebra y tiene etapas, la retórica, la prefigurada, la sincopada o lacónica y, finalmente, el álgebra simbólica.

El álgebra se fue desarrollando en más de seis siglos en el medio árabe y florece en el siglo XVI con los trabajos formato olimpiadas de los italianos: Tartaglia, Cardano y Ferrari, que se encargaron vía concursos, retos y apuestas de encontrar la solución por vía radical de la ecuación de tercer grado.

4.2.5 Raíces de una ecuación

Según el Teorema Fundamental del Álgebra, una ecuación de un variable con coeficientes reales y de grado n, tiene exactamente n raíces, n valores que hacen que sea verdadera, contando aquellas que poseen multiplicidad.

Ejemplo:

La ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ se hace verdad con $x = 2$ y con $x = 1$; observe que la suma de las raíces es 3 y su producto es 2, y por ello se puede escribir al "empalmar frente a frente las expresiones" $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$ desde donde se atiene que al remplazar x por 2 o por 1, uno de los factores es "cero", número que tiene el carácter absorbente bajo la multiplicación de convertirlo todo en "cero".

La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ se puede escribir como$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1)$. Aquí se ve que la raíz 1 tiene multiplicidad "dos".

Las soluciones de los ejemplos anteriores son números enteros o racionales, pero ecuaciones del tipo $x^2 - n = 0$ contienen otra esencia. Por ejemplo, $x^2 - 2 = 0$, encuentra solución con $x = \sqrt{2}$ y con $x = -\sqrt{2}$, y por esta razón, al poner frente a frente las cosas se tiene $x^2 - 2 = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$. De modo que $x^2 -$

$n = 0$ es un manantial de números irracionales, infinitos de ellos que son por pares las soluciones o raíces de $x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 5 = 0$, $x^2 - 7 = 0$, $x^2 - 11 = 0$.

No se puede negar la irracionalidad de $\sqrt{13}$ o de $-\sqrt{137}$, y de números como $\sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$, $\sqrt{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}}$ y de otras formas extrañas. Lo más seguro, es que sean números irracionales y correspondan con raíces de ecuaciones de grado superior a tres.

4.2.6 Raíces imaginarias

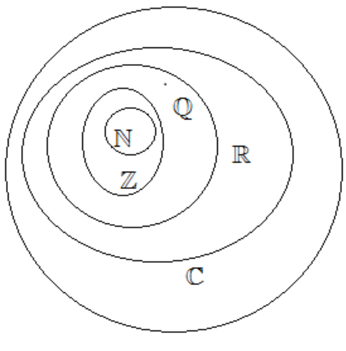
Hasta aquí, se ha evitado escribir una ecuación de la forma $x^2 + n = 0$, con n número natural. Se ha enseñado que el cuadrado de todo número es siempre positivo y en términos generales n también es positivo; por ello, ¿cómo puede darse que la suma de dos números positivos sea cero?

Si se piensa en $x^2 + 1 = 0$, se ve que carece de soluciones en $\mathbb{R}$. Pero en las matemáticas siempre es posible definir nuevos entes sin prejuicio de hacer tambalear el edificio construido; así que, es el momento de adoptar un número i, con la gracia de que su cuadrado sea uno real negativo, y no cualquiera, se define entonces $i^2 = -1$ que según Leibniz "es la raíz imaginaria de la unidad negativa".

Estos números se arropan con la aritmética usual:

$i + i + i = 3i$, $(-2i)(3i) = -6i^2 = (-6)(-1) = 6$.

Desde este conjunto de los números imaginarios, surgen los números complejos $z = a + bi$ configurando el conjunto denominado $\mathbb{C}$; a se llama la parte real del complejo y b la parte imaginaria. Con todo esto, los números reales se consideran complejos con parte imaginaria nula y lo imaginarios a su vez, son complejos con parte real nula.



En 1545 el italiano Jérôme Cardan trasgrede lo existente hasta el momento al escribir como solución de una ecuación a $x = \sqrt{-15}$; y la llama "raíz imposible", se convertía en el pionero de estudiar entes similares. Leonhard Euler, en 1977, puso el sello notarial de estos números al designar con i al número $\sqrt{-1}$, símbolo que utilizó con frecuencia el Príncipe de los Matemáticos Carl F. Gauss. El danés Caspar Wessel y el ginebrino Robert Argand representaron a los complejos en el plano cartesiano.

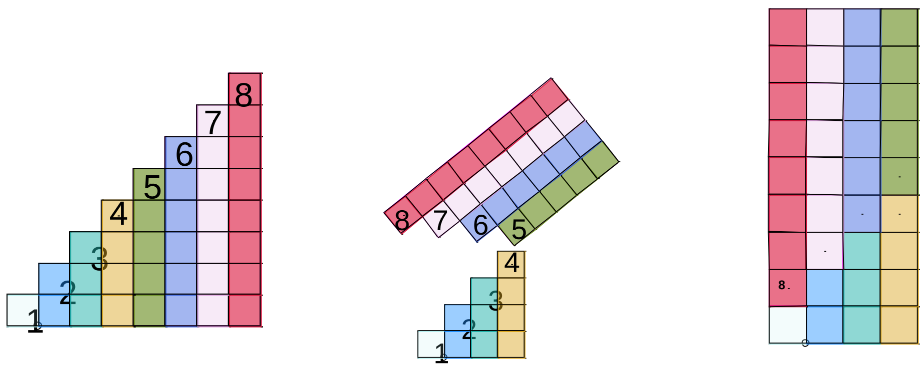
Con la representación de los números complejos en el plano cartesiano o plano complejo, se hace apertura a un rico campo de estudio y de aplicación tecnológica.

Leibniz, el gran Leibniz escribió: “El espíritu divino se manifestó de modo sublime en esta maravilla del análisis, este prodigio de un mundo ideal, este intermediario entre el ser y el no-ser, al que llamamos raíz imaginaria de la unidad negativa.”

El estudio de los números complejos no se convierte en temática de este texto y, aunque su aritmética es fácil, resulta de la combinación de la aritmética real con las formas algorítmicas del álgebra; se convierte en afán y curiosidad para abordar en otro nivel. Es la cereza de otro pastel.

4.3 SUMATORIAS

Ya nonagenario, el legendario Gauss gustaba de contar la forma en que a los nueve años logró sumar del uno al cien ante la impertinente tarea que un viejo profesor cascarrabias impuso en tercero de primaria a todo un curso para obligarlos a guardar silencio. Dejar esta tarea a visa de castigo y al minuto poner en el escritorio del maestro la pizarra, Gauss, con el resultado 5050, todo fue uno. Después de una hora o más, se fue llenando la pila de pizarras que, al ser calificadas por el profesor, quien también se demoró haciendo los cálculos respectivos, encontró que los resultados eran erróneos, salvo la última pizarra que quedaba y pertenecía a Gauss. Ni corto ni perezoso, el profesor inquirió al chico sobre la forma en que había calculado el resultado, a lo que Gauss respondió que hizo uso de la fórmula del cálculo del área de un rectángulo que es igual al producto de su base por la altura.



En efecto, sumar $1+2+3+\ldots+n$ con n par, de acuerdo al efecto visual de Gauss, es “ver” una escalera que se corta a la mitad para que un polígono curioso se rote a fin de encajarlo en la escalera que representa la suma $1+2+3+\cdots+\frac{n}{2}$ y configurar de este modo, un rectángulo de base $\frac{n}{2}$ y de altura $n+1$. Con esto se consigue que:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Si en lugar de uno a cien, la tarea impuesta fuese el de sumar del uno al quinientos, se aplica que $1+2+3+\cdots+500=\frac{500(500+1)}{2}=125250$. La fórmula sirve, incluso cuando n es impar.

Por ejemplo, la suma del uno al ciento once es:

$$1+2+3+\cdots+111=\frac{111(111+1)}{2}=6216.$$

Existe una forma concisa de expresar una suma al emplear el signo de “sumatoria” que emplea la letra del alfabeto griego Sigma, en su versión mayúscula, en la forma:

$$\sum_{i=a}^{b} f(i)$$

Donde $a<b$ siendo números naturales; a es el límite inferior, b el límite superior, i el contador variable que señala que la expresión f se debe calcular a todo i entre a y b incluyéndolos.

Usando esta notación, la suma de los números naturales del 1 al 100 se expresa así:

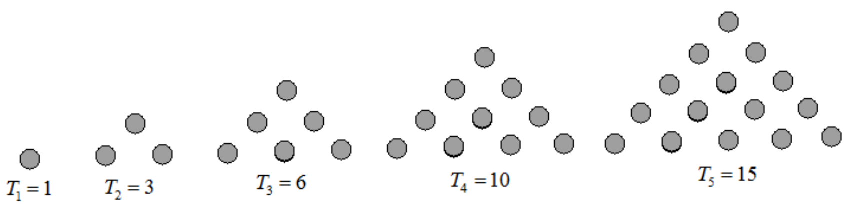
$$1+2+3+\ldots+n=\sum_{i=1}^{100} i$$

Observe que en este caso $f(i)=i$ y en este sentido, f se conoce como la función identidad; entra i y la máquina f la transforma en i, esto es, la deja igual, la deja idéntica.

El descubrimiento de Gauss, se puede escribir así:

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

Estas sumas se conocen como números triangulares $T_n=\frac{n(n+1)}{2}$, en virtud de la acción contemplativa de los Pitagóricos de ordenar estos números con guijarros configurando triángulos u otras figuras.



Con cierto pensamiento mordaz puede interesar no sumar del uno al cien o del uno al mil, o del uno al “ene”, sino del cien al doscientos.

Ejemplo:

Determinar la suma: $\sum_{i=100}^{200} i$

Solución:

$$\sum_{i=100}^{200} i = \sum_{i=1}^{200} i - \sum_{i=1}^{99} i \ = \frac{200(200+1)}{2} - \frac{99(99+1)}{2} = 20100 - 4950 = 15150$$

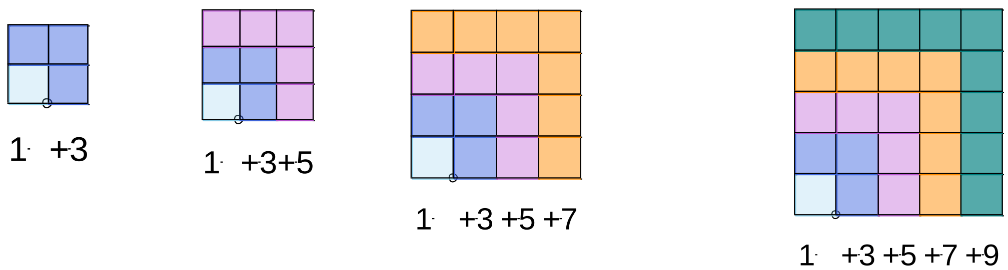
Si la máquina de producir sumandos f, genera números impares, esto es $f(i) = 2i - 1$, es claro que $f(3) = 5$, $f(8) = 15$, $f(15) = 29,\ldots,$ y la suma de los primeros n números impares se escribe como:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$$

En este caso:

$$\sum_{i=1}^{5} (2i - 1) \ = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

Corresponde a la suma de los cinco primeros números impares.



Por la vía de la contemplación, agregar una cantidad impar de elementos, consigue configurar un cuadrado.

Dado que $\sum_{i=1}^{5}(2i - 1) \ = 5^2$, se intuye de forma inductiva que, en general:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) \ = n^2$$

Ejemplo:

Calcular la suma de los primeros 50 números impares.

Solución:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 99 = \sum_{i=1}^{50} (2i - 1) \ = 50^2 \ = 2500$$

Calcular la suma de los primeros 100 números impares.

Solución:

$$1+3+5+7+\cdots+199=\sum_{i=1}^{100}(2i-1)\ =100^2=10000$$

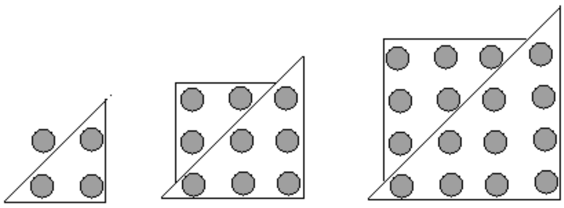
Calcular la suma de los impares entre 100 y 200:

Solución:

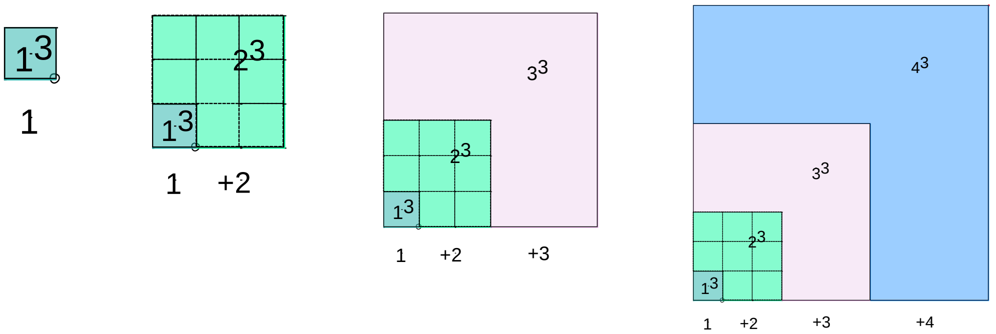
$$101+103+\cdots+199=\sum_{i=51}^{100}(2i-1)$$

$$\sum_{i=51}^{100}(2i-1)\ =\sum_{i=1}^{100}(2i-1)\ -\sum_{i=1}^{50}(2i-1)=100^2-50^2=7500$$

Es llamativo el atestiguar que sumas con determinada arquitectura terminen con el cálculo operatorio de productos.



Con alguna suspicacia se adivina que los números cuadrados derivan su nombre del hecho que se puede configurar con ellos, justamente cuadrados. Yendo un poco más allá, se hace evidente que todo cuadrado es la suma de dos números triangulares consecutivos, todo, con el simple acto de trazar una diagonal.



Si la función f produce cubos: $f(i)=i^3$.

La suma de los primeros n cubos $\sum_{i=1}^{n} i^3$ produce, paso a paso, cuadrados que se corresponden con los números triangulares; así, cada lado del cuadrado de la suma general es $\sum_{i=1}^{n} i$, por lo cual:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Ejemplo:

Calcular la suma de los primeros cien números cubos.

Solución:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 100^3 = \sum_{i=1}^{100} i^3 = \left(\frac{100(100+1)}{2}\right)^2 = 5050^2 = 25502500$$

Calcular la suma de los cubos entre el veinte y el cincuenta.

Solución:

$$\sum_{i=20}^{50} i^3 = \sum_{i=1}^{50} i^3 - \sum_{i=1}^{19} i^3 = 1275^2 - 190^2 = 1589525$$

Por el método de inducción se prueba que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

Ejemplo:

Calcular la suma de los cuadrados de los primeros 10 naturales.

Solución:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \sum_{i=1}^{10} i^2 = \frac{10(10+1)(2\times 10+1)}{6} = 385$$

Ejemplo:

Calcular la suma de las cuartas potencias de los primeros 10 naturales.

Solución:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + 10^4 = \sum_{i=1}^{10} i^4 = \frac{10(10+1)(6\times 10^3 + 9\times 10^2 + 10 - 1)}{30}$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + 10^4 = 226633$$

4.3.1 Propiedades de la sumatoria

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} f(i) + g(i) = \sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} g(i)$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{n} cf(i) = c\sum_{i=1}^{n} f(i)$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{n} c = nc$$

Ejemplos:

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} (i^2 + i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{100} 2i = 2\sum_{i=1}^{100} i$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{7} 7 = 7\times 7 = 49$$

4.3.2 Progresión aritmética

Al condensar una suma de la forma $\sum_{i=1}^{n} a + bi$ y aplicar las propiedades explicadas se consigue que:

$$\sum_{i=1}^{n} a + bi = \sum_{i=1}^{n} a + b\sum_{i=1}^{n} i = na + \frac{bn(n+1)}{2}$$

Una suma del tipo $\sum_{i=1}^{n} a + bi$ recibe el nombre de progresión aritmética y su cálculo depende de cada uno de los valores a, b y n que deben distinguirse bien.

Ejemplo:

Calcular la suma $5 + 8 + 11 + 14 + \cdots + 305$.

Solución:

$$5+8+11+14+\ldots+305=\sum_{i=1}^{100}(5+3i)=100\times 500+\frac{3\times 100(100+1)}{2}$$
$$=100\times 5+3\times 5050=15650$$

Ejercicios:

Escribir de manera condensada cada una de las siguientes sumas:

La suma de los primeros cincuenta múltiplos de cincuenta

La suma de los primeros cuadrados perfectos menores que mil

La suma de los primeros cubos no mayores que diez mil

La suma de las mitades de los primeros doscientos múltiplos de seis

La suma de las terceras partes de los primeros cincuenta cuadrados perfectos

La suma de los cincuenta primeros números naturales mayores en una unidad que los duplos de los cuadrados perfectos.

Calcular la suma de los primeros mil números naturales.

Calcular la suma de los primeros cien múltiplos naturales de tres.

Calcular la suma de los primeros cincuenta cuadrados perfectos.

Calcular los resultados de las siguientes sumatorias:

$$\sum_{i=1}^{50}2i\,;\ \sum_{i=1}^{50}3i\,;\ \sum_{i=1}^{50}\frac{3i}{2};\ \sum_{i=1}^{50}\frac{3i}{7};\ \sum_{i=1}^{50}i^2\,;\ \sum_{i=1}^{50}2i^2\,;\ \sum_{i=1}^{50}3i^2$$

Calcular las sumas:

$$\sum_{i=10}^{50}3i^2\,;\ \sum_{i=10}^{50}4i^2\,;\ \sum_{i=10}^{50}(1+4i^2);\ \sum_{i=10}^{50}\frac{1+4i^2}{3};\ \sum_{i=10}^{50}\frac{2+7i^2}{5};\ \sum_{i=30}^{85}\frac{2+7i^2}{5};\ \sum_{i=30}^{85}\frac{2+2i^2}{9}$$

Calcular el consolidado de las siguientes progresiones aritméticas:

$$\sum_{i=1}^{50}(2+3i)\,;\sum_{i=1}^{50}(2+3i)\,;\sum_{i=1}^{80}(2+3i)\,;\sum_{i=1}^{80}(21+7i)\,;\sum_{i=1}^{90}(3+6i)\,;\sum_{i=1}^{90}(5+13i)\,;$$

$$\sum_{i=1}^{100}(5+13i)\,;\sum_{i=1}^{100}(5+9i)\,;\sum_{i=1}^{100}\frac{5+9i}{2}$$

Calcular el número de términos n para que $\sum_{i=1}^{n}(3+2i)$ sea superior a mil, diez mil, cien mil y un millón pero que hasta $i=n-1$ sea menor que esos valores.

Calcular el resultado de las siguientes progresiones aritméticas:

$$2+7+12+\ldots+1002$$

$$21+27+33+\ldots+555$$

$$7+21+35+\ldots+1351$$

El cálculo de las sumas con arquitectura similar a estas últimas requiere descubrir la forma $\sum_{i=1}^{n} a+bi$, encontrando cada uno de los valores de las variables intervinientes.

Ejemplo:

Calcular la suma de la progresión aritmética: $7+13+19+\cdots+3409$

Solución:

Parece evidente que $a=7$ y la diferencia entre los dos primeros términos determina que $b=13-7=6$ y por ello el último término es $7+6n=3409$ de donde $6n=3402$ y con ello $n=567$.

Esto asegura que:

$$7+13+19+\ldots+3409=\sum_{i=1}^{567}(7+6i)=567\times 7+6\times\frac{567\times 568}{2}=970137$$

Para calcular el n con el cual una suma es superior a un determinado valor pero que hasta el término $n-1$ todavía es menor, se tiene que resolver una inecuación.

Ejemplo:

Determinar el valor de n para el cual $\sum_{i=1}^{n}(3+2i)$ sobrepasa 900

Solución:

Se requiere buscar n tal que $3n+n(n+1)>900$; de donde se obtiene que $n>28$.

En efecto:

Para n=28:

$$\sum_{i=1}^{28}(3+2i) = 3 \times 28 + \frac{2 \times 28 \times (28+1)}{2} = 896$$

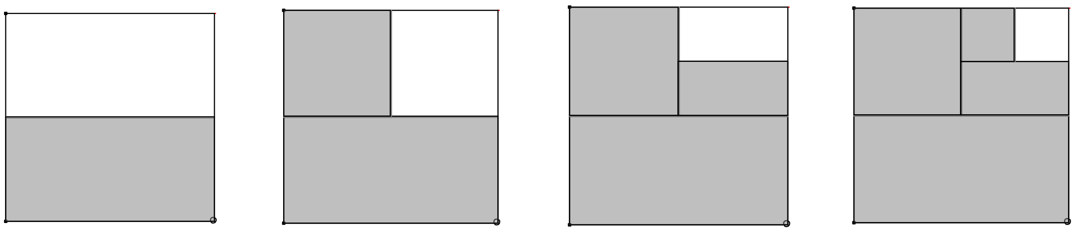
Para n=29:

$$\sum_{i=1}^{29}(3+2i) = 3 \times 29 + \frac{2 \times 29 \times (29+1)}{2} = 957$$

4.3.3 Progresiones geométricas

De modo visual se halla que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ permite llenar una unidad por la vía de ir agregando la mitad de lo que falta, siempre la mitad de lo que falta. Como n puede hacerse tan grande como se desee, la forma de cumplir cada uno de los pasos es escribir la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} = 1$$



Sumas como esta, se denominan progresiones geométricas y en términos generales obedecen a la configuración $\sum_{i=1}^{n} ar^i$, que refiere la forma en que cada término a sumar es igual al producto del anterior y un número constante r que se llama razón.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\ se\ tiene\ a = 1\ y\ r = \frac{1}{2}$$

Teniendo en cuenta las propiedades de las sumatorias, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} ar^i = a\sum_{i=1}^{n} r^i$$

Por lo tanto, para determinar la suma de $\sum_{i=1}^{n} ar^i$ se debe calcular, de manera general, la suma $S = \sum_{i=1}^{n} r^i$

$$S = r + r^2 + \ldots + r^{n-1} + r^n \quad (1)$$

Multiplicando por r los dos términos de la ecuación (1), se obtiene:

$rS = r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1}$ (2)

Restando término a término la ecuación (1) de (2), se tiene lo siguiente:

$rS - S = r^{n+1} - r$

De aquí se obtiene la suma S:

$$S = \frac{r(r^n - 1)}{r - 1}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} ar^i = a\sum_{i=1}^{n} r^i = a \times \frac{r(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{ar(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} ar^i = \frac{ar(r^n - 1)}{r - 1}; r \neq 1$$

Muchos conocen la historia de Lahur Sessa, inventor del ajedrez, que pidió al brahaman como recompensa por su invento, un grano de trigo por el primer escaque del tablero, dos por el segundo, cuatro por el tercero y así de seguido, un número igual al doble de granos que el del anterior escaque.

Al aplicar la fórmula de la progresión geométrica para calcular el número de granos, se obtiene lo siguiente:

$$1 + S = \sum_{i=1}^{64} 2^i = 1 + \frac{2(r^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{65} - 1 = 36893488147419103231$$

Este valor de granos de trigo, según los calculistas, la tierra entera sembrada desde el polo norte al polo sur, no es capaz de producir en dos siglos con dos cosechas anuales.

La suma $S = \sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{r(r^n-1)}{r-1}$ se reviste de facilidad cuando $0 < r < 1$ y n tiende al infinito; pues en ese caso r^n se puede despreciar, en el sentido que se convierte en una cantidad cercana a cero.

Así se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^{\infty} r^i = \frac{r}{1 - r}$$

En este caso, todo se reduce a una simple operación aritmética.

Ejemplos:

1) $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$

2) $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{i}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$

3) $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{i}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$

En general, para todo número n se tiene la siguiente relación:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{i}=\frac{1}{n-1}$$

Ejercicios:

Calcular las siguientes sumas:

1) $\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}$; $\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}$; $\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{3}{2}\right)^{i}$; $\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{5}{2}\right)^{i}$; $\sum_{i=1}^{15}\left(\frac{5}{2}\right)^{i}$; $\sum_{i=7}^{15}\left(\frac{5}{2}\right)^{i}$; $\sum_{i=10}^{20}\left(\frac{5}{2}\right)^{i}$

2) $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{i}$; $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{i}$; $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{i}$; $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{i}$; $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{i}$; $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^{i}$.

4.3.4 Generalización de sumas parciales

Esta sección toma el atrevimiento de escribir algunas sumas, entre miles de ellas, que asombran por su belleza, estética y simplicidad. Se hace útil verificar su veracidad al calcular algunas sumas parciales de las mismas con el fin de crear la evidencia de que, en efecto, converge al número que asegura.

Ejemplo:

Considere la suma parcial:

$$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

En términos de sumatorias, se representa de la siguiente manera:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$$

Desde ella se consigue:

$$S_1 = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = S_3 + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

En términos generales, se consigue que:

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

De aquí, teniendo en cuenta que si $n \to \infty, entonces\ \frac{n}{n+1} \to 1$ se deduce que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1$$

Como se ha insistido, vaya manera de representar al uno, con lo que se recalca que cada número tiene infinitas formas de representación.

Igual que la suma precedente, existes muchas de mayor belleza y discreción.

Ejemplos:

1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

De aquí se deduce el siguiente resultado:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2}$$

Observe que, cada denominador es el producto de dos impares consecutivos y es convergente.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Suponga que:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)}$$

$$S_{10} = \frac{55}{21} = 2.619047619$$

$$S_{100} = \frac{5050}{201} = 5.12437810$$

$$S_{1000} = \frac{500500}{2001} = 250.1249375$$

$$S_{10000} = \frac{50005000}{20001} = 2500.124993$$

Al continuar con las sumas parciales múltiplos de diez, se encuentra esta deliciosa armonía en la confección de los numeradores y denominadores con la operación de intercalar ceros.

2) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

De aquí se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{1}{3}$$

3) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(4i-3)(4i+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

De donde se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(4i-3)(4i+1)} = \frac{1}{4}$$

4) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(5i-4)(5i+1)} = \frac{n}{5n+1}$$

Conlleva a escribir:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(5i-4)(5i+1)} = \frac{1}{5}$$

5) De manera general, aparece una forma sutil de escribir el inverso de cualquier número natural con representación de sumatoria.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\big(mi-(m-1)\big)(mi+1)} = \frac{n}{mn+1}$$

Por lo cual:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\big(mi-(m-1)\big)(mi+1)} = \frac{1}{m}$$

Magnífica forma de vestir a un racional, como una suma de infinitos términos.

Al reemplazar $m = 7$, las sumas parciales se convierten en:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(7i-6)(7i+1)} = \frac{1}{1\times 8} + \frac{1}{8\times 15} + \frac{1}{15\times 22} + \ldots + \frac{1}{(7n-6)(7n+1)}$$

$$S_{10} = \frac{10}{71};\ S_{100} = \frac{100}{701};\ S_{1000} = \frac{1000}{7001};\ S_{10000} = \frac{10000}{70001}$$

Estas sumas parciales describen, en su interior, una hermosa sinfonía.

4.3.5 Inverso de un real en términos de sumatorias

Para un determinado natural n se cumple la relación:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+n)} = \frac{n}{\alpha(n+\alpha)}$$

De in inmediato se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+n)} = \frac{1}{\alpha}$$

Se trata de una expresión en la que se condensan infinitos casos.

Ejemplos:

1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2) $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{(2i+1)^3+(2i+1)^2}{i!} = 0\ (hermosa\ forma\ de\ escribir\ cero)$

3) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3(i+1)^3} = 10-\pi^2$

4) $\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^3-2i} = Ln(2)$

5) $1+2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(3i)^3-3i} = Ln(3)$

Expresión que se puede escribir como: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(3i)^3-3i} = \frac{Ln(3)-1}{2}$

6) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(4i)^3-4i} = \frac{3Ln(2)-2}{4}$

7) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(6i)^3-6i} = -\frac{1}{2}+\frac{Ln(432)}{12}$

8) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^2-2i} = Ln(2)$

9) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(3i)^2-3i} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{18}+\frac{Ln(3)}{2}$

10) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(4i)^2-4i} = -\frac{\pi}{8}+\frac{3Ln(2)}{4}$

Es claro que sumando números racionales como los que se exponen en cada una de estas últimas sumas, se producen números irracionales trascendentes, algunos de los cuales, se configuran con mayor grado de irracionalidad que otros, como esta última suma:

11) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(12i)^3-12i} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}Ln\left(2-\sqrt{3}\right)}{12}+\frac{Ln(12)}{8}$

CAPÍTULO 5.

RADICALES Y LOGARITMOS

CAPÍTULO 5. RADICALES Y LOGARITMOS

5.1 RADICALES

Los sabios griegos se dieron cuenta que $\sqrt{2}$ dejaba de tener sentido entre los tipos de números que concebían. Hasta poco después del siglo III de nuestra era, de manera estructural se conocía, sin gran trasfondo teórico, hasta el conjunto de los números racionales. Sin embargo, $\sqrt{2}$ pertenece a un conjunto que en el día de hoy se conoce como irracionales y que, en conjunto con los números racionales, configuran el conjunto de los números reales, que dan paso al continuo numérico. Ya se han establecido algunas diferencias entre ellos; mientras la expansión decimal infinita de un racional es periódica, los irracionales carecen de periodo; mientras los racionales se pueden enumerar, los irracionales no.

Hay algo más. Los números irracionales, conjunto al que pertenecen números como e, π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{163}$, también se dividen en dos categorías, a saber: los algebraicos y los trascendentes, tal como se explicó antes.

Los irracionales algebraicos son las raíces de ecuaciones de una variable con coeficientes enteros; en particular $\sqrt{2}$ es la raíz positiva de la ecuación $x^2 - 2 = 0$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ es la raíz de una ecuación de grado cuarto y en consecuencia es irracional algebraico.

Pero números como e y π tienen una naturaleza distinta; e es la suma infinita:

$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$ donde $n!$ es el producto de todos los números naturales (excepto cero) menores o iguales que n $(5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120)$; en cambio, π es la constante que emerge de relacionar la longitud de un arco total de cualquier circunferencia con su diámetro.

En el siglo XIX se demuestra que estos dos números e y π son trascendentes; esto es, no son raíces de ninguna ecuación de una variable con coeficientes enteros.

Y una sorpresa: los irracionales algebraicos son numerables, pero, los trascendentes no! Esto es, es posible establecer una relación uno a uno entre los números naturales y los irracionales algebraicos, pero no con los irracionales trascendentes.

Los irracionales algebraicos se pueden contar por bloques al adoptar lo que se llama altura de un polinomio; la altura no es más que la suma de los valores absolutos de sus coeficientes; el valor absoluto de un entero no tiene en cuenta su signo.

Así, existen pocas ecuaciones de grado dos, por ejemplo, con coeficientes enteros que tienen altura cinco: $x^2 + 4$, $x^2 - 3x - 1$, $2x^2 - 2x + 1$, $3x^2 - 2$, y algunas otras que en total se pueden enumerar, (No pasan de veinte).

De igual modo, aparece un conjunto de ecuaciones de cualquier grado con cualquier altura que van resultando numerables y que, al tiempo, algunas producen números irracionales algebraicos, que se van contando por bloques.

Pero se ha dicho que el conjunto de los irracionales es innumerable; no se pueden contar; sin embargo, los irracionales algebraicos sí se pueden contar, el conjunto de los irracionales trascendentes es innumerable. Esto significa que al escoger al azar un número real, lo más probable es que se trate de un irracional trascendente. En otras palabras, en el conjunto de los números reales, los trascendentes abundan, en cambio los algebraicos escasean.

Ejemplos:

Entre tantos números irracionales, aparecen números de diversa anatomía:

$$1)\ 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots;\ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{10^{i!}}=0{,}110001000000000000000001\ldots$$

$$2)\ e^{e};\ \pi^{e};\ e^{\pi\sqrt{163}};e^{e^{e}};\ \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}};\ \frac{e}{2};\ e^{2};\ (e^{2}+\pi)^{\frac{1}{2}};\ (e^{2}+\pi)^{\frac{1}{\pi}}$$

5.1.1 Simplificación de radicales

Esta sección del texto, está orientado a representar, cuando sea posible, los irracionales algebraicos en su apariencia simple.

Ejemplo:

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt[8]{2^{7}}$$

Los instrumentos para simplificar números con esta estructura diversa, están constituidos por las propiedades de la potenciación ya estudiadas, ligadas a definir:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$$

En forma equivalente, así:

$$a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}};\ \sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}};\ \sqrt[5]{2}=2^{\frac{1}{5}};\cdots;\ \sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}};\ \sqrt[7]{3}=3^{\frac{1}{7}}$$

Es de utilidad en la simplificación de expresiones que contienen radicales, la aritmética de fracciones, puesto que para simplificar $\sqrt{\sqrt{2}}$ se debe escribir $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

que no es otra cosa más que $2^{\frac{1}{4}}$ esto es $\sqrt[4]{2}$. De este ejemplo se puede inferir que $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[8]{2}$.

De modo general, se tiene la siguiente relación:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} \text{ entonces } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\times n]{a}$$

Ejemplo:

$\sqrt{2\sqrt{2}} \approx$ 1.6817928305074290860622509524664297...

Hay una diferencia ostensible escribirlo con el signo radical y otra como aproximación decimal. La primera forma permite ejecutar lo que se denomina aritmética exacta y la otra, como es natural, acciona la aritmética aproximada.

Ejemplos:

Simplificar el siguiente radical: $\sqrt{2\sqrt{2}}$

Solución:

$$\sqrt{2\sqrt{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}} \times 2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}} \times 2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$$

Entonces: $\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$

Simplificar el radical: $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

Solución:

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \left(\left(2^{\frac{1}{2}} \times 2\right)^{\frac{1}{2}} \times 2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \times 2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{3}{4}} \times 2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{8}}$$

Por tanto, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt[8]{2^7}$

Generalizando, se tiene la siguiente relación:

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt[8]{a^7}$$

Simplificar el siguiente radical $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$

Solución:

$\sqrt{2\sqrt[3]{2}} = \left(2^{\frac{1}{3}} \times 2\right)^{\frac{1}{2}} == \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{2}{3}}$, por ello $\sqrt{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2^2}$

En términos generales $\sqrt{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{a^2}$.

Simplificar $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$

Solución:

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \left(a^{\frac{1}{2}} \times a\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{a}$$

Este resultado sorprende, pues $\sqrt[3]{17\sqrt{17}} = \sqrt{17}$.

Simplificar el radical $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3}}}}$

Solución:

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3}}}} = \left(\left(\left(\left(3^{\frac{1}{2}}\right) \times 2\right)^{\frac{1}{2}} \times 3\right)^{\frac{1}{2}} \times 2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(3^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3\right)^{\frac{1}{2}} \times 2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(3^{\frac{5}{8}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 2\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{16}} \times 2^{\frac{5}{8}}$$

Así las cosas $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3}}}} = \sqrt[8]{2^5}\sqrt[16]{3^5}$.

Simplificar el cociente de radicales: $\frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

Solución:

$$\frac{\left(2^{\frac{1}{2}} \times 2\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

Ejercicios:

Simplificar y expresar la respuesta en forma radical, las siguientes expresiones:

$$1)\ \frac{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}{\sqrt{3}};\frac{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}$$

$$2)\ \sqrt{\frac{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}};\ \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}};\ \frac{\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}}{\sqrt{5\sqrt{5}}};\ \sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt{5\sqrt[3]{5}}}};\ \sqrt{5\sqrt[3]{3\sqrt{5\sqrt[3]{3}}}}$$

$$3)\ \sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}}};\ \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}};\ \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{b\sqrt{a}}}}};\ \sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}}$$

5.2 LOGARITMOS

El sueño de Evaristo Galois fue ingresar a la Ecole Politecnique, se hacía un examen oral y un profesor le pidió que hablara sobre los logaritmos, teoría recién fundada por John Napier y William Briggs.

Dicen que Galois respondió: $0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ respuesta que no fue comprendida por el susodicho profesor.

Galois no ingresó a la Ecole Politecnique y, siendo seducido por las ideas republicanas, terminaría con menos de 23 años muerto en un duelo de pistolas. Su suerte hubiese sido distinta si el profesor se hubiese apropiado lo suficiente de la teoría de logaritmos. Así como $0, 1, 2, 3, 4, \cdots$, los logaritmos son números.

Lo cierto es que logaritmo es un nombre rimbombante para lo que antes se denominó exponente.

5.2.1 Definición

Al tener una potencia $a^b = p$ se dice que b es el logaritmo de p en la base a y se escribe así: $b = log_a(p)$ y que en todos los casos $p > 0$.

Es decir: $b = log_a(p)\ \ si\ y\ solo\ si\ a^b = p$

Es conveniente anotar que, solo existen logaritmos para potencias positivas.

Ejemplos:

Dado que $2^3 = 8$ se sigue $log_2(8) = 3$

Siendo $10^4 = 10000$, se tiene $log_{10}(10000) = 4$

En razón a que $7^2 = 49$ se escribe $log_7(49) = 2$

De $3^7 = 2187$ se sigue que $\log_3(2187) = 7$.

Pero recuerde, solo existen logaritmos para potencias positivas.

Los logaritmos son números y en consecuencia, ha aparecido una forma entre secreta y misteriosa de escribirlos.

Ejemplo:

$2 = log_9(81) = log_8(64) = log_5(25) = log_{11}(121) = log_{12}(144), \cdots$

Pero en virtud de la igualdad $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ también aparecen logaritmos negativos.

Ejemplos:

Dado que $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ entonces $log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

$$log_{10}(0{,}0000001) = -7$$

Recuerde que $\sqrt{2} = 1.414213562 \cdots$; escrito con exponentes fraccionarios, corresponde a:

$2^{\frac{1}{2}} = 1.414213562 \cdots$; entonces: $log_2(1.414213562\ldots) = \frac{1}{2}$.

Por tanto, $log_2(\sqrt{2}) = log_2(1.414213562 \ldots) = 0.5$.

En este sentido, cualquier número real se convierte en un logaritmo. La respuesta que debió dar Galois debió ser esa: un logaritmo es cualquier número real.

5.2.2 Logaritmos decimales

Al tratarse de la base diez, lo logaritmos se llaman vulgares o decimales y se evita escribir el 10 como subíndice del símbolo log, de este modo $log_{10}(x) = log(x)$.

Ejemplos:

1) $log(0{,}001) = -3;\ log(0{,}01) = -2;\ log(0{,}1) = -1$

2) $log(1) = 0;\ log(10) = 1;\ log(100) = 2;\ log(1000) = 3$

Es claro que entre mayor cantidad de cifras tiene la potencia, el logaritmo es más grande. Con un poco de imaginación se prevé que siendo $100 < 1000$ el logaritmo de todo número positivo entre 100 y 1000 debe estar entre 2 y 3; esto es, en términos decimales es "dos y algo" o "dos y pico" como se dice en lenguaje coloquial.

Ejemplos:

1) $log(567) = 2.753583058\cdots$

2) $log(824) = 2.924279286\cdots$

3) $log(930) = 2.968482948\cdots$

Esta relación de menor a mayor también indica lo recíproco; es decir, si se intenta decir algo verdadero para un número x del que solo se sabe que $log(x) = 4.3239$, se puede asegurar que $10000 < x < 100000$.

Cuando la base de los logaritmos es 2, se quita el subíndice 2 de la palabra log y de ella se usa su apócope lg.

Ejemplos:

1) $log_2(32) = 5$ se escribe como $lg(32) = 5$

2) $log_2(64) = lg(64) = 6$

3) $log_2(128) = lg(128) = 7$

4) $lg(256) = 8$.

5) $lg(383) = 8.581200581$

6) $lg(8900) = 13.11958962$.

7) $lg(0.075) = -3.736965594$

8) $lg(0.00344) = -8.183375719$.

5.2.3 Logaritmos naturales

Los académicos y científicos no usan base entera alguna para sus cálculos y adoptan como base al trascendente e que aproximadamente es $2.71828182845904523536028747135\cdots$ y en lugar de $log_e x$, se estila escribir $\ln(x)$. Los logaritmos con base e se denominan logaritmos naturales.

Ejemplos:

1) $log_e(e) = \ln(e) = 1$

2) $log_e(1) = \ln(1) = 0$

3) $\ln(67) = 4.204692619$

5.2.4 Propiedades de los logaritmos

Las propiedades de la potenciación tienen su traducción en el lenguaje de los logaritmos. Recordemos que:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Por lo tanto:

$$log_a(a^m \times a^n) = m + n = log_a(a^m) + log_a(a^n)$$

$$log_a\left(\frac{a^m}{a^n}\right) = m - n = log_a(a^m) - log_a(a^n)$$

En general se cumple que:

1) $log_a(uv) = log_a(u) + log_a(v)$

2) $log_a\left(\frac{u}{v}\right) = log_a(u) - log_a(v)$

3) $log_a(u^b) = b\, log_a(u)$

El hecho que los logaritmos conviertan productos en sumas, cocientes en diferencias y potencias en multiplicaciones, permite la manipulación de grandes números en la operatoria aritmética en la astronomía, e incluso, en el manejo cuantitativo de cantidades diminutas.

Recordemos que:

$$log_a(p) = b \text{ si y solo si } a^b = p$$

En adelante solo se usan logaritmos decimales (vulgares), un poco en virtud a que el sistema numérico de mayor uso es el decimal.

Ejemplos:

1) $log(1000) = 3$ debido a que $10^3 = 1000$

2) Dado que $10^6 = 1000000$ entonces $log(1000000) = 6$

3) $log(567) = 2.753583058\cdots$ en virtud a que $10^{2.753583058\cdots} = 567$

4) $log(0.78) = -0.1079053973\cdots$ como consecuencia de que $10^{-0.1079053973\cdots} = 0.78$.

Se nota que estos números llamados logaritmos, al final se escriben como decimales; y en términos generales, carecen de periodo; esto es debido a que, lo más probable, es estar frente a un número trascendente que, como se sabe, son más abundantes que los irracionales algebraicos y que los racionales.

Una de las propiedades emblemáticas de los logaritmos establece que $log(a^b) = b\, log(a)$, lo que convierte una potencia en un producto.

Ejemplo:

$log(5^2) = 2\, log(5) = 2 \times log(5) = 2 \times 0.6989700043 \cdots = 1.397940008 \cdots$.

Esto significa que: $10^{1.397940008\cdots} = 5^2$. Por tanto, $10^{1.397940008\cdots}$ es una de las infinitas formas de escribir 25.

5.2.5 Cálculo de raíz cuadrada mediante logaritmos

$$log(\sqrt{a}) = log\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} log(a) = \frac{log(a)}{2}$$

El procedimiento de cálculo de la raíz cuadrada de un número se reduce al cálculo de un logaritmo y su división por 2.

Ejemplo:

Calcular $\sqrt{729}$

Solución:

$$log(\sqrt{729}) = \frac{log(729)}{2} = \frac{2.862727528 \cdots}{2} = 1.431363764 \cdots$$

Esto implica que: $log(\sqrt{729}) = 1.431363764 \cdots$

Por lo tanto: $\sqrt{729} = 10^{1.431363764\cdots}$ que es una de las infinitas formas de escribir 27.

En esencia, el procedimiento para calcular la raíz cuadrada de un número, se traduce a una división por dos.

Ejemplo:

Calcular $\sqrt{831}$ por la vía de los logaritmos.

Solución:

$$log(\sqrt{831}) = \frac{log(729)}{2} = \frac{2.919601023 \cdots}{2} = 1.459800511 \cdots$$

Por lo tanto: $\sqrt{831} = 10^{1.459800511\cdots} \cong 28.82707055 \cdots$, número que con una altísima probabilidad, debe ser trascendente.

Dado que $log(\sqrt{0.0765}) = -0.5581692824\cdots$ entonces:

$\sqrt{0.0765} = 10^{-0.5581692824\cdots} \cong 0.2765863337...$

Observe que, aquí ocurre algo aparentemente inconcebible, el radical es mayor que el radicando.

Debe notar que, para calcular una raíz cúbica se tiene que dividir entre tres, para una cuártica habrá que dividir por cuatro y así sucesivamente.

5.2.6 Cálculo de cocientes mediante logaritmos

Los logaritmos se pueden utilizar para el cálculo de cocientes, para lo cual se aplica la propiedad del cociente, es decir, $log_a\left(\frac{u}{v}\right) = log_a(u) - log_a(v)$

Ejemplos:

Calcular $\frac{0.341}{0.2876}$

Solución:

$$log\left(\frac{0.341}{0.2876}\right) = log(0.341) - log(0.2876)$$
$$= -0.4672456210 - (-0.5412111182) = 0.07396549719$$

Por tanto:

$$\frac{0.341}{0.2876} = 10^{0.07396549719} \cong 1.185674547$$

Ejercicios:

Calcular los resultados de las operaciones que se indican a continuación, haciendo uso de logaritmos:

1) $\sqrt{35};\ \sqrt[3]{35};\ \sqrt[4]{35};\ \sqrt[5]{35};\ \sqrt{1111};\ \sqrt[3]{1111}$

2) $\sqrt{37} \times \sqrt[3]{1111};\ 0.4434 \times 3.78$

3) $\frac{0.4434 \times 3.78}{0.00567};\ \frac{67^3}{566^5};\ \frac{0.078}{0.0567};\ \frac{\sqrt{0.078^3}}{0.0567}$

CAPÍTULO 6.

RAZONES Y PROPORCIONES

CAPÍTULO 6. RAZONES Y PROPORCIONES

6.1 RAZÓN

El planteamiento y resolución de problemas es un mecanismo que se ha convertido en una estrategia didáctica para incrementar la dignidad de las personas. Aplicar esta metodología requiere del ingenio individual, del uso del espíritu creativo y de la inminente creatividad que aflora como recurso escondido. Si, resolver un problema puede significar recurrir al ingenio personal y los problemas matemáticos no se escapan del uso de esta alternativa.

En consecuencia, hay que aprender a resolver problemas como los que se presentan a continuación, encasillados en lo que se ha dado en llamar, regla de tres. Resolver y proponer problemas permite escapar de esa sensación de futilidad, desesperación y desesperanza que suele embriagar a los congéneres y al contrario, produce satisfacción y alegría. Hallar una solución es acrecentar sentimientos de dignidad, confianza, cordura, da sentido a la vida y, finalmente, se convierte en uno de los placeres que permiten atrapar la felicidad, que para nada es continua, que viene a chorritos, a veces a gotitas.

Las razones y las proporciones son la compuerta expedita que tienen los matemáticos para hacer lo que más les gusta, resolver y plantear problemas. Gran cantidad de problemas se resuelven con la aplicación de conceptos como la regla de tres, que tiene a su vez sus ventanas, regla de tres simple directa, regla de tres simple inversa y la famosa regla de tres compuesta, las cuales, refieren siempre al concepto de razón.

6.1.1 Definición

En matemáticas, una razón es la comparación de dos cantidades, por medio de división o cociente.

La razón entre a y b es el número $\frac{a}{b}$ y para que este exista se requiere que $b \neq 0$. En términos de razón, en lugar de $\frac{a}{b}$ se escribe $a{:}\,b$; el numerador a se llama antecedente y el denominador b se llama consecuente y se lee $a \text{ es a } b$.

Por ejemplo, la razón entre 7 y 8 se escribe $\frac{7}{8}$ o $7{:}\,8$ y se lee $siete \text{ es a } ocho$.

Calcular una razón significa determinar el valor que se establece haciendo la división entre el antecedente y el consecuente. Por ejemplo, en la razón $7{:}\,8$ es $0{,}875$.

La razón entre 1000 y 500 es 2; y así hay infinitas parejas de números que tienen la misma razón.

En estudios de carácter estadístico, es frecuente que los expertos emitan informaciones en forma de razón.

Por ejemplo, si el rector de un colegio, por encuesta recibe la información de que solo tres de cada doce estudiantes “aman” la lectura, le están entregando la razón $\frac{3}{12}$ que, tratándose de un número racional, se puede simplificar o amplificar; y en consecuencia, como $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \frac{300}{1200}$, el rector puede afirmar que entre cuatro estudiantes elegidos al azar, solo uno ama la lectura; o que, si su colegio tiene 1200 estudiantes, sólo 300 leen con regularidad.

Ejercicios:

Escriba la razón entre los pares de números dados y calcule su valor: $(14{,}7)$, $(24{,}48)$, $(4{,}18)$, $(5{,}67)$, $(25{,}10)$, $(25{,}100)$, $(250{,}100)$, $(15{,}50)$, $(50{,}9)$ y $(34{,}12)$.

Siendo que la velocidad es una relación (razón) entre el espacio y el tiempo, escriba la razón entre la distancia d recorrida por un automóvil y el tiempo t empleado en ese recorrido:

$d = 300\ km$; $t = 3\ h$.

$d = 560\ km$; $t = 12\ h$.

$d = 80\ km$; $t = 2{,}5\ h$.

$d = 15000\ m$; $t = 30\ s$.

6.1.2 Las razones y el concepto de escala

Las razones se ligan con el concepto de escala, concepto utilizado en cartografía, en mapas, que sugieren una mejor interpretación del mundo.

Si un texto asegura que el radio de la Luna es $\frac{3}{11}$ del radio de la Tierra y, el radio del Sol es igual a 108 radios terrestres, la razón entre los radios de la Luna y el Sol es $108 \div \frac{3}{11}$, es decir $\frac{1188}{3}$ que es 396; o sea que el radio del Sol es 396 veces más grande que el de la Luna.

La matemática resuelve problemas hipotéticos; en ese sentido, suponga que desea repartir nueve millones de pesos entre sus dos mejores amigos y los va a repartir haciendo que lo que reciba cada uno guarde la relación $2:3$.

De inmediato, decide que $\frac{2}{3} = \frac{2x}{3x}$ siendo que $2x + 3x = 9000000$; es decir:

$5x = 9000000$. Entonces $x = 1800000$.

Por tanto, los dos amigos reciben 3600000 y 5400000 de pesos cada uno.

La razón entre población y superficie se conoce entre los demógrafos como densidad poblacional.

De acuerdo al último censo, se estableció que en el departamento A de determinado país, existen 244000 habitantes y que el Departamento tiene $7296{,}8Km^2$; y que el departamento B está habitado por 360000 y una extensión de $9500{,}7Km^2$.

Con estos datos, se tiene que departamento A tiene una densidad de $\frac{244000}{7296,8} = 33{,}43931586 \cdots$ y el departamento B tiene una densidad de $\frac{360000}{9500,7} = 37{,}89194480$. Se deduce que el departamento B está más densamente poblado que el A; por cada Kilómetro cuadrado hay casi cuarenta habitantes, en cambio, en el departamento A hay casi treinta.

6.2 PROPORCIÓN

Una proporción es la igualdad entre dos o más razones.

6.2.1 Definición

Se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o $a: b: : c: d$ o también $a: b = c: d$ y se lee: a es a b como c es a d.

Se denomina constante de proporcionalidad al resultado de la división de las razones, el cual es el mismo para cada una de ellas en una proporción. Los valores a y d se denominan extremos de la proporción, y b y c se llaman medios de la proporción.

Ejemplo:

En la proporción $\frac{33}{25} = \frac{99}{75} = 1{,}32$, la constante de proporcionalidad es $1{,}32$; 33 y 75 los extremos, y 25 y 99 los medios.

$\frac{3}{7} = \frac{27}{63} = 0{,}\overline{428571}\cdots$; $\frac{2}{5} = \frac{20}{50} = 0{,}4$; $\frac{2}{5} = \frac{20}{50} = \frac{22}{55}$=0,4; $\frac{11}{15} = \frac{22}{30} = \frac{33}{45}$=$0{,}7\overline{3}\cdots$.

6.2.2 Teorema fundamental de las proporciones

El Teorema Fundamental de las Proporciones establece que en toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ si\ y\ solo\ si\ ad = bc$$

Ejemplos:

$$1)\ 50 \times 2 = 25 \times 4 \rightarrow \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

$$2)\ 34 \times 19 = 17 \times 38 \rightarrow \frac{19}{38} = \frac{17}{34}$$

Ejercicios:

Dada la igualdad $36 \times 9 = 24 \times 33$ establezca ocho proporciones y calcule para cada una su factor de proporcionalidad. Haga lo mismo con la relación $32 \times 45 = 16 \times 90$.

6.2.3 Solución de ecuaciones

Las proporciones son rampas por donde se desliza una multitud de ecuaciones, algunas de ellas tienen larga historia y nombres rimbombantes; la búsqueda de las incógnitas, en cada caso, obedece a la aplicación del teorema fundamental de las proporciones.

Ejemplo:

$\frac{x}{16}=\frac{90}{45} \to 45x = 90 \times 16$ y con ello $x=\frac{90\times 16}{45}$, es decir $x = 2 \times 16 = 32$

Ejercicios:

Con cada grupo de cuatro datos forme una proporción y encuentre el valor de la incógnita:
$50,\ 70,\ 150,\ x;\ 6,\ 10,\ 18,\ x;\ 30,\ 36,\ 18,\ u;\ 24,\ 21,\ 72,\ p;\ 32,\ 20,\ 256,\ z$.

Dadas las proporciones que siguen, calcular el valor de la incógnita:

$$\frac{x}{8}=\frac{30}{12};\ \frac{63}{x}=\frac{18}{14};\ \frac{5x+2}{3x+25}=\frac{1}{2};\frac{8x-10}{11x}=\frac{3}{3};\ \frac{8x+10}{11x-6}=\frac{5}{3}$$

6.2.4 Propiedades de las proporciones

Si hay algo que asombra en el trabajo de los matemáticos, es que, construido un concepto, de inmediato se proponen buscar propiedades de ese concepto; entendido cada concepto como un objeto matemático.

Para las proporciones existe una propiedad que puede causar escalofríos, pero que, analizada a su máxima simplicidad, es lógica y obvia.

En toda proporción, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como cada antecedente es a su respectivo consecuente. Esto es:

$$Si\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ \text{entonces}\ \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Ejemplo:

Dado que $\frac{3}{5}=\frac{24}{40}$ entonces $\frac{3+24}{5+40}=\frac{3}{5}=\frac{24}{40}$ o lo que es lo mismo $\frac{27}{45}=\frac{3}{5}=\frac{24}{40}$.

6.2.5 Media proporcional

El cálculo del valor de x en la proporción $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ se conoce con el nombre del cálculo de la media proporcional, resultado importante cuya resolución se debe a Euclides, quien por medios geométricos alcanza a resolver el problema, de manera fácil y simple.

Al aplicar el teorema fundamental de las proporciones, se ve que $x^2 = ab$, de donde

$x = \sqrt{ab}$, valor que se corresponde con el promedio geométrico de dos números positivos.

Ejemplo:

Calcular la media proporcional entre 5 y 20.

Solución:

$$\frac{5}{x} = \frac{x}{20} \to x^2 = 100 \to x = 10$$

En infinitas ocasiones la media proporcional entre dos números, deja de ser un entero o un racional y puede ser un irracional algebraico. Por ejemplo, la media proporcional entre 5 y 29 es $\sqrt{145}$ que es un irracional.

6.3 APLICACIÓN DE RAZONES Y PROPORCIONES

En un curso, la razón entre la cantidad de varones y mujeres es $3{:}2$; si hay 15 varones, ¿cuántos estudiantes hay en total en el curso?

Solución:

Los datos establecen que $\frac{v}{m} = \frac{3}{2}$, siendo v el número de varones y m el de mujeres.

Pero $v = 15$, entonces, al remplazar este valor es claro que $\frac{15}{m} = \frac{3}{2}$.

Aplicando el teorema fundamental de las proporciones se tiene $m = 10$. De modo que el curso está constituido por 25 estudiantes, 15 varones y 10 mujeres.

Suponga que, en un turno de la empresa de aseo, la razón entre la cantidad de aseadores varones y mujeres es $5{:}3$; si hay 50 varones, se pregunta ¿cuántas aseadoras hay en el turno?

Solución:

Con los datos se forma la proporción $\frac{v}{m} = \frac{5}{3} = \frac{50}{m}$ de donde $m = 30$.

En la matemática del fuerte, cien dividido entre dos jamás es cincuenta. Por ejemplo, si se piensa en que un albañil y su ayudante, reciben por la instalación de tres sanitarios $\$270000$ que se reparten en la razón $7{:}2$, se requiere responder a la inquietud de ¿cuánto dinero debe recibir cada uno?

Solución:

Se establece la proporción $\frac{7}{2} = \frac{m}{a}$, siendo m lo que recibe el maestro albañil y a lo que recibe el ayudante.

Cada uno recibe x porciones de dinero y por ello $\frac{7x}{2x} = \frac{m}{a}$, siendo $7x + 2x = 270000$; de donde $x = 30000$.

En consecuencia, el maestro recibe $\$210000$ mientras el ayudante solo $\$60000$. Observe que se dividió un número entre dos, pero cada uno no recibió la mitad.

Si las medidas de los ángulos interiores de un triángulo están en la razón $4:15:17$, determinar los valores de α, β y χ.

Solución:

De la geometría se sabe que, la suma de los ángulos interiores de un triángulo suma 180 grados, entonces: $\alpha + \beta + \chi = 180$.

De los datos del problema se tiene que:

$$\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{15} = \frac{\chi}{17}$$

Dado que, en las proporciones se cumple que: la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como cada antecedente es a su respectivo consecuente, entonces:

$$\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{15} = \frac{\chi}{17} = \frac{\alpha + \beta + \chi}{4 + 15 + 17} = \frac{180}{4 + 15 + 17} = \frac{180}{36} = 5$$

$$\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{15} = \frac{\chi}{17} = \frac{180}{36} = 5$$

Por lo tanto: $\alpha = 20, \beta = 75 \text{ y } \chi = 85$.

Ejercicios:

Resolver las siguientes situaciones.

El sueldo mensual de un chofer y su ayudante, están en la razón $4:3$. Si ambos sueldos suman $\$1.400.000$ ¿cuál es el sueldo de cada uno?

El perímetro de una cancha de fútbol mide $432\ m$. Si la razón entre el ancho y el largo es $5:7$, ¿cuánto mide cada lado de la cancha?

El perímetro de un estacionamiento mide $100\ m$. Si la razón entre el ancho y el largo es $2:3$. ¿Cuáles son las medidas de cada lado del estacionamiento?

En la farmacia «Cerca de su barrio» la razón entre las tiras de aspirinas de adulto y de niños que venden en un mes es de $5:3$. Si vendieron 1340 tiras de adulto ¿cuántas tiras de aspirinas de niño vendieron?

Las edades de dos hermanos son entre sí como $2:5$ y ambas edades suman 28 años, ¿cuál es la edad de cada uno?

Las edades de Jenny y Claudio son 25 y 35 años respectivamente. ¿Dentro de cuántos años estarán las edades en la razón $4: 5$

Camila y su hijo compran una pizza para celebrar su nuevo trabajo. Si Camila come 4 trozos y lo que comen está en la razón $2: 1$, ¿cuántos trozos de pizza come su hijo?

Un mapa indica que la escala en centímetros con que está hecho es $5: 1000000$. Por lo tanto, ¿cuántos kilómetros de largo tiene en la realidad un río que en el mapa mide $18\ cm$?

Las edades de dos hermanas son entre sí como $4: 6$. La edad de la mayor supera a la menor en 4 años ¿Cuál es la edad de cada una?

Las medidas de los ángulos interiores de un triángulo están en la razón $3: 5: 11$; calcular las medidas de los mismos.

Las medidas de los ángulos interiores de un triángulo están en la razón $11: 10: 15$; calcular las medidas de los mismos.

6.4 MAGNITUDES PROPORCIONALES

A una persona que oficiaba como carpintero, le preguntaron ¿cuánto cobraba por fabricar una silla? Bajo la respuesta de “Treinta mil pesos”, le preguntaron y ¿cuánto por fabricar cien sillas? A lo que el carpintero respondió, “pues, cuarenta mil pesos por cada una”, ¿Y eso?, replicaron los interesados, “Claro, no ve que es mucho trabajo! dio como respuesta el carpintero.

Este individuo, con seguridad, no había relacionado en su cerebro el concepto de magnitud ni de las formas en que ellas se relacionan. Es usual que el precio de un elemento disminuya en razón a la cantidad de su producción, a pesar de que producir más elementos requiere de mayor cantidad de materiales, mayor inversión de tiempo, mayor cantidad de mano de obra y con seguridad, mayor diligencia, dedicación y atención.

Relacionar magnitudes es un ejercicio lógico importante, aparecen en la vida diaria ordinaria; por ejemplo, a mayor velocidad, mayor distancia recorrida en un mismo tiempo; pero también menor tiempo invertido en recorrer una misma distancia. Aquí no se mide si hay mayor riesgo o el empleo de mayor atención y mayor pericia en la conducción del vehículo, que son cualidades a las que con dificultad se les puede confeccionar una escala.

Pero piense en su cumpleaños y en que requiere preparar una torta. Las recetas se establecen para un número de personas, suponga diez, pero Usted es una persona admirable y de alto reconocimiento social y al menos asistirán 56 personas, así que se hace necesario que todos sus ingredientes mantengan una proporción (leche, harina y huevos, cereza, pasas,…); al menos, cada ingrediente en su volumen se multiplicaría por seis.

Al preparar mezclas de materiales para la construcción de un muro, se debe mantener una proporción entre la arena, la grava, el cemento, los acelerantes y la cantidad de agua; esta proporción entre las magnitudes se mantiene con independencia del volumen de los muros, columnas, vigas, planchas. Y así, siempre: las proporciones, las razones se mantienen.

Si un saco de maíz pesa 45 kg, dos pesan 90 kg, tres 135 kg. Si un depósito de agua se llena en 2,5 horas usando seis llaves de agua de igual diámetro, con una sola llave se debe invertir seis veces el tiempo dado, esto es, 15 horas y con dos llaves abiertas tan solo el triple del tiempo, es decir 7,5 horas.

La lógica empuja aquí a asegurar que entre más llaves se mantengan abiertas el tiempo se reduce y al disminuir el número de llaves de agua, se incrementa el tiempo necesario para llenar el depósito; y se anota que el producto de las dos magnitudes, número de llaves y tiempo en horas es constante. Entre más llaves, menos tiempo, por ello se dice que estas dos magnitudes son inversamente proporcionales.

Al comparar dos magnitudes se dan dos tipos de variación proporcional, la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa.

6.4.1 Magnitudes directamente proporcionales

Las magnitudes directamente proporcionales son aquellas que, el cociente de las cantidades correspondientes es constante; por lo cual, cuando una cantidad aumenta, la otra aumenta, manteniendo constante el cociente.

Si x y y son dos variables con registros numéricos diferentes, mantienen una relación de proporcionalidad directa si el cociente $\frac{x}{y}$ es constante.

6.4.2 Magnitudes inversamente proporcionales

Las magnitudes inversamente proporcionales son aquellas que el producto de las cantidades correspondientes es constante, por lo cual, cuando una cantidad aumenta, la otra disminuye.

Si x y y son dos variables con registros numéricos diferentes, mantienen una relación de proporcionalidad inversa si xy es constante.

Ejemplos:

Una cinta de $168\ cm$ se divide en tres partes, en la razón $3:5:6$. ¿Cuánto mide cada parte?

Solución:

Al llamar x, y y z a cada una de las partes, de inmediato se llega a la proporción $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$ Dado que: la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como cada antecedente es a su respectivo consecuente, entonces:

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}=\frac{x+y+z}{14}=\frac{168}{14}=12$$

De aquí se obtiene que: $x = 36\ cm$, $y = 60\ cm$ y $z = 72\ cm$.

Si 70 lápices valen $\$8400$, ¿Cuánto valen tres lápices?

Solución:

En este caso, la razón $\frac{8400}{70} = 120$ entrega el valor de un solo lápiz y por ello tres de los mismos lápices cuestan $\$360$.

En 100 litros de agua de mar hay 2600 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 10400 gramos de sal?

Solución:

Se ve que, entre más agua hay mayor cantidad de gramos de sal y en consecuencia, con los datos del problema se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{2600}{100} = \frac{10400}{x} \rightarrow x = 400$$

En consecuencia, se requiere 400 litros de agua para poder extraer al menos 10400 gramos de sal.

Un automóvil gasta 5 litros de gasolina cada 80 km. Si en el depósito hay 22 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer el automóvil?

Solución:

A mayor distancia recorrida se debe consumir mayor cantidad de gasolina, por ello las magnitudes son directamente proporcionales, se puede establecer, entonces, la proporción $\frac{80}{5} = \frac{x}{22}$ y de inmediato $x = 352$.

De modo que el mismo carro, con 22 litros de gasolina, puede recorrer 352 kilómetros.

Un automovilista condujo 600 km con 40 litros de gasolina. ¿Cuántos litros necesitaría para recorrer 1500 km?

Solución:

La situación es similar a la anterior. Como las magnitudes son directamente proporcionales, entonces:

$$\frac{x}{1500} = \frac{40}{600} \rightarrow x = 100$$

Se necesitan 100 litros para recorreré 1500 km, es decir, que con un litro recorre apenas quince kilómetros.

Para comprar un libro que cuesta $ 40000, dos hermanos decidieron aportar una cantidad directamente proporcional a sus ahorros. Si Paula tiene $ 60000 y Danilo tiene $ 100000 ¿Cuánto debe aportar cada uno?

Solución:

Aquí es bueno establecer una proporción señalada mediante una sola variable, y es simple. Sea p el aporte de Paula y d el de Danilo, es claro que $\frac{d}{p} = \frac{10000}{60000} = \frac{5}{3}$ desde donde se ve que $5u + 3u = 40000$, siendo u las unidades monetarias que aporta cada uno.

De la relación $8u = 40000$ se sigue que $u = 5000$ lo que asegura que Paula aporta $\$15000$ y Danilo $\$25000$.

Seis trabajadores cavan una zanja de 80 metros de longitud en un día. ¿Cuántos metros cavarán en un día 42 trabajadores, laborando en las mismas condiciones?

Solución:

Es claro que, a mayor número de trabajadores, mayor producción de unidades de trabajo realizado; por ello, el problema se corresponde con magnitudes directamente proporcionales:

$$\frac{x}{42} = \frac{80}{6} \rightarrow x = 560$$

Por tanto, 42 trabajadores cavan $560\ m$ de zanja.

Una moto que va a una velocidad de 100 km/h, tarda 20 minutos en recorrer la distancia entre dos pueblos. ¿Qué velocidad debería llevar para hacer el recorrido en 16 minutos?

Solución:

Este es un problema de magnitudes inversamente proporcionales y en consecuencia sus productos deben ser constantes.

Con los datos se tiene la igualdad:

$$100 \times 20 = 16 \times x \rightarrow x = 125$$

De modo que el motociclista debe viajar a un promedio de $125\ Km/h$.

Un edificio se construye por una cuadrilla de 15 albañiles en 200 días. ¿Cuántos albañiles se debe añadir a la cuadrilla para terminar el trabajo en 150 días?

Solución:

Las magnitudes se relacionan en proporción inversa y en consecuencia se establece la ecuación:

$$15 \times 200 = (15 + x) \times 150 \rightarrow 150x + 2250 = 3000 \rightarrow x = 5$$

Por lo tanto, se deben agregar cinco obreros a la cuadrilla de albañiles para realizar el trabajo en ciento cincuenta días.

Es frecuente ver repartos inversamente proporcionales a una magnitud. Imagine un padre que a sus dos hijos de diez y quince años respectivamente, les desea repartir un millón de pesos y decide que al más joven le corresponda más dinero. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Solución:

En este caso se debe establecer una proporción inversa.

En lugar de $\frac{a}{10} = \frac{b}{15}$ en la que a y b son las cantidades de dinero que recibe cada uno, se debe poner como consecuentes los inversos de las edades.

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{15}} \rightarrow \frac{a}{0.1} = \frac{b}{0.066666666}.$$

De aquí, aplicando que en una proporción la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como cada antecedente es a su respectivo consecuente, se tiene que:

$$\frac{a}{0.1} = \frac{b}{0.066666666} = \frac{a+b}{0.16666666} = \frac{1000000}{0.166666666}.$$

De donde $a = 600000$ y $b = 400000$.

Ejercicios:

Resolver los siguientes problemas.

Un corredor da 5 vueltas a una pista en 15 minutos. Si sigue al mismo ritmo, ¿cuánto tardará en dar 25 vueltas? ¿Cuánto si da 50 vueltas?

Por tres horas de trabajo, Mario ha cobrado 60.000 pesos. ¿Cuánto cobrará por 8 horas?

Para recorrer los 360 km que hay entre A y B un auto tardó 3 horas a una velocidad de 120 km/h. Si disminuye la velocidad a 100 km/h, ¿cuánto tardará?

En un taller de modas, si se trabajan 8 horas diarias tardan 6 días en terminar un pedido. ¿Cuánto tardarán para cumplir el pedido si se trabajan 12 horas diarias? ¿Cuánto si trabajan 10 horas?

Si 400 gramos de salmón ahumado cuestan 12.000 pesos, ¿cuánto debería pagar por 1,5 kg?

Un auto recorre 309 km en 3 horas ¿cuántos kilómetros recorre en 7 horas?, ¿y en una hora?

Tres obreros descargan un camión en dos horas. ¿Cuánto tardarán con la ayuda de dos obreros más?

Tres kilogramos de carne cuestan 60000 pesos. ¿Cuánto podré comprar con 45.000 pesos?

Una receta de torta de manzana especifica los siguientes ingredientes para 6 personas: 365 g. de harina, 4 huevos, 300 g. de mantequilla, 250 g. de azúcar, 6 manzanas. Calcular los ingredientes necesarios de una torta de manzana para 15 personas y otra para 20 personas.

Una moto va a 50 km/h y tarda 40 minutos en cubrir cierto recorrido. ¿Cuánto tardará un auto a 120 Km/h?

Una máquina embotelladora llena 240 botellas en 20 minutos. ¿Cuántas botellas llenará en hora y media?

Un padre paga la mesada a sus tres hijos de forma que a cada una le corresponde una cantidad proporcional a su edad. Al mayor, que tiene 20 años, le da 5000 pesos. ¿Cuánto dará a los otros dos hijos de 15 y 8 años de edad? Realice el reparto si el padre decide un hacerlo de manera inversamente proporcional a las edades.

Un agricultor labra una determinada superficie en 12 horas utilizando dos tractores. ¿Cuánto tardará en labrarla si utiliza tres tractores?

Con 15 máquinas de escribir durante 6 horas, se escriben 220 documentos. ¿Cuántos documentos se escribirán con 45 máquinas durante 6 horas?

Un grifo con un caudal de salida de agua de 18 litros por minuto tarda 14 horas en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaría si su caudal fuera de 7 litros por minuto?

El número de estudiantes en una escuela ha estado creciendo a una tasa de 400 estudiantes por año. Si en la actualidad la escuela tiene 5000 estudiantes ¿cuántos estudiantes había hace 4 años? ¿Cuántos tendrá dentro de cinco años?

María prepara 30 menús en 2 horas, Juana puede prepararlos en 3 horas. ¿qué tiempo emplearán las dos juntas en preparar los 30 menús?

6.5 REGLA DE TRES COMPUESTA

Hablando sobre el infinito, existen en el mundo, en realidad, en la mente de los individuos, infinitos problemas que relacionan más de dos magnitudes. El método de su resolución corresponde a un modelo de procedimiento denominado regla de tres compuesta.

6.5.1 Regla de tres directa

Cuando las magnitudes intervinientes se relacionan una a una con la magnitud de la incógnita de manera directa, el esquema de solución es simple y se expone enseguida.

Tabla 9. Esquema para aplicación de regla de tres con magnitudes directamente proporcionales

Magnitud 1	**Magnitud 2**	**Magnitud 3**	**Magnitud incógnita**	**Ecuación**
Relación Directa	Relación Directa	Relación Directa		$\frac{a_1 \times b_1 \times c_1}{a_2 \times b_2 \times c_2} = \frac{d}{x}$
a_1	b_1	c_1	d	
a_2	b_2	c_2	x	

De donde:

$$x = \frac{a_2 \times b_2 \times c_2 \times d}{a_1 \times b_1 \times c_1}$$

Ejemplo:

9 grifos abiertos durante 10 horas diarias han consumido una cantidad de agua por valor de \$200000. ¿Cuál será el precio del consumo de 15 grifos abiertos, 12 horas durante 12 días?

Solución:

Grifos	**Horas diarias**	**Magnitud incógnita** **Pesos**	**Ecuación**
Relación Directa	**Relación Directa**		$\frac{9 \times 10}{15 \times 12} = \frac{200000}{x}$
9	10	200000	
15	12	x	

$x = 400000.$

En las condiciones dadas en el problema, se espera que el consumo tenga un costo de \$$400000$.

6.5.2 Regla de tres inversa

Cuando las magnitudes se relacionan de manera inversa, la proporción se forma con los inversos de las razones, tal como indica en el siguiente esquema.

Tabla 10. Esquema para aplicación de regla de tres con magnitudes inversamente proporcionales

Magnitud 1	Magnitud 2	Magnitud 3	Magnitud incógnita	Ecuación
Relación Inversa	Relación Inversa	Relación Inversa		$\frac{a_2 \times b_2 \times c_2}{a_1 \times b_1 \times c_1} = \frac{d}{x}$
a_1	b_1	c_1	d	
a_2	b_2	c_2	x	

En consecuencia:

$$x = \frac{a_1 \times b_1 \times c_1 \times d}{a_2 \times b_2 \times c_2}$$

Ejemplo:

5 obreros trabajando 6 horas diarias construyen un muro en 2 días. ¿Cuánto tardarán 4 obreros trabajando 7 horas diarias?

Solución:

Obreros	Horas diarias	Días de construcción	Ecuación
Relación Inversa	Relación Inversa		$\frac{4 \times 7}{5 \times 6} = \frac{2}{x}$
5	6	2	
4	7	x	

Las magnitudes que se comparan tienen relación inversa en cuanto a mayor cantidad de obreros menor inversión de días laborados en una misma obra; y del mismo modo, entre mayor es la cantidad de horas laborados por día, resulta menor la cantidad de días invertidos en la obra puesto que hay un mayor volumen de unidades de trabajo al día.

De aquí se encuentra que $x = 2{,}142857142$; esto es, los cuatro obreros invierten más de dos días. Es positivo evidenciar que la parte decimal de este número de días se aproxima a las seis horas adicionales de labor. Calcular esta fracción de días se convierte en un problema de regla de tres simple.

6.5.3 Regla de tres con magnitudes directa e inversamente proporcionales

Muchas magnitudes se relacionan de manera indistinta de manera directa o de manera inversa; la clave está en establecer la proporción que viabiliza la solución del problema, e invertir las que se relacionan de modo inverso.

Tabla 11. Esquema para aplicación de regla de tres con magnitudes directas e inversas

Magnitud 1	**Magnitud 2**	**Magnitud 3**	**Magnitud incógnita**	**Ecuación**
Relación Directa	**Relación Inversa**	**Relación Directa**		$\frac{a_1 \times b_2 \times c_1}{a_2 \times b_1 \times c_2} = \frac{d}{x}$
a_1	b_1	c_1	d	
a_2	b_2	c_2	x	

De aquí se obtiene que $x = \frac{a_2 \times b_1 \times c_2 \times d}{a_1 \times b_2 \times c_1}$

Ejemplo:

8 obreros han construido en 9 días, trabajando a razón de 6 horas por día, 30 m de muro. ¿Cuántos días necesitarán 10 obreros, trabajando 8 horas diarias para construir los 50 m de muro que faltan?

Solución:

Obreros	**Horas diarias**	**Unidades de labor**	**Magnitud incógnita**	**Ecuación**
Relación Inversa	**Relación Inversa**	**Relación directa**		$\frac{10 \times 8 \times 30}{8 \times 6 \times 50} = \frac{9}{x}$
8	6	30	9	
10	8	50	x	

Las relaciones son simples: si aparecen más obreros se invertirán menos días de trabajo; si se trabajan más horas por día, también se invierte menor cantidad de días en la misma obra, y si se aumentan las unidades de producción se requiere una mayor cantidad de días. Por ello, esta última relación es directa.

De La ecuación que se establece, en concordancia con el problema, se tiene que:

$$\frac{x}{9} = \frac{2400}{2400} = 1 \rightarrow x = 9$$

De modo que, los diez obreros también invierten nueve días en la construcción de cincuenta metros de muro trabajando ocho horas diarias.

Ejercicios:

Se sabe que 5 botellas de agua, de 2 litros cada una, pesan 10 kilos. ¿Cuánto pesan 2 botellas de 3 litros cada una?

En 4 días, 6 impresoras han impreso 100 libros. ¿Cuántos días tardarán en imprimir 50 libros si tenemos 4 impresoras?

Si con 4 grifos de agua, cuyas bocas de salida son de $2cm^2$ se obtienen 300 litros en un determinado tiempo, ¿cuántos litros se obtienen, en el mismo tiempo, con 2 grifos con bocas de $3cm^2$?

Se sabe que 6 mangueras abiertas durante 3 horas equivalen a 10.000 litros. ¿Cuánto tiempo se necesita para llenar una piscina de 130.000 litros con 4 de estas mangueras?

Un equipo de 8 programadores trabajará 6 horas diarias para desarrollar un software en un año. Si se forma un equipo de 10 programadores trabajando 4 horas diarias, ¿cuántos años se necesitan para realizar un proyecto de la misma envergadura?

Un estadio de fútbol tiene una superficie de 7140 metros cuadrados. Para cortar su césped se emplean 3 máquinas cortacésped funcionando durante 5 horas. ¿Cuánto tiempo se requiere para cortar el césped de un estadio cuya superficie sea la mitad si se emplean 7 máquinas?

Una compañía dispone de 5 máquinas de refresco que llenan 280 botellas que se venden por un total de 400 dólares. Si la compañía compra 3 nuevas máquinas embotelladoras, ¿cuántas botellas deben llenar para ganar un total de 550 dólares?

John y Paul tienen una banda y componen 6 canciones en 15 días. Si llaman a su amigo George para que les ayude durante 5 días, ¿cuántas canciones compondrán?

Un atleta corrió 2 horas diarias durante 30 días y adelgazó 5 kilos. Si corriera solamente 20 días, pero lo hiciera por 3 horas, ¿cuántos kilos perdería?

Cuatro empleadas de una tienda de moda tardan 8 días en coser 6 vestidos. Calcular el tiempo que se necesita para coser 24 vestidos si se duplica la plantilla.

Un buque de carga realiza un transporte en 24 días con tan solo 3 motores encendidos, con un consumo total de 2000L de combustible. Si se encienden sus 6 motores para realizar un transporte con un consumo total de 3.000L, ¿cuánto dura el transporte?

Un novelista que escribe 15 páginas en 90 minutos a una velocidad de 22 palabras por minuto, necesita escribir 10 páginas cada 75 minutos para terminar su libro dentro del plazo. ¿Cuántas palabras por minuto debe escribir? ¿Cuántas palabras tiene una página?

El año pasado, una empresa cubana de producción de azúcar contrató 20 operarios que recolectaron al día una media de 100kg de caña por persona en dos semanas de recolecta. Calcular cuántos operarios deben contratar este año para que en una semana recolecten 2000 kilos en total.

Una empresa cuenta con un equipo de 3 técnicos que pueden reparar los 6 elevadores del edificio, en caso de avería, en tan solo 180 minutos. Si se necesita reparar 5 elevadores, pero uno de los técnicos no podrá asistir, ¿cuánto tiempo tardarán en repararlos?

Para construir una casa en 6 meses (183 días), un arquitecto estimó que serían necesarios 16 obreros trabajando 10 horas al día. Sin embargo, limitado por el presupuesto, se decidió contratar solamente a 8 obreros trabajando 6 horas diarias. ¿Cuánto tiempo durará la construcción?

En un sembradío de sandías, que es regado 2 veces a la semana, se podrían cosechar 12 toneladas de esta fruta en 4 meses. Sin embargo, se riega 4 veces semanales para duplicar la producción. ¿Cuántas toneladas se producen en tres meses?

Alberto y Gabriel son dueños de sendas pizzerías. En la de Gabriel se cocinan 4 pizzas en 3 hornos en 30 minutos. Si Alberto dispone de 4 hornos, ¿cuánto tardará en cocinar 6 pizzas suponiendo que ambos manejan el mismo tipo de horno?

6.6 PORCENTAJES

Los porcentajes corresponden a una aplicación de la proporcionalidad directa; permiten comparar cantidades y unidades de medidas con partes de un ciento.

6.6.1 Conceptualización

Los Estados Unidos, basándose en métodos de indagación, es decir, la heurística, estableció para estos tiempos de inicio del siglo XXI, una estimación de la esperanza de vida que se tiene por delante, de los años que quedan a cada quien por vivir. El método es simple y se establece mediante una fórmula: si el interesado tiene menos de 85 años, puede contar con vivir otros $72 - a \times 80\%$, donde a, representa la edad actual; si el interesado tiene más de 85 años se puede contar con vivir $22 - a \times 20\%$ años más. De este modo, si el peticionario tiene en este momento 42 años, le quedan por gozar de esa vida 38 años. Así las cosas, un jovencito de 20 años tiene por delante el vivir 53 años más; si alguien, en este momento tiene 35 añitos, resta por dar candanga otros 38; si se tienen 65, bien o mal vivirá otros 8 años más y si llega a los 90 ya solo puede esperar vivir 4 más.

Los que aman las funciones, encuentran aquí un buen ejemplo de función escalonada:

$$f(a) = \begin{cases} 72 - a \times 80\% \text{ si } a < 85 \\ 22 - a \times 20\% \text{ si } a \geq 85 \end{cases}$$

Suelen preguntar ¿qué prefiere al hacer el pago de un artículo en una tienda, que le hagan el cobro del IVA antes o después de que le ejecuten un descuento? Solo quienes advierten que esta pregunta responde a reconocer que la multiplicación goza de carácter conmutativo, deducen que el orden en que se aplique el descuento y el IVA es indiferente. Y en efecto, si el estado ha decretado un IVA del 19% y el tendero asegura que le está aplicando un descuento del 15%, el importe a pagar p debe multiplicarse en cualquier orden por los factores 0.85 (por el descuento del 15%) y por el 1.19 que acarrea el precio real del artículo y el 19% del IVA. Llegado el momento, se ve que $1.19 \times 0.85 = 0.85 \times 1.19$ y esto indica que debe pagar un $1{,}15\%$ del precio real del artículo.

6.6.2 Cálculo de porcentajes

El cálculo de porcentajes es una aplicación de la proporcionalidad directa al comparar cantidades y unidades de medidas con partes de un ciento. Existen dos procedimientos para su cálculo:

La primera forma, es utilizar de manera directa el cálculo de un porcentaje usando la fórmula $\frac{t \times N}{100}$, donde t es el porcentaje a obtener y N la cantidad total; de este modo, por ejemplo, el 25% de 680 obedece al cálculo $\frac{25 \times 680}{100}$ y este resultado es 170. Por tanto, el 25% de 680 es 170.

La segunda forma, consiste en establecer una proporción que se resuelve de modo simple; pues, los porcentajes se relacionan de manera directa con las cantidades. Si Nes al ciento por ciento, como x es a un determinado porcentaje t, entonces, se produce la proporción $\frac{x}{t} = \frac{N}{100}$; por tanto, $x = \frac{t \times N}{100}$.

En ocasiones se abusa de la simpatía y se pide el cálculo de por ejemplo el 30% del 20% de 3600. Dentro del método directo, la respuesta se halla al aplicar el producto $\frac{30}{100} \times \frac{20}{100} \times 3600$ que es el número 216.

El otro camino, más largo, pero igual de fértil, es encontrar uno de los porcentajes y luego el otro.

Así, el 20% de 3600 se obtiene de la relación $\frac{x}{20}=\frac{3600}{100}$; entonces $x=720$; y de nuevo, la proporción $\frac{x}{30}=\frac{720}{100}$, hace que el valor en definitiva buscado sea $x=216$.

Ejercicios:

Calcular los siguientes porcentajes

El 25% de 5550000

El $0{,}25\%$ de 4000000

El $2{,}7\%$de 7209000

El 125% de 243244

El 5% del 12% de 576500

¿Qué cantidad se obtiene al aumentar 10200 en un 30%?

¿Qué cantidad se obtiene al disminuir 10200 en un 20%?

¿Qué porcentaje es 120 de 2400? (Sugerencia: $\frac{x}{120}=\frac{100}{2400}$)

¿De qué cantidad es 550 el 20%? (Sugerencia: $\frac{x}{100}=\frac{550}{20}$)

Ejercicios:

¿Qué cantidad se obtiene al aumentar 7.500 en un 5%?

¿Qué cantidad se obtiene al disminuir 7.500 en un 20%?

Rosita recibe un sueldo bruto de $970.000 y le descuentan un 20% para salud y pensión. ¿Cuánto dinero recibe de sueldo líquido?

Luis recibe un sueldo líquido de $1.250.000 y le dan un bono de producción del 30% del sueldo líquido ¿Cuánto dinero recibe en total?

¿Qué número disminuido en 19% resulta ser 55.522?

¿Qué número aumentado en 36% resulta ser 47.060?

¿Qué porcentaje es 60 de 2.400?

¿Qué porcentaje es 75 de 56.400?

¿Qué porcentaje es 1.200 de 1.200?

¿De qué cantidad es 56 el 7 %?

¿De qué cantidad es 328 el 42 %?

¿De qué cantidad es 0,5 el 20 %?

Un comerciante compra computadores a $ 3.456.000. ¿A qué precio tiene que venderlos para ganar el 15 %?

Una persona pagó $ 16.000 por una caja de pañuelos desechables, después de recibir un descuento del 12 %. ¿Cuál era el precio de la caja antes del descuento?

Al vender una impresora en $ 391.000 se gana el 11 % del precio de compra. ¿Cuánto había costado la impresora?

Lorena compró una mercadería por $ 500.000 y la vendió a $ 700.000. ¿Cuál es el porcentaje de ganancia que obtuvo?

De los 3.000 alumnos de un instituto, el 40 % son mujeres. ¿Cuántos varones hay en el instituto?

Una persona pidió un préstamo de $ 7.200.000, y tuvo que pagar $ 7.848.000. ¿Qué porcentaje de interés pagó por el préstamo?

¿Qué porcentaje de rebaja se hace en una deuda de $ 45.000 que se reduce a $36.000?

Si al invertir $ 60.000 se pierde un 8 %. ¿A cuánto asciende la pérdida?

Un curso tiene 40 hombres y 25 mujeres. Ayer faltó el 15 % de los hombres y el 4 % de las mujeres. ¿Cuántas personas faltaron en total?

Juan compró un par de calcetines el lunes, el día martes su precio subió un 15 % y bajó un 10 % el miércoles. Si el miércoles el precio de venta es de $ 1.035. ¿Cuánto pagó Juan por el producto el día lunes?

El precio de un alicate es $ 35.510. Durante los años anteriores, el precio se incrementó en un 10 % anual. ¿Cuál era el precio del alicate hace 2 años?

Cada año los sueldos se reajustan de acuerdo al IPC. Este año el IPC corresponde a un 8,7 % y yo gano $ 1.230.000, ¿en cuánto dinero aumentará mi sueldo?

El plan de bonos de una compañía metalúrgica, establece que los empleados recibirán un bono equivalente al 8 % de su salario anual al término del año. Si el soldador recibe durante todo el año un total de $ 3.888.000, incluyendo el bono, ¿cuál es su salario anual?

Un trabajador recibe un aumento de $ 155.000, lo que equivale al 6 % de su salario. ¿Cuál es su nuevo salario?

BIBLIOGRAFÍA

Amster, P. (2008). Fragmentos de un discurso matemático. Buenos Aires. Fondo de Cultura Económica de Argentina.

Bell, E. T. (2003). Historia de las matemáticas. México, D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Boyer, C. B. (1986). Historia de la matemática. Madrid: Alianza Editorial.

Clawson, Calvin, C. (1999). Misterios Matemáticos. Magia y Belleza de los números. México, Editorial Diana.

Collette, J.P. (1986). Historia de las matemáticas. Vol. II. México: Editorial Siglo XXI.

Dieudonné, J. (1988). Matemáticas vacías y matemáticas significativas. En R. Apéry, & otros (Eds.) Pensar las Matemáticas, (p. 187). Barcelona: Tusquets Editores.

Dieudonné, J. (1989). En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy. Madrid: Alianza Editorial.

Falk, M. (2013). Pensamiento Matemático del siglo XX. Segunda Parte: estructuralismo. Bogotá: Fondo Editorial: Universidad Antonio Nariño.

Frank, A. (1980). Fundamentos de Matemáticas Superiores. México: McGraw-Hill.

Fresan, Javier y Otro. (2013). Los números Trascendentes. Madrid. Los libros de la Catarata.

Gauss, C. (1995). Disquisitiones arithmeticae. Bogotá: Editora Guadalupe, Ltda.

Gentile, Enzo. (1985). Aritmética Elemental. Washington D.C. Secretaria General de la OEA.

Graham, D. y Otros. (1994). Concrete Mathematics. A foundation for computer science. USA. Addison Wesley Publishing Company.

Guedj, D. (1998) El imperio de las cifras y los números. Barcelona. Libraria Editoriale.

Kline, M. (1992). El pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días, vol. III, Madrid: Alianza Universidad.

Paulus, J. A. (1993). Más allá de los números. Meditaciones de un matemático. Tusquets Editores.

Paulus, J. A. (1998). El hombre anumérico. El analfabetismo matemático y sus consecuencias. Barcelona. Tusquets Editores.

Raymond, B. et al. (1999). Precálculo. México: Mc Graw Hill

Ríbnikov, K. (1974). Historia de las matemáticas. Moscú: Editorial Mir.

Sánchez, C. H. (1994). Los tres famosos problemas de la geometría griega y su historia en Colombia. Bogotá, D.C., Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Smith et al. (1998). Algebra: Trigonometría y Geometría. México: Addison Wesley Longman.

Smith, S. et. al (2002). Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica. México: Addison Wesley Longman.

Stewart, J. (1977). Conceptos de matemática moderna. Madrid: Alianza Editorial.

Vasco, E. (1991). Conjuntos, Estructuras y Sistemas. En Revista de la academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Vol. XVIII. pp. 211- 223.

Vorobiov, N.N. (1975). Lecciones populares de matemáticas. Criterios de divisibilidad. Moscú: Editorial: Mir. 2da edición. Julio, J., Trad. 1984.

Vorobiov, N.N. (1985). Criterios de Divisibilidad. Lecciones populares de Matemáticas. Editorial Mir. Mosc´.

Wussing, H. (1998). Lecciones de historia de las matemáticas. Madrid: Siglo XXI.

Zill, D. & Dewar, J. (2001). Álgebra Trigonometría. México: Mc-Graw-Hill.

Índice de figuras

Índice de tablas

Acerca de los Autores

ACERCA DE LOS AUTORES

Oscar Fernando Soto-Agreda. Docente Adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Magister en Modelos de Enseñanza Problémica. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana. Profesor Tiemplo Completo Universidad de Nariño.

Correo electrónico: oscarfdosoto@gmail.com; fsoto@udenar.edu.co.

Segundo Javier Caicedo-Zambrano. Docente adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Ingeniero de Sistemas, Universidad Antonio Nariño. Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana. Especialista en Multimedia Educativa, Universidad Antonio Nariño. Magister en Software Libre, Universidad Autónoma de Bucaramanga. Asesor de Desarrollo Académico, Universidad de Nariño. Profesor Tiempo Completo Universidad de Nariño.

Correo electrónico: jacaza1@gmail.com; jacaza1@udenar.edu.co.

Hernán Alberto Escobar-Jiménez. Docente adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Magister en Dirección Universitaria, Universidad de los Andes. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Ingeniero Civil, Universidad de Nariño. Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana. Profesor Tiemplo Completo Universidad de Nariño.

Correo electrónico: hescobar@udenar.edu.co.

Editorial
Universidad de **Nariño**

Lecciones de Aritmética

-Un recurso para Docentes-

Un número se concibe desde la existencia singular de la cantidad como cualidad de las cosas y rechazando todas las otras cualidades de los objetos, esto determina el carácter abstracto de la Matemática. Unido al desarrollo del concepto de número, viene la dificultad de representar tales números: aparecen sistemas de representación como el romano y el mal llamado arábigo, que en realidad es hindú.

Todos los tipos de número surgen del cero y el uno, que son suficiente para construir los enteros, los racionales, los irracionales, los trascendentes, los complejos. Desde allí, se configura la densidad de los racionales, la continuidad de los reales, la inumerabilidad de los irracionales, la no numerabilidad de los trascendentes, la fascinación de los irracionales algebraicos y su misma numerabilidad.

Como todos los textos de matemáticas, esta obra es un texto sin fin, al cual, cada usuario debe encargarse de completar con las indagaciones que ejecute dentro de los materiales a su alcance e ir aumentando el acervo de problemas y preguntas que puedan surgir. En ese ambiente, aparece la libertad de organizar su propio abanico de preguntas, ejercicios, problemas y avanzar en el mundo de las conjeturas.

El libro está estructurado en seis capítulos. El primero, acercamiento a los números naturales, aborda temáticas relacionadas con los sistemas de numeración, divisibilidad y resolución de problemas. El segundo, números naturales, enteros y racionales, trata temáticas de números primos y criterios de divisibilidad, divisibilidad de números naturales, máximo común divisor y mínimo común múltiplo, aritmética con los números naturales y números racionales. El tercero, números reales, contiene el estudio del concepto de igualdad y la recta numérica. El capítulo cuarto, potenciación y números decimales, aborda contenidos relacionados con el estudio de la potenciación, números decimales y sumatorias. El quinto, radicales y logaritmos, trata las temáticas de radicales con sus propiedades, los logaritmos y sus propiedades y aplicaciones. Finalmente, el capítulo 6, razones y proporciones, contiene temas relacionados con razones, proporciones, aplicaciones, magnitudes proporcionales, regla de tres compuesta y porcentajes.

Un texto como este, escrito sin énfasis en la formalidad matemática, se puede utilizar como texto guía para los cursos de matemáticas generales de los planes de estudios de las diversas carreras de la Universidad de Nariño o en otras instituciones de educación superior; también se puede utilizar como una obra que contribuye a enriquecer los conocimientos de aritmética.

ISBN: 978-958-5123-71-7 digital

9 789585 123717

Editorial
Universidad de Nariño