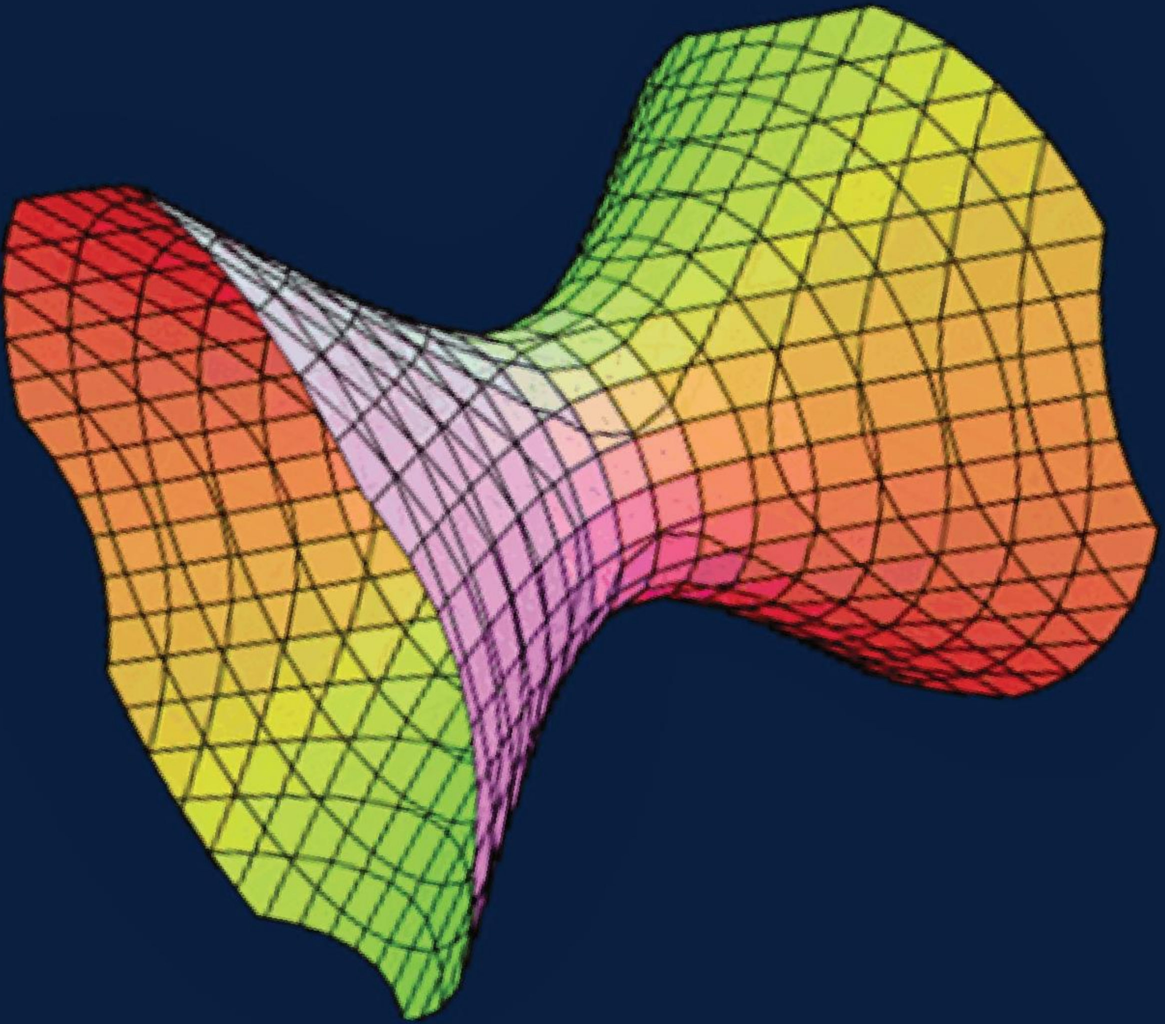
Lecciones de Cálculo Diferencial



Hernán Alberto Escobar Jiménez
Segundo Javier Caicedo Zambrano
Oscar Fernando Soto Ágreda

TANTVM POSSVMVS QVANTVM SCIMVS
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
Editorial
Universidad de Nariño

TANTVM POSSVMVS QVANTVM SCIMVS
UNIVERSIDAD DE NARIÑO

Editorial
Universidad de **Nariño**

LECCIONES DE CÁLCULO DIFERENCIAL

LECCIONES DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Hernán Alberto Escobar Jiménez

Segundo Javier Caicedo Zambrano

Oscar Fernando Soto Ágreda

Editorial
Universidad de **Nariño**

Escobar Jiménez, Hernán Alberto

Lecciones de Cálculo Diferencial / Hernán Alberto Escobar Jiménez, Segundo Javier Caicedo Zambrano, Oscar Fernando Soto Ágreda.--San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño, 2021.

254 p.: il. byn., col.

Incluye datos biográficos de los autores p.3 y referencias bibliográficas p. 254

ISBN 978-958-5123-74-8 impreso

ISBN 978-958-5123-76-2 digital

1. Lecciones de cálculo diferencial. 2. Cálculo diferencial – problemas, ejercicios, etc. 3. Funciones matemáticas. 4. Derivadas (matemáticas). 5. Límites (matemáticas) 6. Cálculo diferencial – Ejercicios y problemas resueltos. I. Caicedo Zambrano, Segundo Javier II. Soto Ágreda, Oscar Fernando

515.33 – E746L – SCDD-Ed. 22 Biblioteca Alberto Quijano Guerrero

Lecciones de Cálculo Diferencial.

Talleres y Evaluaciones

Hernán Alberto Escobar J.
Segundo Javier Caicedo Z.
Oscar Fernando Soto A.

ISBN: 978-958-5123-76-2 digital

Editorial Universidad de Nariño

Diseño y diagramación: Segundo Javier Caicedo Zambrano

Diana Sofía Salas Chalapud

San Juan de Pasto – Nariño – Colombia.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El libro de Lecciones de Cálculo Diferencial, está diseñado para ser utilizado como texto guía, para los cursos de Cálculo Diferencial, en los Programas de Ingeniería Civil, Sistemas y Electrónica de la Universidad de Nariño, al igual que en los Programas de Física, Licenciatura en Matemáticas y Licenciatura en Informática; también puede ser utilizado por estudiantes de otras universidades o instituciones de educación superior, que ofrezcan programas técnicos similares a los mencionados.

El libro contiene, toda la temática contemplada en los cursos usuales de Cálculo Diferencial, sin embargo, en los dos primeros capítulos, de manera puntual y precisa, se trata las características, propiedades y grafos de las funciones reales; también se realiza un tratamiento resumido, de los elementos de Geometría Analítica.

La decisión de incorporar estos temas en el texto, obedece a que, es muy importante que los estudiantes dispongan de los fundamentos teóricos y conceptuales para iniciar el curso, además, para suplir las eventuales debilidades y desconocimiento de estos temas básicos. La experiencia de los autores por más de 30 años en el ofrecimiento de los cursos de Cálculo, motivó la decisión de incorporar estos insumos en el presente libro.

El texto, está escrito de modo que los conceptos y definiciones son consistentes y claros; en cada temática, se plantean y resuelven ejercicios de diversa dificultad y alcance. Al finalizar cada capítulo, se proponen ejercicios y problemas para que sean resueltos por los estudiantes; el propósito es que los resuelvan, comprueben y comparen con las respuestas que aparecen al final del texto.

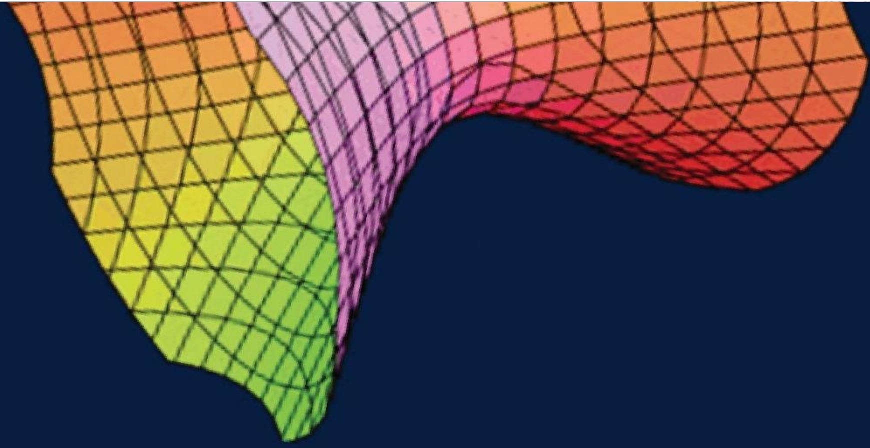
En algunas secciones, el texto contiene y formula teoremas y proposiciones, que para su formalización, requieren una prueba matemática, lo cual contribuye a la producción de consistencia y claridad conceptuales. En otras palabras, se procura que los estudiantes se aproximen a una correcta percepción de lo que realmente significan las matemáticas y sus múltiples aplicaciones en la Ingeniería, Física, Biología, Negocios y otros campos.

El libro está estructurado en cinco (5) capítulos. El primero, *Funciones Reales*, trata las siguientes funciones: lineal, cuadrática, función polinómica, función racional, función valor absoluto, función exponencial, logarítmica, a trozos, trigonométricas, hiperbólica y funciones definidas paramétricamente. El segundo, *Elementos de Geometría Analítica*, contiene definiciones y conceptos relacionados con distancia entre puntos, de un punto a una recta, ángulos entre rectas, entre otros; secciones cónicas y coordenadas polares. El tercero, *Límites y Continuidad*, aborda las temáticas de vecindad de un punto, límite de una función real de una variable real y continuidad de funciones. El cuarto, *Derivadas de Funciones*, contiene definiciones y conceptos de la derivada, álgebra de derivadas, derivada de la función compuesta, derivación implícita, derivadas de las funciones elementales, derivadas paramétricas, teoremas de Rolle y del valor medio, límites de formas indeterminadas, diferencial y derivadas de orden superior. El quinto, *Aplicaciones de la Derivada*, contiene aplicaciones geométricas de la derivada, razón de cambio, máximos y mínimos, trazado de curvas de funciones. El libro finaliza con una sección de respuestas a los ejercicios y problemas propuestos.

Finalmente, los autores confían, que esta obra constituya un recurso pedagógico y didáctico para estudiantes y profesores que estudien y desarrollen temáticas de Cálculo Diferencial.

Los Autores.

San Juan de Pasto, Septiembre de 2020.



CAPÍTULO 1.

FUNCIONES REALES

CAPÍTULO 1

FUNCIONES REALES

Una función real, es aquella cuyo dominio y rango están contenidos en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Se define como sigue:

$$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto y = f(x)$$

1.1 FUNCIÓN LINEAL

La función lineal se define como:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = mx + b$$

La representación gráfica de la función lineal es una recta, cuya pendiente es m y corta al eje y en el punto $(0, b)$ (ver Figura 1).

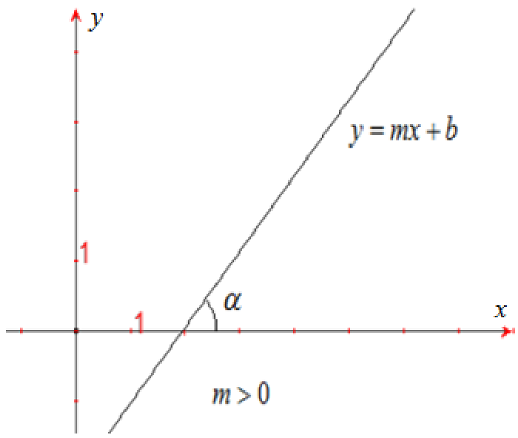


Figura 1. Recta con pendiente positiva: $y = mx + b$; $m > 0$.

Nótese que $m = tg(\alpha)$; α es el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje x. Por otra parte, en la Figura 1, se ve que α es un ángulo agudo.

Se dice entonces, que dicha recta L tiene pendiente positiva, pues $m = tg\ \alpha$ y $tg\ \alpha > 0$.

En general, la recta L tiene pendiente positiva si $0 < \alpha < 90^0$.

En la Figura 2, $90^0 < \alpha < 180^0$. En este caso, se dice que la recta L tiene pendiente negativa, pues $tg\ \alpha < 0$.

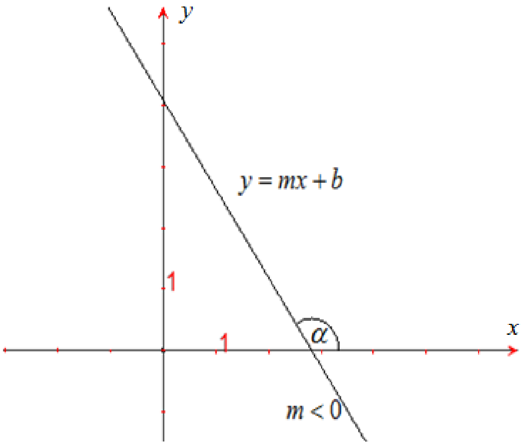


Figura 2. Recta con pendiente negativa: $y = mx + b$; $m < 0$.

En la Figura 3, $\alpha = 0$, por lo cual, la gráfica es una recta paralela al eje y, y tiene un valor constante b.

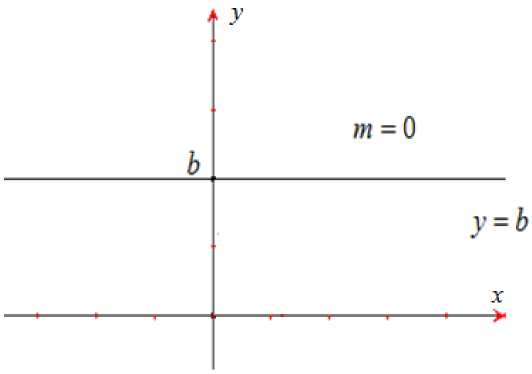


Figura 3. Recta con pendiente cero: $y = b$; $m = 0$.

Conviene mencionar aquí, un concepto importante de la Geometría Euclidiana, que se refiere, a que "*dos puntos determinan una única recta*" (ver Figura 4).

En efecto, si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son puntos de la recta L, entonces, la pendiente de la recta se calcula como sigue:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

La ecuación de la recta L, que pasa por los puntos P y Q, viene dada por las siguientes ecuaciones:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ o también } y - y_2 = m(x - x_2)$$

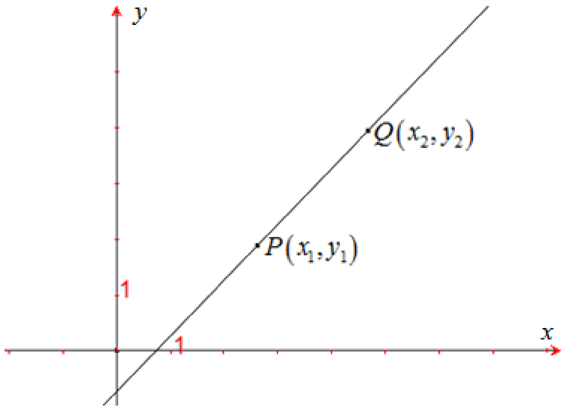


Figura 4. Recta que pasa por dos puntos: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Notas:

1. La ecuación (1), $y = mx + b$ se la conoce como *Pendiente-Intersección* de la recta L.
2. La ecuación $Ax + By + C = 0$ representa gráficamente una recta; se la conoce como *Ecuación General* de la recta L.

Ejemplo 1

Dada la recta L, definida como $y = 2x - 3$, determinar:

a) Ángulo que forma con la parte positiva del eje x.

b) Intersección con los ejes.

Solución

a) La Figura 5, muestra la recta L, cuya ecuación es $y = 2x - 3$; pendiente es $m = 2$. Observe que la pendiente es positiva.

   Entonces $\alpha = arctg(2) \longrightarrow \ \alpha \cong 63^0 26'$.

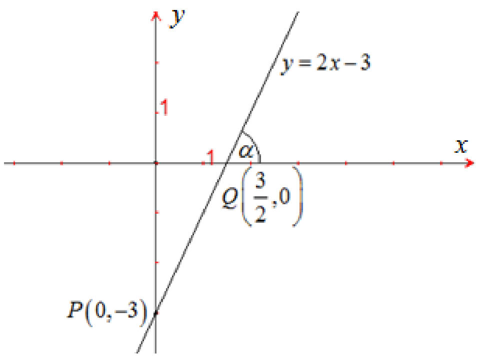


Figura 5. Recta de la ecuación $y = 2x - 3$.

b) La intersección del L con el eje y es $(0, -3)$.

Cuando $x = 0$; $2(x) - 3 = 0$: $x = \frac{3}{2}$.

De esta manera, la intersección con el eje x es $(\frac{3}{2}, 0)$.

Ejemplo 2

a) Determinar las ecuaciones pendiente-intersección y general de la recta que pasa por los puntos $P(-1{,}5)$ y $Q(5{,}1)$.

b) Cuáles son las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes.

c) Valor del ángulo α.

Solución

a) La pendiente de la recta L es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-1}{-1-5} = -\frac{5}{6} \quad \text{(pendiente negativa).}$$

Ecuación pendiente intersección:

Al tomar el punto P se obtiene:

$$y - 6 = -\frac{5}{6}(x+1) \qquad (1)$$

$$y = -\frac{5}{6}x - \frac{5}{6} + 6\,;\ y = -\frac{5}{6}x + \frac{31}{6}\,.$$

De la expresión (1) se obtiene la ecuación general, así:

$$6(y-6) = -5(x+1);\ 6y - 36 = -5x - 5\,;$$

$$5x + 6y - 31 = 0 \qquad (2)$$

b) De la relación (2):

$$x = 0 \ \rightarrow y = \frac{31}{6}; \quad \text{intersección eje } y\text{: } \left(0, \frac{31}{6}\right).$$

$$y = 0 \ \rightarrow x = \frac{31}{5}; \quad \text{intersección con eje } x\text{: } \left(\frac{31}{5}, 0\right).$$

c) El ángulo α:

$$m = tg\ \alpha = -\frac{5}{6}\ ;\ \alpha = arctg\left(-\frac{5}{6}\right)\ ;\ \alpha = 180^0 - arctg\left(\frac{5}{6}\right)\ ; \alpha \cong 140^0 11'\,.$$

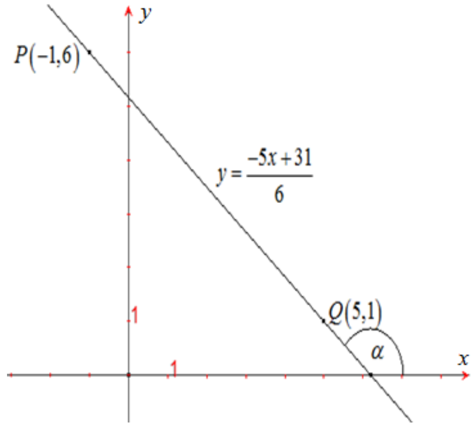


Figura 6. Recta que pasa por los puntos $P(-1,6)$ y $Q(5,1)$.

Ejemplo 3

En los problemas siguientes, escriba y grafique una ecuación para la recta L descrita:

a) L es horizontal y pasa por $P(3,-5)$.

b) L pasa por $P(-1,-4)$ y tiene una pendiente $\frac{1}{2}$.

c) L pasa por $M(4,2)$ y tiene un ángulo de intersección de 135^0.

d) L pasa por $N(1,5)$ y es paralela a la recta: $L_1 = 2x + y = 10$.

e) L pasa por $S(-2,4)$ y es perpendicular a la recta: $L_1 = x + 2y = 17$.

Solución

a) La recta pedida es $y = -5$, tiene pendiente $m = 0$; corresponde a una función constante (ver Figura 7).

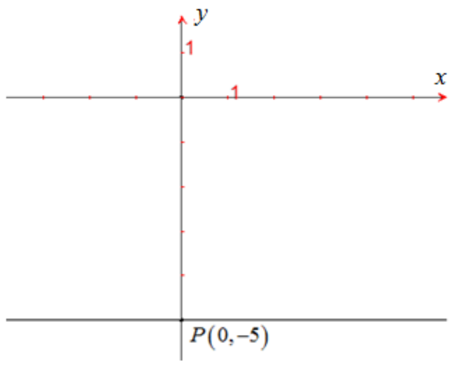


Figura 7. Recta $y = -5$; $m = 0$

b) En este caso, la recta L tiene pendiente $m = \frac{1}{2}$ (positiva). Su ecuación es la siguiente:

$$y + 4 = \frac{1}{2}(x + 1);\ y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}.$$

La recta pasa por los puntos $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$ y $(7,0)$ correspondientes a los puntos de intersección con los ejes. La representación gráfica corresponde a la Figura 8.

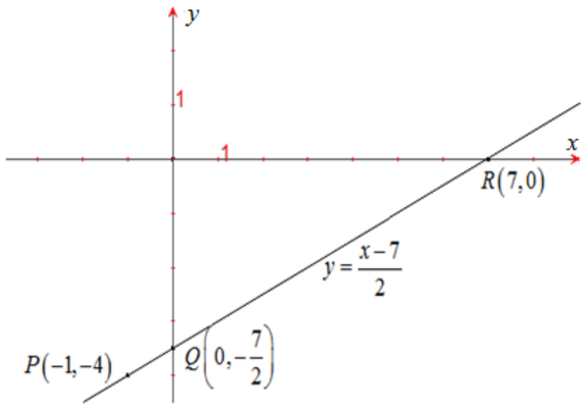


Figura 8. Recta que pasa por $P(-1,-4), m = \frac{1}{2}$.

c) En este caso, la pendiente es $m = tg(135^0) = -1$.

Su ecuación es $y - 2 = -1(x + 4);\ y = -x + 6$.

Los puntos de corte con los ejes, son $(6,0)$ y $(0,6)$ (ver Figura 9).

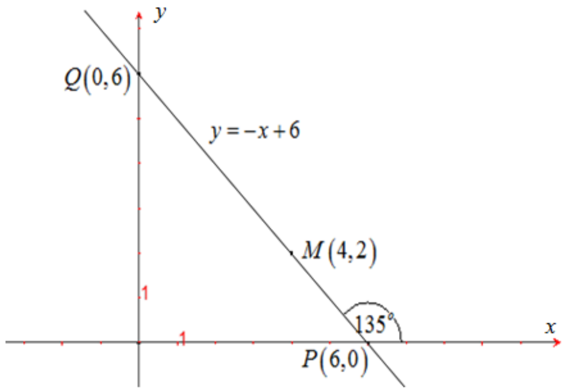


Figura 9. Representación gráfica de la ecuación $y = -x + 6$

d) De la ecuación de la recta $2x + y = 10$ se tiene que $y = -2x + 10$, con lo cual, $m = -2$ (ver Figura 10)

La recta que se pide, tiene pendiente $m = -2$ y debe pasar por el punto $N(1,5)$, entonces su ecuación es la siguiente: $y - 5 = -2(x + 1);\ y = -2x + 7$.

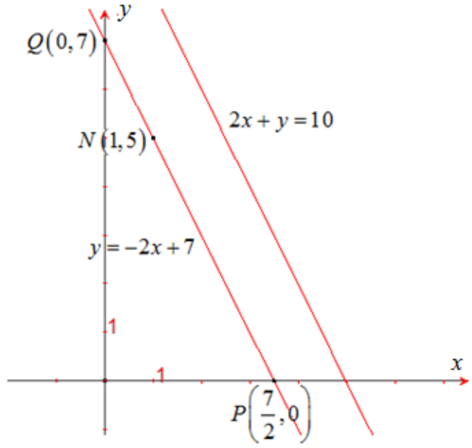


Figura 10. Recta que pasa por $N(1,5)$ y es paralela a la recta: $L_1 = 2x + y = 10$

e) La recta pedida L, es perpendicular a la recta $x + 2y = 17$, ó sea $y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$.

La pendiente de L, es entonces $m = 2$.

Su ecuación es $y - 4 = 2(x + 2)$; $y = 2x + 8$ (ver Figura 11).

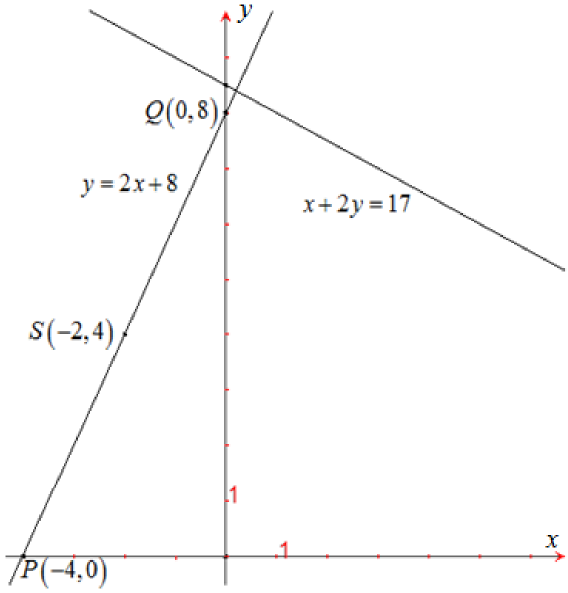


Figura 11. Recta pasa por $S(-2,4)$ y es perpendicular a la recta: $L_1 = x + 2y = 17$.

Ejemplo 4

La longitud L (en cm) de una varilla de cobre, es una función lineal de su temperatura en grados Celsius C. Si $L = 124.942$ cuando $C = 20$ y $L = 125.134$ cuando $C = 110$; expresar L en términos en C.

Solución:

Si L es función de C, entonces, los puntos de la recta que relaciona estas magnitudes, son de la forma (C, L). En este caso, los puntos son: $P(20, 124.942)$ y $Q(110, 125.134)$.

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{\Delta L}{\Delta C} = \frac{125.134 - 124.942}{110 - 20} = \frac{0{,}192}{90} = \frac{12}{5625}.$$

Al considerar el punto P, la ecuación de la recta es:

$$L - 124.942 = \frac{12}{5625}(C - 20)\text{ ; o bien } L = \frac{12}{5625}C + \frac{70255875}{562500}.$$

Al realizar las operaciones, finalmente se obtiene la expresión lineal:

$$L = 0{,}0021\overline{3}C + 124.899\ .$$

Ejemplo 5

Considerar la ecuación general de la recta L, definida como $3x + 2y - 6 = 0$:

1) Graficar L.

2) Determinar los ángulos internos del triángulo rectángulo que determina L con los ejes coordenados en el primer cuadrante.

3) Determinar el área del triángulo.

Solución:

1) Dado que dos puntos determinan una recta, se encuentra los interceptos con los ejes, así:

$x = 0 \implies 2y - 6 = 0\ ;\ y = 3 \implies (0{,}3)$ punto intersección con el eje y.

$y = 0 \implies 3x - 6 = 0;\ \ x = 2 \implies (2{,}0)$ punto intersección con el eje x.

2) De la selección $3x + 2y - 6 = 0$, se obtiene la ecuación Pendiente-Intersección, como sigue:

$$y = -\frac{3}{2}x + 3\ .$$

La pendiente es:

$$m = -\frac{3}{2}\ ;\ tg\ \alpha = -\frac{3}{2}\ ;\ \alpha = 123^0 41'.$$

Entonces $\alpha' = 180^0 - 56^0 18'$.

El ángulo en el origen del sistema de coordenadas, 0 es: 90^0, entonces:

$$\beta = 180^0 - (90^0 + 56^0 18') \cong 33^0 42'\ .$$

De esta manera, los ángulos interiores son $33^0 42'$, $56^0 18'$ y 90^0.

3) $\acute{A}rea = \frac{1}{2}(2)(3) = 3u^2$.

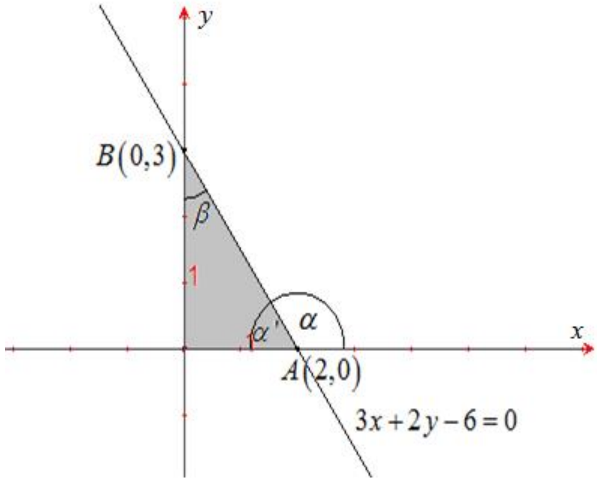


Figura 12. Recta $3x + 2y - 6 = 0$.

EJERCICIOS 1.1

1) Tres puntos A, B y C, están en una misma recta si y solo si, la pendiente de AB es igual a la pendiente de BC. Teniendo en cuenta este principio, determinar si los tres puntos están o no están en la misma recta. Realizar la gráfica.

    a) $A(-1,-2)$; $B(2,1)$; $C(4,3)$.

    b) $A(-2,5)$; $B(2,3)$; $C(8,0)$.

    c) $A(-1,6)$; $B(1,2)$; $C(4,-2)$.

    d) $A(-3,2)$; $B(1,6)$; $C(8,14)$.

2) Utilizar el concepto de pendiente para demostrar que, los cuatro puntos dados, son los vértices de un paralelogramo. Realizar la gráfica.

    $a)$ $A(-1,3)$; $B(5,0)$; $C(7,4)$; $D(1,7)$.

    $b)$ $A(7,-1)$; $B(-2,2)$; $C(1,4)$; $D(10,1)$.

3) Mostrar que los tres puntos dados, son los vértices de un triángulo rectángulo. Realizar la gráfica.

    $a)$ $A(-2,-1)$; $B(2,7)$; $C(4,-4)$.

    $b)$ $A(6,-1)$; $B(2,3)$; $C(-3,2)$.

4) Los puntos $A(-1,6)$; $B(0,0)$; $C(3,1)$, son 3 vértices consecutivas de un paralelogramo. Determinar el cuarto vértice y graficar.

5) Mostrar que las diagonales del paralelogramo del problema 4, se bisecan entre sí.

6) La temperatura Fahrenheit F y la temperatura absoluta K, satisfacen una ecuación lineal. Si $K = 273{,}16$ cuando $F = 32$; y $K = 373{,}16$ cuando $F = 212$. Expresar K en términos de F. Cuál es el valor de F cuando $K = 0$. Realizar la gráfica.

7) Se prevé que en la década del 2000, crezca el número de mujeres en la fuerza de trabajo. Un consultor de pronósticos, se sirve de la ecuación $N = 9{,}6 + 0{,}20t$ para producir el número de mujeres entre 35 y 44 años de edad, que estarán en la fuerza de trabajo. En este caso, N es el número de mujeres entre 35 y 44 años medida en millones y t indica el tiempo medido en años a partir de 1991. ($t = 0$ corresponde a 1911).

   a) Interpretar el significado de pendiente e intersección.

   b) Predecir el número de mujeres de este grupo de edad, que pertenecerán a la fuerza laboral en 2008, 2010 y 2015.

   c) Trazar la gráfica.

1.2 FUNCIÓN CUADRÁTICA

La función cuadrática, es una función real, de la forma:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

La representación gráfica de la función cuadrática, es una parábola. Para trazarla, se debe tener en cuenta el signo del coeficiente a, así:

$Si\ a > 0$ entonces, la parábola se abre hacia arriba.

$Si\ a < 0$ entonces, la parábola se abre hacia abajo.

El vértice de la parábola, es el valor máximo o mínimo de la función cuadrática. Para $a > 0$, el vértice es mínimo y si $a < 0$, el vértice es máximo. (ver Figura 13 y Figura 14).

Las coordenadas del vértice, son en cualquier caso $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

El punto de intersección de la parábola con el eje y es $(0, b)$.

Finalmente, los puntos de intersección con el eje x, si las tiene, se calculan al resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

En la Figura 13, se puede ver una parábola que tiene en V un mínimo, pasa por $(0, b)$ y la ecuación cuadrática tiene dos raíces $r_1\ y\ r_2$; por otra parte, en la Figura 14, V es un máximo y tiene dos puntos de intersección con el eje x, correspondiente a las raíces $r_1\ y\ r_2$.

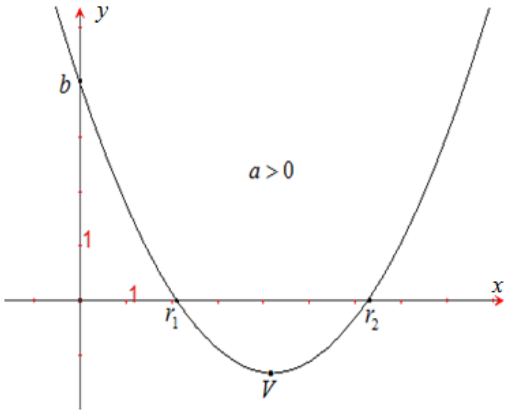


Figura 13. Parábola con $a > 0$; vértice punto mínimo.

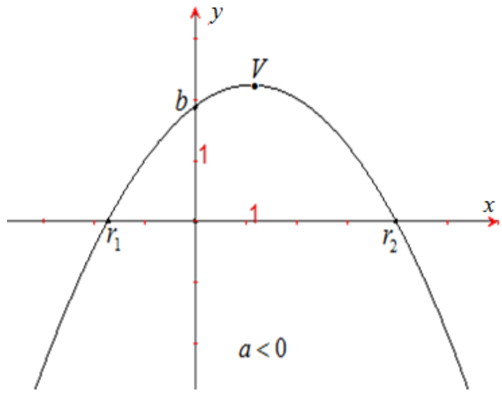


Figura 14. Parábola con $a < 0$; vértice punto máximo.

En la Figura 15 y Figura 16, se muestra dos parábolas que no tienen puntos de intersección con el eje x, por lo cual, las ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$ no tienen raíces reales, sino complejas.

En cualquiera de los dos casos, se observa que las parábolas son simétricas con respecto a una recta imaginaria que pasa por el vértice y es paralela al eje y. Por tanto, para trazar una parábola a "mano alzada" sin recurrir a la tabulación, se pueden utilizar los siguientes criterios:

a) $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba y si $a < 0$, se abre hacia abajo.

b) Pasa por el punto $(0, b)$.

c) El vértice es $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

d) Analizar simetría.

e) Adoptar una escala conveniente.

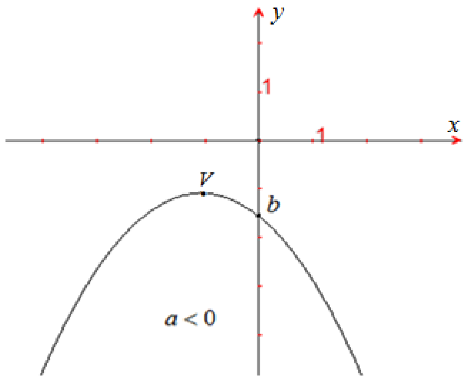


Figura 15. Parábola con a<0; sin raíces reales.

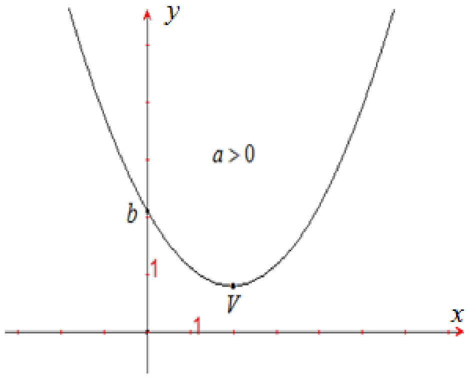


Figura 16. Parábola con a>0; sin raíces reales.

Ejemplo 1

Trazar las gráficas de las siguientes parábolas:

1) $y = x^2 - x - 6.$

2) $3y = 4x - x^2 + 8.$

3) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1.$

Solución:

1) $y = x^2 - x - 6$. En este caso, $a = 1,\ b = -1,\ c = -6.$

- Como $a = 1 > 0$, la parábola se abre hacia arriba.
- La parábola pasa por $(0, -6)$.
- Coordenadas del vértice

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1)(-6) - (-1)^2}{4(1)} = -\frac{25}{4}.$$

Vértice: $V\left(\frac{1}{2},-\frac{25}{4}\right)$.

El vértice constituye un punto mínimo de la parábola.

- Intersección con el eje x

  Resolver la ecuación cuadrática $x^2-x-6=0 \implies (x-3)(x+2)=0$.

  Por tanto, $x=3$ o $x=-2$.

  La parábola correspondiente, se representa en la Figura 17.

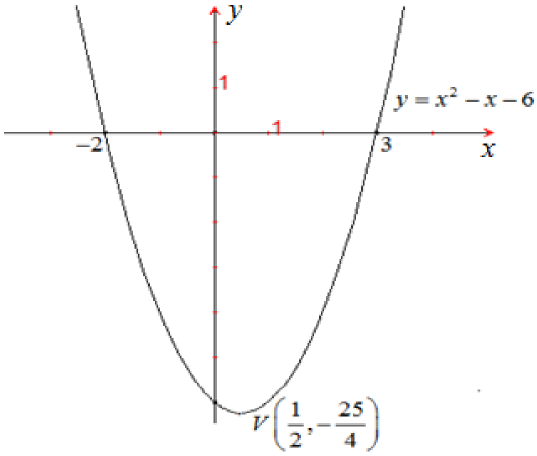


Figura 17. Parábola con $a>0$ y raíces reales

2) $3y=4x-x^2+8$

$$y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{8}{3};\ a=-\frac{1}{3}\ ;\ \ b=\frac{4}{3}\ ;\ c=\frac{8}{3}.$$

Como $a=-\frac{1}{3}<0$, la parábola se abre hacia abajo.

- Pasa por el punto $\left(0,\frac{8}{3}\right)$.
- Coordenadas de vértice

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{4}{3}}{2\left(-\frac{1}{3}\right)}=-2\ ;\ \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{4}{3}\right)^2}{4\left(-\frac{1}{3}\right)}=4.$$

  Vértice: $V(2{,}4)$.

  El vértice, constituye un punto máximo de la parábola.

- Intersección con el eje x

  Resolver la ecuación cuadrática $-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}=0;\ x^2-4x-8=0;$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+32}}{2};\ x = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2}\ ;\ \ x = 2 \pm \sqrt{12}.$$

Por tanto, las raíces son $x_1 = 2 + \sqrt{12} = 5{,}46$ y $x_2 = 2 - \sqrt{12} = -1{,}46$.

La parábola correspondiente, se presenta en la Figura 18.

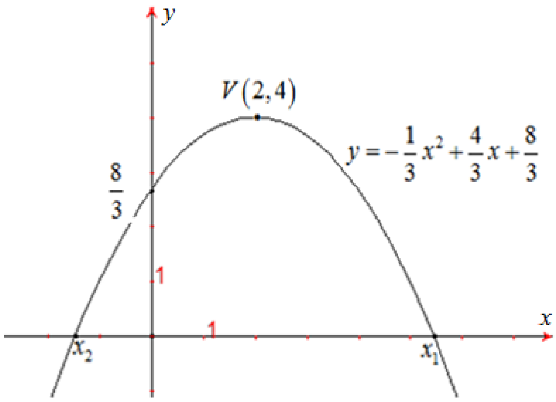


Figura 18. Parábola con $a < 0$ y raíces reales.

3) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ en este caso $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$; $c = 1$.

- Como $a = \frac{1}{2} > 0$, los lazos de la parábola se abren hacia arriba.
- La parábola pasa por el punto $(0,1)$.
- Intersección con el eje x:

  Resolver la ecuación cuadrática:

  $$\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0;\ \ x^2 + 2x + 2 = 0.$$

  $$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2};\quad x = -1 + 2i\ \ \in\ \mathbb{C}\,.$$

- Intersección con el eje x

  Como la ecuación cuadrática no tiene raíces reales, es decir, son complejas, la curva no intercepta al eje x.

- Coordenadas del vértice

  $$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = -1\,.$$

  $$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)(1) - (1)^2}{4\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Vértice: $V\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

El vértice, constituye un punto mínimo de la parábola.

La gráfica correspondiente, se presenta en la Figura 19.

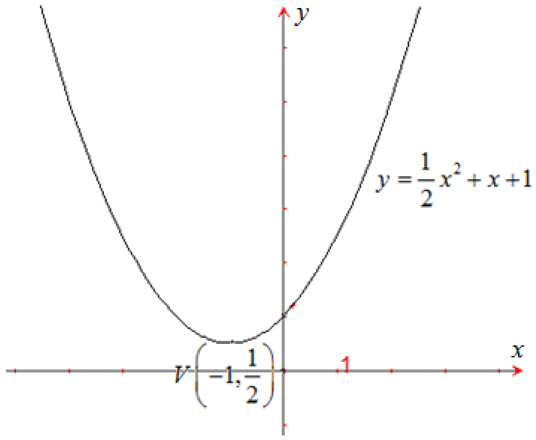


Figura 19. Parábola con a>0 y raíces complejas.

Ejemplo 2

Determinar la ecuación de la función cuadrática, que pasa por los puntos $A(2,-3)$, $B(-2,1)$ y $C(4,-2)$.

Solución:

La ecuación de la función cuadrática, viene de la forma $y=ax^2+bx+c$, en donde a, b y c son coeficientes, por el momento desconocidos. Los puntos A, B y C deben satisfacer tal ecuación, así:

$$A(2,-3);\ -3=2(2)^2+2b+c\ ;\ 4a+2b+c=-3. \qquad (1)$$

De la misma forma,

$$A(-2,1);\ 1=a(-2)^2+(-2)b+c; 4a-2b+c=1. \qquad (2)$$

Y finalmente,

$$A(4,-2);\ -2=2(4)^2+4b+c\ ; 16a+4b+c=-2. \qquad (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) forman un sistema lineal de ecuaciones 3×3:

$$\begin{cases} 4a+2b+c=-3 \\ 4a-2b+c=1 \\ 16a+4b+c=-2 \end{cases}$$

Al resolver el sistema, se obtiene:

$$a=\frac{1}{4};\quad b=-1;\quad c=-2.$$

En consecuencia, la ecuación de la función cuadrática es:

$$y = \frac{1}{4}x^2 - x - 2.$$

La Figura 20, contiene la representación gráfica correspondiente.

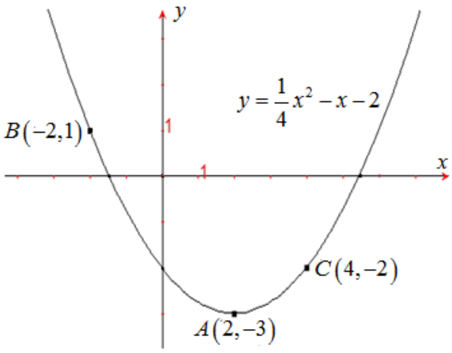


Figura 20. Parábola conocidos tres puntos de la misma.

EJERCICIOS 1.2

1) Trazar los gráficos de las siguientes funciones cuadráticas:
   a) $y = 25x^2 + 8x - 12.$

   b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 24x.$

   c) $y = \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{64}x.$

   d) $y = 0{,}1x^2 - 0.01x + 1.$

2) Determinar las ecuaciones de las funciones cuadráticas, que pasan por los puntos dados, y trazar sus gráficas.
   a) $P(0{,}10)$; $Q(1{,}6)$; $R(-2{,}4)$.

   b) $A(1{,}2)$; $B(-5, -64)$; $C(3, -8)$.

3) La ecuación estándar de la función cuadrática dada $y = ax^2 + bx + c$ es $y = a(x + h)^2 + k$, donde el punto (h, k) es el vértice de la parábola.

   Mostrar que $h = -\frac{b}{2a}$; $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

4) La población de peces de un lago, obedece a la función $P(t) = 10000(50 + 23t - t^2)$, t en años, a partir del 1 de enero de 2020, fecha en la que se estimó la población por primera vez.
   a) Para qué año se tendrá la máxima población.

   b) Población estimada al cabo del 4 año y en 12 años.

   c) ¿En qué año, la población de peces será la misma de enero 1 de 2020? Grafique y saque conclusiones.

1.3 FUNCIÓN POLINÓMICA

Una función polinómica de variable "x" se define como sigue:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto y = f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Donde $a_0, a_1 x, \cdots, a_n$ son números reales, $a_n \neq 0$.

El mayor entero positivo n, tal que $a_n \neq 0$, se denomina grado de la función polinómica y los a_i, se llaman coeficientes.

El real r es raíz o cero de la función polinómica $f(x)$, si $f(r) = 0$.

Por ejemplo, sea $f(x)$=$x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Se tiene que:

$f(2) = 2^3 - 2(2)^2 - 2 + 2 = 8 - 8 - 2 + 2 = 0$.

Entonces 2 es raíz o cero de $f(x)$.

1.3.1 Teorema del residuo

Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, entonces, el residuo de dividir $f(x)$ entre $x - b$ es $f(b)$.

Demostración:

Sea $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_n \neq 0, x \in \mathbb{R}$, un polinomio de grado n. Entonces,

$$f(b) = a_0 b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n \,;$$

$$f(x) - f(b) = a_0(x^n - b^n) + a_1(x^{n-1} - b^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(x - b).$$

Al desarrollar las diferencias de potencias se tiene:

$$\begin{aligned} f(x) - f(b) = {} & a_0(x - b)(x^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + b^{n-1}) \\ & + a_1(x - b)(x^{n-2} + bx^{n-3} + \cdots + b^{n-2}) + \cdots + \end{aligned}$$

Se factoriza $(x - b)$ en cada sumando:

$f(x) - f(b) = (x - b)g(x)$; donde $g(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$.

De aquí se obtiene:

$$f(x) = (x - b)g(x) + f(b).$$

Esto significa que el resto de dividir $f(x)$ entre $x - b$ es, en efecto, $f(b)$.

Ejemplo

Sean $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 10$ y el binomio $(x - 1)$.

El resto de dividir $f(x)$ entre $(x-1)$ es:

$$f(1)=5(1)^3+4(1)^2-3(1)+10=5+4-3+10=16.$$

Por lo tanto, el residuo es $f(1)=16$.

1.3.2 Teorema del factor

Sea $f(x)$ una función polinómica de grado n; $(x-r)$ es un factor $f(x) \Leftrightarrow f(r)=0$.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Sea $(x-r)$ factor de $f(x)$, entonces $f(x)=(x-r)g(x)+0$, pues $(x-r)$ es factor. Por lo cual, $f(r)=0$.

$(\Leftarrow)$ Sea $f(r)=0$. Por teorema del residuo:

$$f(x)=(x-r)g(x)+f(r); f(x)=(x-r)g(x)+0; f(x)=(x-r)g(x).$$

Esto indica que $(x-r)$ es un factor de $f(x)$.

1.3.3 Teorema de las raíces racionales de una función polinómica

Sea $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, $a_0\neq 0$; $a_i\in\mathbb{Z}$ un polinomio con coeficientes enteros y sea $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$.

Si $\frac{p}{q}$ es un cero (una raíz) de $f(x)$, entonces, p es factor de a_0 y q es factor de a_n.

Demostración:

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+a_0=0.$$

Puesto que se supone que $\frac{p}{q}$ es raíz de $f(x)$, entonces,

$$a_n\left(\frac{p^n}{q^n}\right)+a_{n-1}\left(\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right)+\cdots+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+a_0=0\,;$$

$$\frac{a_np^n+a_{n-1}qp^{n-1}+\cdots+a_1q^{n-1}p+a_0q^n}{q^n}=0\,;$$

$$a_np^n+a_{n-1}qp^{n-1}+\cdots+a_1q^{n-1}p+a_0q^n=0\,;$$

$$a_{n-1}qp^{n-1}+\cdots+a_1q^{n-1}p+a_0q^n=-a_np^n\,. \qquad (1)$$

En la relación (1), se observa que, q está presente en todos los términos del lado izquierdo; entonces, divide el termino $-a_np^n$ y por consiguiente q divide a a_n, puesto que q no divide a p, por el supuesto que $\frac{p}{q}$ es irreductible.

Análogamente, la relación (1) se puede escribir como sigue:

$$a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + \cdots + a_1 q^{n-1} p = -a_0 q^n. \qquad (2)$$

En la relación (2), el factor p está en todos los sumandos de la parte izquierda, lo que implica que p divide al termino $-a_0 q^n$; por lo cual, p divide a a_0 puesto que p no divide a q.

1.3.4 Gráfica de la función polinómica

Para trazar de manera aproximada la curva correspondiente a la función polinómica, se debe tener en cuenta los siguientes criterios:

a) Dado que el dominio de definición de la función polinómica son los reales, entonces la curva se desarrolla en $\mathbb{R}^2$.

b) Los interceptos con los ejes se obtienen así: con el eje y, es el punto $(0, a_0)$; con el eje x, corresponden a los ceros o raíces de la función polinómica, siempre y cuando sean números reales. En este caso, se tabulan algunos valores a la derecha e izquierda de cada raíz, para obtener puntos de la curva.

c) En el caso de que no tenga raíces reales, se procede a tabular algunos valores.

d) En cualquiera de los casos, es conveniente adoptar una escala apropiada.

Nota:

Parra llevar a cabo un trazo más preciso de la función polinómica, se recurre al cálculo diferencial, en lo referente a la obtención de máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y concavidad. En el capítulo correspondiente, se tratará este tema, con más profundidad.

Ejemplo 1

Trazar aproximadamente la gráfica de la siguiente función polinómica:

$$y = x^3 + 4x^2 - 5x.$$

Solución:

a) La gráfica de la función polinómica, pasa por (0,0).

b) Los ceros de la función (raíces de la ecuación polinómica), se obtienen al resolver la ecuación: $x^3 + 4x^2 - 5x = 0$.

$$x^3 + 4x^2 - 5x = 0 \rightarrow \ x(x^2 + 4x - 5) = 0 \ \rightarrow x(x+5)(x-1) = 0.$$

Por lo tanto, las raíces de la ecuación polinómica son: $x = 0$, $\ x = -5$, $\ x = 1$.

En consecuencia, la curva intercepta al eje X, en los puntos $x = 0$; $x = -5$; $x = 1$.

c) Se determina algunos valores de la función, localizados entre las raíces o cercanas, a izquierda y derecha de ellos, así:

- $y(-3) = (-3)^3 + 4(-3)^2 - 5(-3) = -27 + 36 + 15 = 24$.
- $y(-6) = (-6)^3 + 4(-6)^2 - 5(-6) = -216 + 144 + 30 = -42$.
- $y(-1) = (-1)^3 + 4(-1)^2 - 5(-1) = -1 + 4 + 4 = 8$.
- $y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + 1 - \frac{5}{2} = -\frac{11}{8}$.
- $y(2) = (2)^3 + 4(2)^2 - 5(2) = 8 + 16 - 10 = 14$.

La gráfica correspondiente, se presenta en la Figura 21.

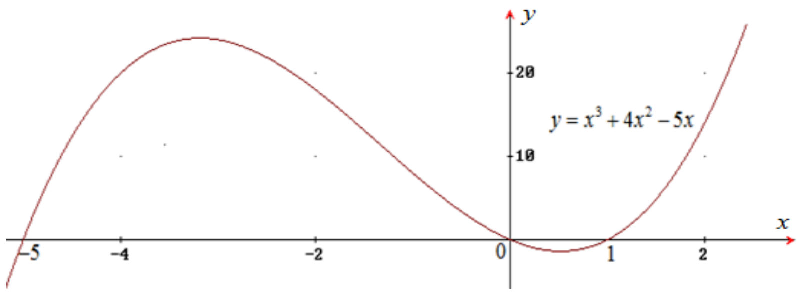


Figura 21. Gráfica de una función polinómica de grado 3 conocidas tres raíces.

Ejemplo 2

Trazar aproximadamente la gráfica de la función polinómica $y = x^3 + 2x^2 + 4$.

Solución:

a) La curva se intercepta con el eje Y en el punto $(0,4)$.

b) Con el eje x se explora la posibilidad de que tenga raíces racionales. Al aplicar el teorema de las raíces racionales, se puede constatar que las posibles raíces son:

± 1 ; ± 2 ; ± 4 .

Con las posibles raíces racionales, se aplica el Teorema del Residuo:

$y(0) = 4$; $y(1) = 7$; $y(-1) = 5$; $y(2) = 20$; $y(-2) = 4$; $y(4) = 100$; $y(-4) = -28$.

Se concluye entonces, que la función polinómica dada, no tiene raíces racionales.

Nótese que $y(-3) = -5$; esto significa que, entre $x = -3$ y $x = -2$, existe una raíz real.

En efecto, para $x \cong -2{,}595$ se cumple que $y(-2{,}595) \cong 0$, lo cual significa, que una raíz aproximada de la ecuación polinómica dada, es: $x \cong -2{,}595$.

En la Figura 22, se presenta la gráfica correspondiente.

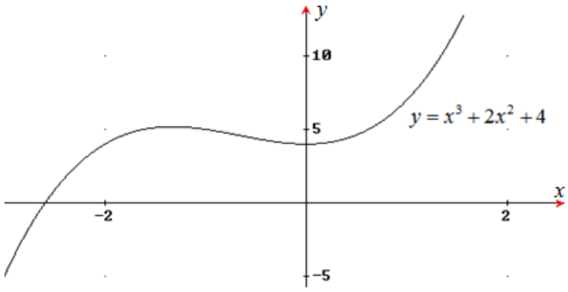


Figura 22. Representación gráfica aproximada de una función polinómica de grado 3.

Ejemplo 3

Considerar $p(x) = x^5 - 3x^3 - kx^2 - 2x + 1 \quad y \quad q(x) = x - \frac{1}{2}$.

Determinar el valor de k, para que resulte exacta la división de $p(x)$ entre $q(x)$.

Solución:

$q(x) = x - \frac{1}{2}$ es factor, es decir, se cumple que:

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 0;\ p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 - k\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0;$$

$$\frac{1}{32} - \frac{3}{8} - \frac{1}{4}k - 1 + 1 = 0\ ;\ \frac{1}{4}k = \frac{3}{8} - \frac{1}{32};k = \frac{11}{8}.$$

Por consiguiente, $x = \frac{1}{2}$ es un cero de la siguiente función polinómica:

$$p(x) = x^5 - 3x^3 - \frac{11}{8}x^2 - 2x + 1\ .$$

En efecto, $p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Ejemplo 4

En forma aproximada, trazar la gráfica de la función $f(x) = 32x^3 - 48x^2 + 22x - 3$.

Solución:

Para trazar aproximadamente la curva correspondiente a esta función polinómica, se tiene en cuenta el Teorema de las Raíces Racionales y la observación correspondiente, relacionada con la adopción de una escala conveniente.

De acuerdo al precitado teorema, las posibles raíces racionales son:

$$\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{16}, \pm\frac{1}{32}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{3}{10}, \pm\frac{3}{32}$$

Aplicar el Teorema del Residuo a algunas raíces potenciales, se obtiene:

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = 32\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 48\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = 0\,;\ x = \frac{1}{2}$ es raíz.
- $f\left(\frac{1}{4}\right) = 32\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 48\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 22\left(\frac{1}{4}\right) - 3 = 0;\ x = \frac{1}{4}$ es raíz.
- $f\left(\frac{3}{4}\right) = 32\left(\frac{3}{4}\right)^3 - 48\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 22\left(\frac{3}{4}\right) - 3 = 0;\ x = \frac{3}{4}$ es raíz.

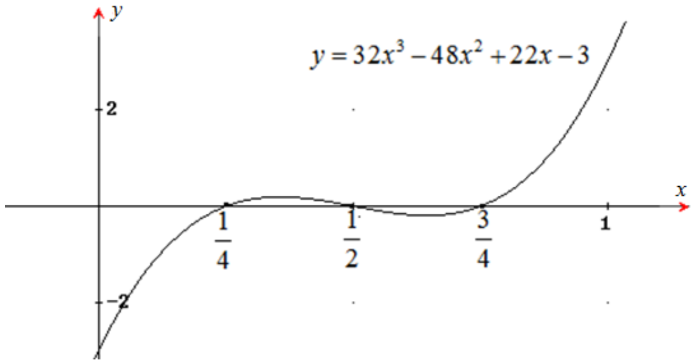


Figura 23. Representación gráfica aproximada de una función polinómica de grado 3.

Observe, que las raíces son racionales positivas y curiosamente están en progresión aritmética.

La gráfica pasa por el punto $(0, -3)$.

La representación gráfica corresponde a la figura anterior.

EJERCICIOS 1.3

1) Definir la función polinómica, cuyos ceros son los indicados a continuación:

a) $\frac{2}{3}\,;\frac{3}{2}\,; 0.$

b) $1\,; -1.$

c) $2\,;\ 2\,; -2\,; -2\,; 0.$

d) $0{,}375\,; -1{,}275\,;\ \pm 0{,}5.$

e) $a + b\,;\ a - b\,;\ a\,;\ -b.$

2) Trazar aproximadamente las gráficas de las funciones polinómicas que siguen; además, realice una descripción de cada una de ellas:

a) $y = x^4 + x^2 + 1.$

b) $y = x^4 - x^2 + 1.$

c) $f(x) = x^4 - x^2 - 1.$

d) $y = 4x^3 + 10x^2 - 23x + 6.$

e) $y = 24x^3 + 46x^2 + 9x + 9.$

f) $y = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x \pm 8.$

1.4 FUNCIÓN RACIONAL

Una función racional, es de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$, $q(x)$ son funciones polinómicas; se supone que $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes y además $q(x) \neq 0$.

En las siguientes líneas, se grafican algunas funciones racionales. En el capítulo dedicado a la graficación de funciones, se amplía el tema relacionado con funciones racionales.

Ejemplo 1

Graficar $f(x) = \frac{a}{x}$; $a > 0$.

Solución:

Cuando $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$; cuando $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$.

Cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to 0$; cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$.

En seguida, se tabulan algunos valores de la función, teniendo en cuenta que $x \neq 0$.

$\boldsymbol{x}$	1	2	4	10	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
$\boldsymbol{f(x)}$	a	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{10}$	$2a$	$5a$	$10a$

$\boldsymbol{x}$	-1	-2	-4	-10	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$-a$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{a}{10}$	$-2a$	$-5a$	$-10a$

Notas:

1) La curva, denominada hipérbola equilátera, se desarrolla en el primer y tercer cuadrante debido a que $a > 0$.

2) Los ejes cartesianos son asíntotas; esto es: $x = 0$, constituye una asíntota vertical, $y = 0$ constituye una asíntota horizontal.

3) La función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

4) La curva es simétrica respecto al origen de coordenadas.

5) Si $a < 0$, la hipérbola equilátera se desarrolla en el segundo y cuarto cuadrante.

La Figura 24 corresponde a la representación cartesiana de la función dada, para $a > 0$.

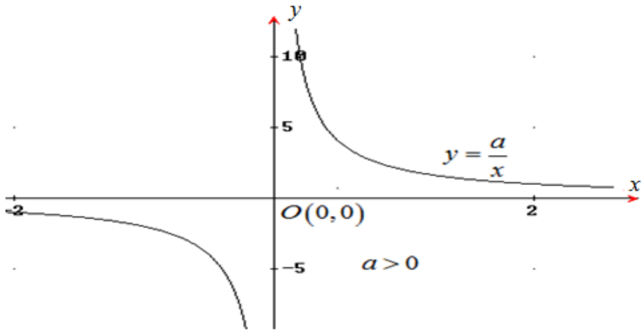


Figura 24. Gráfica de una función racional: $y = \frac{a}{x}$; $a > 0$.

Ejemplo 2

Trazar la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{1 - 2x}{x - 1}.$$

Solución:

En este caso: $x - 1 \neq 0$; por lo tanto $x = 1$ es asíntota vertical.

La siguiente ecuación expresa y en términos de x:

$$y = \frac{1 - 2x}{x - 1} \qquad (A)$$

Ahora, se expresa x en términos de y, así:

$$(x - 1)y = 1 - 2x;\ xy - y = 1 - 2x\ ; xy + 2x = y + 1;\ x(y + 2) = y + 1;$$

$$x = \frac{y + 1}{y + 2} \qquad (B)$$

En consecuencia, se debe cumplir que $y + 2 \neq 0$; $y \neq -2$.

Por lo cual, $y = -2$ es una asíntota horizontal.

- Intersección con los ejes:

De la relación (A):

si $x = 0$; $y = -1$ implica que (0,1), es un punto de intersección con el eje y.

De la relación (B):

$y = 0\ ;\ x = \frac{1}{2}$ implica que $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, es un punto de intersección con el eje x.

Por otra parte:

Cuando $x \longrightarrow 1^{+}$, $y \longrightarrow +\infty$; cuando $x \longrightarrow 1^{-}$, $y \longrightarrow -\infty$.

Cuando $x \longrightarrow \infty$, $y \longrightarrow -2$; cuando $x \longrightarrow -\infty$, $y \longrightarrow -2$.

Algunos puntos de la hipérbola, son:

$Si\ x = 3\ ;\ y = \frac{1-2(3)}{3-1} = -\frac{5}{2}$ implica que $\left(3, -\frac{5}{2}\right)$ pertenece a la curva.

$Si\ x = \frac{3}{2}\ ;\ y = \frac{1-2\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)-1} = -\frac{2}{0{,}5} = -4$ implica que $\left(\frac{3}{2}, -4\right)$ pertenece a la curva (ver Figura 25).

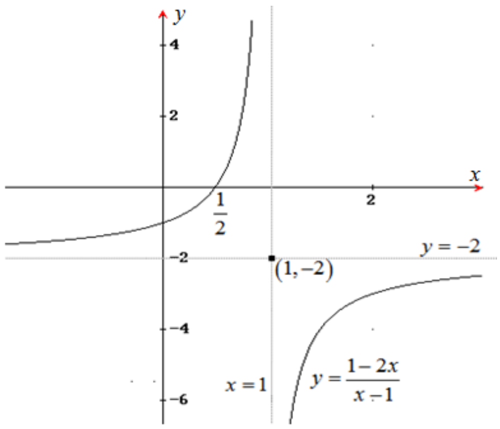


Figura 25. Gráfica de la función: $f(x) = \frac{1-2x}{x-1}$

- La curva es simétrica con respecto al punto $(1, -2)$.
- La función es creciente en $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$.

La representación gráfica, se presenta en la Figura 25.

Ejemplo 3

En una institución de recuperación terapéutica, se aplica la función racional:

$$C(x) = \frac{50000x}{120 - x}\ .$$

Donde $C(x)$ es la función que calcula el costo en pesos del programa terapéutico, en función del porcentaje de funcionalidad recuperada.

1) Calcular el costo de la terapia, para lograr una recuperación del 20% y 50%.
2) Para un pago de $100.000, ¿qué porcentaje de recuperación se ha obtenido?

Solución:

1) Costo para una recuperación del 20%:

$$C(x) = \frac{50000(20)}{120-20} = \$10.000.$$

Costo para una recuperación del 50%: $C(x) = \frac{50000(50)}{120-50} = \$35.714{,}28.$

2) Para un costo de \$100.000, se averigua el porcentaje de recuperación así:

$$100.000 = \frac{50.000x}{120-x}\ ; 100.000(120-x) = 50000x;$$

$$12.000.000 - 1000000x = 50000x; 150.000x = 12.000.000;$$

$x = \frac{12.000.000}{150.000} = 80\%$. (ver Figura 26).

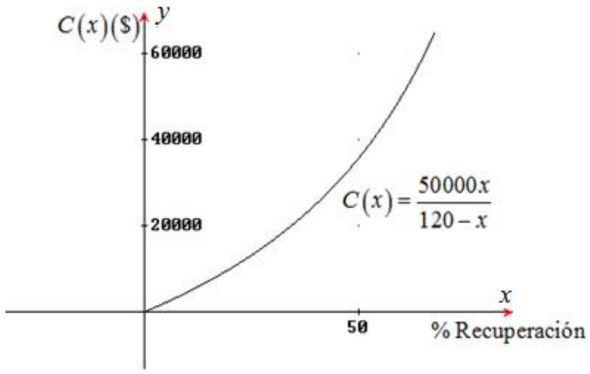


Figura 26. Representación gráfica de la función. $C(x) = \frac{50000x}{120-x}$

EJERCICIOS 1.4

1) Trazar con todo el detalle, los gráficos de las funciones racionales:

$$y = \frac{x-1}{x+2};\ y = \frac{2x+6}{-6x+3}\ ; y = \frac{x}{2x-4}\ ; y = \frac{2x-4}{x}.$$

2) Sea la función homográfica: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Realizar un análisis para llevar a cabo su gráfica, para diferentes situaciones de a, b, c, d.

3) La población de conejos de una granja, obedece a la ley:

$$P(t) = \frac{3000t}{t+1}\ ;\ t$$

≥ 0 representa el tiempo en meses, desde el principio de año.

Determinar:

a) Población al cabo de 6 meses.

b) ¿Cuántos meses deben transcurrir para tener una población de 2700 conejos?

c) Después de un largo tiempo, ¿Cuál será la población de conejos? Graficar y sacar conclusiones.

1.5 FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

La función valor absoluto, es una función real definida como sigue:

$$f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

$$x \longmapsto y = |x|$$

donde:

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto, está relacionado directamente con las nociones de magnitud, distancia y norma, en diferentes contextos matemáticos y físicos.

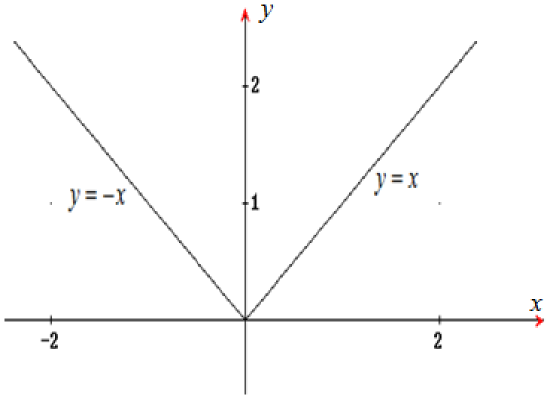


Figura 27. Función valor absoluto.

La gráfica $f(x) = |x|$ se puede visualizar en la Figura 27. Observe que, la gráfica está por encima del eje x y corresponde a las funciones lineales $y = x$; $y = -x$.

También se puede definir el valor absoluto como $|x| = \sqrt{x^2}$.

Es interesante trazar y analizar los gráficos de las funciones, cuando en ellos aparece el valor absoluto.

Ejemplo 1

Graficar las siguientes funciones:

1) $y = |2x - 1|$.

2) $y = 2|x| - 1$.

3) $y = |x^2 - x - 5|$

4) $y = x^2 - |x| - 5.$

Solución:

1) $y = |2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & si\ x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1, & si\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$

En la Figura 28, se ilustra la gráfica respectiva.

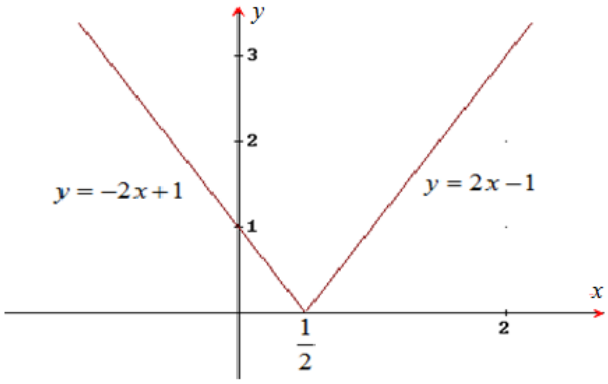


Figura 28. Representación gráfica de $y = |2x-1|$

2) $y = 2|x| - 1 = \begin{cases} 2x-1, & si\ x \geq 0 \\ 2(-x)-1, & si\ x < 0 \end{cases}$ implica que $y = \begin{cases} 2x-1, & si\ x \geq 0 \\ -2x-1, & si\ x < 0 \end{cases}$

Observe que, el valor absoluto opera únicamente sobre x.

La Figura 29, muestra la representación cartesiana de la función $\mathrm{y} = 2|\mathrm{x}| - 1$.

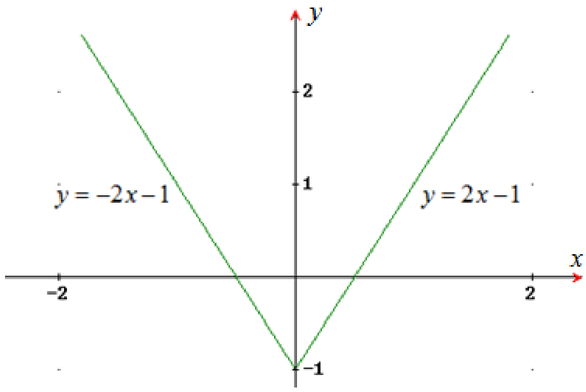


Figura 29. Representación gráfica de $y = 2|x| - 1$

3) $y = |x^2 - x - 5| = \begin{cases} x^2 - x - 5, & si\ \ x^2 - x - 5 \geq 0 \\ -(x^2 - x - 5), & si\ \ x^2 - x - 5 < 0 \end{cases}$

La función $y = x^2 - x - 5$ es cuadrática.

Las raíces de la ecuación, son: $x = 3$ y $x = -2$.

Por lo tanto, se puede escribir:

$$y = |x^2 - x - 5| = \begin{cases} x^2 - x - 5, & si \quad x \geq 3 \text{ ó } x \leq -2 \\ -(x^2 - x - 5), & si \quad -2 < x < 3 \end{cases}$$

La representación gráfica de la función $y = |x^2 - x - 5|$ se muestra en la Figura 30.

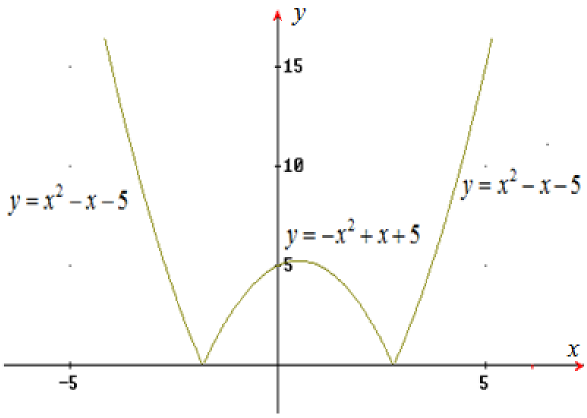


Figura 30. Gráfica de $f(x) = |x^2 - x - 5|$.

4) $y = x^2 - |x| - 5 = \begin{cases} x^2 - x - 5, & si \quad x \geq 0 \\ x^2 - (-x) - 5, & si \; x < 0 \end{cases}$ ó $y = \begin{cases} x^2 - x - 5, & si \quad x \geq 0 \\ x^2 + x - 5, & si \; x < 0 \end{cases}$

En el intervalo $[0, \infty)$, tiene validez y sentido la parábola $y = x^2 - x - 5$, para la cual, una raíz de la ecuación polinómica es $x = 3$.

En el intervalo $(-\infty, 0]$, está definida la parábola de ecuación $y = x^2 + x - 5$ con una raíz $x = -3$. La Figura 31, corresponde a la representación gráfica respectiva.

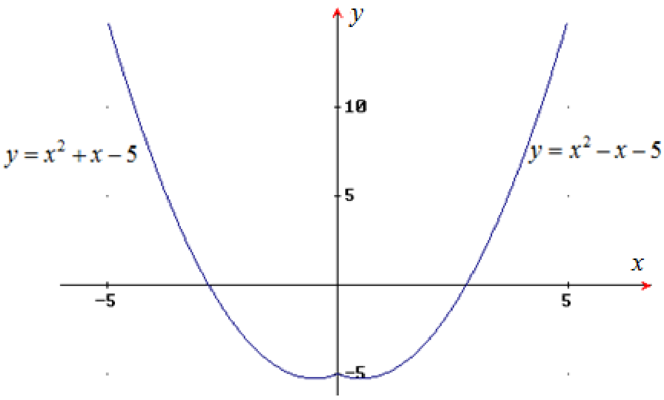


Figura 31.Representación gráfica de $f(x) = x^2 - |x| - 5$.

EJERCICIOS 1.5

Con todo el detalle, trazar la gráfica de las siguientes funciones:

1) $y = |4x - 11|$.

2) $2|y| = x + 5$.

3) $|4x - 3y + 12| = y - 1$.

4) $y = \left|\frac{1}{2}x^2 + 8x - 4\right|$.

5) $y = \frac{1}{2}x^2 + 8|x| - 4$.

1.6 FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA

1.6.1 Función exponencial

Una función exponencial se define, así:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto y = a^x$$

El valor a se llama base de la función exponencial, el cual cumple que: $a > 0$ y $a \neq 1$.

Ejemplos de funciones exponenciales son: $y = 4^{x-1}$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$; $y = 5\left(1 + \sqrt{2}\right)^x$.

Observe que, en los casos mencionados, la base es un número positivo.

Para realizar la gráfica de la función exponencial, se consideran dos casos:

a) $a > 1$.

b) $0 < a < 1$.

Ejemplo 1

Trazar las gráficas de las funciones exponenciales:

$$y = 2^x \ ; \ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Solución:

a) $y = 2^x$

Se recurre inicialmente a encontrar puntos (x, y) que pertenecen a la curva, para lo cual, se construye una tabla como la siguiente:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1	2	4	8	16

Propiedades:

- Los valores de la función son positivos, de manera que, el rango de la función es $\mathbb{R}^+$.

- La función es siempre creciente.
- Pasa por $(0,1)$.
- El eje "x" es asíntota en las cercanías de $-\infty$.
- No tiene ceros.

La Figura 32. Función exponencial $f(x) = 2^x$ corresponde a la gráfica de la función dada.

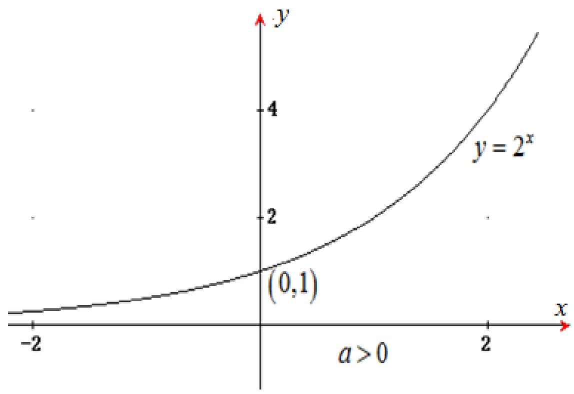


Figura 32. Función exponencial $f(x) = 2^x$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Análogamente, como en el caso anterior, se procede a tabular algunos valores de la curva:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\frac{1}{2^x}$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Propiedades:

- Todos los valores de la función son positivos.
- La función es siempre decreciente.
- Pasa por el punto $(0,1)$.
- El eje x es asíntota en las cercanías de ∞.
- No tiene ceros (no intercepta al eje x).

La gráfica correspondiente, está representada en la Figura 33.

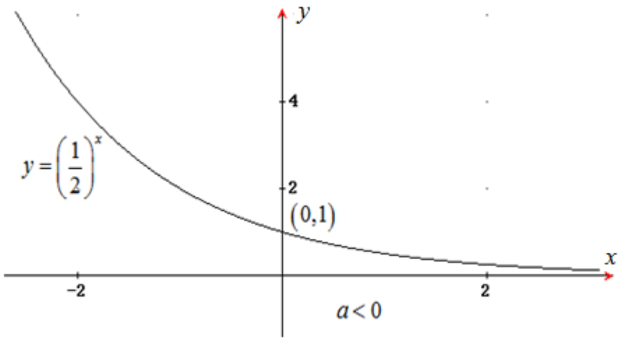


Figura 33. Función exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Ejemplo 2

Graficar $f(x) = 1 + 2^x$ $\quad y \quad$ $g(x) = -2^x$.

Solución:

A partir de la gráfica $y = 2^x$, se pueden trazar a "mano alzada" las funciones mencionadas anteriormente.

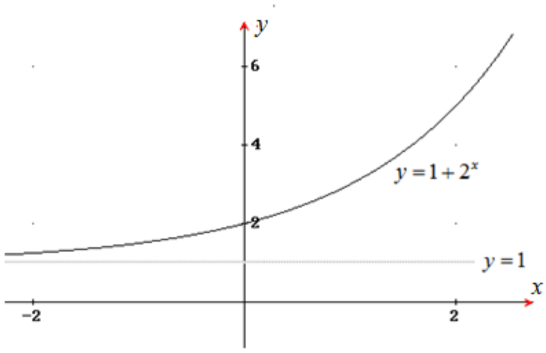


Figura 34. Función exponencial $f(x) = 1 + 2^x$

Para el caso $f(x) = 1 + 2^x$, se trata de la función $f(x) = 2^x$ aumentada una unidad. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica (ver Figura 34).

Para $g(x) = -2^x$, se puede ver que la función es negativa; esto es, todos los valores son negativos.

$y = 0$ (Eje x) constituye una asíntota de la gráfica respectiva (ver Figura 35).

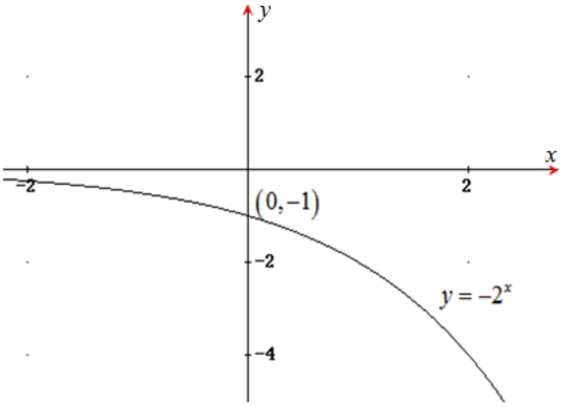


Figura 35. Representación gráfica de $g(x) = -2^x$.

Cuando la base de la función exponencial, es el número e, se obtiene la función exponencial natural: $y = f(x) = e^x$.

Ejemplo 3

Una mezcla está compuesta por solutos (sólidos) y solventes (líquidos). Si la cantidad de soluto, en libras, en un tanque, obedece a la siguiente ley:

$x(t) = 30 - 25e^{-\frac{1}{5}t}$; t medido en minutos, determinar lo siguiente:

a) Cantidad de soluto al cabo de 10 minutos.

b) Cantidad inicial de soluto ($t = 0$).

c) Cantidad de soluto después de un largo tiempo.

d) Graficar y sacar conclusiones.

Solución:

a) Al cabo de 10 minutos, se obtiene que $x(10) = 30 - 25e^{-\frac{1}{5}(10)} \cong 26{,}5$ libras.

b) Para $t = 0$, la cantidad de soluto iniciales $x(0) = 30 - 25e^{-\frac{1}{5}(0)} = 30 - 25 = 5$ libras.

c) Se analiza el comportamiento de $x(t)$ para valores de t grandes.

d) Por ejemplo:

$t = 20 \text{ min} \Longrightarrow \; x(t) = 29{,}54.$

$t = 30 \text{ min} \Longrightarrow \; x(t) = 29{,}93\,.$

$t = 60 \text{ min} \Longrightarrow \; x(t) = 29{,}99\,.$

Se puede ver, que en la medida en que t aumenta, $x(t)$ se aproxima a 30. Esto significa que $x(t) = 30$ es asíntota de la gráfica.

La función que permite calcular la cantidad de soluto, es una función exponencial creciente, con $x = 30$ como asíntota horizontal (ver Figura 36).

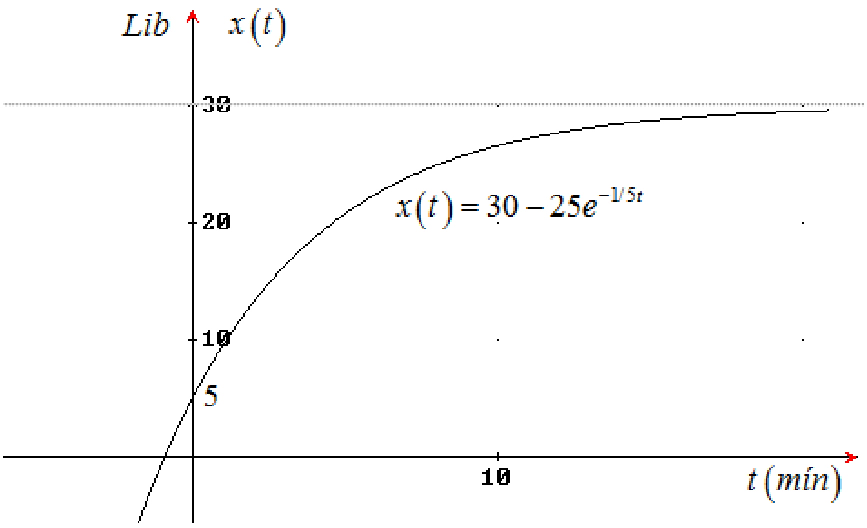


Figura 36. Representación gráfica de la función $x(t) = 30 - 25e^{-\frac{1}{5}t}$.

1.6.2 Función logarítmica

La función logarítmica, es una función real numérica definida como:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$$

$$x \longmapsto y = log_b(x)$$

El valor b se llama base de la función logarítmica, el cual cumple que: $b > 0$ y $b \neq 1$.

Dado que la función exponencial y logarítmica son mutuamente inversas, se puede escribir:

$$y = log_b(x) \Leftrightarrow b^y = x.$$

De la equivalencia anterior, se puede ver, que el logaritmo es un exponente así, por ejemplo:

$$log_5(1) = 0; \;\; 5^0 = 1.$$

$$\log(4) = \frac{2}{3}; \;\; 8^{\frac{2}{3}} = 4.$$

$$log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4; \;\; 2^{-4} = \frac{1}{16}.$$

- Cuando la base de la función logarítmica es el número e, se define como Logaritmo Natural o Neperiano y se escribe:

$$log_e\, x = \ln x\,.$$

- Si la base es 10, se obtienen logaritmos decimales y se escribe:

  $log_{10}\, x = \log x$.

- Cuando se resuelven ecuaciones exponenciales o logarítmicas, suelen expresarse logaritmos con base diferente a "e" o 10. En estos casos, se utiliza la expresión que sigue, para escribir logaritmos de cualquier base, en términos de logaritmos naturales:

  $$log_b\, a = \frac{\ln a}{\ln b}.$$

Ejemplo 1

Graficar las funciones $y = log_2\, x$; $y = log_{\frac{1}{2}}(x)$.

Solución:

a) Para $y = log_2\, x$, se tiene que $2^y = x$.

A continuación, se indica algunos valores de la función $y = log_2(x)$.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

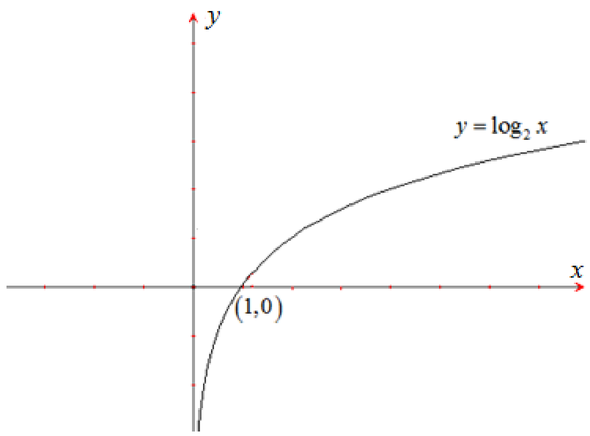


Figura 37. Representación gráfica de la función $f(x) = log_2\, x; b > 1$.

Propiedades:

- La función es creciente.
- Tiene un cero (raíz) en $x = 1$.
- El eje "y" es asíntota con las cercanías de $-\infty$.
- La función no está definida para valores $x \leq 0$.

La Figura 37, contiene la representación de la función analizada.

b) $y = log_{\frac{1}{2}}\, x$; $\left(\frac{1}{2}\right)^y = x$.

En seguida, se presenta algunos puntos de la curva:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$\boldsymbol{log_{\frac{1}{2}}x}$	3	2	1	0	-1	-2	-3

Propiedades:

- La función es decreciente.
- Tiene un cero (raíz) en $x = 1$.
- El eje y es asíntota con las cercanías de ∞.
- La función no está definida para valores $x \leq 0$.

La representación correspondiente, se muestra en la Figura 38.

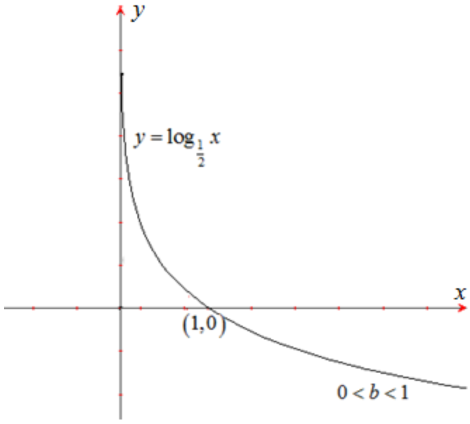


Figura 38. Representación gráfica de $f(x) = log_{\frac{1}{2}}(x); 0 < b < 1$.

Ejemplo 2

Con todo detalle, trazar las gráficas de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $y = log_2(x - 3)$.

b) $y = 1 - \ln x$.

c) $y = \log(-x)$.

Solución:

a) $y = log_2(x - 3)$.

Esta función logarítmica, existe siempre que $x - 3 > 0$, es decir $x > 3$.

En consecuencia $x = 3$ es asíntota vertical (ver Figura 39).

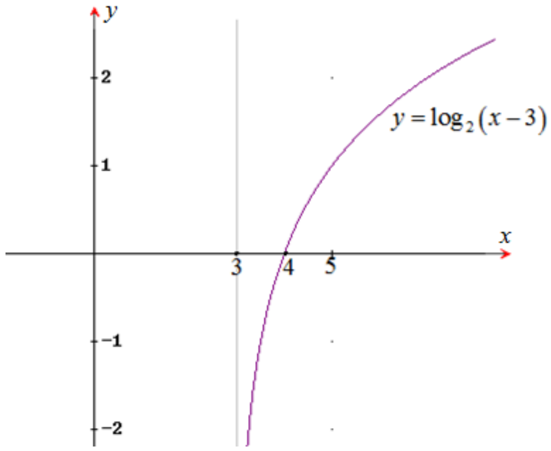


Figura 39. Representación gráfica de $f(x) = log_2(x-3)$

Por otra parte, la base $2 > 0$, lo que indica que la función es creciente y se desarrolla a la derecha de la asíntota $x = 3$.

El cero (raíz) de la función se encuentra cuando $y = 0$, es decir:

$log_2(x-3) = 0\,;\; 2^0 = x - 3;$

$x - 3 = 1;\; x = 4$ (raíz). (ver Figura 39)

b) $y = 1 - \ln x$.

En este caso, la referencia es el gráfico de la función $y = -\ln x$. Luego sumar una unidad.

- La función es decreciente.
- El eje "y" es asíntota con las cercanías de ∞.
- La intersección de la curva con el eje "x" se encuentra al resolver la ecuación

  $1 - lnx = 0;\;\; lnx = 1; x = e$ (ver Figura 40).

  La representación gráfica de la función $y = 1 - \ln x$ se muestra en la Figura 40.

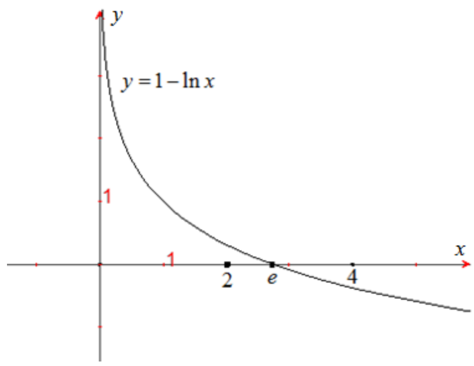


Figura 40. Representación gráfica de la función $f(x) = 1 - ln\ x$

c) $y = \ln(-x)$

Esta función existe siempre que $-x > 0$, es decir $x < 0$. Por lo tanto, $x = 0$ (el eje y), es asíntota a las cercanías de $-\infty$ (ver Figura 41).

- La función es decreciente.
- Se desarrolla en todos los puntos del plano para los cuales $x < 0$.
- El punto de corte con el eje x, se encuentra al resolver la ecuación

  $\ln(-x) = 0\,; -x = e^0; -x = 1; x = -1.$

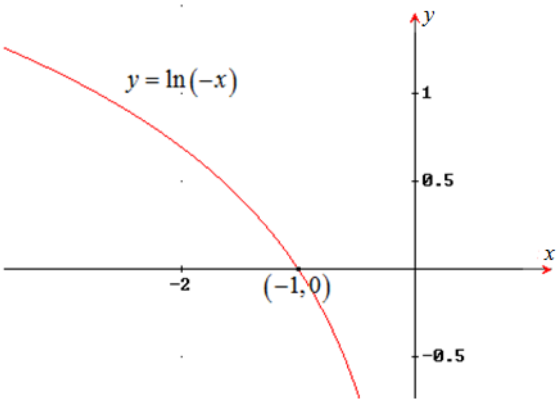


Figura 41. Representación gráfica de $f(x) = l\,n(-x)$

Ejemplo 3

La fórmula matemática financiera $F = P(1 + r)^n$ en donde

P: es el valor presente del capital.

r: tasa de interés del período.

n: número de periodos.

F: valor futuro; permite calcular el monto futuro de una inversión en las condiciones así expresadas.

Con base en la fórmula, calcular:

a) El valor futuro de una inversión de \$5.800.000, a una tasa del 1,1% mensual por espacio de 8 meses.

b) ¿Cuántos meses se requiere para que el capital aumente un 25%?

c) ¿Qué tasa se debe aplicar para que el capital se duplique en un plazo de 48 meses?

Solución:

a) Según los datos del problema:

$$P = \$5.800.000, \;\; r = 1{,}1\% = 0{,}0011, \;\; n = 8.$$

Entonces el valor futuro es:

$$F = 5.800.000(1 + 0{,}0011)^8 = \$6.330.488{,}70.$$

b) El valor futuro F es igual a 1,25P, entonces en la formula inicial se tiene que:

$$1{,}25P = P(1 + 0{,}0011)^n\ .$$

$$1{,}25 = (1 + 0{,}0011)^n\ .$$

$$n = log_{1,011}(1{,}25) = \frac{\ln(1{,}25)}{\ln(1{,}011)} = 20{,}39\ .$$

Por tanto, al capital inicial de \$5.800.000, a una tasa del 1,1% mensual, se convierte en

5.800.000(1,25) = \$7.250.000, al cabo de 20,39 meses.

c) Para que el capital se duplique, en un plazo de 48 meses, se requiere:

$$2(5.800.000) = 5.800.000(1 + r)^{48}\ ;$$

$$(1 + r)^{48} = 2; \quad 1 + r = 2^{\frac{1}{48}}\ ;$$

$$r = 2^{\frac{1}{48}} - 1 = 0{,}0145455334\ ;$$

$$r = 1{,}45455334\ .$$

Se debe aplicar una tasa del 1,4545334% mensual, para que el capital inicial de \$5.800.000.oo, se duplique al cabo de 48 meses.

EJERCICIOS 1.6

1) Graficar las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas:

$a)\ y = e^{2x-3}$

$b)\ y = 2^{-x} + 1$

$c)\ y = 4 - e^{2x}$

$d)\ y = \dfrac{5000}{0{,}5 + 9{,}5e^{-0{,}04x}}$

$e)\ 2y = \ln(1 - x)$

$f)\ y = \log\left(\dfrac{3x - 2}{4}\right)$

$g)\ y = 4 - \ln(2x - 7)$

2) Resolver las ecuaciones:

$a)\ 7^{\frac{x}{2}} = 5^{1-x}$

$b)\ \dfrac{10}{1 + e^{-t}} = 2$

$c)\ log_2(x^2 - x - 2) = 2$

$d)\ 2\log x = log2 + \log(3x - 4)$

3) La fórmula de crecimiento natural de una población de individuos, es dependiente del tiempo, y se escribe como:

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

donde:

P_0: es la población inicial para $t = 0$.

k: tasa de crecimiento relativa.

t: tiempo en las unidades convenientes.

Si la población mundial para 1995 era de 5.700 millones y la tasa de crecimiento relativa era del 2% anual y asumiendo que la población sigue creciendo a esa tasa, calcular:

a) Población estimada para el año 2010.

b) Población estimada para el año 1980.

c) En qué año se tendría una población aproximada de 6.000 millones.

d) Graficar y sacar conclusiones.

1.7 FUNCIONES A TROZOS

Una función real definida a trozos, es aquella cuya definición o regla de correspondencia, cambia en dependencia de la variable independiente. En este caso, la variable real x, esta definida en diferentes dominios disjuntos. Este tipo de funciones se les conoce también, como función multipartes, función por pedazos o también como función seccionada.

Concretamente, una función f es definida a trozos, si su regla de asignación es diferente para al menos dos valores de la variable independiente.

Por ejemplo, la función valor absoluto es, en el fondo, una función a trozos.

Recuérdese que se escribe como:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \ \ si \ \ x \geq 0 \\ -x \ \ si \ \ < 0 \end{cases}$$

Aquí, cuando $x \in [0, \infty)$ la función es $f_1(x) = x$.

Para $x \ \in (-\infty, 0)$ la función es $f_2(x) = -x$.

Nótese además que, para $f_1(x)$, el dominio es $[0, \infty)$ y para $f_2(x)$ es $(-\infty, 0)$. Estos dos conjuntos (subdominios) son disjuntos.

Además $(-\infty, 0) \cup [0, \infty) = \mathbb{R}$.

Ejemplo 1

Trazar la función definida a trozos, determina los subdominios y el dominio:

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 \;\; si \;\; x \leq -1 \\ -1 \;\; si \; -1 < x < 1 \\ x^2 - 2x \;\; s\,i \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

En $(-\infty, 1]$ se trata de la función lineal $f_1(x) = -x + 2$.

En $(-1,1)$ se tiene la función constante $f_2(x) = -1$.

En $[1, \infty)$ la función definida es una parábola, $f_3(x) = x^2 - 2x$

Los subdominios, son:

$$Df_1 = (-\infty, -1]$$

$$Df_2 = (-1,1)$$

$$D_3 = [1, \infty)$$

Por tanto, el dominio de la función dada es:

$$D = Df_1 \cup Df_2 \cup Df_3 = \mathbb{R}\,.$$

La representación gráfica de la función analizada, se muestra en el la Figura 42.

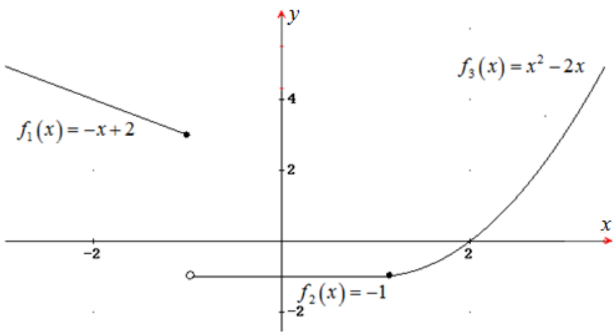


Figura 42. Representación gráfica de una función definida a trozos.

Ejemplo 2

Graficar y determinar subdominios para la función multipartes definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x+1} \;\; si \;\; x \leq -1 \\ 1 \;\; si \; -1 < x < 1 \\ \ln x \;\; s\,i \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

En la Figura 43, se puede ver la función multipartes $f(x)$.

En el intervalo $(-\infty, -1]$ es definida la función exponencial creciente $f_1(x) = 2^{-x-1}$.

En el intervalo $(-1,1)$ se tiene la función constante $f_2(x) = 1$.

En el intervalo $[1, \infty)$ se define la función creciente $f_1(x) = \ln x$.

$$Df_1 = (-\infty, -1] \; ; \; Df_2 = (-1,1) \; ; \; D_3 = [1, \infty).$$

$$D = Df_1 \cup Df_2 \cup Df_3 = \mathbb{R} \, .$$

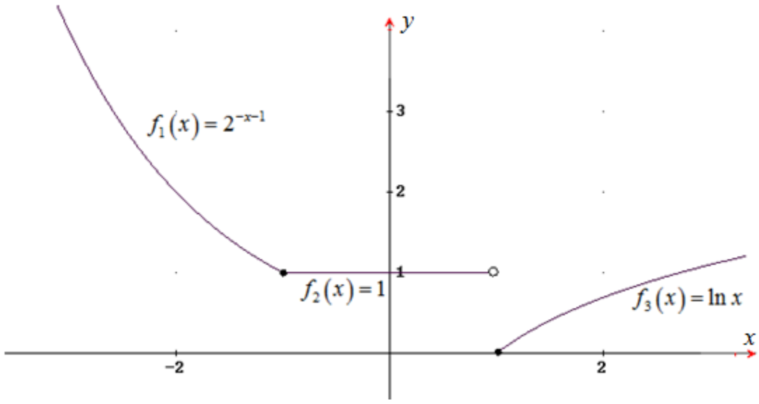


Figura 43. Función definida a trozos: $f_1(x) = 2^{-x-1}$; $f_2(x) = 1$; $f_3(x) = ln\, x$;

Ejemplo 3

Una empresa de transporte urbano, cobra \$1.000 por el primer kilómetro o fracción y \$500 por cada kilómetro adicional o fracción. Expresar el costo en pesos, de un recorrido como función de la distancia "x" (en Km) para $0 < x < 5$.

Solución:

sea $C(x)$ el costo del recorrido y "x" la distancia recorrida en kilómetros.

La Figura 44 muestra la representación cartesiana de la función $C(x)$.

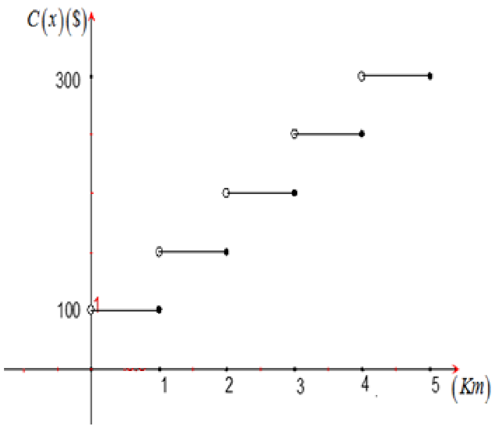


Figura 44. Representación la función $C(x) = 1000 + (k-1)500 \; ; k = 1\,,2\,,3,4$

En el primer Km $\; C_1(x) = 1000$

En el segundo Km $C_2(x) = 1000 + 500 = 1500$.

En el tercer Km $C_3(x) = 1000 + 2(500) = 2000$.

En el cuarto Km $C_4(x) = 1000 + 3(500) = 2500$.

En el quinto Km $C_5(x) = 1000 + 4(500) = 3000$.

Por cada kilómetro adicional, k, la función se define como sigue:

$$C(x) = 1000 + (k-1)500\,;\, k = 1\,, 2\,, 3, 4$$

EJERCICIOS 1.7

Graficar las funciones a trozos y calcular los valores señalados:

a) $f(x) = \begin{cases} -x-4 & si \;\; x \leq -4 \\ -x^2-4x & si \; -4 < x < 0 \\ x^2+1 & s\,i \;\; x \geq 0 \end{cases}$ $\qquad f(-8),\; f(-2),\; f(0),\; f(\sqrt{2}),\; f(-4)$.

b) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & si \;\; x \leq -1 \\ -x & si -1 < x < 1 \\ -\frac{1}{x} & s\,i \;\; x \geq 1 \end{cases}$ $\quad f(0),\; f\left(\frac{1}{100}\right),\; f\left(-\frac{1}{100}\right),\; f(e-1),\; f(e+1)$.

c) $f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & si \;\; x \leq -1 \\ 1-x^2 & si -1 < x < 1 \\ \frac{x}{x-1} & s\,i \;\; x \geq 1 \end{cases}$ $\qquad f(-2),\; f(-1),\; f(0),$

$f(\sqrt{2}), f(1), f(10)$.

1.8 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1.8.1 Definiciones y conceptos

Antes de definir formalmente las diferentes funciones trigonométricas, se debe decir, que la medida natural de los ángulos, son los radianes, aunque también se pueden expresar en grados, para lo cual se parte del hecho que $2\pi\; radianes = 360^0$.

Por tanto, si la medida de un ángulo θ es α^0, entonces $\theta = \left(\frac{\pi}{180}\right)$ radianes. De igual manera, si la medida de un ángulo θ es β radianes, entonces $\theta = \beta\left(\frac{\pi}{180}\right)$ grados.

Ahora bien, se considera una circunferencia de radio 1, con centro en el origen de coordenadas, cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. La representación gráfica, corresponde a la Figura 45.

Si el punto $(0,1)$ rota en sentido antihorario y se desplaza hasta el punto $P(x, y)$ del circulo unitario, se forma un ángulo positivo θ. En estas condiciones, se define como:

$$x = \cos\,\theta\,;\; y = sen\,\theta.$$

En estas condiciones, cualquier punto $P(x, y)$ del círculo unitario, llamada también Circulo Trigonométrico, determina un ángulo θ, y, por tanto: $P(x, y) = P(\cos\theta\,, sen\,\theta)$.

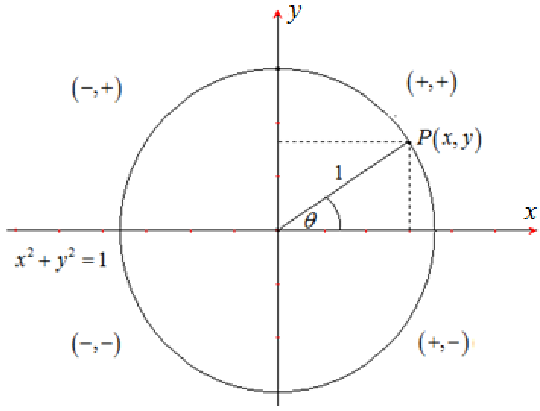


Figura 45. Circunferencia unitaria.

Dado que el punto $P(x, y)$ pertenece al circulo de radio 1, es lógico concluir que:

$$-1 \leq \cos\ \theta \leq 1 \text{ y } -1 \leq sen\,\theta \leq 1.$$

De esta manera, se puede establecer que el dominio de las funciones seno y coseno, son los números reales y el rango el intervalo $[-1,1]$.

Es interesante destacar que las funciones seno y coseno son periódicas, concretamente:

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta)\,,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{sen}(\theta + 2k\pi) = sen(\theta)\,,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esto significa que, después de $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, los valores de seno y coseno se repiten. El periodo fundamental de las funciones seno y coseno es 2π.

En la Figura 45, se han definido las funciones coseno y seno. El ángulo θ está localizado en el primer cuadrante, en donde, la abscisa y la ordenada son positivos. En el tercer cuadrante, coseno y seno son negativos, mientras que, en el segundo cuadrante el coseno es negativo y seno positivo y en el cuarto cuadrante, coseno positivo y seno negativo.

En resumen, los signos de coseno y seno en el plano cartesiano, se determinan como sigue:

Cuadrante	**Signo función coseno**	**Signo función seno**
Primer cuadrante $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$	$\cos\ \theta \geq 0$	$sen\,\theta \geq 0$
Segundo cuadrante $(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi)$	$\cos\ \theta \leq 0$	$sen\,\theta \geq 0$
Tercer cuadrante $(\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2})$	$\cos\ \theta \leq 0$	$sen\,\theta \leq 0$

Cuarto cuadrante ($\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$)	$\cos\ \theta \geq 0$	$sen\ \theta \leq 0$

1.8.2 Valores de seno y coseno para ángulo notables

Se consideran ángulos notables en radianes y en grados, respectivamente, los siguientes:
$\theta, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$, $0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0$.

Inicialmente, considérese la Figura 46, de la cual se concluye que:

$$\cos(0) = 0\ ;\ \ sen(0) = 1.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\ ;\ sen(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

En dicha figura, el triángulo PQO es isósceles y rectángulo: $\overline{OQ} = \overline{PQ} = x$.

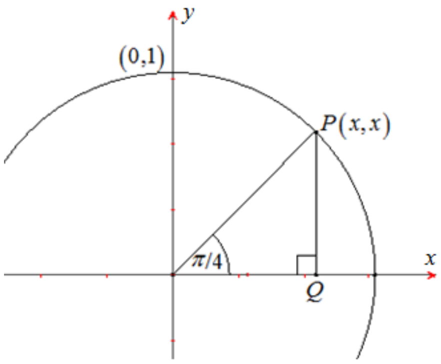


Figura 46. Primer cuadrante de circunferencia unitaria, indicando ángulo $\frac{\pi}{4}$.

Aplicando el Teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2 = 1^2; x^2 + x^2 = 1; 2x^2 = 1;\ x^2 = \frac{1}{2}\ ;\ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por la ubicación del punto $P(x, x)$, se escoge el signo positivo para x, entonces: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

En consecuencia:

$$P(x, y) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = P\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Por lo tanto:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En la Figura 46, el triángulo OQP es equilátero y por consiguiente, es equiángulo. Esto implica que, los ángulos interiores del triángulo valen $\frac{\pi}{3}$ cada uno y que los lados miden una unidad casa uno.

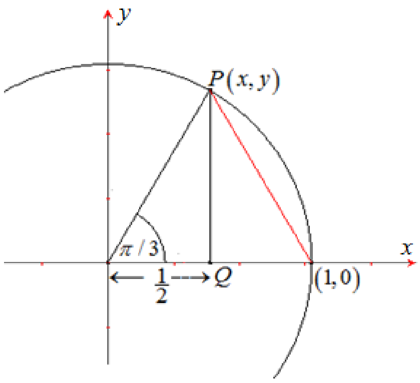


Figura 47. Primer cuadrante de circunferencia unitaria, indicando ángulo $\frac{\pi}{3}$

Por otro lado, en la Figura 47, al considerar el triángulo rectángulo ORP y aplicar Teorema de Pitágoras, se tiene:

$$\overline{OR}^2 + \overline{PR}^2 = 1^2; \;\; pero \;\; \overline{OR} = 1 \text{ , entonces:}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \overline{PR}^2 = 1; \; \overline{PR}^2 = 1 - \frac{1}{4}; \; \overline{PR}^2 = \frac{3}{4}; \; \overline{PR} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En consecuencia, sabiendo que el punto $P(x, y)$ está en el primer cuadrante, se tiene que:

$$P(x, y) = P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P\left(cos\frac{\pi}{3}, sen\frac{\pi}{3}\right).$$

Por lo tanto,

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\; ; \; sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De manera análoga, se puede deducir que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por otra parte, el circulo trigonométrico es simétrico respecto al origen de coordenadas, por lo cual, es posible determinar los valores de las funciones seno y coseno, para los ángulos múltiplos de los valores calculados anteriormente. La Figura 48, presenta la situación planteada.

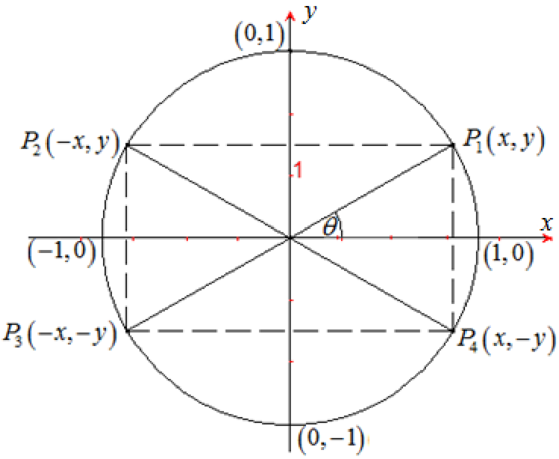


Figura 48. Circunferencia unitaria y puntos simétricos.

A continuación, se presenta un resumen de equivalencias entre grados y radianes, y los valores de seno y coseno correspondientes.

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radianes	$\mathbf{0}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\ \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$sen\ \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Grados	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianes	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos\ \theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$sen\ \theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

1.8.3 Gráficas de las funciones seno y coseno

Las equivalencias indicadas en el resumen anterior, cuando se utilizan radianes ayudan para la graficación de las funciones seno y coseno, en el intervalo $[0,2\pi]$; y en el intervalo $[0, 360^0]$, cuando se utilizan grados.

Nótese que, en ambos casos, los valores máximos y mínimos son 1 y -1, respectivamente.

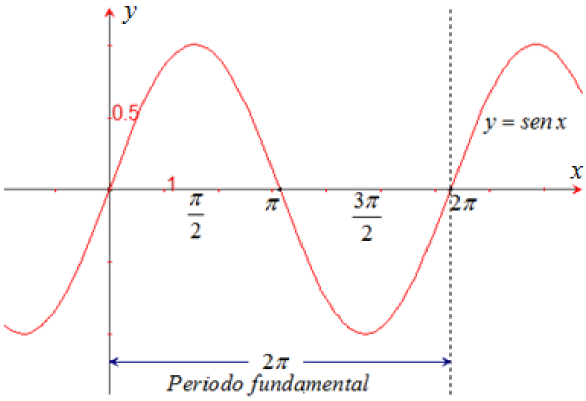


Figura 49. Representación gráfica de la función $f(x) = sen\ x$

Los puntos de corte con el eje x, para la función *seno* son: $0, \pi, 2\pi$, mientras, que para la función *coseno* son: $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$.

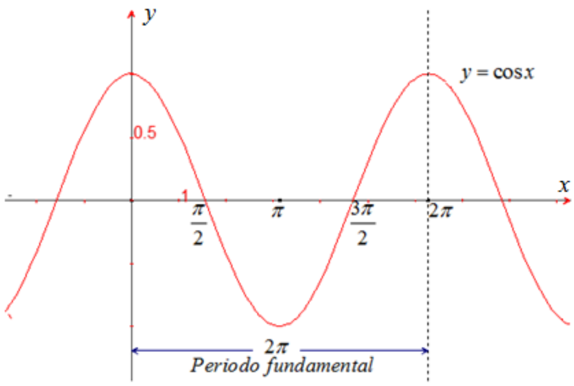


Figura 50. Representación gráfica de la función $f(x) = cos\ \ x$

En las Figura 49 y Figura 50, se presentan las gráficas de $f(x) = sen\ x$ y $f(x) = \cos\ x$, en el periodo fundamental 2π.

Al comparar las gráficas de *seno* y *coseno*, se puede ver que $\cos\,(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; se dice entonces, que la gráfica de *seno* tiene un desfase de $\frac{\pi}{2}$ respecto al *coseno*.

1.8.4 Curvas sinusoidales

Las gráficas de las funciones seno y coseno, se las considera ondas o curvas sinusoidales. Estas poseen unas propiedades muy importantes como: amplitud, periodo y desfasaje. Expresiones como las que se indican en seguida, corresponden a curvas sinusoidales:

$$y = A\cos Bx + C\,; \quad y = A\,\mathrm{sen}\,Bx + C\,.$$

Este tipo de curvas, describen eventos naturales del tiempo, como voltajes, energía, luz y sonido. En las siguientes líneas, se ilustra la manera de graficar o trazar, rápidamente, este tipo de curvas.

Sea la curva $y = A \cos \mathrm{Bx} + C$, donde A, B, y C son diferentes de cero.

En esta expresión:

> A: amplitud; expresa el valor máximo (mínimo) de la función.
>
> $\frac{2\pi}{B}$ periodo fundamental.
>
> C: desplazamiento de la curva con respecto al eje X. Para $C > 0$, el desplazamiento es hacia arriba, "C" unidades; $C < 0$, el desplazamiento es hacia abajo "C" unidades.

Los mismos criterios se utilizan para curvas del tipo $y = A\,\mathrm{sen}(\,Bx) + C$.

En el caso de tener, por ejemplo $y = A\cos(Bx + \emptyset)$, los conceptos de amplitud y período, siguen los lineamientos anteriores.

El ángulo $\emptyset$ corresponde al desfase: si $\emptyset > 0$, la curva $y = A\cos(\,Bx)$ se desplaza $\emptyset$ unidades hacia la izquierda; $\emptyset < 0$, la curva $y = A\cos(Bx)$ se desplaza $\emptyset$ unidades hacia la derecha.

Ejemplo 1

Graficar y describir las curvas sinusoidales:

a) $y = \frac{1}{2} sen(3x)$.

b) $y = -3cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

c) $y = 2 - 3cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Solución:

a) $y = \frac{1}{2} sen(3x)$.

Amplitud: $A = \dfrac{1}{2}$; valor máximo: $\dfrac{1}{2}$; valor mínimo: $-\dfrac{1}{2}$; $B = 3$.

Período fundamental: $\dfrac{2\pi}{B} = \dfrac{2\pi}{3}$.

En la Figura 51, se pueden ver los gráficos de $y = sen(x)$; $y = \frac{1}{2} sen(3x)$.

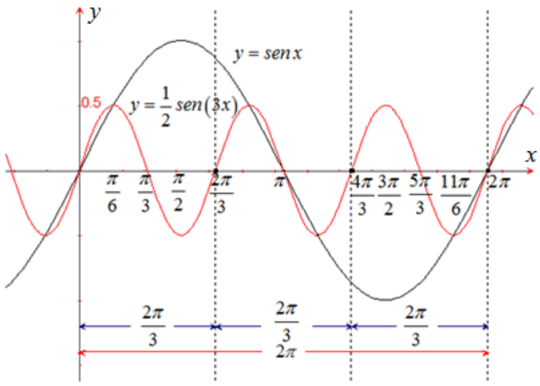


Figura 51. Representación gráfica de la función $y = \frac{1}{2}sen(3x)$

Mientras $senx$ se desarrolla totalmente en $[0,2\pi]$, con un valor máximo de 1 y valor mínimo -1, la función $y = \frac{1}{2}sen(3x)$ se desarrolla 3 veces en $[0,2\pi]$ con un valor máximo de $\frac{1}{2}$ y un valor mínimo de $-\frac{1}{2}$.

Los ceros de la función $y = sen\, x$ son: $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

Los ceros de la función $y = \frac{1}{2}sen(3x)$ son: $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$.

b) $y = -3cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

La Figura 52, muestra la representación gráfica de la función analizada.

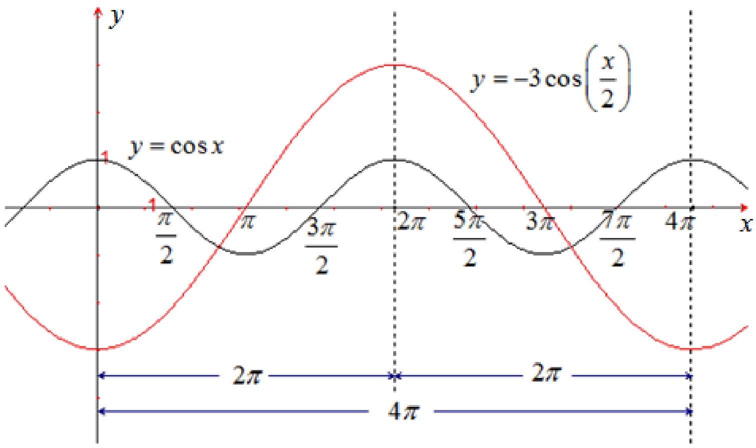


Figura 52. Representación gráfica de la función $y = -3cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Amplitud: $A = 3$; valor máximo: 3; valor mínimo: -3 ; $B = \frac{1}{2}$.

Período fundamental: $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Sus raíces son: $x = \pi$, $x = 3\pi$.

Valor máximo $= 3$ en $x = 0$; $x = 4\pi$.

Valor mínimo $= -3$ $en\, x = 2\pi$.

La curva $y = -3\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ se desarrolla totalmente en el intervalo $[0,4\pi]$.

Por otra parte, la curva $y = \cos x$, se desarrolla totalmente en $[0,2\pi]$ y en el intervalo $[0,4\pi]$ se desarrolla dos veces. El valor máximo es 1 en $x = 0$, $x = 2\pi$, $x = 4\pi$; el valor mínimo es -1 en $x = \pi$, $x = 3\pi$.

Sus raíces son: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$.

c) $y = 2 - 3cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

En este caso, se trata de la función sinusoidal, tratada en el ejemplo (b), pero desplazada dos unidades hacia arriba.

El periodo es el mismo $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$; la amplitud $A = 3$.

Valores máximos: $3 + 2 = 5$, en $x = 0$; $x = 4\pi$.

Valor mínimo: $-3 + 2 = -1$, en $x = 2\pi$.

La representación gráfica, se muestra en la Figura 53.

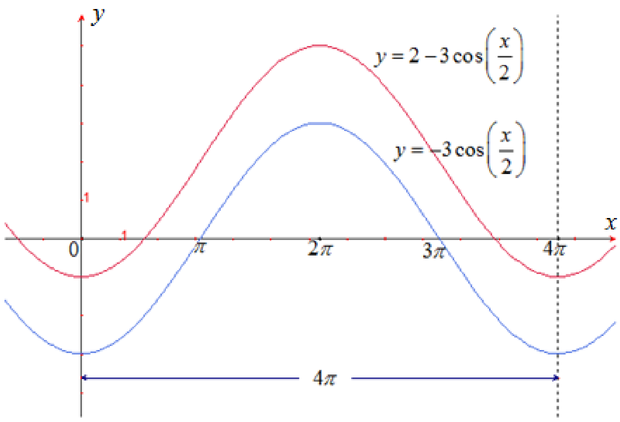


Figura 53. Representación gráfica de la función $f(x) = 2 - 3cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

1.8.5 Otras funciones trigonométricas

Conocidas las funciones trigonométricas seno y coseno, se definen otras funciones trigonométricas en términos de ellas.

1.8.5.1 Función tangente

Se define como:

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}\ ;\ \ \cos\ x \neq 0.$$

El dominio de la función tangente es:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}\ /\ x \neq \frac{n\pi}{2}, \text{para todo } n \text{ impar en } \mathbb{Z}\right\}.$$

El rango de la función tangente: $R = \mathbb{R}$.

- Cuando $x \to \frac{\pi}{2}$, el valor de la tangente crece indefinidamente $(x \to \infty)$y cuando $x = \frac{\pi}{2}$ la función no está definida.
- Cuando $x \to -\frac{\pi}{2}$, la función tangente toma valores negativos cada vez mayores en valor absoluto $(x \to -\infty)$, y para $x = -\frac{\pi}{2}$ la función tangente no está definida.
- Por lo tanto, las rectas $x = \frac{\pi}{2}$ $y\ x = -\frac{\pi}{2}$ son asíntotas.
- La curva es simétrica respecto al origen y es creciente, siempre.
- Periodo fundamental de la función tangente es π.
- Para el trazo de la curva, algunos puntos de referencia son:

$$x = \frac{\pi}{4}, tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;\ \ x = -\frac{\pi}{4}, tg(-\frac{\pi}{4}) = -1.$$

- La función tangente es periódica y se desarrolla totalmente en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

La Figura 54, muestra la representación cartesiana de la función $y = tg\ x$.

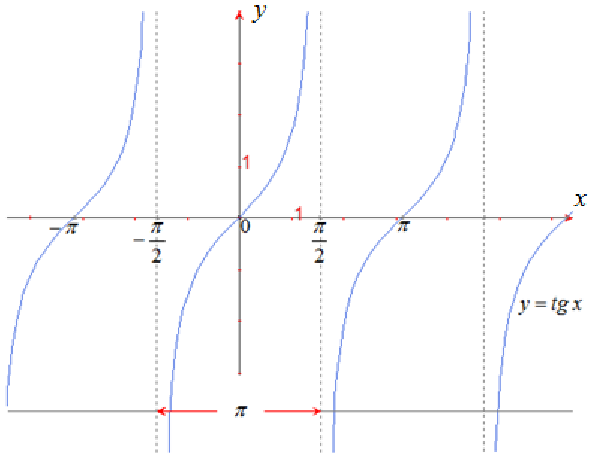


Figura 54. Representación gráfica de la función $f(x) = tg\ x$

1.8.5.2 Función secante

Se define como:

$$y = \frac{1}{\cos\ x}, \quad \cos\ x \neq 0.$$

El dominio de la función es $D = \{x \in \mathbb{R}\ /\ \cos\ x\ \neq 0\}$ o bien:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{n\pi}{2}\ ;\ \forall n \text{ impar en } \mathbb{Z}\right\}.$$

El rango de la función secante, se calcula así:

Dado que:

$$-1 \leq \cos x \leq 1; \frac{1}{\cos x} \geq 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\cos x} \leq -1.$$

De manera que el rango se define como sigue:

$$R = \{y\ \in \mathbb{R}\ /\ |y| \geq 1\}.$$

Por otra parte, $\sec x$ es función periódica, con periodo fundamental 2π.

Si x toma valores en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, a medida que x se acerca a $\frac{\pi}{2}$, la secante crece indefinidamente. Cuando $x = \frac{\pi}{2}$ la función secante no existe.

Si x toma valores en $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, la secante crece a medida que x se aproxima a $-\frac{\pi}{2}$. Cuando $x = -\frac{\pi}{2}$, la función secante no está definida.

Por tanto $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = -\frac{\pi}{2}$ son asíntotas verticales de la función.

La función secante, no tiene intersecciones con el eje x.

La representación gráfica de la secante, se muestra en la Figura 55.

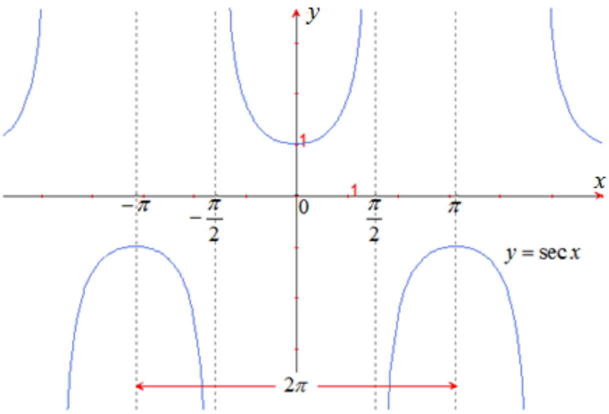


Figura 55. Representación gráfica de la función $f(x) = sec\ \ x$.

1.8.6 Funciones trigonométricas inversas

Para definir las funciones trigonométricas inversas, es necesario restringir los dominios de definición de las funciones trigonométricas.

1.8.6.1 Función inversa de coseno

Se denota por $y = arc\ cos(x)$.

Debido a que la función coseno es decreciente en el intervalo $[0, \pi]$ (ver Figura 56), se define la inversa en ese intervalo, así: $y = arcos\ x \Leftrightarrow x = \cos y;\ 0 \leq y \leq \pi$.

Para graficar esta función, se tabulan algunos puntos:

x	$cos\ y$
1	0
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
-1	π

En la Figura 56, se muestra la gráfica de $y = \arccos\ x$ para los valores principales.

Observe que $y = \text{arc}\cos\ x$, es decreciente en el intervalo $[-1,1]$.

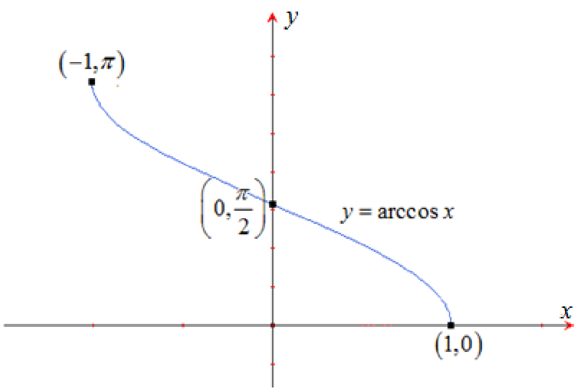


Figura 56. Representación gráfica de la función $f(x) = arc\ cos\ \ x$

1.8.6.2 Función inversa de seno

Se denota por $y = arc\ sen\, x$. Como la función seno, es creciente en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces en este intervalo se define la inversa así:

$$y = arcsen\, x \Leftrightarrow x = \text{sen}\, y\,;\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

En la Figura 57, se muestra la gráfica de $y = arcsen\, x$ apara los valores principales.

Nótese que la función $y = arc\ sen\, x$ es creciente en $[-1,1]$.

Para graficar, se tabulan algunos puntos, así:

x	$sen\ y$
1	$\frac{\pi}{2}$
0	0
-1	$\frac{\pi}{2}$

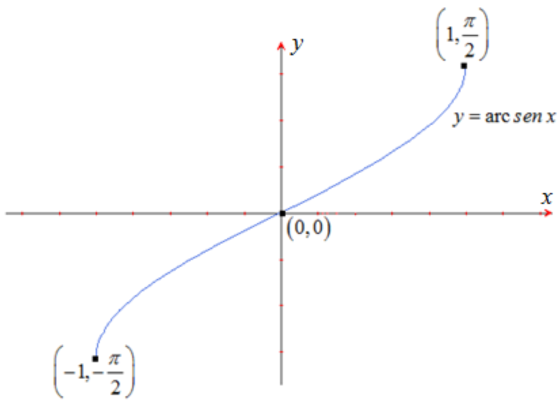


Figura 57. Representación gráfica de la función $f(x) = arc\ sen\ x$

1.8-6.3 Función inversa de tangente

Se denota por $y = arctg\ x$. La función tangente es creciente en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, entonces en este intervalo se define la inversa, así:

$$y = arc\ tg\ x \Leftrightarrow x = \text{tg}\, \text{y}\ ;\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Algunos puntos de la curva correspondiente a $y = arctg\ x$, son los siguientes:

x	tg y
0	0
1	$\frac{\pi}{4}$
-1	$-\frac{\pi}{4}$

En la Figura 58, se presenta la gráfica de $y = arctg\ x$ en sus valores principales.

Nótese que la función es creciente en todo su dominio.

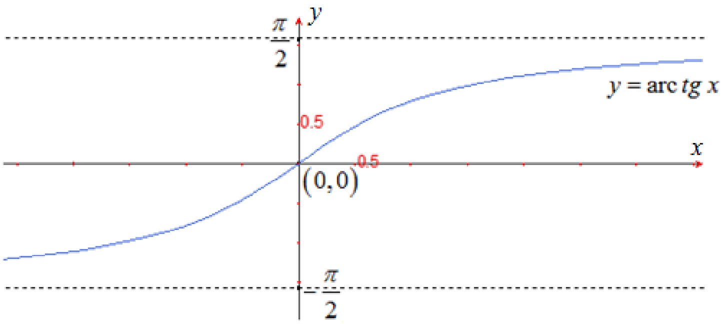


Figura 58. Representación gráfica de $f(x) = arc\ tg\ x$

La s rectas $y = -\frac{\pi}{2}$ y $y = \frac{\pi}{2}$ son asíntotas horizontales.

Nota:

Antes de realizar algunos ejercicios, es importante anotar que:

$$sen(arcsen\ x) = x;\ arcsen(sen\ x) = x;\ \cos(arcos\ x) = x;$$

$$tg(arctg\ x) = x;\ arctg(tg\ x) = x.$$

Ejemplo

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) $\cos\left(arcsen(\frac{\sqrt{3}}{2})\right).$

b) $sen\left(2arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right).$

c) $arctg\left(\frac{2}{3}\right) + arctg\left(\frac{1}{5}\right).$

Solución:

a) Sea $x = arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Longrightarrow sen\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $x\ \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$

Luego $\cos\left(arcsen(\frac{\sqrt{3}}{2})\right) = \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$

b) a $sen\left(2arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right).$

Sea $x = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \Longrightarrow \cos\ x = -\frac{2}{3}$. En donde $x\ \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, es decir, el ángulo x está localizado en el segundo cuadrante.

Entonces: $sen\left(2arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = sen(2x) = 2\cos\ x\ sen\ x.\qquad (1)$

Dado que, $sen^2\ x + cos^2\ x = 1; sen\ x = \sqrt{1 - cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2}\ ; sen\ x = \frac{\sqrt{5}}{3}.$

Reemplazando este valor en (1) se tiene:

$$sen\left(2arcos\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{4}{9}\sqrt{5}$$

c) Sea $x = arctg\left(\frac{2}{3}\right)$; $tg\ x = \frac{2}{3}$; $y = arctg\left(\frac{1}{5}\right)$; $tg\ y = \frac{1}{5}$.

$$arctg\left(\frac{2}{3}\right) + arctg\left(\frac{1}{5}\right) = x + y;\ tg(x+y) = \frac{tg\ x + tg\ y}{1 - tg\ x\ tg\ y}.$$

$$x + y = arctg\left[\frac{tgx + tgy}{1 - tg\ x\ tg\ y}\right] = arctg\left[\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)}\right].$$

$$x + y = arctg\left[\frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}\right];\ x + y = arctg(1);\ x + y = \frac{\pi}{4}.$$

Por lo tanto,

$$arctg\left(\frac{2}{3}\right) + arctg\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

EJERCICIOS 1.8

1) En el mismo sistema de ejes cartesianos y en el intervalo $[0,2\pi]$, trazar las gráficas de:

a) $y = 4\cos x$; $y = \cos(4x)$.

b) $y = 2\cos\left(\frac{x}{4}\right)$; $y = \frac{1}{2}sen\left(\frac{x}{2}\right)$.

2) Hallar el valor de la constante C, si $y = \cos(x) + C$, $0 \le x \le 2\pi$, $0 \le y \le 4$.

3) Trazar las curvas sinusoidales:

$a)$ $y = 3cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

$b)$ $y = -3cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

$c)$ $y = \frac{1}{2}sen\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

$d)$ $y = 4sen\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 3$.

4) Trazar el grafico de las funciones y realizar el análisis respectivo:

$a)$ $y = ctg\ x = \dfrac{\cos x}{sen\ x}$; $b)$ $y = \csc\ x = \dfrac{1}{sen\ x}$; donde $sen\ x \neq 0$.

5) Graficar las funciones trigonométricas inversas y realizar el análisis respectivo:

$$a)\ \ y = arc\ ctg\ x\ ;\ \ b)\ \ \ y = arc\ csc\ x.$$

6) Probar:

$$a)\ \ cos\left[\frac{1}{2} arcsen\ x\right] = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}}.$$

$$b)\ \ arctg\ a + arctg\left(\frac{1}{a^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

1.9 FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Las funciones trigonométricas hiperbólicas o simplemente hiperbólicas, se define en términos de e^x y e^{-x}, así:

1) La función seno hiperbólico, se define como:

$$senh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

El dominio y rango del seno hiperbólico, son todos los números reales. Mediante una tabulación de algunos valores de x, se obtienen puntos de la curva. La Figura 59, muestra la representación gráfica de esta función.

$y = senh\ x$ es creciente en todo su dominio y no es periódica, además $x = 0$, es raíz.

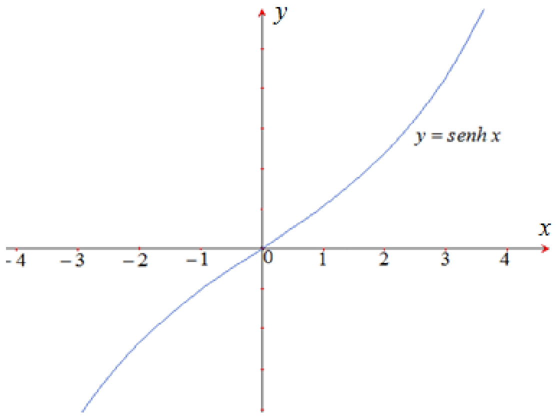


Figura 59. Representación gráfica de $f(x) = senh(x)$

2) La función coseno hiperbólico, se define como:

$$\cosh\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ .$$

El dominio, son todos los números reales y el rango, son todos los números pertenecientes al intervalo $[1, \infty)$ (ver Figura 60).

La función es decreciente en $(-\infty, 1]$ y creciente en $[1, \infty)$.

No tiene raíces y el punto $(0,1)$, es el punto en donde existe mínimo para la función: $y = \cosh{(x)}$. Esta función no es periódica y es simétrica respecto al eje y.

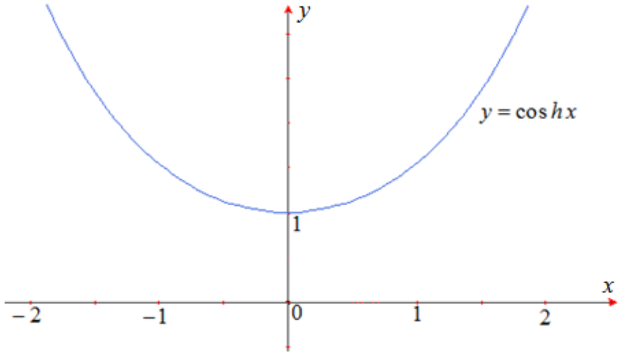


Figura 60. Representación gráfica de la función $f(x) = cosh\ \ x$

3) La función tangente hiperbólica, se define como sigue:

$$tgh\, x = \frac{senh\, x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

El dominio, son los números reales; y el rango, está constituido por los puntos pertenecientes al intervalo $(-1,1)$.

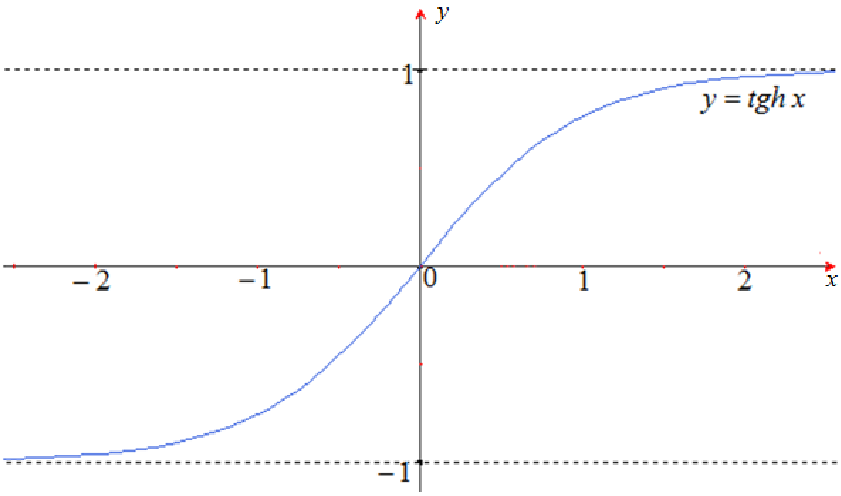


Figura 61. Representación gráfica de la función $f(x) = tgh\, x$

Las rectas $y = -1$; $\quad y = 1$ son asíntotas horizontales; $y = tgh\, x$ es creciente en todo su dominio y además, $x = 0$ es raíz; $y = tgh\, x$ es simétrica con respecto al origen y no es periódica. La Figura 61, muestra la representación gráfica de la función $y = tgh\, x$.

EJERCICIOS 1.9

1) Trazar y describir las siguientes funciones hiperbólicas:

a) $y = ctgh\, x = \dfrac{\cosh\ x}{senh\, x}$.

b) $y = \operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$.

c) $y = \operatorname{csch} x = \dfrac{1}{senh\, x}$.

2) Trazar y describir las condiciones de existencia de las funciones hiperbólicas inversas.

1.10 FUNCIONES DEFINIDAS PARAMÉTRICAMENTE

Una función está definida paramétricamente, cuando los valores correspondientes a x e y están expresadas por una tercera variable, llamada Parámetro. En general, se escribe una función en forma paramétrica como:

$$\begin{cases} x = \emptyset(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases} \quad t: Parámetro.$$

Usualmente, el parámetro t, recorre un intervalo de números reales.

Esto significa, que por cada valor de t, se obtiene un punto de la curva.

Ejemplo 1

Trazar y describir la curva definida en forma paramétrica como sigue:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 7 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solución

Nótese que las funciones definidas para x, y son lineadas. Esto que significa, que la función dada es una recta. Para trazar su gráfica, únicamente dos puntos:

$Si\ t = 0 \Longrightarrow x = 1,\ y = -7.$

El punto $(1, -7)$ está en la recta.

$Si\ t = 2 \Longrightarrow x = 5,\ y = -1.$

El punto $(5, -1)$ está en la recta.

La representación gráfica de la función, se encuentra en la Figura 62.

En algunos casos, es posible eliminar el parámetro. Al despejar t de la primera ecuación y reemplazar en la segunda, se tiene:

$$y = 3\left(\frac{x-1}{2}\right) - 7\,.$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{17}{2}\,.$$

Entonces, se trata de una recta con pendiente $\frac{3}{2}$ e intercepto con el eje y en el punto $(0, -\frac{17}{2})$.

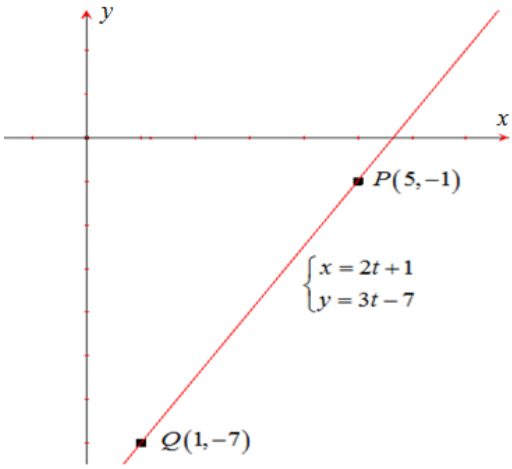


Figura 62. Representación gráfica de una función expresada paramétricamente.

Ejemplo 2

Trazar y describir la curva definida en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solución:

Una de las ecuaciones paramétricas, es una función cuadrática y la otra es lineal. La curva es una parábola.

Se tabulan algunos valores:

t	0	1	2	3
x	1	2	3	4
y	0	-1	0	3

Ahora bien, de la primera ecuación, se obtiene: $t = x - 1$.

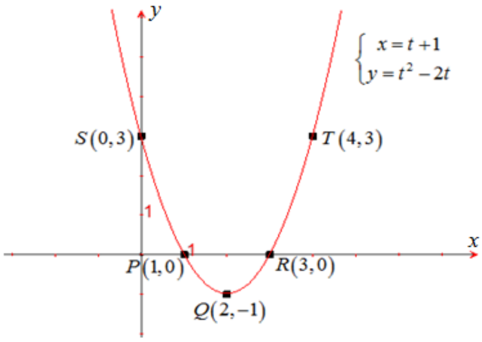


Figura 63. Representación gráfica de la función $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Al reemplazar en la segunda ecuación, se obtiene:

$$y = (x-1)^2 - 2(x-1); y = x^2 - 2x + 1 - 2x + 2; y = x^2 - 4x + 3$$

Se trata de una parábola con mínimo en $(2, -1)$, raíces $x = 1$, $x = 3$ y pasa por $(0,3)$.

Ejemplo 3

Trazar y describir la curva definida paramétricamente como

$$\begin{cases} x = 3 + 4\cos t \\ y = -1 + 4\,sen\,t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi].$$

Solución:

Se procede a tabular algunos valores:

t	x	y
0	7	-1
$\frac{\pi}{4}$	$3+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	3	3
$\frac{3\pi}{4}$	$3-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	-1	-1
$\frac{3\pi}{2}$	3	-5

Se elimina el parámetro t:

$$x - 3 = 4\cos t \;;\; y + 1 = 4\cos t.$$

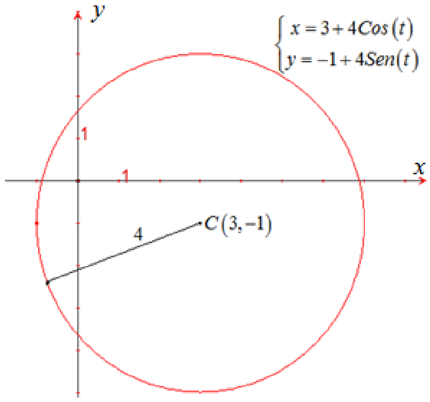


Figura 64. Representación gráfica de la función dada por. $\begin{cases} x = 3 + 4cos\ t \\ y = -1 + 4sen\ t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$

Al elevar al cuadrado cada ecuación, se obtiene:

$$(x-3)^2 = 4^2cos^2t\ ;\ (y+1)^2 = 4^2cos^2t\ .$$

Al sumar miembro a miembro, resulta:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4^2\ .$$

Se trata de un círculo con radio 4 y centro $(3,-1)$ (ver Figura 64).

EJERCICIOS 1.10

Trazar y describir las siguientes funciones:

$a)\ \begin{cases} x = e^t - 1 \\ y = e^{-t} + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

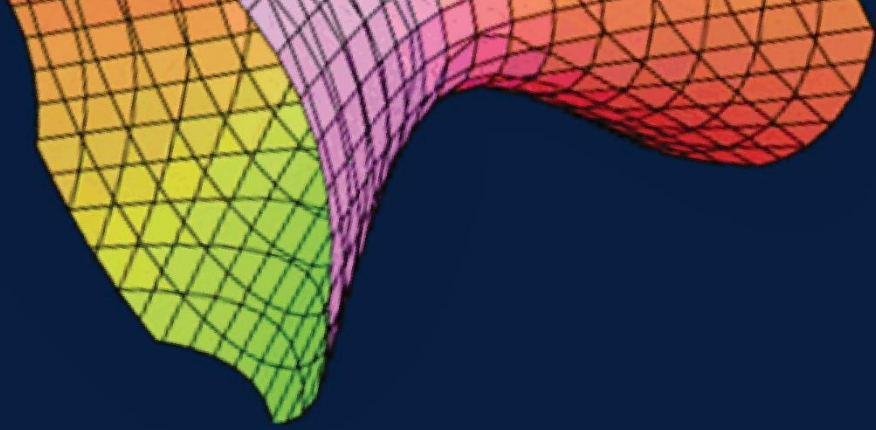
$b)\ \begin{cases} x = 3\cos\ t \\ y = 2sen\ t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$

$c)\ \begin{cases} x = 1 + \cos\ t \\ y = -4 + 2sen\ t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$

$d)\ \begin{cases} x = 4t + 8 \\ y = -2t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$e)\ \begin{cases} x = 5t + 6 \\ y = 3t^2 + 8t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$f)\ \begin{cases} x = acos^3t \\ y = asen^3t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$



CAPÍTULO 2.

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTCA

CAPÍTULO 2

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

2.1 DEFINICIONES Y CONCEPTOS

La Geometría Analítica, es la rama de las Matemáticas, que estudia las figuras geométricas, utilizando los sistemas cartesianos; esta disciplina resuelve problemas geométricos, mediante métodos algebraicos.

- Recuérdese que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, se representa geométricamente, como los puntos de una recta, estableciéndose una correspondencia uno a uno (1-1), entre el conjunto de los números reales y los puntos de una recta.
- Si se trazan dos rectas numéricas en el plano, de forma que sean perpendiculares entre sí, se obtiene el sistema coordenado cartesiano. Cada punto P del plano se puede asociar con un par ordenado de números reales (x, y), donde la primera componente x (abscisa) es la distancia de P al eje vertical, mientras que la segunda componente y (ordenada) es la distancia del punto P al eje horizontal. Se dice, entonces que, $P(x, y)$ es un punto del plano con coordendas x, y (justo en ese orden).

Se puede establecer una correspondencia 1-1 entre el conjunto de todos los puntos del plano y el conjunto de todos los pares ordenados de números reales. Al sistema coordenado cartesiano se lo conoce también como $\mathbb{R}^2$ (ver Figura 65).

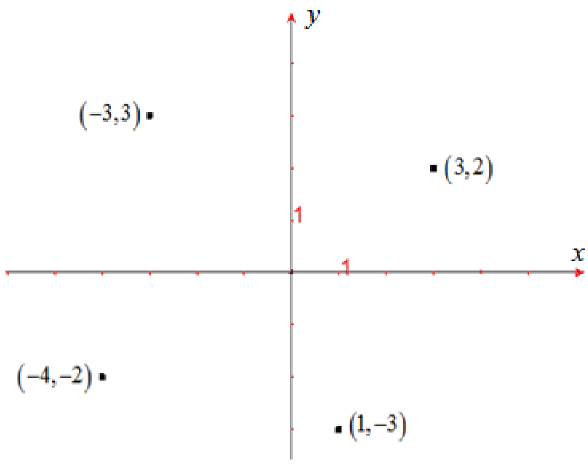


Figura 65. Representación de pares ordenados en el Plano Cartesiano.

2.1.1 Distancia entre dos puntos en el plano

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos en el Plano Cartesiano, entonces, existe un número real denotado por $d(P_1, P_2) \geq 0$ llamado distancia entre P_1 y P_2.

Inicialmente, se analiza el concepto de distancia para el caso en que los puntos P_1 y P_2 se encuentran en una línea recta paralela a los ejes cartesianos. La distancia entre los puntos P_1 y P_2 es igual a la distancia entre $P_1{}'$ y $P_2{}'$ (ver Figura 66).

La distancia entre $P_1{}'$ y $P_2{}'$ es la medida del segmento que los une y por lo tanto:

$$d(P_1, P_2) = d(P_1{}', P_2{}') = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2| \ .$$

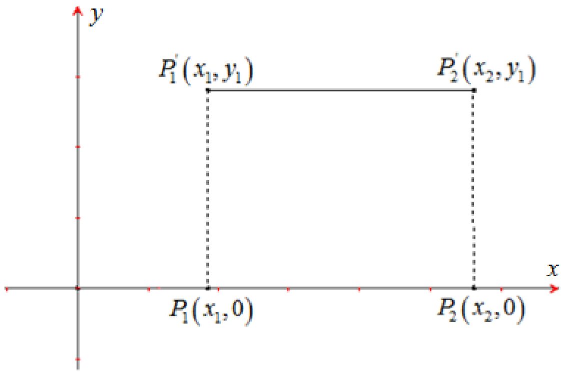


Figura 66. Representación de dos pares ordenados cuyas ordenadas son iguales.

De igual manera, en la Figura 67, se obtiene:

$$d(P_1, P_2) = d(P_1{}', P_2{}') = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2| \ .$$

Ahora, considérese dos puntos cualesquiera del plano $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$.

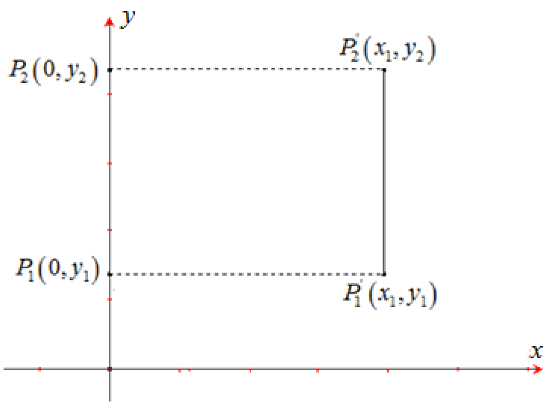


Figura 67. Representación de dos pares ordenados cuyas abscisas son iguales

Se construye un triángulo rectángulo, en el que la hipotenusa, P_1P_2, es precisamente la distancia entre P_1 y P_2 y como catetos, los segmentos paralelos a los ejes cartesianos. El punto de intersección de estos catetos, es el punto $Q(x_2, y_1)$, como se indica en la Figura 68.

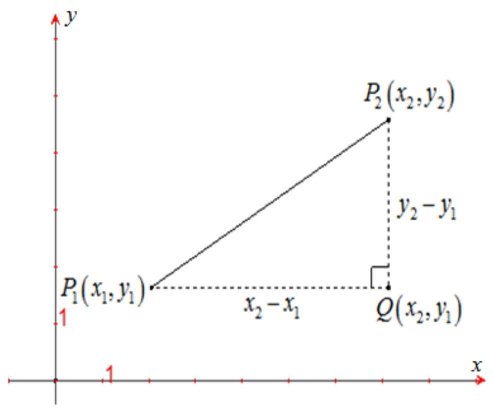


Figura 68. Representación de la distancia entre dos puntos.

Al aplicar el Teorema de Pitágoras, se obtiene:

$$\overline{d(P_1, P_2)}^2 = \overline{d(P_1, Q)}^2 + \overline{d(P_2, Q)}^2 \,,$$

$$\overline{d(P_1, P_2)}^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \,.$$

Dado que,

$$|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 \,; \;\; |y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2 \,.$$

Entonces,

$$\overline{d(P_1, P_2)}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \,,$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \,.$$

O bien,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \,.$$

Estas dos últimas expresiones constituyen la Fórmula de la Distancia entre dos puntos en el Plano Cartesiano.

Ejemplo

Calcular la distancia entre los puntos P y Q que se indican en seguida:

a) $P(3, 4)$; $Q(-5, 8)$.

b) $P(3, -3)$; $Q\left(-\frac{3}{5}, \frac{7}{3}\right)$.

Solución:

a) $d(P, Q) = \sqrt{(-5-3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

La Figura 69, indica el segmento que une los punto $P(3,4)$ y $Q(-5,8)$.

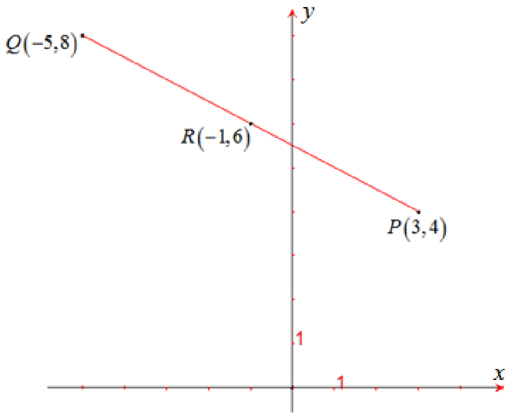


Figura 69. Distancias entre dos puntos $P(3,4)$ *y* $Q(-5,8)$

b) $d(P,Q) = \sqrt{(-\frac{3}{5} - 3)^2 + (\frac{7}{3} + 3)^2} = \sqrt{\left(-\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9316}{225}} = \frac{2}{5}\sqrt{2329}\,.$

La Figura 70, muestra el segmento que une los puntos P(3,-3) y $Q(-\frac{3}{5}, \frac{7}{3})$.

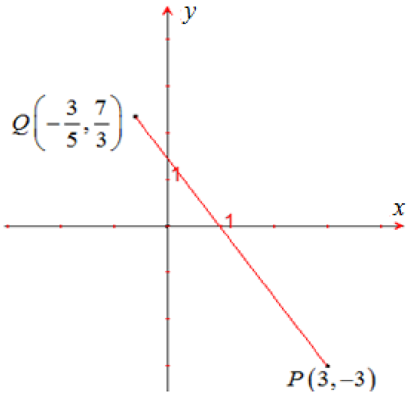


Figura 70. Distancias entre dos puntos $P(3,-3)$ *y* $Q\left(-\frac{3}{5}, \frac{7}{3}\right)$

2.1.2 Coordenadas del punto medio de un segmento

Sean $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos del plano. Las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ son:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \;\; ; \;\; \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}\,.$$

Ejemplo

Para los puntos $P(3,4)$; $Q(-5,8)$ del ejemplo anterior, determinar las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{PQ}$.

Solución:

$$\bar{x} = \frac{3 + (-5)}{2} = -1\ ;\ \ \bar{y} = \frac{4 + 8}{2} = 6\ .$$

El punto medio del segmento $\overline{PQ}$ es $R(-1, 6)$.

2.1.3 Ecuaciones de la recta

Si A, B, C, son números reales, con A o $B \neq 0$; entonces, la expresión $Ax + By + C = 0$ representa una recta L y se denomina *Ecuación General* de la recta.

En la sección 1.1, se realizó un análisis de la función lineal $y = mx + b$, que se puede obtener de la ecuación general. En esta última ecuación, llamada *Ecuación Pendiente-Intersección*, m es la pendiente de la recta y b el intercepto con el eje y.

Ahora bien, si se asegura que $A \neq 0$ y $B \neq 0$ y si $P(a, 0)$ y $Q(0, b)$ son los puntos de intersección de la recta L con los ejes x y y, respectivamente, entonces, la ecuación de la recta L se puede escribir como sigue y se denomina *Ecuación Simétrica* de L:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\ .$$

Por tanto, resulta conveniente trazar una recta, a partir de los puntos de intersección con los ejes cartesianos, tal como se muestra en la Figura 71.

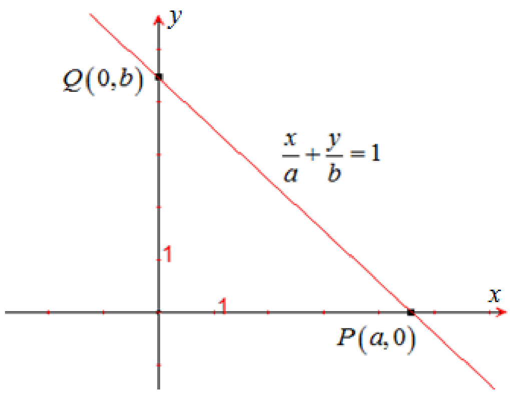


Figura 71. Representación gráfica de la recta de ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Igualmente, en la sección 1.1 se estudió las posiciones relativas de las rectas.

En efecto, sean las rectas: L_1: $y = m_1 x + b$ y L_2: $y = m_2 x + b$.

La recta L_1 es paralela a la recta L_2, si y solo sí, tienen la misma pendiente, esto es:

$$L_1 || L_2 \iff m_1 = m_2 \quad (Paralelismo).$$

La recta L_1 es perpendicular a la recta L_2, si y solo sí, sus pendientes son opuestas y recíprocas, es decir:

$$L_1 \perp L_2 \iff m_1 * m_2 = -1 \quad (Perpendicularidad).$$

Sean $L_1: Ax + By + C = 0$ y $L_2: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, las ecuaciones generales para las rectas L_1 y L_2, respectivamente, entonces, las relaciones siguientes, son condiciones suficientes y necesarias, para los siguientes conceptos:

a) *Paralelismo*

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \Rightarrow AB_1 - A_1B = 0.$$

b) *Perpendicularidad*

$$AA_1 + BB_1 = 0.$$

c) *Coincidencia*

$$A = kA_1\,;\; B = kB_1\,;\; C = kC_1\,;\quad k \neq 0.$$

d) *Intersección*

$$AB_1 - BA_1 \neq 0.$$

Ejemplo

Dada la recta L, cuya ecuación general es $4x + 5y + 20 = 0$, determinar las ecuaciones punto-intersección y simétrica y trazar su gráfica.

Solución:

Para realizar la gráfica, se determinan los interceptos con los ejes, así:

$$x = 0\,;\; y = -\frac{20}{5} = -4\,;\; P(0,-4) \text{ es intercepto con el eje y}.$$

$$y = 0\,; x = -\frac{20}{4} = -5\,;\; Q(0,-5) \text{ es intercepto con el eje x}.$$

Ahora bien, de la expresión $4x + 5y + 20 = 0$ se tiene lo siguiente:

$$5y = -20 - 4x; y = \frac{-4x - 20}{5}; y = -\frac{4}{5}x - 4\,.$$

Por otra parte, desde $4x + 5y = -20$, al dividir por -20, se obtiene:

$$\frac{4}{-20}x + \frac{5}{-20}y = -\frac{20}{-20}; -\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 1\,;\; \frac{x}{-5} + \frac{y}{-4} = 1\,.$$

Por lo tanto, la ecuación simétrica es: $\frac{x}{-5} + \frac{y}{-4} = 1$.

La representación gráfica, se muestra en la Figura 71.

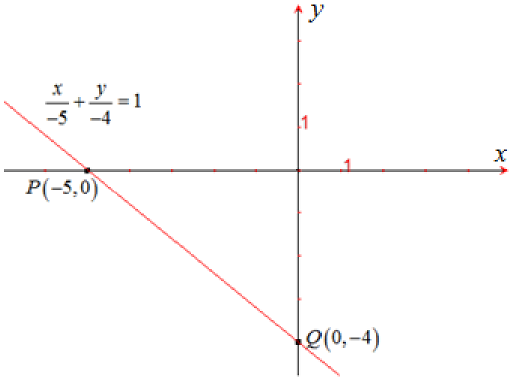


Figura 71. Representación gráfica de la recta de ecuación $\frac{x}{-5}+\frac{y}{-4}=1$.

2.1.4 Distancia de un punto a una recta

Sea L una recta, cuya ecuación general es $Ax+By+C=0$ y $P(x_0,y_0)$ un punto del plano, no perteneciente a la recta. La Figura 72, muestra el segmento distancia del punto $P(x_0,y_0)$ a una recta L.

La distancia mínima entre la recta L y el punto P, se obtiene mediante la expresión:

$$d(P,L)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

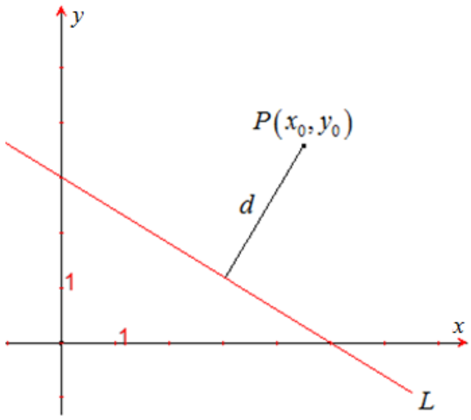


Figura 72. Distancia de un punto a una recta $P(x_0,y_0)$ a una recta L.

Ejemplo

Calcular la distancia mínima entre la recta L: $8x-5y+40=0$ y el punto $P(1,2)$.

Solución:

En primer lugar, se debe verificar que el punto $P(1,2)$ no pertenezca a la recta L.

En efecto, al reemplazar las coordenadas del punto P en la ecuación dada, se tiene: $8(1)-5(2)+40=38\neq 0$; por lo tanto, el punto P no pertenece a la recta L dada, tal como se muestra en la Figura 73.

Los interceptos con los ejes, se determinan de la siguiente manera:

Intercepto de la recta con eje x: $y = 0$; $x = -5$; esto es, $(-5,0) \in L$.

Intercepto de la recta con eje y: $x = 0$; $y = 8$; entonces, $(0,8) \in L$.

$$d(P, L) = \frac{|8(1) - 5(2) + 40|}{\sqrt{8^2 + (-5)^2}} = \frac{|38|}{\sqrt{89}} = \frac{38\sqrt{89}}{89} \cong 4{,}03$$

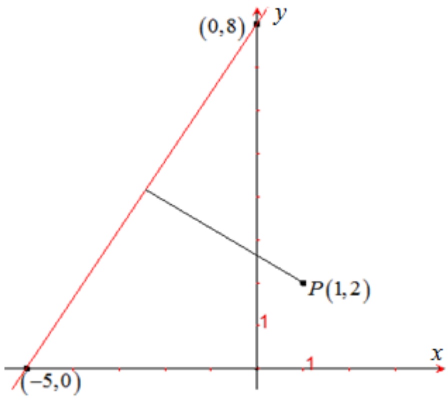


Figura 73. Distancia del punto $P(1,2)$ a la recta L: $8x - 5y + 40 = 0$

2.1.5 Ángulo entre dos rectas

Dos rectas L_1 y L_2 no paralelas, forman un ángulo en su punto de intersección. El ángulo que se calcula, en cualquier caso, debe ser agudo, tal como se indica en la Figura 74.

Para la recta L_1, α_1 es el ángulo que forma esta recta con la parte positiva del eje x; por lo cual, su pendiente es $m_1 = tg\ (\alpha_1)$.

Para la recta L_2, α_2 es el ángulo que forma esta recta con la parte positiva del eje x; aquí la pendiente es $m_2 = tg(\alpha_2)$.

Para el cálculo del ángulo agudo, se considera como lado inicial, aquel donde se origina el ángulo y lado final, hacia donde se dirige. Además, se considera como ángulo positivo, el recorrido en sentido antihorario.

Con estas consideraciones, según la Figura 74, se tienen las siguientes relaciones:

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1\ ;\ tg\ \theta = tg(\alpha_2 - \alpha_1);\ \theta\text{: ángulo entre } L_1\ y\ L_2.$$

Por trigonometría, se cumple que:

$$tg\ \theta = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\ \alpha_2 - tg\ \alpha_1}{1 + tg\ \alpha_2\ tg\alpha_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}.$$

$$\theta = arctg\left[\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right].$$

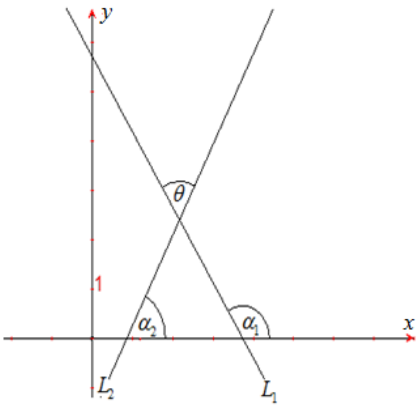


Figura 74. Ángulo entre dos rectas

Ejemplo 1

Hallar el ángulo agudo determinado por las siguientes rectas:

$$L_1: 2x + 3y - 12 = 0 \quad \text{y} \quad L_2: x - 3y + 3 = 0.$$

Solución:

Inicialmente se trazan las rectas:

$$L_1:\ x = 0\,, y = 4; \quad (0{,}4) \in L_1\,;\ y = 0\,, x = 6\,;\ (6{,}0) \in L_1\,.$$

$$L_2:\ x = 0\,, y = 1; \quad (0{,}1) \in L_2\,;\ y = 0, x = -3\,;\ (-3{,}0) \in L_2\,.$$

Las ecuaciones de cada recta en la forma pendiente-intercepto, son:

$L_1:\ y = -\dfrac{2}{3}x + 4 \ \Rightarrow\ m_1 = -\dfrac{2}{3}$; α_1 es el ángulo que forma L_1 con el eje x .

Luego, $tg(\alpha_1) = -\dfrac{2}{3}$.

$L_2:\ y = \dfrac{1}{3}x + 1 \ \Rightarrow\ m_2 = \dfrac{1}{3}$; α_2 es el ángulo que forma L_2 con el eje x .

Por lo cual, $tg(\alpha_2) = \dfrac{1}{3}$.

De la Figura 74, se tiene que:

$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$, entonces,

$$tg(\theta_1) = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} = -\frac{9}{7}.$$

Por tanto,

$$\theta_1 = arctg\left[-\frac{9}{7}\right] \cong 127^0 52'\,.$$

Dado que θ es el ángulo entre las rectas, entonces:

$$\theta = 180^0 - \theta_1 = 180^0 - 127^0 52' \Longrightarrow \theta = 52^0 8' \,.$$

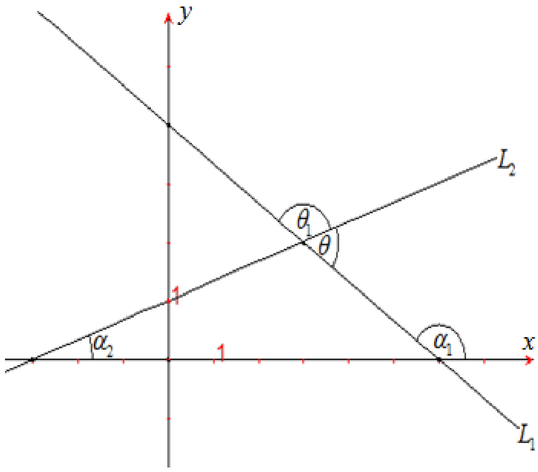


Figura 74. Ángulo entre dos rectas: $L_1: 2x + 3y - 12 = 0$ *y* $L_2: x - 3y + 3 = 0$

Ejemplo 2

Considerar el triángulo, cuyos vértices son los puntos: $A(-3,1)$; $B(1,4)$ y $C(6,-2)$ y determinar:

a) La longitud de los lados del triángulo.

b) La longitud de las medianas.

c) El área del triángulo.

Solución:

a) La longitud de cada uno de los lados del triángulo, se encuentra con la Fórmula de la Distancia, así:

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \,.$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4+2)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61} \,.$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1+2)^2 + (-3-6)^2} = \sqrt{9 + 81} = 3\sqrt{10} \,.$$

b) Para determinar la longitud de las medianas, es necesario calcular los puntos medios de los lados. La Mediana, es el segmento de recta, que une un vértice con el punto medio del lado opuesto, tal como se muestra en la Figura 75.

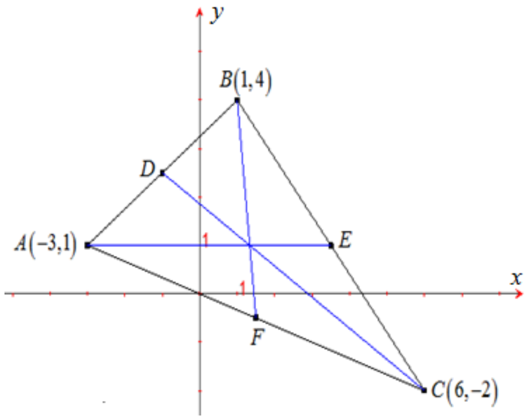


Figura 75. Medianas del triángulo con vértices: $A(-3{,}1)$; $B(1{,}4)$ *y* $C(6,-2)$.

- D es el punto medio de $\overline{AB}$:

$$\bar{x}=\frac{1-3}{2}=-1;\quad y=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2};\ D\left(-1,\frac{5}{2}\right).$$

- E es el punto medio de lado $\overline{BC}$:

$$\bar{x}=\frac{1+6}{2}=\frac{7}{2};\quad y=\frac{4-2}{2}=1;\ E\left(\frac{7}{2},1\right).$$

- F es el punto medio del lado $\overline{AC}$:

$$\bar{x}=\frac{-3+6}{2}=\frac{3}{2};\quad y=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2};F\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

- Longitud de la mediana $\overline{DC}$:

$$\overline{DC}=\sqrt{(6+1)^2+\left(-2-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{473}{8}}\cong 7{,}69\ \text{ unidades de longitud (ul).}$$

- Longitud de la mediana $\overline{BF}$:

$$\overline{BF}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-4\right)^2}=\sqrt{\frac{82}{4}}\cong 4{,}52\ \ ul\,.$$

- Longitud de la mediana $\overline{AE}$:

$$\overline{AE}=\sqrt{\left(-3-\frac{7}{2}\right)^2+(1-1)^2}=\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2}=\frac{14}{2}=6{,}5\ \ ul\,.$$

c) Para determinar el área, se requiere calcular la altura h, como se indica en la Figura 76.

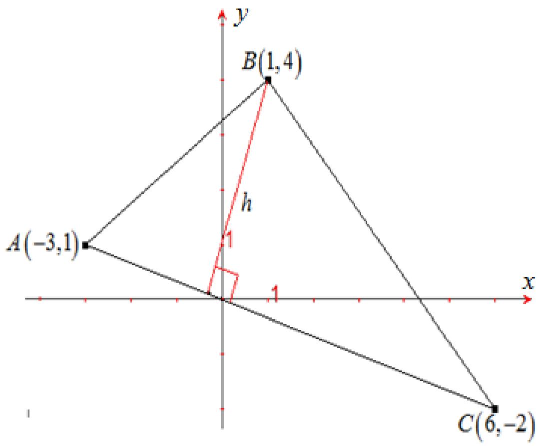


Figura 76. Altura del triángulo con vértices $A(-3,1)$; $B(1,4)$ y $C(6,-2)$

La Longitud de la Base, es la longitud del segmento $\overline{AC} = 3\sqrt{10}$, valor calculado en el literal (a).

La altura h, es la distancia del vértice B a la recta que pasa por A y C.

Ahora se determina la ecuación de la recta que pasa por A y C, así:

Pendiente:

$$m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2-1}{6+3} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}.$$

El punto $A(-3,1)$ pertenece a la recta, entonces, al reemplazar en la ecuación punto-pendiente, se tiene:

$$y - y_0 = m(x - x_0)\,.$$

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x+3);\ 3(y-1) = -x-3;$$

$$x + 3y = 0 \quad \text{(Ecuación de la recta)}.$$

La ecuación general de la recta es: $x + 3y = 0$.

$$h = d(L,B) = \frac{|1+3(4)|}{\sqrt{1^2+(3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{10}}\,.$$

Por lo tanto, el área del triángulo es:

$$Área = \frac{1}{2}\overline{AC} * h = \frac{1}{2} * 3\sqrt{10} * \frac{13}{\sqrt{10}}\,,$$

$$Área = \frac{39}{2} = 19{,}5 \text{ unidades de área}\,.$$

EJERCICIOS 2.1

1. Calcular la distancia al origen de los puntos

$$A(-3,5)\,;B(3,-3)\,;C(4,4)\,;D(-5,6)\,;E(9.-7)\,;F\left(\frac{3}{5},7\right) \text{ y } G\left(-\frac{3}{5},\frac{7}{3}\right).$$

2. Calcular la longitud de los segmentos: $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AE}, \overline{AF}, \overline{FG}$.

3. Calcular el perímetro de los triángulos ABG, BCG, BED.

4. El punto medio de un segmento es $M(7,-3)$ y uno de sus extremos es $P(12,5)$. Determinar las coordenadas del otro extremo.

5. Considerar los puntos $P(6,2)\,;Q(-4,8)\,;R(5,-6)$ y $S(-3,-3)$:

   a) Calcular los puntos medios de los lados del cuadrilátero determinado por P, Q, R, S.

   b) Demostrar que el cuadrilátero formado por los puntos medios, es un paralelogramo.

   c) Determinar las coordenadas del punto de intersección de las diagonales del paralelogramo.

6. Calcular la distancia de la recta $7x - 8y + 112 = 0$ a los puntos: $P(-8,7)\,;Q(-12,11)\,;O(0,0)$.

7. Demostrar que la distancia de la recta $L: Ax + By + C = 0$ a un punto $P(x_0, y_0)$, exterior a ella es:

$$d(P,L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

   Sugerencia:

   a) Determinar la recta perpendicular L_1 a la recta dada L.

   b) Hallar el punto Q de intersección entre L y L_1.

   c) La distancia de la recta L al punto $P(x_0, y_0)$ es la distancia entre $P\ Q$.

8. Calcular el área del cuadrilátero del punto 5 y determinar los ángulos internos.

9. Demostrar que la distancia entre dos rectas paralelas:

   $L_1: Ax + By + C_1 = 0$ y $L_2: Ax + By + C_2 = 0$, se calcula como sigue:

$$d(L_1, L_2) = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

10. La Fórmula de Herón, establece que el área de un triángulo, conocidas las longitudes de sus tres lados a, b, c, es:

$$Área = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ ;\ s = \frac{a+b+c}{2}.$$

La variable s se denomina Semiperímetro.

Aplicar la Fórmula de Herón, para calcular las áreas de los triángulos del punto 3; además, comparar los resultados con los obtenidos mediante la conocida fórmula:

$$Área = \frac{1}{2} * base * altura.$$

2.2 SECCIONES CÓNICAS

Se entiende por Sección Cónica, a la curva resultante de la intersección de un plano con la superficie de un cono circular recto de dos hojas, tal como se indica en la Figura 77.

- Si el plano π corta una sola hoja del cono y es perpendicular al eje vertical que pasa por el vértice C, entonces, la curva de intersección resultante, es un círculo.
- Si el plano π corta al eje del cono en un ángulo diferente a 90^0, entonces, la curva resultante, es una elipse.
- Si el plano π es paralelo a la curva generatriz del cono, entonces, la curva resultante, es una parábola.
- Si el plano π corta a las dos hojas del cono, la curva de intersección es una hipérbola.

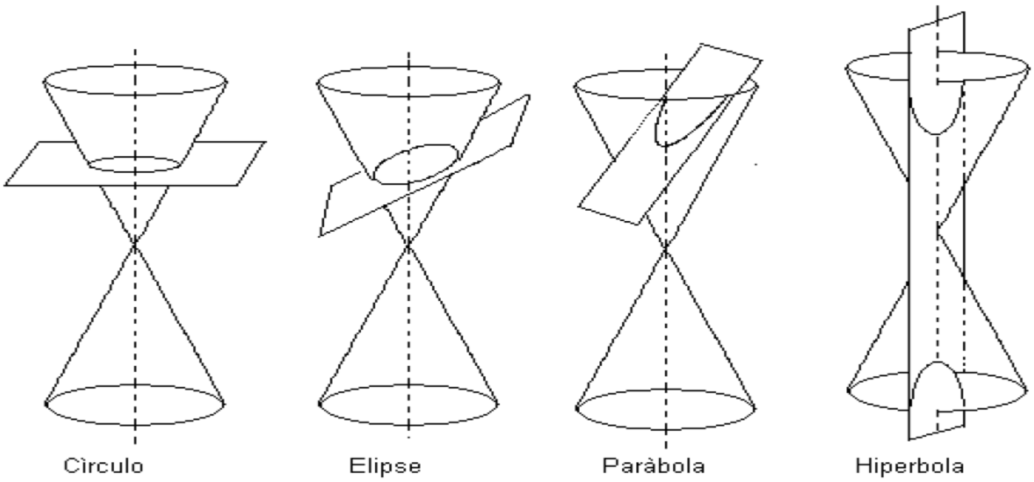


Figura 77. Secciones cónicas

2.2.1 Ecuación general de segundo grado en x, y

La ecuación general de segundo grado en las variables x, y, tiene la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (2.1)$$

Donde A, B y C no pueden ser nulos, simultáneamente. La representación gráfica de la ecuación 2.1, si existe, corresponde a una de las secciones cónicas mencionadas, o es un lugar geométrico extraño.

El coeficiente B, está relacionado con las rotaciones de las cónicas, el cual, en este texto, siempre se toma igual acero, es decir, $B = 0$.

2.2.2 La parábola

La ecuación (2.1) representa gráficamente una parábola, siempre que $A = 0$ ó $C = 0$, pero no simultáneamente. Las siguientes ecuaciones corresponden a parábolas:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0\,;\; Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Completando cuadrados en x o en y, se tienen las respectivas ecuaciones estándar:

$$(x-h)^2 = 4a(y-k). \quad (2.2)$$

$$(y-k)^2 = 4a(x-h). \quad (2.3)$$

- En cualquiera de los dos casos, el punto V(h,k) es el vértice de la parábola.
- En la ecuación 2.2, el eje de simetría es $x = h$, es paralelo al eje y , y pasa por el vértice. Además, si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $a < 0$ se abre hacia abajo. El foco de la parábola es el punto $F(h, k + a)$. La Figura 78, contiene la representación gráfica de la ecuación 2.2.

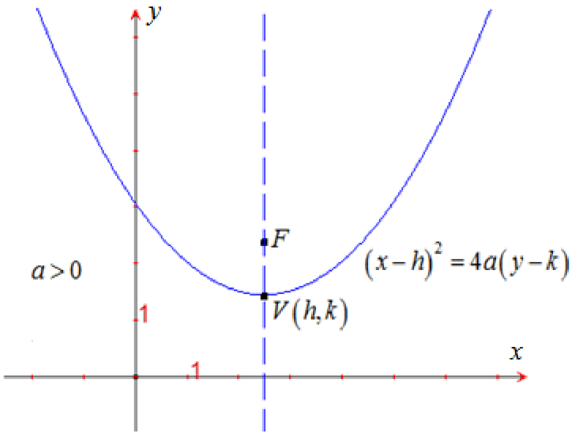


Figura 78. Representación gráfica de la parábola $(x-h)^2 = 4a(y-k)$

- En la ecuación 2.3, el eje de simetría es $y = k$, es paralelo al eje x , y pasa por el vértice. Si $a > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; ai $a < 0$ se abre hacia la izquierda. El foco está ubicado en el punto $F(h + a, k)$, como se indica en la Figura 79.

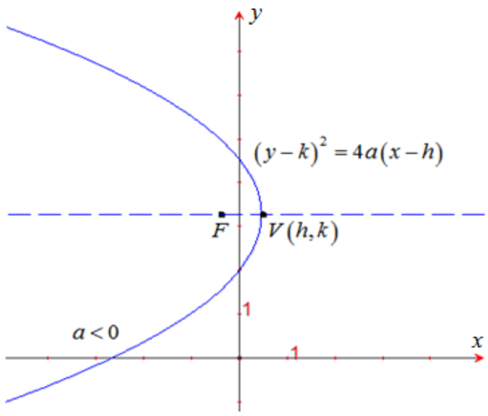


Figura 79. Representación gráfica de la parábola $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

Ejemplo

Trazar las parábolas cuyas ecuaciones se detallan a continuación; además, determinar su ecuación estándar, vértice, foco y eje de simetría:

1. $x^2 - 8x - 4y + 28 = 0.$

2. $y^2 - 4x + 14y + 61 = 0.$

Solución:

1. $x^2 - 8x - 4y + 28 = 0.$

Completando cuadrados para la variable x, se obtiene que:

$$x^2 - 8x = 4y - 28\,;$$

$$x^2 - 8x + 16 = 4y - 28 + 16\,;$$

$$(x-4)^2 = 4y - 12\,;$$

$$(x-4)^2 = 4(y-3)\,;$$

$$(x-4)^2 = 4(1)(y-3)\ (\text{ecuación estándar})\,.$$

Al comparar con la ecuación 2.2, $(x-h)^2 = 4a(y-k)$, se tiene que,

- Vértice: $V(4{,}3)$; dado que, $a = 1 > 0$, entonces, se abre hacia arriba.
- Eje de simetría: $x = 4$.
- Foco de la parábola: $F(4{,}3+1) = F(4{,}4)$.
- Algunos puntos de la parábola son: $P(0{,}7)\ y\ Q(8{,}7)$.
- La Figura 80, corresponde a la representación gráfica de la parábola correspondiente.

Nota: la ecuación dada, se puede escribir en la forma $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 7$, con lo cual, se la puede trazar utilizando las herramientas estudiadas en la Sección 1.2.

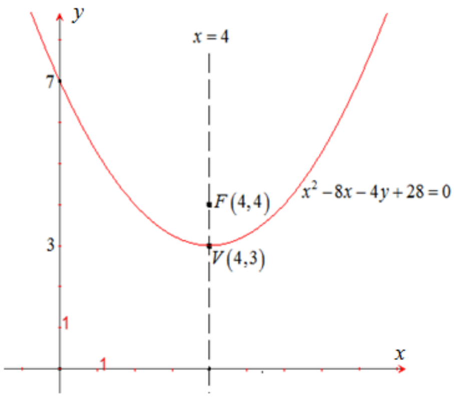


Figura 80. Representación gráfica de la parábola $(x-4)^2 = 4(1)(y-3)$

2. $y^2 - 4x + 14y + 61 = 0.$

En este caso se completan cuadrados para la variable y:

$$y^2 + 14y = 4x - 61;$$

$$y^2 + 14y + 49 = 4x - 61 + 49;$$

$$(y+7)^2 = 4x - 12;$$

$$(y+7)^2 = 4(1)(x-3)\ .$$

Al comparar con la ecuación 2.3: $(y-k)^2 = 4a(x-h)$, se tiene que:

- Vértice: $V(3,-7)$; dado que, $a = 1 > 0$, se abre hacia la derecha.
- Eje de simetría: $y = -7$.
- Foco: $F(3+1,-7) = F(4,-7)$.
- Algunos puntos de la parábola son: $P(6,-3)$ y $Q(6,-11)$.
- Punto de corte con eje x: $x = \frac{57}{4} \cong 14{,}25$.
- La representación gráfica correspondiente, se presenta en la Figura 81.

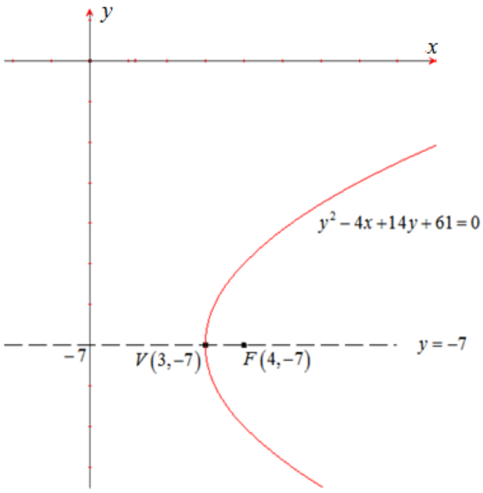


Figura 81. Representación gráfica de la parábola $(y+7)^2 = 4(1)(x-3)$

2.3.3 La Elipse

Al considerar la ecuación general de segundo grado (2.1), si los coeficientes A y C son del mismo signo, se obtiene una elipse. Esto significa, que en la ecuación de segundo grado, deben aparecer A y C.

Completando el cuadrado para x y para y, se obtienen dos *ecuaciones estándar* para la elipse, así:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \qquad (2.4)$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1. \qquad (2.5)$$

Para efectos de facilitar el trazado de la curva, se establece que $a > b$.

- En cualquiera de los dos casos: (h, k) es el centro de la elipse.
- Para la ecuación (2.4):
  - El semieje mayor de la elipse, es paralelo al eje x y los extremos de la elipse son:

    $(h + a, k)$ y $(h - a, k)$.
  - El semieje menor es perpendicular al semieje mayor y es paralelo al eje y sus extremos son $(h, k + b)$; $(h, k - b)$.
  - La representación gráfica correspondiente, se presenta en la Figura 82.

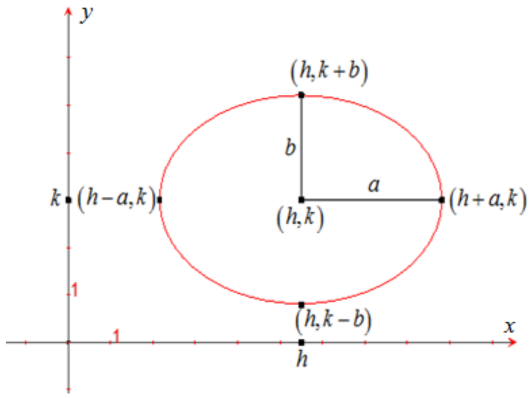


Figura 82. Representación gráfica de la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

- Para la ecuación (2.5):
  - El semieje mayor es paralelo al eje y, los extremos son:
    $(h, k+a)$ y $(h, k-a)$.
  - El semieje menor es paralelo al eje x y los puntos extremos son:
    $(h+b, k)$; $(h-b, k)$.
  - La representación gráfica correspondiente, se presenta en la Figura 83.

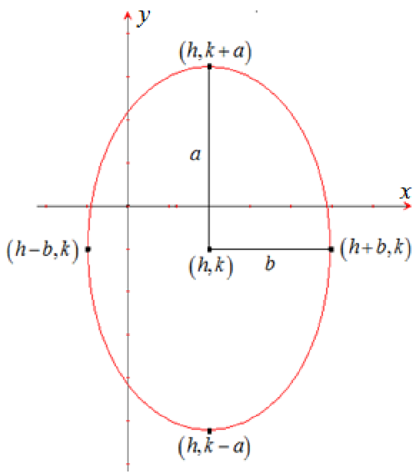


Figura 83. Representación gráfica de la elipse $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Ejemplos

Encontrar la ecuación estándar, describir y trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2+2y^2+2x-8y+5=0$.

2. $4x^2+y^2+6y+5=0$.

3. $x^2+2y^2-2x+4y+7=0$.

Solución:

1. $x^2 + 2y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$.

Al completar cuadrados se obtiene:

$$(x^2 + 2x) + 2(y^2 - 4y) = -5\,;$$

$$(x^2 + 2x + 1) + 2(y^2 - 4y + 4) = -5 + 1 + 8\,;$$

$$(x + 1)^2 + 2(y - 2)^2 = 4\,;$$

$$\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{2(y - 2)^2}{4} = 1\,;$$

$$\frac{(x + 1)^2}{2^2} + \frac{2(y - 2)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1 \quad \text{(ecuación estándar).}$$

Centro de la elipse: $C(-1,2)$; semieje mayor 2; semieje menor $\sqrt{2}$.

La representación gráfica, se presenta en la Figura 84.

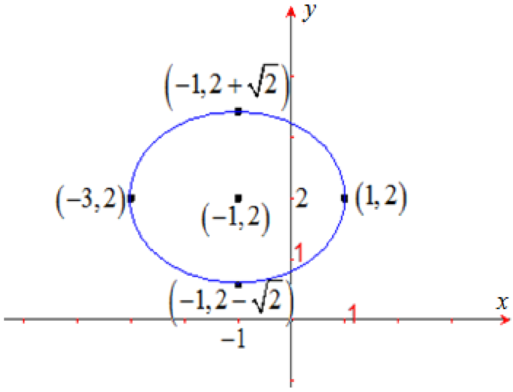


Figura 84. Representación gráfica de la elipse $\frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{2(y-2)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1$

2. $4x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$. Se reduce a la forma canónica con los siguientes pasos:

$$4x^2 + (y^2 + 6y) = -5\,;$$

$$4x^2 + (y^2 + 6y + 9) = -5 + 9\,;$$

$$4x^2 + (y + 3)^2 = 4\,;$$

$$\frac{4x^2 + (y + 3)^2}{4} = 1\,;$$

$$\frac{(x - 0)^2}{1^2} + \frac{(y + 3)^2}{2^2} = 1 \quad \text{(ecuación estándar)}\,.$$

Centro de la elipse: $C(0, -3)$; semieje mayor 2 (paralelos al eje y); semieje menor 1 (paralelo al eje x).

Observe que no tiene intersecciones con el eje x. Esto se puede comprobar, al resolver la ecuación cuadrática. $4x^2 + 5 = 0$, cuyas raíces son números complejos. En la Figura 85, se muestra la representación gráfica respectiva.

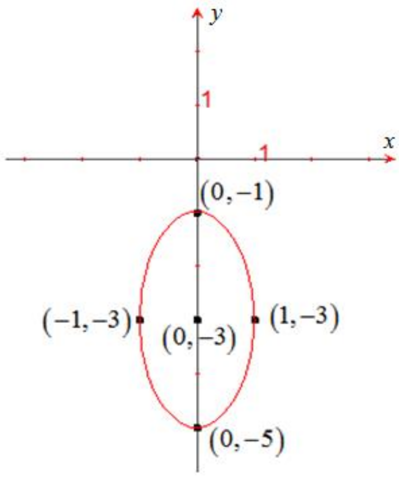


Figura 85. Representación gráfica de la elipse $\frac{(x-0)^2}{1^2} + \frac{(y+3)^2}{2^2} = 1$

3. $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 7 = 0$.

$$x^2 - 2x + 2(y^2 + 2y) = -7 \,;$$

$$(x^2 - 2x + 1) + 2(y^2 + 2y + 1) = -7 + 1 + 2 \,;$$

$$(x - 1)^2 + 2(y + 1)^2 = -4 \,.$$

Esta última no tiene sentido, pues la suma de las cantidades positivas no puede ser negativas. Por lo tanto, la expresión $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 7 = 0$, no tiene sentido, a pesar de que en principio, parecía definir una elipse.

2.4.4 La Circunferencia

Al considerar la ecuación: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, para que ésta represente una circunferencia, se requiere que A y C sean el mismo signo y además que $A = C$.

Al completar cuadrados para x, y, se obtiene la ecuación estándar de un círculo de radio r y centro (h, k):

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \qquad (2.6)$$

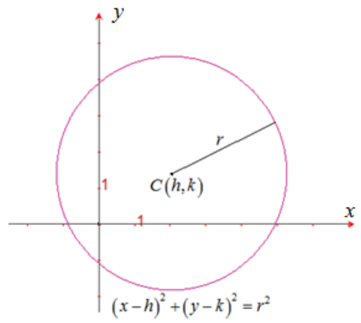


Figura 86. Representación gráfica de la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Ejemplo

Expresar en forma estándar, graficar y describir las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+y^2+6x-4y=3.$

b) $x^2+y^2-4x+2y+5=0.$

Solución:

a) $x^2+y^2+6x-4y=3;$

$$(x^2+6x)=(y^2-4y)=3;$$

$$(x^2+6x+9)=(y^2-4y+4)=3+9+4;$$

$$(x+3)^2+(y-2)^2=4^2.$$

Se trata de un círculo de radio $r=4$, con centro en $C(-3,2)$.

La representación gráfica, corresponde a la Figura 87.

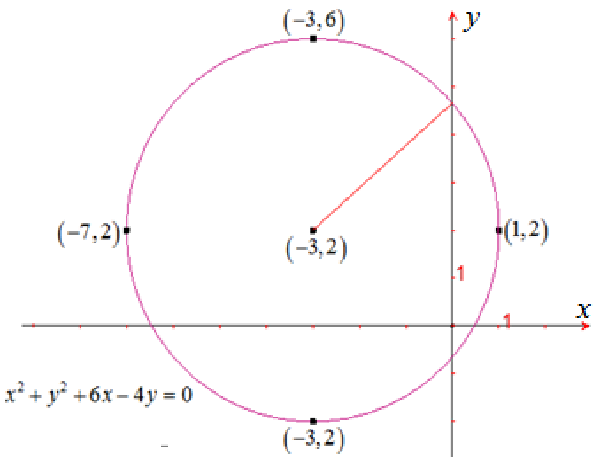


Figura 87. Representación gráfica de la circunferencia $(x+3)^2+(y-2)^2=4^2$

b) $x^2+y^2-4x+2y+5=0.$

$$(x^2 - 4x) = (y^2 + 2y) = -5;$$

$$(x^2 - 4x + 4) = (y^2 + 2y + 1) = -5 + 5;$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0.$$

Esta ecuación estándar tiene sentido, únicamente, para $x = 2,\ \ y = -1$. Por lo tanto, el lugar geométrico correspondiente a la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$ es el punto $P(2, -1)$, tal como se indica en la Figura 88.

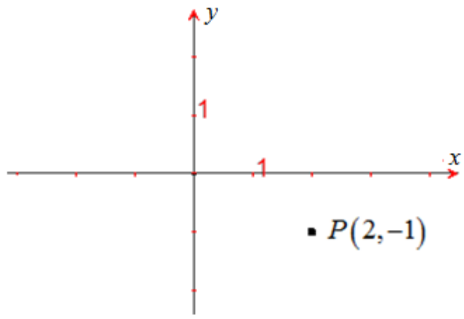


Figura 88. Representación gráfica de la expresión $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$

2.5.5 La hipérbola

La ecuación de segundo grado $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, define una hipérbola cuando A y C son de signos contrarios. En esta curva, el centro está fuera de las dos ramas de ella; además, tiene dos asíntotas que se cortan en el centro de la hipérbola.

Completando cuadrados en x, y, se obtienen las dos curvas estándar siguientes:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \qquad (2.7)$$

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1. \qquad (2.8)$$

- La ecuación (2.7), es la forma estándar para la hipérbola que se abre hacia derecha e izquierda del eje x, tal como se observa en la Figura 89.
  - El centro es (h, k) y las asíntotas son $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$.
  - Sus vértices están sobre la línea horizontal que pasa por $C(h, k)$ y tienen como coordenadas $P(h + a, k)$; $Q(h - a, k)$.
  - Las dos ramas de la hipérbola son simétricas con respecto al centro y a la recta que pasa por el centro.

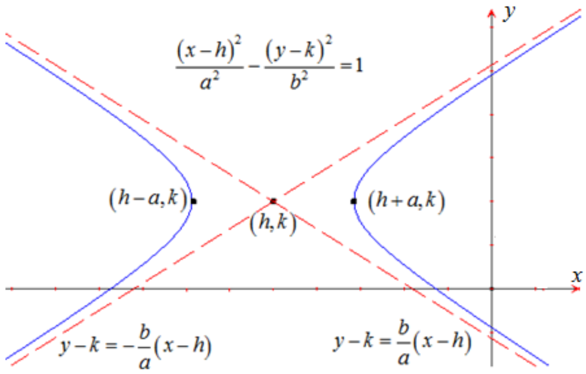


Figura 89. Representación gráfica de la hipérbola $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

- La ecuación 2.8, es la forma estándar para la hipérbola que se abre hacia arriba y abajo, como se muestra en la Figura 90.
  - El centro es $C(h,k)$ y las asíntotas son $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$.
  - Sus vértices se ubican sobre la recta paralela al eje Y que pasa por el centro de la hipérbola.
  - Las dos ramas de la hipérbola son simétricas con respecto al centro y a la recta que pasa por el centro.

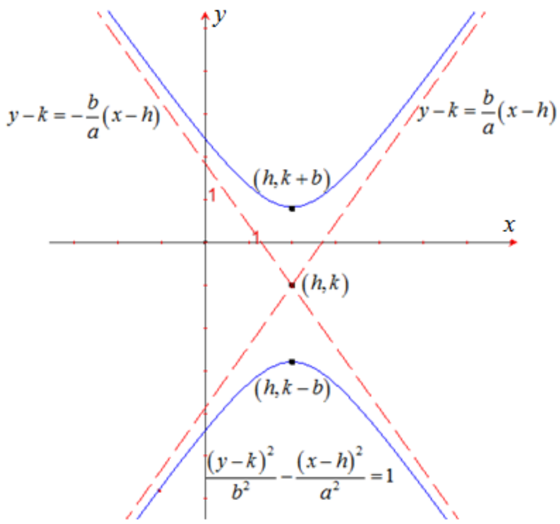


Figura 90. Representación gráfica de la hipérbola $\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$

Ejemplo 1

Expresar en forma estándar, obtener centro, asíntotas y trazar las gráficas de las ecuaciones:

a) $2x^2 - y^2 + 12x - 2y + 15 = 0.$

b) $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 5 = 0.$

Solución:

a) $2x^2 - y^2 + 12x - 2y + 15 = 0.$

Como $A = 2;\ B = 1$, son de diferente signo, inicialmente, se podría decir que esta ecuación define una hipérbola.

Completando cuadrados para x, y, se obtiene:

$$2(x^2 + 6x) - (y^2 + 2y) = -15;$$

$$2(x^2 + 6x + 9) - (y^2 + 2y + 1) = -15 + 18 - 1;$$

$$2(x + 3)^2 - (y + 1)^2 = 2;$$

$$\frac{(x + 3)^2}{1^2} - \frac{(y + 1)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1 \quad \text{(Ecuación Estándar).}$$

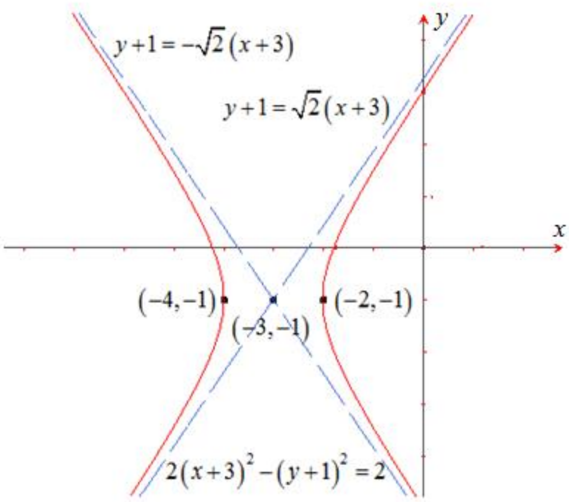


Figura 91. Representación gráfica de la hipérbola $\frac{(x+3)^2}{1^2} - \frac{(y+1)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1$

- Se trata de una hipérbola que abre sus brazos hacia derecha e izquierda del eje x, con centro en $C(-3, -1)$.
- Las asíntotas se obtienen al igualar la ecuación estándar a cero:

$$\frac{(x + 3)^2}{1^2} - \frac{(y + 1)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 0;$$

$$(y+1)^2 = 2(x+3)^2;$$

$$y+1 = \pm\sqrt{2}(x+3).$$

- Vértices $\begin{cases} (-3+1,-1) = (-2,-1) \\ (-3-1,-1) = (-4,-1) \end{cases}$
- La hipérbola tiene intersecciones con los ejes x, y.
- La representación gráfica, corresponde a la Figura 91.

b) $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 5 = 0$.

Como en el caso anterior $A = 1$; $C = -4$, por lo cual, inicialmente define una hipérbola. Al completar los cuadrados para x, y, se llega a la siguiente expresión:

$$(x^2+6x) - 4(y^2-2y) = -5;$$

$$(x^2+6x+9) - 4(y^2+2y+1) = -5+9-4;$$

$$(x+3)^2 - 4(y+1)^2 = 0.$$

Esta ecuación estándar no corresponde a una hipérbola; sin embargo,

$$(y-1)^2 = \tfrac{1}{4}(x+3)^2;\ y-1 = \pm\tfrac{1}{2}(x+3).$$

$$y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2} + 1;\ y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}\ ;\ y = -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2} + 1;$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Se trata de dos rectas, concurrentes en el punto $P(-3{,}1)$, tal como se puede observar en la Figura 92.

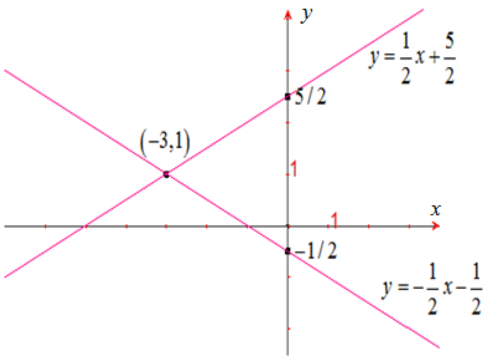


Figura 92. Representación gráfica de la expresión $(x+3)^2 - 4(y+1)^2 = 0$

Ejemplo 2

En el mismo sistema de ejes cartesianos, trazar las curvas dadas en seguida; además, determinar analítica y gráficamente los puntos de intersección entre ellas.

a) $x^2 + y^2 = 4$; $x + y = 2$.

b) $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 - 2y^2 = \frac{1}{4}$.

c) $y^2 + 8x - 16 = 0$; $y^2 - 24x - 48 = 0$.

Solución:

a) La ecuación $x^2 + y^2 = 4$, corresponde a un círculo de radio $r = 2$ y centro $C(0,0)$.

Por su parte, la expresión $x + y = 2$ corresponde a una recta:

$x = 0$; $y = 2$; $(0,2)$ pertenece a la recta.

$y = 0$; $x = 2$; $(2,0)$ pertenece a la recta.

Gráficamente, se puede ver que los puntos de intersección son $(0,2)$ y $(2,0)$.

Analíticamente:

$x + y = 2; y = 2 - x.$ (1)

$x^2 + y^2 = 4.$ (2)

Al reemplazar (1) en (2), se tiene:

$x^2 + (2 - x)^2 = 4$; $x^2 + 4 - 4x + x^2 = 4$; $2x^2 - 4x = 0$; $2x(x - 2) = 0$;

$x = 0$ o $x = 2$.

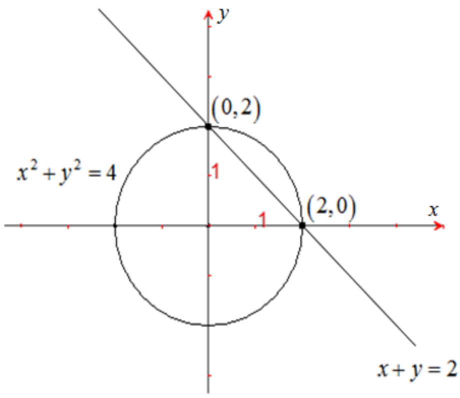


Figura 93. Representación gráfica de las curvas $x^2 + y^2 = 4$; $x + y = 2$

Al sustituir estos valores en (1), se tiene,

$x = 0, y = 2$; $x = 2, y = 0$.

Los puntos de intersección de las curvas, son: $P(0,2)$; $Q(2,0)$.

La Figura 93, contiene la representación gráfica de las curvas correspondientes.

b) $x^2 + y^2 = 1$ (1) corresponde a un círculo de radio $r = 1$ y centro $C(0,0)$.

$x^2 - 2y^2 = \frac{1}{4}$ (2) corresponde a una hipérbola, cuyos brazos se abren hacia derecha e izquierda del eje x. No tiene intersecciones con el eje y.

Puntos de intersección:

De la ecuación (1) se tiene,

$$y^2 = 1 - x^2. \qquad (3)$$

Se reemplaza en (2):

$$x^2 - 2(1 - x^2) = \frac{1}{4}; x^2 - 2 + 2x^2 = \frac{1}{4}; x^2 = \frac{3}{4}; \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Al sustituir x en (3), se tiene:

$$y = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \pm\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, los puntos de intersección de las dos curvas, son:

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \; ; \; B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \; ; \; C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \; ; \; D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

La Figura 94, contiene la representación gráfica de las curvas respectivas.

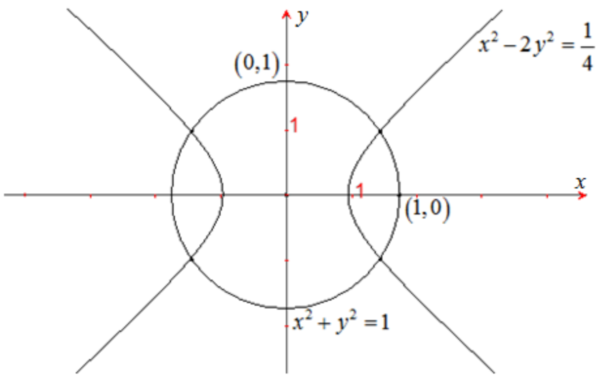


Figura 94. Representación gráfica de las curvas $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 - 2y^2 = \frac{1}{4}$

c) La ecuación $y^2 + 8x - 16 = 0$, corresponde a una parábola.

Obtención de la ecuación estándar:

$$(y - 0)^2 = -8(x - 2); (y - 0)^2 = 4(-2)[x - 2] \,.$$

Por lo tanto, la ecuación estándar es: $(y - 0)^2 = 4(-2)[x - 2]$.

De aquí se obtienen los siguientes datos:

- Vértice: $V(0,2)$.
- Cuando $x = 0$, $y^2 = 16$; $y = \pm 4$.

- La parábola se abre hacia la izquierda del eje x.

Por otra parte, la ecuación $y^2 - 24x - 48 = 0$, también representa una parábola.

Obtención de la ecuación estándar:

$$(y-0)^2 = 24x + 48; (y-0)^2 = 24(x+2); (y-0)^2 = 6(4)[x+2] .$$

Por lo tanto, la ecuación estándar es: $(y-0)^2 = 6(4)[x+2]$.

De aquí, se obtiene los siguientes datos:

- Vértice: $V(-2{,}0)$.
- Como $a = 4 > 0$, entonces, la parábola se abre hacia la derecha.
- Cuando $x = 0$; $y = \pm 4\sqrt{3} \cong \pm 6{,}9$.

▪ Puntos de intersección de las curvas:

$$y^2 + 8x - 16 = 0. \qquad (1)$$

$$y^2 - 24x - 48 = 0. \qquad (2)$$

De la ecuación (1), se obtiene:

$$y^2 + 8x - 16 = 0;$$

$$y^2 = -8x + 16. \qquad (3)$$

De la ecuación (2), se obtiene:

$$y^2 - 24x - 48 = 0;$$

$$y^2 = 24x + 48. \qquad (4)$$

Al igualar las ecuaciones (3) y (4), se obtiene:

$$-8x + 16 = 24x + 48; 32x = -32 ; \ x = -1 .$$

Al reemplazar el valor de x en (3) se obtiene lo siguiente:

$$y^2 = -8(-1) + 16; y^2 = 24; y = \pm\sqrt{24} ; y = \pm 2\sqrt{6}.$$

Por lo tanto, los puntos de intersección de las dos curvas son:

$$P\left(-1, 2\sqrt{6}\right) \ y \ \ Q\left(-1, -2\sqrt{6}\right).$$

La Figura 95, muestra las gráficas de las dos parábolas y sus puntos de intersección.

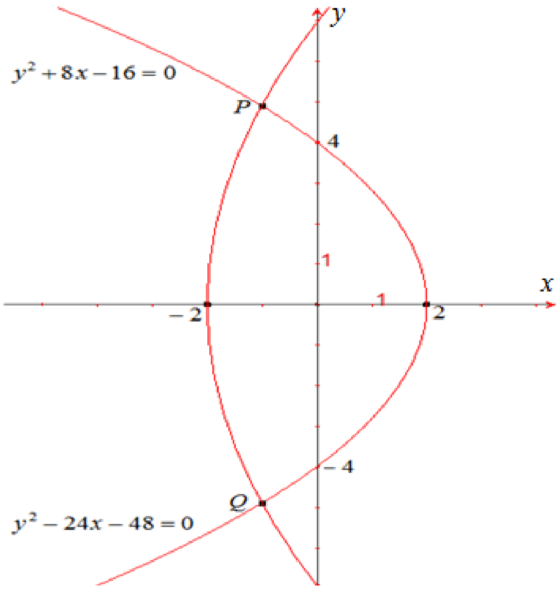


Figura 95. Representación gráfica de las curvas $y^2+8x-16=0$; $y^2-24x-48=0$

EJERCICIOS 2.2

1. Identificar la cónica correspondiente y trazar la gráfica con todo detalle:

$a)$ $y^2-4y+6x-8=0$

$b)$ $x^2-4x-2y+10=0$

$c)$ $11y^2-98y-108x+539=0$

$d)$ $x^2+y^2-26x+12y+105=0$

$e)$ $7x^2+7y^2-34x+48y+103=0$

$f)$ $36x^2+11y^2-144x-44y-208=0$

$g)$ $x^2+5y^2-2x+20y+16=0$

$h)$ $4x^2-y^2-4x+3y-26=0$

$i)$ $x^2-2y^2+x+8y-8=0$

2. Para cada caso que sigue, trazar las gráficas con sus puntos de intersección:

$a)$ $\begin{cases} y^2=x+1 \\ y=x-1 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} y-x^2=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

$d)$ $\begin{cases} 2x^2+y^2=1 \\ x-y^2=0 \end{cases}$

$e)$ $\begin{cases} y^2-2y-4x-3=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$

2.3 COORDENADAS POLARES

2.3.1 Sistema de coordenadas polares

El sistema de coordenadas polares, consta de un punto fijo O, denominado *Polo* y una semirrecta que se origina en O, llamada *Eje Polar*.

Para localizar un punto P en el plano, se dibuja el segmento $\overline{OP}$.

Sean r la longitud de $\overline{OP}$ y θ el ángulo generado desde el eje polar, medido en sentido antihorario. La Figura 96, muestra la ubicación del punto $P(r, \theta)$.

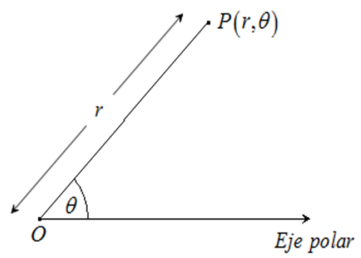


Figura 96. Representación gráfica del Plano Polar

Cualquier par ordenado en coordenadas polares, (r, θ), se puede describir por los siguientes pares ordenados:

$$(r, \theta \pm 2k\pi) \text{ ó } (-r, \theta \pm 2(k-1)\pi) \;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Al superponer un sistema de coordenadas polares sobre un sistema cartesiano, con el polo en el origen y el eje polar coincidente con la parte positiva del eje x, se pueden determinar las ecuaciones que relacionan a $P(r, \theta)$ con $P(x, y)$, así:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ tg\,\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

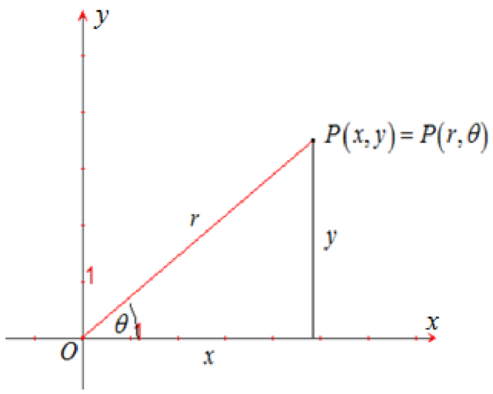


Figura 97. Representación gráfica de la relación de coordenadas cartesianas y polares

La Figura 97, muestra las relaciones indicadas entre las coordenadas cartesianas y las polares.

Ejemplo 1

Un punto P tiene coordenadas polares $P\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$. Determinadas las coordenadas cartesianas correspondientes y ubicar el punto con los dos tipos de coordenadas.

Solución:

Según las fórmulas de transformación de coordenadas:

$$x = rcos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow x = 4 * \frac{1}{2} = 2\,.$$

$$y = rsen\left(\frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow y = 4 * \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\,.$$

En consecuencia, las coordenadas rectangulares de $P\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ son $P(2{,}2\sqrt{3})$.

La Figura 98, muestra la ubicación del punto P en los sistemas de coordenadas cartesianas y polares.

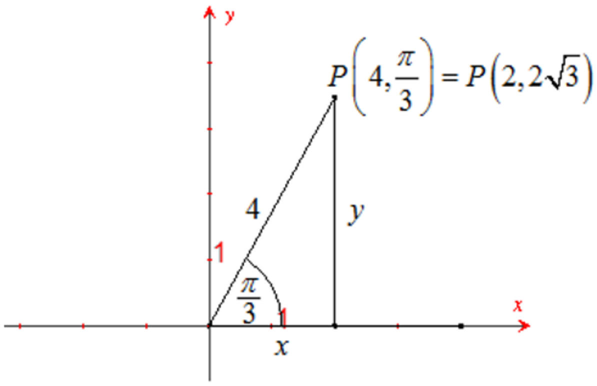


Figura 98. Representación de un punto en coordenadas cartesianas y polares

Ejemplo 2

Un punto P, tiene coordenadas rectangulares $P(4, -4)$; determinar las coordenadas polares de P.

Solución:

Dado que, $r^2 = x^2 + y^2$ $\;y\;$ $\theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, entonces,

$$r^2 = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{2 * 4^2} = 4\sqrt{2}\,.$$

$$\theta_1 = arctg\left(\frac{-4}{4}\right) = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}\,.$$

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4} \quad \text{ó} \quad \theta_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

Por lo tanto, el punto P, en coordenadas polares, se puede escribir como sigue:

$$P\left(4\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{ó} \quad P\left(4\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right) \quad \text{ó} \quad P\left(4\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

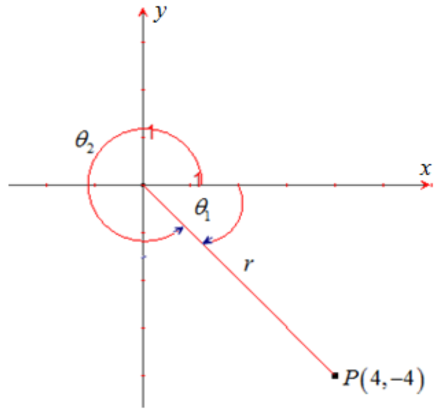


Figura 99. Representación de $P(4,-4)$ y su correspondiente punto polar $P\left(4\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}$

Ejemplo 3

La representación gráfica de la ecuación $3x^2 + 4y^2 = 12$, en coordenadas cartesianas, es una elipse, determinar la ecuación en coordenadas polares.

Solución:

Dado que, $x = r\cos\theta$; $y = r\,sen\,\theta$; al reemplazar x e y en la ecuación dada se tiene,

$$3(r\cos\theta)^2 + 4(r\,sen\,\theta)^2 = 12 \Longrightarrow r^2(3\cos^2\theta + 4sen^2\theta) = 12.$$

Por lo tanto,

$$r^2 = \frac{12}{3\cos^2\theta + 4sen^2\theta}$$

La Figura 100, muestra la representación gráfica de la elipse correspondiente.

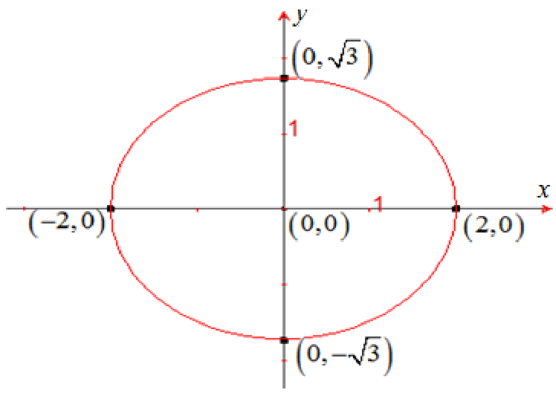


Figura 100. Representación gráfica de la elipse $3x^2 + 4y^2 = 12$

Ejemplo 4

La ecuación de una curva en coordenadas polares es $r = 2sen\,\theta$. Escribir la ecuación respectiva en coordenadas cartesianas y trazar la gráfica respectiva.

Solución:

Al multiplicar la ecuación dada por r, se obtiene: $r^2 = 2rsen\,\theta$.

Pero $x^2 + y^2 = r^2$, entonces $x^2 + y^2 = 2rsen\,\theta$.

Dado que $y = rsen\,\theta$, la ecuación anterior se puede escribir así: $x^2 + y^2 = 2y$.

Al completar cuadrados respecto a y, se obtiene,

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \Longrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1\,.$$

Esta ecuación corresponde a un círculo de radio $r = 1$ y centro $C(0,1)$.

La Figura 101, muestra la representación gráfica en coordenadas polares de $r^2 = 2rsen\,\theta$.

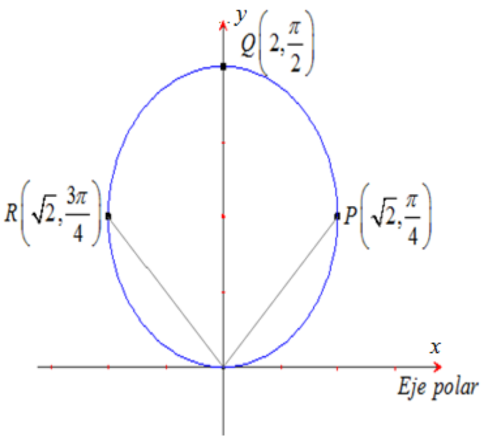


Figura 101. Representación gráfica de $r = 2sen\theta$

Nota: los puntos P, Q y R están definidas en coordenadas polares.

2.3.2 Coordenadas polares y puntos simétricos

Un punto $P(r,\theta)$ está relacionado e forma biunívoca con un punto $P(x,y)$ en el plano cartesiano.

Ahora bien, los puntos simétricos $P(r,\theta)$, respecto del eje polar, el eje $\theta = \frac{\pi}{2}$ y del polo, se ubican en correspondencia con fórmulas de reducción trigonométricas, tal como se ilustra en la Figura 102.

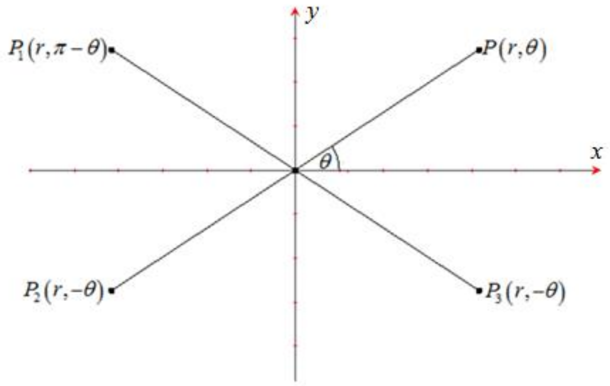


Figura 102. Representación gráfica de puntos simétricos en coordenadas polares.

Ejemplo

Trazar la gráfica de $r = 1 - 2sen\,\theta$.

Solución:

Para trazar la curva, se procede a determinar algunos puntos de la misma en el intervalo
$0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{r = 1 - 2sen\,\theta}$	$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{r = 1 - 2sen\,\theta}$
0	1	$\frac{7\pi}{6}$	2
$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{4\pi}{3}$	$1 + \sqrt{3}$
$\frac{\pi}{3}$	$1 - \sqrt{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	3
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{5\pi}{3}$	$1 + \sqrt{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	$1 - \sqrt{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2
$\frac{5\pi}{6}$	0	2π	1
π	1		

Al ubicar los puntos en el plano, se debe tener en cuenta la simetría de los puntos.

Observe que r toma valores finitos y θ valores infinitos, por lo cual, la curva es cerrada, tal como se muestra en la Figura 103.

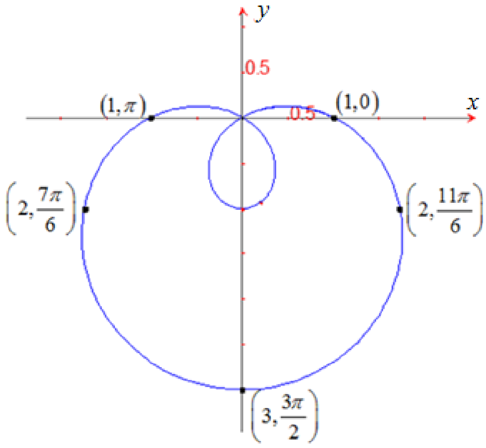


Figura 103. Representación gráfica de $r = 1 - 2sen\ \theta$

Ejemplo

Trazar la gráfica $r = \theta,\ \theta \geq 0$.

Solución:

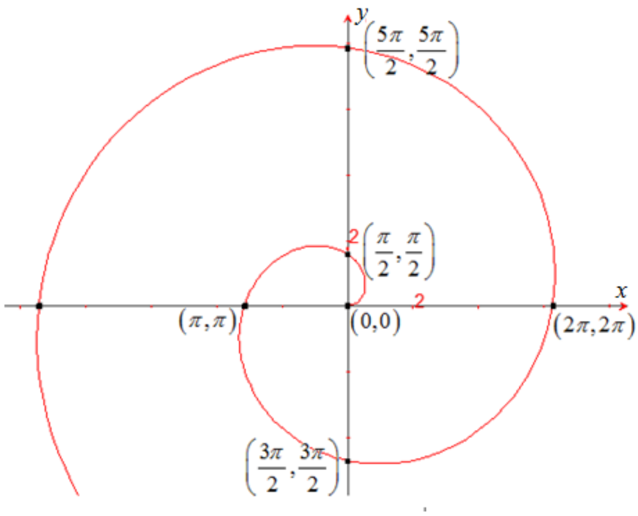


Figura 104. Representación gráfica de la ecuación $r = \theta,\ \theta \geq 0$

La gráfica tiene un comportamiento diferente a los tratados anteriormente. En este caso, en la medida que θ crece, r también crece; en este caso, la curva es abierta.

La curva $r = \theta,\ \theta \geq 0$ es abierta y su representación gráfica es una espiral, tal como se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**.

Ejemplo

Trazar la gráfica de la Lemniscata: $r^2 = \cos 2\theta$.

Solución:

Se puede establecer que $\cos\,2\theta$ no puede ser negativo. Por lo tanto, se consideran valores de θ para los cuales $\cos 2\theta$ es positivo. Al graficar $y = \cos 2\theta$, se puede ver que el periodo es $\frac{2\pi}{2} = \pi$, tal como se puede observar en la Figura 105. Además, los intervalos en donde $\cos 2\theta$ es positivo son:

$$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \;y\; \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

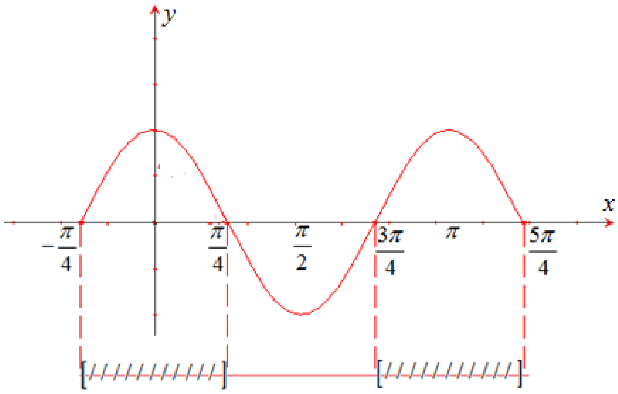


Figura 105. Representación gráfica de $r^2 = cos\,(2\theta)$

No hay gráfica en las regiones del plano para las cuales:

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \quad \text{y} \quad \frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}.$$

Ver área sombreada en la Figura 106.

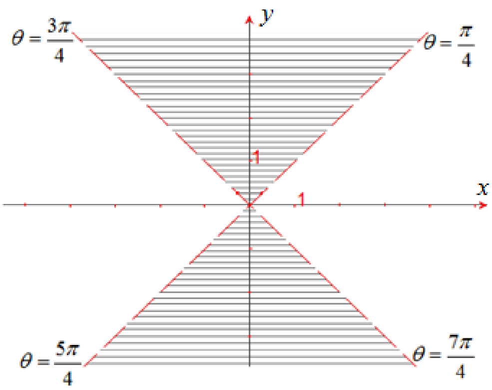


Figura 106. Representación gráfica de región sin puntos que cumplan $r^2 = cos\,2\theta$.

Para trazar la gráfica, se toma valores de θ, iniciando en $-\frac{\pi}{4}$ hasta $\frac{5\pi}{4}$, en múltiplos de $\frac{\pi}{8}$. La representación gráfica, corresponde a la Figura 107.

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{r = \pm\sqrt{\cos\,(2\theta)}}$	$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{r = \pm\sqrt{\cos\,(2\theta)}}$
$-\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{7\pi}{8}$	0

$-\dfrac{\pi}{8}$	$\pm 0{,}84$	π	$\pm 0{,}84$
$\dfrac{\pi}{8}$	± 1	$\dfrac{9\pi}{8}$	± 1
$\dfrac{\pi}{4}$	$\pm 0{,}84$	$\dfrac{5\pi}{4}$	0
$\dfrac{3\pi}{4}$	0		

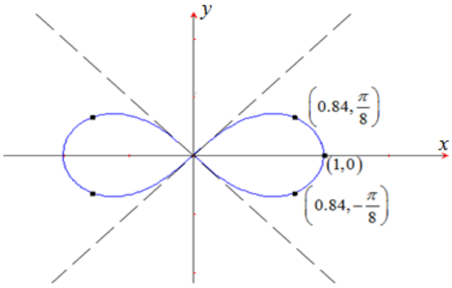


Figura 107. Representación gráfica de $r^2 = cos\ (2\theta)$

EJERCICIOS 2.3

1. Determinar las coordenadas rectangulares para los puntos (r, θ) y realizar la gráfica:

$$A\left(4, \frac{\pi}{3}\right)\ ;\ B\left(2, \frac{7\pi}{4}\right)\ ;\ C\left(-2, \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Determinar las coordenadas polares, con $r > 0,\ \ 0 \leq \theta < 2\pi$ para cada uno de los puntos definidos en coordenadas cartesianas:

$$A\left(-\sqrt{3}, 2\right);\ B(-4, -4);\ C\left(2, -2\sqrt{3}\right).$$

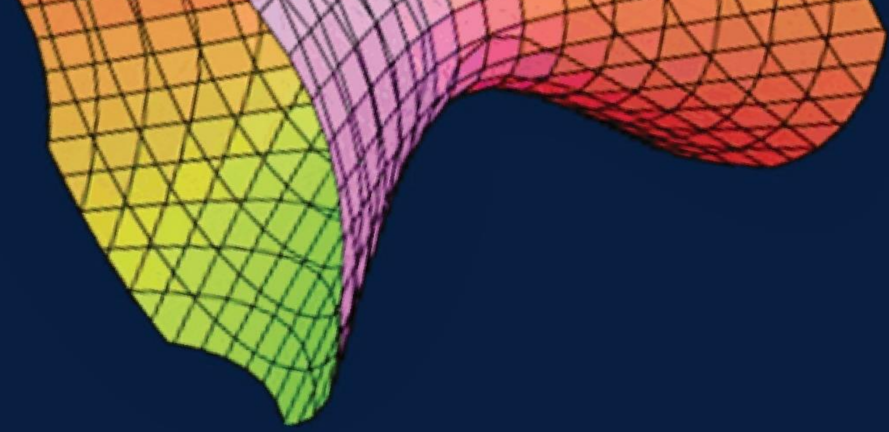
3. Establecer las ecuaciones rectangulares para las siguientes ecuaciones dadas en coordenadas polares:

$$r^2 = 4\cos(2\theta);\ r = \frac{1}{2 + 3\cos\ \theta}\ ;\ r = a\cos\theta + b sen\,\theta.$$

4. Establecer las ecuaciones en coordenadas polares de las siguientes ecuaciones cartesianas: $x^2 + y^2 = 4x$; $y^2 - 4x = 0$; $x = 2$.

5. Trazar las gráficas de las siguientes funciones definidas en coordenadas polares:

$$r + 1 = sen\ \theta;\ \ r = 4\cos(3\theta)\ ;\ r = 1 + 2\cos\ \theta.$$



CAPÍTULO 3.
LÍMITES Y CONTINUIDAD

CAPÍTULO 3

LÍMITES Y CONTINUIDAD

3.1 VECINDAD DE UN PUNTO

Una Vecindad o Entorno de un Punto, intuitivamente, es un intervalo de números reales, en el que se ha determinado su centro y su radio. Considere el punto $a \in \mathbb{R}$, a centro de la vecindad y $r \geq 0$, el radio de la misma. Entonces el externo derecho del entorno o vecindad es $a + r$ y el extremo izquierdo $a - r$ (ver Figura 108).

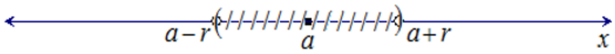


Figura 108. Representación gráfica del intervalo abierto $(a - r, a + r)$

En consecuencia, la vecindad de centro a y radio r es el conjunto de números reales, localizadas entre $a + r$ y $a - r$, lo cual se denota y define por:

$$V_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a - r < x < a + r\}\,.$$

Observe, que los extremos de la vecindad no hacen parte de ella, por tanto, se trata de una vecindad abierta.

Al restar a en cada término de la desigualdad $a - r < x < a + r$, se obtiene,

$$a - r - a < x - a < a + r - a; -r < x - a < r; |x - a| < r\,.$$

Por lo tanto, la definición de vecindad de centro en a y radio r, se puede escribir como sigue:

$$V_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x - a| < r\}\,.$$

Recuerde, que el concepto de valor absoluto, está ligado a la *Definición de Distancia* entre puntos. En tal sentido, $V_r(a)$ es el conjunto formado por todos los números reales que distan de a menos de r.

Ejemplo 1

Determinar el radio r y el centro a de los siguientes intervalos: 1) $(4{,}7)$; 2) $\left(0, \frac{3}{4}\right)$; 3) $(-5{,}6; -1{,}4)$.

Solución:

1. Centro y radio de la vecindad:

$$a = \frac{7 + 4}{2} = \frac{11}{2}\ ;\ r = \frac{7 - 4}{2} = \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto,

$$(4,7) = V_{\frac{3}{2}}\left(\frac{11}{2}\right) = \left\{x \in \ \mathbb{R}/\left|x - \frac{11}{2}\right| < \frac{3}{2}\right\}.$$

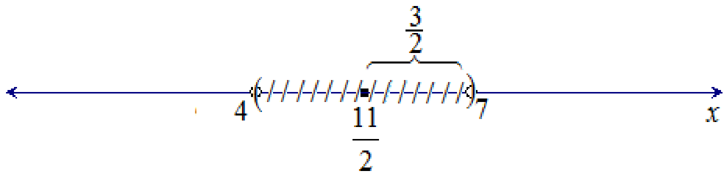


Figura 109. Representación gráfica de la vecindad $V_{\frac{3}{2}}\left(\frac{11}{2}\right)$

2. Centro y radio:

$$a = \frac{0 + \frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}\ ;\ r = \frac{\frac{3}{4} - 0}{2} = \frac{3}{8}.$$

Por tanto,

$$\left(0, \frac{3}{4}\right) = V_{\frac{3}{8}}\left(\frac{3}{8}\right) = \left\{x \in \ \mathbb{R}\ /\ \left|x - \frac{3}{8}\right| < \frac{3}{8}\right\}.$$

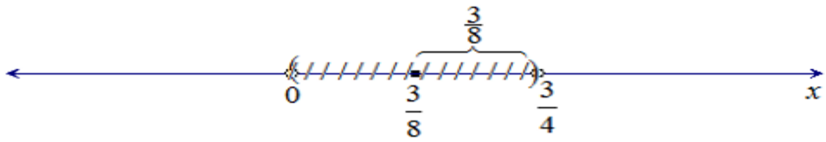


Figura 110. Representación gráfica de la vecindad $V_{\frac{3}{8}}\left(\frac{3}{8}\right)$

3. Centro y radio:

$$a = \frac{-1{,}4 + (-5{,}6)}{2} = -3{,}5\ ; r = \frac{-1{,}4 - (-5{,}6)}{2} = 2{,}1$$

Luego: $(-5{,}6; -1{,}4) = V_{2,1}(-3{,}5) = \{x \in \ \mathbb{R}\ /\ |x - (-3{,}5)| < 2{,}1\}$

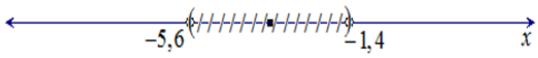


Figura 111. Representación gráfica de la vecindad $V_{2,1}(-3{,}5)$

En general, el intervalo abierto (m, n), con $m < n$ es equivalente a una vecindad:

$$V_{\frac{m+n}{2}}\left(\frac{m+n}{2}\right).$$

Ejemplo 2

Decidir si los puntos que se indican en seguida, pertenecen a la vecindad abierta $V_{\frac{1}{2}}(1)$:

$$\frac{e}{4}\ ;\ \frac{\pi^2}{25}\ ;\ \frac{155}{99}\ ;\ \frac{49}{99}\ ;\ \frac{\sqrt{\pi-e}}{2}\ .$$

Solución:

$V_{\frac{1}{2}}(1)$ es una vecindad de centro en $x = 1$ y radio $r = \frac{1}{2}$:

$$V_{\frac{1}{2}}(1) = \left\{x \in\ \mathbb{R}\ /\ |x-1| < \frac{1}{2}\right\}.$$

- $\frac{e}{4} \approx 0{,}679 \Longrightarrow \left|\frac{e}{4} - 1\right| < \frac{1}{2}\ \Longrightarrow \frac{e}{4} \in V_{\frac{1}{2}}(1).$
- $\frac{\pi^2}{25} \approx 0{,}395 \Longrightarrow\ \frac{\pi^2}{25} \notin V_{\frac{1}{2}}(1)\ .$
- $\frac{155}{99} \approx 1{,}56 \Longrightarrow\ \frac{155}{99} \notin V_{\frac{1}{2}}(1)\ .$
- $\frac{49}{99} \approx 0{,}495 \Longrightarrow\ \frac{49}{99} \notin\ V_{\frac{1}{2}}(1)\ .$
- $\frac{\sqrt{\pi-e}}{2} \approx 0{,}325 \Longrightarrow\ \frac{\sqrt{\pi-e}}{2} \notin\ V_{\frac{1}{2}}(1)\ .$

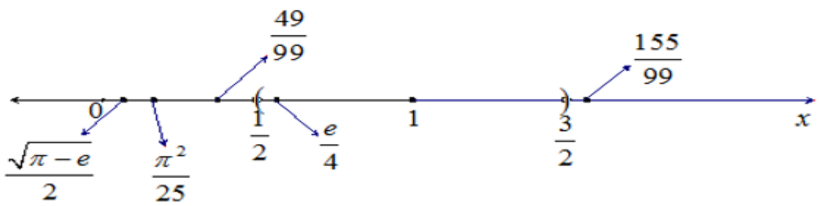


Figura 112. Identificación de puntos que pertenecen a la vecindad $V_{\frac{1}{2}}(1)$

3.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE

Dado que el concepto de límite de una función, es la idea central del cálculo, antes de establecer su definición formal, es conveniente plantear y resolver algunos ejemplos, que facilitan la compresión del mismo.

Ejemplo

Sean $f_1(x) = x^2 + 1\ ;\ \ f_2(x) = \begin{cases} -x + 2\ \ si\ x < 1 \\ \quad 1\ \ si\ x = 1 \\ x - 1\ \ si\ x > 1 \end{cases}$

Calcular los valores de $f_1(x)$ en las proximidades de $x = 0$ y los valores de $f_2(x)$ en las proximidades de $x = 1$.

Solución:

- $f_1(x) = x^2 + 1.$

Para el efecto, se realiza acercamiento al punto $x = 0$ por la derecha y por la izquierda de $x = 0$ y se analiza el comportamiento de $f_1(x)$ (ver Figura 113).

Aproximaciones por la derecha de $x = 0$		**Aproximaciones por la izquierda de $x = 0$**	
x	$f_1(x)$	x	$f_1(x)$
0,5	1,25	−0,5	1,25
0,4	1,16	−0,4	1,16
0,2	1,04	−0,2	1,04
0,1	1,01	−0,1	1,01
0,05	1,0025	−0,05	1,0025
0,01	1,0001	−0,01	1,0001

Observe que, en la medida en que x se aproxima a cero (sin nunca ser igual a cero), el valor de la función se aproxima a 1, tanto por la derecha como por la izquierda; además, $f(0) = 1$.

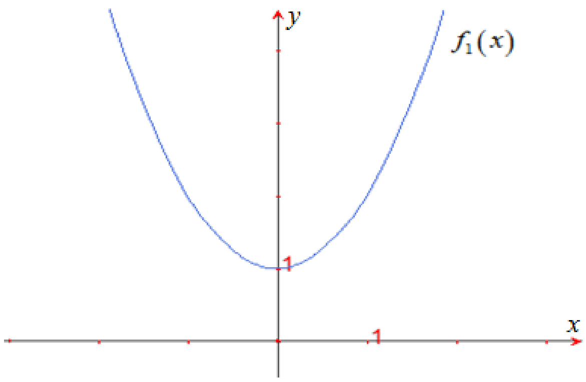


Figura 113. Representación gráfica de $f_1(x) = x^2 + 1$

- $f_2(x) = \begin{cases} -x + 2 \ \ si \ x < 1 \\ 1 \ \ si \ x = 1 \\ x - 1 \ \ si \ x > 1 \end{cases}$

Se procede a analizar acercamientos por la derecha y por la izquierda de $x = 1$.

Cuando los valores de x se aproximan a 1 por la derecha, la función $f_2(x)$ se aproxima a 1; cuando los valores de x se aproximan a 1 por la izquierda, los valores funcionales de $f_2(x)$ tienden a 2. Sin embargo $f(1) = 1$.

Aproximaciones por la derecha de $x = 1$		**Aproximaciones por la izquierda de $x = 1$**	
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f_2(x)}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f_2(x)}$

Aproximaciones por la derecha de $x = 1$		Aproximaciones por la izquierda de $x = 1$	
1,5	0,5	0,95	2,05
1,4	0,4	098	2,02
1,2	0,2	0,99	2,01
1,1	0,1	0,995	2,005
1,05	0,05	0,998	2,002
1,01	0,04	0,099	2,001
1,005	0,05		
1,001	0,001		

La representación gráfica correspondiente, se presenta en la Figura 114.

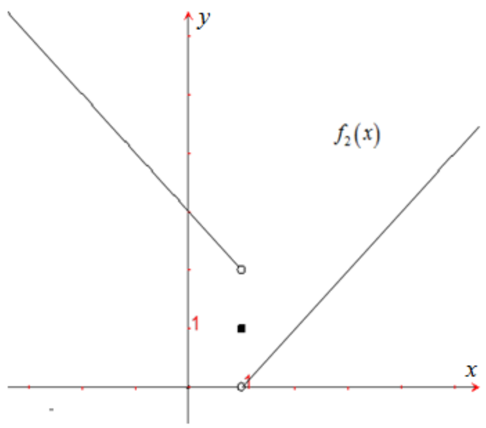


Figura 114. Representación gráfica de $f_2(x) = \begin{cases} -x+2 \;\; si\; x < 1 \\ 1 \;\; si\; x = 1 \\ x-1 \;\; si\; x > 1 \end{cases}$

3.2.1 Definición de límite de una función

El límite de una función $f(x)$ es L, en un punto cualquiera a, significa que al tomar puntos suficientemente cercanos a a, el valor de la función f, puede ser tan cercano a L, como se desee, siendo $x \neq a$.

En el ejemplo anterior, para la función $f_1(x) = x^2 + 1$, se puede observar que, cuando la variable x se aproxima a cero, tanto por la izquierda como por la derecha, la función $f_1(x)$ se aproxima a 1.

En este caso, claramente se puede establecer que $\lim\limits_{x \to 0}(x^2 + 1) = 1$ y se lee: el limite de la función $f_1(x) = x^2 + 1$, cuando x se aproxima (tiende) a cero es igual a 1.

En cambio, para la función $f_2(x) = \begin{cases} -x+2 & si\ x<1 \\ 1 & si\ x=1 \\ x-1 & si\ x>1 \end{cases}$ no ocurre lo mismo; pues, en la medida que x se aproxima a 1 por la derecha, la función se aproxima a cero; pero cuando x se aproxima a 1 por la izquierda, $f_2(x)$ se aproxima (tiende) a 2. Dado que se obtienen valores diferentes de $f_2(x)$ por derecha e izquierda de $x=1$, se dice que $\lim_{x\to 1} f_2(x)$ no existe.

Al retomar el concepto inicial de este parágrafo, se puede definir formalmente el límite de la función $f(x)$, cuando $x \to a$, de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0, \exists\ \delta_{(\varepsilon)} > 0, tal\ que\ 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Esta definición, de manera equivalente, se puede escribir, así:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0, \exists\delta\varepsilon > 0, tal\ que\ \ |f(x) - L| < \varepsilon\ \ siempre\ que$$
$$0 < |x-a| < \delta.$$

En la Figura 115, se indica la representación gráfica de la definición de límite de una función.

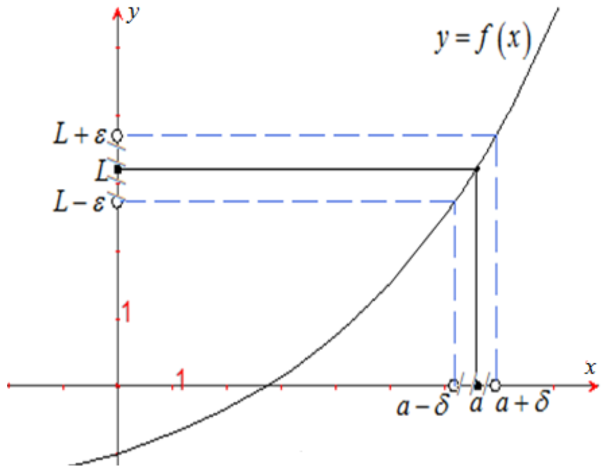


Figura 115. Representación gráfica del límite de una función

Ejemplo 1

Mediante la definición de límite, mostrar que $\lim_{x\to 3}(4x - 10) = 2$.

Solución:

Según la definición, la relación $|f(x) - L| < \varepsilon$ es equivalente a:

$$|(4x-10) - 2| < \varepsilon\ ; |4x - 10 - 2| < \varepsilon; |4(x-3)| < \varepsilon; 4|x-3| < \varepsilon;$$
$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por lo tanto, al tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, se tiene que:

$|f(x) - L| = |(4x - 10) - 2| < \varepsilon$, se requiere que $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Luego, al tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0, tal\ que\ |(4x - 10) - 2| < \varepsilon.$$

Siempre que $|x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{4}$, lo cual significa que $\lim_{x \to 3}(4x - 10) = 2$.

Para comprobar lo anterior, tomar, por ejemplo $\varepsilon = 0{,}1 \implies \delta = \frac{0{,}1}{4} = 0{,}025$ y la vecindad $V_{0{,}025}(3)$ sobre el eje "x" es el intervalo de la gráfica que sigue:

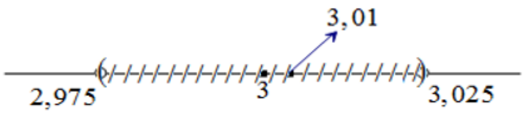


Figura 116. Representación gráfica de la vecindad $V_{0{,}025}(3)$

La vecindad, con centro en 2 y radio 0,1 sobre el eje "y", denotada como $V_{0{,}1}(2)$ es el intervalo que se muestra en la Figura 117.

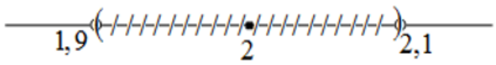


Figura 117. Representación gráfica de la vecindad $V_{0{,}1}(2)$

Ahora el punto $3{,}01 \in V_{0{,}025}(3)$. Entonces este punto debe tener una imagen en $V_{0{,}1}(2)$. En efecto:

$$f(3{,}01) = 4(3{,}01) - 10 = 2{,}04 \in V_{0{,}1}(2).$$

Ejemplo 2

Mediante la definición de límite, demostrar que $\lim_{x \to 4} \sqrt{x + 5} = 3$.

Solución:

A partir de la relación $|\sqrt{x + 5} - 3|$ se tiene:

$$\left|\sqrt{x + 5} - 3\right| = \left|\frac{(\sqrt{x + 5} - 3)(\sqrt{x + 5} + 3)}{\sqrt{x + 5} + 3}\right| = \left|\frac{x - 4}{\sqrt{x + 5} + 3}\right| = \frac{|x - 4|}{\sqrt{x + 5} + 3}.$$

Se necesita demostrar que $\left|\sqrt{x + 5} - 3\right|$ es pequeño, cuando x esta cerca de 4; entonces se puede escribir lo siguiente:

$$|x - 4| < 4\,; -4 < x - 4 < 4\,;\ 0 < x < 8.$$

$$5 < x + 5 < 13;\ \sqrt{5} < \sqrt{x + 5} < \sqrt{13}\,; \sqrt{5} + 3 < \sqrt{x + 5} + 3 < \sqrt{13} + 3\,.$$

En consecuencia:

$$\frac{|x-4|}{\sqrt{x+5}+3} < \frac{|x-4|}{\sqrt{5}+3}.$$

Por tanto,

$$\left|\sqrt{x+5}-3\right| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x+5}+3} < \frac{|x-4|}{\sqrt{5}+3} < \varepsilon \quad \Rightarrow |x-4| < \varepsilon\sqrt{5}+3 = \delta\,.$$

De manera que:

> $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_\varepsilon > 0$, tal que $\left|\sqrt{x+5}-3\right| < \varepsilon$, siempre que $|x-4| < \delta$, con $\delta = \min\{4, \varepsilon\sqrt{5}+3\}$.

Sea por ejemplo $\varepsilon = 0{,}15$; $\delta = \min\{4, (0{,}15)\sqrt{5}+3\}$; $\delta = \min\{4{,}0785\}$

La vecindad de centro en 4 y radio 0,785 es $V_{0{,}785}(4) = (3{,}215; 4{,}785)$ en el eje x.

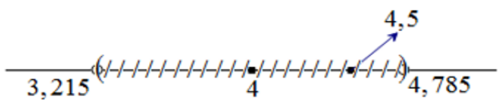


Figura 118. Representación gráfica de la vecindad $V_{0{,}785}(4)$

La vecindad de centro 3 y radio 0,15 es $V_{0{,}15}(3) = (2{,}85; 3{,}15)$ en el eje y.

Por ejemplo, el punto 4,5 $\in$ $V_{0{,}785}(4)$ debe tener imagen en la vecindad $V_{0{,}15}(3)$ (ver Figura 119).

En efecto, $f(4{,}5) = \sqrt{4{,}5+5} = 3{,}082 \in V_{0{,}15}(3)$.

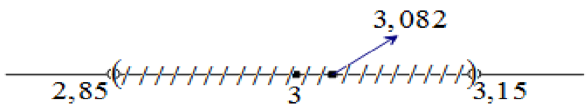


Figura 119. Representación gráfica de la vecindad $V_{0{,}15}(3)$

3.2.2 Límites laterales

Antes de definir formalmente estos conceptos, analícese el siguiente ejemplo:

> Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x \leq 1 \\ 2x & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$

Calcular $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

En la Figura 120, se observa que cuando $x \to 1$ por la derecha, denotado por $x \to 1^+$, la función $f(x)$ se aproxima a 2 y cuando $x \to 1$ por la izquierda, denotado por $x \to 1^-$, el valor de $f(x)$ se aproxima a 0.

En este caso, se dice entonces, que los limites laterales existen y valen 2 y 0. Dado que, limites laterales son diferentes, $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe. La Figura 120, contiene la representación gráfica de la función dada.

De lo anterior, se puede definir:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta_{(\varepsilon)} > 0, tal\ que\ 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0, tal\ que\ 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

De estas dos definiciones, se puede concluir que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

En otras palabras, el límite de $f(x)$, cuando $x \to a$ existe siempre y cuando los limites laterales sea iguales.

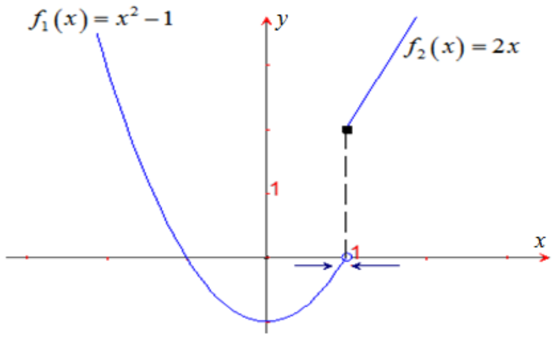


Figura 120. Representación gráfica de $f_1(x) = x^2 - 1$; $f_2(x) = 2x$

3.2.3 Álgebra de límites

Sean $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales.

Sean los siguientes límites:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1; \ \lim_{x \to a} g(x) = L_2; \ \lim_{x \to a} C = C \ \text{(C es constante).}$$

1. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, éste es único.
2. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$.
3. $\lim_{x \to a} [f(x) * g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x) = L_1 * L_2$.
4. $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$; $L_2 \neq 0$.
5. $\lim_{x \to a} [\alpha\, f(x)] = \alpha \lim_{x \to a} f(x) = \alpha L_1$; α constante.

6. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n;\ \ n \in \mathbb{Z}$.

7. Si $f(x) \le h(x) \le g(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L$, entonces $\lim_{x\to a} h(x) = L$.

3.2.4 Cálculo de límites

Para calcular los límites de la forma $\lim_{x\to a} f(x)$, se debe analizar si la función f está definida en $x = a$.

1. <u>$f(a)$ está definida.</u>

   Si $x = a$, está en el dominio de $f(x)$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

2. <u>$f(a)$ no está definido:</u>

   Si $f(x)$ es el cociente de las funciones $\frac{g(x)}{h(x)}$, con $\lim_{x\to a} h(x) = 0$, entonces el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ depende de $\lim_{x\to a} g(x)$.

   Si $\lim_{x\to a} h(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, entonces, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)}$, no existe.

   Observe que, NO es aplicable la propiedad del cociente de límites, puesto que el límite del denominador es cero.

3. <u>$f(x)$ es una función definida por trozos.</u>

   Para hallar $\lim_{x\to a} f(x)$, se debe calcular los límites laterales, esto es:

   $$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1\ y\ \lim_{x\to a^-} f(x) = L_2.$$

   Si los limites laterales son iguales, entonces, se concluye que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y vale $L_1 = L_2$; por el contrario, si $L_1 \neq L_2$ entonces NO existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

Ejemplo

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x+7}{3x^2-8x+7}$ b) $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{x^2+5}}{x-3}$ c) $\lim_{x\to 1} \frac{5x^3+7x^2+8x+10}{x^2+1}$

d) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2+5x+6}{x^2-9}$ e) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$ f) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

g) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$ h) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x+1}}$

Solución:

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+7}{3x^2-8x+7}=\frac{(1)^2+2(1)+7}{3(1)^2-8(1)+7}=\frac{10}{2}=5.$$

b) $$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+5}}{x-3}=\frac{\sqrt{(-2)^2+5}}{-2-3}=\frac{\sqrt{4+5}}{-5}=-\frac{3}{5}.$$

c) $$\lim_{x\to 1}\frac{5x^3+7x^2+8x+10}{x^2-1}=\frac{5(1)^3+7(1)^2+8(1)+10}{1^2-1}=\frac{10}{0}=\infty \text{ (No existe).}$$

d) $$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}=\frac{(-3)^2+5(-3)+6}{(-3)^2-9}$$
$$=\frac{0}{0} \text{ (No existe; es una indeterminación).}$$

En este caso, por medios algebraicos, se busca~~r~~ eliminar la indeterminación, así

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{x+2}{x-3}=\frac{-3+2}{-3-3}=\frac{-1}{-6}=\frac{1}{6}.$$

Aquí es posible cancelar el factor $(x+3)$ en el numerador y en el denominador puesto que $x\to -3$ (x tiende a -3) y no se debe asumir que $x=3$.

Por tanto:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to -3}\frac{x+2}{x-3}=\frac{-3+2}{-3-3}=\frac{-1}{-6}=\frac{1}{6}.$$

e) $$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}=\frac{0}{0} \text{ es una indeterminación.}$$

Sin embargo, al factorizar y cancelar términos comunes diferentes de cero, se tiene:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x+2)}=\frac{-6}{-1}=6.$$

f) $$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0} \text{ es una indeterminación.}$$

Se busca eliminar la indeterminación al multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador, así:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{x-1}=1+1=2.$$

g) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$ es una indeterminación.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

h) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x+1}}=\frac{0}{0}$ es una indeterminación.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x+1}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^{\frac{3}{3}}(x-1)}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)}{(x+1)^{\frac{1}{3}}};$$

$$\lim_{x\to 1}(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)=0(-2)=0.$$

3.2.5 Límites especiales

1) Probar que:

Si $f(x)=\frac{sen\,x}{x}$ entonces $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$, x en radianes.

Efectivamente, considérese la circunferencia unitaria de la Figura 121:

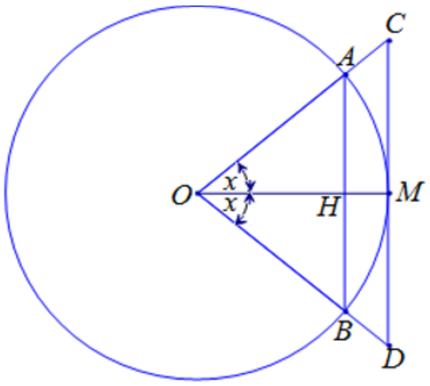


Figura 121. Representación gráfica para análisis de $f(x)=\frac{sen\,x}{x}$

$$Área\ \Delta AOB < Área \Delta OCD;$$

$$\frac{1}{2}\overline{AB}*\overline{OH}<\frac{1}{2}2|x|<\frac{1}{2}\overline{CD}*\overline{OM};$$

$$|sen\,x|*|\cos\,x|<|x|<|tg\,x|.$$

Si $x>0$ (pero cercano a cero):

$$sen\,x\ \cos x<x<tg\,x;$$

$$sen\,x\ \cos\,x<x<\frac{sen\,x}{\cos x}.$$

Al dividir por $sen\,x\neq 0$, se tiene,

$$\cos x < \frac{x}{sen\, x} < \frac{1}{\cos\ x} \Longrightarrow \cos(x) < \frac{sen\, x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Si $x < 0$, entonces:

$$-sen\, x \cos x < -x < -tg\ x; sen\, x \cos x > x > tg\ x; \cos x < \frac{sen\, x}{x}$$
$$< \frac{1}{\cos x}.$$

Cuando $x \to 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \cos\ x = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos\ x} = 1$.

Entonces, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$.

2) Si $f(x) = \frac{1-\cos\ x}{x}$, probar que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos\ x}{x} = 0$. En efecto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\ x}{x} = \frac{0}{0} \text{ es una indeterminación.}$$

Al multiplicar numerador y denominador por $1 + \cos x$, se tiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos^2 x)}{x(1 + \cos x)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{sen^2 x}{x(1 + \cos x)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{sen^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(\frac{sen\ x}{x}\right)^2 \frac{x}{1 + \cos x}\right]$$
$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(\frac{sen\ x}{x}\right)^2\right] * \lim_{x \to 0} \left[\frac{x}{1 + \cos x}\right]$$
$$= (1^2)\left(\frac{0}{1 + 1}\right) = 1(0) = 0\,.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\ x}{x} = 0\,.$$

3.2.6 Límites en el infinito

Considere la función $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$.

Elaborar una tabla de valores en la que x crece sin límite a través de valores positivos y negativos y trazar la curva respectiva.

x	$f(x)$
0	0
1	1,5
2	2,4
3	2,7
4	2,82
12	2,98
30	2,996
100	2,999

x	$f(x)$
0	0
-1	1,5
-2	2,4
-3	2,7
-4	2,82
-12	2,98
-30	2,996
-100	2,999

En la Figura 122, se observa que en la medida en que x crece indefinidamente a través de valores positivos, la función se aproxima a 3. Lo mismo ocurre cuando x decrece a través de valores negativos.

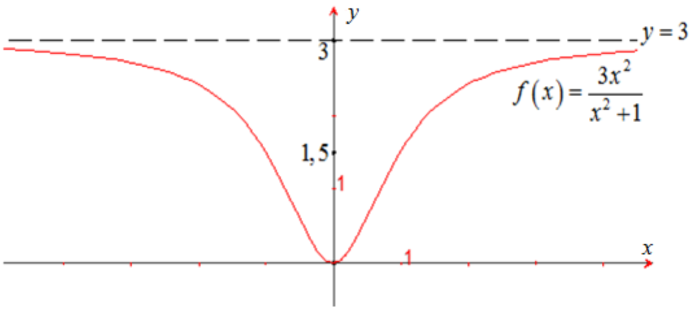


Figura 122. Representación gráfica de la función $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$

Cuando se escribe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, se trata de establecer el comportamiento de la función, cuando la variable crece indefinidamente a través de valores positivos y negativos, como en el ejemplo presente.

Por tanto, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = 3$.

Formalmente, se define como sigue:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\, N_{(\varepsilon)} > 0, tal\ que\ \ |f(x) - L| < \varepsilon \text{, siempre que } |x| > N_{(\varepsilon)}.$$

Al considerar el límite de una función en el infinito, se deben tener en cuentas las siguientes reglas, que facilitan el cálculo de este tipo de límites:

1. $\infty + \infty = \infty$. Al sumar un número muy grande con otro, igualmente grande, el resultado es otro muy grande.
2. $\infty - \infty$ Indeterminado, pues no se conoce el tamaño de cada infinito.
3. $\infty \pm k = \infty$, k es cualquier número real.

4. $-\infty \pm k = -\infty$, k es cualquier número real.

5. $k\infty = \infty$; $-k\infty = -\infty$; k es cualquier número real.

6. $\frac{k}{\infty} = 0$; k es cualquier número real.

7. $\frac{k}{0} = \infty$; k es cualquier número real.

8. $\frac{\infty}{\infty}$; indeterminado.

9. $\infty * 0$; indeterminado.

10. 1^{∞} ; indeterminado.

Por otra parte:

$$\text{Si } r > 0\,, r \in \mathbb{Z} \text{ entonces, } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \ \text{ y } \ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0.$$

Finalmente, se hace énfasis, en que el ∞ no es estrictamente un número real.

Ejemplo

Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \operatorname*{Lim}_{x\to\infty} \frac{7x+3}{x-10}\ ;\ \ b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+8}{8x^3-5}\ ;\ \ c)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{8x^2-5x+1}}{2x+1}.$$

Solución:

$$a)\ \operatorname*{Lim}_{x\to\infty} \frac{7x+3}{x-10} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (Indeterminado).}$$

Cuando se trata de expresiones racionales de este tipo, para eliminar la indeterminación, se divide numerador y denominador por la mayor potencia de la variable. En este caso es la variable x; por tanto:

$$\operatorname*{Lim}_{x\to\infty} \frac{7x+3}{x-10} = \operatorname*{Lim}_{x\to\infty} \frac{\frac{7x+3}{x}}{\frac{x-10}{x}} = \operatorname*{Lim}_{x\to\infty} \frac{7+\frac{3}{x}}{1-\frac{10}{x}} = \frac{7+0}{1-0} = 7.$$

$$b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+8}{8x^3-5} = \frac{\infty}{-\infty} \text{ (Indeterminado).}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+8}{8x^3-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-x+8}{x^3}}{\frac{8x^3-5}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{-x}-\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x^3}}{8-\frac{5}{x^3}} = \frac{0-0+0}{8-0} = \frac{0}{8} = 0.$$

$$c)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{8x^2-5x+1}}{2x+1} \text{ (Indeterminado)}$$

En esta fracción, también se aplica el criterio de dividir numerador y denominador por la mayor potencia de x.

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{8x^2-5x+1}}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{8x^2-5x+1}}{x}}{\frac{2x+1}{x}}
$$

$$
=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{8x^2-5x+1}{x^2}}}{\frac{2x+1}{x}}
$$

$$
=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}
$$

$$
=\frac{\sqrt{8-0+0}}{2+0}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}\,.
$$

3.2.7 Límites infinitos

Considerar la siguiente función: $f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}$.

Se analiza los valores de $f(x)$ de valores cercanos a $x=1$, por la derecha y por la izquierda.

En la medida en que x se aproxima a 1 por derecha e izquierda, los valores de $f(x)$ crecen y son cada vez más grandes; esto es, $f(x)$ crece sin límites para valores cercanos a 1, tanto mayores como menores que 1.

Aproximaciones por la derecha de $x=1$	
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
1,5	8
1,2	50
1,1	200
1,05	800
1,01	20000
1,005	80000
1,001	2000000

Aproximaciones por la izquierda de $x=1$	
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
0,5	8
0,8	50
0,9	200
0,95	800
0,99	20000
0,995	80000
0,999	2000000

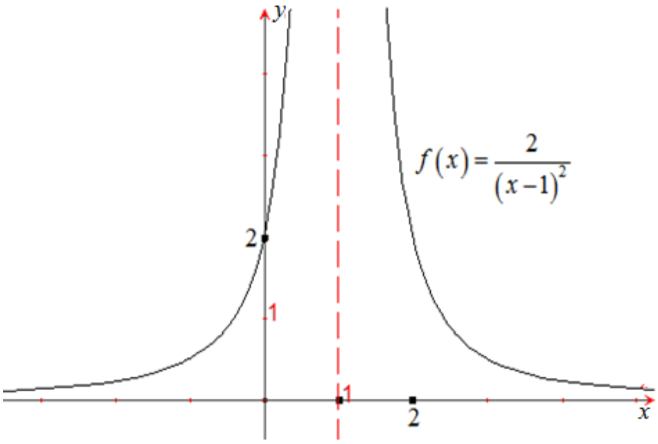


Figura 123. Representación gráfica de la función $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$

De manera que,

$$\lim_{x\to 1} \frac{2}{(x-1)^2} = \infty.$$

Finalmente:

$a)$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, no tiene cota superior, se define así:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, M > 0,\ \ \exists\delta > 0 \text{ tal que } f(x) > M, \text{ siempre que,}$$

$$0 < |x - a| < \delta \text{ (por grande que sea } M\text{)}.$$

$b)$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, no tiene cota inferior, se define como:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, M < 0,\ \exists\delta > 0 \text{ tal que } f(x) < M\,,\ \text{siempre que}$$

$$0 < |x - a| < \delta \text{ (por grande que sea } M\text{)}.$$

$c)$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, se dice que $f(x)$ toma valores infinitamente grandes cuando $x \to a$.

Para finalizar este parágrafo, se debe tener en cuenta el siguiente enunciado:

Si r es cualquier entero positivo, entonces:

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^r} = \infty\,;\ \ 2)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty\,;\ \ 3)\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty \ si\ r\ es\ impar \\ +\infty\ si\ r\ es\ par \end{cases}$$

Ejemplo

Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 + 2x - 3}\ ;\ \ b)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+1}\right)\ ;\ c)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2 - 2x}{3x + 9}\right).$$

Solución:

$a)\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5x+1}{x^2+2x-3} = \dfrac{\infty}{\infty}$ (indeterminación).

Al dividir por la mayor potencia de x se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x+1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} = \frac{1+0+0}{1+0-0} = 1\,.$$

$b)\ \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1}\right) = \dfrac{\infty}{\infty}$ (Indeterminación).

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{0} = \infty\,.$$

$c)\ \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2-2x}{3x+9}\right) = \dfrac{\infty}{\infty}$ (Indeterminación).

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2-2x}{3x+9}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{3x^2-2x}{x^2}}{\frac{3x+9}{x^2}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}} = \frac{3}{0} = \infty\,.$$

3.2.8 Un límite especial en el infinito - el número e

Considerar la función $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Tabular valores de $f(x)$ cuando x toma valores muy grandes en valor absoluto, a través de números positivos y negativos de x y analizar su comportamiento.

x	$f(x)$
1	2
2	2,25
3	2,37
4	2,44
8	2,56
15	2,63
50	2,69
100	2,705
1000	2,717
10000	2,7181

x	$f(x)$
-2	4
-3	3,375
-4	3,16
-8	2,814
-50	2,746
-100	2,732
-1000	2,719
-10000	2,7184

A medida en que x crece ilimitadamente en valor absoluto, a través de valores positivos y negativos de x, los valores funcionales de $f(x)$ se aproximan a un número mayor que 2,7181 y menor que 2,7184. Entre más valores se calcule cerca de $+\infty$ y $-\infty$, la función se aproxima al conocido número e, cuyo valor aproximado es:

$$e = 2{,}71828182845904523536\cdots$$

La Figura 124, contiene la representación gráfica de la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

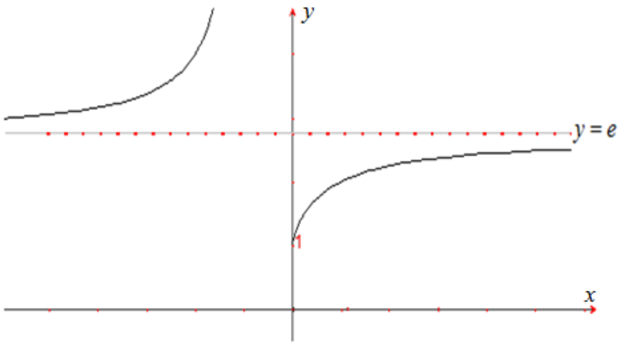


Figura 124. Representación gráfica de la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

De manera que, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (1)$

Esta constante es muy útil en cálculo y en matemáticas en general y aparece en variadas situaciones de la vida cotidiana. Es interesante ver que, este límite, inicialmente tiene la forma indeterminada 1^∞.

Por otra parte, si en la expresión (1) se hace el cambio de variable $\frac{1}{x} = y$, entonces, cuando $x \to \infty$, $y \to 0$.

Por tanto, la expresión equivalente a la (1) es la que sigue, donde, evidentemente, está presente la forma indeterminada 1^∞: $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$.

Ejemplo

Calcular los siguientes límites:

$a)\ \lim\limits_{x \to 3} (x-2)^{\frac{2}{x-3}}\ ;\ b)\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{2x}\ ;\ c)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}.$

Solución:

$a)\ \lim\limits_{x \to 3} (x-2)^{\frac{2}{x-3}} = 1^\infty$ (indeterminación).

Sea $x - 3 = t$, entonces, si $x \to 3$, $t \to 0$; por tanto:

$$\lim_{x\to 3}(x-2)^{\frac{2}{x-3}} = \lim_{t\to 0}[(t-3)-2]^{\frac{2}{t}} = \lim_{t\to 0}[1+t]^{\frac{2}{t}} = \lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^2 = e^2.$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{2x} = 1^\infty$ (indetrminación).

Al dividir $x-2$ entre $x+2$, se llega a lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+2}\right)^{2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{-4}}\right)^{\frac{x+2}{-4}}\right]^{\frac{-4}{x+2}*(2x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8}{x+2}} = e^{-8} = \frac{1}{e^8}.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \dfrac{0}{0}$ (indeterminacion)

Sea $e^x - 1 = t$; entonces, cuando $x\to 0,\ t\to 0$; por tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{t}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]}$$

$$= \frac{1}{ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]} = \frac{1}{lne} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

3.3 CONTINUIDAD

Sea $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $y = f(x)$ una función real, y $a \in D$.

La función f es continua en $x = a$, si:

1. $f(a)$ existe.
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Cuando al menos una de las tres condiciones no se cumple, se dice que la función es discontinua en $x = a$.

Intuitivamente, este concepto está ligado al hecho que, cuando se traza la gráfica de la función, no tiene saltos ni interrupciones.

3.3.1 Propiedades de las funciones continuas

Las propiedades de las funciones continuas, se deducen de las propiedades de los límites de las mismas. En particular si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = a$, también lo son $f(x) \pm g(x)$; $f(x) * g(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)}$ $con\ g(x) \neq 0$. Sin embargo, existen propiedades de las funciones continuas, que merecen destacar:

1. En la curva de la función polinómica $y = f(x)$, dos puntos cualesquiera de ella, $(a, f(a))$; $(b, f(b))$ están unidos por un lazo continuo.
2. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, la curva de la función $y = f(x)$ corta al eje x, al menos en un punto y por tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz, entre $x = a$, $x = b$.

En las Figura 125 y Figura 126, se muestra la aplicación de las propiedades anteriores.

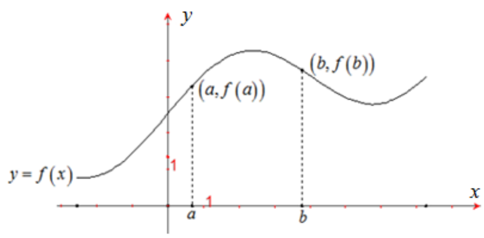


Figura 125. Función continua entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

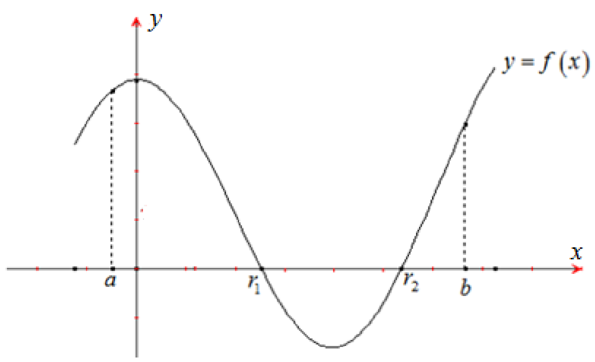


Figura 126. Representación de función continua que toma valores positivos y negativos

3. Si una función continua en un intervalo $[a, b]$, dicha función toma un punto máximo M, o un mínimo Q o solo un máximo o un solo mínimo.

En Figura 127 y Figura 128, se ilustran el sentido de esta propiedad.

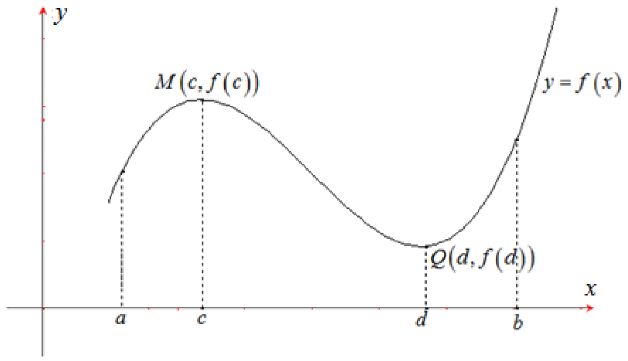


Figura 127. Representación de una función continua en $[a, b]$ con punto mínimo

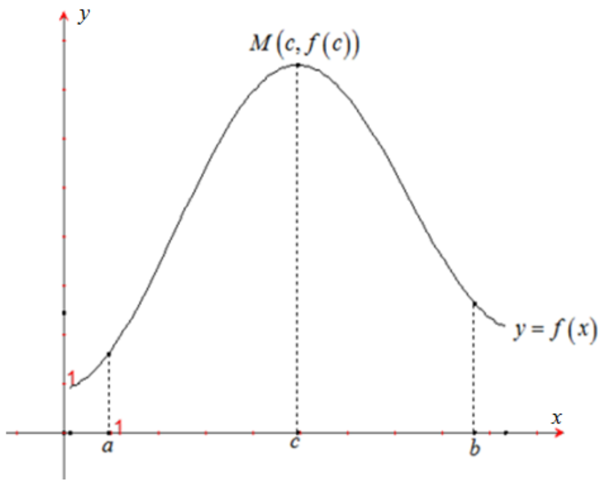


Figura 128. Representación de una función continua en $[a, b]$, con punto máximo

3.3.2 Clases de discontinuidad

- Si $f(a)$ no existe, pero $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a L, entonces, la función presenta *Discontinuidad Evitable* en $x = a$. En este caso, es posible redefinir la función y convertirla en continua; basta asignar $f(a) = L$.
- Si $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe, entonces, f presenta una *Discontinuidad Esencial* o también llamada de salto.

Ejemplo

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones, en el punto indicado:

1) $f(x) = \dfrac{senx}{x}, \;\; x = 0.$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si \;\; x \neq 2 \\ 4 \;\; si \; x = 2 \end{cases}$

Solución:

1) $f(x) = \dfrac{senx}{x}$.

Para establecer si es continua en $x = 0$, debe cumplir los tres requisitos de la definición:

- $f(0)$ no existe.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$.

Dado que no existe $f(0)$, entonces, la función NO es continua en $x = 0$; sin embargo, esta discontinuidad es evitable, puesto que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1.$$

Entonces para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$, se puede definir de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\ x}{x} & si \; x \neq 0 \\ 1 \;\; si \; x = 0 \end{cases}$$

Con esta definición, se cumplen las tres condiciones de la definición en $x = 0$, por lo cual, la función es continua en $x = 0$, tal como se pude observar en la Figura 129.

En efecto:

- $f(0) = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$.
- Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, entonces, la función f es continua en $x = 0$.

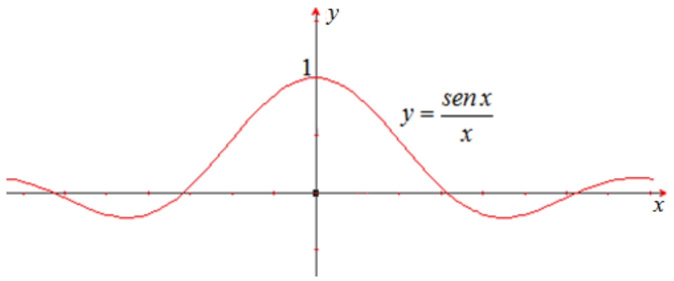


Figura 129. Representación gráfica de la función $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$

- $f(0) = 0.$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x).$

Al aplicar la definición de valor absoluto a la función $f(x)$, se tiene que:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Se calculan enseguida, los limites laterales:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1.$$

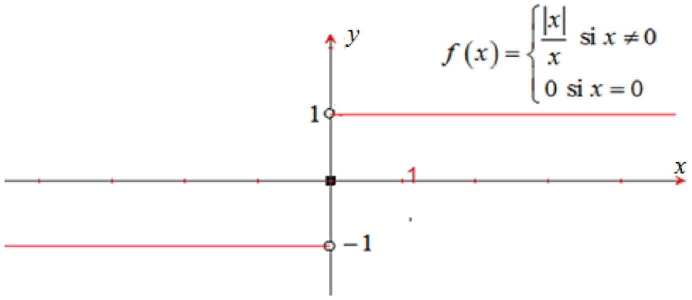


Figura 130. Representación gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

Dado que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, se concluye que, la función $f(x)$ es discontinua en $x = 0$. La Figura 130, muestra la representación gráfica de la función dada.

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & si\ \ x \neq 2 \\ 4\ \ si\ x = 2 \end{cases}$

- $f(2) = 4$
- $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2.$
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2}(x + 2) = 4$ (ver Figura 131).

Dado que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4 = f(2)$, se concluye que la función es continua en $x = 2$.

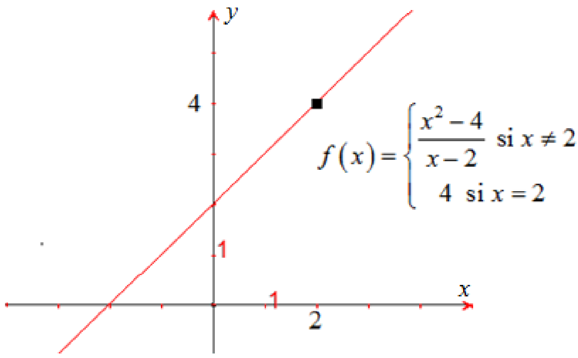


Figura 131. Representación gráfica de la función $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2} & si\ \ x\neq 2\\ 4 & si\ x=2\end{cases}$

Notas:

a) Todas las funciones algebraicas (satisfacen una ecuación polinómica), son continuas en su dominio de definición, salvo aquellas que, siendo cocientes, presenten ceros en el denominador. Por ejemplo: $f(x)=\frac{1}{x+2}$ es discontinua en $x=2$.

Aquí se presenta una discontinuidad esencial.

b) Las funciones lineales, cuadrática y polinómica son continuas en todo su dominio. Por tanto:

$\lim_{x\to a}(mx+b)=mx+b$; $\lim_{x\to a}(px^2+qx+r)=px^2+qx+r$

EJERCICIOS 3.1

1) Calcular los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 1}\frac{(3x-1)^2}{(x+1)^2}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

3) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

4) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$

5) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{2}$

7) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

8) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-4}{4-x}$

9) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

10) $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{2}{x}}$

11) $\lim_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$

12) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos\ x}{\frac{\pi}{2}-x}\right)$

13) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sec(2x) - \cos(2x)}$

14) $\lim_{x \to 0} \frac{3x - sen(4x)}{x + 2sen(2x)}$

15) $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x + tg\ x}{x + x\ sec\ x}$

16) $\lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t\sqrt{t+1}} - \frac{1}{t}\right]$

17) $\lim_{x \to 7} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{7}}}{x - 7}$

18) $\lim_{t \to 0} \left[\frac{4 - t^{.2}}{3 + 2t^{-1} + t^{-2}}\right]$

19) $\lim_{x \to 2} \left[\frac{1}{x(x-2)} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\right]$

20) $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$

21) $\lim_{x \to 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right]$

22) $\lim_{x \to 0} \frac{tg(2x)}{sen(5x)}$

23) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(a+x) - \cos\ (a-x)}{x}$

24) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(a+x) - lna}{x}$

25) $\lim_{x \to e} \left(\frac{lnx - 1}{x - e}\right)$

26) $\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$

27) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

2) Calcular los siguientes límites:

$a)$ $\lim_{x \to \infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

$b)$ $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 1}{6 + x - 3x^2}$

c) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x}\right)$

d) $\lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 1} - x\right]$

e) $\lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)^{10} + (x+2)^{10} + \cdots + (x+100)^{10}}{x^{10} + 10^{10}}$

f) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$

g) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x - 4}{3x + 2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

h) $\lim_{x \to \infty} (3^x + 4^x)^{\frac{2}{x}}$

i) $\lim_{x \to \infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5 + 5}$

j) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}}\right)$

k) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

3) Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$a)$ $f(x) \begin{cases} \frac{5}{x-4} & si\ x \neq 4 \\ 1\ \ si\ x = 4 \end{cases}$

$b)$ $f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ x & si\ x > 0 \end{cases}$

$c)\ f(x) = \begin{cases} |2x+5| \ si\ x \neq -\dfrac{5}{2} \\ \\ 3 \ \ si\ x = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ $\qquad d)\ f(x) = \begin{cases} 2x+3 \ \ si\ x \leq 1 \\ 8-3x \ \ si\ 1 < x < 2 \\ x+3 \ \ si\ x \geq 2 \end{cases}$

4) ¿Son continuas las siguientes funciones en cada punto del intervalo $[0,2]$?

$$f(x) = \begin{cases} 2x \ si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x \ \ si\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} ;\ g(x) = \begin{cases} x^2 \ \ si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x \ \ si\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

5) Sea $f(x) = \begin{cases} x+1 \ si\ x \leq 1 \\ 3-kx^2 \ \ si\ x > 1 \end{cases}$ calcular k, de modo que $f(x)$ se continua. Graficar.

6) Sea $f(x) = \begin{cases} -2sen(x) \ \ si\ x \leq -\frac{\pi}{2} \\ Asen(x+B) \ \ si -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x) \ \ si\ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Hallar los números A y B, de manera que $f(x)$ sea continua en todas partes.

7) En los siguientes ejercicios, se conocen a, L y $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Determinar un número δ, para un ε dado, tal que $|f(x) - L) < \varepsilon$, siempre que $0 < |x-a| < \delta$.

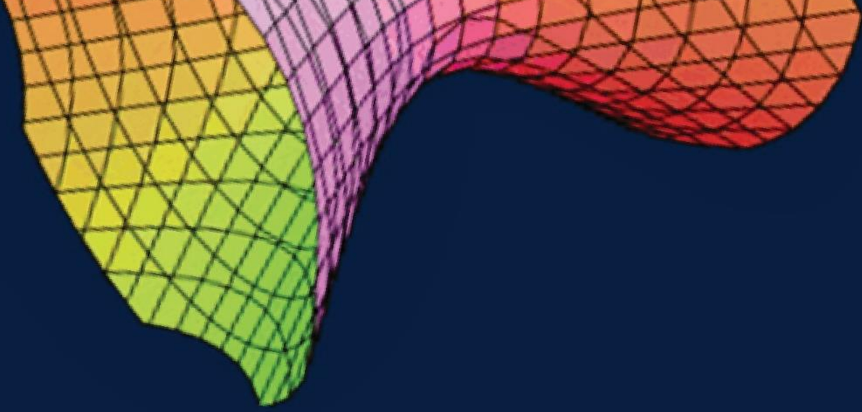
$a)\ \lim_{x\to 2} |4x-1| = 9\ ;\ \varepsilon = 0{,}01.$

$b)\ \lim_{x\to -1} (1+3x) = -\delta\ ;\ \varepsilon = 0{,}0012.$

$c)\ \lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2\ ;\ \varepsilon = 0{,}002\ .$

8) Aplicando la definición de límite, demostrar que:

$a)\ \lim_{x\to 3} \dfrac{x}{x-2} = 1 \qquad b)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{1}{\sqrt{5-x}} = \dfrac{1}{2}$



CAPÍTULO 4.

DERIVADAS DE FUNCIONES

CAPÍTULO 4

DERIVADAS DE FUNCIONES

4.1 DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Sea $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real definida como $y = f(x)$.

La derivada de la función $f(x)$, es otra función denotada $f'(x)$, definida así:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad si \text{ existe el límite.} \qquad (4.1)$$

- El dominio de $f'(x)$, es el conjunto de todos los números para los cuales el límite existe.
- La función $f(x)$ es diferenciable en todos los valores en que $f'(x)$ existe.
- El proceso utilizado para obtener la derivada de una función, se llama Derivación o Diferenciación.
- En la literatura matemática, existen otras notaciones para la derivada de $f(x)$, tales como:

  $$\frac{df}{dx}\ ;\ D_x f\ ;\ y'\ ;\ \frac{dy}{dx}.$$

- En la función $y = f(x)$, "x" es la Variable Independiente y "y" es la variable dependiente.
- Cuando se calcula la derivada de una función mediante la aplicación de la definición (4.1), siempre se va a encontrar una indeterminación, pues la derivada de una función en un punto, se obtiene mediante un límite, cuyo denominador tiende a *cero* y el numerador incluye la evaluación de la función en el punto, así:

  $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{si el límite existe.} \qquad (4.2)$$

  Al efectuar el cambio de variable: $x_0 + h = x$, se tiene que:

  $si\ h \to 0$, entonces $x \to x_0$; por tanto,

  $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{si el límite existe.} \qquad (4.3)$$

De manera que, las expresiones (4.2) y (4.3), permiten encontrar el valor de la derivada de la función $f(x)$ en $x = x_0$, los cuales también se pueden denotar por:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \ ; \ f'(x_0) \text{ ó } \ y'(x_0).$$

Ejemplos

a) Mediante la definición, calcular la derivada de las siguientes funciones:

1) $y = x^2 - 3x$; 2) $y = \dfrac{x}{3x-1}$.

b) Aplicar la definición (formulas 4.2 o 4.3) para calcular $y'(1)$ y $y'(2)$.

Solución:

a) Se pide aplicar la definición de derivadas:

1) $y = x^2 - 3x$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2 - 3(x+h)] - [x^2 - 3x]}{h} = \frac{0}{0} \ \text{(Indeterminación).}$$

En este caso, al realizar y simplificar las operaciones indicadas en el numerador, se elimina indeterminación, así:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h - x^2 + 3x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h - 3)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (2x + h - 3) \\
&= 2x - 3 \,.
\end{aligned}$$

2) $y = \dfrac{x}{3x-1}$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x+h}{3(x+h)} - \dfrac{x}{3x-1}}{h} = \frac{0}{0} \ \text{(Indeterminación).}$$

Al efectuar las operaciones indicadas en el numerador se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x + h(3x-1) - x[3(x+h) - 1]}{[3(x+h) - 1][3x-1]}}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 - x + 3xh - h - 3x^2 - 3xh + x}{h[3(x+h) - 1][3x-1]} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h[3(x+h) - 1][3x-1]} \\
&= \frac{-1}{[3(x+0) - 1][3x-1]}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{[3x-1]^2}.$$

b) Se pide, aplicar la definición para hallar los valores de la derivada de las funciones en un punto:

- Para $y = x^2 - 3x$, se aplica la fórmula 4.2:

$$\frac{dy}{dx}(1) = \lim_{h\to 0} \frac{[(1+h)^2 - 3(1+h)] - [1^2 - 3(1)]}{h} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminación).}$$

$$\frac{dy}{dx}(1) = \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 3 - 3h + 2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(h-1)}{h} = 0 - 1 = -1.$$

Observe que, se puede encontrar el valor de la derivada, al reemplazar el valor de $x = 1$, en la función derivada obtenida en el literal a).

En efecto:

$$\frac{dy}{dx}(1) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = (2x-3)|_{x=1} = 2(1) - 3 = -1.$$

- Ahora se aplica la definición 4.3, en el punto $x = 2$ para la función $y = \frac{x}{3x-1}$.

$$y'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{x}{3x-1} - \frac{2}{3(2)-1}}{x-2} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminación).}$$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{x}{3x-1} - \frac{2}{5}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{5x - 2(3x-1)}{5(3x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{5x - 6x + 2}{5(3x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-x + 2}{5(3x-1)(x-2)}$$

$$= -\lim_{x\to 2} \frac{1}{5(3x-1)}$$

$$= -\frac{1}{5(6-1)} = -\frac{1}{25}.$$

Observe que se puede obtener la derivada en x=2, reemplazando en la función derivada obtenida anteriormente, así:

Dado que $f'(x) = \frac{-1}{(3x-1)^2}$, entonces, $f'(2) = \frac{-1}{(3(2)-1)^2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$.

4.2 ÁLGEBRA DE DERIVADAS

En las siguientes líneas, se desarrollan algunas fórmulas, mediante las cuales se pueden encontrar, la derivada de cualquier función elemental. El uso de estas fórmulas, evita la aplicación del límite de la definición de derivada y de paso, permite economizar tiempo y produce resultados óptimos.

4.2.1 Derivada de la función constante

$Si\ f(x) = C$, constante; entonces $f'(x) = 0, \forall\ x \in D$.

Demostración:

Por definición, si $f(x)$ es función real, la derivada de $f(x), \forall\ x \in D$, es:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

Por tanto $f'(x) = 0$.

4.2.2 Derivada de una potencia

$Si\ f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demostración:

Por definición:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Al desarrollar el binomio de Newton del numerador, se obtiene:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} = nx^{n-1}.$$

Este resultado se puede generalizar $\forall\ n \in \mathbb{R}$. Sin embargo, su demostración no está al alcance de este texto. Por tanto,

Si $n \in \mathbb{R}$ y $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.

En particular, $si\ f(x) = cx^n$, con c: constante y $n \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x) = cnx^{n-1}$.

Demostración:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c(x+h)^n - cx^n}{h} = c \lim_{h \to 0} \left[\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\right] = cnx^{n-1}.$$

4.2.3 Derivada de la suma de dos funciones

Si $f(x)\ \ y\ \ g(x)$ son funciones diferenciables, entonces $f(x) + g(x)$ es diferenciable y $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
[f(x) + g(x)]' &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + f(x)]}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

Por tanto, $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$.

4.2.4 Derivada de un producto de funciones

Si $f(x)\ \ y\ \ g(x)$ son funciones diferenciables, entonces $f(x) * g(x)$ es diferenciable; además, $[f(x) * g(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.

Demostración:

$$[f(x) + g(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) * g(x+h) - f(x) * g(x)}{h}.$$

Al sumar y restar en el numerador, la expresión $f(x)g(x+h)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&[f(x) * g(x)]' = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) * g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)[f(x+h) - f(x)] + f(x)[g(x+h)g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} g(x+h) \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] + \lim_{h \to 0} f(x) \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
&= f(x)g'(x) + f'(x)g(x).
\end{aligned}$$

Por tanto, $[f(x) * g(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.

4.2.5 Derivada de un cociente de funciones

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciales, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es diferenciable; además,

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\ ;\ g(x) \neq 0.$$

Demostración:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\ g(x+h)g(x)}$$

Al sumar y restar restando en el numerador, la expresión $f(x)g(x)$, se obtiene:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\ g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)g(x) - f(x)g(x)] - [f(x)g(x+h) - f(x)g(x)]}{h\ g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h\ g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] - \lim_{h\to 0}\frac{f(x)}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$= \frac{g(x)f'(x)}{[g(x)]^2} - \frac{f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Por tanto, $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Ejemplos

Utilizar las reglas de derivación para calcular las derivadas de las funciones dadas:

1) $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10$

2) $f(x) = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x^2}$

3) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{\sqrt[4]{x}} + x^e$

4) $f(x) = (\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})(x^2 - 1)$

5) $f(x) = \dfrac{(x^2 + x + 1)^2}{x - 8}$

6) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x - 2}$

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1}{2x - 3}$ 8) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$

9) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2 + (x+1)^3}{x^3}$

Solución:

1) $$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^3)' - (8x^2)' + (5x)' - (10)' \\ &= 4(x^3)' - 8(x^2)' + 5(x)' - 0 \\ &= 4 * 3x^2 - 8 * 2x + 5 * 1 \\ &= 12x^2 - 16x + 5. \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} f'(x) &= x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + x^{-2} \\ &= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - 3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (x^{-2})' \\ &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3 * \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + (-2)x^{-3} \\ &= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{4}} + x^e \\ &= 5\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} - 3\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{5}{4}} + ex^{e-1} \\ &= -\frac{5}{2x^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{4x^{\frac{5}{4}}} + ex^{e-1} \\ &= -\frac{5}{2\sqrt{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x^5}} + ex^{e-1}. \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}\right)(x^2 - 1)' + \left(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}\right)'(x^2 - 1) \\ &= \left(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{3}}\right)(2x) + \left(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{3}}\right)'(x^2 - 1) \\ &= \left(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{3}}\right)(2x) + \left(\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{3x^{\frac{2}{3}}}\right)(x^2 - 1) \\ &= 2x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{3x^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{14}{3}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{14}{3}\sqrt[3]{x^4} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

5) $f(x) = \dfrac{(x^2 + x + 1)^2}{x - 8}$

$$= \frac{x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x}{x - 8}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2 + 2x^3 + 2x + 1}{x - 8}$$

$$f'(x) = \frac{(x-8)(x^4 + 3x^2 + 2x^3 + 2x + 1)' - (x-8)'(x^4 + 3x^2 + 2x^3 + 2x + 1)}{(x-8)^2}$$

$$= \frac{(x-8)(4x^3 + 6x + 6x^2 + 2) - (x^4 + 3x^2 + 2x^3 + 2x + 1)}{(x-8)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 28x^3 - 45x^2 - 48x - 17}{(x-8)^2}.$$

6) $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 2x - 2)(x^2 + 2x + 2)' - (x^2 + 2x - 2)'(x^2 + 2x + 2)}{(x^2 + 2x - 2)^2}$

$$= \frac{(x^2 + 2x - 2)(2x + 2) - (x^2 + 2x + 2)(2x + 2)}{(x^2 + 2x - 2)^2}$$

$$= \frac{(2x + 2)(x^2 + 2x - 2 - x^2 - 2x - 2)}{(x^2 + 2x - 2)^2}$$

$$= \frac{2(x+1)(-4)}{(x^2 + 2x - 2)^2} = \frac{-8(x+1)}{(x^2 + 2x - 2)^2}.$$

7) $f(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}} + 1}{2x - 3}$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}} + 1\right)' - (2x-3)'\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}} + 1\right)}{(2x-3)^2}$$

$$= \frac{(2x-3)\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) - 2\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}} + 1\right)}{(2x-3)^2}$$

$$= \frac{-\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2}{(2x-3)^2}$$

$$= \frac{-\frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^{-2}} - \sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt{x^{-1}} - 2}{(2x-3)^2}$$

8) $g'(x) = x^{-1} + 2x^{-2} + 3x^{-3}$

$$= -x^{-2} + 2(-2)x^{-3} + 3(-3)x^{-4}$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}$$

9) $g(x) = \dfrac{(x+2)^2 + (x+1)^3}{x^3}$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3}$$

$$= \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3}$$

$$= 1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

$$= 1 + 4x^{-1} + 5x^{-2} + 2x^{-3}.$$

Entonces, $g(x) = 1 + 4x^{-1} + 5x^{-2} + 2x^{-3}$.

$g'(x) = 4(-1)x^{-2} + 5(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4}$

$$= -\frac{4}{x^2} - \frac{10}{x^3} - \frac{6}{x^4}.$$

4.3 DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA

Si y es una función de u definida por $y = f(u)$, f diferenciable por u, y a su vez u es función de x, definida por $u = g(x)$ y u diferenciable por x, entonces, y depende de x a través de u.

Bajo estas condiciones, la derivada de y con respecto a x se calcula, como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} \text{ ó } D_x^y = D_u^y * D_x^u.$$

Esta expresión es conocida como la *Regla de la Cadena* o también como *Regla de Derivación de la Función Compuesta*.

Ejemplo

Calcular las derivadas de las siguientes funciones compuestas:

$$1)\ y = \sqrt{x^3 - x^2 - x - 1}\ ;\ \ 2)\ y = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x - 2}}\ ;\ \ 3)\ y = \frac{(3x^2 - 2x + 1)^2}{x^2 + 1}.$$

Solución:

1) $y = \sqrt{x^3 - x^2 - x - 1}\,.$

Método 1. Se realiza el cambio de variable: $u = x^3 - x^2 - x - 1 \Longrightarrow \ y = \sqrt{u}.$

Dado que,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}\,.$$

donde,

$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ y $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - x^2 - x - 1) = 3x^2 - 2x - 1$; entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} * \frac{d}{dx}(x^3 - x^2 - x - 1);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^3 - x^2 - x - 1}}(3x^2 - 2x - x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2\sqrt{x^3 - x^2 - x - 1}}\,.$$

Método 2. Para derivar la función compuesta, inicialmente se deriva la raíz cuadrada y luego se multiplica por la derivada de la expresión subradical.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^3 - x^2 - x - 1}} * \frac{d}{dx}(x^3 - x^2 - x - 1);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2\sqrt{x^3 - x^2 - x - 1}}\,.$$

Nota:

En general, para la derivación de la función compuesta, se puede utilizar cualquiera de los dos métodos.

2) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x - 2}} \Longrightarrow y = \left(\dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x - 2}\right)^{\frac{1}{3}}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x - 2}\right)^{\frac{2}{3}}} * \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x - 2}\right);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 2x - 2)^{\frac{2}{3}}}{3(x^2 + 2x + 2)^{\frac{2}{3}}} * \frac{-8(x + 1)}{(x^2 + 2x - 2)^{\frac{2}{3}}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8(x + 1)}{3(x^2 + 2x + 2)^{\frac{2}{3}}(x^2 + 2x - 2)^{\frac{4}{3}}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8(x+1)}{3\sqrt[3]{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x-2)^4}}.$$

3) $y = \dfrac{(3x^2-2x+1)^2}{x^2+1}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}[(3x^2-2x+1)^2] - (3x^2-2x+1)^2\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1) * 2(3x^2-2x+1)(6x-2) - (3x^2-2x+1)^2(2x)}{(x^2+1)^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(3x^2-2x+1)(3x^3+5x-2)}{(x^2+1)^2}.$$

4.4 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Una función de la forma $y = f(x)$, se dice que es *Explícita* con respecto de x; esto es, la variable y como variable dependiente se expresa en términos de x como variable independiente. Cuando esto ocurre, es posible calcular y' y $\frac{dy}{dx}$ de manera directa.

Cuando en una ecuación que relaciona dos variables x, y, donde no es posible expresar y en términos de x, se dice que y está definida *Implícitamente* como una función de x.

Para derivar implícitamente, se debe considerar a la variable y como función de x, luego, secuencialmente:

1. Derivar los dos miembros de la expresión, para lo cual, se aplica regla de la cadena y las reglas de derivación.
2. Despejar $\frac{dy}{dx}$.

Ejemplo 1

Calcular $\frac{dy}{dx}$ si $x^4 + 3x = y^3 - 3y^2 + y$.

Solución:

$$\frac{d}{dx}(x^4+3x) = \frac{d}{dx}(y^3-3y^2+y);$$

$$4x^3 + 3 = 3y^2\frac{dy}{dx} - 6y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx};$$

$$4x^3 + 3 = (3y^2-6y+1)\frac{dy}{dx};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3+3}{3y^2-6y+1}.$$

Ejemplo 2

Calcular $\frac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones implícitas:

1) $x^2y-xy^2=\frac{1}{x-1}$; 2) $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=x^2y^2$; 3) $\frac{2x-y}{x+2y}=5(x+y)$.

Solución:

1) $x^2y-xy^2=\frac{1}{x-1}$.

$$\frac{d}{dx}(x^2y-xy^2)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-1}\right) ;$$

$$x^2\frac{dy}{dx}+2xy-2xy\frac{dy}{dx}-y^2=-\frac{1}{(x-1)^2} ;$$

$$(x^2-2xy)\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{(x-1)^2}-2xy+y^2 ;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{1}{(x-1)^2}-2xy+y^2}{(x^2-2xy)} ;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-2xy(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2-2xy)}.$$

2) $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=x^2y^2$.

$$\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)'=(x^2y^2)' ;$$

$$\frac{x}{2\sqrt{y}}y'+\sqrt{y}+\frac{y}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}y'=2x^2yy'+2xy^2 ;$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}+\sqrt{x}-2x^2y\right)y'=2xy^2-\sqrt{y}-\frac{y}{2\sqrt{x}} ;$$

$$y'=\frac{2xy^2-\sqrt{y}-\frac{y}{2\sqrt{x}}}{\frac{x}{2\sqrt{y}}+\sqrt{x}-2x^2y} ;$$

$$y'=\sqrt{\frac{y}{x}}\left(\frac{4x\sqrt{x}y^2-2\sqrt{x}y-y}{x+2\sqrt{xy}-4x^2y\sqrt{y}}\right).$$

3) $\frac{2x-y}{x+2y}=5(x+y).$

$$\left(\frac{2x-y}{x+2y}\right)' = [5(x+y)]' \, ;$$

$$\frac{(x+2y)(2x-y)' - (x+2y)'(2x-y)}{(x+2y)^2} = 5 + 5y' \, ;$$

$$\frac{(x+2y)(2-y') - (1+2y')(2x-y)}{(x+2y)^2} = 5 + 5y' \, ;$$

$$2x + 4y - xy' - 2yy' - 2x + y - 4xy' = 5(x+2y)^2 + 5(x+2y)^2 y' \, ;$$

$$5y - 5xy' - 2yy' = 5(x+2y)^2 + 5(x+2y)^2 y' \, ;$$

$$[-5x - 2y - 5(x+2y)^2]y' = 5(x+2y)^2 - 5y \, ;$$

$$y' = \frac{5(x+2y)^2 - 5y}{-5x - 2y - 5(x+2y)^2} \, ;$$

$$y' = \frac{5y - 5(x+2y)^2}{5x + 2y + 5(x+2y)^2} \, .$$

4.5 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

4.5.1 Derivadas de las funciones trigonométricas

1) Si $y = sen\, x$ entonces $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$.

2) Si $y = \cos x$ entonces $\dfrac{dy}{dx} = -sen\, x$.

3) Si $y = tg\, x$ entonces $\dfrac{dy}{dx} = sec^2 x$.

4) Si $y = ctg\, x$ entonces $\dfrac{dy}{dx} = -csc^2 x$.

5) Si $y = \sec x$ entonces $\dfrac{dy}{dx} = \sec x\, tg\, x$.

6) Si $y = \csc x$ entonces $\dfrac{dy}{dx} = -\csc x\, ctg\, x$.

Demostración:

Para demostrar formalmente estos resultados, conviene recordar que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1; \;\; \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \, ; \;\; sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosx \, ; \;\; cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sen\, x.$$

1) $y = sen\, x$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h) - senx}{x} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminación).}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{sen\, x \cos h + \cos x\, sen\, h - sen\, x}{h}\ ;$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{sen\, x(cosh - 1) + \cos x\, sen\, h}{h}.$$

$$\frac{dy}{dx} = sen\, x \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + cosx \lim_{h\to 0}\left(\frac{sen\, h}{h}\right);$$

$$\frac{dy}{dx} = (sen\, x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x\, .$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}(sen\, x) = (sen\, x)' = \cos x.$$

Nota: $senx$ y $cosx$ son constantes respecto de h, por lo cual, salen del límite.

2) $y = cos\, x$

Se aplica el mismo procedimiento anterior y se obtiene:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = (\cos x)' = -sen\, x.$$

3) $y = tgx = \dfrac{sen\, x}{\cos x}$

Se aplica la regla de derivación de un cociente, así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos x)(sen\, x)' - (sen\, x)(\cos x)'}{cos^2 x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos x)(\cos x) - (sen\, x)(-sen\, x)}{cos^2 x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x\, .$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}(tg\, x) = (tg\, x)' = sec^2 x.$$

4) $y = ctgx = \dfrac{cos\, x}{sen\, x}$.

Se aplica la regla derivación de un cociente y se obtiene que:

$$\frac{d}{dx}(ctg\, x) = (ctg\, x)' = -csc^2 x\, .$$

5) $y = secx = \dfrac{1}{cosx}$

Se aplica la regla de derivación de un cociente, con lo cual, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos x)(0) - (1)(\cos x)'}{cos^2 x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 - (-sen\, x)}{cos^2 x} = \frac{sen\, x}{cos^2 x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sen\, x}{\cos x} * \frac{1}{\cos x} = tg\, x \sec x.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = (\sec x)' = \sec x\; tg\; x\,.$$

6) $y = \csc x.$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = (\csc x)'\, x = -\csc x\; ctg\; x.$$

Se aplica la regla de derivación de un cociente.

Ejemplo

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1) $y = \sqrt{sen\, x} + cos^2 x - x^3 tg\; x\,.$

2) $y = \cos(2x - 1) + tg(x^2 + x + 1)\,.$

Solución:

Se aplica las reglas de derivaciones y la Regla de Cadena, con lo cual se obtiene:

1) $y = \sqrt{sen\, x} + cos^2 x - x^3 tg\; x.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2\sqrt{sen\, x}} + 2\cos x\,(-sen\, x) - (x^3 sec^2 x + 3x^2 tg\; x);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2\sqrt{sen\, x}} - 2\cos x\,(sen\, x) - x^3 sec^2 x - 3x^2 tg\; x.$$

2) $y = \cos(2x - 1) + tg(x^2 + x + 1).$

$$\frac{dy}{dx} = [-sen(2x - 1)][2] + [sec^2(x^2 + x + 1)][2x + 1];$$

$$\frac{dy}{dx} = -2sen(2x - 1) + (2x + 1)sec^2(x^2 + x + 1)\,.$$

4.5.2 Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

1) Si $y = arcsen\, x, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) Si $y = \arccos x$, $0 \leq y \leq \pi$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) Si $y = arc\ tg\ x, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

4) Si $y = arc\ ctg\ x, 0 < y < \pi$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$.

5) Si $y = \text{arcsec}\, x$, $y \in \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

6) Si $y = arc\ csc\ x, y \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0 \frac{\pi}{2}\right), entonces\ \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Demostración:

Para demostrar los resultados anteriores, se utiliza la inversa de cada función y la derivación implícita.

2) Si $y = \text{arc} \cos x$ $(0 \leq y \leq \pi)$, entonces, $\cos y = x$.

Luego,

$$\frac{d}{dx}(\cos y) = \frac{d}{dx}(x);\ (-sen\ y)\frac{dy}{dx} = 1;\ \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{sen\ y}. \qquad (1)$$

Se sabe que $cos^2x + sen^2x = 1$; $sen^2y = 1 - cos^2y$, entonces,

$$seny = \pm\sqrt{1 - cos^2y}.$$

Dado que $0 \leq y \leq \pi$, entonces $sen\ y > 0$, por lo cual, se toma: $sen\ y = \sqrt{1-x^2}$.

Al reemplazar en (1), se tiene, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Por lo tanto:

$$(\arccos x)'\, x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4) Si $y = arc\ ctg\ x, 0 < y < \pi$, entonces, $ctg\ y = x$.

Luego,

$$\frac{d(ctg\ y)}{x} = \frac{d(x)}{dx};\ -csc^2y * \frac{dy}{dx} = 1;\ \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{csc^2y}. \qquad (2)$$

Dado que, $1 + ctg^2y = csc^2y$, entonces, $1 + x^2 = csc^2y$.

Al reemplazar en (2), se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}(arctg\ x) = (arctg\ x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

5) Si $y = \text{arcsec}\, x$, $y \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0\frac{\pi}{2}\right)$, entonces, $\sec y = x$.

Luego,

$$\frac{d}{dx}(\sec y) = \frac{d}{dx}(x);\ (\sec y\, tg\ y)\frac{dy}{dx} = 1;\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y\, tg\ y}. \qquad (3)$$

Puesto que, $1 + tg^2y = sec^2y$, entonces, $tg\ y = \pm\sqrt{sec^2y - 1}$.

Ahora bien, como $tg\ y > 0$, entonces, $tgy = \sqrt{x^2 - 1}$.

Al reemplazar en (3), se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}(arc\ sexc\ x) = (\text{arc}\sec x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Ejemplo

Determinar $\frac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones:

1) $y = \arccos(\sqrt{x}) - arcsec\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) $y = arctg\left(\frac{a + x}{1 - ax}\right)$.

3) $xsen\ y + x^3 = \arccos y$.

Solución:

Para encontrar las derivadas, se deben aplicar reglas de derivación, regla de la cadena y derivación implícita.

1) $y = \arccos(\sqrt{x}) - arcsec\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(arccos\sqrt{x}\right) - \frac{d}{dx}\left(\text{arcsec}\frac{1}{x}\right) \; ;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} * \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} * \left(-\frac{1}{x^2}\right);$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} * \left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} + \frac{1}{\frac{1}{x^2}\sqrt{1-x^2}} * \left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) $y = arctg\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[arctg\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)\right] \; ;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2} * \frac{d}{dx}\left(\frac{a+x}{1-ax}\right);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\frac{(a+x)^2}{(1-ax)^2}} * \frac{[(1-ax)-(a+x)(-a)]}{(1-ax)^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-ax)^2}{(1-ax)^2+(a+x)^2} * \frac{[1-ax+a^2+ax]}{(1-ax)^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+a^2}{1-2ax+a^2x^2+a^2+2ax+x^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+a^2}{(1+x^2)+a^2(x^2+1)};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+a^2}{(1+x^2)(1+a^2)};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

3) $xsen\, y + x^3 = \text{arccos}\, y$.

Se deriva en los dos miembros y luego se despeja $\frac{dy}{dx}$ (derivación implícita).

$$\frac{d}{dx}[xsen\, y + x^3] = \frac{d}{dx}[\arccos y];$$

$$x\, cosy\, \frac{dy}{dx} + seny + 3x^2 = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{dy}{dx}\right);$$

$$\left(x\, cosy + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)\frac{dy}{dx} = -seny - 3x^2;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-seny - 3x^2}{x\, cosy + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}};\ \frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{1-y^2})(seny + 3x^2)}{x(\sqrt{1-y^2})cosy + 1}.$$

4.5.3 Derivadas de las funciones exponencial y logarítmica

4.5.3.1 Función exponencial

Sea $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, una función exponencial con base a; entonces, $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$.

Demostración:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{0}{0}\ \text{(Indeterminación)}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{(a^h - 1)}{h};$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x lna\, .$$

Por tanto, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Nota: si la base del logaritmo es el número e, entonces $y = e^x$; en este caso,

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a = e^x \ln e = e^x.$$

Esto es, $(e^x)' = e^x$.

4.5.3.2 Función logarítmica

Sea $y = \log_b x$, $b > 0$, $b \neq 1$, una función logarítmica de base b, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} log_b e\, .$$

Demostración:

Dado que $y = log_b x$, entonces, por definición se tiene que $b^y = x$.

Al derivar implícitamente, se tiene:

$$\frac{d}{dx}(b^y) = \frac{d}{dx}(x);\ b^y \ln b \frac{dy}{dx} = 1;\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b^y \ln b};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} * \frac{1}{\ln b};\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} log_b e.$$

Por tanto: $(log_b x)' = \frac{1}{x} log_b e$.

Nota: si la base es e, entonces:

$$(log_b x)' = (\ln x)' = \frac{1}{x} ln_e e = \frac{1}{x}.$$

Esto es,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Ejemplos

Determinar la derivada de las siguientes funciones:

1) $y = \ln(x^3 e^{2x})$	2) $y = \sqrt{\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$	3) $y = log_5(x^2 + e^{2x})$
4) $\dfrac{y^3 4^x}{7^x} = 28$	5) $log_3[log_6(x^2 + 2^x)]$	6) $y = arctg(lnx)$
7) $y = log_7[log_7 x]$	8) $y = \left[\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x(x^2-1)}\right]$	9) $y = e^{tg(x^2+1)}$

Solución:

1) $y = \ln(x^3 e^{2x})$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[ln(x^3 e^{2x})] = \frac{1}{x^3 e^{2x}} * \frac{d}{dx}(x^3 e^{2x});$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3 e^{2x}}[x^3(2e^{2x}) + 3x^2(e^{2x})];\ \frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{x^3 e^{2x}}(2x^3 + 3x^2);\ \frac{dy}{dx} = 2 + \frac{3}{x}.$$

2) $y = \sqrt{\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\frac{\sqrt{e^x - e^{-x}}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}}\left[\frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})' - (e^x + e^{-x})'(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}\right];$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{e^x + e^{-x}}}{2\sqrt{e^x - e^{-x}}}\left[\frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}\right];$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{e^x+e^{-x}}}{2\sqrt{e^x-e^{-x}}}\left[\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}\right];$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{e^x+e^{-x}}}{2\sqrt{e^x-e^{-x}}}\left[\frac{(e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}\right];$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{e^x+e^{-x}}}{2\sqrt{e^x-e^{-x}}}\left[\frac{(2e^x)(2e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}\right];\ \frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{e^x-e^{-x}}}*\frac{1}{\sqrt{(e^x+e^{-x})^3}};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{(e^x-e^{-x})[(e^x+e^{-x})^3]}}.$$

3) $y=log_5(x^2+e^{2x})$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[log_5(x^2+e^{2x})];\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2+e^{2x}}\frac{d}{dx}[x^2+e^{2x}]*log_b e;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2+e^{2x}}[2x+2e^{2x}]*log_b e;\ \frac{dy}{dx}=\frac{2x+2e^{2x}}{x^2+e^{2x}}log_b e;$$

4) $\frac{y^3 4^x}{7^x}=28;\ \frac{y^3 4^x}{7^x}=28;\ y^3\left(\frac{4}{7}\right)^x=28$.

Procedimiento 1:

Al aplicar derivación implícita y la regla de la cadena, a los dos miembros, se tiene:

$$\frac{dy}{dx}\left[y^3\left(\frac{4}{7}\right)^x\right]=\frac{d}{dx}(28);\ y^3\left(\frac{4}{7}\right)^x ln\left(\frac{4}{7}\right)+3y^2\left(\frac{4}{7}\right)^x y'=0;$$

$$y^2\left(\frac{4}{7}\right)^x\left[yln\left(\frac{4}{7}\right)+3y'\right]=0;\ 3y'=-yln\left(\frac{4}{7}\right);$$

$$y'=-\frac{1}{3}yln\left(\frac{4}{7}\right);\ y'=-\frac{y}{3}ln\left(\frac{7}{4}\right);\ y'=ln\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{y}{3}}.$$

Procedimiento 2:

$$\frac{y^3 4^x}{7^x}=28;y^3\left(\frac{4}{7}\right)^x=28\,;y^3 4^x=(28)\,7^x\,.$$

Se aplica logaritmos naturales en los dos miembros de la expresión:

$$\ln(y^3 4^x)=\ln[(28)7^x]\,;$$

$$lny^3+ln4^x=ln28+ln7^x;$$

$$3lny+xln4=ln28+xln7\,.$$

Al derivar implícitamente y simplificar, se obtiene:

$$\frac{3}{y}y' + ln4 = 0 + ln7;\ \frac{3}{y}y' = ln7 - ln4;\ y' = ln\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{y}{3}}.$$

5) $log_3[log_6(x^2 + 2^x)]$.

Sea $v = log_6 u,\ con\ u = (x^2 + 2^x)$, entonces, $y = log_3 v$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{du};\ \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{v}log_6 e\right)\left(\frac{1}{u}log_3 e\right)(2x + 2^x ln2);$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{1}{log_6(x^2 + 2^x)}log_6 e\right]\left[\frac{1}{x^2 + 2^x}log_3 e\right][2x + 2^x ln2];$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x + 2^x ln2)(log_6 e)(log_3 e)}{[log_6(x^2 + 2^x)][x^2 + 2^x]}.$$

6) $y = arctg(lnx)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + (lnx)^2}\frac{d}{dx}(lnx);\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + (lnx)^2}\frac{1}{x};\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x[ln^2 x + 1]}.$$

7) $y = log_7[log_7 x]$.

Sea $u = log_7 x$, entonces, $y = log_7 u$; luego, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{u}log_7 e\right)\left(\frac{1}{x}log_7 e\right);\ \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{log_7 x}\ log_7 e\right)\left(\frac{1}{x}\ log_7 e\right);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\ log_7 e)^2}{x(log_7 x)}.$$

8) $y = \left[\frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x(x^2 - 1)}\right]$.

Esta función, presenta dificultades para su derivación de manera directa. Se procede entonces, a tomar logaritmo natural en los dos miembros, luego se aplica propiedades de los logaritmos y se deriva implícitamente la expresión resultante.

$$lny = ln\left[\frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x(x^2 - 1)}\right];\ lny = \ln\left(\sqrt{x^2 + 3}\right) - \ln[x(x^2 - 1)];$$

$$lny = ln(x^2 + 3)^{\frac{1}{2}} - lnx - ln(x^2 - 1);\ lny = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 3) - lnx - ln(x^2 - 1).$$

*A*l derivar implícitamente, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d}{dx}lny = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+3) - lnx - ln(x^2-1)\right];$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2(x^2+3)} - \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2-1};$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{x}{(x^2+3)} - \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2-1}\right];$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{\sqrt{x^2+3}}{x(x^2-1)}\right]\left[\frac{x}{(x^2+3)} - \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2-1}\right];$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^4+9x^2-3}{x^2(x^2-1)^2\sqrt{x^2+3}}.$$

9) $y = e^{tg(x^2+1)}$.

Sea $u = tg(x^2+1)$, entonces, $y = e^u$.

Al derivar implícitamente, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx};$$

$$\frac{dy}{dx} = e^u(sec^2x)(x^2+1)(2x);$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{tg(x^2+1)}(sec^2x)(x^2+1).$$

4.5.4 Derivadas de las funciones hiperbólicas

Recuérdese que las funciones hiperbólicas, se definen en términos de las funciones exponenciales e^x y e^{-x}. A partir de la definición de cada uno de ellas y mediante la aplicación de la regla de la cadena, se obtienen las correspondientes fórmulas:

1) $\frac{d}{dx}(senh\ x) = \cosh x.$

2) $\frac{d}{dx}(\cosh x) = senh\ x.$

3) $\frac{d}{dx}(tgh\ x) = sech^2x.$

4) $\frac{d}{dx}(ctgh\ x) = -csch^2x.$

5) $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x\ tgh\ x.$

6) $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x\ ctgh\ x.$

Demostración:

1) $\dfrac{d}{dx}(senh\, x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}[e^x - (-e^{-x})] = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$.

Por tanto,

$$\tfrac{d}{dx}(senh\, x) = (senh\, x)' = \cosh x.$$

3) $\dfrac{d}{dx}(tgh\, x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{senh\, x}{\cosh x}\right) = \dfrac{(\cosh x)(senh\, x)' - (\cosh x)'(senh\, x)}{cosh^2 x}$

$$= \frac{cosh^2 x - senh^2 x}{cosh^2 x} = \frac{1}{cosh^2 x} = sech^2 x\,.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}(tgh\, x) = (tgh\, x)' = sech^2 x\,.$$

5) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\cosh x}\right)$

$$= \frac{(\cosh x)(0) - (\cosh x)'(1)}{cosh^2 x}$$

$$= \frac{-senh\, x}{cosh^2 x}$$

$$= -\frac{senh\, x}{\cosh x} \times \frac{1}{\cosh x} = -tgh\, x sech\, x\,.$$

Por tanto:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = (\operatorname{sech} x)' = -tgh\, x \operatorname{sech} x\,.$$

Nota: las otras fórmulas se demuestran utilizando procedimientos similares.

Ejemplo

Determinar las derivadas de las siguientes funciones:

1) $y = tgh\left(\dfrac{3x-1}{2}\right)$

2) $y = \ln(tgh\, x)$

3) $y = e^x \cosh x$

4) $y = arctg(\cosh x)$

5) $y = x^{senh\, x}$

6) $senh\, x + \cosh y = xy$

Solución:

1) $y = tgh\left(\frac{3x-1}{2}\right).$

$$\frac{dy}{dx} = sech^2\left(\frac{3x-1}{2}\right) * \frac{d}{dx}\left(\frac{3x-1}{2}\right);$$

$$\frac{dy}{dx} = sech^2\left(\frac{3x-1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}sech^2\left(\frac{3x-1}{2}\right).$$

2) $y = \ln(tgh\, x)\, .$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{tgh\, x}\frac{d}{dx}(tgh\, x);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{tgh\, x}(sech^2 x) = \frac{\cosh x}{senh\, x} * \frac{1}{cosh^2 x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{senh\, x} * \frac{1}{\cosh x} = \operatorname{csch} x \operatorname{sech} x\, ; \; \frac{dy}{dx} = \operatorname{csch} x\, sech\, x\, .$$

3) $y = e^x \cosh x\, .$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\cosh x)' + (e^x)' \cosh x\, ;$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x senh\, x + e^x \cosh x\, ;$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(senh\, x + \cosh x)\, .$$

4) $y = arctg(\cosh x)\, .$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + (cosh^2 x)} * \frac{d}{dx}(\cosh x);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + (cosh^2 x)} * (senh\, x);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{senh\, x}{1 + (cosh^2 x)}.$$

5) $y = x^{senh\, x}\, .$

Conviene tomar logaritmos naturales a los dos miembros, aplicar propiedades de los logaritmos y derivar, así:

$\ln y = \ln(x^{senh\, x}) \Longrightarrow \ln y = (senh\, x)(\ln x).$

$$\frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{d((senh\, x)(\ln x))}{dx};$$

$$\frac{1}{y}y' = (senh\, x)(\ln x)' + (senh\, x)'(\ln x);$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{senh\, x}{x} + \cosh x\,(\ln x);$$

$$y' = y\left[\frac{senh\, x}{x} + \cosh x\,(\ln x)\right];$$

$$y' = x^{senh\, x}\left[\frac{senh\, x}{x} + \cosh x\,(\ln x)\right].$$

6) $senh\, x + \cosh y = xy$.

Al derivar implícitamente, se tiene:

$$\cosh x + senh\, y(y') = y + xy';$$

$$senh\, y(y') - xy' = y - \cosh x\,;$$

$$y' = \frac{y - \cosh x}{senh(y) - x}.$$

4.6 DERIVADAS PARAMÉTRICAS

Sea $\begin{cases} x = \emptyset(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $t \in [a, b]$ una función definida paramétricamente; t: parámetro.

Si ψ y $\emptyset$ son diferenciables por t, y $x = \emptyset(t)$ es función continua y estrictamente creciente, entonces posee la inversa $t = \emptyset^{-1}(x)$, la cual también posee derivada.

Entonces:

$$y = \psi(t) = \psi(\emptyset^{-1}(t))$$

Al aplicar la regla de la cadena, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Ejemplo

Determinar las derivadas de las siguientes funciones definidas paramétricamente:

1) $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = t^2 + e^t \\ y = \dfrac{2}{3}t^3 + (t-1)e^t \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = tlnt \\ y = t^2(2lnt + 1) \end{cases}$.

Solución:

1) $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-e^{-t}}{te^t + e^t} = -\frac{e^{-t}}{e^t(t+1)} = -\frac{1}{e^{2t}(t+1)};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{e^{2t}(t+1)}.$$

2) $\begin{cases} x = t^2 + e^t \\ y = \dfrac{2}{3}t^3 + (t-1)e^t \end{cases}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2}{3}t^3 + (t-1)e^t + e^t}{2t + e^t} = \frac{2t^2 + te^t - e^t + e^t}{2t + e^t} = \frac{t(2t + e^t)}{2t + e^t} = t;$$

$$\frac{dy}{dx} = t.$$

3) $\begin{cases} x = tlnt \\ y = t^2(2lnt + 1) \end{cases}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}[t^2(2lnt + 1)]}{\frac{d}{dt}(tlnt)} = \frac{t^2\left(\frac{2}{t}\right) + 2t(2lnt + 1)}{t\left(\frac{1}{t}\right) + lnt} = \frac{2t + 4tlnt + 2t}{1 + lnt} = \frac{4t + 4lnt}{1 + lnt};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t(1 + lnt)}{1 + lnt} = 4t; \ \frac{dy}{dx} = 4t.$$

EJERCICIOS 4.1

A) Definición de derivada

A) Por medio de definición, calcular la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x) = 3x - \dfrac{1}{2}$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ 3) $y = \sqrt[3]{2x}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 5) $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$ 6) $f(x) = \sqrt{3x-7}$

7) $f(x) = \dfrac{5}{\frac{1}{2}x - 1}$ 8) $f(x) = sen\ x$ 9) $f(x) = sen(2x)$

B) Reglas de derivación

Aplicar las reglas de derivación, para determinar la derivada de las siguientes funciones:

Funciones algebraicas

1) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4$

2) $y = at^m + bt^{m+n}$

3) $y = \dfrac{a + bx}{c + dx}$

4) $y = \dfrac{\pi}{x} + ln2$

5) $y = \dfrac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}$

6) $y = \dfrac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

7) $y = \dfrac{1}{2x - 1} - \dfrac{1}{x}$

8) $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$

9) $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$

10) $y = (2x^2 - 3x)^2(x^3 - 2x)$

Funciones trigonométricas y trigonométricas inversas

1) $f(x) = 5\cos(2x) + 3sen(3x)$

2) $f(x) = x\ arcsen\ x$

3) $f(x) = \dfrac{sen\ x + \cos x}{sen\ x - \cos x}$

4) $f(x) = 2t\ sen\ t - (t^2 - 1)\cos t$

5) $f(x) = ctgx \csc x - 3sen\ x$

6) $f(x) = 2tg\ x - 3ctg\ x$

7) $f(x) = arctg\ x + arctg\dfrac{1}{x}$

Funciones exponencial y logarítmica

1) $y = x^7 e^x$

2) $y = (x - 1)e^x$

3) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

4) $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$

5) $y = e^x \cos x$

6) $y = x^3 lnx - \dfrac{1}{3}\ln(2x - 1)$

7) $y = (x^2 - x - 1)e^x \cos x$

8) $y = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

Funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas

1) $y = xsenhx$

2) $y = arctg\,x - arctgh\,x$

3) $y = \dfrac{x^2}{\cosh x}$

4) $y = \dfrac{\cosh x - 1}{x^2}$

5) $y = \dfrac{3ctgh\,x}{\ln x}$

6) $y = (tghx - 1)e^x$

7) $y = (arcsen\,x)(arcsenh\,x)$

Funciones compuestas

1) $y = \left(\dfrac{ax + b}{c}\right)^3$

2) $y = (2a + 3bx)^2$

3) $y = \dfrac{3}{56(2x-1)^7} - \dfrac{1}{26(2x-1)^7} - \dfrac{1}{40(2x-1)^5}$

4) $y = \sqrt{1 - x^2}$

5) $y = (3 - 2sen(2x)^5$

6) $y = \dfrac{1}{arctg\sqrt{x}}$

7) $y = \sqrt{ctg\,x} - \sqrt{sen(2x)}$

8) $y = \sqrt{xe^x} + 1$

9) $y = \ln(e^x + 5sen\,x - 4arcsen(2x))$

10) $y = \sqrt{arctg\dfrac{1}{x}}$

11) $y = \sqrt{arctg(\ln x)}$

12) $y = cos^2xe^{2x} + sec^2x$

13) $y = \sqrt{1 + \sqrt{\ln x + 1}}$

Derivación logarítmica

1) $y = \sqrt[3]{x^2}\left(\dfrac{1 - x}{1 + x^2}\right)sen^3xcos^2x$

2) $y = [sen(2x)]^{x^2+1}$

3) $y = x^x$

4) $y = x^{\sqrt{x}}$

5) $y = x^{x^2}$

6) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}\sqrt{(x+1)^5}}$

7) $y = x^{sen2x}$

8) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

9) $y = \sqrt[x]{x}$

Derivación implícita

Determinar $\dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones implícitas:

1) $arctg(x+y) = x+y$

2) $lnx + e^{-\frac{y}{x}} = 1$

3) $x^y = y^x$

4) $\sqrt{x^3+y^3} = xy$

5) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

6) $y^2 = \dfrac{x+y}{x-y}$

7) $tg(xy) = x^2+y^2$

8) $\cosh x + \cosh y = sen(x+y)$

9) $e^{sen\,x} + e^{sen\,y} = \cos y$

Derivación paramétrica

Determinar $\dfrac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones definidas paramétricamente:

1) $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t^3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \dfrac{2at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \dfrac{t^2}{t^2+1} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a(cost + tsent) \\ y = a(sent - tcost) \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = a(\ln tg\dfrac{x}{2} + \cos t - sen\, t) \\ y = a(sen\, t + \cos t) \end{cases}$

6) Calcular $\frac{dy}{dx}$ para $t = \frac{\pi}{2}$, si:

$\begin{cases} x = a(t - sent) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}$

7) Hallar $\frac{dy}{dx}$ para $t = 1$, si:

$\begin{cases} x = tlnt \\ y = \dfrac{lnt}{t} \end{cases}$

Funciones diversas

1) $y = sen^3(5x)cos^2\left(\dfrac{x}{3}\right)$

2) $y = -\dfrac{11}{2(x-2)^2} - \dfrac{4}{x-2}$

3) $y = \dfrac{x^8}{8(1-x^2)^4}$

4)) $y = \dfrac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$

5) $y = \frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^2} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^2}$

6) $y = \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}$

7) $y = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$

8) $y = \frac{1}{3}tg^3x + tgx - x$

9) $y = \sqrt{\alpha sen^2x + \beta cos^2x}$

10) $y = arcsen\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$

11) $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

12) $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$

13) $y = \ln(arcsen\ x)$

14) $y = arctg\left(\frac{xsen\ \alpha}{1 - xcos\ \alpha}\right)$

15) $y = e^{sen2x + \sqrt{x}}$

16) $y = (2ma^{mx} + b)^p$

17) $y = \frac{(\alpha sen(\beta x) - \beta\cos(\beta x)\, e^{\alpha x})}{\alpha^2 + \beta}$

18) $y = x^n a^{-x^2}$

19) $y = \sqrt{cosx}\, a^{\sqrt{\cos x}}$

20) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$

21) $y = \frac{1}{ln^2x} + arctg(\ln x)$

22) $y = ln\frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$

23) $y = \frac{\sqrt{x^2+a^2} + x}{\sqrt{x^2+a^2} - x}$

24) $y = \frac{1}{2}ln\left(tg\frac{x}{2}\right)$

25) $y = 3^{\frac{sen(ax)}{\cos(bx)}} + \frac{1}{3}\frac{sen^3(ax)}{cos^3(bx)}$

26) $y = \ln(arcsen\ x) + \frac{1}{2}ln^2x + arcsen(\ln x)$

27) $y = ln\frac{1+\sqrt{sen\ x}}{1-\sqrt{sen\ x}}$

28) $y = 2arctg\sqrt{sen\ x}$

29) $y = e^{\alpha x}\cosh x + \sqrt{tgh^3x}$

C) Otros ejercicios

1) Probar que la función $y = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ satisface la ecuación diferencial

$$xy' = (1-x^2)y$$

2) Probar que la función $y = \frac{1}{x+lnx+1}$ satisface la ecuación diferencial

$$xy' = y(ylnx - 1)$$

3) Si $y = tg^3\frac{\pi x}{6}$, calcular $y'(2)$

4) Dada la función $y = e^{-x}$, hallar $f(0) + xf'(0)$

5) Dada la función $y = \sqrt{1+x}$, hallar $f(3) + (x-3)f'(3)$

6) Probar que la función $\begin{cases} x = t + arsent \\ y = \frac{1}{2}t^2 - \sqrt{1-t^2} \end{cases}$ satisface la ecuación diferencial:

$x = y' + arc\ seny'$

7) Probar que la función $\begin{cases} x = t^2 + e^t \\ y = \frac{2}{3}t^3 + (t-1)e^t \end{cases}$

4.7 TEOREMAS DE ROLLE Y DEL VALOR MEDIO

4.7.1 Teorema de Rolle

Sea $f(x)$ una función continua en $[a.b]$ y diferenciable en (a,b).

Si $f(a) = f(b) = 0$, entonces existe al menos un punto $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Demostración:

Antes realizar la demostración del teorema, conviene interpretar el enunciado del mismo.

Si una curva continua corta al eje x en dos puntos $x = a$ y $x = b$, existe al menos un punto x_0 en el intervalo (a,b), de modo que la recta tangente a la curva es paralela al eje x; tal como se indica en la

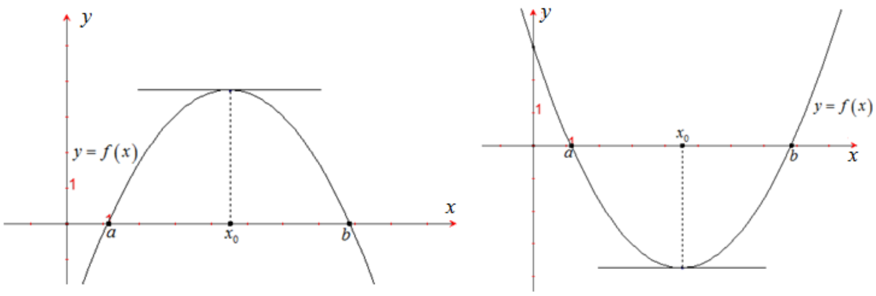


Figura 132.

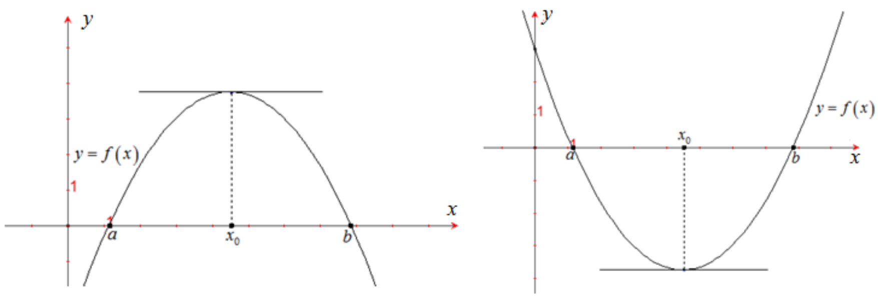


Figura 132. Interpretación geométrica del Teorema de Rolle

Ahora bien, si $f(x) = 0$, en (a,b), entonces $f'(x) = 0$ y por tanto, el teorema queda demostrado.

En cualquier otro caso, en algún punto del intervalo $f(x)$ es positivo o negativo, por tanto, existe algún $x_0 \in (a, b)$ donde $f'(x_0) = 0$, lo que origina un máximo relativo o un mínimo relativo para $f(x)$.

4.7.2 Teorema del Valor Medio

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), entonces:

$$\text{existe } x_0 \in (a, b) \text{ tal que } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración:

Geométricamente significa, que si P y Q son dos puntos de una curva continua, entonces, existe al menos un punto x_0 comprendido entre P y Q, de manera que la recta tangente que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ es paralelo a la recta que pasa por los puntos P y Q (ver Figura 133).

La ecuación de la recta que pasa por P y Q, está dada por: $y - f(a) = m(x - a)$

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \;;\quad \text{donde } m \text{ pendiente de la recta.}$$

Ahora bien, en algún punto cualquiera del intervalo (a, b), la distancia vertical de la recta tangente a la recta que pasa por los puntos P y Q es:

$$F(x) = f(x) - f(b) - m(x - b).$$

La función $F(x)$ satisface las condiciones del Teorema de Rolle, entonces:

$$F'(x) = f'(x) - m = 0 \text{ en algún punto } x_0 \in (a, b).$$

En consecuencia:

$$m = f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

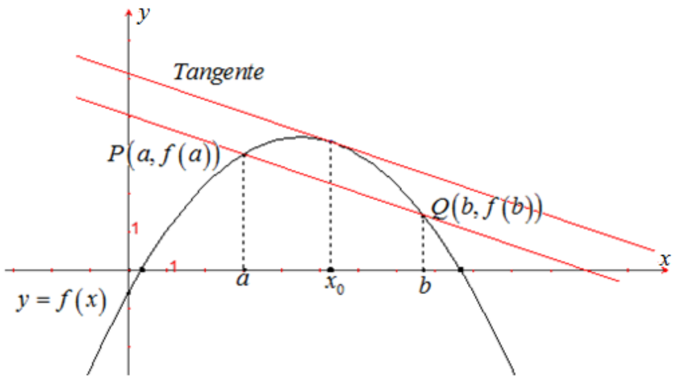


Figura 133. Interpretación geométrica del Teorema de Valor Medio

Nota:

El Teorema del Valor Medio, se puede escribir de otras formas, que resultan muy útiles, como las siguientes:

1) $f(b) = f(a) + (b - a)f'(x_0)$; $x_0 \in (a, b)$.

2) $f(x) = f(a) + (x - a)f'(x_0)$; $x_0 \in (a, b)$.

Ejemplo

Para las funciones que siguen, determinar un valor de x_0 que cumpla las condiciones del Teorema de Rolle:

1) $f(x) = 4x^3 - 72x$ en $\left[-3\sqrt{2}, 0\right]$.

2) $f(x) = sen\, x$ en $[0, \pi]$.

3) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 1}$ en $\left[-\dfrac{1}{2}, 3\right]$.

Solución:

1) En primer lugar, dado que $f(x)$ es una función polinómica, entonces es continua en el intervalo $\left[-3\sqrt{2}, 0\right]$ y diferenciable en $\left(-3\sqrt{2}, 0\right)$.

En este caso $a = -3\sqrt{2}$ y $b = 0$, para los cuales se cumple que $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$.

En efecto:

$$f\left(-3\sqrt{2}\right) = 4\left(-3\sqrt{2}\right)^3 - 72\left(-3\sqrt{2}\right) = -216\sqrt{2} + 216\sqrt{2} = 0.$$

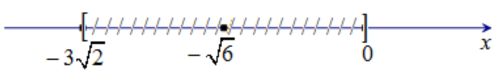
$$f(0) = 4(0)^3 - 72(0) = 0.$$

Por lo tanto, en el intervalo $\left[-3\sqrt{2}, 0\right]$ se tiene que la función cumple las condiciones del Teorema de Rolle; en consecuencia, existe $x_0 \in (-3\sqrt{2}, 0)$ para el cual $f'(x_0) = 0$.

Para determinar x_0 se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$, así:

$$f'(x) = 12x^2 - 72 = 0;\ 12(x^2 - 6) = 0;\ x^2 - 6 = 0;\quad x^2 = 6;\ x = \pm\sqrt{6}.$$

Dado que el valor buscado debe pertenecer al intervalo $\left[-3\sqrt{2}, 0\right]$, se deduce que $x_0 = -\sqrt{6}$.



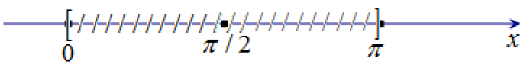
Evidentemente, se cumple que: $f'(x_0) = f'\left(-\sqrt{6}\right) = 0$.

2) $f(x) = sen\, x$ es continua en el intervalo $[0, \pi]$; además, $sen\, 0 = 0; sen\, \pi = 0$, por lo cual, cumple las condiciones del Teorema de Rolle, en consecuencia, existe $x_0 \in (0, \pi)$ tal que $(sen\, x)'|_{x=x_0} = 0$.

$$f'(x) = cosx = 0 \; ; \cos x = 0 \; ; x = \arccos 0.$$

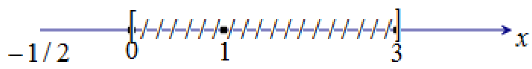
En el periodo fundamental, se tiene que: $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$.

Por lo tanto, el valor buscado es $x_0 = \frac{\pi}{2}$.



3) $f(x) = \frac{2x^2-5x-3}{x-1}$ en $\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$

En este caso, se puede establecer que la función es discontinua, con una discontinuidad esencial en $x_0 = 1$ y $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, 3\right]$.



La función se anula en los valores extremos del intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$, como se observa en seguida:

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{2}\right) - 3}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3}{-\frac{3}{2}} = \frac{0}{-\frac{3}{2}} = 0.$$

$$f'(3) = \frac{2(3)^2 - 5(3) - 3}{3 - 1} = \frac{18 - 15 - 3}{2} = 0.$$

Como la función no es continua en el intervalo dado, entonces NO cumple las condiciones del Teorema de Rolle, por lo tanto, $\nexists x_0$ para el cual $f'(x_0) = 0$; es decir, no existe un punto en el intervalo donde la recta tangente a la curva sea horizontal.

Ejemplo 1

Determinar el valor de x_0 que cumpla las condiciones del Teorema del Valor Medio para la siguiente función: $f(x) = x^3 - 9x + 1$ en $[-3,4]$ respectivamente.

Solución:

Por tratarse de una función polinómica, es continua y diferenciable en todo $\mathbb{R}$; en particular, lo es en el intervalo $[-3,4]$ y $(-3,4)$.

En este caso $a = -3,\ b = 4$.

Entonces:

$$f(a) = f(-3) = (-3)^3 - 9(-3) + 1 = -27 + 27 + 1.$$

$$f(b) = f(4) = (4)^3 - 9(4) + 1 = 64 - 36 + 1 = 29.$$

$$b - a = 4 - (-3) = 7.$$

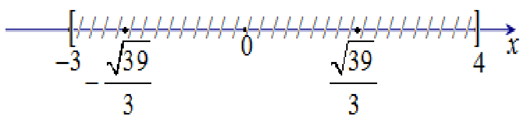
Además, $f'(x) = 3x^2 - 9$.

Como la función dada satisface las condiciones del Teorema de Valor Medio, entonces, existe $x_0 \in [-3,4]$, tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Al reemplazar los valores correspondientes, se obtiene:

$$3{x_0}^2 - 9 = \frac{29-1}{7}\ ;\ 3{x_0}^2 - 9 = 4\ ;\ 3{x_0}^2 = 13\ ;\ {x_0}^2 = \frac{13}{3}\ ;\ x_0 = \pm\sqrt{\frac{13}{3}} = \pm\frac{\sqrt{39}}{3}.$$



Ejemplo 2

Hallar el valor de $x_0$que cumpla las condiciones del Teorema del Valor Medio para la función dada; además, trazar la gráfica y la recta tangente que pasa por $(x_0, f(x_0))$:

$$f(x) = \frac{2}{x-3} \quad \text{en } [4,7].$$

Solución:

La función dada es continua en $[4,7]$ y diferenciable en $(4,7)$.

En este caso: $a = 4,\ b = 7$.

$$f(a) = f(4) = \frac{2}{4-3} = 2.$$

$$f(b) = f(7) = \frac{2}{7-3} = \frac{1}{2}.$$

$$b - a = 7 - 4 = 3.$$

Entonces:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\frac{1}{2}-2}{3}=\frac{-\frac{3}{2}}{3}=-\frac{1}{2}.$$

Por otra parte: $f'(x)=\frac{-2}{(x-3)^2}$.

Dado que se cumplen las condiciones del Teorema del Valor Medio, entonces, existe $x_0\in[4,7]$, tal que:

$\frac{-2}{(x_0-3)^2}=-\frac{1}{2}$; $(x_0-3)^2=4$; $x_0-3=\pm2$; $x_0=2+3=5$ ó $x_0=-2+3=-1$.

Entonces, $x_0=5$ ó $x_0=-1$.

Por lo tanto, el valor buscado es $x_0=5$.

$$f(x_0)=\frac{2}{5-3}=1\Longrightarrow\left(x_0,f(x_0)\right)=(5,1).$$

La pendiente de la recta tangente en el punto de coordenadas $(5,1)$ es:

$$f'(5)=\frac{-2}{(5-3)^2}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

La ecuación de la recta tangente es,

$$y-f(x_0)=f'(x_0)[x-x_0];$$

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-5);$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}+1.$$

Por lo tanto, la ecuación pedida es: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$.

Ejemplo 3

Utilizar el Teorema del Valor Medio para calcular de forma el valor de $\sqrt[4]{17}$.

Solución:

Sean $f(x)=\sqrt[4]{x}$; $a=16$, $b=17$, $x_0=16$.

Según el Teorema del Valor Medio, se cumple lo siguiente:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ ;\ x_0\in[a,b].$$

De aquí se obtiene que:

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(x_0).\qquad(1)$$

Al derivar $f(x)$ se obtiene:

$$f'(x) = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}. \qquad (2)$$

Al reemplazar los valores correspondientes en las expresiones (1) y (2), se obtiene:

$$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16} + (17 - 16) - \frac{1}{4\sqrt[4]{(16)^3}};$$

$$\sqrt[4]{17} = 2 + \frac{1}{4\sqrt[4]{(2^4)^3}};$$

$$\sqrt[4]{17} = 2 + \frac{1}{4(2^3)} \ ;$$

$$\sqrt[4]{17} = 2 + \frac{1}{32} \approx 2 + 0{,}0315 \ ;$$

$$\sqrt[4]{17} \cong 2{,}03125.$$

4.8 LÍMITES DE FORMAS INDETERMINADAS

- Las formas indeterminadas, son operaciones a las que no se les puede aplicar ninguna regla operatoria y por tanto no tienen ningún significado numérico. Expresiones de la forma $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 - \infty, 1^{\infty}$, entre otros, son formas indeterminadas.
- Muchos limites funcionales, conducen a estas formas indeterminadas, por ejemplo,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}; \quad \lim_{x \to \infty} \frac{3x + 4}{8x - 7} = \frac{\infty}{\infty}.$$

- La regla de L'Hopital, permite calcular este tipo de límites, con la ayuda de las derivadas de las funciones implicadas.

4.8.1 Teorema de Cauchy

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y diferenciables en (a, b), con $g(x) \neq 0$, existe al menos un valor $x_0 \in (a, b)$, de manera que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Demostración:

Supóngase que $g'(b) = g'(a)$.

Según el Teorema de Rolle, $g'(x) = 0$ para algún valor $x_0 \in (a, b)$, lo cual es contrario a la hipótesis.

Entonces: $g'(b) \neq g'(a)$.

Ahora bien, sea $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = M$; donde M es constante.

Por otra parte, sea $F(x) = f(x) - f(b) - M[g(x) - g(b)]$.

La función $F(x)$ satisface las condiciones del Teorema de Rolle; esto es, $F(x)$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b); además, $F'(x_0) = 0$, para algún $x_0 \in (a, b)$.

$$F'(x_0) = f'(x_0) - M[g'(x_0)] = 0.$$

Entonces:

$$M = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

4.8.2 Regla de L'Hopital

Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, derivables en el intervalo $0 < |x - a| < \delta$ y $g'(x) \neq 0$ para todos los valores del intervalo, y tales que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Si existe o es infinito $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, se cumple que,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración:

Al sustituir b por x en el Teorema de Cauchy y teniendo en cuenta que $f(a) = g(a) = 0$, se cumple que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{para algún } x_0 \in (a, x)$$

Cuando $x_0 \to a$, $x \to a$, por tanto:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Notas:

- Forma $\frac{\infty}{\infty}$.

La Regla de L'Hopital sigue siendo válida para el caso:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}.$$

- Formas $0-\infty\ \ y\ \infty-\infty$.

  Estas formas se las puede transformar a las formas $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

- Forma $0^0, \infty^0, 1^\infty$.

  Si $\lim_{x\to a}(\ y)$ conducen a uno de estos tipos $\lim_{x\to a}[lny]$ es de la forma $0*\infty$.

Ejemplos

Calcular los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 4}\frac{x^4-256}{x-4}$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{1-e^x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{8^x-2^x}{4x}$

5) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x+2lnx}{x+3lnx}$

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2}{e^x+1}$

7) $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$

8) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}(tgx)^{cosx}$

Solución:

1) $\lim_{x\to 4}\frac{x^4-256}{x-4}=\frac{44-256}{4-4}=\frac{0}{0}.$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^4-256}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x^4-256)'}{(x-4)'}=\lim_{x\to 4}\frac{4x^3}{1}=4(4)^3=256.$$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2}=\frac{e^2-e^2}{2-2}=\frac{0}{0}.$

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(e^x-e^2)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{e^x}{1}=e^2\ .$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{1-e^x}=\frac{0}{0}.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{1-e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{(xe^x)'}{(1-e^x)'}\ ;$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x+e^x}{e^x};$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x(x+1)}{e^x};$$

$$= \lim_{x \to 0}(x+1) = 0 + 1 = 1.$$

4) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{8^x - 2^x}{4x} = \frac{8^0 - 2^0}{4(0)} = \frac{0}{0}.$

$$\lim_{x \to 0} \frac{8^x - 2^x}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{(8^x - 2^x)'}{(4x)'};$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{8^x ln8 - 2^x ln2}{4};$$

$$= \frac{8^0 ln8 - 2^0 ln2}{4} = \frac{ln8 - ln2}{4} = \frac{ln\left(\frac{8}{2}\right)}{4} = \frac{ln4}{4} = \frac{2ln2}{4} = \frac{ln2}{2}.$$

5) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{5x + 2lnx}{x + 3lnx} = \frac{\infty}{\infty}.$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x + 2lnx}{x + 3lnx} = \lim_{x \to \infty} \frac{(5x + 2lnx)'}{(x + 3lnx)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{5 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{5 - 0}{1 + 0} = 5.$$

6) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 + x^2}{e^x + 1} = \frac{\infty}{\infty}.$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 + x^2}{e^x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^4 + x^2)'}{(e^x + 1)'};$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3 + 2x}{e^x};$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(4x^3 + 2x)'}{(e^x)'};$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(12x^2 + 2)'}{(e^x)'};$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(24x)'}{(e^x)'};$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{24}{e^x} = 0.$$

7) $\displaystyle \lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = 1^\infty.$

Sea $y = x^{\frac{1}{x-1}}$. Al tomar logaritmos naturales en los dos miembros se tiene:

$$lny = ln\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right);$$

$$lny = \left(\frac{1}{x-1}\right) ln(x) = \frac{lnx}{x-1}.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1}[lny] = \lim\limits_{x \to 1}\left[\frac{lnx}{x-1}\right] = \frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 1}[lny] = \lim_{x \to 1}\left[\frac{(lnx)'}{(x-1)'}\right] = \lim_{x \to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Entonces, si $lny \to 1$ cuando $x \to 1$, entonces, $y \longrightarrow e^1 = e$.

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e$.

8) $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (tgx)^{cosx} = \infty^0$.

Sea $y = (tgx)^{cosx}$. Al tomar logaritmos naturales en los dos miembros, se llega a:

$$lny = \ln[(tgx)^{cosx}];$$

$$lny = cosx \ln(tgx).$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+}(lny) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+}[cosx \ln(tgx)] = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\left[\frac{\ln(tgx)}{secx}\right] = \frac{\infty}{\infty}.$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(lny) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left[\frac{\frac{1}{tgx}\ sec^2x}{secx\ tgx}\right] = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{sec^2x}{secx\ tg^2x};$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{cosx}{senx} = \frac{cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0.$$

Como $\ln y \to 0$ cuando $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$, entonces $y \to e^0 = 1$.

Por tanto, $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+}(tgx)^{cosx} = 1$.

4.9 LA DIFERENCIAL

4.9.1 Definiciones y conceptos

Sea $y = f(x)$ una función derivable en todos los puntos del intervalo (a, b) y sea $x \in (a, b)$, entonces, existe $f'(x)\ \forall\ x \in (a, b)$.

Por definición de derivada, se puede escribir lo siguiente:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

De aquí, se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x) \text{ donde } \alpha(\Delta x) \to 0 \text{ cuando } x \to 0.$$

Entonces,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)\Delta x + \Delta x\, \alpha(\Delta x).$$

Esto significa, que la expresión $|\Delta y - f'(x)\Delta x|$ se puede hacer tan pequeño como se quiera, tomando $|\Delta y|$ suficientemente pequeño.

Por tanto, $f'(x)\Delta x$ es una aproximación para el valor de Δy para $|\Delta x|$ suficientemente pequeño y se escribe:

$$\Delta y \cong f'(x)\Delta x.$$

4.9.2 Definición de diferencial de una función

Si la función f se define por $y = f(x)$, definida en $D \subset \mathbb{R}$, entonces la diferencial de y, se denota y define como sigue:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Donde x pertenece al dominio de $f'(x)$ y Δx es un incremento arbitrario de x.

4.9.3 Definición de diferencial de x

Si la función f se define por $y = f(x)$, definida en $D\ C\ \mathbb{R}$, entonces la diferencial de x, se denota y define por:

$$dx = \Delta x.$$

Donde Δx es un incremento arbitrario de x, y x está en el dominio de definición de $f'(x)$.

De los anteriores resultados se puede escribir: $dy = f'(x)dx$.

En la Figura 134, se muestra la representación geométrica de la diferencial; se destaca la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto cuya pendiente es $f'(x)$.

Se puede notar que, el valor de dx disminuye en la medida que el punto Q se acerca al punto P, con lo cual, el segmento $\overline{SQ}$ se hace más pequeño (ver Figura 134).

Observe que:

$$\overline{SQ} = \Delta y - dy.$$

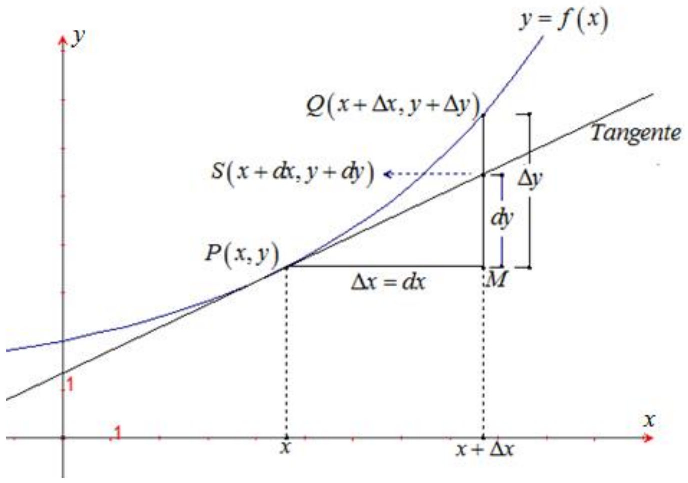


Figura 134. Interpretación geométrica de la diferencial de una función

Ejemplo

Sea $y = 3x^2 - 4x$.

Determinar Δy y dy, para los siguientes casos:

a) Cualquier Δx y dx.

b) $x = 2, \Delta x = 0{,}1$; $x = 2,$ $\Delta x = 0{,}01$; $x = 3, \Delta x = 0{,}01$.

Solución

a) $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x);$

$3x^2 - 4x + \Delta y = 3[x^2 + 2 + \Delta x + (\Delta x)^2] - 4(x + \Delta x);$

$3x^2 - 4x + \Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4x - 4\Delta x;$

$\Delta y = (6x - 4)\Delta x + 3(\Delta x)^2.$

Por otra parte:

$dy = f'(x)dx;$

$dy = (6x - 4)dx;$

$dy = (6x - 4)\Delta x.$

b)

x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
2	0,1	0,83	0,8	0,03
2	0,01	0,0803	0,08	0,0003
3	0,001	0,00803	0,008	0,00003

En la tabla se observa que, en tanto Δx está cercano a cero, la diferencia $\Delta y - dy$ es más pequeño. Cuando x cambia en una pequeña cantidad Δx, el cambio correspondiente en y es aproximadamente dy.

4.9.4 Reglas para calcular diferenciales

Sean f y g funciones de x, derivables y c constante.

Las fórmulas para calcular diferenciales son de alguna manera, similares a las que se utilizan en el cálculo de derivadas, así:

1) $d(c) = 0$; c constante.

2) $d(x^n) = nx^{n-1}dx$.

3) $d(cf) = c\, df$.

4) $d(f + g) = df + dg$.

5) $d(f * g) = f\, dg + g\, df$.

6) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f\, dg - g\, df}{g^2}$.

Nota: debido a que si $y = f(x)$, se sigue que $dy = f'(x)dx$, por lo cual, si f es una función compuesta, de modo que $x = g(u)$, entonces:

$$dy = f'(u) * u'(x)dx \text{ es decir } dy = f'(u)du.$$

Ejemplo

Calcular dy para las siguientes funciones:

1) $y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 - 5}$.

2) $y = tg(2x) + sen^2 x$.

3) $y = e^{x^2} + arc\ sen(3x)$.

Solución:

1) $y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 - 5}$.

$$dy = \left[\frac{(x^2 - 5)\, d(x^2 + 4x + 1) - (x^2 + 4x + 1)\, d(x^2 - 5)}{(x^2 - 5)^2}\right] dx;$$

$$dy = \left[\frac{(x^2 - 5)\, (2x + 4) - (x^2 + 4x + 1)(2x)}{(x^2 - 5)^2}\right] dx;$$

$$dy = \frac{(x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 22x - 5)dx}{(x^2 - 5)^2}.$$

2) $y = tg\ 2x + sen^2 x.$

$$dy = [d(tg2x) + d(sen^2 x)]dx;$$

$$dy = [(sec^2 2x)(2) + 2sen\, x \cos x]dx;$$

$$dy = 2(sec^2 2x) + 2sen\, x \cos x\, dx\,.$$

3) $y = e^{x^2} + arcsen(3x).$

$$dy = \left[d\left(e^{x^2}\right) + d(arcsen(3x))\right]dx;$$

$$dy = \left[2xe^{x^2} + \frac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}}\right]dx\,.$$

Ejemplos

Determinar $\frac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones:

1) $xy^2 + x^2 y - \dfrac{5}{x} = 0.$

2) $\begin{cases} x = 3t - t^2 \\ y = t + 2 \end{cases}.$

3) $arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln(x^2 + y^2).$

Solución:

1) $xy^2 + x^2 y - \frac{5}{x} = 0\,.$

$$d\left(xy^2 + x^2 y - \frac{5}{x}\right) = d(0);$$

$$d(xy^2) + d(x^2 y) + \left(-\frac{5}{x}\right) = 0;$$

$$x(2y)dy + y^2 dx + x^2 dy + 2xydx + \frac{5}{x^2}dx = 0\,;$$

$$\left(y^2 + 2xy + \frac{5}{x^2}\right)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0.$$

2) $\begin{cases} x = 3t - t^2 \\ y = t + 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} dx = d(3t - t^2) \\ dy = dt \end{cases}.$$

$dx = 3dt - 2t\,dt = (3 - 2t)dt = (3 - 2t)dy$; entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3 - 2t}.$$

3) $arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(x^2 + y^2)$.

$$d\left[arctg\left(\frac{y}{x}\right)\right] = d[\ln(x^2 + y^2)];$$

$$\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\left[\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\right] = \frac{1}{x^2 + y^2}[2x\,dx + 2y\,dy];$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2}(x\,dy - y\,dx) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)dy;$$

$$\left(\frac{2x + y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\frac{2y - x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0;$$

$$\left(\frac{2x + y}{x^2 + y^2}\right)dx = -\left(\frac{2y - x}{x^2 + y^2}\right)dy;$$

$$\left(\frac{2x + y}{x^2 + y^2}\right)dx = \left(\frac{x - 2y}{x^2 + y^2}\right)dy;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{x - 2y}.$$

4.10 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Sea $y = f(x)$ una función definida en $D \subset \mathbb{R}$. La función $f'(x)$ es la primera derivada de f con respecto a x, $\forall x \in D$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad \text{si el límite existe.}$$

Se puede observar que $f'(x)$ es otra función dependiente de x, por lo cual, la segunda derivada, denotada $f''(x)$, se define así:

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x + h) - f'(x)}{h} \quad \text{si el límite existe.}$$

Y así sucesivamente, se puede obtener: $f'''(x), f^{(iv)}(x), \cdots, f^{(n)}(x)$.

Se debe recordar que, la derivada de un orden determinado en un punto, existen si todas las derivadas de orden inferior son derivables en dicho punto.

Otras notaciones para las derivadas de orden superior son las siguientes:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''\,;\ \frac{d^3y}{dx^3} = y''', \cdots, \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}.$$

Al proceso de obtener derivadas de orden superior, también se lo denomina *Derivación Sucesiva*; a la derivada n-ésima, también se la denomina Derivada de Orden n.

Ejemplo 1

Calcular las segundas derivadas de las funciones dadas:

1) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 10$.

2) $g(x) = x^3\sqrt{x} + 8x$.

3) $f(t) = \sqrt{t} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

4) $g(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s^2 - 1}}$.

5) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

Solución:

1) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 10.$

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 4x;\ f''(x) = 20x^3 - 24x + 4\ .$$

2) $g(x) = x^3\sqrt{x} + 8x\ ;\ g(x) = x^3x^{\frac{1}{2}} + 8x\ ;\ g(x) = x^{\frac{7}{2}} + 8x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} + 8\ ;\ \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} + 8\right)'\ ;\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{35}{4}x^{\frac{3}{2}}\ ;\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{35}{4}x\sqrt{x}\ .$$

3) $f(t) = \sqrt{t} + \dfrac{1}{\sqrt{t}};\ f(t) = t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}$.

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\ ;\ \frac{d^2f}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\right);$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}t^{-\frac{5}{2}};\ \frac{d^2f}{dt^2} = \frac{-1}{t^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{4t^{\frac{5}{2}}};\ \frac{d^2f}{dt^2} = \frac{-1}{t\sqrt{t}} + \frac{3}{4t^2\sqrt{t}}\ .$$

4) $g(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s^2-1}}\ \ ;\ g(s) = (s^2-1)^{-\frac{1}{2}}$.

$$g'(s) = -\frac{1}{2}(s^2-1)^{-\frac{3}{2}} * \frac{d}{ds}(s^2-1);\ g'(s) = -\frac{1}{2}(s^2-1)^{-\frac{3}{2}} * 2s;$$

$$g'(s) = \frac{s}{(s^2-1)^{\frac{3}{2}}};\ g'(s) = s(s^2-1)^{\frac{3}{2}}.$$

$$g''(s) = \left[s(s^2-1)^{\frac{3}{2}}\right]'\ ;\ g''(s) = s * (s^2-1)^{\frac{-5}{2}}(2s) + (s^2-1)^{-\frac{3}{2}}\ ;$$

$$g''(s) = \frac{2s^2}{(s^2-1)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{(s^2-1)^{\frac{3}{2}}};\ g''(s) = \frac{2s^2}{\sqrt{(s^2-1)^5}} + \frac{1}{\sqrt{(s^2-1)^3}}.$$

5) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; $f(x)=\dfrac{1-x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}$.

$$f'(x)=\frac{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)-\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2};$$

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}}{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2};\ f'(x)=\frac{-x^{-\frac{1}{2}}}{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2};$$

$$f''(x)=\left[\frac{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)-x^{-\frac{1}{2}}\left(2\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^4}\right];$$

$$f''(x)=\frac{\frac{1}{2}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)x^{-\frac{3}{2}}+x^{-1}}{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^4};\ f''(x)=\frac{1+3\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}.$$

Ejemplo 2

Determinar la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

1) $y=\dfrac{1}{x^2}$.

2) $y=\dfrac{1}{3x+2}$.

Solución:

En ambos casos, se trata de establecer o determinar una fórmula de recurrencia para calcular la n-ésima derivada.

1) $y=x^{-2}$

$y'=-2x^{-3}$;

$y''=(-2)(-3)x^{-4}$;

$y'''=(-2)(-3)(-4)x^{-5}$;

$y'''=(-1)^3(2*3*4)x^{-5}$;

$y'''=\dfrac{(-1)^3(2*3*4)}{x^5}$.

Se deduce que, en general, $y^{(n)}=\frac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}}$.

Donde $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2*1$ se llama Número Factorial.

Por ejemplo:

$$y^{(5)} = \frac{(-1)^5(5+1)!}{x^{5+2}} = -\frac{6*5*4*3*2*1}{x^7} = -\frac{720}{x^7}$$

2) $y = (3x+2)^{-1}$.

$y' = (-1)(3x+2)^{-2}(3)$;

$y'' = (-1)(-2)(3x+2)^{-3}(3^2)$;

$y''' = (-1)(-2)(-3)(3x+2)^{-4}(3^3)$;

$y''' = (-1)^3(1*2*3)(3x+2)^{-4}(3^3)$;

$$y''' = \frac{(-1)^3(1*2*3)(3^3)}{(3x+2)^4}.$$

Se deduce que la n-ésima derivada está dada por la siguiente fórmula:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!\, 3^n}{(3x+2)^{n+1}}.$$

Ejemplo 3

Calcular y'' para las siguientes funciones:

1) $x + xy + y = 2$.

2) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Solución:

1) $x + xy + y = 2$

Realizando derivación implícita, se obtiene lo siguiente:

$1 + xy' + y + y' = 0$; $1 + y = y'(x+1)$;

$$y' = \frac{y+1}{x+1}.$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{y+1}{x+1}\right) = \frac{(x+1)y' + (y+1)(1)}{(x+1)^2};$$

$$y'' = \frac{(x+1)\frac{y+1}{x+1} + y + 1}{(x+1)^2};$$

$$y'' = \frac{2(y+1)}{(x+1)^2}.$$

2) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Mediante derivación implícita, se obtiene:

$2b^2x + 2a^2yy' = 0;\ y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

A partir de $2b^2x + 2a^2yy'$, se deriva implícitamente otra vez:

$b^2 + a^2yy'' + a^2y'^2\ ;\ a^2yy'' = -b^2 - a^2y'^2\ ;\ y'' = \dfrac{-b^2 - a^2y'^2}{a^2y}$.

Dado que: $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$, entonces, reemplazar en la expresión para y'' se obtiene:

$$y'' = -\frac{b^2 + a^2\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)^2}{a^2y};$$

$$y'' = -\frac{b^2 + \left(\frac{b^4x^2}{a^2y^2}\right)}{a^2y};$$

$$y'' = -\frac{b^2a^2y^2 + b^4x^2}{a^4y^3};$$

$$y'' = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3}.$$

Teniendo en cuenta que $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, entonces,

$$y'' = -\frac{b^2(a^2b^2)}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3};$$

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Ejemplo 3

Determinar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ para la siguiente función, definida paramétricamente:

$$\begin{cases} x = lnt \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$$

Solución:

Se debe aplicar derivación paramétrica, así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{\frac{1}{t}} = 2t^2;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(2t^2) = \frac{\frac{d(2t^2)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t}{\frac{1}{t}} = 4t^2;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4t^2.$$

EJERCICIOS 4.2

1) En los siguientes ejercicios, verificar las condiciones del Teorema de Rolle y hallar el valor de x_0 apropiado en el intervalo indicado:

$a)$ $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2;\quad [1,2]$.

$b)$ $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2;\quad [-1,2]$.

$c)$ $f(x) = x^3 - 12x;\quad \left[0,2\sqrt{3}\right]$.

$d)$ $f(x) = x^2 - 16x;\quad [0,4]$.

$e)$ $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - x - 3;\quad \left[\frac{3}{2},3\right]$.

2) Se puede aplicar el Teorema de Rolle para las funciones a) y b):

$a)$ $f(x) = \dfrac{x^2 - 16x}{x - 4}$.

$b)$ $f(x) = \dfrac{x^2 + 16x}{x + 4}$.

3) En los siguientes ejercicios, verificar las condiciones del Teorema del Valor Medio y encontrar el valor adecuado para x_0.

$a)$ $f(x) = x^3 + x^2 - x;\ \ en\ [-2,1]$.

$b)$ $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 5};\ \ en\ [-1,4]$.

$c)$ $f(x) = \sqrt{x + 2};\ \ en\ [4,6]$.

$d)$ $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 1}\ \ en\ \left[-\frac{1}{2},3\right]$.

$e)$ $f(x) = lnx;\ \ [1,2e]$.

4) Obtener un valor aproximado para las siguientes expresiones:

$a)$ $\sqrt[5]{31}$; $b)$ $(5{,}001)^3$; $c)$ $\dfrac{1}{999}$.

5) Calcular los siguientes límites, por medio de la Regla de L'Hopital

$a)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{senx}$.

$b)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x) - \cos x}{sen^2x}$.

$c)$ $\lim\limits_{x\to 0}(x\ cs\ x)$.

$d)$ $\lim\limits_{x\to 0}(1 - e^x)^{e^x}$.

$e)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{x^2}-\frac{2}{1-\cos x}\right).$

$f)\ \lim_{x\to 0} e^{-tg\,x}.$

$g)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(ctg\,x)}{e^{csc^2 x}}.$

$h)\ \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$

$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\ln(1-x)}.$

6) Hallar dy para las siguientes funciones:

$a)\ y=\frac{sen\,x}{x}.$

$b)\ y=\arccos(2x).$

$c)\ y=\ln(tg\,x).$

$d)\ y=\frac{1}{x^2+1}.$

$e)\ y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$

$f)\ y=\frac{2x-1}{2x+1}.$

7) En los siguientes ejercicios, encontrar para los valores dados: Δy, dy y $\Delta y - dy$:

$a)\ y=x^2-3x;\ \ x=2;\ \ \Delta x=0{,}03.$

$b)\ y=\frac{1}{x^2};\ \ x=2;\ \ \Delta x=0{,}01.$

$c)\ y=x^3+1;\ \ x=1;\ \ \Delta x=-0{,}5.$

$d)\ y=(5-x)^2;\ \ x=3;\ \ \Delta x=0{,}01.$

8) Hallar $\frac{dy}{dx}$ para las funciones dadas:

$a)\ 2xy^3+3x^2y=1.$

$b)\ xy=(x-y).$

$c)\ x^2\ln y+y^2\ln x=2.$

$d)\ \cos x+\cos y=xy.$

9) Para las funciones dadas calcular la derivada que se indica en cada caso.

$a)\ f(x)=\frac{1}{1-x};\ f^{(5)}(x).$

$b)\ f(x)=arctg\,x;f''(1).$

$c)\ f(x)=x^3\ln x;\ f^4(x).$

$d)\ y=\frac{1-x}{1+x};\ \ y^{(n)}$

$e)\ y=lnx;\ \ y^{(n)}$

$f)\ y=xe^x;\ y^{(n)}.$

10) Hallar las segundas derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ y=(1+x^2)arctg\,x.$

$b)\ y=\frac{1}{1+x^3}.$

$c)\ y=\frac{1}{a+\sqrt{x}}.$

$d)\ y=\sqrt{1-x^2}\,arcsen\,x.$

$e)\ y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$ $\qquad f)\ y = \sqrt{a^2 - x^2}\,.$

11) Demostrar que la función $y = \frac{x-3}{x+4}$ satisface la siguiente relación:

$$2y'^2 = (y-1)y''.$$

12) Demostrar que la función $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ satisface la relación que sigue:

$$xy'' = \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0.$$

13) Para las funciones dadas, determinar la derivada indicada:

$a)\ y = tg(x+y);\ \dfrac{d^3y}{dx^3}.$ $\qquad b)\ y = sen(x+y);\ \ y''\,.$

$c)\ e^{x+y} = xy\,;\ \ y''\,.$ $\qquad d)\ x^3 + y^3 - 3axy = 0;\ \ y''\,.$

14) Determinar la derivada indicada de las funciones que siguen, definidas en forma paramétrica:

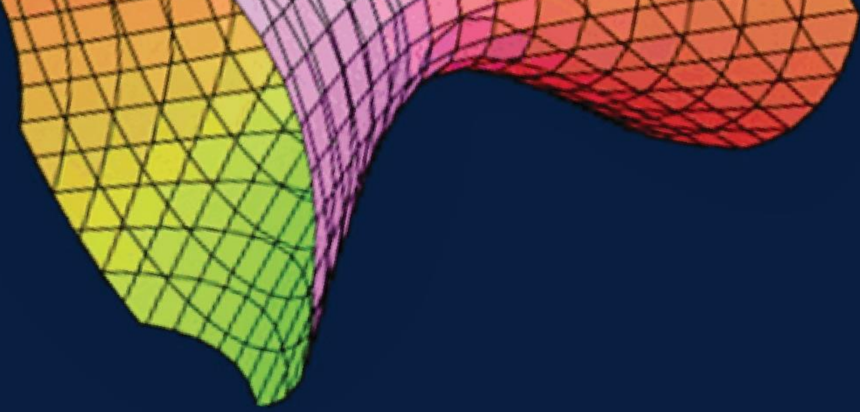
$a)\ \begin{cases} x = \mathrm{a}\cos t \\ y = asen\ t \end{cases};\ \dfrac{d^2y}{dx^2}.$

$b)\ \begin{cases} x = a(t - sen\ t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases};\ \dfrac{d^2y}{dx^2}.$

$c)\ \begin{cases} x = atcos\ t \\ y = atsen\ t \end{cases};\ \dfrac{d^2y}{dx^2}.$

15) Demostrar que se cumple la relación indicada para la siguiente función:

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^2 \end{cases};\ 36y''\left(y - \sqrt{3x}\right) = x + 3\,.$$



CAPÍTULO 5.

APLICACIONES DE LA DERIVADA

CAPÍTULO 5.

APLICACIONES DE LA DERIVADA

5.1 APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE LA DERIVADA

5.1.1 Tangente de una curva

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en x_0. La pendiente de la recta tangente a la curva de ecuación $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0) es $m = f'(x_0)$ (ver Figura 135).

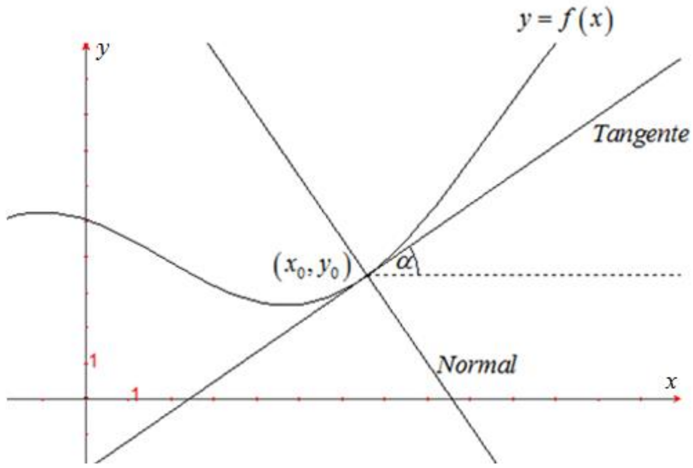


Figura 135. Gráfica de la tangente a una curva.

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0) es: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

5.1.2 Dirección de una curva

Sea α es el ángulo que forma la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con la horizontal en el punto x_0. Como su tangente trigonométrica es precisamente $f'(x_0)$, entonces es claro que:

$$tg\ \alpha = f'(x_0).$$

Por lo tanto, la dirección de la curva en el punto (x_0, y_0) es:

$$\alpha = arctg[f'(x_0)].$$

5.1.3 Recta normal a una curva

La ecuación de la recta normal a la curva cuya ecuación es $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0) viene dada por la expresión:

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Esta recta es perpendicular a la recta tangente en el punto (x_0, y_0).

5.1.4 Ángulo entre curvas

El ángulo formado por las curvas de ecuaciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ diferenciables en el punto común $P(x_0, y_0)$ es el formado por las tangentes a esas curvas dicho punto. De la Figura 136 se tiene que: $\emptyset = \alpha_2 - \alpha_1$; entonces,

$$tg\ \emptyset = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\ \alpha_2 - tg\ \alpha_1}{1 + tg\ \alpha_2\ tg\ \alpha_1}.$$

De aquí se obtiene que,

$$\emptyset = arctg\left[\frac{f_2'(x_0) - f_1{}'(x_0)}{1 + f_2{}'(x_0) f_1{}'(x_0)}\right].$$

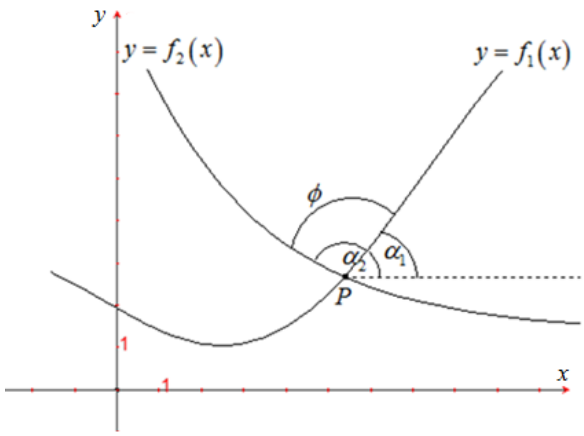


Figura 136. Representación gráfica del ángulo entre curvas.

NOTA:

Si $tg\ \emptyset > 0$, el ángulo en el punto de intersección es $\emptyset$.

Si $tg\ \emptyset < 0$, el ángulo en el punto de intersección es $180^0 - \emptyset$.

Ejemplo 1

Determinar las ecuaciones de la recta tangente y de la normal a la curva en el punto dado:

$a)\ y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + \frac{5}{2};\ \left(0, \frac{5}{2}\right)$;

$b)\ x^2 + y^2 = 1;\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

$c)\ y = log_2 x;\quad (4,2)$.

Solución:

$a)\ y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + \frac{5}{2}$.

$y' = \frac{1}{2}x - 2; \quad y'(0) = -2$.

Recta tangente a la curva en $\left(0, \frac{5}{2}\right)$:

$$y - \frac{5}{2} = -2(x - 0)\ ;\ y = -2x + \frac{5}{2}.$$

Recta normal a la curva en el punto $\left(0, \frac{5}{2}\right)$: $y - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x - 0)\ ;\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (ver Figura 137).

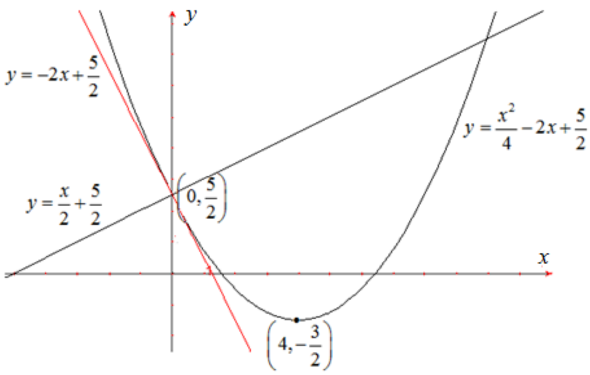


Figura 137. Representación gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x + \frac{5}{2}$.

$b)\ x^2 + y^2 = 1$.

Al derivar implícitamente, se obtiene:

$$2x + 2yy' = 0; \quad y' = -\frac{x}{y};\ y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

Ecuación de la recta tangente al círculo en el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es:

$$y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ ;\ y = -\sqrt{3}x + 2.$$

Ecuación de la recta normal al círculo en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ ;\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

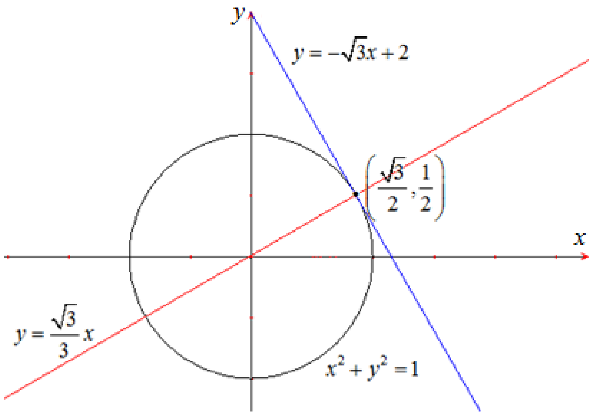


Figura 138. Representación gráfica de la función $x^2+y^2=1$ y la tangente en $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$.

$c)$ $y = log_2 x$:

$$y' = \frac{1}{x\ln 2}\ ;\ y'(4{,}2) = \frac{1}{4\ln 2}.$$

Recta tangente

$$y-2 = \frac{1}{4\ln 2}(x-4);\ y = \left(\frac{1}{4\ln 2}\right)x + \left(2-\frac{1}{\ln 2}\right).$$

Recta normal:

$$y-2 = -4\ln 2\,(x-4);$$

$$y = (-4\ln 2)x + (16\ln 2 + 2).$$

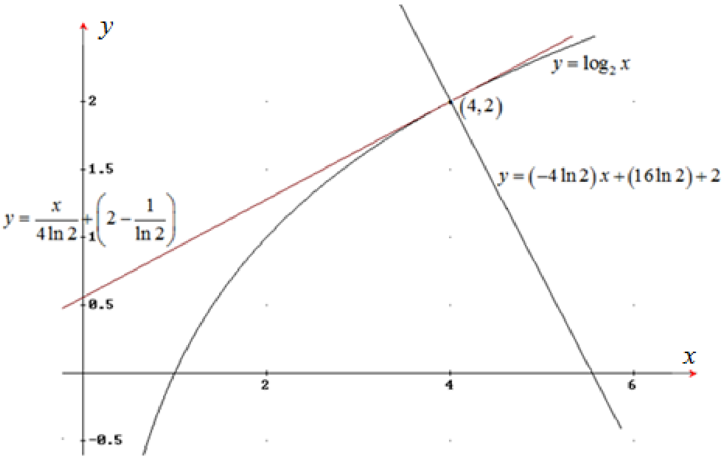


Figura 139. Representación gráfica de la función $y = log_2\, x$, y la tangente en $(4{,}2)$.

Ejemplo 2

a) Determinar los ángulos que forma la curva $y^2 = x+1$, en los puntos de intersección con los ejes cartesianos.

b) Determinar ángulo que forman las curvas $y = (x-2)^2$, $y = -4 + 6x - x^2$ en el punto de intersección

c) Demostrar que las hipérbolas $x^2 - y^2 = 1$, $xy = 1$ se cortan entre sí, formando un ángulo recto.

Solución:

a) Al derivar implícitamente, se obtiene, $2yy' = 1\,; y' = \frac{1}{2y}$.

Los puntos de corte de la parábola con los ejes coordenados son:

Eje y: $A(0,1)$ y $B(0,-1)$; eje x: $C(-1,0)$.

1) $y'(0,1) = \dfrac{1}{2(1)} = \dfrac{1}{2} = tg\ \alpha_1;\ \alpha_1 = arctg\left(\dfrac{1}{2}\right)\ ;\ \alpha_1 \cong 26^0 33'.$

2) $y'(-1,0) = \dfrac{1}{2(-1)} = -\dfrac{1}{2} = tg\alpha_2;$

$$\alpha_2 = arctg\left(-\frac{1}{2}\right);\ \alpha_2 = 180^0 - arctg\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$\alpha_2 \cong 180^0 - 26^0 33';\ \alpha_2 \cong 153^0 47'\ .$$

3) $y'(-1,0) = \dfrac{1}{2(0)} = \infty;\ tg\alpha_3 = \infty;\ \alpha_3 = arctg\ \infty;\ \alpha_3 = 90^0\ .$

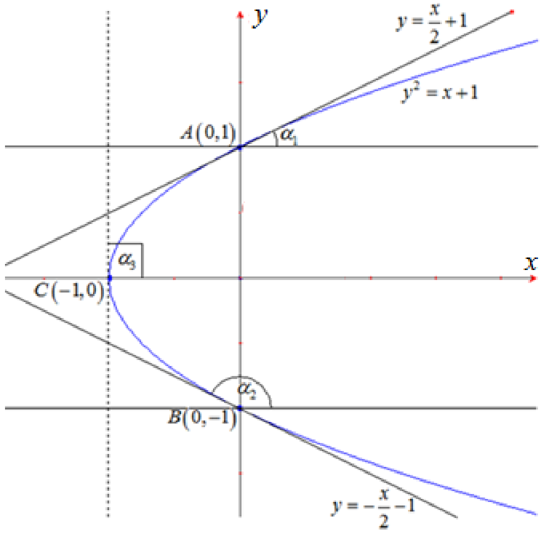


Figura 140. Gráfica de $y^2 = x + 1$ y ángulos en los puntos de intersección con los ejes.

b) Los puntos de intersección de las parábolas son $P(1,1)\ y\ Q(4,4)$.

Los ángulos $\emptyset\ y\ \emptyset_1$ son iguales (ver Figura 141).

Las derivadas:

$$y = (x-2)^2; y' = 2(x-2);\ y'(4) = 4.$$

$$y = -4 + 6x - x^2; y' = 6 - 2x\ ;\ y'(4) = 2.$$

Por tanto,

$$tg\ \emptyset = \frac{-2-4}{1+(-2)(4)} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}\ ;\ \emptyset = arctg\left(\frac{6}{7}\right) \approx 40^0 36'.$$

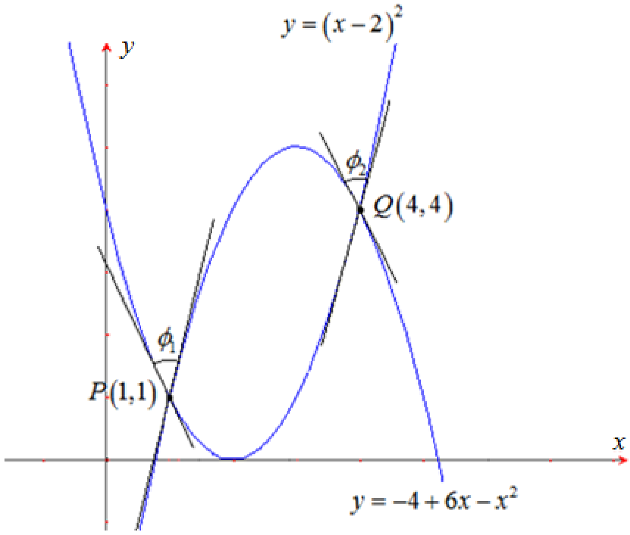


Figura 141. Gráfica de $y = (x-2)^2$; $y = -4 + 6x - x^2$, y ángulos en los puntos de intersección

c) Puntos de intersección de las hipérbolas $x^2 - y^2 = 1$, $xy = 1$.

Se debe resolver la ecuación $x^4 - x^2 - 1 = 0$.

Las raíces de la ecuación anterior son: $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{5}}$. Por lo tanto, los puntos de intersección de las dos curvas, son:

$$P\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}\right)\ \ y\ \ Q\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}\right).$$

Estos puntos son simétricos respecto al origen de coordenadas.

Al derivar $xy = 1$, se obtiene, $y' = \frac{1}{x^2}$; por lo tanto,

$$y'(x_1, y_1) = -\frac{2}{1+\sqrt{5}}.$$

Al derivar $x^2 - y^2 = 1$, se obtiene, $2x - 2yy' = 0$; de donde, $y' = \frac{x}{y}$; por lo tanto,

$$y'(x_1, y_1) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

De modo que:

$$tg\,\emptyset = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}}}{1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)};\ \ tg\,\emptyset = \infty;\text{entonces}, \emptyset = 90^0.$$

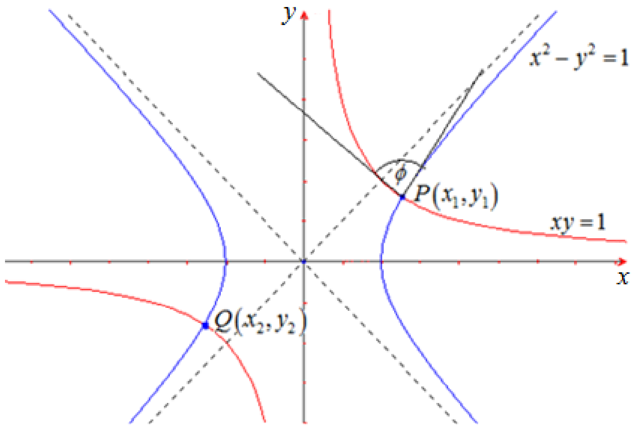


Figura 142. Gráfica de $x^2 - y^2 = 1$; $xy = 1$ y ángulos en los puntos de intersección

5.2 RAZÓN DE CAMBIO

El concepto de Razón de Cambio, también conocida como Rata de Cambio o Tasa de Cambio, se refiere, a la medida en la cual una determinada variable se modifica con relación a otra.

Si $y = f(x)$ es una función de x, la razón de cambio de y por unidad de cambio de x en x_1, es precisamente $f'(x_1)$, si esta existe.

Para resolver problemas de variaciones de magnitudes con respecto al tiempo, se propone el esquema siguiente:

1) Entender el problema y determinar las variables intervinientes.

2) Establecer la relación funcional entre las variables y la variación que se desconoce.

3) Derivar con respecto al tiempo, reemplazar datos y obtener la variación desconocida.

4) Concluir.

Ejemplo 1

Una lámina metálica en forma de triángulo equilátero, se calienta y cada lado se dilata a una tasa de $\frac{1}{2}$ cm/h. Calcular la velocidad con que se dilata el área del triángulo, cuando los lados miden 20 cm.

Solución:

Inicialmente se calcula el área del triángulo en función del lado.

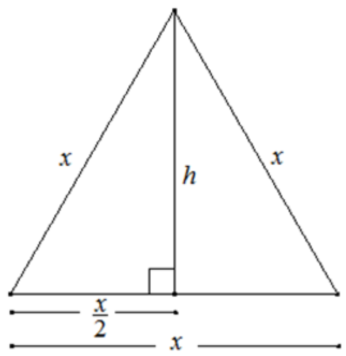


Figura 143. Representación del triángulo del problema

Sea x la longitud del triángulo, medida en cm; entonces, el área es:

$$A = \frac{1}{2}xh. \qquad (1)$$

De la Figura, se tiene que:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2\ ;\ h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4}\ ;\ h^2 = \frac{3x^2}{4};$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}x. \qquad (2)$$

Al sustituir (2) en (1), se obtiene,

$$A = \frac{1}{2}x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right);$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2. \qquad (3)$$

Al derivar la expresión (3) respecto a t, se obtiene,

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x)\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x)\frac{dx}{dt}.$$

Dado que, $x = 20\ cm$; $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\ cm/h$; entonces,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}(20)\left(\frac{1}{2}\right) = 5\sqrt{3} \cong 8{,}67.$$

Por tanto, el área se dilata a una velocidad de 8,67 cm^2/h.

Ejemplo 2

Dos lados paralelos de un rectángulo, se alargan a una tasa de 3 cm/seg, en tanto que los otros dos lados se acortan de manera que la figura resultante, es en todo el tiempo, un rectángulo de área constante igual a 60 cm.

Calcular la variación que experimenta el perímetro, cuando la longitud de los lados que se alargan llega a:

a) 6 cm.

b) 10 cm.

c) Determinar las dimensiones del rectángulo cuando el perímetro deja de disminuir.

Solución:

Sean:

x: longitud en cm de los lados que se alargan.

y: longitud en cm de los otros lados en t.

P: perímetro.

A: área.

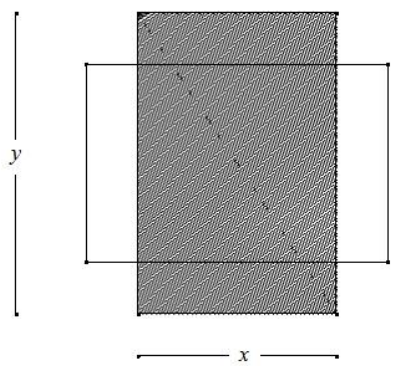


Figura 144. Representación gráfica del problema

Entonces:

$$P = 2(x + y). \qquad (1)$$

Al derivar la expresión (1) con respecto a t, se obtiene:

$$\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right). \qquad (2)$$

Ahora bien, el área se calcula como sigue:

$$A = xy. \qquad (3)$$

Al derivar la expresión (3) con respecto a t, se obtiene:

$$\frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}.$$

Como $A = 60 \;\; (constante)$, entonces

$$x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0. \qquad\qquad (4)$$

a) Cuando $x = 6\, cm \;\; y = 10\, cm$, se tiene que:

$$\frac{dx}{dt} = 3\, cm/seg.$$

Al reemplazar en (4), se obtiene:

$$(6)\frac{dy}{dt} + (10)(3) = 0; \; \frac{dy}{dt} = -5\, cm/seg.$$

Se reemplaza en (2):

$$\frac{dP}{dt} = 2(3-5) = -4\, cm\,.$$

Aquí el perímetro disminuye.

b) Cuando $x = 10\, cm, \;\; y = 6\, cm, \;\; \frac{dx}{dt} = 3\, cm/seg.$

La sustitución en (4), produce lo siguiente:

$$(10)\frac{dy}{dt} + (6)(3) = 0\,; \frac{dy}{dt} = -1{,}8\, cm/seg.$$

Se reemplaza en (2):

$$\frac{dP}{dt} = 2(3-1{,}8) = 2{,}4\, cm.$$

Aquí el perímetro aumenta.

c) El perímetro deja de disminuir cuando $\frac{dP}{dt} = 0$. Esto ocurre cuando $\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dt} = -3$. Por tanto, $x(-3) + y(3) = 0$, entonces $x = y$. De esta manera, se obtiene un cuadrado de lado x.

   $A = x^2 = 60\, cm^2$; $x = \sqrt{60}\, cm$; entonces, dado que $x = y$, se obtiene que, $x = y = 2\sqrt{15}\, cm$.

Ejemplo 3

De un recipiente de forma cónica invertida, sale agua a razón de $2\, cm^3/seg$. Si el radio del cono es $5\, cm$ y la altura $10\, cm$, determinar:

a) La variación que experimenta el nivel del agua, en el instante en que la superficie libre ésta a $8\, cm$ de la base del recipiente.

b) La variación que experimenta la superficie libre del líquido.

c) La variación del perímetro de la superficie libre.

Solución:

El volumen del cuerpo de agua en el cono de radio r y altura h es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \qquad (1)$$

Por semejanza de triángulos, se tiene la siguiente relación:

$$\frac{10}{5} = \frac{h}{r};\ r = \frac{1}{2}h\,.$$

Al reemplazar r en (1), se obtiene:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h;$$

$$V = \frac{\pi h^3}{12}\,. \qquad (2)$$

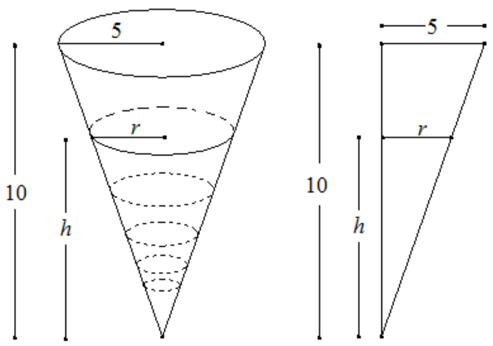


Figura 145. Representación gráfica del problema

Al derivar la expresión (2) con respecto t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}\,. \qquad (3)$$

a) Dado que $\frac{dV}{dt} = 2\,{}^{cm^3}\!/_{seg}$, $h = 8\ cm$, entonces al reemplazar en (3) se obtiene:

$$-2 = \frac{\pi}{4}8^2\frac{dh}{dt}\,;\frac{dh}{dt} = \frac{(-2)(4)}{64\pi}\ ;\ \frac{dh}{dt} = -\frac{1}{8\pi} \cong -0{,}0397\frac{cm}{seg}.$$

El nivel de la superficie libre del líquido, disminuye a una tasa de 0,0397 cm/seg.

b) El área de la superficie libre es $A = \pi r^2$ y $r = \frac{1}{2}h$, entonces:

$$A = \pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 \; ; \; A = \frac{\pi h^2}{4} \,. \qquad\qquad (4)$$

Derivamos (4) con respecto a t:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi}{2}h\frac{dh}{dt} \,. \qquad\qquad (5)$$

Como $h = 8cm$, $\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{8\pi}$, entonces al reemplazar en (5) se obtiene:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi}{2}(8)\left(-\frac{1}{8\pi}\right) = -\frac{1}{2} = -0{,}5\; cm^2/seg \,.$$

El área de la superficie libre, disminuye a una tasa de 0,5 cm^2/seg

c) El perímetro de la superficie libre es:

$$P = 2\pi r = 2\pi\left(\frac{h}{2}\right);$$

$$P = \pi h. \qquad\qquad (6)$$

Al derivar (6) con respecto a t:

$$\frac{dP}{dt} = \pi\frac{dh}{dt};\; \frac{dP}{dt} = \pi\left(-\frac{1}{8\pi}\right) = -\frac{1}{8} \approx -0{,}125\; cm/seg.$$

El perímetro de la superficie libre, disminuye a una velocidad de 0,125 cm/seg.

5.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Para la resolución que involucra la obtención de máximos y mínimos, se debe seguir los siguientes pasos secuencialmente:

1) Formular la función que se desea optimizar (obtener máximo o mínimo), la cual se debe expresar en términos de una sola variable $y = f(x)$.
2) Calcular la primera derivada de la función $f'(x)$.
3) Igualar a cero la primera derivada y resolver la ecuación resultante para obtener puntos críticos: $f'(x) = 0; x^*$: puntos críticos.
4) Calcular la segunda derivada de la función $f''(x)$.
5) Sustituir los puntos críticos en la segunda derivada y decidir el tipo de punto crítico:

   $f''(x^*) < 0$ entonces x^* define un máximo.

   $f''(x^*) > 0$ *entonces* x^* define un mínimo.

En cualquiera de los casos, $f(x^*)$ es óptima.

Ejemplo 1

Un rectángulo tiene dos de sus vértices sobre el eje x y los otros dos sobre las rectas:

$$y = x + 1;\ y = -x + 6.$$

Determinar el área máxima que puede tener el rectángulo.

Solución:

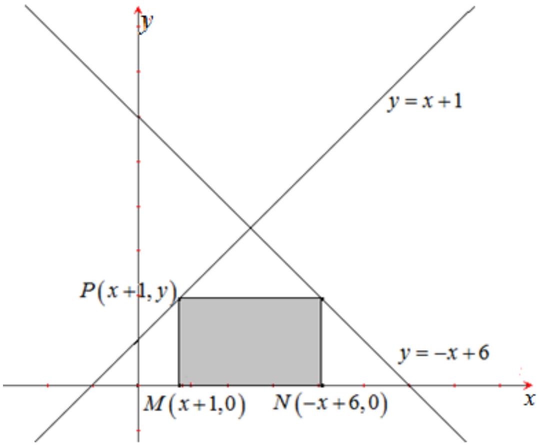


Figura 146. Representación gráfica del problema

El área del rectángulo $MNPQ$ es:

$$A = \overline{MN} * \overline{MP}\,.$$

Esto es:

$$A = [(-x + 6) - (x + 1)] * y\,; A = (-2x + 5)(x + 1);$$

$$A = -2x^2 + 3x + 5. \qquad (1)$$

Al derivar (1) con respecto a x se obtiene:

$$\frac{dA}{dt} = -4x + 3.$$

Al igualar a cero la derivada, se obtiene los puntos críticos:

$$\frac{dA}{dx} = 0;\ -4x + 3 = 0;\ \ x = \frac{3}{4}\ \ \text{(Punto Crítico).}$$

Se calcula la segunda derivada:

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -4 < 0.$$

Dado que la segunda derivada es menor que cero, entonces:

$$x = \frac{3}{4} \; maximiza \text{ la función } A.$$

Ahora bien, $y = x + 1;\; y = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$.

Por lo tanto, la altura del rectángulo es $\frac{7}{4}$ y la base es $(-2x + 5) = -2\left(\frac{3}{4}\right) + 5 = \frac{7}{2}$.

De manera que, las dimensiones del rectángulo con área máxima son:

$$\overline{MN} = \frac{7}{2};\quad \overline{MP} = \frac{7}{4}\;;\; A_{máx} = \frac{7}{2} \times \frac{7}{4} = \frac{49}{8}\; u^2.$$

Ejemplo 2

Se requiere construir un recipiente cilíndrico con tapa de $100\, cm^3$ de volumen. Determinar las dimensiones del cilindro, de manera que la cantidad de material utilizado en la construcción del cilindro sea la mínima.

Solución:

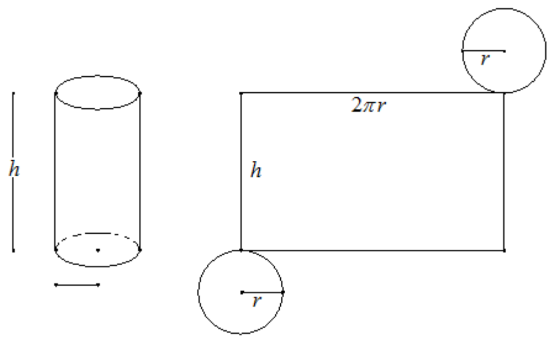


Figura 147. Representación gráfica del problema

Sean h y r las dimensiones del cilindro; su volumen es:

$$V = \pi r^2 h = 100;$$

$$\pi r^2 h = 100. \qquad (1)$$

La cantidad de material utilizado en la construcción del cilindro, es el área total del cilindro, esto es:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h. \qquad (2)$$

Al despejar h de la ecuación (1), se obtiene:

$$h = \frac{100}{\pi r^2}\,. \qquad (3)$$

Al sustituir (3) en (2), se obtiene:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{100}{\pi r^2}\right). \qquad (4)$$

La derivada de (4) con respecto a r, es:

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r + \frac{200}{r^2}.$$

Al igualar a cero la derivada, se obtiene los puntos críticos:

$$4\pi r + \frac{200}{r^2} = 0\ ;\ r^3 = \frac{50}{\pi}\ ;\ r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \quad \text{(Punto crítico).}$$

La segunda derivada es:

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{400}{r^3};\ \frac{d^2}{dr^2}\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right) = \frac{9\pi}{2} > 0.$$

Por lo tanto, $r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$ minimiza el área.

Al reemplazar r en (3), se obtiene,

$$h = \frac{100}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^2}\ ; h = 2\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right).$$

Por lo tanto, el área mínima es, $A_{min} = \frac{300}{\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}} \quad u^2$.

Ejemplo 3

Cómo se debe cortar un alambre de $1m$ de longitud, para forrar una de las partes de un cuadrado y con la otra un círculo, de modo que la suma de las áreas de las figuras obtenidas sea mínima.

Solución:

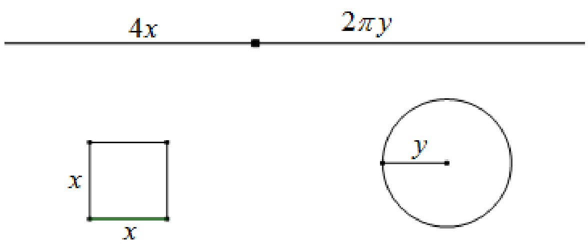


Figura 148. Representación gráfica del problema

Sean:

x: longitud del lado del cuadrado en metros.

y: longitud del lado del círculo en metros.

Área del cuadrado, $A_1 = x^2$.

Área del círculo, $A_2 = \pi y^2$.

La suma de las áreas es:

$$A = x^2 + \pi y^2. \qquad (1)$$

Dado que, el perímetro del cuadrado es $4x$ y el perímetro del círculo es $2\pi y$, entonces,

$$4x + 2\pi y = 1. \qquad (2)$$

De la ecuación (2), se tiene:

$$y = \frac{1-4x}{2\pi}. \qquad (3)$$

Al reemplazar (3) en (1), se obtiene:

$$A = x^2 + \pi\left(\frac{1-4x}{2\pi}\right)^2;$$

$$A = x^2 + \frac{1}{4\pi}(1-4x)^2. \qquad (4)$$

Al derivar (4) con respecto a x, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dA}{dx} = 2x - \frac{2}{\pi}(1-4x).$$

Al igualar a cero la derivada, se llega a lo siguiente:

$$2x - \frac{2}{\pi}(1-4x) = 0;$$

$$x = \frac{1}{\pi+4} \text{ (Punto crítico).}$$

La segunda derivada es,

$$\frac{d^2A}{dx^2} = 2 + \frac{8}{\pi} > 0.$$

Entonces $x = \frac{1}{\pi+4}$ minimiza la función A.

La sustitución de x en (3), conduce a:

$$y = \frac{1 - 4\left(\frac{1}{\pi + 4}\right)}{2\pi}; \; y = \frac{1}{2(\pi + 4)}.$$

Por lo tanto:

$$A_{min} = \left(\frac{1}{\pi + 4}\right)^2 + \pi\left(\frac{1}{2(\pi + 4)}\right)^2;$$

$$A_{min} = \frac{1}{4(\pi + 4)} \; m^2.$$

Ejemplo 4

Hallar dos números positivos, cuya suma sea 20 y además:

a) Su producto sea máximo.

b) La suma de sus cuadrados sea mínima.

c) El producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro, sea mínimo.

Solución:

a) Sea x y $20 - x$ los números cuya suma es 20; sea $P = x(20 - x)$

$$P = 20x - x^2 \, ; \; \frac{dP}{dx} = 20 - 2x.$$

Al igualar la derivada a cero, se obtiene:

$$20 - 2x = 0; \; x = 10 \quad \text{(Punto Crítico)}.$$

La segunda derivada de P con respecto a x, es:

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -2 > 0.$$

Por lo tanto, $x = 10$, maximiza P. El otro número es $y = 20 - 10 = 10$.

En consecuencia: $P_{máx} = 10 * 10 = 100$.

b) Sea $C = x^2 + (20 - x)^2$.

$$\frac{dC}{dx} = 2x - 2(20 - x) = 4x - 40.$$

Al igualar a cero la derivada, se obtiene:

$$4x - 40 = 0; \; x = 10.$$

La segunda derivada es:

$$\frac{d^2C}{dx^2} = 4 > 0.$$

Por lo tanto, $x = 10$ minimiza a C; el otro número es 10.

En consecuencia, $C_{mín} = 10^2 + 10^2 = 200$.

c) $D = x^2(20 - x)^3$.

$$\frac{dD}{dx} = -3x^2(20 - x)^2 + 2x(20 - x)^3 = 0;$$

$$-3x^2(20 - x)^2 + 2x(20 - x)^3 = 0; -5x^2 + 40x = 0; -5x(x - 8) = 0.$$

Puntos críticos: $x = 0$; $x = 8$.

Puesto que $x = 0$, es inadmisible; entonces, el punto crítico es $x = 8$.

Se calcula la segunda derivada:

$$\frac{d^2D}{dx^2} = 1600x - 3600x^2 + 240x^3 - 5x^4;$$

$$\frac{d^2D}{dx^2}(8) = -5760 > 0.$$

Por tanto, $x = 8$ maximiza a D; el otro número es $20 - 8 = 12$.

En consecuencia, $D_{máx} = 8^2(12)^3 = 110592$.

5.4 TRAZADO DE CURVAS DE FUNCIONES

Para trazar la gráfica de la función, cuya ecuación es $y = f(x)$, se procede de la siguiente manera:

a) Encontrar las intersecciones de la gráfica con los ejes x y y para lo cual se hace $x = 0$ y $y = 0$ respectivamente.

b) Determinar el dominio de definición de la función.

c) Determinar (si existen) las asíntotas de la función así:

- $y = c$ es *asíntota horizontal* si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$.
- Para hallar una asíntota vertical, se consideran los valores de x para los cuales $f(x)$ no está definida. Si $f(x)$ no está definida en $x = a$ entonces $x = a$ es *Asíntota Vertical*.
- Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional, en la cual, el grado de $p(x)$ es mayor en una unidad que el grado de $q(x)$, entonces al dividir $p(x)$ entre $q(x)$ se obtiene:

  $f(x) = mx + b + r(x)$ donde $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = 0$.

  De esta manera $y = mx + b$ es *Asíntota Oblicua*.

  En general $y = mx + b$ es *asíntota oblicua* si:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = m \;\; y \;\; \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = b.$$

d) Calcular la primera derivada de $f(x)$ con respecto a x, $f'(x)$.

e) Igualar a cero esta derivada y resolver para x, esto es: $f'(x) = 0$. De aquí se obtienen puntos críticos.

f) **Criterio de la Primera Derivada**. Determinar regiones de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ y establecer máximos y/o mínimos (*Criterio de la Primera Derivada*), así:

Si x_0 es punto crítico, se pueden presentar los casos, que se muestran en las siguientes gráficas:

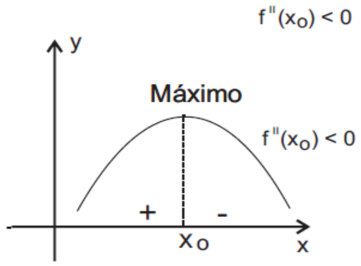


Fig. 4.a

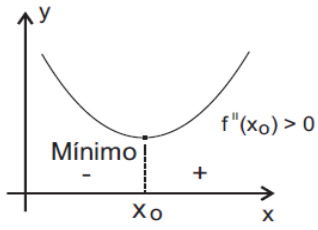


Fig. 4.b

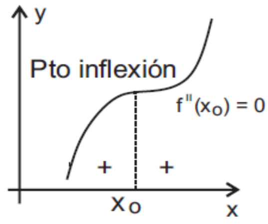


Fig. 4.c

- Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa al pasar por x_0, entonces $(x_0, f(x_0))$ es *Máximo Relativo*. (Fig. 4.a).
- Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva al pasar por x_0, entonces $(x_0, f(x_0))$ es *Mínimo Relativo*. (Fig. 4.b).
- Si $f'(x)$ es positiva (o negativa) en los dos lados de x_0, entonces $(x_0, f(x_0))$ no es ni máximo ni mínimo; es punto de *Inflexión*. (Fig. 4.c).

g) Calcular la segunda derivada $f''(x)$. Resolver la ecuación algebraica $f''(x) = 0$ para x, permite obtener puntos de inflexión, si falla el criterio de la primera derivada.

h) **Criterio de la segunda derivada**. Si x_0 es punto crítico y:

- $f''(x_0) < 0$, entonces, existe *Máximo Relativo* en $(x_0, f(x_0)$ y $f(x)$ tiene concavidad negativa.
- Si x_0 es punto crítico y $f''(x_0) > 0$, existe *Mínimo Relativo* en $(x_0, f(x_0)$ y $f(x)$ tiene concavidad positiva.

i) En algunos casos conviene tabular para algunos valores de x.

Ejemplo 1

Construir la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2$.

Solución:

- Intersecciones con los ejes: *si* $x = 0$; $f(x) = 0 \Longrightarrow (0,0)$ pertenece a la curva.

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-6) = 0 \Rightarrow x = 0 \;\; y \;\; x = 6.$

Por lo tanto, (6,0) pertenece a la curva.

- Dominio de definición: por tratarse de una función polinómica, el dominio de la función son los números reales.
- Asíntotas: no tiene asíntotas verticales ni horizontales, por tratarse de una función polinómica.
- Intervalos de crecimiento, decrecimiento y puntos críticos:

$f'(x) = 3x^2 - 12x.$

Al igualar a cero la primera derivada, se obtienen los puntos críticos:

$3x^2 - 12x = 0; 3x(x-4) = 0; x = 0 \; y \;\; x = 4$ son puntos críticos.

Estos dos puntos críticos permiten establecer los intervalos $(-\infty, 0)$; $(0,4)$; $(4, \infty)$.

Se toman los puntos de prueba $-1 \in (-\infty, 0)$; $1 \in (0,4) \; y \;\; 7 \in (4, \infty)$ y se analiza el signo de la primera derivada.

$f'(-1) = 15 > 0 \Rightarrow$ en $(-\infty, 0)$ f es creciente.

$f'(1) = -9 < 0 \Rightarrow En\ (0,4)$ f es decreciente.

$f'(7) = 63 > 0 \Rightarrow En\ (4, \infty)$ f es creciente.

Por tanto, por el criterio de la primera derivada se cumple lo siguiente:

$\big(0, f(0)\big) = (0,0)$ es punto máximo relativo.

$\big(4, f(4)\big) = (4, -32)$ es punto mínimo relativo.

- Puntos de inflexión y concavidad.

Se calcula la segunda derivada y se iguala a cero.

$f''(x) = 6x - 12; 6x - 12 = 0; x = 2.$

$\big(2, f(2)\big) = (2, -16)$ es punto de inflexión.

Además,

$f''(1) = -12 < 0;$ la curva tiene concavidad negativa en $(-\infty, 2)$.

$f''(3) = 6 > 0;$ la curva tiene concavidad positiva en $(2, \infty)$.

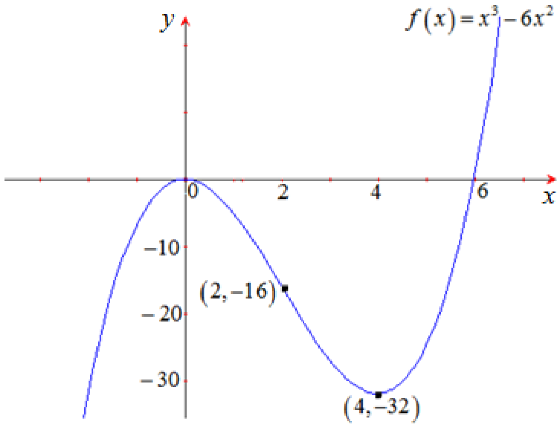


Figura 149. Representación gráfica $f(x) = x^3 - 6x^2$

Ejemplo 2

Trazar la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{6x}{(x+1)^2}.$$

Solución:

- Intersecciones con los ejes:

  Si $x = 0$, entonces, $f(x) = y = 0 \Longrightarrow (0,0)$ punto de intersección con los ejes.

  Si $x = 0$, entonces, $f(x) = y = 0$; por lo tanto, el punto $(0,0)$ es el punto de intersección con los ejes.

- Dominio: está constituido por los reales a excepción de $x = -1$.

- Asíntotas: $x = -1$ es asíntota vertical. No tiene asíntotas oblicuas. $y = 0$ (eje x) es asíntota horizontal en las cercanías de $-\infty$ y $+\infty$.

- Intervalos de crecimiento, decrecimiento y puntos críticos.

  La derivada de $f(x)$ igualada a cero produce puntos críticos y determina intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

$$f'(x) = \frac{6(1-x)}{(x+1)^3}.$$

Se encuentran puntos críticos al igualar a cero la primera derivada.

$$f'(x) = 0; \ \frac{6(1-x)}{(x+1)^3} = 0.$$

De donde, $x = 1$ es el único punto crítico.

Se analiza el signo de la primera derivada en los puntos de prueba: $x = -2$; $x = \frac{1}{2}$; $x = 2$, que pertenecen respetivamente a los intervalos $(-\infty, -1)$; $(-1,1)$; $(1, +\infty)$.

$$f'(-2) = -18 < 0 \Longrightarrow f'(x) \text{ es decreciente en } (-\infty, -1).$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{9} > 0 \Longrightarrow f'(x) \text{ es creciente en } (-1{,}1).$$

$$f'(2) = -\frac{2}{9} < 0 \Longrightarrow f'(x) \text{ es decreciente en } (1, +\infty).$$

Por lo tanto, según el criterio de la primera derivada, se presenta un máximo relativo en el punto, $\left(1, f(1)\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Por otra parte, se debe tener en cuenta que en $x = -1$ la función no está definida, además, que $x = -1$ es asíntota vertical.

- Puntos de inflexión y concavidad:

$$f''(x) = \frac{12(x-2)}{(x+1)^4}.$$

La segunda derivada igualada a cero, produce puntos de inflexión

$$f''(x) = 0;\ \frac{12(x-2)}{(x+1)^4} = 0;\ x = 2.$$

Entonces el punto de inflexión es $\left(2, f(2)\right) = \left(2, \frac{4}{3}\right)$.

Por otra parte:

$$f''(-2) = -48 < 0;\ \text{se presenta concavidad negativa en } (-\infty, -1).$$

$$f''(0) = -24 > 0;\ \text{se presenta concavidad negativa en } (-1{,}1).$$

$$f''(3) = \frac{3}{64} > 0;\ \text{se presenta concavidad positiva en } (1, +\infty).$$

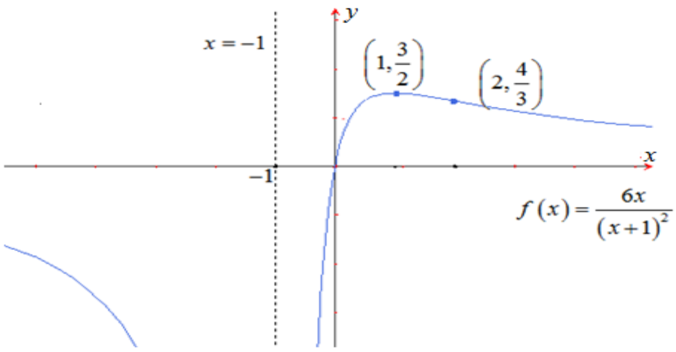


Figura 150. Representación gráfica $f(x) = \frac{6x}{(x+1)^2}$

Ejemplo 3

Trazar la gráfica de la función que sigue:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{2 - x}.$$

Solución:

- Intersección con los ejes:

  Si $x = 0$, entonces, $f(x) = y - 1$; por tanto, el punto $(0,1)$ es intercepto con el eje y.

- Dominio: $\mathbb{R} - \{2\}$.

- Asíntotas:

  Verticales $x = 2$.

  Oblicuas: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x(2 - x)} = -1.$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 2}{2 - x} + x \right] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2}{2 - x} \right) = 0.$$

Por lo tanto, la asíntota oblicua es: $y = x$.

- Puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 2}{(x - 2)^2};$$

$$f'(x) = 0; \frac{-x^2 + 4x - 2}{(x - 2)^2} = 0;\ x = 2 - \sqrt{2}\ ;\ x = 2 + \sqrt{2}\,.$$

  Puntos críticos: $x = 2 - \sqrt{2}\ ;\ x = 2 + \sqrt{2}\,.$

Se toman los puntos de prueba $x = 0$; $x = 1$; $x = 3$; $x = 4$ que pertenecen a los intervalos $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$; $(2 - \sqrt{2}, 2)$; $(2, 2 + \sqrt{2})$; $(4, \infty)$ respectivamente y se analiza el signo de la primera derivada.

$$f'(0) = -\frac{1}{2} < 0;\ f \text{ decrece en el intervalo } (-\infty, 2 - \sqrt{2}).$$

$$f'(1) = \frac{1}{9} > 0;\ f \text{ crece en el intervalo } (2 - \sqrt{2}, 2).$$

$$f'(3) = 1 > 0;\ f \text{ crece en el intervalo } (2, 2 + \sqrt{2}).$$

$$f'(4) = -\frac{1}{2} < 0;\ f \text{ decrece en el intervalo } (4, \infty).$$

Por el criterio de la primera derivada, se tiene:

$$\left(2 - \sqrt{2}, f\left(2 - \sqrt{2}\right)\right) \cong (0.5857, 0.8284) \text{ punto mínimo relativo.}$$

$\left(2+\sqrt{2}, f\left(2+\sqrt{2}\right)\right) \cong (3.4142, -4.828)$ punto máximo relativo.

- Concavidad y puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{-4}{(x-2)^3} \; ; \; f''(x) = 0; \; \frac{-4}{(x-2)^3} = 0.$$

De aquí se concluye, que no hay puntos de inflexión.

Por otra parte:

$f''(0) = \frac{1}{2} > 0$, entonces, en el intervalo $(-\infty, 2)$ se presenta concavidad positiva.

$f''(3) = -4 < 0$, entonces, en el intervalo $(2, \infty)$ se presenta concavidad negativa.

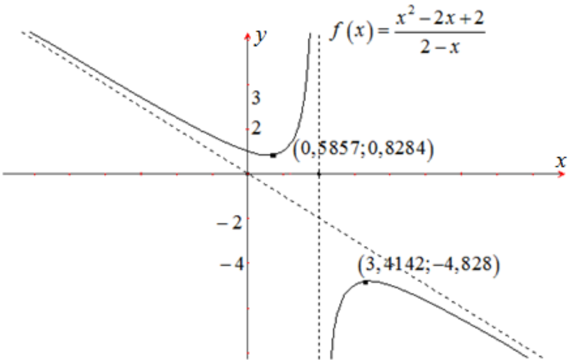


Figura 151. Representación gráfica $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{2-x}$

EJERCICIOS 5.1

1) Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y de la normal a la curvas dadas, en los puntos indicados; además, trazar las gráficas respectivas.
    a) $x^2 - y^2 = 7$; $(4-3)-$
    b) $x = 4y^2$; $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.
    c) $4x^2 - 8x - 2y = 5$; $\left(2, \frac{5}{2}\right)$.
    d) $4x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$; $(1, -3)$.
    e) $y = e^{-x}$; $(0,1)$.
    f) $y = senx$; $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
    g) $y = \frac{4x+3}{3x-2}$; $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.

2) Determinar los puntos de la curva $y = x^5 - 20x^2$ donde la tangente es horizontal.

3) Hallar los ángulos que forman las curvas dadas en los puntos de intersección

$$a)\ y = x^2;\ \ x = \frac{1}{2}(y^2 - 3y);\ b)\ y^2 - x - 1;\ \ x^2 + y^2 = 13; c)\ x = \frac{2}{y};\ \ x = log_2 y.$$

4) De un recipiente de $3m$ de radio y 10 de profundidad sale agua a una tasa de $4\ m^3/min$.

   a) Calcular la variación que experimenta la altura de la superficie y el radio cuando la profundidad del agua es $6m$.

   b) Calcular la variación que experimenta el área de la superficie libre y el perímetro de la superficie libre, cuando la profundidad es de $6m$.

5) Considerar un tetraedro regular, con arista $10cm$. Si las aristas aumentan de longitud a razón de $0{,}1\ cm/min$. Calcular con qué velocidad aumenta el volumen y el área total.

6) De un depósito de forma de prisma recto, cuya sección es un triángulo equilátero con lado $1m$ y altura $10m$, sale agua a velocidad de $800\ cm^3/min$; calcular:

   a) Velocidad de diminución del nivel del agua.

   b) Tiempo después del cual, el depósito está vacío.

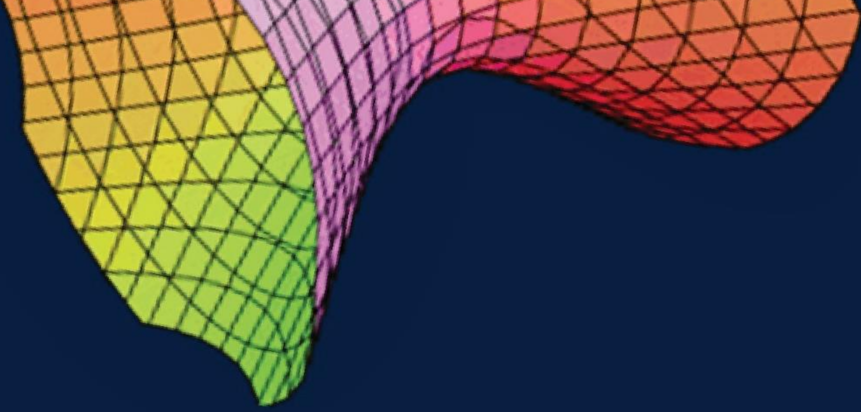
7) Una caja abierta de base cuadrado, debe tener un volumen de $6400\ pg^3$. Si el costo del material de la base es de \$75 por pg^2 y el costado \$25 por pg^2. Determinar las dimensiones de la caja, de manera que el costo de los materiales de fabricación de la misma, sea mínimo.

8) Determinar las dimensiones del cilindro recto de área lateral máxima, que se puede inscribir en una esfera de $8\ cm$ de radio.

9) Determinar la ecuación de la recta, que al pasar por el punto $P(3,4)$ determina con los ejes coordenados, un triángulo de área mínima en el primer cuadrante.

10) Calcular los valores aproximados de las siguientes expresiones:

$$a)\ \sqrt[3]{8{,}02}\ ;\ b)\ sen42^{\circ}\ ;\ c)\ (8{,}9)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{(8{,}9)^{\frac{1}{2}}} + 5\ .$$



RESPUESTAS DE EJERCICIOS PROPUESTOS

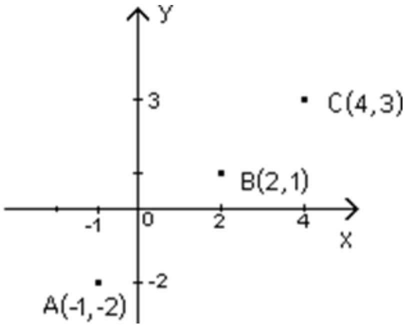
RESPUESTAS DE EJERCICIOS PROPUESTOS

CAPÍTULO 1

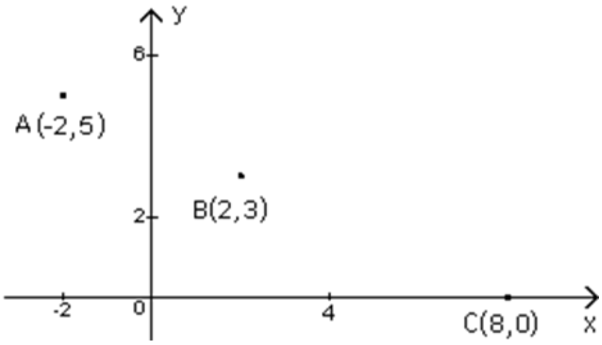
FUNCIONES REALES

EJERCICIOS 1.1

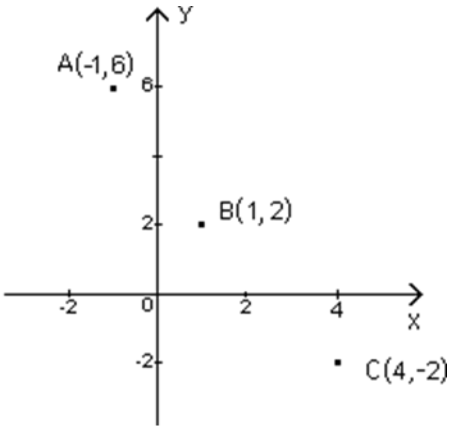
1) a)



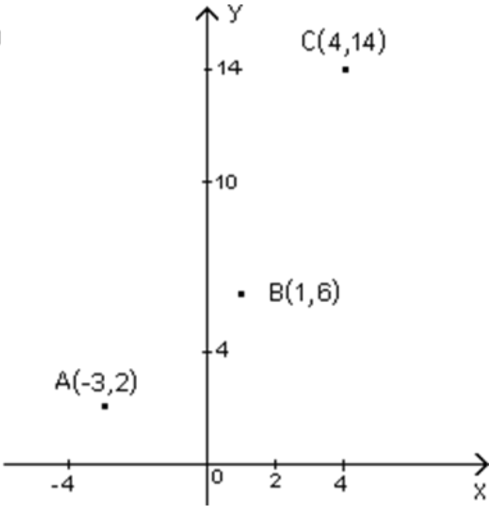
b)



c)

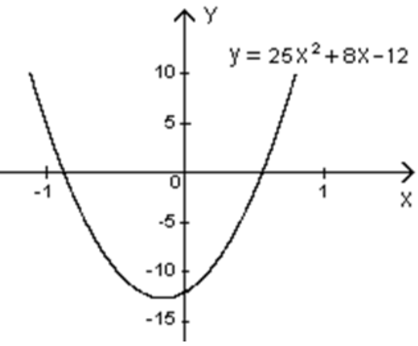


d)

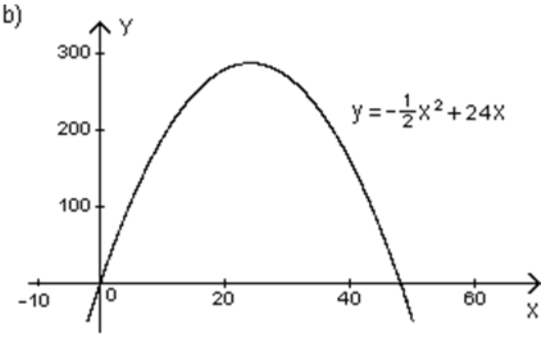


EJERCICIOS 1.2

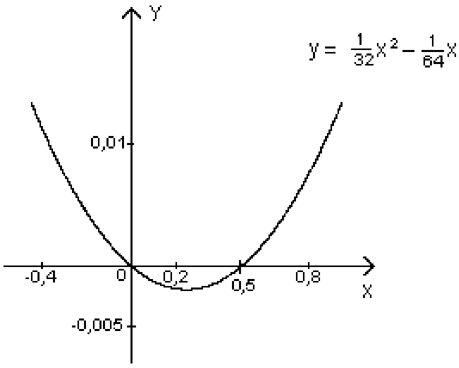
1) a)



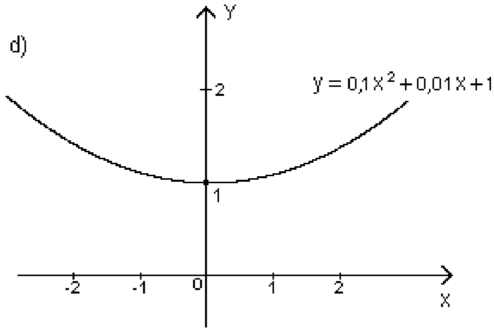
b)



c)



d)

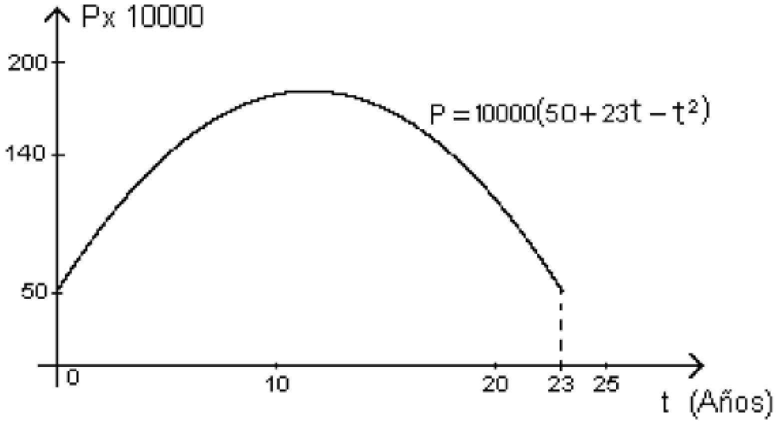


2) $a)\ \ y = -\dfrac{7}{3}x^2 - \dfrac{5}{3}x + 10\,;\ \ b)\ \ y = -2x^2 + 3x + 1$

4) $a)$ 11,5 años ; $P_{max} = 1.822.500.$

$b)$ $P(4) = 1.260.000$; $P(12) = 1.820.000.$

$c)$ 23 años.



EJERCICIOS 1.3

1)

$$a)\ \ p(x) = x^3 - \frac{13}{6}x^2 + x$$

$$b)\ \ p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

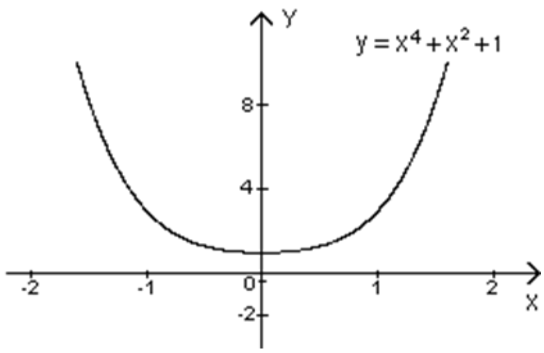
$$c)\ \ p(x) = x^5 - 8x^3 + 16x$$

$$d)\ \ p(x) = x^4 + 0{,}9x^3 - 0{,}728125x^2 - 0{,}225x + 0{,}11953125$$

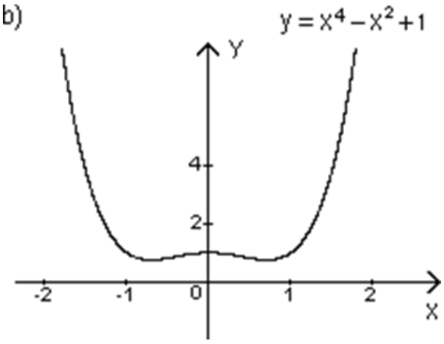
$$e)\ \ p(x) = x^4 + (-3a + b)x^3 + (3a^2 - 3ab - b^2)x^2 + (-a^3 + ab^2 - b^3)x + ab^3 - a^3b$$

2)

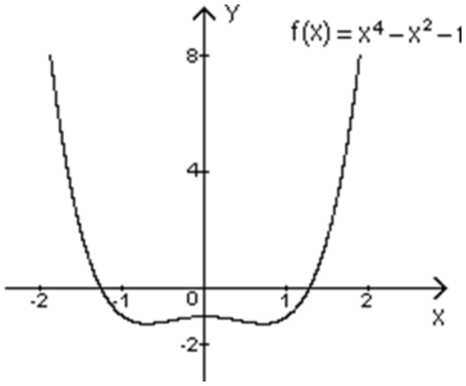
a)



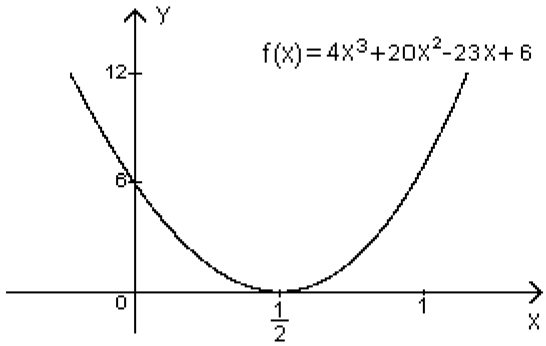
b)



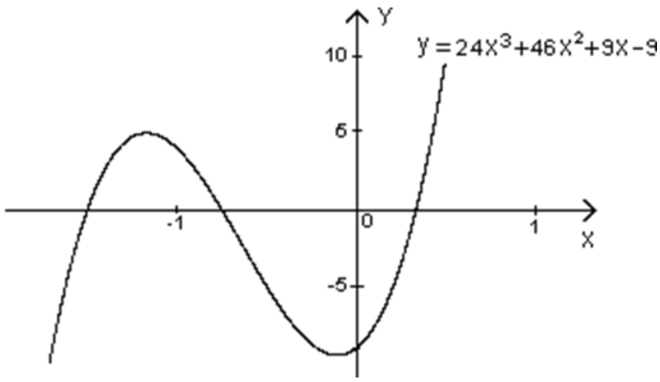
c)


$f(x) = x^4 - x^2 - 1$
Y
8
4
-2
-2
-1
0
1
2
X

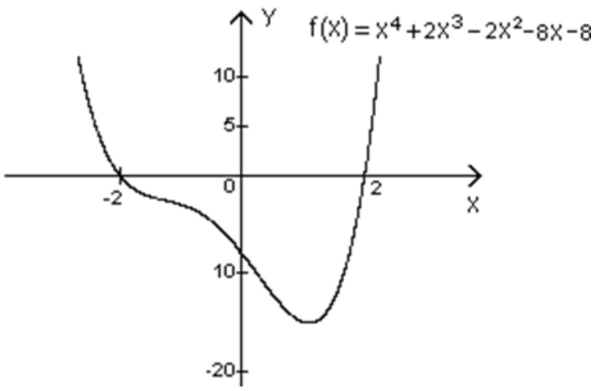
d)


$f(x) = 4x^3 + 20x^2 - 23x + 6$
Y
12
6
0
$\frac{1}{2}$
1
X

e)


$y = 24x^3 + 46x^2 + 9x - 9$
Y
10
5
-1
0
1
X
-5

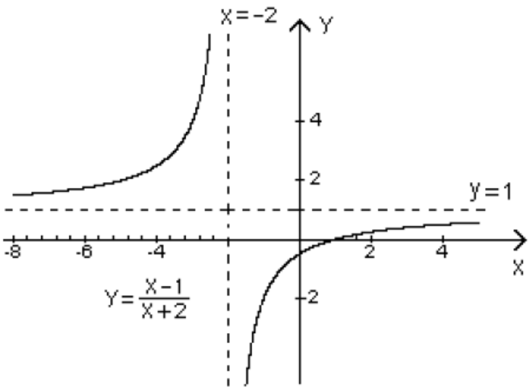
f)


$f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x - 8$
Y
10
5
-2
0
2
X
-10
-20

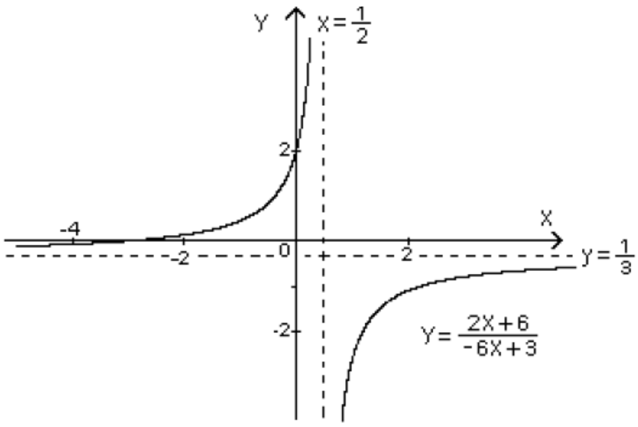
EJERCICIOS 1.4

1)

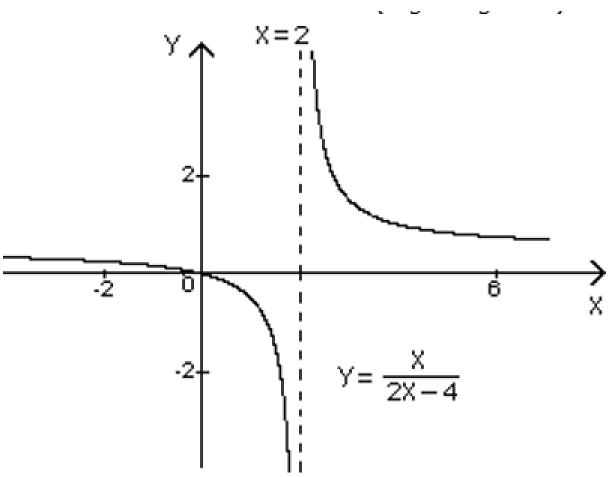
a)



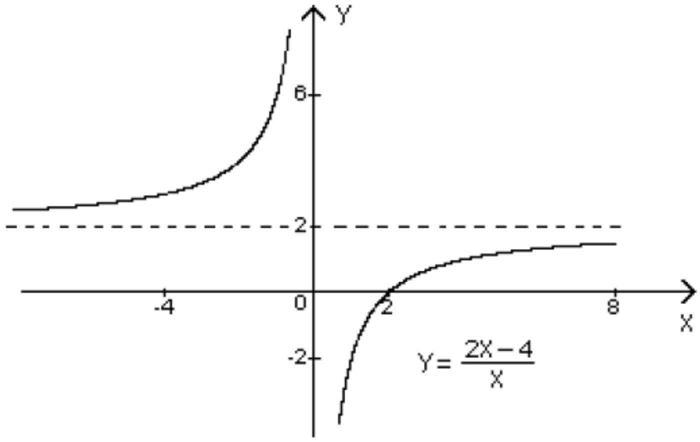
b)



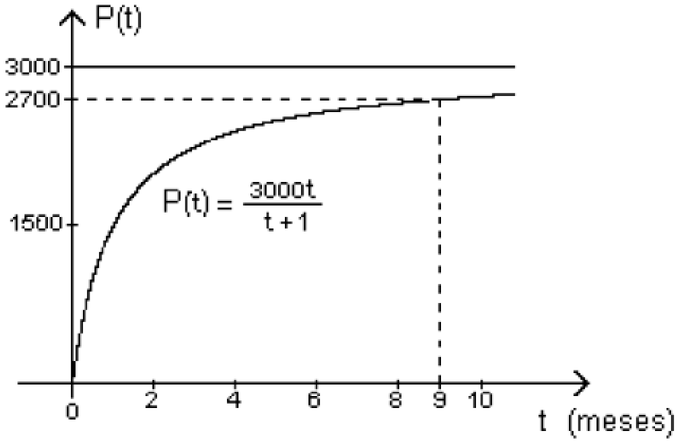
c)



d)



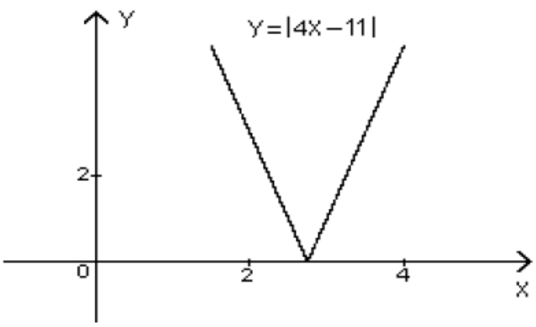
3)



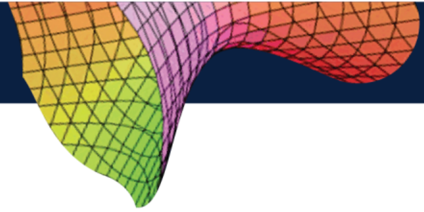
$a)\ P(6) = 2571;\quad b)\ 9\,meses\ ;\quad c)\ 3000$

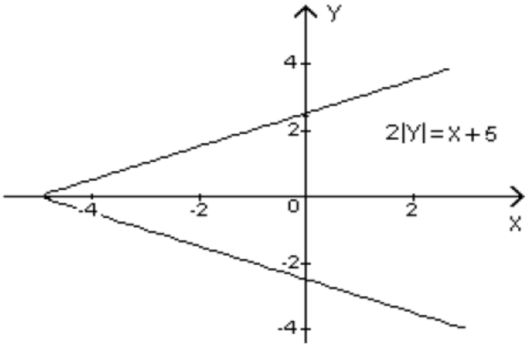
EJERCICIOS 1.5

a)

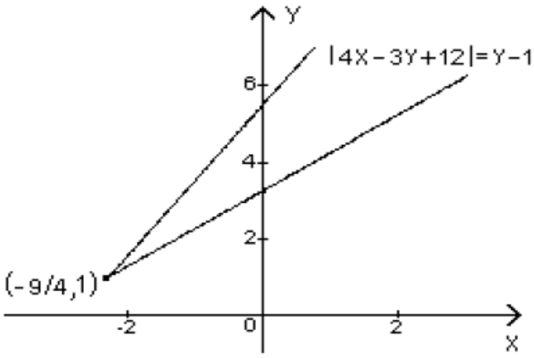


b)

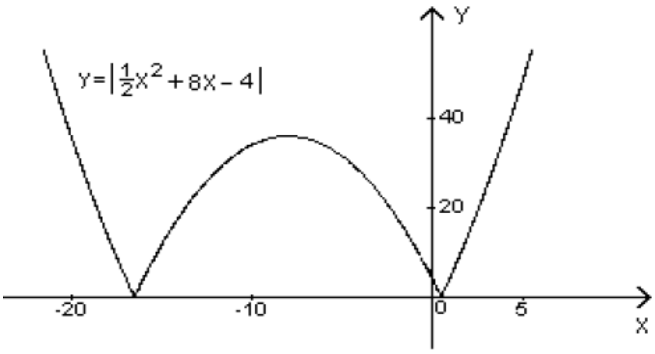




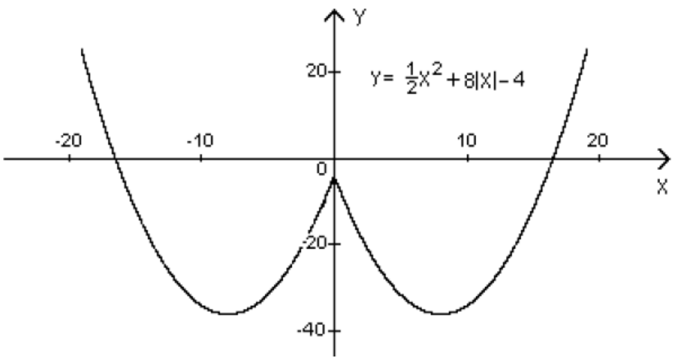
c)



d)

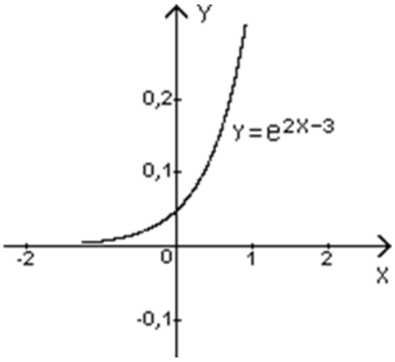


e)

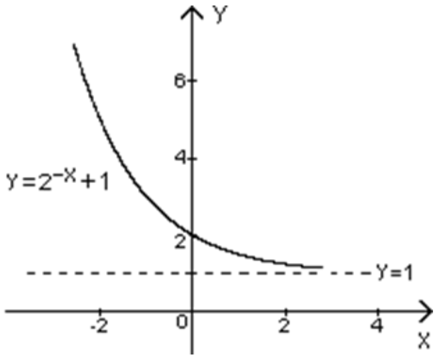


EJERCICIOS 1.6

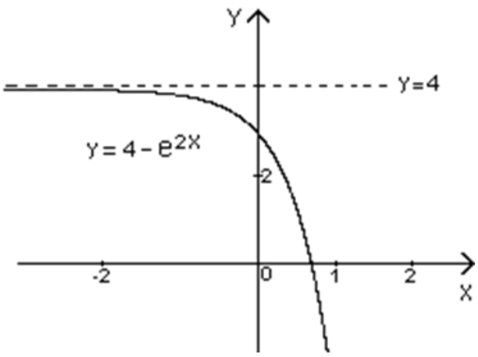
1) a)



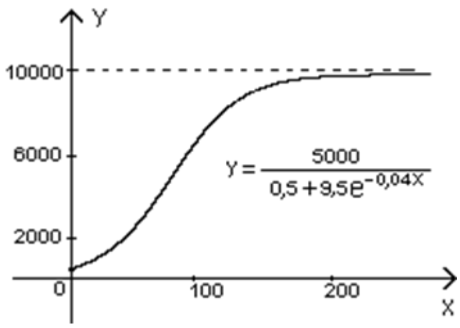
b)



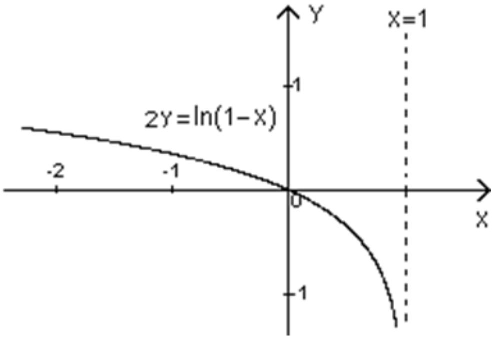
c)



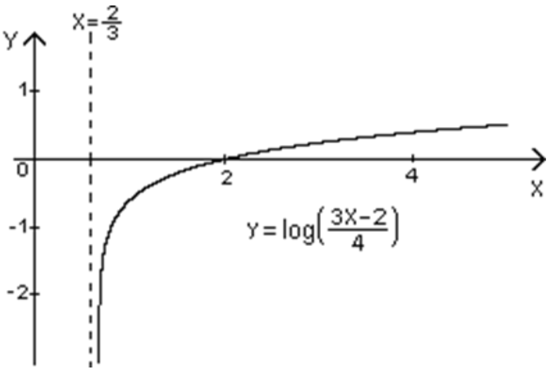
d)



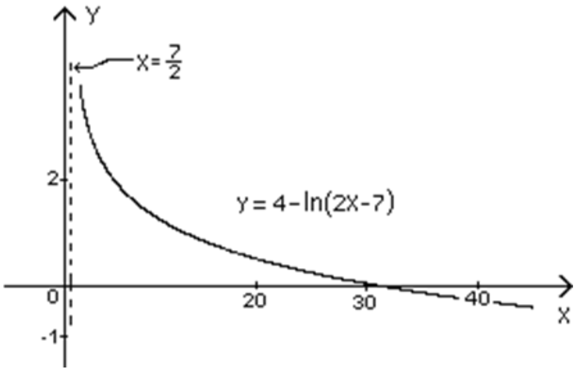
e)



f)



g)



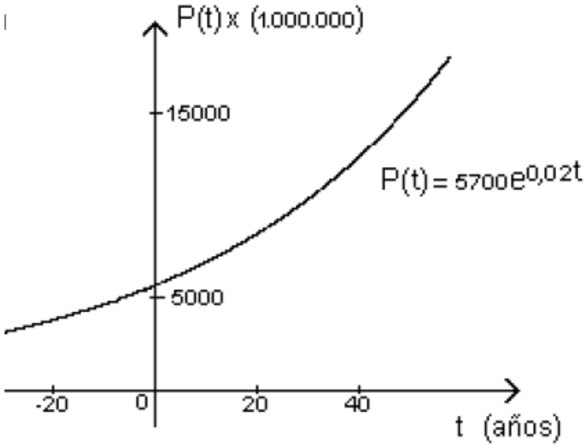
2)

$a)\ x = 0{,}623235084\ ;\ b)\ x = -\ln 4\ ;\ c)\ x = 3, x = 2\ ;\ d)\ x = 4\ , x = 2$

3)

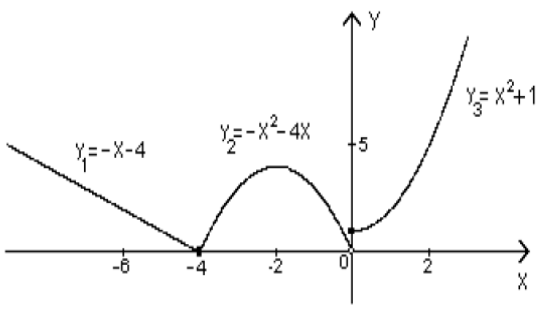
$a)\ P_{2010} = P(15) = 7.694.195\ ;\ b)\ P_{1980} = P(-15) = 4.222.663\ ;\ c)\ 1980$

d)



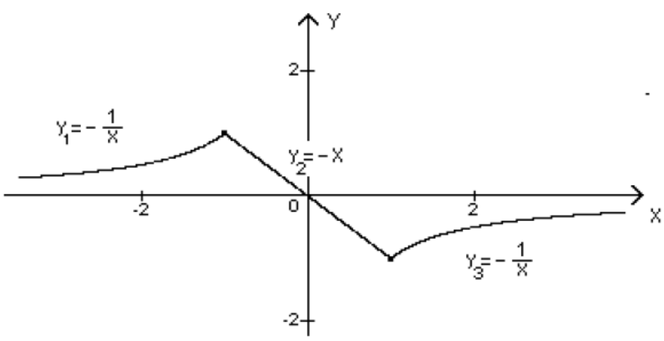
EJERCICIOS 1.7

a)



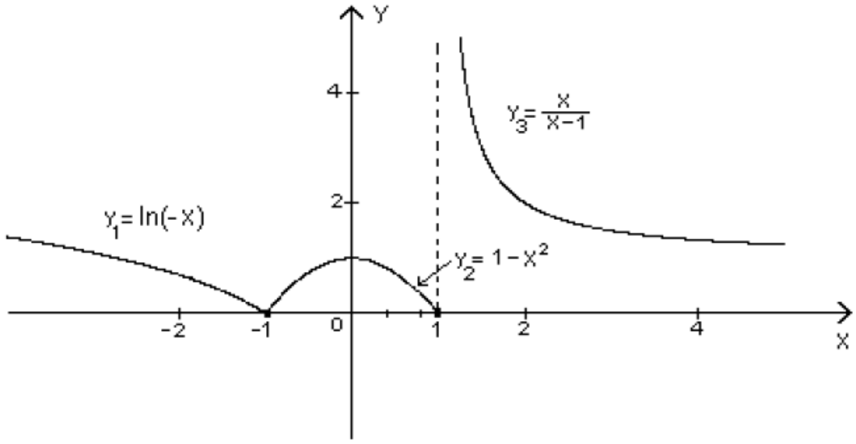
$f(-8) = 4;\ \ f(-2) = 4\ ;\ \ f(0) = 1\ ;\ \ f(\sqrt{2}) = 3\ ;\ \ f(-4) = 0$

b)



$f(0) = 0;\ f\left(\frac{1}{100}\right) = -100;\ f\left(-\frac{1}{100}\right) = 100\ ;\ f(e-1) = \frac{1}{1-e}\ ; f(e+1) = -\frac{1}{e+1}$

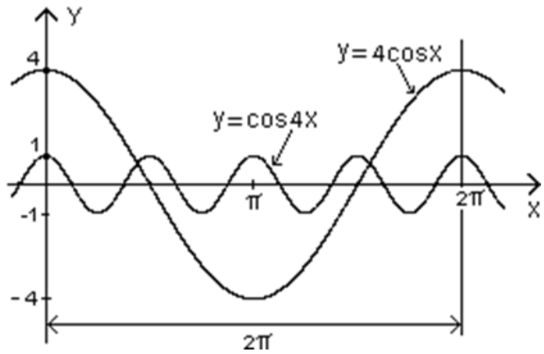
c)



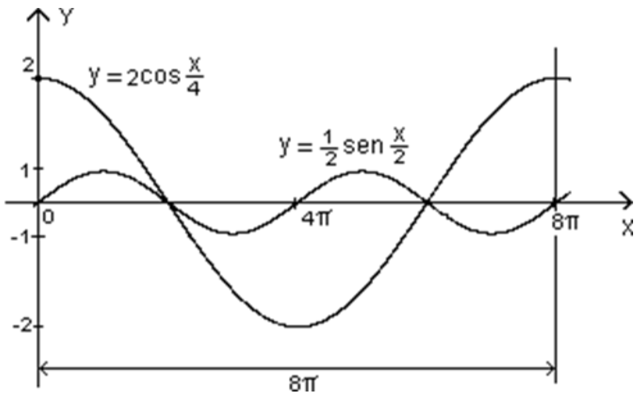
$f(-2) = \ln 2$; $f(-1) = 0$; $f(0) = 1$; $f(\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; $f(10) = \dfrac{10}{9}$

EJERCICIOS 1.8

1) a)

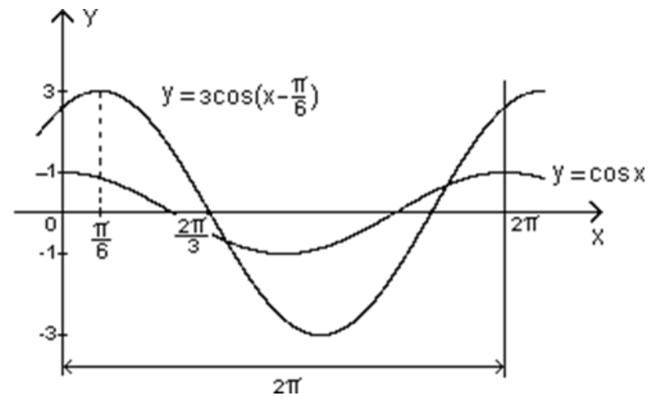


b)



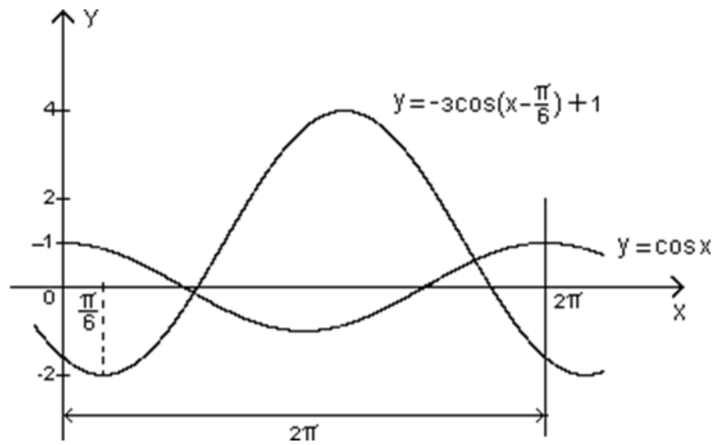
2) $C = 3$

3) a)



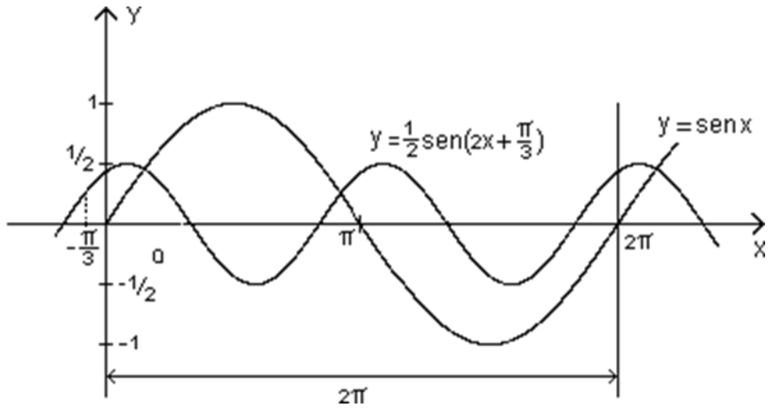
Y
3
–1
0
-1
-3
$y=3\cos(x-\frac{\pi}{6})$
$y=\cos x$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{2\pi}{3}$
2π
X
2π

b)



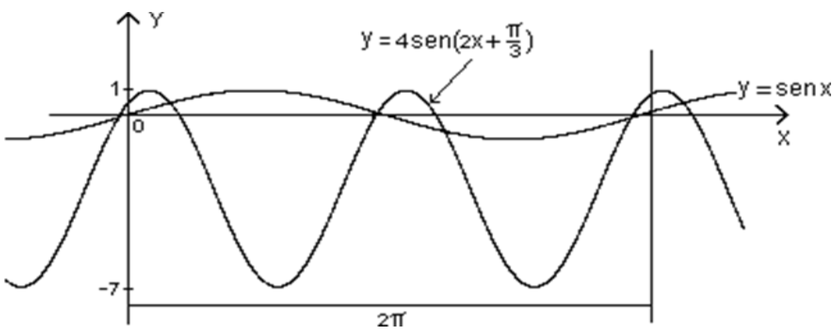
Y
4
2
–1
0
-2
$y=-3\cos(x-\frac{\pi}{6})+1$
$y=\cos x$
$\frac{\pi}{6}$
2π
X
2π

c)



Y
1
1/2
$-\frac{\pi}{3}$
0
-1/2
-1
$y=\frac{1}{2}\text{sen}(2x+\frac{\pi}{3})$
$y=\text{sen}\,x$
π
2π
X
2π

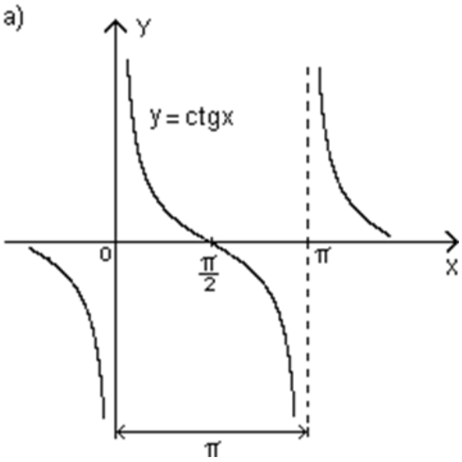
d)



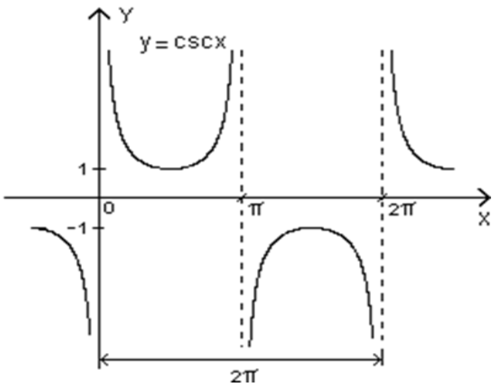
Y
1
0
-7
$y=4\text{sen}(2x+\frac{\pi}{3})$
$y=\text{sen}\,x$
X
2π

4)

a)

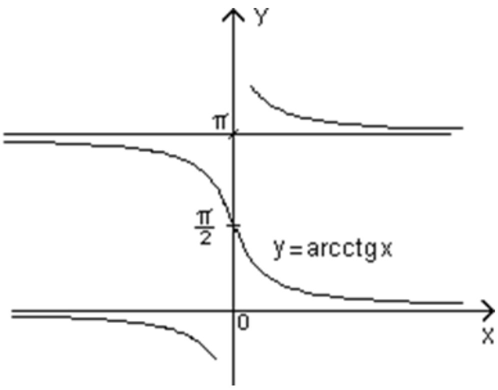


b)

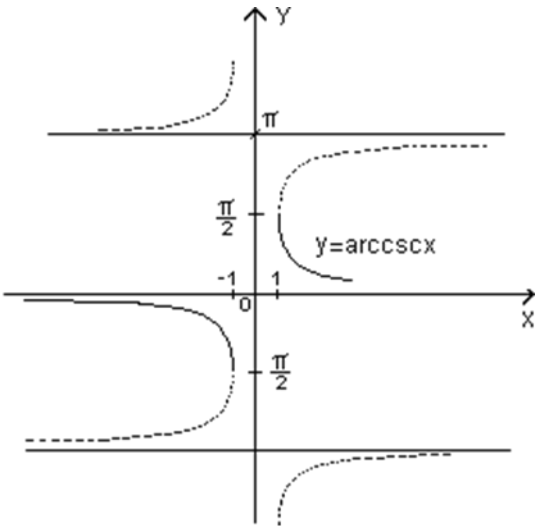


5)

a)

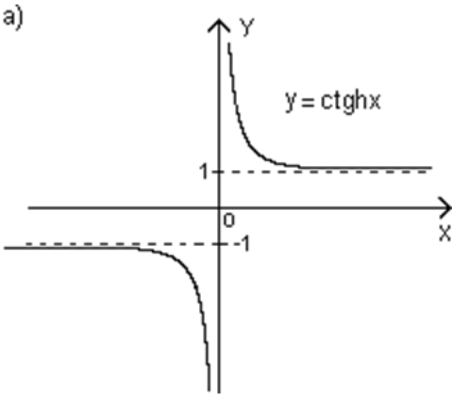


b)

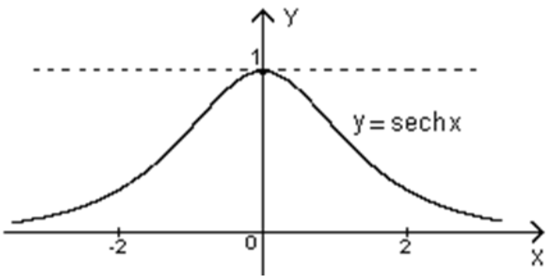


EJERCICIOS 1.9

1) a)

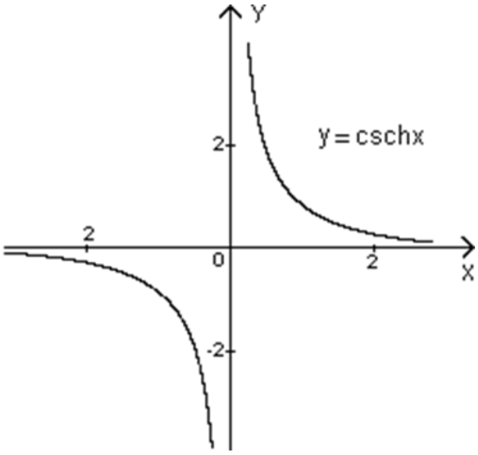


b)

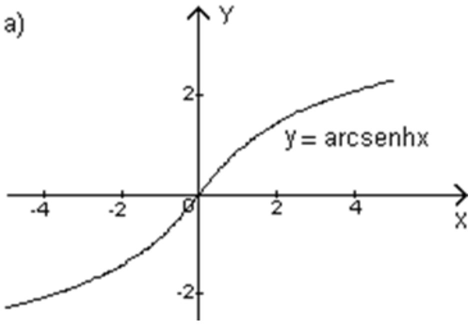


c)

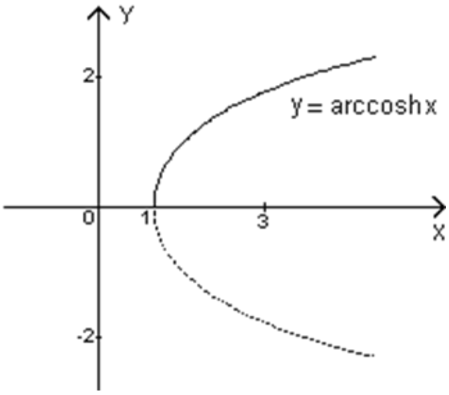
c)


Y
y = cschx
2
2
0
2
X
-2

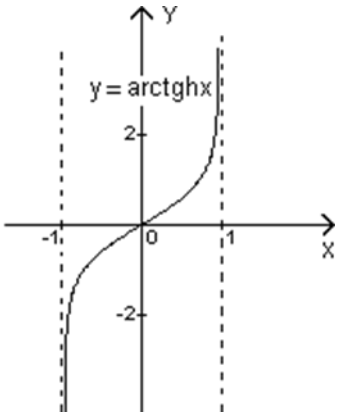
2) a)


Y
2
y = arcsenhx
-4
-2
0
2
4
X
-2

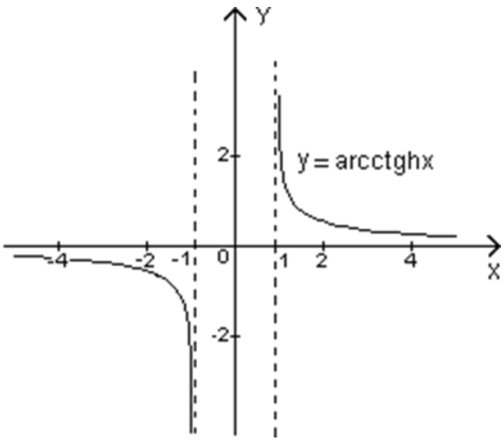
b)


Y
2
y = arccoshx
0
1
3
X
-2

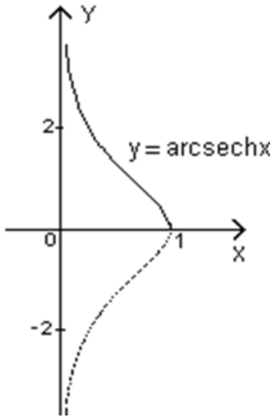
c)


Y
y = arctghx
2
-1
0
1
X
-2

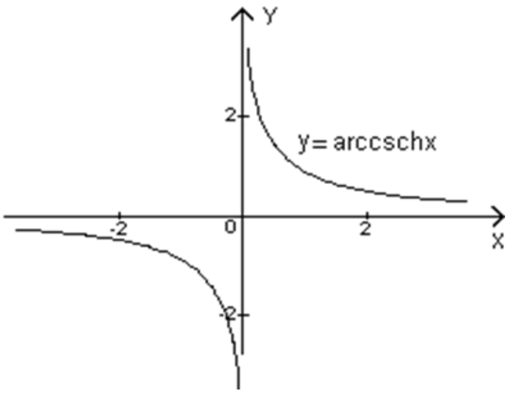
d)


Y
2
y = arcctghx
-4
-2
-1
0
1
2
4
X
-2

e)


Y
2
y = arcsechx
0
1
X
-2

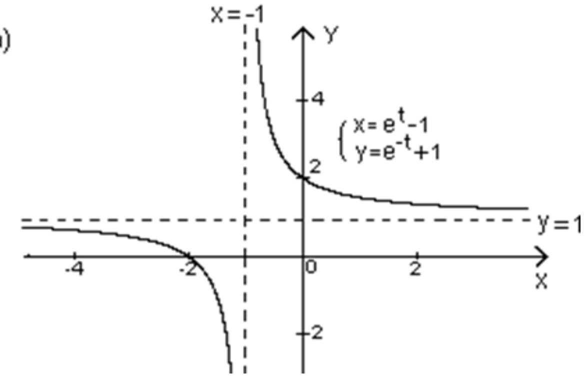
f)


Y
2
y = arccschx
-2
0
2
X
-2

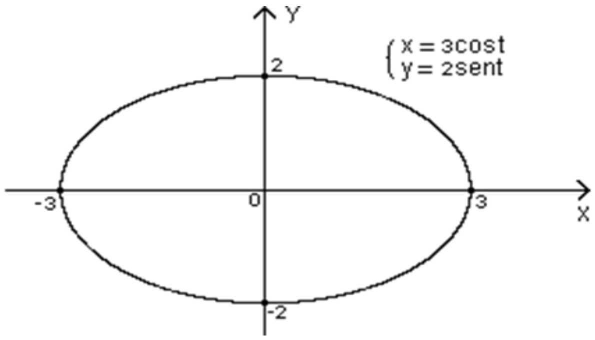
EJERCICIOS 1.10

1)

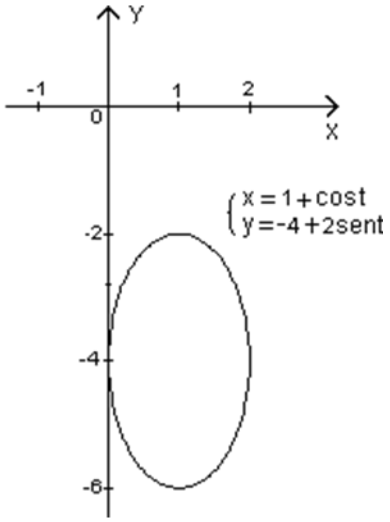
a)



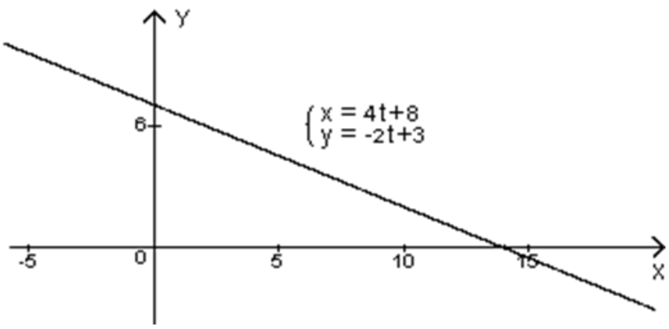
b)



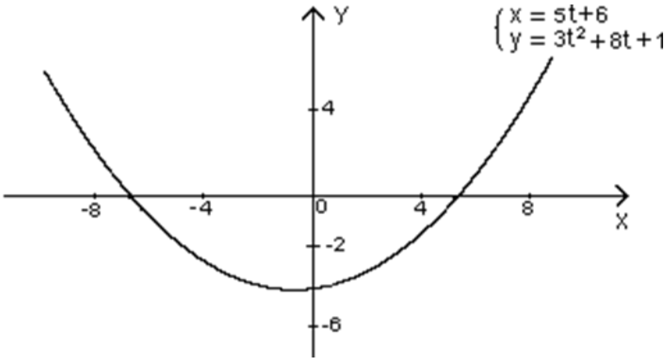
c)



d)

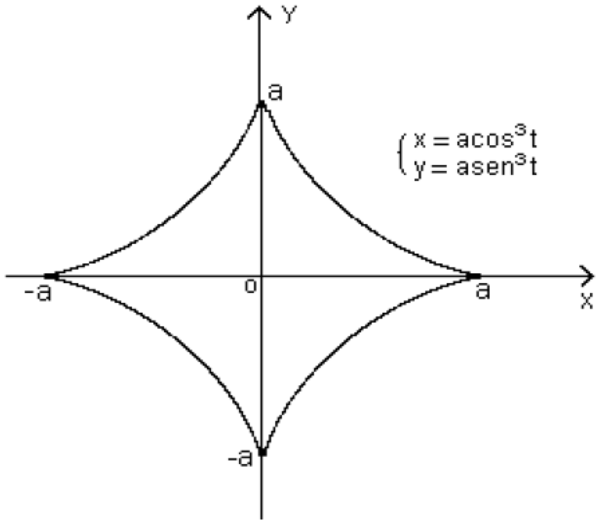


e)



Y
$\begin{cases} x = 5t+6 \\ y = 3t^2+8t+1 \end{cases}$
4
-8
-4
0
4
8
X
-2
-6

f)



Y
a
$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\text{sen}^3 t \end{cases}$
-a
0
a
X
-a

CAPÍTULO 2

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

EJERCICIOS 2.1

1)

$$d(A,O) = 3\sqrt{6}\ ;\ d(B,O) = 3\sqrt{2}\ ;\ d(C,O) = 4\sqrt{4} = 8$$

$$d(D,O) = \sqrt{61}\ ;\ d(E,O) = \sqrt{130}\ ;\ d(F,O) = \frac{1}{5}\sqrt{1234}\,; d(G,o)$$
$$= \frac{1}{15}\sqrt{1306}$$

2)

$$\overline{AB} = 10;\ \overline{AC} = 5\sqrt{2}\ ;\ \overline{AE} = \sqrt{5}\ ;\ \overline{AF} = \frac{2}{5}\sqrt{106}\ ;\ \overline{FG} = \frac{1}{15}\sqrt{15024}$$

3)

$$\overline{AB} = 10;\ \overline{AG} = \frac{4}{15}\sqrt{181}\ ;\ \overline{BG} = \frac{2}{15}\sqrt{2339}$$

$$P = 10 + \frac{4}{15}\sqrt{181} + \frac{2}{15}\sqrt{2339} = 20{,}036$$

$$\overline{BC} = 5\sqrt{2}\ ; BG = \frac{2}{15}\sqrt{2339}\ ;\ \overline{CG} = \frac{1}{15}\sqrt{5386}$$

$$P = 5\sqrt{2} + \frac{2}{15}\sqrt{2339} + \frac{1}{15}\sqrt{5386} = 18{,}412$$

$$\overline{BE} = 2\sqrt{13}\ ;\ \overline{BD} = \sqrt{145}\ ;\ \overline{ED} = \sqrt{2194}$$

$$P = 2\sqrt{13} + \sqrt{145} + \sqrt{2194} = 66{,}093$$

4) $Q(2,-11)$

5)

$$Punto\ medio\ lado\ \overline{SQ}: (-\frac{7}{2},\frac{5}{2})$$

$$Punto\ medio\ lado\ \overline{SB}: (1,-\frac{9}{2})$$

$$Punto\ medio\ lado\ \overline{PR}: (-\frac{11}{2},-\frac{25}{2})$$

$$Punto\ medio\ lado\ \overline{PQ}: (1{,}5)$$

$$m_{AB} = -\frac{14}{9} = m_{DC} \;\; ; \;\; m_{AD} = \frac{5}{9} = m_{BC}$$

Punto de intersección de diagonales: $(1, \frac{1}{4})$

6)

$$d(L,P) = \frac{112\sqrt{113}}{113} \;\; ; \; d(L,Q) = \frac{60\sqrt{113}}{113} \;\; ; d(L,O) = \frac{112\sqrt{113}}{113}$$

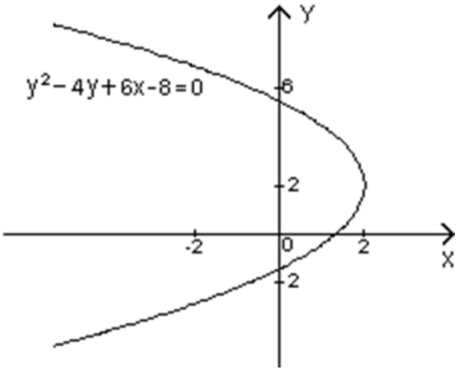
8)

$área = \frac{171}{2}$; ángulos internos: $76^0 34'$; $113^0 50'$; $54^0 38'$; $114^0 58'$

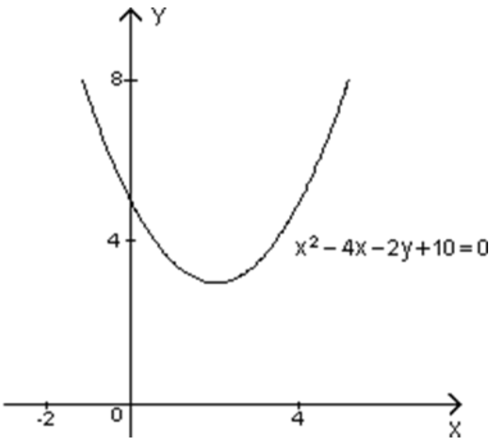
EJERCICIOS 2.2

1)

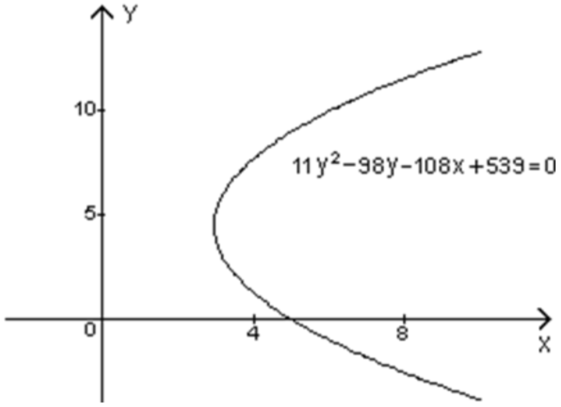
a)



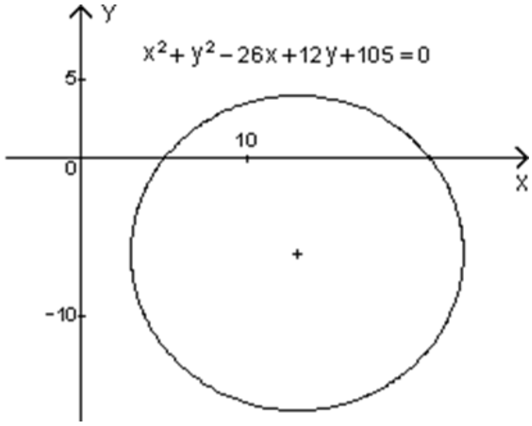
b)



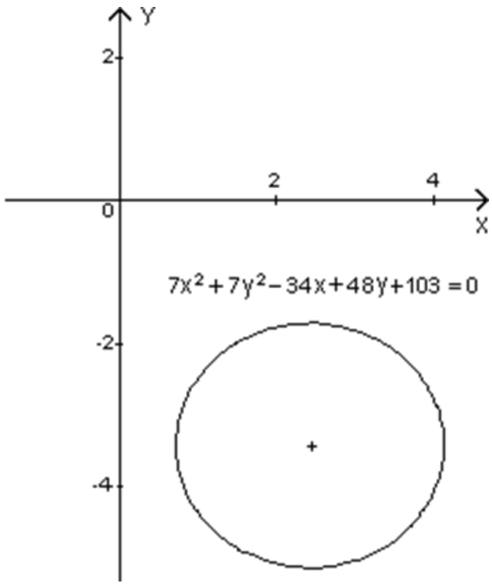
c)


Y
10
5
0
4
8
X
$11y^2-98y-108x+539=0$

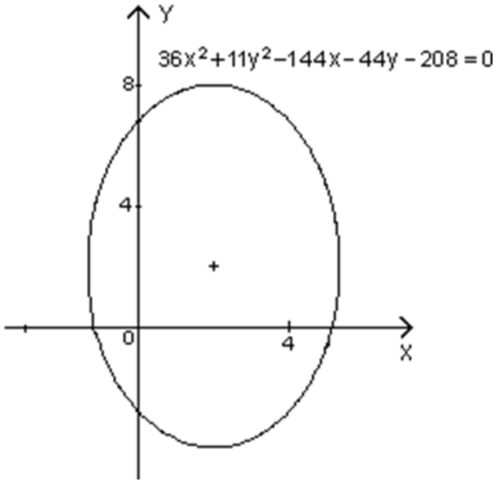
d)


Y
$x^2+y^2-26x+12y+105=0$
5
10
0
X
-10

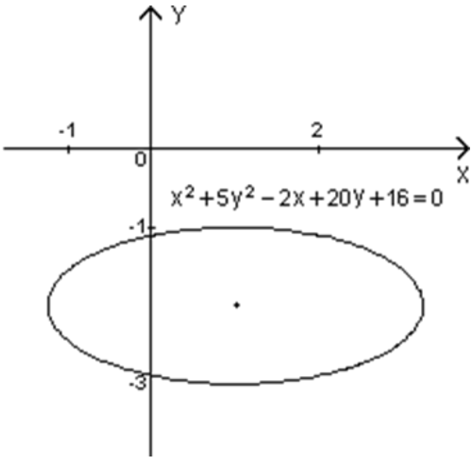
e)


Y
2
2
4
0
X
$7x^2+7y^2-34x+48y+103=0$
-2
-4

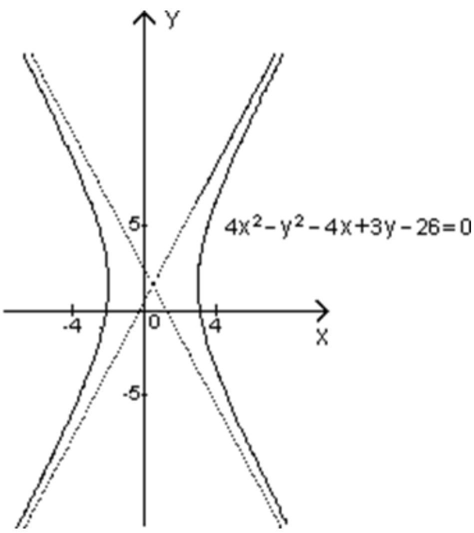
f)


Y
36x²+11y²−144x−44y−208=0
8
4
0
4
X

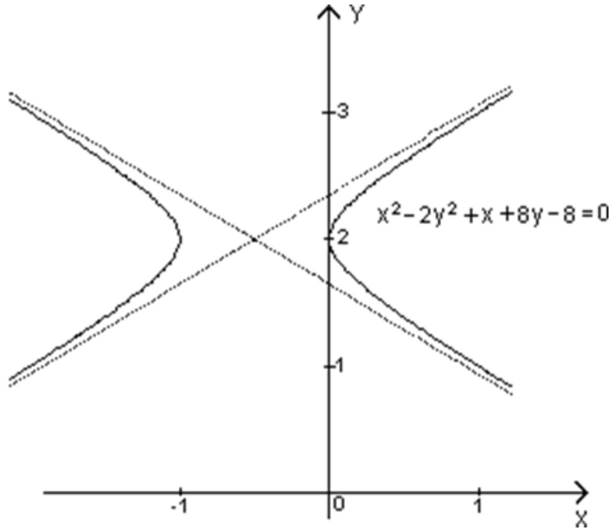
g)


Y
-1
2
0
X
x²+5y²−2x+20y+16=0
-1
-3

h)

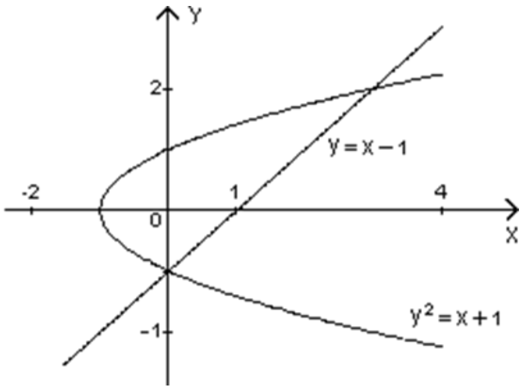

Y
5
4x²−y²−4x+3y−26=0
-4
0
4
X
-5

i)

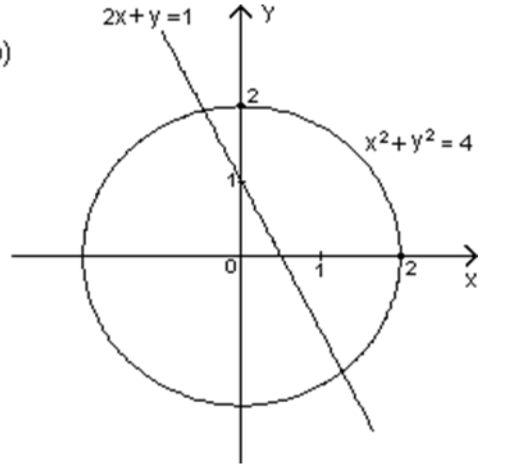


2)

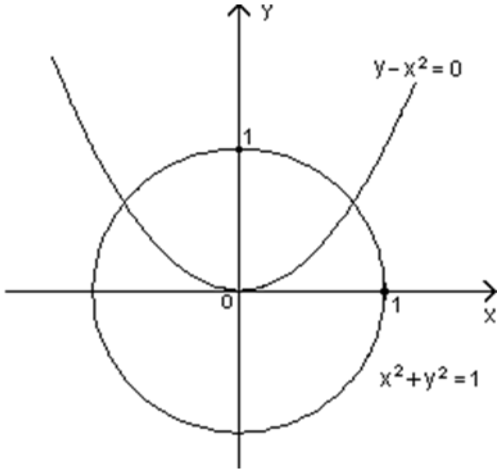
a)



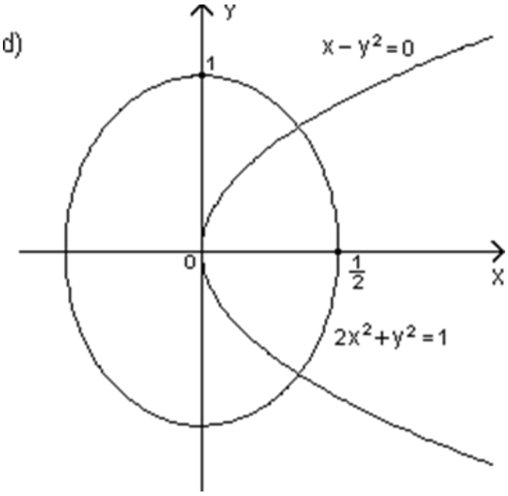
b)



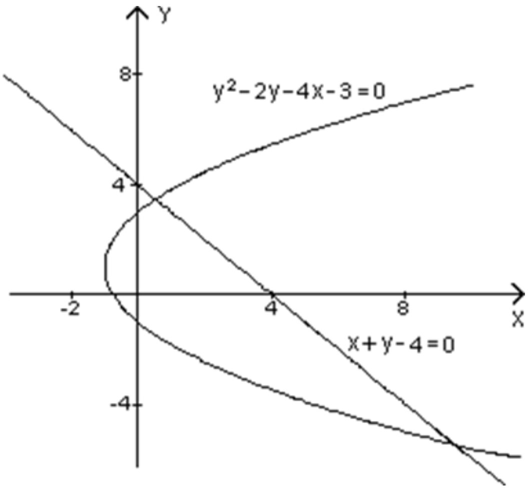
c)



d)



e)



EJERCICIOS 2.3

1)

$$a)\ (x,y)=\left(2,2\sqrt{3}\right)\ ;\ \ b)\ (x,y)=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right);c)\ (x,y)=(0,-2)$$

2)

$$a)\ (r,\theta) = \left(\sqrt{7}, arctg\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right)\ ;\ b)\ (r,\theta) = \left(4\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)\ c;\ (r,\theta) = (4, \frac{5\pi}{3})$$

3)

$$a)\ (x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2)\ ;\ b)\ 4x^2-5y^2+6y-1=0$$

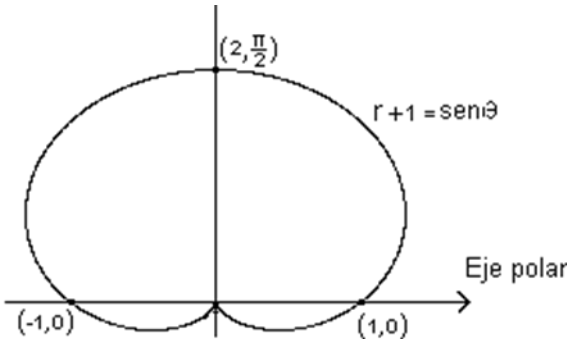
$$c)\ x^2+y^2 = ax+by$$

4)

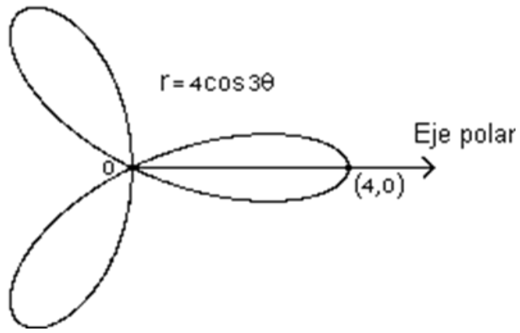
$$a)\ r = 4\cos\theta\ ;\ b)\ r = 4\,ctg\,\theta\csc\theta\ ;\ c)\ r = 2\sec\theta$$

5)

a)



b)



CAPÍTULO 3

LÍMITES Y CONTINUIDAD

EJERCICIOS 3.1

PUNTO 1

$1)\ 1$	$2)\ 0$	$3)\ -4$	$4)\ \frac{1}{2}$	$5)\ 0$
$6)\ 3$	$7)\ 2$	$8)\ -\frac{1}{2}$	$9)\ \frac{2}{3}$	$10)\ e^{\frac{2}{3}}$
$11)\ \frac{1}{3}$	$12)\ 1$	$13)\ \frac{1}{4}$	$14)\ -\frac{1}{5}$	$15)\ 1$
$16)\ -\frac{1}{2}$	$17)\ -\frac{\sqrt{7}}{98}$	$18)\ -1$	$19)\ \infty$	$20)\ \frac{1}{2}$
$21)\ -1$	$22)\ \frac{2}{5}$	$24)\ -2sen\ a$	$24)\ \frac{1}{a}$	$25)\ \frac{1}{e}$
$26)\ e$	$27)\ a-b$			

PUNTO 2

$a)\ 1$	$b)\ -\frac{2}{3}$	$c)\ 0$	$d)\ 0$	$e)\ 100$	$f)\ 1$
$g)\ e^{-\frac{2}{3}}$	$h)\ 16$	$i)\ 72$	$j)\ \infty$	$k)\ 1$	

PUNTO 4

a) NO b) SI

PUNTO 5

$k = 1$

PUNTO 6

$A = -1;\ \ B = 1$

CAPÍTULO 4

DERIVADAS DE FUNCIONES

EJERCICIOS 4.1

A) Definición de derivada

1) 3

2) $-\dfrac{1}{x}$

3) $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{2x}}$

4) $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

5) $\dfrac{4}{(2x+1)^2}$

6) $\dfrac{3}{2\sqrt{3x-7}}$

7) $\dfrac{-10}{(x-2)^2}$

8) $\cos x$

9) $2\cos 2x$

B) Reglas de derivación

Funciones algebraicas

1) $-\dfrac{1}{3}+2x-2x^3$

2) $amt^{m-1}+b(m+n)t^{m+n-1}$

3) $\dfrac{bc-ad}{(c+dx)^2}$

4) $-\dfrac{\pi}{x^2}$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{z}\left(-1+\sqrt{z}\right)^2}$

6) $\dfrac{6ax^5}{\sqrt{a^2+b^2}}$

7) $-\dfrac{2}{(2x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}$

8) $\dfrac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2}$

9) $-\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{a\sqrt[3]{x^2}-2b}{x^2\sqrt[3]{x}}\right]$

10) $28x^6-72x^5+5x^4+96x^3-52x^2$

Funciones trigonométricas y trigonométricas inversas

1) $-10\,sen(2x)+9\cos(3x)$

2) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+arcsen\,x$

3) $\dfrac{2}{2sen\,x\cos x-1}$

4) $sent+t^2sen\,t$

5) $z\,arctg\,z$

6) $ctg\,x-xcsc^2x$

7) $-ctg^2x\csc\quad x-csc^3x-3\cos x$

8) $2sec^2x+3csc^2x$

9) 0

Funciones exponencial y logarítmica

1) $(x^7 + 7x^6)e^x$

2) xe^x

3) $\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)e^x$

4) $-\dfrac{x}{ln^2x} + \dfrac{2x}{lnx}$

5) $-(senx + cosx)e^x$

6) $x + 2xlnx - \dfrac{2}{3(2x-1)}$

7) $[(2x-1)cosx + (x^2 - x - 1)cosx - (x^2 - x - 1)senx]e^x$

8) $\dfrac{1}{x^2}(1 - lnx)$

Funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas

1) $xcoshx + senhx$

2) $\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1-x^2}$

3) $\dfrac{2x}{coshx} - \dfrac{x^2senhx}{coshx}$

4) $\dfrac{senhx}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}(coshx - 1)$

5) $\dfrac{3(1 - ctghx)}{lnx} - \dfrac{3ctghx}{ln^2x}$

6) $[-tgh^2x + tghx - x]e^x$

7) $\dfrac{arcsenhx}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{arcsenx}{\sqrt{1+x^2}}$

Funciones compuestas

1) $\dfrac{3a}{c^3}(ax+b)^2$

2) $6b(2a + 2bx)$

3) $\dfrac{-3}{4(2x-1)^8} + \dfrac{1}{2(2x-1)^7} + \dfrac{1}{4(2x-1)^6}$

4) $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

5) $20cos2x(3 - 2sen2x)^4$

6) $\dfrac{-1}{9\sqrt{x}(1+x)\left[arctg\sqrt{x}\right]^2}$

7) $\dfrac{-ctgxcscx}{2\sqrt{ctgx}} - \dfrac{cos2x}{\sqrt{sen2x}}$

8) $\dfrac{(x+1)e^x}{2\sqrt{xe^x + 1}}$

9) $\dfrac{e^x + 5cosx - 8\sqrt{(1-4x^2)^{-1}}}{e^x + 5senx - 4arcsen(2x)}$

10) $\dfrac{-1}{2(x^2+1)\sqrt{arctg\left(\frac{1}{x}\right)}}$

11) $\dfrac{1}{x(1 + ln^2x)\sqrt{arctg(lnx)}}$

12) $[2cosxsenx + 2cos^2x]e^{2x} + 2sec^2xtgx$

13) $\dfrac{1}{4x\sqrt{1+\sqrt{lnx+1}}}$

Derivación logarítmica

1) $y\left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2x}{1+x^2}+3ctgx-2tgx\right)$

2) $\left[2xln\left(sen2(x)\right)+\dfrac{2(x^2+1)cos2x}{sen(2x)}\right]y$

3) $y(1+lnx)$

4) $y\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x}+\dfrac{lnx}{2\sqrt{x}}\right)$

5) $y(x+2xlnx)$

6) $y\left[\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{3(x+1)}-\dfrac{5}{2(x+1)}\right]$

7) $y\left[\dfrac{sen2x}{x}+2cos2xlnx\right]$

8) $y'=y\left[\dfrac{x^2+x+1}{x(x+1)}\right]$

9) $y\left[\dfrac{1-lnx}{x^2}\right]$

Derivación implícita

1) -1

2) $\dfrac{x+ye^{-\frac{y}{x}}}{xe^{-\frac{y}{x}}}$

3) $-\dfrac{y(-x^yy+y^xxlny)}{x(-x^yylnx+xy^x)}$

4) $\dfrac{3x^2-2y\sqrt{x^3+y^3}}{-3y^2+2x\sqrt{x^3+y^3}}$

5) $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

6) $\dfrac{-y}{x^2y-2xy^2-x+y^3}$

7) $\dfrac{-y-ytg^2(xy)+2x}{x+xtg^2(xy)-2y}$

8) $\dfrac{\cos(x+y)-senhx}{senhy-\cos(x+y)}$

9) $-\dfrac{e^{senx}cosx}{e^{seny}cosy+seny}$

Derivación paramétrica

a)

1) $\dfrac{3}{2}t^2$

2) $\dfrac{2t}{t^2-1}$

3) $-\dfrac{2t(t+1)^2}{(t^2+1)^2}$

4) $tg\ t$

5) $tg\ t$

6) 1

7) 1

Funciones diversas

1) $15sen^2(5x)cos^2\frac{x}{3}\cos(5x)-\frac{2}{3}sen^3(5x)cos\frac{x}{3}sen\frac{x}{3}$

2) $\frac{11}{(x-2)^3}+\frac{4}{(x-2)^4}$

3) $\frac{x^7}{(1-x^2)^4}+\frac{x^9}{(1-x^2)^5}$

4) $\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$

5) $\frac{-3}{20\sqrt[3]{1+x^3}}$

6) $\frac{1}{2\sqrt[4]{(1+x)^3(1-x)^5}}$

7) $\frac{(x+b)(x+c)+(x+a)(x+c)+(x+a}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}$

8) $(tg^2x-1)sec^2x-1$

9) $\frac{(\alpha-\beta)sen\,xcos\,x}{\sqrt{\alpha sen^2x+\beta cos^2x}}$

10) $\frac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$

11) $\frac{-\sqrt{1-x^2}+xarcos\,x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

12) $2\sqrt{a^2-x^2}$

13) $\frac{1}{arcsenx\sqrt{1-x^2}}$

14) $\frac{sen\,\alpha}{1-2xcos\,\alpha+x^2cos^2\alpha+x^2}$

15) $\left(\cos x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{senx+\sqrt{x}}$

16) $2m^2a^{mx}p(2ma^{mx}+b)^{p-1}lna$

17) $e^{\alpha x}sen(\beta x)$

18) $x^{n-1}a^{-x^2}(n-2x^2lna)$

19) $-\frac{1}{2}ytg\,x(1+\sqrt{cosx}\ln a)$

20) $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

21) $\frac{-2}{xln^3x}+\frac{1}{x(1+ln^2x)}$

22) $\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+1}$

23) $\frac{2(x+\sqrt{x^2+a^2}}{(x-\sqrt{x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}}$

24) $\frac{xcos^2(lnx-ln2)+2senx}{xsenxcos^2(lnx-ln2)}$

25) $\left(3^{\frac{sen(ax)}{\cos(bx)}}ln3+\frac{sen^2ax}{cos^2bx}\right)\frac{acosaxcos(bx)+bsen(ax)sen(bx)}{cos^2bx}$

26) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2arcsen\,x}}+\frac{lnx}{x}+\frac{1}{x\sqrt{1-ln^2x}}$

27) $\frac{\cos x}{(sen\,x-1)\sqrt{sen\,x}}$

28) $\frac{\cos x}{(senx+1)\sqrt{sen\,x}}$

29) $e^{ax}(a\cosh x + senh\ x) + \frac{3}{2}(1 - tgh^2 x)\sqrt{tgh\ x}$

C) Otros ejercicios

3) 6π

4) $1 - x$

5) $2 + \frac{x-3}{4}$

EJERCICIOS 4.2

1)

$a)\ \frac{2+\sqrt{7}}{3}$

$b)\ \frac{2+\sqrt{3}}{3}, \frac{2-\sqrt{7}}{3}$

$c)\ 2$

d) No satisface

e) No satisface

2)

a) $f(x) = 0, para\ x = 0, x = 16$, pero $f(x)$ es discontinua en $x = 4 \to 4 \in (0{,}16)$. No es posible aplicar T de Rolle.

b) $f(x) = 0, para\ x = 0, x = 16$, como $x = -4 \notin (0{,}16)$. Se puede aplicar T de Rolle. $x_0 = 12$.

3)

$a)\ \frac{-1+\sqrt{5}}{3}; \frac{-1-\sqrt{5}}{3}$

$b)\ 1$

$c)\ \frac{3+4\sqrt{3}}{2}$

$d)\ 1$

$e)\ \frac{2e-1}{1+ln2}$

4)

$a)\ 1{,}5875$

$b)\ 125{,}075$

$c)\ 0{,}001001$

5)

$a)\ 6$

$b)\ -\frac{3}{2}$

$c)\ 1$

$d)\ \frac{1}{e}$

$e)\ -\frac{1}{3}$

$f)\ 0$

$g)\ 0$

$h)\ e$

$i)\ \frac{1}{4}$

6)

$$a)\ \frac{(xcosx - senx)dx}{x^2} \qquad b)\ \frac{-2dx}{\sqrt{1-4x^2}} \qquad c)\ \frac{2dx}{sen2x}$$

$$d)\ \frac{-2xdx}{(x^2+1)^2} \qquad e)\ \frac{-dx}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad f)\ \frac{4dx}{(2x+1)^2}$$

7)

$a)\ \Delta y = 0{,}0309;\quad dy = 0{,}03;\quad \Delta y - dy = 0{,}0009$

$b)\ \Delta y = -0{,}00248;\quad dy = -0{,}00250;\quad \Delta y - dy = 0{,}00002$

$c)\ \Delta y = -0{,}875;\quad dy = -1{,}5;\quad \Delta y - dy = 0{,}625$

$d)\ \Delta y = -0{,}0399;\quad dy = -0{,}04;\quad \Delta y - dy = 0{,}0001.$

8)

$$a)\ \frac{-2y(y^2+3x)}{3x(2y^2+x)} \qquad b)\ -\frac{y-1}{x+1}$$

$$c)\ \frac{-y(2x^2lny+y^2)}{x(x^2+2y^2lnx)} \qquad d)\ -\frac{senx+y}{seny+x}$$

9)

$$a)\ \frac{120}{(1-x)^6} \qquad b)\ \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad c)\ \frac{6}{x}$$

$$d)\ \frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \qquad e)\ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \qquad f)\ xe^x + ne^x$$

10)

$$a)\ 2arctgx + \frac{2x}{1+x^2} \qquad b)\ \frac{6x(2x^3-1)}{(1+x^3)^3}$$

$$c)\ \frac{3\sqrt{x}+a}{\sqrt{x^3\left(\sqrt{x}+a\right)^3}} \qquad d)\ -\frac{x\sqrt{1-x^2}+arcsenx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$e)\ \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \qquad f)\ \frac{-a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$$

13)

$$a)\ \frac{-2(5+8tg^2(x+y)+3tg^4(x+y)}{tg^8(x+y)}$$

$b)\ \dfrac{-sen(x+y)}{4-4\cos(x+y)-3sen^2(x+y)+\cos(x+y)\,sen^2(x+y)}$

$c)\ -\dfrac{y-ye^{x+y}+xe^{x+y}-e^{x+y}}{-x+e^{x+y}+xe^{x+y}-ye^{x+y}}$

$d)\ \dfrac{2xy(y^3-3axy+x^3+a^3)}{-y^6+3axy^4-3a^2x^2y^2+a^3x^3}$

14)

$a)\ \dfrac{-1}{asen^3t}$ $\quad b)\ \dfrac{-1}{4asen^4\left(\frac{t}{2}\right)}$ $\quad c)\ \dfrac{2+t^2}{a(cost-tsent)^3}$

CAPÍTULO 5

APLICACIONES DE LA DERIVADA

EJERCICIOS 5.1

1)

a) $4x+3y-7=0;\ \ 3x-4y-24=0$

b) $2x-8y+7=0;\ \ 4x+y-3=0$

c) $8x+2y-21=0;\ \ x-4y+8=0$

d) $=x=1;\ \ y=-3$

e) $x+y-1=0;\ \ x-y+1=0$

f) $4\sqrt{2}-8y+4\sqrt{2}-\pi\sqrt{2}=0;\ \ 4x+2\sqrt{2}y-2-\pi=0$

g) $17x+4y+6=0;\ \ 8x-34y-21=0$

2)

$(0,0)\ ;\ (2,-48)$

3)

a) $54^{0}9';\ \ 33^{0}41'$

b) $70^{0}20'$

c) $62^{0}22'$

4)

a) $-0{,}393\,\frac{m}{min};-0{,}1179\ m/min$

b) $-1{,}33\ m^2/min\ ;\ -0{,}74\ m/min$

5)

$$4{,}535\frac{cm^3}{min}\ ;\ 3{,}4641\ cm^2/min$$

6)

$-0{,}18\ cm/min;\ 0{,}2\ h\ 30'aprox$

7)

20,20 y 16 pg

8)

$h=8\sqrt{2}\ cm\ ;\ r=4\sqrt{2}\ cm$

9)

$$4x + 3y - 24 = 0$$

10)

a) 2,001666667

b) 0,6700927

c) 31,2

BIBLIOGRAFÍA

AYRES, F. (1974). Cálculo Diferencial e Integral. México: McGraw-Hill.

BERMAN, G. (1977). Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Moscú: Mir.

CASABIANCA, M. (1995). Problemas Resueltos de Cálculo Diferencial. Bogotá: Tercer Mundo Editores.

ESCOBAR, A. (2019). Aplicaciones de Cálculo Diferencial. Colombia, Pasto: Editorial Universidad de Nariño.

EDWARDS, C. & PENNEY, D. (1994). Cálculo con Geometría Analítica. Madrid: Prentice-Hall.

FLEMING, W. & VARBERG, D. (2003). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México: Prentice - Hall.

LEITHOLD, L. (1995). El Cálculo con Geometría Analítica. Madrid: Harper.

PINZÓN, Á. (1973). Cálculo Diferencial. Madrid: Harper.

PISKUNOV, N. (1979). Cálculo diferencial e integral. Tomo I. Moscú: Mir.

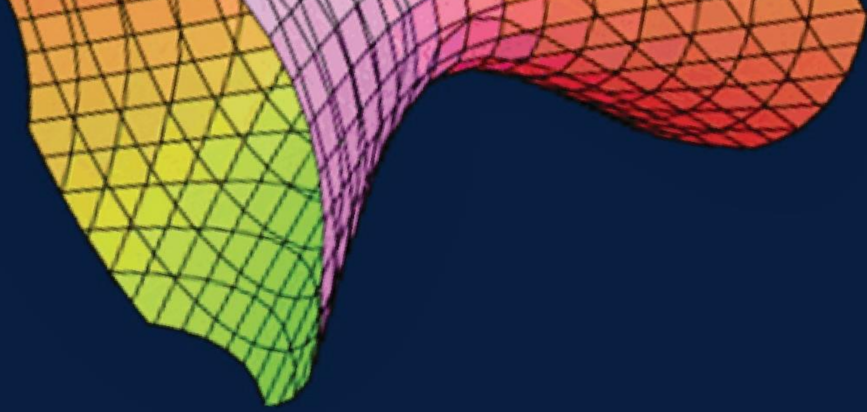
PURCELL, E. & VARBERG, D. (1992). Cálculo con geometría Analítica. México: Prentice-Hall.

STEWART, J. (1999). Cálculo Diferencial e Integral. México: Thompson.

THOMAS, G. 1968. Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica. Madrid: Aguilar.

ZILL, D. & DEWAR, J. 2001. Álgebra y Trigonometría. México: Mc-Graw-Hill.

LISTA DE FIGURAS



ACERCA DE LOS AUTORES

ACERCA DE LOS AUTORES

Hernán Alberto Escobar-Jiménez. Docente adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Magister en Dirección Universitaria, Universidad de los Andes. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Ingeniero Civil, Universidad de Nariño. Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana. Profesor Tiemplo Completo Universidad de Nariño.
Correo electrónico: hescobar@udenar.edu.co.

Segundo Javier Caicedo-Zambrano. Docente adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Ingeniero de Sistemas, Universidad Antonio Nariño. Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana. Especialista en Multimedia Educativa, Universidad Antonio Nariño. Magister en Software Libre, Universidad Autónoma de Bucaramanga. Asesor de Desarrollo Académico, Universidad de Nariño. Profesor Tiempo Completo Universidad de Nariño.
Correo electrónico: jacaza1@gmail.com; jacaza1@udenar.edu.co.

Oscar Fernando Soto-Agreda. Docente Adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Magister en Modelos de Enseñanza Problémica. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana. Profesor Tiemplo Completo Universidad de Nariño. Correo electrónico: oscarfdosoto@gmail.com; fsoto@udenar.edu.co.

Editorial
Universidad de **Nariño**

Lecciones de Cálculo Diferencial

El libro de Lecciones de Cálculo Diferencial, está diseñado para ser utilizado como texto guía para los cursos de Cálculo Diferencial en los programas de Ingeniería Civil, Sistemas y Electrónica de Universidad de Nariño, al igual que en los programas de Física, Licenciatura en Matemáticas y Licenciatura en Informática; también puede ser utilizado por estudiantes de otras universidades o instituciones de educación superior que ofrezcan programas técnicos similares a los mencionados.

El libro contiene toda la temática contemplada en los cursos usuales de Cálculo Diferencial; sin embargo, en los dos primeros capítulos, de manera puntual y precisa se trata las características, propiedades y grafos de las funciones reales; también se realiza un tratamiento resumido de los elementos de Geometría Analítica. La decisión de incorporar estos temas en el texto, obedece a que es muy importante que los estudiantes dispongan de los fundamentos teóricos y conceptuales para iniciar el curso; además, para suplir las eventuales debilidades y desconocimiento de estos temas básicos. La experiencia de los autores por más de 30 años en el ofrecimiento de los cursos de Cálculo, motivó la decisión de incorporar estos insumos en el presente libro.

El texto está escrito de modo que los conceptos y definiciones son consistentes y claros; en cada temática, se plantean y resuelven ejercicios de diversa dificultad y alcance. Al finalizar cada capítulo, se proponen ejercicios y problemas para que sean resueltos por los estudiantes; el propósito es que los resuelvan, comprueben y comparen con las respuestas que aparecen al final del texto.

En algunas secciones, el texto contiene y formula teoremas y proposiciones que, para su formalización, requieren una prueba matemática, lo cual contribuye a la producción de consistencia y claridad conceptuales. En otras palabras, se procura que los estudiantes se aproximen a una correcta percepción de lo que realmente significan las matemáticas y sus múltiples aplicaciones en la ingeniería, física, biología, negocios y otros campos.

El libro está estructurado en cinco (5) capítulos. El primero, funciones reales, trata las siguientes funciones: lineal, cuadrática, función polinómica, función racional, función valor absoluto, función exponencial, logarítmica, a trozos, trigonométricas, hiperbólica y funciones definidas paramétricamente. El segundo, elementos de geometría analítica, contiene definiciones y conceptos relacionados con distancia entre puntos, de un punto a una recta, ángulos entre rectas, entre otros; secciones cónicas y coordenadas polares. El tercero, límites y continuidad, aborda las temáticas de vecindad de un punto, límite de una función real de una variable real y continuidad de funciones. El cuarto, derivadas de funciones, contiene definiciones y conceptos de la derivada, álgebra de derivadas, derivada de la función compuesta, derivación implícita, derivadas de las funciones elementales, derivadas paramétricas, teoremas de Rolle y del valor medio, límites de formas indeterminadas, diferencial y derivadas de orden superior. El quinto, aplicaciones de la derivada, contiene aplicaciones geométricas de la derivada, razón de cambio, máximos y mínimos, trazado de curvas de funciones. El libro finaliza con una sección de respuestas a los ejercicios y problemas propuestos.

Finalmente, los autores confían que esta obra constituya un recurso pedagógico y didáctico para los cursos de cálculo diferencial.

ISBN: 978-958-5123-76-2 digital

9 789585 123762

Editorial
Universidad de **Nariño**