Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Ústav výzkumu a rozvoje vzdělávání

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Porozumění žáků 6. ročníku zlomkům v matematických slovních úlohách

Understanding of 6th grade students in fractions in mathematical word problems

Mgr. Veronika Macounová

Vedoucí práce: PhDr. Martin Chvál, PhD.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy – matematika (N M), navazující magisterské

2021

Odevzdáním této diplomové práce na téma Porozumění žáků 6. ročníku zlomkům v matematických slovních úlohách potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 6. 12. 2021

Ve své práci bych ráda poděkovala panu PhDr. Martinu Chválovi, PhD. za veškerý čas, ve kterém mi pomáhal a za jeho cenné připomínky a náměty. Za četné rady vděčím také pedagogickému sboru, který mně pomohl v různých nejasnostech. Na závěr bych chtěla poděkovat mé rodině, která při mně stála, a také mým prarodičům, kteří se podíleli na korektuře textu.

ABSTRAKT

Práce zpracovává data z výzkumu od společnosti H-edu, která vypracovala kurz s cílem pomoci žákům pochopit problematiku zlomků v náročném čase Covid-19. Pomocí velkého množství materiálů, interaktivního prostředí, videí a odborného vedení pomáhala zájemcům pochopit základní principy pro vnímání a počítání se zlomky. Na základě porovnání výsledků před vstupem do kurzu a po jeho absolvování, můžeme poměřovat i kvalitu koncipování kurzu. Pomocí získaných dat lze vyvozovat i místa nejčastějších problémů při řešení úloh. Práce obsahuje informace, jak poznat náročnější úlohy či z jakých důvodů potřebují žáci během výpočtů větší množství času. Zároveň se v práci vysvětluje význam vzestupné náročnosti úloh spojené s vyšší úspěšností respondentů. Práce se dále zabývá strukturou úloh, která ovlivňuje zastoupení chybných odpovědí. U nejčastěji zaznamenaných nesprávných odpovědí je vysvětlena příčina vzniku a postup, jakým respondenti k chybnému výsledku mohli dojít. Opakující se chyby upozorňují na potřebu důkladného vysvětlení a procvičení látky. Zároveň práce obsahuje podrobný rozbor zavedení zlomků ve dvou nejčastěji využívaných učebnicích, který je porovnán s kapitoly učebnic Hejného metody.

KLÍČOVÁ SLOVA

Zlomky, analýza testů a testových úloh, chybovost, struktura úloh, vzestupná náročnost úloh

ABSTRACT

The thesis processes data from the research of the company H-edu, which developed a course to help students understand the issue of fractions in the difficult times of Covid-19. Using a large number of materials, an interactive environment, videos and professional guidance, the company helped those interested in understanding the basic principles for perceiving and counting fractions. The thesis compares the results before entering the course and after its completion, which presents the details associated with the course and allows for an evaluation of the course design. The data also helps to identify where students make the most mistakes. Furthermore the thesis contains information on how to identify more demanding tasks or why students might need more time during calculations. At the same time, it explains the importance of gradation of tasks associated with higher success of respondents. The thesis also deals with the structure of questions that affect the representation of incorrect answers. For the most frequently recorded incorrect answers the thesis explains its cause and the procedure by which the respondents came to the wrong result. Recurring errors highlight the need for thorough explanation and practice of the substance. Moreover, the thesis contains a detailed analysis of the introduction of fractions in the two most frequently used textbooks, which is compared with the chapters of textbooks applying the method of Hejný.

KEYWORDS

fractions, analysis of tests and test tasks, error rate, structure of tasks, gradation of tasks

Obsah

Úvod

Již před mnoha staletími pochopili lidé význam zlomků, které se staly potřebnými pro plynulé fungování tehdejší společnosti. V dnešní kultuře tomu není jinak. Důležitost a využití je znatelné nejenom v nesčetných matematických příkladech a úlohách, ale i v každodenním životě. Za pomoci běžně využívaných slovních spojení se zlomky dostávají i do povědomí dětí, což vytvoří základ pro další vědomostní rozvoj jedince.

Ve školství se pro lepší pochopení a představení zlomků využívají pomocné modely. V učebnicích jsou často zařazeny kruhové modely (znázorňující část koláče či pizzy), obdélníkové modely, jejichž reprezentantem může být např. čokoláda, či model číselné osy, která je představována jako tyč nebo trasa. Pomocí modelů je možné žákům názorně ukázat i matematické operace, které by pouze v aritmetickém podání mohly být méně pochopitelné. Jelikož je učebnice podstatnou součástí školní výuky a pro žáky může být důležitým zdrojem poznání, je v této diplomové práci proveden podrobný rozbor práce se zlomky ve dvou nejvyužívanějších učebnicích.

Důraz na význam a postavení zlomků lze lehko pozorovat nejenom v učebnicích a vzdělávacích plánech, nýbrž i u testů přijímacích zkoušek, matematických olympiádách, ve videích na internetu či v množství prací zabývajících se touto tématikou. V roce 2020 proběhl vzdělávací kurz, který měl za cíl podpořit žákovské vědomosti o zlomcích na základě metodiky formou videí, manipulace v interaktivním prostředí a zpětné vazby.

Ve své diplomové práci se zabývám zpracováváním a vyhodnocováním účinnosti tohoto kurzu porovnáváním vstupních a výstupních testů. Za pomoci zpracovaných dat lze pozorovat reakce respondentů na změnu struktury či náročnosti úlohy, potřebnou časovou dotaci u konkrétních úloh či příčinu a postup při vzniku chyb při práci se zlomky. Cílem mé diplomové práce je porovnat získaná data a určit, zda byl kurz kvalitní, jaká struktura úloh napomáhá žákům k řešení a jaké jsou nejčastější příčiny vzniku chyb při výpočtech. Jelikož byl kurz vytvořen Tomášem Chrobákem a Milanem Hejným pro společnost H-edu, jsou v práci společně se dvěma učebnicemi prozkoumány ještě kapitoly zabývajícími se zlomky v učebnicích aplikujících Hejného metodu.

1 Rešerše literatury k výuce zlomků

Pochopení práce s racionálními čísly je možné považovat za základ výuky matematiky, protože zlomky využíváme nejenom při aritmetických výpočtech, ale i u dalších oblastí matematiky. Ačkoli se v současné době stále více pracuje s desetinnými čísly a výuka zlomků je pro žáky ve věku 6–15 let často velmi obtížná, v kurikulu je tato část matematiky stále umístěna. Mezi hlavní důvody se uvádí význam zlomků pro propedeutiku algebry, rozvíjení funkčního myšlení či využívání zlomků v běžném životě (Tichá, 2009).

Dětem jsou zlomky představovány jako části celku, nicméně především se pracuje s kmenovými zlomky, které mají ve jmenovateli číslice 1–9. Vlková (2017) považuje za důležité poukázat na využití zlomků v praktickém životě a zároveň na potřebnou manipulaci s dělenými částmi. Využívání různých modelů přispívá k porozumění, že nezáleží na předmětu, který žáci dělí na části, ale na procesu, jak je předmět dělen. Lerl (1940) dodává, že žáci by měli především pochopit pojem zlomek a představu o jeho velikosti.

Na druhé straně studie Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice (Tichá, Macháčková,2006) poukázala na argumenty, které výuku zlomků na základní škole (dále jen ZŠ) považovaly naopak za příliš obtížnou a časově náročnou, než aby ji žáci ve vymezeném čase dokázali dostatečně pochopit. Zároveň vynaložená energie a čas neodpovídá výsledkům, zvláště pokud žáci častěji využívají desetinná čísla.

Seznámení se se zlomky by podle Moulisové (2006) mělo probíhat na základě manipulace s modely, které dělí na spojité (jeden celek dělený na části) a diskrétní (celek je soubor předmětů). Jelikož považuje za nutné stavět problematiku na zkušenostech ze života, poukazuje na využívání kruhových modelů, které mohou být představeny jako část koláče nebo pizzy, obdélníkové modely znázorňované na čokoládě či model číselné osy využívající tyč nebo trasu.

Podle Vejmelkové (2014) by všechny učebnice měly obsahovat hlavně spojité modely, především kruhový, zatímco diskrétní jen omezeně. Zároveň by mělo být dostatečně ukázáno, kde se žáci setkají se zlomky v praktickém životě, aby se lépe předešlo neporozumění kalkulu. K procvičení zlomků by měly být zavedeny rozličné úlohy od samotného začátku, které by měly být především aritmetické.

Manipulace s předměty má dlouhou tradici. Již v roce 1910 Hófler ve své práci preferoval činnosti se čtverečkovaným papírem, kde byly jednotlivé části tvořeny čtvercem či obdélníkem a pro žáky bylo jednodušší zadaný model rozdělit na určené části. Pomocí modelů je možné žákům názorně ukázat i operace, které by v aritmetickém podání mohly být méně pochopitelné. Zároveň při dosažení schopnosti řešit jednu úlohu více způsoby, získávají žáci hlubší porozumění látce. Lerl (1940) ve své práci vyzdvihuje potřebu nízkých hodnot zlomků, za účelem možnosti provádění početních operací zpaměti. Jednotlivé zlomky pojmenovává běžnými pojmy (koruny, dny v týdnu apod.), čímž využívá skutečnosti, že není třeba uvádět žákům jakákoli pravidla pro správný výpočet. Zároveň považuje za nutné uvědomit si, že racionální čísla jsou pro žáky těžko pochopitelná, protože doposud pracovali především s celými čísly. S desetinnými čísly obvykle nebývá takový problém, protože žáci si je lépe představí díky převádění jednotek a využívání vah.

Ke svému poznatku přidává Lerl (1940) ještě další dvě upozornění, které způsobují nedostatečné porozumění zlomkům. Jedním je velké množství vzorců a pravidel, která si žáci mají zapamatovat. Vyšší počet pravidel však nezaručuje lepší výkony, protože žáci se pravidla učí mechanicky, mnohdy bez porozumění, a proto při výpočtech pletou jednotlivé vzorce navzájem mezi sebou. Z toho důvodu je nutné věnovat procvičení tématu dostatek času a docílit zažití jednotlivých mechanismů společně se samotnou podstatou zlomků. Šestáková (2011) potvrzuje, že memorování algoritmů, definic a tvrzení má u žáků za následek pouze nechuť ke zkoumání a zároveň přemýšlení nad správností získaných výsledků. Ačkoli myšlenky Šestákové a Lerla jsou od sebe vzdálené několik desítek let, je zajímavé, že jsou velmi podobné.

Vejmelková (2014) se ve své práci zabývala místy, kde žáci při výpočtech u zlomků nejčastěji chybují. Nejvýznamnější problém představoval součet a rozdíl dvou zlomků, které měly různý jmenovatel. Žáci v příkladech rozšíří jmenovatel, ale opomenou rozšířit i čitatel, čímž změní hodnotu zlomku. Tento problém úzce souvisí nejenom s rozšiřováním a krácením zlomků, ale může zde hrát roli i nedostatečná znalost malé násobilky.

Haylock a Thangata (2008) poukazují na využívání postupů, které si žáci osvojili u celých čísel, také do nových výpočtů se zlomky. Bruckner (1928) chybovost u výpočtu zlomků rozšiřuje na konkrétní nedostatky, kde nejčastější chybou (u 20,2 % žáků) bývá nedostatečné pochopení postupu. Žáci při součtu dvou zlomků nepřevádí zlomky na společného jmenovatele, ale pouze sečtou zvlášť čitatele a zvlášť jmenovatele, tedy $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s}$.

V jiném případě rozšíří jmenovatel, ale zapomenou rozšířit i čitatel daného zlomku. Dále byly zaznamenány situace, kdy žáci jmenovatele mezi sebou roznásobili a čitatele sečetli nebo naopak čitatele roznásobili a jmenovatele sečetli. Dalších 17,5 % žáků mělo obtíž s krácením zlomků na základní tvar. Žáci při krácení mnohdy krátí čitatel a jmenovatel jiným číslem, či dělí jmenovatel čitatelem. Samotné převedení na společného jmenovatele představovalo problém pro 1,5 % žáků, kteří mnohdy neuměli určit nejmenší společný násobek či přičítali získaný společný jmenovatel k rozšířenému čitateli. U kmenových zlomků sčítali žáci jmenovatele, ale nezapsali čitatele, tedy vytvořili celé číslo.

Kerslake (1986) ve svém výzkumu zaznamenal pět základních rad pro učitele, jak k látce zlomků přistupovat a na které oblasti se mají zaměřit. První důraz je zaměřen na podporu žáků učitelem. Učitel by měl svým žákům naslouchat a povzbuzovat je ve vyjadřování správných interpretacích zlomku. Větší důraz by měl být dán také na interpretaci rozdělení zlomků a zároveň je třeba se dostatečně věnovat ekvivalenci jednotlivých zlomků.

Dostatek pozornosti by mělo být věnováno i porozumění rozdílu mezi celkem a jeho částmi a přechodu počítání v celých číslech do počítání s čísly racionálními. Lerl (1940) ve své práci představil postup, jakým by měli učitelé zavádět zlomky. Nejprve by měla být věnována pozornost informaci, že počítání s celými čísly se rozšiřuje na počítání se zlomky. V situaci, kdy se žáci s touto skutečností dostatečně sžijí, představí žákům zlomky jiné, tedy zlomky, které jsou krácené či rozšířené. Druhá zásada poukazuje na nutné prvotní počítání s pojmenovanými zlomky, které jsou pro žáky vizuálně představitelné. Posledním bodem je násobení, kde daný násobek je zlomkem.

Podle Moulisové (2006) jsou základní přístupy k výuce děleny na konstruktivní a tradiční. Učitel by měl najít správnou kombinaci mezi těmito přístupy. Kvalitní výuka však není určována jenom podle výukového stylu, ale i podle osobnosti učitele, prostředí, současné situace a probírané látky. Podporu vyjadřuje Hejného metodě, která žákům nabízí srozumitelnou a názornou formu. Učebnice profesora Hejného rozděluje úlohy podle obtížnosti, což napomáhá k motivování všech žáků ve třídě. Zároveň téma zlomků se nachází hned v 5 učebnicích, ačkoli jednotlivé kapitoly jsou rozmístěny mezi jiná témata, pro lepší propojenost informací.

2 Historie využívání zlomků

Počátky využívání zlomků leží v dávné historii Mezopotámie a starověkého Egypta datovaného ke 4. tisíciletí př. n. l.[1], kde stejně jako v dnešní době byly zlomky považovány za důležitou formu vyjádření celků či menších částí celku. V těch časech byly zavedeny především pro potřeby zemědělství, kdy bylo nutné rozdělovat pole na menší části či rozvrhnout spotřebu úrody. Důležité postavení zlomků ukazuje i fakt, že byly objeveny dříve než záporná čísla, jejíchž počátky sahají k čínské dynastii Chan, až k roku 200 př. Kr. (Kilhamn, 2021)

2.1 Práce se zlomky v Mezopotámii

Oblast Mezopotámie se právem označuje za kolébku civilizace, protože již od 3. tisíciletí se zde bylo možné vzdělávat pomocí školského systému. Učivo se zaměřovalo především na čtení, psaní, počítání, kreslení a případně na studium sumerského jazyka. Výuka byla složená hlavně z neustálého opakování, memorování faktů či opisování znaků a slov. Absolventi, pocházející z významných a bohatých rodin, využívali své vzdělání především v hospodářství, obchodu či se živili jakožto úředníci. (Vymazalová, 2006)

Z klínopisných textů, objevených při archeologických vykopávkách, bylo zjištěno, že lidé v Mezopotámii uměli pracovat nejenom s přirozenými čísly, ale používali i smíšená čísla a kladné šedesátinné zlomky, které mají ve jmenovateli čísla 60^n, kde *n* je přirozené číslo. Zlomky byly využívány především pro dělení čísel, kdy se k číslu *n* hledala převrácená neboli reciproká hodnota, tedy $\frac{1}{n}$. Pro výpočet podílu se zápis dělení přetransformovával do násobení, takže místo zápisu $\frac{a}{b}$ se vyhledávalo řešení pro příklad a $\cdot \frac{1}{b}$. Potřebné výsledky bylo možné nalézt v tabulkách, které obsahovaly reciproké hodnoty ve tvaru $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$, kde písmena *p, q, r* představovala přirozená čísla. Tento jmenovatel byl využíván především pro svůj konečný rozvoj v šedesátkové soustavě, která byla v Mezopotámii plně využívaná.

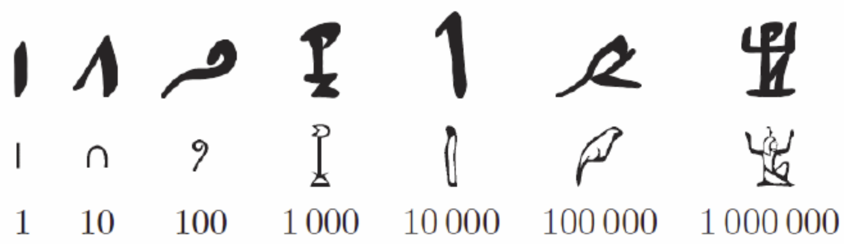
[1] Matematika starověkého Egypta. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2021, 29. 8. 2021 [cit. 2021-02-11].
Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Matematika_starov%C4%9Bk%C3%A9ho_Egypta

Ve vhodných příkladech, ve kterých byl dělenec násobkem dělitele, bylo možné dělit přímo. Pokud však dělení nešlo provést, hledala se přibližná hodnota. (Vymazalová, 2006)

2.2 Práce se zlomky ve starověkém Egyptě

Nejobsáhlejším dochovaným pramenem o starověkém Egyptě, je Rhindův papyrus nalezený v Luxoru[2] v 19. století. Nejstarší zmínka v řečeném papyru zabývající se sklonem pyramid je datována již k 27. století před naším letopočtem.

Matematické chápání zlomků se ve Starověkém Egyptě pohybovalo na vysoké úrovni, protože obyvatelům zajišťovalo správné odhadování objemu produkce, centralizovanou kontrolu a následně spravedlivou redistribuci. Vstupní znalost představovalo pochopení celých čísel, které Egypťané uváděli v nepozičním desetinném zápisu s číslicemi 1–1000 000, přičemž každá pozice měla svůj specifický znak. Jednotlivá čísla byla následně vypsána spojením konkrétního počtu číslic pro jednotky, desítky, stovky apod. viz obr. 1.



Obrázek 1: Přehled egyptských číslic a jejich hieratický a hieroglyfický zápis (Vymazalová, 2006, str. 13)

Zlomky byly vytvářeny jako převrácené hodnoty celých čísel, se kterými Egypťané také nejčastěji pracovali. Pro vyjádření převrácené hodnoty se využíval znak , který byl zakreslený nad danou číslicí. Výsledky početních operací musely být ve formě celých čísel či kmenových zlomků, což vedlo k mnohým komplikacím a složitostem. Kromě kmenových zlomků pracovali Egypťané s různými děliteli čísla dva. Pro matematické operace měli sepsané tabulky, podle kterých určovali výpočet stejně jako u většiny příkladů, které se týkaly násobení, dělení, sčítání i odčítání zlomků. V tabulkách byly mnohdy zaznamenány

[2] Matematika starověkého Egypta. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2021, 29. 8. 2021 [cit. 2021-02-11]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Matematika_starov%C4%9Bk%C3%A9ho_Egypta

postupy, nicméně žáci se museli postupy učit zpaměti a následně vytvořit zkoušku, aby se ujistili o správnosti výpočtu.

Výpočet dělení se zbytkem určovali Egypťané na základě vypsaných násobků dělitele, které vypisovali do dvou sloupečků. V jednom sloupci byly vypsány postupné násobky dělitele až do hodnoty, která nepřekročila hodnotu dělence. V druhém sloupečku byla vypsána čísla, kterými byl dělitel násoben. V případě, že daná čísla byla nesoudělná, začaly se sepisovat kmenové zlomky. Následně se dělenec zapsal jako součet jednotlivých násobků dělitele a výsledek se vyjádřil jako součet čísel, kterými se násobil dělitel, aby se získal počáteční dělenec.

V obr. č. 2 lze vidět názorný příklad 43 ÷ 8. V pravém sloupci jsou postupně vypsány násobky dělitele (tedy osmi) až do čísla 32, protože další násobek 64 je větší než zadaný dělenec, takže větší než číslo 43. Do levého sloupce jsou zapsána čísla, jimiž se násobí dělitel $\left(1, 2, 4, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$. Z pravého sloupce jsou vybrány hodnoty, které dávají součet dělence, tedy 43. Z levého sloupce jsou následně určeny násobky dělitele, jejíchž násobky dali součet dělence. Součet využitých čísel levého sloupce je výsledkem zadaného příkladu. Předložený příklad poukazuje na preferování kmenových zlomků a na vysokou schopnost manipulace s nimi.

$$
\begin{array}{lrr}
\text{Př: } 43 \div 8 & \backslash 1 & 8 \\
 & 2 & 16 \\
 & \backslash 4 & 32 \\
 & \backslash \frac{1}{8} & 1 \\
 & \backslash \frac{1}{4} & 2
\end{array}
$$

Jelikož $43 = 8 + 32 + 1 + 2$, výsledkem je $5 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}$.

Obrázek 2: Výpočet příkladu dělení se zbytkem ve starověkém Egyptě (Vymazalová, 2006, str. 14)

3 Zlomek a základní operace

V zájmu akceptování výsledků této práce je vhodné představit základní pojmy a početní operace, se kterými se ve výzkumu pracovalo. Následná část je proto věnována definování termínů vztažených k tématu zlomků a práce s nimi.

3.1 Zavedení zlomku

Ačkoli slovo zlomek může být pro mladší žáky neznámé, s určitými zlomky se jistě setkávají v reálném životě a mnohdy jich i nevědomky využívají. Slovní vyjádření poloviny, třetiny či čtvrtiny lidé běžně vyslovují vzhledem k časovému vymezení, rozdělení surovin či k průběhu sportovních zápasů, čímž se povědomí o zlomcích dostává i k jejich dětem.

Prvotní představa dětí o zlomcích je chápána jako vztah části a celku s následným zápisem $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ (Tichá, 2009). Pochopení části ovlivňuje další pojmotvorný proces, protože za pomoci zlomků je možné definovat obor racionálních čísel. Na zavedení racionálních čísel je možné se dívat z několika úhlů. Zatímco Trčková ve své práci zavádí racionální číslo na základě kartézského součinu, tak Bušek představuje celý obor racionálních čísel.

Zavedení Trčkové (2017, str. 3): „Výchozím kartézským součinem je $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a je definována relace $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$, kde $b \neq 0$, $d \neq 0$. Každá třída ekvivalence představuje jedno racionální číslo.“

Bušek (1992, str. 18): „Množina Q všech racionálních čísel obsahuje právě ta čísla, jež lze vyjádřit ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$“.

Pro všechna racionální čísla zároveň platí, že je lze vyjádřit desetinným rozvojem, který je ukončený, např. $\frac{1}{2} = 0{,}5$, nebo periodický, např. $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$. (Beránek, 2012)

Zápis zlomku se skládá z čitatele udávajícího počet dílů, zlomkové čáry představující funkci dělení a jmenovatele, který určuje, na kolik částí je daný celek rozdělen. Pokud zlomek obsahuje v čitateli jedničku (např. $\frac{1}{q}$), nazýváme jej kmenový.

Díky možnosti rozdělit celek a následně i část daného celku na menší části, lze každý zlomek vyjádřit mnoha způsoby. V případě, kdy čitatel je nesoudělný se jmenovatelem a zároveň absolutní hodnota čitatele je nižší než absolutní hodnota jmenovatele, nazýváme výsledek zlomek v základním tvaru či pravý zlomek. Hlavní výhoda pravých zlomků spočívá v jednodušším a názornějším vyjádření racionálního čísla, které je zajištěno menším množstvím jednotlivých částí.

Důležité je poznamenat, že ke každému racionálnímu číslu existuje číslo opačné, které má opačnou signaturu než zadané číslo, takže k číslu $\frac{p}{q}$ přiřadí číslo $-\frac{p}{q}$. Zároveň ke každému racionálnímu číslu $\frac{p}{q}$ lze najít číslo převrácené, které udává převrácenou hodnotu původního čísla, tedy $\frac{q}{p}$. V případě, kdy má čitatel větší absolutní hodnotu než jmenovatel, mluvíme o tzv. smíšeném čísle nebo o nepravém zlomku. Zlomek $\frac{r}{q}$, kde $r > q$, $r \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ lze vyjádřit ve tvaru $R\frac{p}{q}$, kde R vyjadřuje počet celků, $\frac{p}{q}$ určuje zbývající část celku a zároveň platí $q > p$; $R, p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$.

3.1.1 Možné interpretace zlomku

Chápání zlomku jako části celku však není jediným možným vysvětlením žákům. Tichá a Macháčková (2006) poukazují na možnost vnímat zlomek i jako kvantitativní údaj v podobě veličiny, či jako desetinné číslo. Zároveň zlomek může být chápán jako operátor, který dává pokyn k provedení operace či reprezentant poměru dvou čísel.

Trčková (2017) vymezuje čtyři druhy racionálních čísel lišících se možnostmi zápisu:

1) Celá čísla: 5, 103, apod.
2) Desetinná čísla s konečným desetinným rozvojem, mezi které patří např. 0,8; 7,45.
3) Periodická čísla s nekonečným periodickým desetinným rozvojem, mezi které patří např.: $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}\overline{3}$ $\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0{,}8\overline{3}$ $\frac{19}{9} = 19 : 9 = 2{,}\overline{1}$.
4) Zlomkem $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, např. $-\frac{3}{8}, \frac{4}{5}, \frac{7}{12}$.

Při nesprávném či nevyhovujícím seznámení se se zlomky mohou žáci narazit na problém z důvodu nedostatečného propojení informací a neobjevení paralelních významů, což může vést k neúspěšnému řešení úloh.

3.1.2 Zlomek v RVP

Při prozkoumání Rámcového vzdělávacího programu základního vzdělávání (dále RVP ZV) je možné zjistit, že žáci se s pojmem zlomek oficiálně seznamují až během studia na druhém stupni základní školy. První informace o výuce zlomků v RVP ZV se nachází v kapitole

Číslo a početní operace, podle které žák „modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku“ (RVP ZV, 2017, str. 33). Následně je vypsáno, že podle očekávaných výstupů by měl každý žák využívat „různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek–část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)“ (RVP ZV, 2017, str. 34). Dokument obsahuje výpis základních pojmů, se kterými by se měl žák během svého studia seznámit. V RVP pro gymnázia se o zlomcích vůbec nepíše, protože jsou zřejmě brány jako základ, pomocí kterého lze řešit i složitější početní operace. Z vypsaných informací je zřejmé, že téma zlomků je v RVP ZV určeno velmi obecně a podrobnější rozvržení problematiky je přenecháno učitelům, kteří své požadavky na žáky mohou zapracovat do Školního vzdělávacího programu (dále ŠVP).

3.2 Základní operace

Ve výzkumné části se zaměříme na práci respondentů se zlomky, a zda umí využívat základní operace. Konkrétně potřebovali respondenti zvládnout základy sčítání, odčítání, krácení, rozšiřování a převádění zlomků na společného jmenovatele. V následujícím textu budeme předpokládat dva zlomky $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$, kde $p, r \in \mathbb{Z}; q, s \in \mathbb{N}$, kde $\mathbb{N}$ obsahuje všechna přirozená čísla bez nuly.

3.2.1 Krácení a rozšiřování zlomků

Krácením zlomků lze získat základní tvary zlomků, které jsou názornější pro vizuální představu a zároveň se s nimi lépe pracuje při výpočtech. Krácení zlomků znamená dělení čitatele i jmenovatele stejným číslem, které však musí být společným dělitelem jmenovatele i čitatele. V případě rozšiřování zlomku se jedná o vynásobení čitatele i jmenovatele stejným číslem, tedy $\frac{p}{q}, \frac{n \cdot p}{n \cdot q}$, kde $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Jelikož zlomky jsou pouze vynásobeny číslem 1, jejich hodnota se nemění.

3.2.2 Porovnávání zlomků

Mezi základní operace můžeme také zařazovat porovnání velikosti určité části vyjádřené zlomkem. Proces určení nerovnosti dvou zlomků nemusí být, na rozdíl od přirozených čísel, určen na základě vyššího čísla, což může být pro žáky matoucí. Pro správné porovnání jsou jednotlivé situace podrobněji rozděleny do následujících situací:

1) Nechť $\frac{p}{q}, \frac{p}{s}, p, q, s \in \mathbb{N}, q \neq 0, s \neq 0,$ zároveň platí $q > s$, pak $\frac{p}{q} < \frac{p}{s}$. V případě, že jsou porovnávány dva zlomky se stejným čitatelem, jejich velikosti se jednoznačně určují podle velikosti jmenovatelů. Číslo ve jmenovateli určuje počet částí, na které je určitý celek dělen. Tento poznatek vyjadřuje skutečnost, že čím více dílů je v jednom celku, tím je daný dílek menší. Proto i zlomek s větším číslem ve jmenovateli je menší než druhý zlomek.
2) Nechť $\frac{p}{q}, \frac{r}{q}$, kde $p, r, q \in \mathbb{N}, q \neq 0$, a zároveň platí $p > r,$ pak platí $\frac{p}{q} > \frac{r}{q}$. Pokud dva zlomky mají stejného jmenovatele, což určuje, že velikosti jednotlivých částí jsou stejně velké, porovnání velikostí probíhá na základě čitatelů, takže záleží na počtu stejně velkých částí.
3) Poslední možnost představuje situaci, ve které se liší jak čitatele, tak i jmenovatele zadaných zlomků, tedy nechť $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$, $p, q, r, s \in \mathbb{N}, q \neq 0\ s \neq 0$ a zároveň $q \neq s, p \neq r.$ Převedením zlomků na společného jmenovatele, kterým je nejmenší společný násobek obou jmenovatelů, porovnáme zlomky na základě odlišných čitatelů.

3.2.3 Součet a rozdíl zlomků

Sčítání zlomků se shodnými jmenovateli určuje součet stejně velkých částí, proto není potřeba zlomky složitěji upravovat. Výsledek součtu zlomků vyjadřuje počet částí a velikost určenou jejich jmenovatelem, tedy $\frac{p}{q} + \frac{r}{q} = \frac{p+r}{q}$.

V případě sčítání zlomků s odlišným jmenovatelem je nezbytné převést zlomky na společného jmenovatele, kterým je nejmenší společný násobek zadaných jmenovatelů. Převedením zlomků na společného jmenovatele získáme součet stejně velkých částí, který byl popsán výše. Pokud jsou jmenovatele nesoudělní, lze jejich postup zapsat takto: $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{s} + \frac{r}{s} \cdot \frac{q}{q} = \frac{p \cdot s + r \cdot q}{q \cdot s}$. Při výpočtu rozdílu zlomků se postupuje obdobně jako u sčítání, pouze se znaménkem mínus.

3.2.4 Násobení a dělení zlomků

Při násobení zlomků je nutné odlišit, zda násobíme přirozeným číslem či zlomkem. V případě, že násobíme zlomek přirozeným číslem, vynásobíme pouze čitatele přirozeným číslem, zatímco jmenovatele opíšeme. Při násobení dvou zlomků se vynásobí čitatel s čitatelem a jmenovatel s jmenovatelem, tedy $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$.

Při dělení zlomků je využíván převrácený zlomek, ve kterém je zaměněn čitatel za jmenovatele. Při následném dělení dvou zlomků násobíme první zlomek převráceným zlomkem, tedy $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{p \cdot s}{q \cdot r}$.

3.2.5 Řetězové zlomky

Často opomíjeným odvětvím možného využití zlomků jsou tzv. řetězové zlomky. Řetězové zlomky jsou využívány i pro určení zatmění Měsíce či při ladění hudebních nástrojů. Jelikož se jimi budeme v této práci zabývat pouze okrajově, je zde uvedena pouze základní definice.

„Řetězovým zlomkem budeme nazývat výraz ve tvaru

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

kde $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$.“ (Otrubová, 2014, str. 5)

4 Zavedení zlomků v učebnicích z nakladatelství Prometheus, SPN – pedagogického nakladatelství a nakladatelství H–mat

Žáci se s tématem zlomků podrobněji seznamují nejenom skrze představení látky učitelem, ale i za pomoci učebnic, které vyučování doprovází a které učitel využívá i se o ně opírá. Jelikož se výzkum celé práce zabývá porozuměním učivu zlomků, je tato část zaměřena na porovnání učebnic určené především pro sedmou třídu, během které se zlomky obvykle vyučují. Výzkum, který by porovnával učebnice matematiky konkrétně pro sedmý ročník však dosud nebyl zpracován, a proto byl výběr vhodných učebnic určen na základě dvou prací.

Hrněčková (2016) porovnává téma závislostí, vztahů a práce s daty v učebnicích z nakladatelství Fraus, Prometheus a od SPN – pedagogického nakladatelství (dále SPN). Výběr učebnic však není podpořen žádným výzkumem, zatímco Hammerová (2015), která se ve své práci zabývala didaktickou vybaveností učebnic pro 6. ročník ZŠ, provedla dotazníkové šetření zjišťující obvyklost využívání jednotlivých učebnic. Nejvýznamnější zastoupení obsazovala učebnice z nakladatelství Prometheus pocházející od autorů Odvárko a Kadleček. Druhá nejčastější učebnice pochází z nakladatelství SPN, jejímiž autoři jsou Půlpán a Čihák. Nakladatelství Fraus se na žebříčku využívaných učebnic vůbec neumístilo. Jelikož je obvyklé vyučovat žáky podle jednoho typu učebnic celý druhý stupeň, jsou v práci porovnány pouze učebnice nakladatelství Prometheus a SPN.

Ve výzkumu České školní inspekce (dále ČŠI) z roku 2015 bylo zjištěno, že při práci s alternativními učebnicemi dosahují žáci lepších výsledků než žáci s klasickými učebnicemi. ČŠI v roce 2018 označila Hejného metodu za alternativní přístup k výuce matematiky a zároveň vyzdvihla pozitivní efekt využívání alternativních učebnic. Z tohoto důvodu se poslední část této kapitoly věnuje rozboru učebnic Hejného metody nakladatelství H-mat[3], kde však není možné studovat pouze jednu učebnici. Látka zlomků prostupuje několika učebnicemi, střídá se s jinými tématy, a proto netvoří jeden ucelený soubor. Z toho

[3] Nakladatelství H-mat vydává H-učebnice, které předkládají učební látku formou Hejného metody. S nakladatelstvím H-mat úzce spolupracuje společnost H-edu, která napomáhá učitelům vyučovat matematiku formou Hejného metody pomocí elektronických učebnic, materiálů či interaktivních prostředí.

důvodu budou v práci popsány konkrétní kapitoly z dílů A, B, C, D a F, které jsou seřazeny podle vzestupující se obtížnosti.

Jednotlivé učebnice byly konfrontovány na základě schvalovací doložky vydané Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy (dále MŠMT), která se zaměřuje na čtyři základní kritéria pro schválení konkrétního vydání[4]. Prvním požadavkem je soulad učebnice s obecnými, kurikulárními dokumenty a RVP ZV, na který navazuje kritérium odborné správnosti obsahu knihy. Další nároky jsou kladeny na didaktickou stránku učebnice, tedy zda jsou učebnice metodicky a didakticky vhodně zpracované a jestli odpovídají věku žáků. Srovnání bude doplněno poznatky z výzkumu (Pavlíčková, 2018), který vyhodnocoval učebnice na základě Eye–trackingu[5]. Závěry z výzkumu prokázaly, že výrazné prvky v podobě tučných textů či odrážek získávají nejenom pozornost, ale i zájem čtenářů. Pokud je však nápadných oblastí příliš, např. nadbytečné obrázky, úlohy či zajímavosti, žáci ztrácí pozornost a začínají v textu přeskakovat. Zároveň by se autoři učebnic měli vyvarovat černobílým obrázkům, které žáky nevybízí k pozornosti, ale naopak u žáků vzbuzují dojem zastaralosti.

Porovnávané učebnice:

- PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK a Šárka MÜLLEROVÁ. Matematika pro základní školy: Aritmetika. Praha: Pedagogické nakladatelství, 2014. ISBN 978-807235-398-9.
- ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy: Zlomky, celá čísla, racionální čísla*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2020. ISBN 987-80-7196-423-0.
- HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika A: Učebnice pro 2.stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: H-mat, 2015. ISBN 978-80-89859-06-1
- HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika B: Učebnice pro 2.stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: H-mat, 2018. 978-80-89859-10-8
- HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika C: Učebnice pro 2.stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: H-mat, 2016. ISBN 978-80-89859-23-8

[4] Schvalovací doložky učebnic. *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy* [online]. Praha: MŠMT, 2021, 1. 4. 2021 [cit. 2021-6-26]. Dostupné z: https://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/schvalovaci-dolozky-ucebnic

[5] Technologie měřící oční aktivitu

- HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika C: Učebnice pro 2.stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: H-mat, 2015. ISBN 978-80-898594-5-0

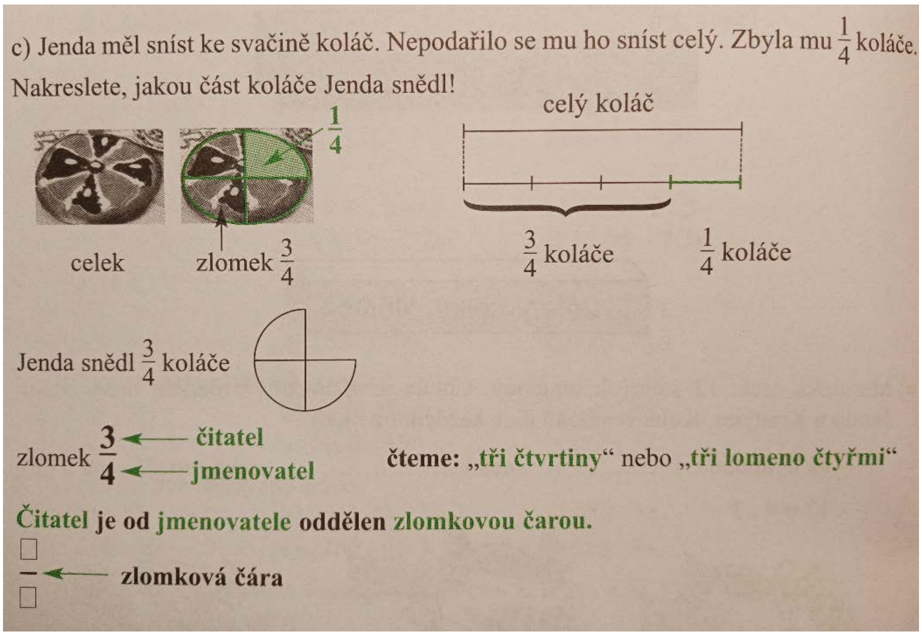
4.1 Zavedení zlomků v učebnici od nakladatelství SPN

Pedagogické nakladatelství, založené roku 2008, vydalo v roce 2014 učebnici matematiky pro ZŠ zaměřující se na aritmetiku. Učebnice byla zpracována v souladu s RVP ZV, což potvrdilo i její schválení MŠMT, čímž se kniha zařadila do seznamu vhodných učebnic pro vzdělávací obor Matematika. Doba platnosti schvalovací doložky byla nejprve určena na šest let, nicméně v roce 2019 byla prodloužena až do roku 2025.[6]

V učebnici předchází kapitole zlomků počáteční opakování, které obsahuje práci s desetinnými čísly, číselnou osou, převody jednotek a dělitelností. Následné téma zlomků je rozděleno do devíti celků, které postupně odkrývají jednotlivé operace a informace o zlomcích. Kapitoly jsou rozděleny ještě na menší části poukazující na konkrétní problémy, které lze následně procvičit na mnoha příkladech a občasně i na slovních úlohách.

První kapitola se nazývá Dělení celku, zlomek. V úvodní části jsou žákům zlomky představeny ve třech úlohách, přičemž vyřešené jsou pouze dvě. Autoři využívají jak diskrétní, tak spojité modely, avšak zápis a pomocná schémata mohou být pro žáky méně názorné. Ačkoli vymezení pojmů čitatel, jmenovatel a zlomková čára je určeno až po vysvětlujících příkladech, zápis zlomků už je používán během řešení. Následné úkoly vybízí žáky ke čtení a zápisu zlomků, přičemž jsou ukázány i jiné spojité modely zlomků. Oblast, zabývající se nulou ve zlomku, žákům ihned prozrazuje její význam a následně jsou žáci vyzváni k zapamatování si výsledku v případě umístění nuly v čitateli nebo ve jmenovateli. Jelikož je procvičování doplněno i příklady neobsahující nulu, bylo by možné danou podkapitolu spojit s předchozí.

[6] Schvalovací doložky učebnic. *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy* [online]. Praha: MŠMT, 2021, 1. 4. 2021 [cit. 2021-6-26]. Dostupné z: https://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/schvalovaci-dolozky-ucebnic



Obrázek 2: Ukázková úloha se zavedením zlomků v učebnici z nakladatelství SPN (Půlpán, 2014, str. 12)

Zároveň, stejně jako v minulém procvičování, je pouze jedna úloha doplněna smysluplným obrázkem, což u některých žáků může vést k nedostatečně pevné představě zlomků. Následně jsou prezentovány zlomky obsahující vyšší číslo v čitateli, nicméně pojem smíšený zlomek se objeví až o dvě kapitoly dále. Podobně málo pochopitelné je umístění znázornění zlomků na číselné ose, které zakončuje tuto první kapitolu. Ačkoli jsou žákům ukázány zlomky vyjadřující totožnou hodnotu pomocí číselné osy, následné procvičování se danému tématu vůbec nevěnuje. Cvičení se zaměřuje na vyjadřování konkrétních jednotek vzhledem k celku či převáděním zlomků na desetinná čísla.

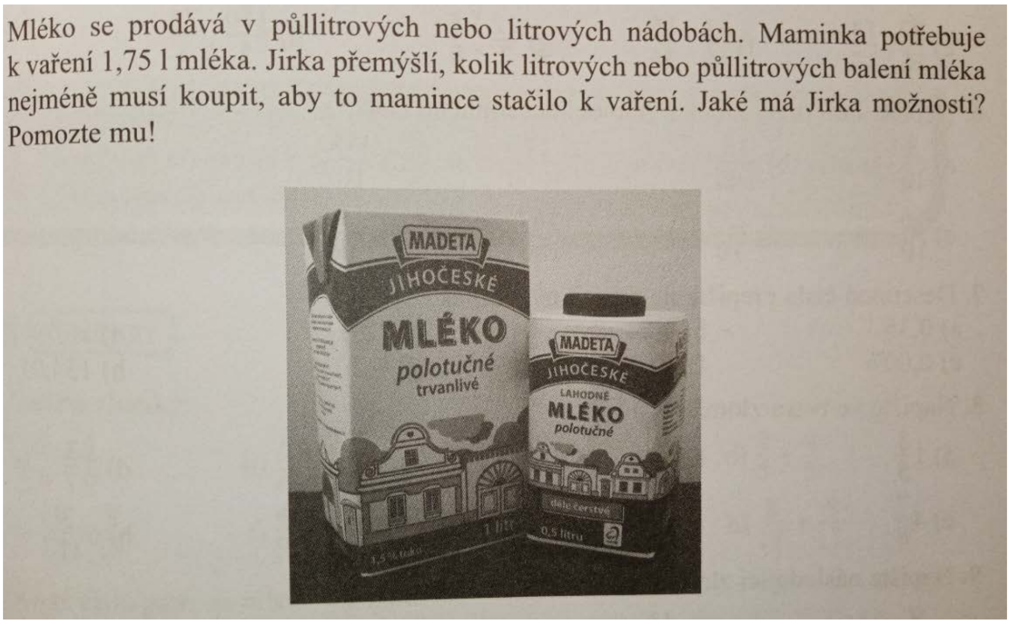
Uchopení první kapitoly obsahuje četné množství materiálů na procvičení látky, mezi kterými se objevují i úlohy podporující žákovo kritické myšlení. Většina příkladů a cvičení však vyžaduje pouze mechanické počítání a zároveň jen velmi málo příkladů či úloh je doplněno názorným a rozumným schématem nebo obrázkem.

V druhé kapitole se žáci učí rozšiřovat a krátit zlomky. Autoři v několika větách popisují, jak získat tři různé zlomky s hodnotou jedna polovina a k výpočtu připojují i názorný obrázek. Doplňující příklady jsou vyřešeny bez podrobnějšího vysvětlení či demonstrativního schématu. V další úloze vyjadřují žáci zlomky pouze podle vzoru, čímž je zavedeno rozšíření zlomku. Stejně jako v podkapitole krácení zlomků, je k rozšiřování přiřazen pouze jeden obrázek, který by však bylo vhodné podrobněji popsat. Krácení zlomků je nejprve zavedeno, a i procvičeno, pomocí postupného dělení jednotlivými děliteli a až v poznámce je ukázán způsob rozkladu čitatele i jmenovatele na součin prvočísel. Bohužel jediný ukázkový příklad rozkladu na součin prvočísel obsahuje neúmyslnou zavádějící chybu, a proto je pro žáky zcela nevhodný. Kapitola je uzavřena poznatkem definujícím, že každé přirozené číslo lze zapsat jako zlomek, který má v čitateli jedničku. Umístění závěrečné informace postrádá vysvětlení i logiku a čtenář se může ptát, zdali by nebylo vhodnější zařazení již v první kapitole.

Třetí část porovnávání zlomků postupně vyšetřuje, jak uspořádat zlomky se stejnými jmenovateli, shodnými čitately, a nakonec i libovolné zlomky. V kapitole jsou obsaženy i poznatky popisující desetinné zlomky a smíšená čísla.

Uspořádání na základě stejného jmenovatele i čitatele je předvedeno jedním příkladem se srozumitelnými obrázky. Kromě tří úloh zlomků se stejnými jmenovateli však není téma více prodiskutované. Na cvičení, ve kterém žáci uspořádávají zlomky pomocí zobrazení hodnot na číselné ose, navazuje podrobný manuál k možnosti porovnání libovolných zlomků. Žáci jsou učeni převádět zlomky na zlomky se společným jmenovatelem a na jednom příkladu je ukázána i práce s nejmenším společným násobkem zadaných jmenovatelů. Kapitola však zcela postrádá ilustrativní obrázek prezentující potřebnost převedení na společného jmenovatele. Namísto využívání obdélníkového modelu je žákům přidána další kolonka, kterou si mají žáci uložit do paměti. V části na upevnění předaných informací se nacházejí nejen úkoly a slovní úlohy na porovnání zlomků, ale i práce s číselnou osou, konkrétně zakreslování a určování hodnot bodů zaznamenaných na číselné ose. Úlohy se zaměřují především na mechanické počítání a nevyžadují hlubší kritické uvažování. Zároveň nejsou žáci vedeni k nákresům jednotlivých hodnot, čímž jsou ochuzováni o důležitou součást vnímání zlomků.

Desetinné zlomky jsou představeny a následně využity ve dvou slovních úlohách. Podrobnější či interaktivnější postup při vysvětlování se však objevuje pouze u jednoho příkladu. Autoři zároveň u dané ukázky demonstrují i jednodušší způsob řešení bez využití desetinných zlomků, čímž upozorňují na výhody kritického myšlení. Jediný význam desetinných zlomků je žákům ukázán na pravítku a na převodu mezi různými jednotkami míry. Většinu procvičování mohou žáci, stejně jako u smíšených čísel, vyřešit bez hlubšího porozumění. Pouze v jedné úloze vybízí autoři nejenom k procvičování, ale zároveň předestírají operaci sčítání a dělení zlomků. Smíšená čísla jsou pouze prezentována na několika obrázcích a následně jsou žáci vyzváni k obvyklému zapamatování předložené informace. V kapitole se objevují i černobílé fotografie potravin či budov, o kterých se v konkrétní úloze právě hovoří, nicméně obrázky nejsou nijak využity.


Mléko se prodává v půllitrových nebo litrových nádobách. Maminka potřebuje k vaření 1,75 l mléka. Jirka přemýšlí, kolik litrových nebo půllitrových balení mléka nejméně musí koupit, aby to mamince stačilo k vaření. Jaké má Jirka možnosti? Pomozte mu!

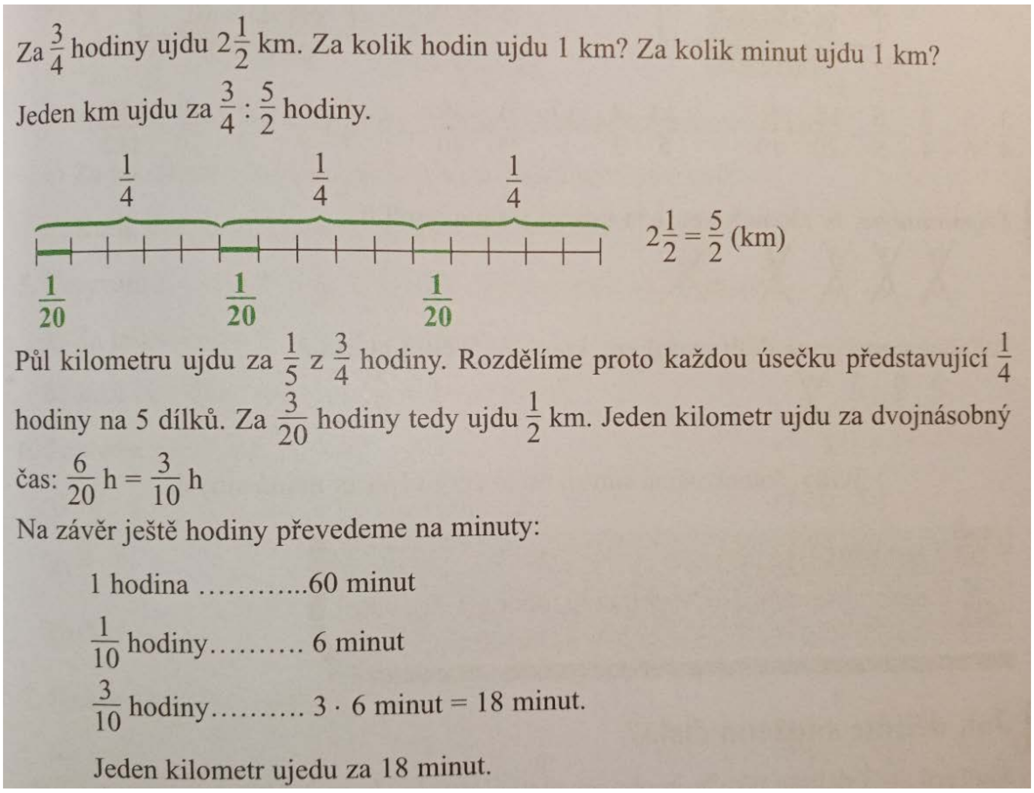
Obrázek 3: Slovní úloha s obrázkem v učebnici od nakladatelství SPN (Půlpán, 2014, str. 31)

U sčítání zlomků předpokládají autoři, že žákům postačují tři názorné příklady na sčítání zlomků se stejným jmenovatelem a z toho důvodu za příklady ihned navazují úlohy k mechanickému procvičení. Jako motivační slovní úloha na součet zlomků s různými jmenovateli byl vybrán příklad týkající se slévání nemrznoucí směsi a destilované vody v automobilu. Výběr tématu však může mnohé žáky odradit od výpočtu, protože nebudou rozumět, čemu se daná úloha věnuje. Do příkladu bylo zařazeno i již probrané porovnávání a odčítání zlomků, jehož zavedení následovalo až v další podkapitole. Postup zavedení rozdílu zlomků kopíruje posloupnost úkonů u sčítání, jen ukázka rozdílu dvou zlomků s různými jmenovateli je doplněna i obrázkem. V celé kapitole je obsaženo velké množství příkladů, avšak názorná schémata u procvičování zcela chybí.

Násobení zlomků přirozeným číslem prezentují autoři jako sčítání konkrétního počtu zlomků, které následně převádí i na desetinná čísla. Pomocí obrázků je také ukázán výpočet určité části z daných celků, přičemž s formulací „$\frac{p}{q}$ z x“ se pracuje i v dalších cvičeních. Násobení dvou zlomků je popsáno za pomoci obdélníkového schématu a ačkoli se první ilustrace může jevit nepochopitelně, v dalších dvou příkladech je nákres srozumitelný. V kapitole je ukázána i práce se smíšenými čísly a uživatelé jsou upozorněni na možnost krácení za účelem získání zlomku v základním tvaru. Žáci v této kapitole procvičují pouze správné násobení v mnoha příkladech a ani slovní úlohy nevyžadují složitější myšlenkovou operaci.

V navazující kapitole Dělení zlomků je ukázkový příklad, ve kterém má být zlomek vydělen přirozeným číslem. Příklad je převeden na již známou formulaci vybírání části zlomku ze zadaného zlomku, tedy operace dělení přirozeným číslem je převedena na operaci násobení převrácenou hodnotou původního dělitele. V druhém příkladě, kde dělencem i dělitelem jsou zlomky, zvolili autoři úlohu, která nejenom obsahuje smíšené číslo, ale zároveň vyžaduje odpověď na dvě zadané úlohy. Navíc přiložený obrázek se zdá být pro žáky těžko pochopitelný, což může vést k tomu, že se žák v dané úloze ztratí. Na příklady navazuje shrnutí získaných informací, které jsou doplněny opakováním poznatků z předchozích kapitol a ukázkou dělení smíšených čísel. Kromě obvyklých úloh na mechanické počítání, se v kapitole dělení nachází i zajímavé příklady, ve kterých autoři využívají gradovaných[7] úloh, ale zároveň vyžadují vyšší žákovu aktivitu.

[7] Gradované úlohy vytváří posloupnost úloh, u kterých se postupně zvyšuje náročnost, tedy první úloha bývá nejlehčí, zatímco poslední nejnáročnější. Zároveň je důležité podotknout, že úlohy se zabývají jedním tématem a mají podobnou strukturu. (Křížová, 2019)



Za $\frac{3}{4}$ hodiny ujdu $2\frac{1}{2}$ km. Za kolik hodin ujdu 1 km? Za kolik minut ujdu 1 km?

Jeden km ujdu za $\frac{3}{4} : \frac{5}{2}$ hodiny.

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ (km)

$\frac{1}{20}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{20}$

Půl kilometru ujdu za $\frac{1}{5}$ z $\frac{3}{4}$ hodiny. Rozdělíme proto každou úsečku představující $\frac{1}{4}$ hodiny na 5 dílků. Za $\frac{3}{20}$ hodiny tedy ujdu $\frac{1}{2}$ km. Jeden kilometr ujdu za dvojnásobný čas: $\frac{6}{20}$ h = $\frac{3}{10}$ h

Na závěr ještě hodiny převedeme na minuty:

1 hodina ………...60 minut

$\frac{1}{10}$ hodiny………. 6 minut

$\frac{3}{10}$ hodiny………. $3 \cdot 6$ minut = 18 minut.

Jeden kilometr ujedu za 18 minut.

Obrázek 4: Ukázková úloha na vysvětlení dělení zlomků v učebnici od nakladatelství SPN (Půlpán, 2014, str. 45)

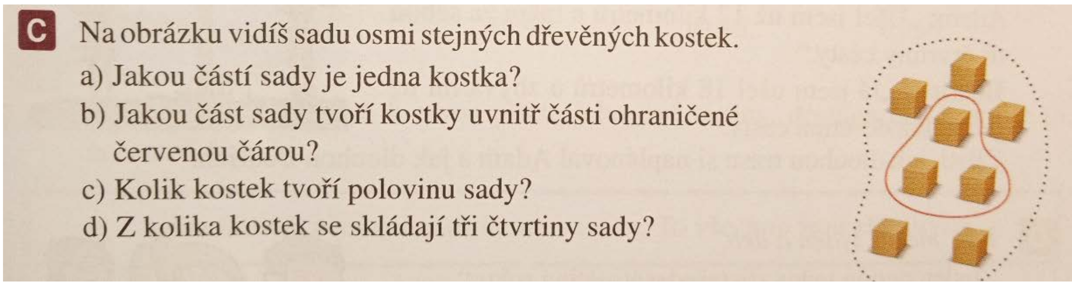
Složený zlomek je popsán jako dělení dvou zlomků, u kterého jsou popsány i jednotlivé části či práce při postupu ke správnému výsledku. Autoři upozorňují na vztah mezi dělením a násobením zlomků, který potvrzují na deseti příkladech. Závěrečné opakování je stejně jako poslední shrnující kapitola složeno z podnětných slovních úloh a četného počtu příkladů, které však mnohdy nemají vzestupující obtížnost.

Celá učebnice pracuje pouze v odstínech zelené a šedé barvy, což podle teorie Eye-trackingu nevzbudí v žácích přílišný zájem. Zbarvená odlišení mají názvy jednotlivých kapitol, podkapitol a cvičení, avšak nejvýraznějším elementem jsou označené kolonky jako „Zapamatujte si“. Zmíněné oblasti mohou vytvářet pocit klasického memorování informací bez většího pochopení a představy. Dále jsou v učebnici těžší příklady vyznačené hvězdičkou a zvýrazněné obdélníčky týkající se zajímavostí z historie vztahující se k daným tématům. Vyobrazených schémat či obrázků využívá učebnice velmi střídmě, navíc mnohá matematická zobrazení jsou těžko pochopitelná. Fotografie, které učebnici doplňují, jsou pouze černobílé a jejich umístění postrádá smysl. Obrázky znázorňují především jídlo nebo nějaké místo. Zařazené potraviny však žákům v Česku jistě nejsou neznámé, a navíc na etiketách jsou jasně viditelné výrobní firmy. Vyobrazením loga společnosti dělá učebnice daným firmám reklamu a vhodnost tohoto rozhodnutí je jistě diskutabilní.

4.2 Zavedení zlomků v učebnici z nakladatelství Prometheus

Učebnice z nakladatelství Prometheus zařadila MŠMT v roce 2017 do seznamu vhodných učebnic pro vzdělávání matematiky v sedmém ročníku ZŠ. Byla vypracována na základě RVP a vzhledem k využívání této učebnice na školách, proběhl v roce 2020 třetí dotisk přepracovaného vydání.

Učebnice rozděluje látku na dvě hlavní kapitoly, s názvy *Zlomky* a *Počítáme se zlomky*, které obsahují podrobnější podkapitoly. Učebnice v první kapitole řeší celek a jeho části pomocí spojitých i diskrétních modelů a využívá nejenom velké množství obrázků, ale i schémat. Prostředí zlomků je žákům představeno zcela přirozeně za podpory předpokládaných znalostí z dřívějších ročníků. Úlohy vycházejí ze zkušeností každodenního života a zároveň nevymáhají na uživatelích poznatky, které dosud nebyly zavedené. Žáci musí nad zadanými úlohami kriticky přemýšlet a odpovídat na úlohy, které nejsou nijak návodné.



Obrázek 5: Názorné úlohy na představení zlomků v učebnici od nakladatelství Prometheus (Odvárko, 2020, str. 5)

Příklady zaměřené na mechanické počítání se věnují úplným základům, bez kterých by žáci nemohli pracovat dále. Nicméně jednotlivá cvičení mají gradovanou strukturu a učitelé si proto mohou vybrat ze široké nabídky nejenom komplikovanějších úloh, ale i jednorázových, procvičovacích úkolů. Informace o zápisu a jednotlivých částech zlomku jsou umístěny za úvodem.

Následně jsou žáci vyzváni, aby si nově získané informace upevnili v několika cvičeních, které jsou nejprve čistě mechanické a až následně jsou představeny náročnější úlohy na podporu kritického myšlení. Žáci určují zlomky mezi jednotkami délky, váhy apod., čímž si opakují i předešlé učivo. Ve fialově označeném rámečku je na konci kapitoly sepsána situace s nulou v čitateli a ve jmenovateli. S touto informací je spojena i poslední poznámka, že pokud má zlomek shodné číslo v čitateli a jmenovateli, pak je zlomek roven jednotce.

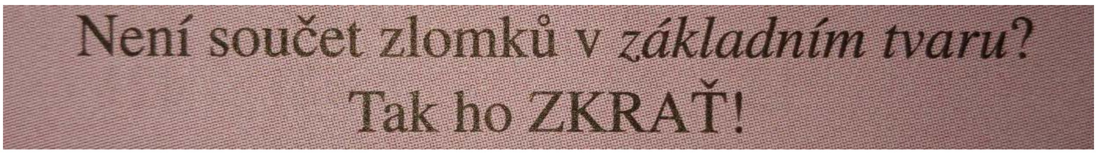
V podkapitole, kde se autoři zabývají zlomky větších než jedna, je po úvodních dvou motivačních příkladech rovnou zadáno cvičení, kde žáci pracují s jednotkami času, váhy apod. Je však otázkou, zda daný úvod bude žákům pro pochopení látky postačovat. Práci s číselnou osou zařadili autoři až na závěr podkapitoly, ačkoli žákům by číselná osa mohla pomoci k lepšímu pochopení problematiky.

Rozšiřování a krácení zlomků mohou žáci pochopit na názorných příkladech doplněných vysvětlujícími obrázky. Následují rámečky, kde jsou postupy zformulovány a podrobně popsány. V kapitolách se nachází i upozornění na vytvoření společného jmenovatele, čísla nesoudělná a zlomek v základním tvaru. Ačkoli je většina cvičení zaměřená na mechanické procvičování, autoři usilují o zajímavý kontext u slovních úloh či sledování problémů z různých úhlů pohledu. Žáci pracují s kolem štěstí, tombolou a zároveň se snaží dopočítat všech možných rozšíření zadaného zlomku. U hledání základního tvaru zlomku je pro ilustraci ukázáno několik možných postupů a jedním je zavedena i možnost zápisu přirozeného čísla jako zlomku s jedničkou ve jmenovateli.

V následné kapitole je úvodní motivace s vysvětlujícím rámečkem porovnávání zlomků se stejným jmenovatelem doplněna fialovým rámečkem, kde je napsáno „Menší zlomek je na číselné ose znázorněn vlevo od většího zlomku." Čtenář se může ptát, proč je tato informace zvýrazněna barvou upozorňující na nejdůležitější poznatky, které žák nesmí zapomenout. Zakreslování zlomků na číselnou osu provádí žáci hned v nadcházejícím cvičení a je tedy otázkou, zda napsané pravidlo žáky spíše nesplete, když si jej budou chtít zapamatovat. U porovnávání zlomků s různými jmenovateli byla vytvořena tabulka postupu, za kterým následuje přepis fiktivních sešitů dvou žáků, kde pouze jeden pracuje s nejmenším společným násobkem. V celé kapitole však není obsažen názorný obrázek, který by žákům přispěl k vysvětlení potřeby převodu na společný jmenovatel. Pro žáky je pouze připravené velké množství cvičení na mechanické počítání bez větší snahy o zaujetí či motivaci žáků přispívající k pochopení. Jediným myšlenkově náročnějším prvkem je porovnání řady čísel, která mají čitatel vždy o jedno nižší než jmenovatel či naopak.

Kapitola, věnující se převádění desetinných čísel na zlomky a naopak, se nejprve zabývá správnou interpretací čísel a jejich zápisem. Pro správné upevnění látky využívají autoři číselnou osu, převody mezi jednotkami či názorné ukázky, jak dosáhnout požadovaného výsledku. Ze tří úloh připravených na procvičení obsahuje jedna návodnou otázku a ve třetí úloze žáci pouze kontrolují správně popsané části pravítka, což by mohlo mít větší efekt, pokud by si jej konstruovali samostatně. Smíšená čísla a práce s nimi je opět znázorněna na obrázcích, které doplňuje srozumitelný text. Následuje opětovný rámeček se správným zavedením, na který navazují inspirativní slovní úlohy. Na závěr kapitoly jsou připravena cvičení, které ověřují dostatečné pochopení dosavadních poznatků.

V další kapitole, nazvané Počítáme se zlomky, je nejprve představeno sčítání a odčítání zlomků. Na koláčovém modelu mohou žáci pochopit zadané operace u zlomků se stejným jmenovatelem, což si následně ověří na jednoduchých cvičeních. Motivační úloha na sčítání a odčítání zlomků s různým jmenovatelem ihned ukazuje zapsaný výpočet s převodem na společného jmenovatele. Bez názorného obrázku, proč je takový postup potřebný, přidávají autoři rámeček, jak zadané operace provádět. Mimo rámečky se objevují ještě dva fialově zvýrazněné obdélníčky u sčítání upozorňující na uvádění zlomků do základního tvaru a vyhledávání nejmenšího společného násobku jmenovatelů. Jejich zápis však může vyvolat nepříjemné pocity, protože je napsán v rozkazovacím způsobu. Následuje četné množství mechanických příkladů doplněných slovními úlohami, avšak pouze některé vyžadují kritické myšlení.

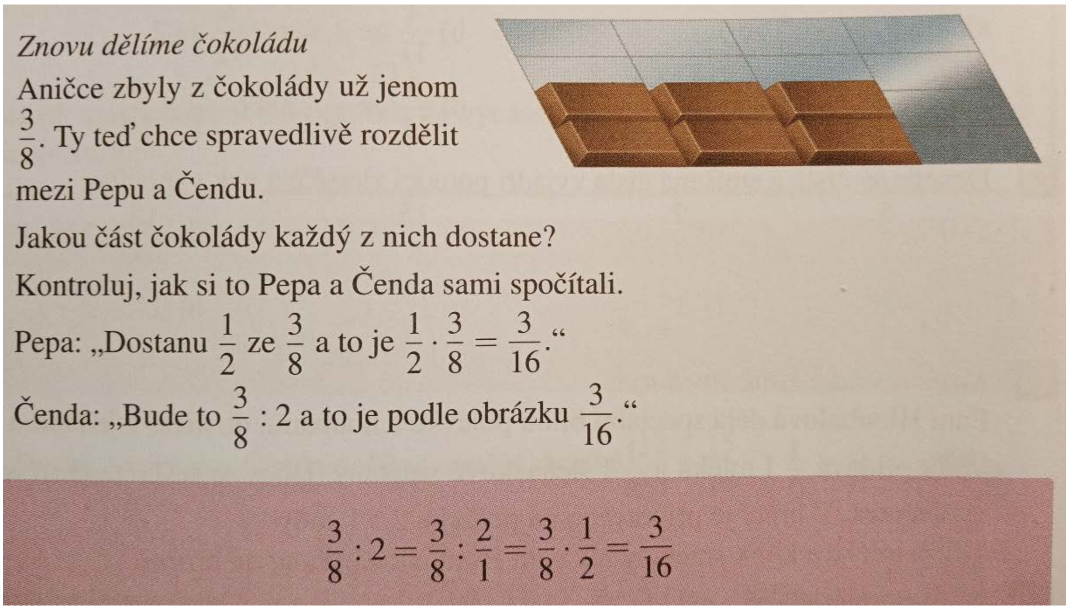


Obrázek 6: Zvýrazněná poznámka na zapamatování v učebnici z nakladatelství Prometheus, (Odvárko, 2020, str. 30)

Násobení zlomků má v učebnici přiměřeně zpracované úlohy se stupňující obtížností a žákům je poskytnut vhodný materiál na pochopení či procvičení látky. Počáteční motivace nejprve ukazuje problematiku násobení zlomku přirozeným číslem, které je doplněno nejenom obrázkem, a schématem, ale i názorným výpočtem. Za následným rámečkem, popisujícím dané pravidlo, je předložen další příklad, kde se určuje část z několika celků. Postup je zvýrazněn ve fialovém rámečku. Vzhledem k následujícímu násobení dvou zlomků by mohlo být pro žáky lépe pochopitelné, kdyby přirozené číslo bylo zapsáno zlomkem, který má ve jmenovateli jedničku. Před ukázkou násobení dvou zlomků mají žáci možnost si propočítat širokou nabídku cvičení, které nejsou příliš náročné. Zadaná cvičení mají za cíl nahlížet na násobení zlomků přirozeným číslem z různých úhlů pohledu, pomocí názorných obrázků, slovních úloh či doplňováním tabulky.

Násobení dvou zlomků je představeno nejprve jako hledání zadané části ze zlomku a dále jako výpočet obsahu části z obdélníku. Ačkoli oba příklady ukazují násobení dvou zlomků, za každým příkladem následuje fialový obdélníček, kde je postup ještě jednou sepsán. Pro žáky může být zvolené rozložení matoucí, protože se mohou domnívat, že každý obdélníček obsahuje jinou informaci. Na obvyklý rámeček definující násobení dvou zlomků navazuje fialové zvýraznění upozorňující na možnost krácení u násobení zlomků. Doplňující výpočty z fiktivních sešitů předestírají výhodu krácení zlomků před roznásobením, což je opět fialově vyzdvihnuto. Pro lepší porozumění by bylo vhodné žákům ještě připomenout komutativitu, která je pro násobení velmi důležitá. U násobení tří zlomků zapsali autoři pouze postup bez podrobnějšího vysvětlení či upozornění na krácení či stanovení nejmenšího společného násobku jmenovatelů.

Dělení zlomků je nejprve představeno na dělení zbytku čokolády mezi kamarády, kde mohou žáci lehce pochopit, proč se při výpočtu přepracovává dělení na násobení. Druhý příklad je obtížnější na pochopení, protože autoři provádějí operaci mezi dvěma zlomky, přičemž se objevuje i smíšené číslo. Nicméně díky schématu a následnému sepsání ve fialovém obdélníčku jsou oba příklady dobře pochopitelné. Méně šťastné je zavádění převrácených zlomků, kde autoři pokládají úlohy, na které mohou žáci najít odpověď na totožné stránce. Úlohy na procvičení nejsou nijak nápadité, ale množství je dostačující.


Znovu dělíme čokoládu

Aničce zbyly z čokolády už jenom $\frac{3}{8}$. Ty teď chce spravedlivě rozdělit mezi Pepu a Čendu.

Jakou část čokolády každý z nich dostane?

Kontroluj, jak si to Pepa a Čenda sami spočítali.

Pepa: „Dostanu $\frac{1}{2}$ ze $\frac{3}{8}$ a to je $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$."

Čenda: „Bude to $\frac{3}{8} : 2$ a to je podle obrázku $\frac{3}{16}$."

$$\frac{3}{8} : 2 = \frac{3}{8} : \frac{2}{1} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

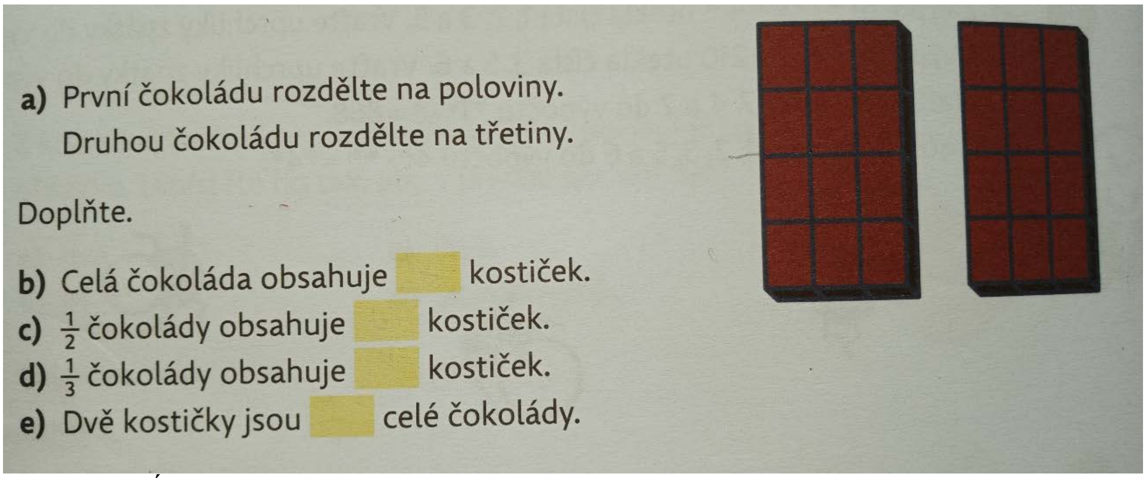
Obrázek 7: Ukázkový příklad na zavedení dělení zlomků v učebnici z nakladatelství Prometheus, (Odvárko, 2020, str. 40)

Kapitola je uzavřena procvičováním nejprve výpočtu operací mezi zlomky a následně samostatnou částí, která se věnuje opakování veškeré problematiky týkající se zlomků. Rozdělení témat v učebnici a předložení informací má velký potenciál. Důležité informace jsou viditelně zvýrazněny a obrázky či schémata zastávají důležité postavení. Cvičení mají ve většině případů gradované a autoři vymezují i úkoly „pro přemýšlivé“, což podporuje rozvoj zvídavějších žáků. Na druhé straně má učebnice často příliš nahuštěný text a některým žákům či učitelům nemusí vyhovovat, že veškerá oslovení jsou ve druhé osobě jednotného čísla.

4.3 Zavedení zlomků v Hejného metodě

Jelikož první vydání dílů A, B, C, D a F Hejného metody je datováno mezi roky 2015–2017, můžeme řadu považovat za poměrně novou. Ačkoli rozložení jednotlivých témat je odlišné od obvyklých uspořádání, učebnice je v souladu s RVP ZV. Této skutečnosti napomáhá, že v RVP ZV není povinné učivo rozdělené podle ročníků, ale pouze na jednotlivé fáze vzdělávání, tedy na první a druhý stupeň ZŠ.

Ve vybraných učebnicích je výuka zlomků rozdělena do desíti kapitol, přičemž v dílech B, D a F je vždy po jednom tématu. Díl A obsahuje dokonce 3 soubory úloh, nicméně hlavní náplní je pochopení rozdílu části a celku. Žáci jsou seznamováni se zlomky za pomoci nejrůznějších modelů a snaží se určit či porovnat velikosti jednotlivých úseků. Nejvíce se v učebnici objevuje práce s kruhem, při které žáci dělí hodiny podle minut či hodin, určují kruhové výseče na základě velikosti úhlu nebo jednoduše dělí pizzu. Dalším výrazným modelem je část tyče, kde žáci nejprve určují obarvené úseky podle odhadu a posléze vytváří tabulku s přesnějšími údaji. Pomocí obdélníkového modelu (příklad čokolády) žáci porovnávají velikosti částí a v dílu B jej využívají pro zavedení sčítání zlomků.

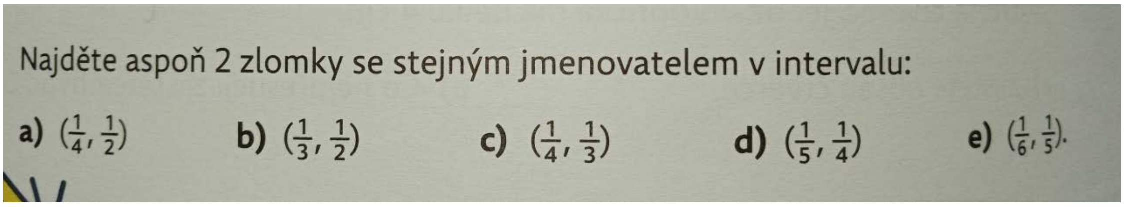


Obrázek 8: Úloha s využitím obdélníkového modelu v učebnici Hejného metody nakladatelství H-mat (Hejný, 2015, str. 8)

Všechny kapitoly dílu A probírají žáci během šesté třídy a jsou strukturovány jako propedeutika ke složitějším operacím. Zlomky jsou představeny a vizuálně ukázány na příkladech, které žáci znají z vlastních zkušeností. Většina úloh pracuje se spojitými modely a poskytuje postupný rozvoj vědomostí. Úlohy jsou vhodně gradované a jednotlivé kapitoly mají výbornou návaznost. Za pomoci názorných obrázků a důkladného uvedení do problematiky zlomků mohou žáci získat nejenom kladný vztah ke zlomkům, ale i hlubší porozumění přijímaných informací. Jediný problém obsahové stránky učebnice může být spatřován v pojmenování kapitol, které se nazývají Propedeutika zlomků, Zlomky I a Zlomky II. V žádné kapitole se však neobjevuje vysvětlení či dohoda, co pojem zlomek vlastně znamená a jak jej zapisovat. Kapitola Zlomky I zahrnuje pouze informaci, že 30 minut je $\frac{1}{2}$ hodiny a žáci mají následně doplnit tabulku s minutami a zlomky.

Sčítání v dílu B je zaváděno velmi pozvolně. Žákům jsou nejprve předkládány jednoduché úlohy, které žáci řeší pomocí ciferníku hodin, a následně se přidávají náročnější úkoly. V úlohách se sčítají dva kmenové zlomky, přičemž nejprve má jeden zlomek dvojnásobný a následně trojnásobný jmenovatel druhého zlomku. Po absolvování zmíněných příkladů se teprve ukáže možnost výpočtu společného jmenovatele přes nejmenší společný násobek. Žáci jsou povzbuzováni k využívání čokoládového modelu, který podněcuje představu o velikosti zlomku. Až po procvičení se žáci snaží najít obecný algoritmus pro sčítání dvou kmenových zlomků. Kapitola zlomků v dílu B je v časovém harmonogramu umístěna až cca po půl roce od poslední kapitoly Zlomky II. Žáci ihned řeší sčítání, u čehož by bylo vhodné, kdyby bylo alespoň krátké opakování porovnatelnosti zlomků či připomenutí významu čitatele a jmenovatele.

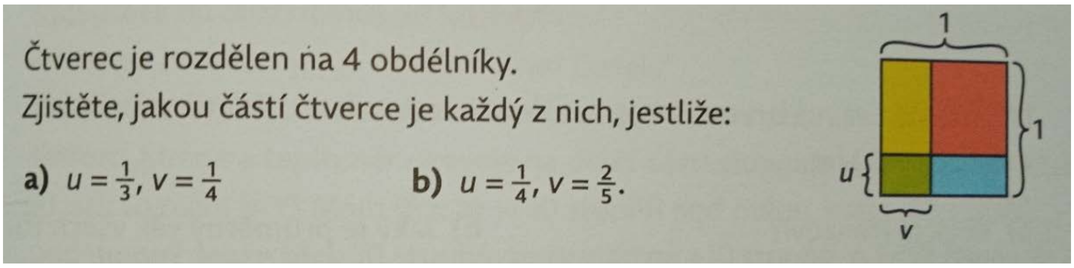
V dílu C se krátce představí propedeutika krácení a rozšiřování zlomků a zopakuje se sčítání kmenových zlomků. Většina první kapitoly je však věnována hledání zlomků mezi zadanými intervaly. Úlohy jsou sice gradované, nicméně cvičení, která by měla zvládnout většina třídy, se mohou zdát příliš obtížná. K úlohám není přidán žádný pomocný obrázek nebo text, který by případně žáky podpořil ve výpočtu. Začátek další kapitoly obsahuje zavedení jednotlivých částí zlomku (čitatel, jmenovatel, zlomková čára). Umístění domluvy však není nijak navázáno na předchozí látku či opřeno o získané vědomosti. Zároveň chybí určení a zdůvodnění, jaká čísla se mohou v čitateli nebo jmenovateli vyskytovat.


Najděte aspoň 2 zlomky se stejným jmenovatelem v intervalu:

a) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ **b)** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ **c)** $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ **d)** $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right)$ **e)** $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right)$.

Obrázek 9: Náročnější úlohy v učebnici Hejného metody z nakladatelství H-mat (Hejný, 2016, str. 16)

Bez jakéhokoli využití domluvy se přechází k odvozování násobení dvou zlomků. Násobení začíná rozdělováním chlebů mezi konkrétní počet podílníků. Myšlenka je dále rozvedena určováním velikosti části ze zadaného přirozeného čísla a pak i zlomku. Dále si žáci na názorném obdélníkovém modelu odvodí obecný přístup k násobení dvou zlomků.



Obrázek 10: Ukázková úloha na zavedení násobení zlomků v učebnici Hejného metody z nakladatelství H-mat (Hejný, 2016, str. 31)

Tato kapitola představuje sérii výborně zvolených gradovaných úloh, kde každé cvičení má své místo a žádné není navíc. Třetí kapitola dílu C zahrnuje zvýrazněnou domluvu ohledně rozšiřování, krácení zlomků a zlomku v základním tvaru. Kromě předcházejícího cvičení věnující se krácení a rozšiřování zlomků, je téma rozvinuto i v následujících úlohách. Kapitolu uzavírá opakování na sčítání zlomků, které jsou především kmenové.

Poslední kapitola tohoto dílu se věnuje částečnému opakování a zároveň náročnějším úlohám navazujících na předešlé kapitoly. Žáci opět hledají zlomky v určených intervalech, sčítají zlomky a hledají nejmenší společné jmenovatele zadaných čísel. Násobení zlomků v této kapitole zmíněno nebylo. Celý díl C se probírá v sedmé třídě, stejně jako kapitola v dílu B, kde se zavádí sčítání zlomků. Kromě nedostatečného rozpracování vyhledávání zlomků v intervalech, je nesrozumitelné rozložení témat během roku. Pomocí hledání zlomků v intervalu si žáci upevňují povědomí o velikosti zlomku, které by mělo plynulejší návaznost na určování části celku, zvláště v situaci, kdy se žáci celý půlrok zlomkům nevěnují. Zároveň by v poslední opakující kapitole bylo vhodné umístit úlohu na násobení zlomků, aby žáci mohli porovnat operaci sčítání s násobením.

Díl D obsahuje pouze jednu kapitolu, kde žáci sčítají zlomky ve třech cvičeních a následně hledají pravidlo, jak řešit úkoly s odčítáním dvou zlomků. Zde žáci nejprve odečítají dva zlomky a až v dalších cvičení odečítají zlomek od celku a od dvou celků. Toto pořadí se zdá být velmi nešťastné, protože žákům se bude lépe znázorňovat odčítání od celku než od kmenového zlomku s různým jmenovatelem. Následně je zopakováno násobení dvou zlomků. Ačkoli díl D obsahuje pouze jednu kapitolu, která je umístěna na počátek osmé třídy, žáci se ani v této kapitole nesetkají s dělením dvou zlomků či se složeným zlomkem.

Poslední kapitola zabývající se zlomky je umístěna až v díle F, tedy mezi poslední zmínkou o zlomcích leží jeden celý díl učebnice. Ihned v první úloze řeší žáci složený zlomek, kde v čitatelích i jmenovatelích musí odečítat zlomky od desetinných čísel a zároveň se zde objevují odmocniny. Zařazení dané úlohy je dosti diskutabilní, protože žáci se zlomky dlouho nepracovali, složený zlomek doposud neprobírali a zároveň zadaná čísla nejsou, alespoň pro začátek, jednoduše představitelná. Na první cvičení navazuje rozkládání zlomků na kmenové zlomky, což už bylo částečně probíráno u násobení zlomků. Rozkladu zlomku jsou věnována následující 4 cvičení, které mají v čitateli vždy jedno konkrétní číslo. Všechny zlomky v prvním cvičení mají v čitateli trojku, druhé čtyřku, třetí pětku a až poslední obsahuje dvojku, což může být nejenom pro žáky zarážející.

Následuje řešení násobení a řetězové zlomky, na které navazuje práce s posloupnostmi. Posloupnosti jsou nejprve konečné, ale následují i nekonečné. Zakončující látkou je práce s neznámou ve zlomku, pro kterou žáci hledají vhodná čísla splňující zadané podmínky. U popsané kapitoly je jasně viditelný rozdíl oproti ostatním kapitolám. Téma zlomků má za cíl ukázat, ve kterých oblastech matematiky se žáci se zlomky ještě potkají a jak v daných situacích s nimi mají pracovat. Ačkoli byla kapitola dlouhá a obsahovala hodně úloh, mnohé oblasti by bylo vhodné ještě více rozebrat a vysvětlit jejich význam.

Řada učebnic Hejného metody zaujme svým barevným laděním a pomocnými obrázky, které jsou zařazeny hlavně u nižších tříd. V učebnicích se vyskytují i obrázky, které jsou přidány pouze pro lepší ilustraci úlohy či pro pobavení a vzbuzení většího zájmu. Obrázky navíc však v učebnicích nepřekáží a se stupňující se obtížností učebnic jsou méně časté, čímž učebnice vyjadřuje, že pracuje se staršími žáky, kteří by učebnice s obrázky mohli považovat za dětské.

5 Výzkumné otázky empirické části diplomové práce

Následující část diplomové práce vyhodnocuje výsledky výzkumu, který proběhl na přelomu jara a léta roku 2020. Společnost H–edu[8] za podpory H–mat vytvořila online kurz s cílem pomoci žákům v pochopení zlomků během náročného času Covid-19. Zájemcům byly nabídnuty dvě úrovně náročnosti a zároveň velké množství materiálů, interaktivních pomůcek či naučných videí. Pro vyhodnocení účinnosti kurzu vytvořila společnost testy, které zaznamenávaly vstupní a výstupní znalosti uživatelů. Cílem diplomové práce je zjistit, zda vzdělávací kurz od společnosti H–edu účastníkům kurzu opravdu pomohl. Aby bylo možné dojít k zadanému cíli, je potřeba zodpovědět několik otázek:

- Byly testy, podle kterých se měřil vědomostní rozvoj jednotlivých respondentů, vhodně koncipované a prokazatelné?
- Byla zajištěna zvyšující se obtížnost úloh u jednotlivých testů?
- Byly jednotlivé úlohy vhodně strukturované, pochopitelné a porovnatelné s druhou verzí testu?
- Ve kterých úlohách respondenti nejvíce chybovali?
- Jaké bylo rozložení chybovosti jednotlivých testů vzhledem k ostatním variantám?

Zároveň bude proveden rozbor chybných odpovědí, který zprostředkuje nesprávné myšlenkové postupy chybujících žáků. Chyby budou určovány u obou dvojic odlišně náročných testů a za pomoci srovnání a porovnání budou hledány spojitosti a možné příčiny vzniku chyb.

---

[8] Společnost podporující učitele, kteří vyučují podle Hejného metody.
Zdroj: https://www.h-edu.cz/o-nas

6 Data, jejich charakter a příprava pro analytické zpracování výzkumu

Výzkum, který je definován jako „systematické zkoumání přírodních nebo sociálních jevů s cílem získat poznatky, jež popisují a vysvětlují svět kolem nás“ (Hendl, 2004), shromažďuje data, na kterých je následně vytvořená kritická analýza. Na základě analýzy a zhodnocení zpracovaných dat je možné představit výsledky daného výzkumu.

6.1 Proces získávání dat

V roce 2013 založil Hejný a jeho vnučka Sukniak společnost H-mat, která prosazuje rozvoj žákovských dovedností na základě budování mentálních schémat. [9] Kromě vytváření vlastní řady učebnic a didaktických materiálů organizuje společnost i semináře a vzdělávací kurzy. Zároveň realizují výzkumy, které pomáhají nalézt příčiny neporozumění konkrétním matematickým tématům či porovnávají rozdíly vstupních vědomostí žáků se znalostmi získanými poznávacím kurzem.

Hejný s Chrobákem vytvořili pod organizací H-mat vzdělávací program napomáhající pochopení podstaty zlomků pro žáky 5.–9. třídy. Projekt byl vytvořen na podporu dětí v náročném období Covid-19, kdy ve školách probíhala distanční výuka. Předkládaná diplomová práce se zabývá výsledky vzdělávacího kurzu provedeného na konci školního roku 2020.

Průběh výzkumu probíhal v několika fázích. Žákům byla nejprve po absolvování vstupního diagnostického testu doporučena jedna ze dvou úrovní obtížnosti. Následně se zájemci mohli bezplatně zúčastnit třítýdenního online kurzu, během kterého autoři nabídli nejenom pečlivě připravenou metodiku formou videa, ale i interaktivní prostředí. Za pomoci volně přístupného interaktivního prostředí mohli účastníci nově získané poznatky libovolně procvičovat. Každý žák po jednotlivých videích obdržel vždy dvě varianty úloh, přičemž první sloužila k pochopení problému, během které mohl jedinec konzultovat s učitelem a byla mu poskytnuta i případná nápověda.

Druhá část sloužila k ověření, zda jedinec látce opravdu porozuměl. Pokud měl s vyplňováním problémy, měl se vrátit k předchozí variantě. Na základě neomezeného

[9] (Hejného metoda, 2021)

množství času a zpětné vazby mířené na postup práce, získali účastníci přehled nejenom o svém pokroku, ale zároveň i o svých slabých místech, na které bylo potřeba se více zaměřit. Zakončením kurzu byl závěrečný test, který měl ukázat, zda žáci problematice zlomků lépe porozuměli.

Online verze umožnila účast libovolného počtu lidí bez ohledu na vzdálenost či omezenou časovou dotaci. Respondenti však nebyli během vyplňování nijak kontrolováni, čímž mohlo dojít ke zkreslení výsledků z důvodu nedodržení zadaných instrukcí poukazujících na samostatné řešení jedincem. Zároveň výstupní test vyplnilo okolo jedné desetiny z počátečních účastníků, čímž se výsledná data velmi zúžila.

Pro odstranění zbytečného stresu měli respondenti na vyplnění testu neomezené množství času. Existovaly čtyři varianty testu, přičemž dvě byly připraveny k jednodušší verzi, v práci pojmenované jako A1, A2, a dvě obtížnější, B1, B2. Každému respondentu byla přiřazena jedna dvojice stejně obtížných testů, kde první test byl určen jako vstupní, zatímco druhý jako výstupní.

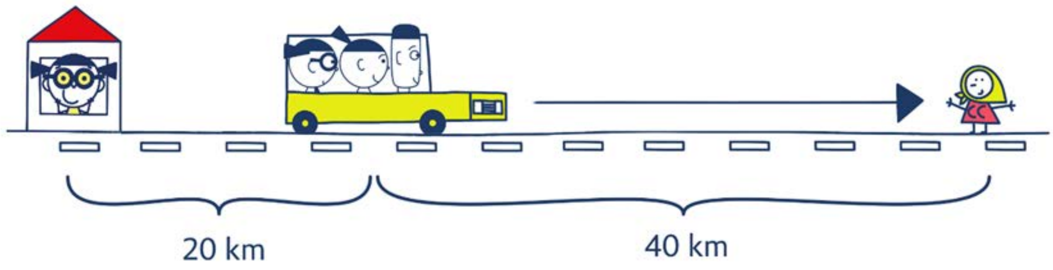
Testy obsahovaly vždy dvanáct úloh, ve kterých se opakovaly dva náměty. Jedním tématem bylo určování délky tyče a velikost odlišně natřených částí v různém poměru. Druhý typ úlohy představoval cestu za babičkou, kde se vypočítávala vzdálenost nebo poměr ujeté a dosud zbývající dráhy. Pro ujištění, že respondenti úlohám opravdu rozumí, byly v testech obsaženy i dva příklady ukazující správné výsledky úloh. V každé úloze měl žák vyplnit dvě až čtyři čísla, které jsou v práci označovány jako podúlohy. Pro snadnější znázornění v grafech jsou jednotlivá čísla zapisována jako t1, t2, t3, t4, t5, t6 a t7, přičemž zápis zlomku se skládá ze dvou sousedních hodnot mezi hodnotami t1–t7.

<u>První ukázková úloha</u>:

Tyč je natřena dvěma barvami. Celá tyč je dlouhá 48 cm. Zelená část je 16 cm. Modrá část je t1 = 32 cm. Zelená část je t2/t3 = 1/3 tyče. Modrá část je t4/t5 = 2/3 tyče.

Druhá ukázková úloha:

Jedeme k babičce. Celá cesta je dlouhá 60 km. Ujeli jsme už 20 km. Zbývá nám t1 = 40 km. Ujeli jsme už t2/t3 = 1/3 celé cesty. Zbývá nám ujet t4/t5 = 2/3 celé cesty.



6.2 Proces zpracování získaných dat

Statistický soubor veškerých jednotek lze porovnat nejenom na základě odlišnosti jednotlivých znaků či vlastností, ale také mírou daných ukazatelů. Množství je ve statistice označováno jako kvantita, která výzkumníkovi napomáhá „k hlubšímu poznání skutečnosti v její racionální obecnosti“ (Chráska, 2007, str. 237).

Kvantitativní výzkum získává vybrané informace o početné skupině obyvatel. Mezi hlavní výhody kvantitativního výzkumu patří rychlý sběr stejně jako rychlá analýza zadaných dat. Zároveň získané výsledky nejsou příliš ovlivněné výzkumníkem, protože údaje jsou numericky přesné. Zásluhou číselného vyjádření získaných informací lze data vyjádřit grafem či tabulkou bez většího zkreslení informací.

Na druhé straně čistě kvantitativní přístup nezahrnuje kvalitativní údaje, čímž nemusí odpovídat lokálním zvláštnostem, tedy výsledky mohou být příliš obecné a důležité fenomény mohou být opomenuty. Zároveň forma zpracování dat je omezená zadanými postupy.[10] Získané údaje jsou konečné a výzkumník nemá možnost se jednotlivých respondentů doptat na případné podrobnosti či vysvětlení. Pro zajištění dostatečné kvality i kvantity se využívá tzv. smíšený výzkum, který kombinuje zmíněné formy výzkumů (Hendl, 2006).

[10] (Olecká, Ivanová, 2010)

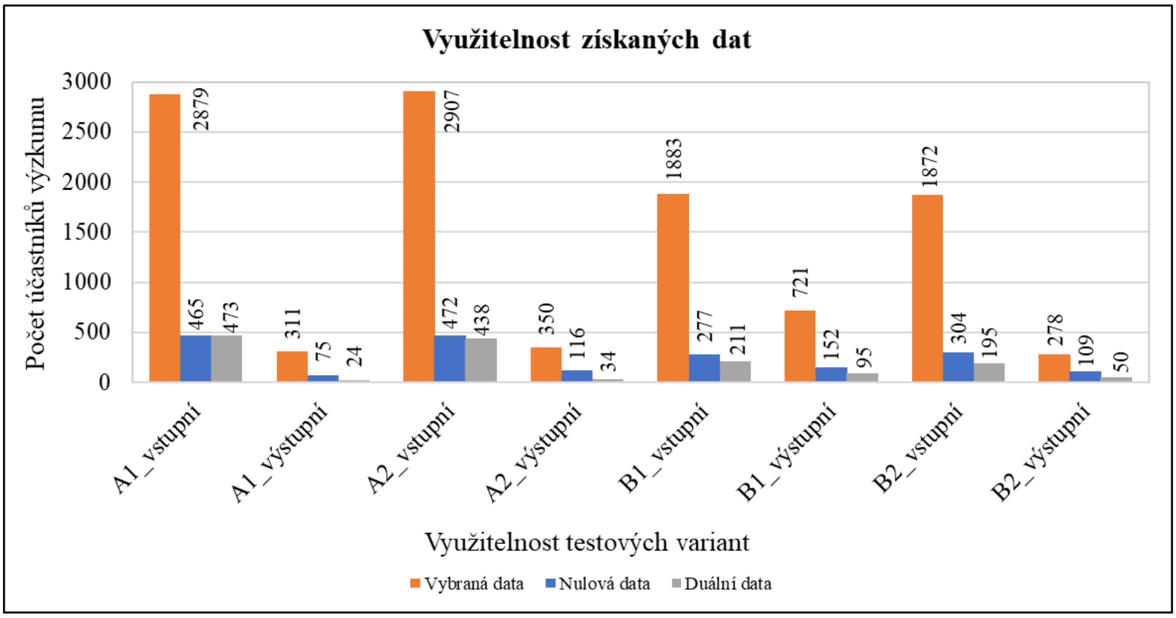
V tomto výzkumu jsou porovnávána kvantitativní data, která jsou zaznamenána pomocí grafů vytvořených v MS Excel. Získané informace jsou následně rozebrány a porovnány s výzkumnými úlohami.

6.3 Možnost využitelnosti dat

Před zpracováním získaných informací bylo nutné vybrat data vhodná pro zkoumání a určení relevantních výsledků. Někteří respondenti zadanou variantu nedokončili či test pouze prošli bez vyplnění jednotlivých úloh. Výpočet pouze části zadané práce mohl být způsoben nezájmem žáků či zjištěním, že respondent neumí zodpovědět zadané úlohy.

Z grafu číslo 1 je možné získat přehled o využití zadaných dat u jednotlivých variant. Jak bylo již dříve zmíněno, výstupních testů bylo vyplněno výrazně méně než vstupních. Zatímco vstupního testu se u každé varianty účastnilo více jak 1850 lidí, výstupní test dokončil pouhý zlomek počátečních respondentů. Aby bylo možné prokázat, zda se respondenti pomocí kurzu opravdu zlepšili, měli vždy vyplňovat jiný vstupní test než výstupní stejné úrovně, např. vstupní A1 a výstupní A2 či naopak. Bohužel někteří respondenti vyplňovali totožný vstupní i výstupní test, čímž nesplnili zadané podmínky, a proto data o jejich práci nemohla být plně využita při porovnávání. Zároveň bylo zaznamenáno výrazné množství nulových či duálních dat. Nulová data představují testy, které u žádné úlohy nezaznamenaly ani jednu hodnotu. Vznik nulových dat leží nejspíše v nezájmu respondentů o vyplnění či ve snaze ukončit daný test co nejdříve.

Duální data vznikala především z nekontinuálního vyplňování žáků, kteří se směli k jednotlivým testům vracet i v průběhu několika dní. Každé další přihlášení bylo zaznamenáno do systému jakožto další testovaný uživatel, který měl sice souhlasný uživatelský kód, nicméně číslo testu se lišilo. Jelikož byly respondenti vedeni pod jedním uživatelským kódem, všechny informace byly přeneseny i do všech dalších přihlášení daného jedince. V diplomové práci byly do výsledků zahnuty pouze poslední vyplněné varianty, které obsahovaly všechny údaje o předchozím vyplňování.



Graf 1: Využitelnost získaných dat

7 Analýza výsledků

7.1 Porovnání obtížnosti testů A1, A2, B1 a B2

Ve výzkumu byly využity čtyři varianty testu, přičemž dva byly prezentovány jako jednodušší verze, zatímco zbývající jakožto náročnější. Pro vyhodnocení správnosti výsledků a porovnání počtu chyb je důležité zjistit, zda autoři splnili předpokládané požadavky. Verze A1 a A2 jsou představovány jako jednodušší varianta a zároveň by měly být shodně obtížné. Naopak testy B1 a B2 byly vytvořeny pro žáky s větším množstvím vědomostí v oblasti zlomků. Shodná náročnost je důležitá pro možnost posouzení smysluplnosti kurzu, protože podle rozdílného počtu celkových bodů by měla být vyhodnocena jeho účinnost. Všechna zadání jednotlivých testů je možné nalézt v příloze stejně jako ostatní grafy. Úlohy jedna a tři sloužily jako ukázkové, a proto nejsou porovnávány s ostatními úlohami.

7.1.1 Struktura a obtížnost úloh v testech A1, A2, B1 a B2

Všechny varianty testu měly totožné rozložení úloh podle tématu, nicméně při porovnání jednotlivých zadání je znatelný rozdíl mezi náročnějšími variantami, tedy B1 a B2, a jednoduššími verzemi testu A1 a A2. Obě dvojice testů mají téměř shodné množství podúloh v každém úkolu. Jediný rozdíl se nachází u čtvrtého úkolu variant A1 a A2, kde má verze A2 pouze dvě podúlohy, zatímco A1 obsahuje tři. Je však otázkou, zda byl tento rozdíl zamýšlený nebo jej autoři pouze přehlédli. Za pomoci podobného rozložení je možné vyhodnotit, u které úlohy měli žáci větší úspěch či zda bylo některé zadání výrazně náročnější.

Pro porovnání shodné obtížnosti úloh a případné gradovanosti úloh, budou využívány grafy s procentuálním zastoupením chybných odpovědí (grafy číslo 4 a 23 – 27 umístěné v příloze) společně s grafy počtu získaných bodů u jednotlivých variant (grafy s číslem 2, 3; 17 – 22 lze nalézt v příloze)

Při prozkoumání vstupních a výstupních dat lze sledovat, v jakých úlohách měli respondenti větší problém se zodpovězením a zda se zvolilo správné pořadí úloh. Ačkoli je možné ve všech verzích zaznamenat pokles počtu chyb ve výstupních variantách, rozdíl není konstantní a má často velké výkyvy. Při prohlédnutí testu A1 je jasně viditelné, že množství chyb nestoupá rovnoměrně, nýbrž u některých úloh roste, zatímco u jiných klesá.

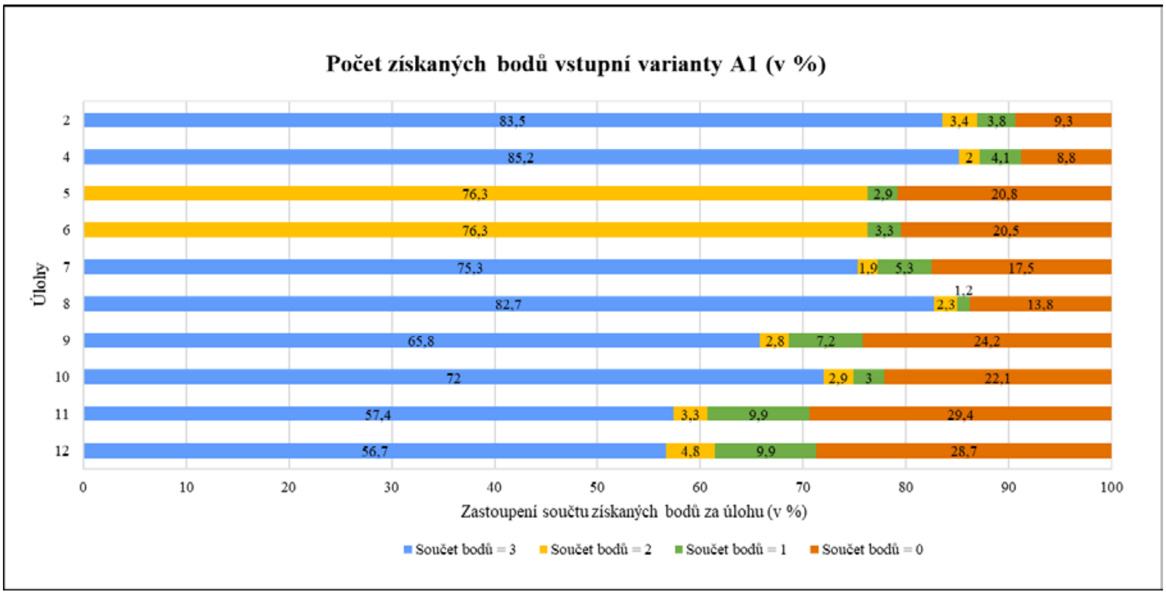
Výrazný propad chybovosti představuje osmá úloha, která má ve vstupní verzi cca o 7 % méně chybných odpovědí než tři předchozí úlohy. Zajímavost předkládá výstupní varianta, ve které se chybovost v úlohách 5–8 víceméně vyrovnává, nicméně stále má úloha číslo osm nejnižší chybovost. Stejný propad u totožného čísla úlohy je zřetelný i v druhé verzi testu A2. Při prozkoumání struktury úloh se v obou případech jedná o výlet za babičkou, ve kterém respondenti určují hodnotu poloviny a velikosti celku.

Stejný problém je řešen i v sedmých úlohách, zatímco v pátých a šestých počítají respondenti s pětinami. Důvody vyšší chybovosti lze spojovat s obtížnějšími zlomky, ačkoli autoři se snažili zmírnit náročnost snížením počtu podúloh. Zatímco v sedmých a osmých úlohách vyplňují účastníci výzkumu tři podúlohy, v páté a šesté se zabývají pouze dvěma. V grafech číslo 2 a 3 představujících počet získaných bodů varianty A1 je názorně ukázaná ztráta bodů v porovnávaných úlohách. Ve vstupní i výstupní verzi je počet chyb u úloh osm a sedm roven nebo má nižší hodnotu než úlohy pět a šest. Pro plynulé stupňování obtížnosti by bylo vhodné zvážit otočení pořadí úloh pět až osm.

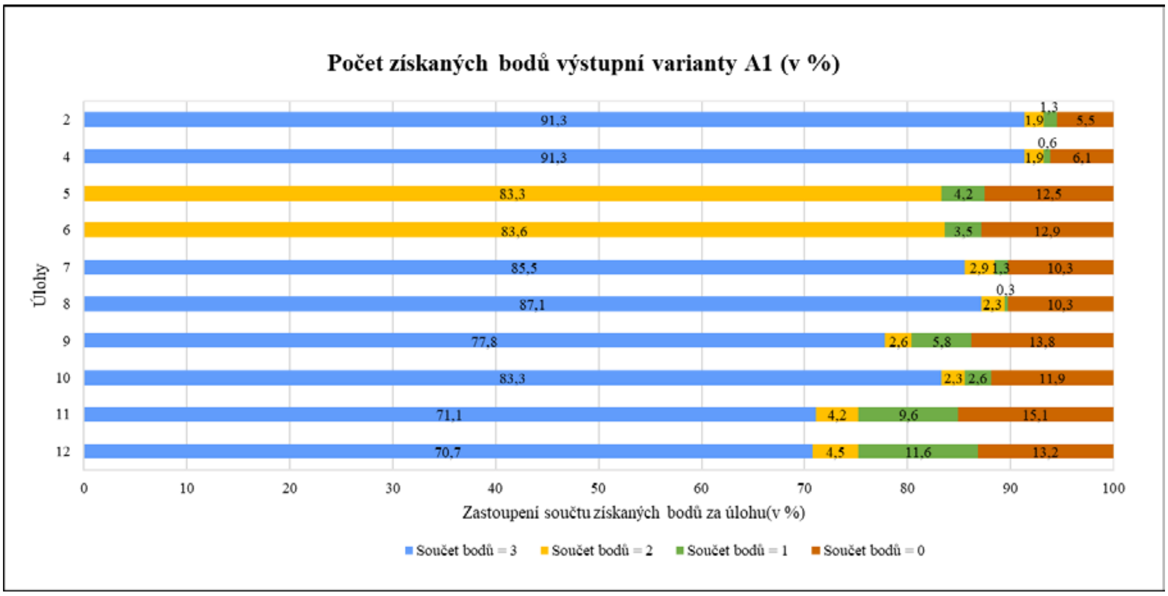
Mezi devátým a desátým úkolem má výrazně plynulejší průběh verze A2, protože obě úlohy mají podobné zastoupení nesprávných odpovědí. U varianty A1 byly prohozené úlohy verze A2, což zapříčinilo výraznější chybovost. Při prozkoumání zadání úloh byl nalezen pouze jediný rozdíl v celkové délce, kterou respondenti dělili na čtvrtiny. Zatímco u verze A2 počítali účastníci nejprve s celkem 200 a v další úloze s dráhou 160, v testu A1 bylo pořadí hodnot opačné. Ačkoli by se dalo předpokládat, že řešitelé budou zmateni rychlým nárůstem celku (celek u předchozí části se rovnal 120), respondenti zřejmě ve velikosti celku neviděli problém. Naopak více chybovali účastníci, kteří měli pozvolný nárůst velikosti celku.

Proto se nabízí jiné vysvětlení, které se týká zadané části. Zatímco verze A2 pracovala se čtvrtinou rovnou 50 cm, varianta A1 počítala s částí dlouhou 40 cm. Respondentům zřejmě více vyhovovalo lehce násobitelné číslo 50, zatímco hodnota 40 mohla zapříčinit i přeskočení úlohy bez snahy o vyřešení. Tento poznatek potvrzují i grafy číslo 2 a 3 vykazující součet získaných bodů za úlohu, ve které lze vidět nižší zastoupení maximálního počtu bodů u deváté úlohy, především u A1. Nepatrně lepší výsledky desáté úlohy u verze A2 jsou nejspíše ovlivněné podobností zadání v obou úlohách. Po vyřešení deváté úlohy bylo zřejmě snazší spočítat desátou úlohu, která měla pouze trochu náročnější čísla.

Rozložení procent u jedenácté a dvanácté úlohy variant A1 a A2 potvrzuje domněnku založenou na zásadní roli zadaného čísla. V jedné úloze měli respondenti vypočítávat úlohy na základě čísla 48, zatímco ve druhé s hodnotou 60. Jelikož další informace prozrazovala, že celek je rozdělen na pětiny, není překvapivé, že nižší číslo neznamenalo vyšší počet bodů, ale právě naopak. V posledních úlohách byla pro mnohé účastníky výzkumu záchranná podúlohami vztahující se k vyjádření zbývající části pomocí zlomku, ve které chybovalo výrazně méně respondentů než u zbývajících podúloh.



Graf 2: Počet získaných bodů vstupní varianty A1 (v %)



Graf 1: Počet získaných bodů výstupní varianty A1 (v %)

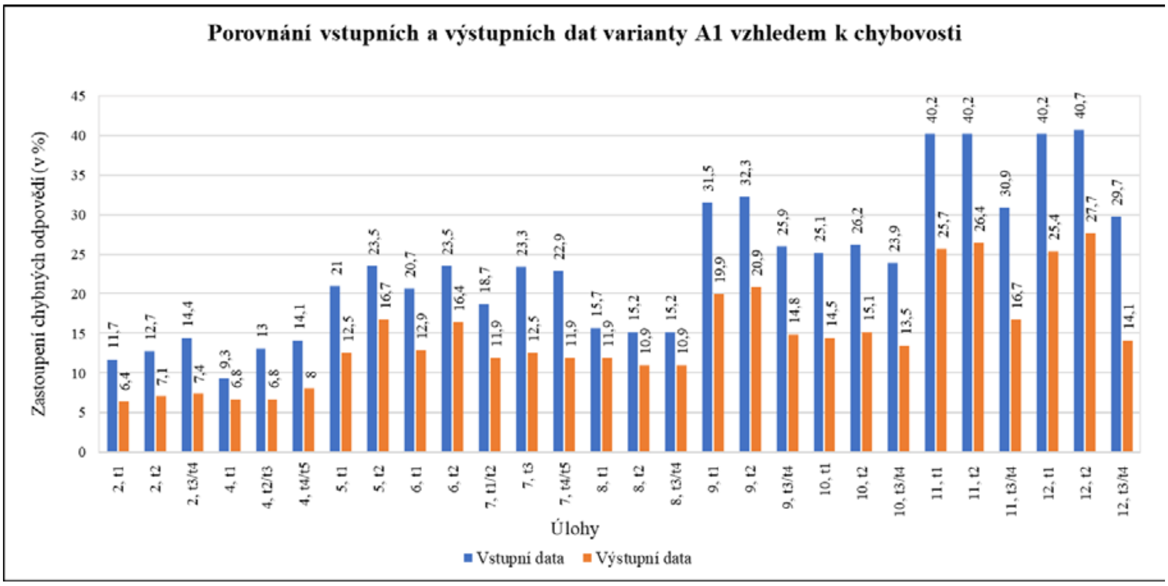
Náročnější testy neobsahovaly shodné úlohy s přeházeným pořadím. Pouze některé úlohy měly totožné odpovědi, nikoli však shodná zadání. O to náročnější muselo být vymýšlení gradovaných úloh pro obě verze zároveň. Z grafů porovnávající zastoupení nesprávných odpovědí je jasně viditelný plynulý nárůst chybovosti, a tedy i náročnosti úloh u verze B2. zastoupení chybovosti v u varianty A1 je možné vidět v grafu číslo 4, zbývající grafy lze nalézt v příloze. Zvyšující náročnost úloh je zřejmá především u vstupních dat, kde se nacházejí pouze malé výkyvy nesprávného rozložení, např. u úlohy číslo 4 či 10. Výstupní verze ukazuje, že po nabytí nových vědomostí se změní i obtížnost zadaných úloh. Rozdíl je znatelný hned mezi druhou a čtvrtou úlohou, která je pro respondenty jednodušší než úvodní úlohami.

Následný nárůst procent stoupá s mírným kolísáním u podúloh, ve kterých se určuje číselná velikost hledané části, jež u vstupní verze nijak nevybočovaly. Tento poznatek poukazuje na ztížení podmínek pro splnění plynulé gradovanosti z důvodu zvýšení počtu podúloh. Mezi úlohami osm až deset panuje téměř lineární nárůst chybovosti, avšak v jedenácté a dvanácté úloze dojde opět ke snížení procentuálního zastoupení. Největší problém představovala v desáté úloze podúloha t4/t5, ve které měli respondenti zlomkem určit 2/15. Jelikož největší počet procent nesprávných odpovědí byl zaznamenán v této úloze u vstupní i výstupní varianty, úlohu by bylo vhodné přesunout na závěr celého testu.

Postupné zvyšování náročnosti úloh potvrzuje i graf počtu získaných bodů, který s menší odchylkou u čtvrté (pouze u vstupní) a desáté úlohy představuje plynulé zvyšování náročnosti.

Ačkoli verze B2 představila vhodně zvládnuté rozestavení úloh pro plynulou gradovanost, v testu B1 lze nalézt více nesouměrností a častější skokovitost mezi náročnostmi řešení úloh. První nepoměr nastává hned mezi čtvrtou a pátou úlohou, kde pozdější úloha má nižší procento nesprávných odpovědí. Pokles chybovosti může být však překvapující, protože ve čtvrté úloze pracují řešitelé s polovinami a čtvrtinami, zatímco v páté úloze počítají s polovinami, třetinami a šestinami. Výrazný rozdíl se ukazuje i mezi šestou a sedmou úlohou, avšak nižší chybovost u sedmé úlohy je opět obtížněji pochopitelná. Ačkoli v šesté úloze pracují respondenti s totožnými zlomky jako u páté úlohy, řešitelům se lépe pracovalo s desetinami a pětinami v úloze sedm. Rozdíl počtu nesprávných odpovědí mohl být způsoben jednak větší délkou celku nebo vyšším počtem zlomků s různými jmenovateli. Výsledné hodnoty chybných odpovědí mají u výstupní varianty velmi podobný průběh, jen jsou o 3–5 % nižší. Úlohy 8, 9 a 10 lze považovat za podobně obtížné, protože mají jen menší odchylky, nicméně u jedenácté úlohy výrazně narůstají procenta chybovosti.

Předposlední úlohami obsahuje výpočet se jmenovatelem 35, což je nejvyšší jmenovatel mezi všemi zlomky ve výzkumu. Maximální hodnota jmenovatele u verze B2 byla rovna 20. Z toho důvodu je možné se ptát, zda se autoři nezmýlili v přípravě a opravdu zamýšleli takto odlišit dva shodně obtížné testy. Společně s otázkou připadá do mysli i úvaha o případném umístění nejnáročnější úlohy na závěr testu. Domněnku nesprávného rozložení úloh potvrzuje i graf s počtem bodů, ve kterém je znatelný téměř lineární nárůst nulového součtu bodů. Tento poznatek poukazuje na začátek vhodně stanovené obtížnosti. Gradovanost je však porušena při zapojení hodnot zastupující vyšší počet součtů, které potvrdí nevhodné rozmístění úloh.



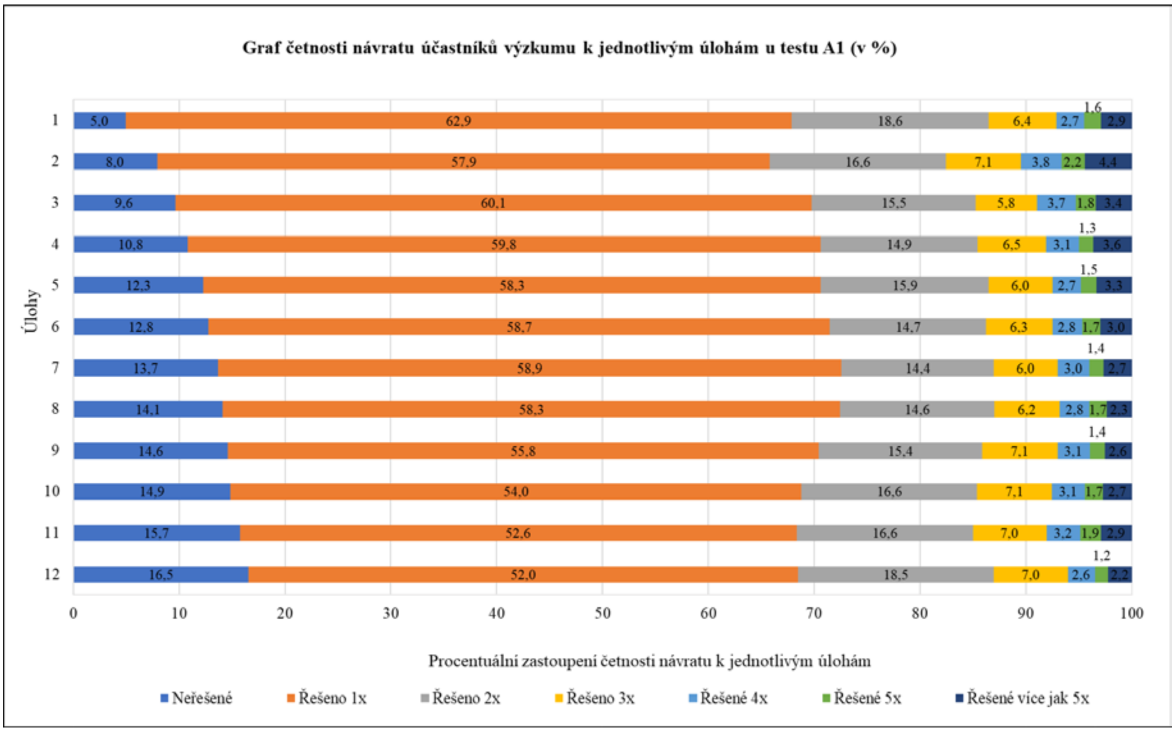
Graf 4: Porovnání vstupních a výstupních dat varianty Av vzhledem k chybovosti

7.1.2 Četnost návratu k jednotlivým úlohám v testech A1, A2, B1, B2

Z grafu číslo pět, který ukazuje četnost návratu k jednotlivým úlohám verze A1, lze usuzovat, v kterých úlohách si byli žáci nejméně jistí správností, a proto se k nim rozhodli vracet. Graf č. 5 ukazuje, že čím vyšší číslo jednotlivé úlohy bylo, tím nabýval i počet žáků, kteří se úlohu rozhodli neřešit. Lineární postup predikuje správně vytvořenou zvyšující se obtížnost úloh. Nejvyšší procentuální zastoupení účastníků výzkumu řešilo úlohu pouze jedinkrát a jen okolo 30 % se rozhodlo k úloze vrátit nejméně jednou. Jediné vrácení, pohybující se okolo 15–20 % ve všech variantách, může poukazovat na kontrolu výsledků účastníků. Vyšší četnost návratu k úlohám upozorňuje na obtížnější úlohy. Nejčastější návrat u testů A1 a A2, tedy jednodušší varianty, byl zaznamenán u úlohy 2, která se věnuje dělení nabarvené tyče na poloviny. Lze se ptát, zda účastníkům výzkumu dělalo problém pochopení úlohy, či její složitost, protože úloha číslo dva jistě patřila k jednodušším úlohám testu. Je však pravděpodobné, že respondenti pouze kontrolovali, zda druhá úlohami není také ukázková či se několikrát rozhodli překontrolovat výsledky od začátku testu.

Zajímavým rozdílem mezi jednoduššími testy je rozložení hodnot četnějšího řešení a přeskakování úloh. Zatímco u verze A1 výrazněji posilovala kategorie „Neřešené“, u verze A2 se zbývající procenta rozdrobila mezi četnější počet řešení. Tento poznatek může upozorňovat na jednodušší variantu testu v podobě A2, protože respondenti zřejmě měli menší zábrany ji řešit než variantu A1. Zároveň lze porovnat skupinu „Řešené 1x“, která má vždy cca o 3 % četnější zastoupení v testu A1 oproti A2. Nepatrný rozdíl může poukazovat na větší jistotu respondentů při řešení A1 či naopak na menší snahu o lepší výsledky.

U obtížnějších verzí lze nalézt podobné rozdíly jako u jednodušších variant. V testu B2 nabývá zastoupení „Neřešené“ výrazněji než v druhém testu, nicméně skupina „Řešeno 1x“ vykazuje až na mírné odchylky téměř totožný pokles u obou testů. U náročnějších verzí také narostlo zastoupení poslední kategorie „Řešeno více jak 5x“, což potvrzuje vyšší náročnost úloh. U variant B1 a B2 se respondenti nejčastěji vraceli k úloze číslo 11, která se zabývá opět částmi nabarvené tyče, avšak v úloze se nachází dělení na více částí. V jedné variantě rozdělovali respondenti tyč na dvacetiny, zatímco ve druhé na pětatřicetiny, v čemž si zřejmě byli méně jistí.



Graf 5: Graf četnosti návratu účastníků k jednotlivým úlohám u testu A1 (v %)

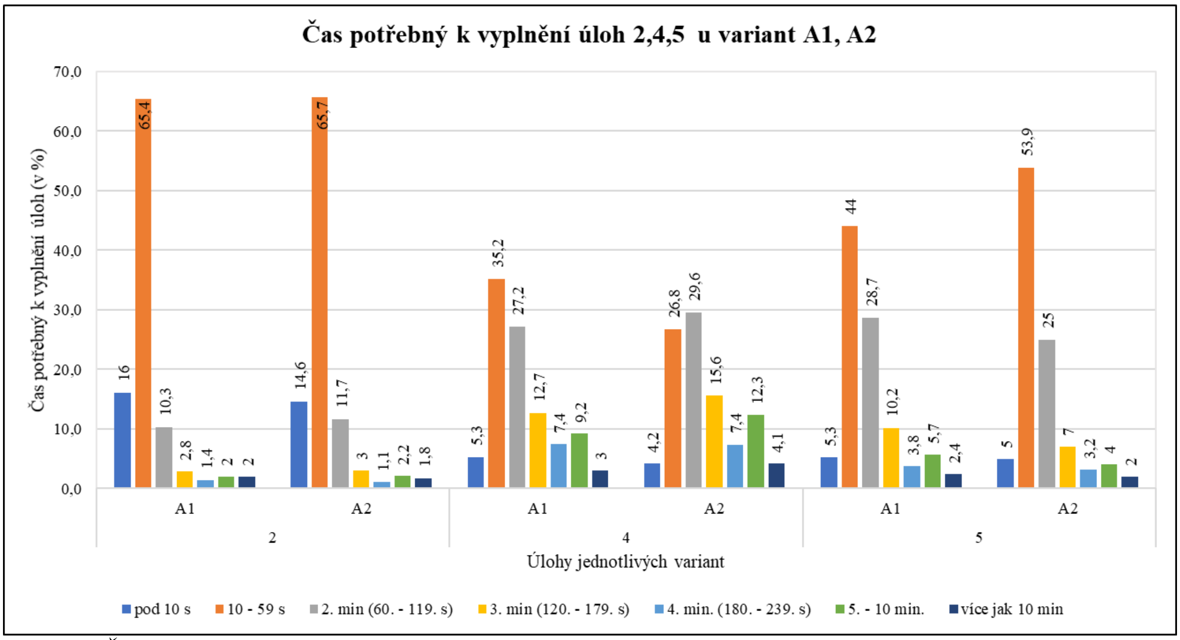
Při prohlédnutí grafů číslo 28, 29 a 30, které jsou umístěny v příloze, je, navzdory menším výkyvům, zřejmý velmi podobný průběh výpočtů u verzí A1 s A2, což naznačuje podobnou obtížnost jednotlivých úloh. Na druhé straně grafy pro varianty B1 a B2 nedosahují předpokládaného rovnoměrného nárůstu četnosti návratu, což může upozorňovat na nedodržení gradovanosti úloh.

7.1.3 Porovnání potřebného času k vyřešení úloh u testů A1, A2, B1 a B2

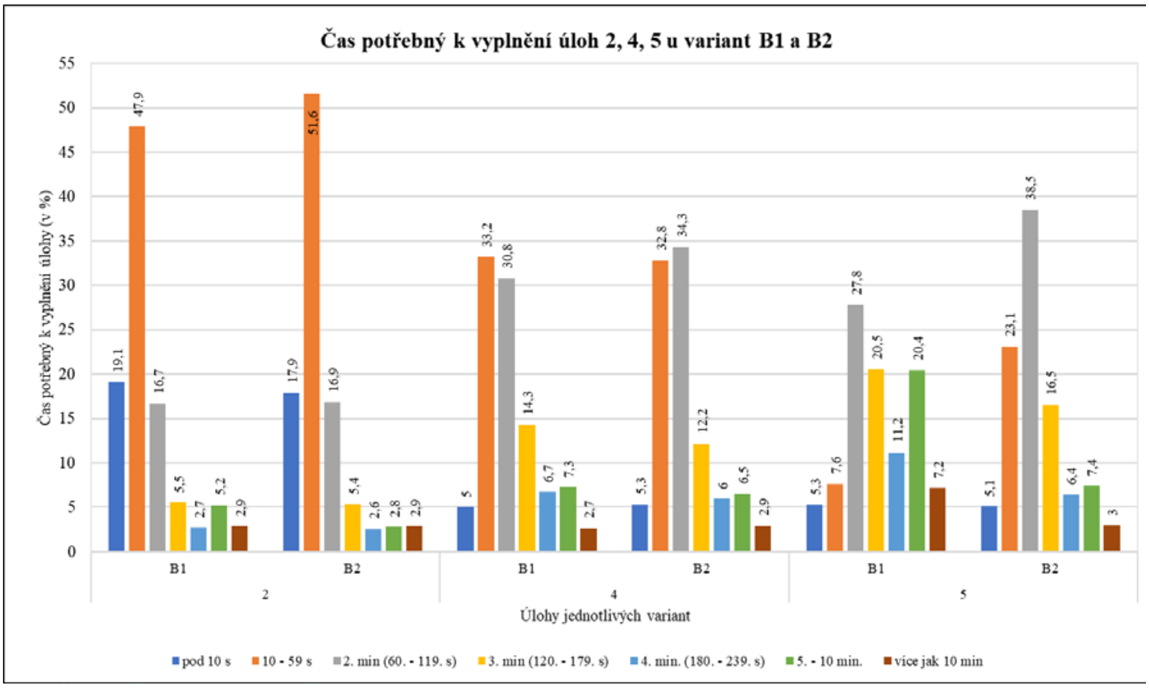
Grafy x, y, z představují čas, který potřebovali respondenti na vypočtení jednotlivých úloh. Doba vyplňování byla rozdělena do šesti skupin, přičemž u prvního a zároveň nejkratšího časového úseku deset sekund předpokládáme, že respondenti si úlohu maximálně přečetli, ale odpověďmi se příliš nezabývali. Podobně tomu je i na druhé straně škály představující dobu řešení delší jak deset minut. Je pravděpodobné, že někteří účastníci výzkumu během výpočtů od úlohy odešli, ale nezavřeli testové okno, takže jim stále nabíhal čas. Pokud respondenti vyplňovali testy v několika fázích, časy se u každého přihlášení přičetli ke konkrétním úlohám. Výsledky jednotlivých verzí testů byly porovnávány nejprve společně, protože úlohy si navzájem odpovídaly. U vyšších čísel úloh se komentáře rozdělují podle obtížnosti testů, z důvodů nedostatečné provázanosti mezi náročnější a jednodušší variantou.

Při prozkoumání grafů 6 a 9 vztahujících se k času potřebného na vyplnění jednotlivých úloh je zřejmé, že druhá úlohami nedělala většině řešitelů výraznější problém a do dvou minut ji zvládly vyplnit více jak dvě třetiny respondentů. Zajímavé je zde procentuální zastoupení žáků, kteří údajně zvládli vyplnit úlohu během deseti sekund, což je případně možné u kratších variant A1 či A2. V obtížnějších verzích je tedy možné předpokládat, že šestina až pětina respondentů tuto úlohu přeskočila. Důvodem k přeskočení mohlo být nešťastné umístění úlohy mezi dvě ukázkové úlohy, čímž mohli respondenti považovat druhou úlohu také za ukázkovou. Ve čtvrtém úkolu se rychlost v řešení výrazně snížila, ačkoli více jak 60 % řešitelů dokončilo úlohu před druhou minutou. Zároveň kromě výrazného poklesu nejkratší doby vyplňování se zvýšilo i zastoupení účastníků, kteří na řešení potřebovali ještě minutu či dvě navíc. Z grafů 6 a 9 lze vyčíst i informaci, že druhé verze testových variant, tedy A2 a B2, byly pro respondenty srozumitelnější a lépe uchopitelné, protože mají vyšší procentuální zastoupení v nižších časových možnostech.

Výraznou proměnu ukazuje pátá úloha, ve které obtížnější testy markantně pozbydou procent u první minuty a velmi se posílí třetí a čtvrtá minuta s rozmezím pěti až deseti minut. Změna časového rozložení odpovídá odlišné skladbě úlohy, ve které respondenti nově počítají se třemi různými jmenovateli. Rozdíl je znatelný i mezi variantami, protože verze B1 má četnější zastoupení v pozdějších minutách, a dokonce pětina respondentů vyplňovala úlohu v rozmezí pět až deset minut. Ačkoli páté úloze B1 principově odpovídá šestá úloha verze B2, která disponuje v zadání poloviční hodnotou celku, neobsahuje tak výrazné zastoupení četnějších minut. Na základě rozdílného času lze podotknout, že respondenti vnímají změnu posloupnosti a návaznosti úloh. U verze B1 byla úloha s odpovědí 1/3 zařazena mezi úlohy, kde se vždy vyplňovala 1/2, což narušilo kontinuitu zvyšující obtížnosti. U varianty B2 naopak odpověď 1/3 zahájila řadu úloh s náročnějšími čísly a úlohy s odpovědí 1/2 byly všechny umístěny na začátek.



Graf 6: Čas potřebný k vyplnění úloh 2, 4, 5 u variant A1, A2

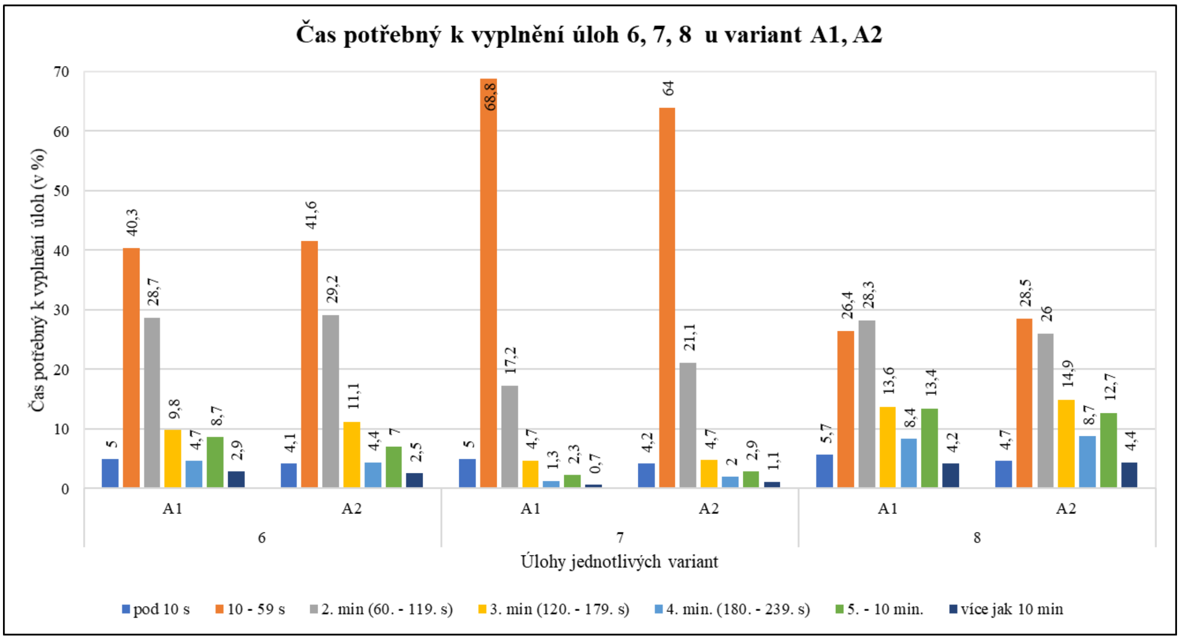


Graf 7: Čas potřebný k vyplnění úloh 2, 4, 5 u variant B1 a B2

V šesté úloze opět počítali rychleji účastníci testu B2. Důležité je však upozornění, že celek byl znovu vyšší u varianty B1. Proto je možné se ptát, zda zjištěný nepoměr byl autory vytvořen záměrně či omylem. Kombinace nižších hodnot a možná nevhodná struktura úlohy, ve které se těžko respondentům orientovalo, zapříčinilo vyšší neúspěch. U jednodušších variant A1 a A2 v páté úloze narostl podíl procent u první minuty, ačkoli se poprvé v testu objevují pětiny. Řešitelé však vyplňovali pouze délky, nikoli části vyjádřené zlomkem. Zároveň je nutno podotknout, že páté úlohy u jednodušších testů mají pouze dvě podúlohy, zatímco doposud úlohy obsahovaly vždy tři. Vložením kratších a dostatečně jednoduchých úloh s pětinami doprostřed úloh zabývajícími se polovinami, zamezili autoři narušení posloupnosti, což je zřejmé z rychlosti vyplňování. Menší pokles je znát u šesté úlohy jednodušších variant, ačkoli jsou pouze prohozené s pátými úlohami. Je možné, že respondenti byli zaskočeni analogickou úlohou, ve které se změnila pouze délka celku.

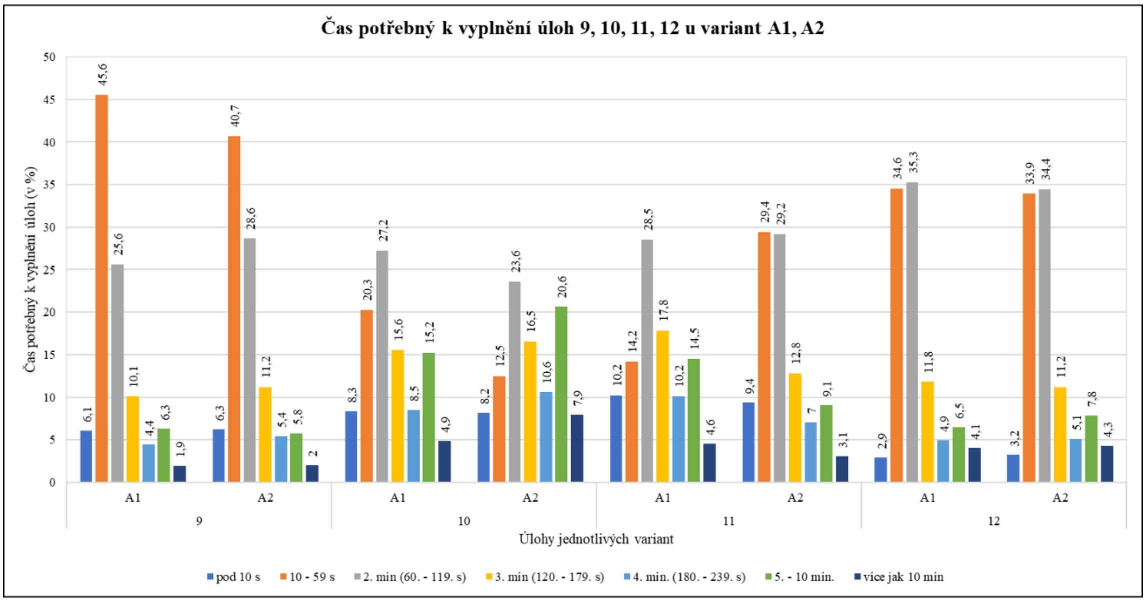
Obdobný průběh nejspíše nastal i mezi sedmou a osmou úlohou variant A1 a A2, které mají totožná zadání, ale v opačném pořadí. I samotné úlohy jsou si velmi podobné, což opět mohlo vyvolat u řešitelů nejistotu, jestli jsou vůbec na další úloze či zda předchozí úlohu vypočítali správně. Nejvýraznější rozdíl je viditelný v grafech 7, 8 mezi devátou a desátou úlohou, přičemž u desáté lze pozorovat rovnoměrnější zastoupení mezi jednotlivými třídami.

Zároveň posunutí k desáté úloze přineslo s sebou i přenos alespoň poloviny procent kategorie jedné minuty do všech vyšších tříd vyjma druhé minuty, která měla pouze malou odchylku. V deváté a desáté úloze pracují účastníci výzkumu poprvé se 3/4. Jediné zdůvodnění lehkého náskoku verze A1 může být kratší celek v deváté úloze, který verze A2 dostala až v desáté, což opět mohlo některé respondenty zmást. Ačkoli nejtěžší úlohy byly umístěny na závěr, nejdéle vyplňovanými úlohami zůstaly úlohy číslo deset. K potvrzení náročnosti desáté úlohy přispívá i početné procentuální zastoupení odpovědí do deseti sekund, které ukazuje, kolik respondentů úloha odradila ještě před samotným výpočtem.



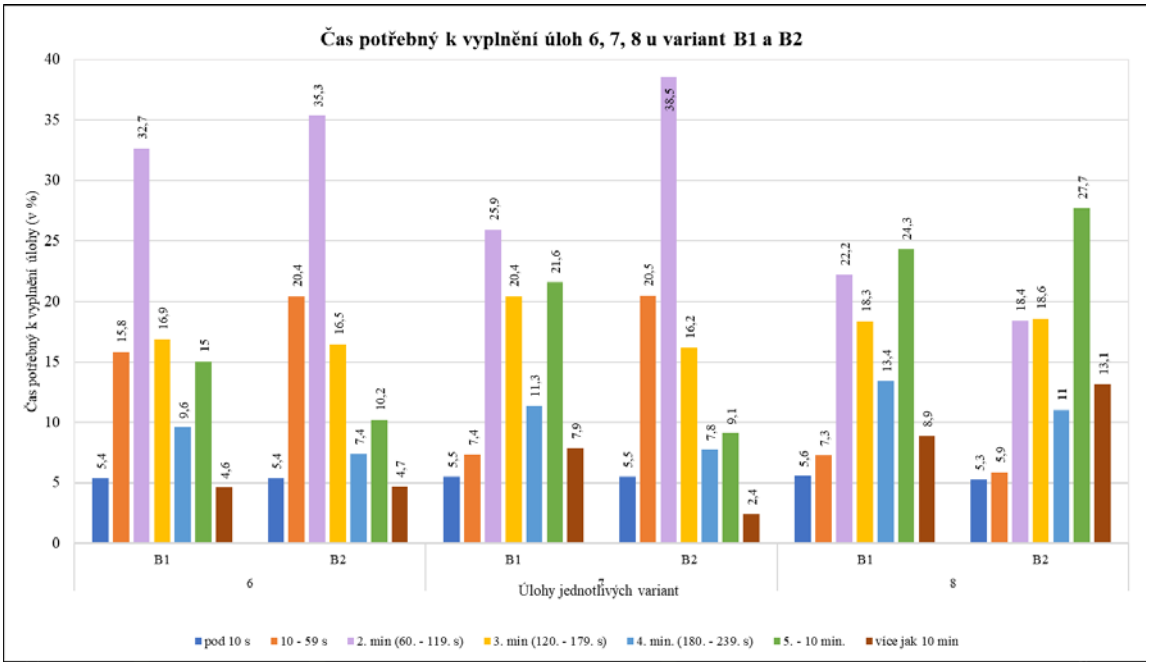
Graf 8: Čas potřebný k vyplnění úloh 6, 7, 8 u variant A1, A2

V jedenácté úloze se respondenti poprvé setkali s výpočty, kde správnou odpověď netvořily kmenové zlomky. Z grafu číslo 8 je zřejmé, že účastníky výzkumu tato změna překvapila a desetina z nich se rozhodla úlohu neřešit. Zbývající museli nad úlohou déle přemýšlet. Rozdíl mezi variantami testu mohl být opět způsoben vyšší hodnotou celku u verze A1. Ve dvanácté úloze už řešitelé věděli, v čem spočívá rozdíl a dokázali úlohu vyřešit rychleji. Dřívější ukončení však mohlo být ovlivněno i vidinou konce testu, takže se snažili poslední úlohu ukončit co nejdříve.



Graf 9: Čas potřebný k vyplnění úloh 6, 7, 8 u variant A1, A2

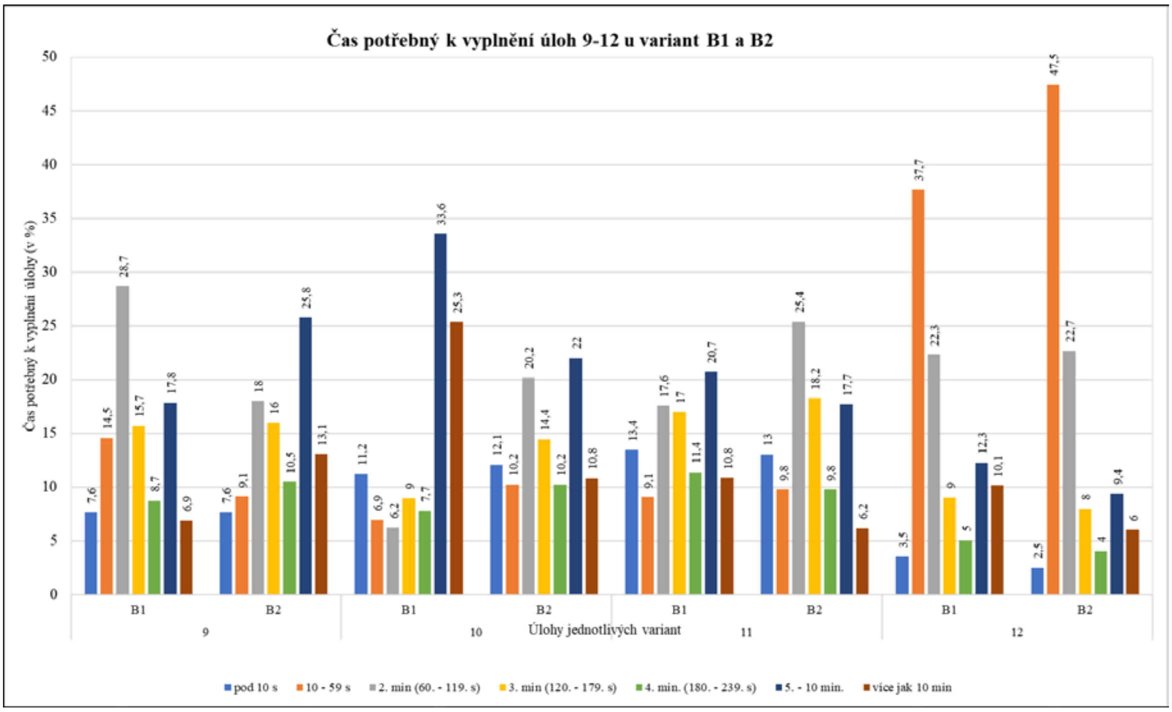
Průběh vyplňování testů verze B1 a B2 lze nejlépe porovnat na úloze číslo sedm, která je pro obě varianty zcela totožná. Ačkoli mají verze shodné vstupní podmínky, výrazně rychlejší výpočty prokazuje verze B2. Důvodů pro odlišné rozložení hodnot může být mnoho, a je otázkou, zda řešitelé verze B2 byli šikovnější a bystřejší nebo naopak méně pečliví, popřípadě mohli chtít rychleji ukončit test. Osmé úlohy jsou sice odlišné, nicméně způsob řešení pracuje na totožném principu. Ačkoli verze B1 obsahuje výpočty na základě tří odlišných jmenovatelů, zatímco v B2 vystačí pouze dva, rychlejší zorientování zřejmě proběhlo u verze B1. B2 také počítá s menším celkem, takže už zbývá pouze úlohami, zda byli i úspěšnější v řešení. V úloze osm je nejvýraznější zvýšení procentuálního zastoupení kategorie 5. – 10. min a více jak deset minut, kterou již nepřeskočí ani v pozdějších úlohách. Pouze v deváté úloze se hodnoty velmi přiblíží k maximu z osmé úlohy.



Graf 10: Čas potřebný k vyplnění úloh 6, 7, 8 u variant B1, B2

Deváté úlohy měly opět navzájem jiná čísla a velmi podobnou strukturu, nicméně v tomto případě byla zřejmě náročnější varianta B2. Respondenti B2 počítali s vyšší hodnotou celku a zároveň museli porovnávat zlomky s odlišnými jmenovateli, naopak v B1 pracovali pouze s pětinami. Zatímco verze B1 dominuje v kategorii druhé minuty, B2 převažuje u všech tříd s vyšším počtem minut. Výrazná změna proběhne při přesunu na desátou úlohu, ve které třetina respondentů B1 řeší úlohu pět až deset minut a další třetina buď úlohu velmi rychle přeskočí nebo ji naopak řeší více jak deset minut. Výrazný obrat může být způsoben náročnější úlohou, ve které musí respondenti počítat s odlišnými jmenovateli a zároveň se jedná o téma cestování za babičkou, které může být považováno za náročnější pro pochopení. Odlišnou strukturu má však i verze B2, ve které respondenti pracují se třemi odlišnými jmenovateli a ačkoli se rozložení oproti deváté úloze trochu změnilo, odchylku lze považovat za minimální.

Jedenácté úlohy mají velmi podobné časové rozvrstvení, ačkoli verze B2 dominuje spíše v rychlejších třídách. Na závěr je velmi zajímavé porovnání posledních dvou úloh, protože jedenáctá úloha verze B2 číselně odpovídá dvanácté úloze varianty B1. Přesto rozložení potřebného času na vyplnění je zcela odlišné. Sloupce u dvanáctých úloh zřetelně ukazují, že respondenti chtěli test co nejdříve ukončit a ačkoli poslední úlohy patřily k těm nejobtížnějším, rychleji byla vypočtena pouze druhá úloha. Rychlost vyplnění vysvětluje i vyšší chybovost u posledních úloh náročnějších testů. Zároveň se ve dvanáctých úlohách výrazně snížilo zastoupení kategorie do deseti sekund, což svědčí o uvažování respondentů, zda si test ještě zkontrolují a vrátí se k jednotlivým úlohám.



Graf 11: Čas potřebný k vyplnění úloh 9-12 u variant B1, B2

Shrnutí

Pomocí grafů představujících procentuální zastoupení chybovosti, časového rozložení a četnosti návratu k jednotlivým úlohám u zadaných testů je možné pozorovat změny chování respondentů během vyplňování úloh. Důvodů změn v rozdílu potřebného časového rozpětí je mnoho a zároveň na každý podnět reagují respondenti odlišně. První výrazný aspekt sleduje návaznost a gradovanost úkolů. V případě, že se některá úloha vloží mezi odlišně obtížné úlohy, řešitelům se naruší kontinuita, která způsobí prodloužení potřebného času na vypočtení úkolu a zároveň se zvýší chybovost u řešených úloh. V situaci, kdy za sebe byly umístěny dvě úlohy s podobnými čísly a potřebnými výpočty, čas řešení druhé úlohy se opět prodloužil. Tento poznatek však platí především pro skupinu respondentů, kteří řešili jednodušší verze testů. Kromě struktury se v časovém rozpětí ukázala i gradovanost úloh, kde jednodušší úlohy byly samozřejmě vyřešeny rychleji než obtížnější.

Výjimku tvořily poslední, náročnější úlohy, které respondenti dokončili velmi brzy s vidinou konce testu.

Úlohy, ve kterých proběhla výraznější změna oproti předešlé úloze, vykazovaly delší potřebný čas k vyřešení a zvýšilo se i zastoupení nesprávných odpovědí. Zaznamenané rozdíly se vyskytly v případě odlišného počtu využívaných jmenovatelů, velikosti kmenových zlomků či na základě délky zadané trasy, tedy celku. Zároveň řešitelé jednodušších verzí trávili více času nad úlohami s kmenovými zlomky než se zlomky, které měli v čitateli jiné číslo než jedničku. Nejvýraznější rozdíl je však viditelný mezi snadnějšími a náročnějšími verzemi testů, kde se po úvodních jednodušších úlohách nápadně zvýšila četnost návratu a prodloužila se časová rozpětí u obtížnějších variant testů. Odlišné množství procent je také viditelné mezi vstupními a výstupními variantami testů, což predikuje správné koncipování kurzu. Na základě porovnaných dat bylo možné určit, že některé testy měly nesprávné seřazení úloh, které odporovaly předpokládané zvyšující obtížnosti. Nejlépe viditelná gradovanost byla zřetelná u testu B2, u zbývajících by bylo vhodné některé úlohy přeskupit. Pro porovnání výkonu před kurzem a po kurzu vyhovuje spíše jednodušší varianta s testy A1 a A2, což je potvrzeno i plynulejším zvýšením četnosti návratu.

7.2. Příčiny vzniku chyb u testů A1, A2, B1 a B2

Sesbíraná data obsahovala kromě správných odpovědí i chybné, které vznikly na základě nedostatečných znalostí, nevhodné struktuře úloh či nedostatečným procvičením získaných vědomostí. V této kapitole budou postupně rozebrány chybné postupy při vzniku chyb a budou hledány příčiny nesprávného řešení úloh.

7.2.1 Vysvětlení chybných postupů ve výpočtech a porovnání struktury úloh u testů A1 a A2

V grafu č. 12 jsou vypsány nejčastější hodnoty chyb u jednotlivých podúloh verze A1, zatímco soubor chybných odpovědí pro variantu A2 je vyjádřen v grafu číslo 31 v příloze. Grafy ukazující jiné odpovědi byly vytvořeny ze souboru všech účastníků, kteří testy vyplňovali. Jelikož se počet účastníků pohyboval vždy okolo 2000 dětí, jsou v práci podrobněji rozebrány pouze častější chyby, které mají za cíl rozklíčovat myšlenkové pochody žáků. Počet totožných chyb, u kterých už jsou zkoumány výpočtové postupy respondentů, se pohybuje u hranice dvaceti nesprávných odpovědí. Pro snadnější vysvětlení rozdílných postupů, budou některé úlohy vypsány přímo v práci, ostatní lze nalézt v příloze. Zároveň mnohé úlohy jsou v testech dublovány, a proto budou porovnávány společně, nikoli samostatně.

Úloha číslo 2 varianty A1: „Délka celé tyče je 50 cm. Délka modré části je 25 cm. Zelená část tyče je dlouhá "t1" cm. Modrá část je "t2"/"t3" celé tyče. Zelená část je "t4"/"t5" celé tyče.“, kde t1 = 25, t2/t3 = 1/2 a t4/t5 = 1/2. Někteří účastníci výzkumu určili, že velikost modré části je 50, k čemuž zřejmě dospěli důsledkem nepřesného čtení, ve kterém si spletli délku celé tyče s její částí, či nepochopili význam celku. Stejný postup zřejmě nastal i v druhé úloze varianty A2, ve které byl celek roven 40. Zajímavou skutečnost představuje výsledek 16, který se objevil u obou testů, avšak postup, kterým respondenti dospěli k této odpovědi, není známý. Zbývající výsledky verze A1 poukazují na nerozvinutou představu o celku a polovině, protože často se objevuje odpověď 1. Respondentům při výkladu zřejmě uniklo pochopení, že pokud z celku odebereme polovinu, zbývá nám právě druhá polovina. Další chybné odpovědi představují známé zlomky, u kterých však dvojice vytváří celek, např. 1/3 a 2/3 či 1/5 a 4/5, nebo jsou daná čísla totožná, konkrétně 1/3 nebo 1/5. Spojitosti mezi výsledky jsou zřejmé především u verze A1. Odpovědi varianty A2 mají menší spojitost mezi dvěma výsledky, což poukazuje na častější odhadování výsledku než na jeho výpočet.

Ve čtvrté úloze A1 nebyla zaznamenána žádná častější chyba v podúloze 4/t1. U verze A2 naopak respondenti nejčastěji chybně odpovídali, že zbývající polovina je rovna 40, ačkoli správná odpověď měla být 30. Je možné, že řešitelé si spojili tuto úlohu s druhou úlohou, kde byla délka celé tyče rovna 40 cm. Nejvýraznější výsledek odpovědi t2/t3 byl u obou variant roven 1/3, která u verze A1 byla doplněna odpovědí t4t/t5 zaznamenávající hodnotu 2/3. Tento poznatek poukazuje na pochopení, že celek se skládá ze tří třetin. Bohužel odpověď t4t/5 opět obsahovala i výsledek 1, které toto tvrzení u části respondentů vyvrací.

V úloze číslo pět, odpovídající úloze 6 v testu A2, bylo ukázáno, že respondenti nepochopili, co znamená 1/5 z celku, tedy nespočítali, kolik vychází *60 : 5*. Chybné odpovědi zároveň ukazují, že mnozí respondenti nepoznali, která část je větší a která naopak menší. Proto odpovědi dosazovali libovolně, což je vidět např. u odpovědi t2 která zaznamenává hodnotu 12. U výsledků 20 je možné předpokládat, že řešitelé neurčovali pětinu z celku, ale zvolili dělení na jiný počet částí tedy na třetiny. Nesprávná odpověď 50 vyskytující se u obou variant, mohla být evokována číslem pět ve jmenovateli či snahou odečíst od celku násobky pěti. Tuto domněnku potvrzují čísla 5, 10 a 15, u kterých respondenti zřejmě věděli, že musejí dělit celek vyšším číslem než dva, nicméně buď nesprávně dělili nebo zvolili špatného dělitele. Použití tohoto postupu je pravděpodobně spojeno i s výsledky 40, 45 a 55.

Při zapisování výsledku 30 mohli být respondenti ovlivněni předchozími úlohami, ve kterých se výsledky vztahovaly především k 1/2. Zároveň číslo 30 získáme nejjednodušším dělením čísla 60 a je možné jej zařadit do pěkných čísel, se kterými řešitelé jistě neměli problém pracovat. Číslo 58 poukazuje na informaci, že respondenti se nejspíše spletli o 10 jednotek, protože správná odpověď byla rovna 48.

V šesté úloze A1 a páté u A2 měli respondenti za úkol určit 1/5 ze 70. Výsledek 50 potvrzuje domněnku o propojení 1/5 s číslem 50 na základě společné číslice 5 a naprostému nepochopení významu zlomků. Nesprávné hodnoty v intervalu 12–15 svědčí o chybném dělení *70 : 5*, zatímco číslo 35 poukazuje na nejjednodušší dělení dvěma. Nejvýraznější chybou u úlohy 6/t2 je číslo 66, u kterého se mohli respondenti opět přepsat, podobně jako u čísla 46. Respondenti nejspíše tušili, že vypočtená část by měla být menší než celek. Již z prvního stupně ZŠ žáci vědí, že u odčítání a dělení je výsledné číslo nižší. Proto odečtené číslo 4 mohlo vzniknout odečtením 5–1. Hodnoty 55 a 58 poukazují na nesprávné určení 1/5, což vede k následně chybnému dopočtení zbývající části. Hodnota 20 může odkazovat na odečtení čísla 50, které je podmíněno jmenovatelem 5. Kombinace 65 a 5, která byla zapsána stejným množstvím respondentů poukazuje na odečtení čísla pět od celku. Řešitelé tak nejspíše jednali, protože si mysleli, že 1/5 je rovna číslu 5.

V případě sedmé úlohy A1 (osmé v A2) pracují respondenti opět s polovinami, avšak u vyšších čísel, protože celek je roven 120. Při vyjádření poloviny zlomkem se opět objevila 1/3 a 2/3, tedy nejběžněji využívané zlomky. Velikosti 2/3 odpovídá kombinace čísel, ve které je velikost zbývající 1/3 rovna 30 cm a délka celku představuje 90 cm. Další znepokojivou odpověď prezentují čísla jedna a šedesát, pomocí kterých respondenti říkají, že část tyče či dráhy je rovna délce celé tyče (nebo cestě), takže je opět prokázáno neporozumění základům zlomků. Podobně zneklidňující jsou i odpovědi u úlohy zaměřující se na velikost celku. Ačkoli autoři využívají v obou testech slovo „celá“, které evokuje maximum neboli celek, chybné odpovědi mají i nižší hodnotu než zadaná polovina, tedy 30.

Číslo 90 nejspíše vzniklo vynásobením viditelnou polovinou, která byla následně přičtena ke známé hodnotě 60. Respondenti ve svých odpovědích obvykle volili dekadická čísla, která byla násobkem čísla třicet. Jediná dvojice, která této teorii odporuje, je kombinace čísel 20 a 80. Počet respondentů, kteří tyto chybné odpovědi zapsali, je totožný. Lze se tedy domnívat, že řešitelé počítali s celkem rovným 80 cm a při odečtení známé hodnoty 60 cm získali délku zbývající části rovnu 20 cm.

Snaha uhodnout výsledek pomocí násobení konkrétního čísla, je znatelná i v úloze osm (u varianty A2 číslo 7). Nejčastější chyby představovaly násobky hodnoty 25, což stejně jako v minulém případě odpovídá 1/4 zadaného celku. Respondenti zřejmě vědí, že řečené násobky představují ve výpočtech důležitou roli, avšak jak velkou část konkrétní násobky zaznamenávají, zůstalo respondentům skryto. Podobně jako v minulých úkolech nechápe mnoho účastníků výzkumu význam celku a přisuzují mu nízké, neodpovídající hodnoty.

Opět se zde nacházejí čísla, která jsou nižší či rovná zadané polovině, konkrétně hodnoty 25 a 50. Někteří respondenti však zřejmě věděli, že celek musí mít vyšší hodnotu než zadaná část, nicméně ale nedokázali určit, o kolik či kolikrát je potřeba hodnotu zvýšit. Číslo 75 mohlo být spojeno s představou, že číslo 50 odpovídá 2/3 a nikoli 1/2.

Při zjišťování celku i hodnoty zlomku je nutné poznamenat, že respondenti opět chybovali už v samotné představě, co celek znamená a jaký význam prezentuje výraz 1/2. Často zaznamenaná chyba 1/5 namísto 1/2, mohla být opět ovlivněna totožnou číslicí 5. Zároveň mezi odpověďmi při určování hodnoty 1/2 zapisovali respondenti čísla 20 či 25. Hodnota 20 odpovídá 1/5 zadaného celku, zatímco 25 prezentuje 1/4. Výsledek 25 je možné spojovat s myšlenkou, kde celek odpovídá číslu 75, čímž je poukazováno na záměnu představy 1/2 za 1/3. Respondenti zřejmě určili polovinu ze zadané hodnoty 50, což samozřejmě vedlo k dalším chybám.

Devátá úloha (desátá u verze A2) pracovala se čtvrtinami, což vedlo k množství odlišných, a přesto velmi početných chyb. Její zadání: „Délka zelené části tyče je 40 cm. Modrá část je 3/4 celé tyče. Celá tyč měří "t1" cm. Modrá část měří "t2" cm. Zelená část je "t3"/"t4" celé tyče.“, správné výsledky: "t1=160, "t2=120", "t3/t4=1/4". Při výpočtu délky celé tyče si většina respondentů uvědomila, že výsledná hodnota musí být vyšší než 40 cm představující 1/4, což má jistě povzbudivý charakter. Pouze někteří účastníci zapsali, že konečná suma je rovna 1/4, tedy 40. Nejčastější chybná odpověď však zaznamenávala, že celek je roven 70. Tato hodnota vznikla nejspíše kombinací viditelných číslic, takže 40 a 3/4. Lze předpokládat, že účastníci výzkumu k číslu 40, zastupující 1/4, přičetli hodnotu 30, která byla vytvořená na základě čísla 3 v čitateli a desítky v čísle 40.

Další výraznou chybu prezentuje hodnota 120, která ukazuje uvědomění respondentů, že celek musí být násobkem 40. Bohužel následně chybí propojení, že celek se skládá ze 4/4, nikoli pouze ze tří. Výsledek 80 mohl být ovlivněn předchozími úlohami, kde se často počítalo s polovinami. U mylné hodnoty 50 je možné, že respondenti zaměnili 3/4 za 4/5, které odpovídaly zapsané 40. K hodnotě 40 přidali pouze zbývající část, v tomto případě číslo 10. Jinou možností je, že účastníci určili 1/4 ze 40, tedy 10, kterou následně přičetli k jedinému známému číslu, takže ke čtyřicítce. Postup k získání čísla 60 proběhl nejspíše na základě určení poloviny ze 40, která byla následně násobená třemi. Využití poloviny mohlo být podníceno předchozími úlohami a násobení třemi opět viditelnou číslicí 3 v čitateli zadaného zlomku.

K chybné odpovědi s hodnotou sto, mohli respondenti dospět úvahou, že 1/4 odpovídá 40 a 1/2 prezentuje hodnotu 50. Jelikož věděli, že celek se skládá ze dvou polovin, vynásobili číslo 50 dvěma. Další možnost mohla vzniknout opět na základě pozorovatelných číslic. K hodnotě 40 se přičetlo dvakrát číslo 30, tedy 60. Tato možnost se skládá ze tří částí, což bylo evokováno číslicí 3 v čitateli zlomku. Přičtené hodnoty 30 mohly opět vzniknout kombinací čísla 3 v čitateli a dekadické 40. K ujištění, že je výsledek správný jistě napomohlo i samotné číslo 100, které je dekadické, respondentům dobře známé a zároveň dostatečně velké.

Určování hodnoty odpovídající 3/4 v úloze 9, t2 nebyly výsledky o mnoho příznivější než při výpočtu celé části. Nejvíce znepokojivá je informace, že mnoho odpovědí má nižší hodnotu než zadaná čtvrtina, což upozorňuje na neznalost v porovnávání zlomků na základě shodného jmenovatele. Častý omyl představovalo číslo 30, které zřejmě vzniklo kombinací čísla tři ve jmenovateli a desítky, kterou vyplňující viděli v čísle čtyřicet. K chybě mohla přispět i myšlenka, že po vyplňujících se vyžaduje určit 3/4 ze 40, čemuž výsledek 30 skutečně patří. V případě vyplněné hodnoty 80 jsou možné dva postupy. V jedné možnosti respondenti, motivováni předchozími úlohami, vynásobí zadané číslo dvěma bez většího rozmyslu. Je ale možné, že chtěli vytvořit 3/4 společně s již zapsanou 40, což by při sečtení 80 + 40 opravdu dostali.

U výsledku s číslem 40 pisatelé nejspíše nezpozorovali rozdíl mezi 1/4 a 3/4, což je velmi alarmující. Opět však k této skutečnosti mohly přispět předchozí úlohy vztahující se k polovinám. Jinou možností vysvětlující chybu respondentů představuje varianta, že délka zelené části tyče je totožná s délkou modrého zabarvení. Z tohoto poznatku ale vyplývá informace, že celek by se nerovnal jedné, nýbrž 3/4 + 3/4 = 3/2. Respondenti také zapisovali hodnotu 60, kterou nejspíše získali vynásobením čísla dvacet, což je polovinou hodnoty 40. Hodnota 20 byla nejspíše způsobena nezapsáním jedničky na místě stovek nebo chybnou úvahou, že 20 je rovno 1/4 z 80.

Lze si položit otázku, zda účastníci výzkumu vědí, co znamená pojem celek a jak se odlišuje od jiných zlomků. U chyby s hodnotou deset nejspíše určovali účastníci výzkumu čtvrtinu ze zadaného čísla 40. Je pravděpodobné, že měli propojenou zlomkovou čáru s dělením, čehož také využili. Mnoho respondentů určilo, že celek je roven 80, takže 3/4 z 80 by odpovídaly zapsané hodnotě 60.

Poslední část deváté úlohy se zabývala velikostí zeleně zabarvené části, která představovala zbývající 1/4. Řešitelé nejčastěji chybně odpovídali, že tento úsek prezentuje 1/2 nebo 1/3 celé tyče. Zapsané odpovědi korespondují s předchozími nesprávnými úvahami této úlohy. Zapsání jedničky či 3/4 opět odpovídá neporozumění celku a jeho velikosti. Výsledek 4/7 může být kombinací čísla 40 a součtem číslic ve zlomku, avšak jiný postup není známý.

Zbývá tedy otázka, zda respondenti úlohám opravdu nerozuměli či neměli náladu nad nimi důkladněji přemýšlet. Při použití jednoduchého nákresu se základními znalostmi by měli být respondenti schopni úlohu vyřešit. Předpokládejme, že se účastníci výzkumu chtěli zlepšit, a proto se snažili test co nejlépe vyplnit. Na základě těchto předpokladů se opět dochází k poznatku, že chybující respondenti nechápou, co představují 3/4 a nevědí, jak velkou část je potřeba doplnit do celku. Jelikož se testu mohl zúčastnit kdokoli, nelze posoudit, zda uměl respondent látku plně ovládat. Žáci na prvním stupni ZŠ během výuky také probírají zlomky, a proto by měli být schopni úlohu vyřešit na základě modelů nebo zlomkové zdi[11]. Je možné, že respondenti by úkol zvládli vyřešit za pomoci učitele, ale sami si neumí situaci zakreslit či pochopit, co mají vypočítat.

Úloha, která je v testu A1 umístěna na desátém místě, obsahuje stejnou problematiku, jako úlohami devět u varianty A2. Princip úlohy je zároveň totožný s předchozí úlohou, protože úsek je opět rozdělen na 3/4 a podúlohy se ptají na shodné informace, nicméně celková délka je 200, nikoli 160. Vytváření chybných odpovědí je velmi podobné, jako u předchozích úloh, proto se více zaměříme na propojení jednotlivých odpovědí. Ačkoli nejvíce řešitelů zapsalo, že hledaná část odpovídá 1/2, počet chybných odpovědí u zbývajících podúloh této verzi neodpovídá. Podobně je tomu i u ostatních variant

[11] Výuková pomůcka pro snadnější manipulaci se zlomky (Trčková, 2021)

nesprávného určení velikosti jednotlivých částí. Jiná možnost nabízí odpověď, že respondenti opravdu pracovali se čtvrtinami, nicméně pokud do výsledků zapsali 2/4, program hodnotu automaticky zkrátil na 1/2. Pokud však účastníci nevěděli, že 2/4 jsou rovny 1/2, lze opět zaznamenat velký nedostatek znalostí a procvičení představivosti o velikosti zlomků.

Širokou paletu chybných odpovědí představují nejenom podúlohy s určováním 3/4, ale i výpočet celého úseku. Odpověď, ve které je celek roven 100, je zřejmě spojena s chybnou hypotézou, že zbývá urazit ještě polovinu vzdálenosti. K hodnotě 125 by případně měla připadnout odpověď 2/5 u vymezení zbývající části dlouhé 50 km. Číslo 2/5 se však v častějších chybách vůbec nevyskytuje. Jediná hodnota, která by případně vypsané verzi odpovídala, je 1/5, která je podobně početná u varianty A2. Výsledek 25 je však zaznamenán pouze u verze A2. Zbývající 4/5 představují hodnotu 100, která se však nachází pouze u A1. Žádný jiný jmenovatel u vypsaných zlomků není dělitelem čísla 125, takže neměly by s ním být ani spojovány.

V případě, že se celková hodnota rovná 150, lze nalézt mezi vypsanými jmenovateli tři možné dělitele, tedy číslo dva, tři a pět. Pokud by dělitelem bylo číslo dva, hledané polovině by odpovídalo číslo 75, které je u varianty A2 zaspáno výrazně častěji než zadaný celek, zatímco u verze A1 nemá žádné výrazné zastoupení. U možnosti, ve které je zbývající úsek roven 1/3, by délky zbývajících částí musely odpovídat číslu 100. U varianty A1 tato hypotéza celkem odpovídá výsledným počtům, nicméně je zřejmé, že 1/3 byla využita i v jiných postupech. Verze A2 hodnotu 100 v části t2 vůbec neobsahuje. Pokud je menší díl roven 1/5, pak se zbývající část musí rovnat 125. Hodnota 125 se však neobjevuje ani u jedné varianty, tedy lze považovat tuto hypotézu za mylnou.

V úloze deset byly obsaženy i výsledky, u kterých se spojitost s jinými odpověďmi hledá velmi náročně. Je pravděpodobné, že existuje souvislost mezi čísly 90 a 40, protože pokud od čísla 90 odečteme známé číslo 50, získáme hodnotu 40. podobně lze propojit informaci, že 1/5 ze 150 je rovna 30, avšak ani toto vysvětlení nemá přílišnou vypovídající hodnotu. U zbývajících nevysvětlených odpovědí nebyl nalezen postup jejich získání.

V jedenácté úloze, odpovídající úkolu 12 u verze A2, pokládají autoři úlohu, která pracuje s pětinami. Jak již bylo v práci zjištěno, poslední dvě úlohy byly pro žáky díky gradovanosti nejnáročnější. Chybovost byla jistě ovlivněna nejenom méně častým využíváním vybraných zlomků v běžném životě, ale i náročnějším dělením celku na pět shodných částí. Pro snadnější rozbor je zde úloha přepsána:

„Délka zelené části tyče je 60 cm. Modrá část tyče je 3/5 celé tyče. Celá tyč měří "t1" cm. Modrá část měří "t2" cm. Zelená část je "t3" /"t4" celé tyče.“ Správné odpovědi jsou t1=150, t2=90, t3/t4=2/5.

Řešitelé nejčastěji odpovídali, že délka celé tyče je rovna 300 cm. K vysvětlení tohoto výsledku se stačí podívat na nejobvyklejší odpověď vyjadřující zbývající díl, tedy 1/5. K získání čísla 300 stačilo roznásobit jedinou hodnotu 60 číslem 5, které bylo zřetelně viditelné ve jmenovateli. Informaci, že větší část tyče prezentují 3/5, převzali někteří respondenti a vynásobili číslo 60 třemi, čímž získali hodnotu 180. Část účastníků si přetvořila rozmezí jednotlivých částí a v druhé podúloze vyplnili hodnotu odpovídající 4/5 ze 300, tedy 240. Jediná možnost, ve které výsledek odpovídá druhé i třetí podúloze, však souhlasí pouze s hodnotami 3/5 a 120. Při určení pětiny z čísla 300 získáme číslo 60, které při roznásobení číslem 2, jakožto zbývající 2/5, dává hodnotu 120, která je uvedena jako jedna z častějších chybných odpovědí.

Postup při získávání čísla 96 jakožto délky celé tyče je výrazně komplikovanější. Účastníci určili 3/5 z 60, které následně přičetli k hodnotě 60. V tomto případě je však matoucí, jak byla podle účastníků tyč rozdělena, protože z výrazněji zastoupených jmenovatelů je číslo 96 dělitelné pouze dvěma a třemi. Poloviční hodnota 48 se však v odpovědích nenachází stejně jako třetinová hodnota 32. Nejpravděpodobnější je spojitost mezi číslem 96 a jeho částí 36, které vzniklo odečtením známé části 60. Postup získání čísla 96 však není známý. Z toho lze usuzovat, že respondenti opět příliš nechápali závislost celku s jeho částmi. Ve výpočtu úplné délky, kde výsledkem bylo číslo 120, lze spekulovat, zda účastníci výzkumu nepovažovali 3/5 totožné s 1/2, čímž by se vysvětlila dvojnásobná hodnota čísla 60. Více náročný a zároveň méně pravděpodobný je způsob, ve kterém řešitelé roznásobili součet a násobek čitatele a jmenovatele u 3/5, tedy $3 \cdot 5 \cdot (3 + 5)$, čímž opět získali výsledek 120. Ideu vytvořenou na základě polovin lze podpořit i výsledky u dalších úloh, které obsahují jak 1/2, tak i 60. U druhého postupu naopak není možné určit, jaké by bylo rozdělení tyče, tedy nebudeme tuto možnost dále rozvádět. S hodnotou 120 může být spojena i kombinace 1/3 a části dlouhé 40 cm.

Postup k získání výsledku 100 byl nejspíše velmi jednoduchý, protože respondenti využili všech čísel, které jim byly známé. Hodnotu 60 vydělili třemi a výsledek 20 následně roznásobili 5, zkráceně vynásobili číslo 60 převráceným zlomkem 5/3. Podle odpovědí na zbývající podúlohy je zřejmé, že mohli pracovat pouze s 1/5, které odpovídá hodnota 20, zatímco s výsledkem 1/2 nekoresponduje žádná odpověď. Jediné možné pokračování prezentuje zlomek 3/5, který společně s číslem 40 tvoří celek 100. Pro získání hodnoty 240 nejspíše využili účastníci zadané 60, kterou roznásobili čitatelem 3. K výsledku 180 následně ještě přičetli odlišně zbarvenou část. Vypsaný postup prozrazuje, že respondenti si neuvědomili spojitost mezi číslem 60 a zlomkem 2/5. Na základě odpovědí u dalších podúloh je ale zřejmé, že samotným respondentům výsledek nepasoval do výpočtů. Jediná shoda v odpovědích nastala v případě 1/2, kterou lze propojit se 120. Ačkoli počty chybujících ve všech třech odpovědích jsou si velmi podobné, zůstává otázkou, kolik polovin a čísel 120 bylo ve skutečnosti opravdu spojováno s hodnotou 240.

Výsledek 180 nejspíše vytvořili řešitelé roznásobením čitatele a známé hodnoty 60. Tato možnost má několik potenciálních pokračování. Pokud si respondenti mysleli, že je tyč rozdělena na třetiny, ve výsledcích byly zapsány odpovídající hodnoty jak pro 2/3, tak i pro 1/3. Další překvapivá možnost je určení 1/5 ze 180, čímž je hodnota 36, která má ve výsledcích výrazné zastoupení.

U výsledku, ve kterém měla celá tyč délku 75, bylo nejspíše pětkrát vynásobené číslo 15. Není jasné, zda řešitelé určili 1/4 z 60, nebo vynásobili zadaného čitatele se jmenovatelem. Ačkoli má číslo 75 několik možných dělitelů, ve spojení s délkou modré části vyhovuje hypotéze pouze jediná varianta. Řešitelé nejspíše neporozuměli zadání a zaměnili velikosti obarvených částí, což je pochopitelné. Tato domněnka má jádro v délce modré části představující 60 cm, zatímco zelená část prezentuje pouze 1/5 tyče.

Poslední dvanáctá úloha nemá jako jedna z mála dekadické rozdělení tyče, což mohlo respondenty odradit od podrobnějšího řešení. Počet obvyklých chyb je značný, nicméně zastoupení ojedinělých a méně častých nesprávných odpovědí je také výrazné. Zajímavým rozdílem je počet opakovaných chyb mezi výpočtem celkové části, délce jedné části a zapsáním pouhého dílu pomocí zlomku. Z toho důvody budou v práci rozebrány možnosti, které by mohly korespondovat se zapsanými zlomky. Délky tyče, které mohou být rozděleny na pět stejně velkých částí, představují čísla 240, 110, 100 nebo 80. Variantě 240 odpovídá hodnota 192, která by představovala 4/5 celkové délky. Počet odpovědí s chybou 192 je však nízký, takže ji zřejmě zvolilo menší množství respondentů. Stejně jako u předchozí úlohy využili respondenti hodnot, které viděli a vynásobili hodnotu 48 jmenovatelem 5, aniž by se věnovali čitateli zlomku 3/5. Ačkoli je číslo 240 nejpočetnější odpovědí, smysluplnost vyplňování dalších polí zřejmě nebyla podložená přesnými znalostmi. V úloze zabývající se délkou dosud ujeté vzdálenosti se velmi často objevuje číslo 144, které by odpovídalo 3/5 z 240. Je tedy možné, že respondenti dokázali určit rozdělení tyče, avšak nezvládli stanovit pouhou 1/5 na základě předložených informací.

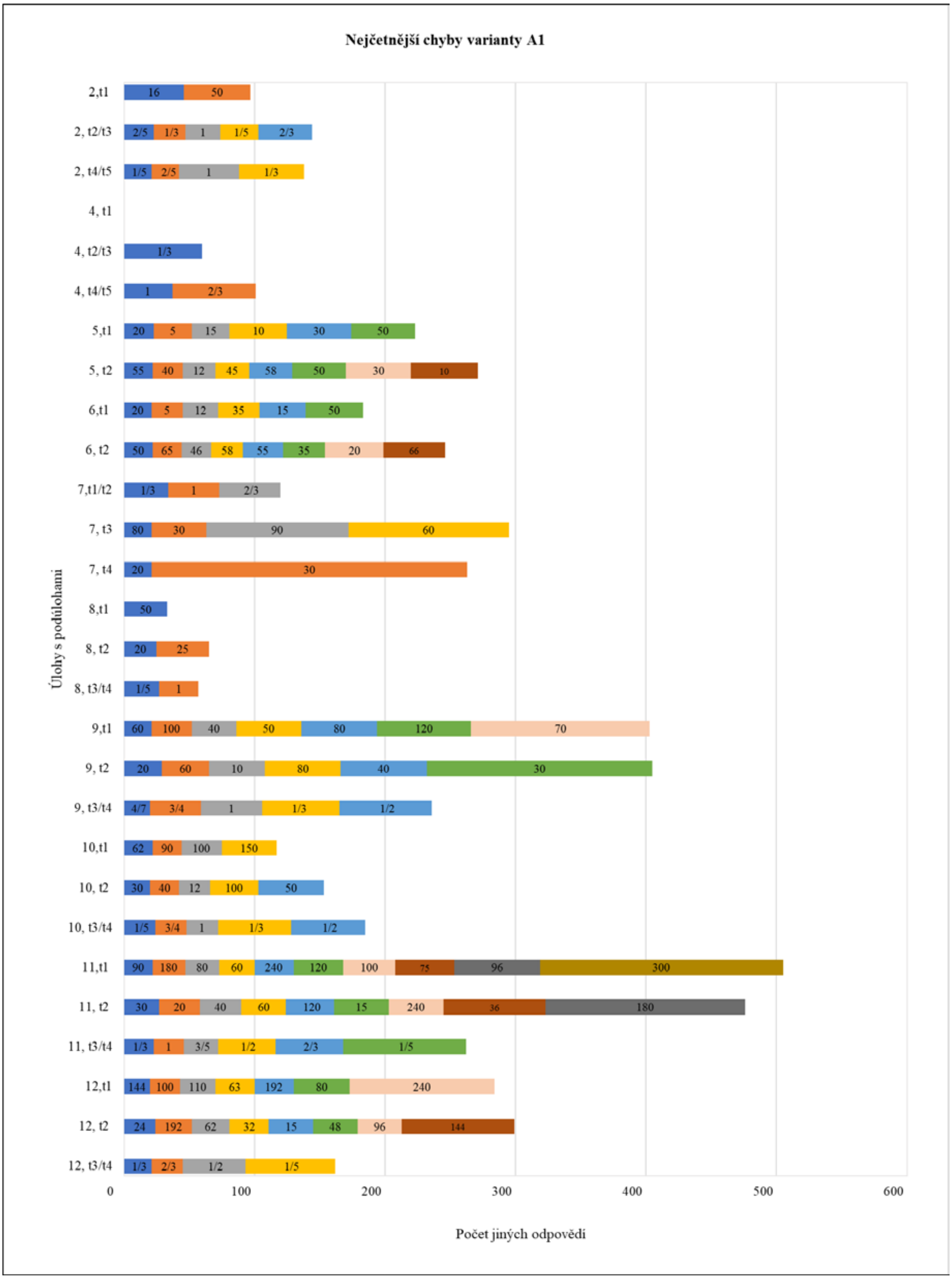
Výsledek 80 může být spojován se zlomkem 3/5, který odpovídá hodnotě 48, nicméně zbývajícím výsledkům, které jsou dělitelné pěti, tedy 110 a 100, neodpovídají žádné číselné kombinace ze získaných dat.

Většina chybných celků jsou dělitelné dvěma, nicméně pouze 192 a 96 mají výsledek poloviční hodnoty i v druhé podúloze, Logika určení této části však pouze ukazuje na nepromyšlený postup, který respondenti zřejmě brali jako nejsnadnější odpověď.

Poslední chybná určení zlomku zbývající části prezentují 2/3. Smysluplné kombinace představují dvojice 96 s třetinou 32 či 144 se třetinou 48. Obě verze testu však obsahují kombinaci čísel 144 a 48. Při posouzení možných postupů, které by vyhovovaly všem odpovědím, se našlo velmi málo funkčních variant. Je proto zřejmé, že řešitelé často nevnímali propojenost informací a řešili jednotlivé podúlohy odděleně.

U výsledku celé délky trasy má časté zastoupení číslo 110. Získání tohoto výsledku nejspíše provází chyba, kdy respondenti vynásobili číslo 48 převráceným zlomkem 5/2. Ve svém výpočtu se zřejmě spletli a místo 120 zapsali 110. Domněnku potvrzují i odpovědi na další podúlohy, které není možné propojit s výsledkem 110. Také postup k vypočtení konečné délky 192 není zcela zřejmý. Respondenti mohli vynásobit polovinu z viditelného čísla hodnotou 8, která je součtem čitatele a jmenovatele. Využití poloviny bylo evokováno jmenovatelem u zbývající části, tedy 2/5. Jelikož je 192 násobkem čísla 48, nabízí se i jiná varianta postupu. Respondenti spočítali pětinásobek čísla 48, od kterého odečetli hodnotu kratší části, aby nebyla započtena dvakrát. Ani jedna z těchto hypotéz však není zcela průkazná. Zároveň většina řešitelů zřejmě počítala, že u odpovědi 192 je dráha dělena podle čitatele, nikoli podle jmenovatele, na dvě či tři shodně velké části. Využití třetin však nebylo podpořeno žádnou odpovědí, zatímco polovina byla zaznamenána několikrát. Zapsaná polovina, tedy 96, však byla možnou variantou i k jiným úlohám. Číslo 96 bylo zřejmě vytvořeno jako dvojnásobek čísla 48, což opět potvrzuje i podobně četné zastoupení poloviční hodnoty 48. Podobně jako v minulých případech se respondenti zřejmě nezatěžovali zadanými zlomky a pokračovali v hledání polovin. Výsledky, které odkazují na dělení třemi však mají méně pochopitelné rozdělení. Ačkoli jsou v podúloze obsaženy odpovědi nejenom na 1/3, ale i na 2/3, počáteční získání délky celku nemá zřejmě významnější ukotvení. Hodnota 63 nejspíše vznikla součtem zadané délky 48 a hodnoty 15, která je několikrát zapsaná ve výsledcích u hledané části. Důvod přičtení čísla 15 může být spojen se zlomkem 3/5, u kterého řešitelé pouze vynásobili čitatele se jmenovatelem a získali hledaný sčítanec.

Méně četná odpověď 144 byla nejspíše získána roznásobením čitatele a zadaného čísla 48. Výsledek zřejmě není dělitelný pěti a myšlenka rozložení čísla na poloviny není podpořena ani v jednom testu. Rozdělení čísla 144 na třetiny odpovídá zbývajícím výsledkům pouze u varianty A2, tedy jej také není považovat za příliš přesvědčivý. Podobný závěr je i v možnosti, že celá tyč byla dlouhá 80 cm. Jednak není pochopitelné, jak k danému výsledku řešitelé došli a ani jak s ním nadále pracovali, protože žádná ze smysluplných variant se neshoduje s výsledky.



Graf 12: Nejčetnější chyby varianty A1

7.2.2 Vysvětlení chybných postupů ve výpočtech a porovnání struktury úloh u testů B1 a B2

Náročnější varianty testů, tedy B1 a B2, nemají vždy shodná čísla v úlohách, a proto budou komentovány i odděleně. Některé výsledky mají podobný postup, z toho důvodu jsou porovnány mezi sebou. Už při pouhém pohledu na vypsané chyby je zřejmé, že u náročnějších variant testu psali respondenti mnohem méně chyb. V grafu číslo 13 jsou proto ukázány i méně početné chyby než u jednodušších variant testu. Je možné, že v případě, kdy řešitelé nevěděli, jak úkol vyřešit, jednoduše pokračovali k jiné úloze. Test Záznam chybných odpovědí testu B2 lze nalézt v grafu číslo 32 v příloze. Dalším vysvětlením může být, že účastníci výzkumu chápali základy počítání se zlomky, a z toho důvodu zbytečně nechybovali v jednodušších úlohách. Chyby, které účastníci vytvořili ve složitějších variantách, obsahují méně nesrozumitelných postupů. V této části nebudou opakovány chybné postupy, které byly vysvětlené u variant A1 a A2, ale bude snaha o komplexnější uchopení důvodů k chybování.

První a třetí úloha byly v obou variantách představeny jako ukázkové, takže není nutné rozebírat případné chyby. Druhá úloha verze B1 odpovídá čtvrté úloze verze B2, podobná souvislost je zřejmá i mezi čtvrtou úlohou verze B1 a druhou úlohou varianty B2. Z toho důvodu budou jejich výsledky porovnávány společně. U sečtení chybných odpovědí je zajímavé, že verze B1 má výrazně více nesprávných odpovědí než druhý test. Ve druhé úloze testu B1 je představen úkol, ve kterém je tyč dlouhá 40 cm rozdělena na tři díly, přičemž jeden má délku 10 cm, zatímco druhý 20 cm. Respondenti chybovali především ve vymezení jednotlivých částí pomocí zlomku. Nejčastěji se u všech odpovědí využívali kmenové zlomky a je velmi pravděpodobné, že se některým respondentům mohly poplést barvy při vyplňování odpovědí.

Překvapující informaci ukazuje 1/3, která především nahrazuje odpověď 1/4 v obou podúlohách. Řešitelé si zřejmě nedokázali představit, jaká část mohla doplňovat celek a neměli dostatečně vžité používání zlomkové zdi, díky které by na správnou odpověď snadněji přišli. Podobné rozložení chyb je i u další úlohy, která má totožný princip i rozdělení částí s předchozí úlohou a liší se pouze v číslech, protože celková trasa měří 60 km. Chybné odpovědi, které nejsou příliš časté, ukazují na nedostatečnou znalost velikosti celku. Ačkoli je řečené, že cesta měří 60 km, řešitelé vyplňovali údaje, které v součtu s ostatními hodnotami výrazně převyšovali i délku celé trasy. Tuto domněnku potvrzuje i určování jednotlivých částí pomocí zlomků. Přestože úloha pracovala pouze s polovinami a čtvrtinami, řešitelé počítali i s třetinami či šestinami. Využití třetin mohlo být evokováno číslem tři v hodnotě 30, která prezentovala polovinu cesty. Zároveň při dělení čísla 60 na tři nebo šest stejně velkých částí, získá jedinec dekadická čísla, se kterými se žákům může lépe pracovat. Chybné odpovědi v druhé podúloze naznačují nepřesné čtení úlohy, protože někteří respondenti spojili dva úseky cesty do jednoho, takže místo poloviny cesty ujeli 3/4. Podobné zdvojení trasy mohlo nastat i ve třetí podúloze, kde řešitelé namísto 1/4 zapsali 1/2. Řešitelé nejspíše nepostřehli, že zbývající část je rozdělená na dvě stejné části, přičemž úlohami se ptala pouze na jednu z nich.

V páté úloze dělalo respondentům největší problém dopočtení 1/3 při znalosti částí s délkou 1/2 a 1/6. Nejčastějšími odpověďmi byly 2/3 a 1/6. Výsledek 2/3 odpovídá součtu známých hodnot, čímž byly respondenti zřejmě zmateni. Odpověď 1/6 mohla vzniknout z domněnky, že dvě menší části jsou stejně dlouhé a zároveň z nevědomosti, že 2/6 nejsou rovny 1/2. Šestá úloha verze B2 měla totožné rozdělení částí, ačkoli délka trasy je rozdílná. Respondenti varianty B2 měli větší problém s pochopením velikosti 1/3 a nejčastěji předpokládali, že velikost bude rovna 1/6. Totožný počet lidí následně uvedlo i chybnou délku zapsané části, která by velikosti 1/6 odpovídala.

Šestá úlohami u B1 koresponduje s pátou úlohou u B2, ačkoli informace o velikosti jednotlivých částí byly poskládány v různém pořadí. Opět výrazně více chyb bylo ukázáno v zadání, kde se cestuje za babičkou. Vyšší chybovost je zřejmě způsobena faktem, že pokud si respondenti během výpočtu nezakreslí obrázek, mohou se velmi lehko ztratit mezi jednotlivými úseky. Na druhé straně u rozdílně barevné tyče je srozumitelné, jakou délku mají respondenti určovat. Výhodou barevné tyče je i libovolné pořadí jednotlivých částí, zatímco v cestě za babičkou je přesně daná posloupnost tras, která při nesprávném rozložení může vytvořit zcela odlišnou situaci. Tyto poznatky jsou potvrzeny na nesprávných výsledcích u varianty B1. Respondenti se velmi často zapletli do jednotlivých úseků a viditelně zapisovali délku jednotlivých částí cesty k jiným odpovědím. Nejčetnější chyby tuto myšlenku potvrzují, což je jasně vidět u první a čtvrté podúlohy, kde je stejný počet chybujících u odpovědi 1/2, která odpovídá číslu 45. Podobný případ tvoří 1/3 s číslem 30.

Sedmé úlohy byly zcela totožné, jen počet nesprávných odpovědí byl opět výraznější u verze B1. Pro respondenty představovala tato úlohami opět další krok v obtížnosti, protože se zvýšila hodnota jmenovatele. a navíc bylo pouze jedno číslo kmenový zlomek. Zároveň vybrané zlomky patří k méně známým a využívaným, což mohlo respondenty odradit od řešení. Hlavní problém této úlohy spočíval v nepochopení skutečnosti, že zadaná délka 10 cm představuje 1/5 neboli 2/10 celku. Účastníci nejčastěji odpovídali, že se jedná pouze o 1/10, což si podle výsledků nejspíše spletli s druhou neznámou částí. Tato chyba samozřejmě zapříčila mylné uvažování o délce nejkratší, červené části.

Osmá úloha obsahuje dělení čísla 60 na dvanáctiny a ačkoli je pouze jeden prvek zapsaný zlomkem (7/12) a respondenti nemuseli přemýšlet nad společným jmenovatelem dvou zlomků, chybovost se od předchozí úlohy opět navýšila. Úlohu opět komplikuje nepřehledná situace při cestování mezi jednotlivými místy. A zároveň i pořadí úloh, jejichž první úlohami se vztahuje na prostřední díl cesty. V této podúloze respondenti často určovali 5/12 z 60 a nikoli 7/12. Vypočtený výsledek způsobil, že v řešení posledního úseku respondenti dopočítávali hodnotu do celku, tedy zapsali 5/12. Vyšší chybovost mohla vzniknout i odečtením první části cesty od druhé namísto sečtení a dopočtením do celku. Osmá úloha u verze B2 nemá shodná čísla ani rozdělení, nicméně princip a struktura úloh je velmi podobná, stejně jako postup a příčiny vzniku chyb. Z toho důvodu nebudou špatné odpovědi a jejich vznik více rozebrány.

Devátý úkol verze B1 se zdá být na první pohled jednodušší než dva předchozí, protože rozměry jednotlivých částí jsou určeny na základě pětin. Zároveň jsou zvolena dekadická čísla a pořadí úloh má vhodnou strukturu. Přesto někteří respondenti mají problém s uchopením a následným výpočtem. Nejčetnější chyba vznikla při výpočtu celkové délky tyče. K součtu známých délek respondenti přičetli číslo 16, které nejspíše vzniklo vydělením známých vzdáleností jmenovatelem posledního úseku, tedy pěti. Jiná možnost dělí cestu na dvacet čtyři dílů, čemuž odpovídají i méně početné výsledky 5/8 u nejdelší části, 5/24 u prostředního dílu a 1/6 závěrečného úseku. Důvod dělení na 24 částí však není srozumitelný. Jiné výsledky ukazují, že respondenty nejspíše zmátlo číslo 60 a začali převádět zlomky na třetiny, přičemž délka 60 představovala 2/3. Z toho důvodu i poslední úsek cesty musel měřit pouhých 10 km. Překvapivá je chyba 1/3 u prostřední části cesty, kterou účastníci spojovali s nejdelší částí trasy pro vytvoření celku. Zmíněná hodnota 1/3 byla pravděpodobně kombinována s 1/2, 3/4 a 2/3 prvního úseku. U všech možností však řešitelé nepočítají s velikostí poslední části 1/5, která je pro všechny kombinace příliš velká.

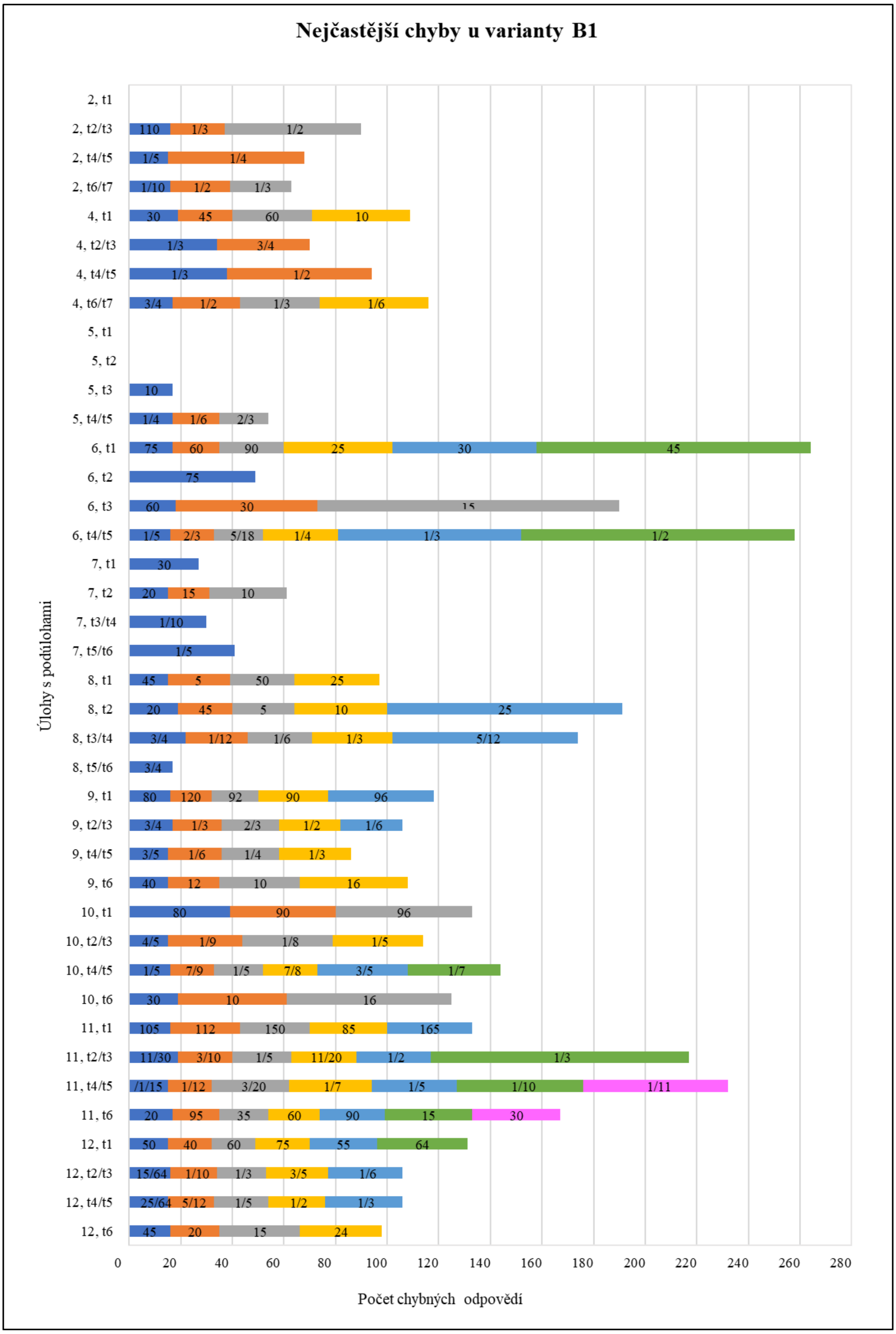
Obdobné porovnávání lze provést i u 1/4, jen s tím rozdílem, součet 1/2 a 1/4 nechává 1/5 příliš mnoho prostoru na doplnění celku. Zajímavá je i chyba 1/6, kterou je prezentována nejdelší část 60 km. Zbývající úseky by musely společně tvořit 5/6, což na první pohled není možné. V druhé verzi u shodného čísla úlohy je princip chyby totožný. Respondenti vydělili známou vzdálenost 160 cm dalším viditelným číslem, tedy pětkou. Výsledek 32 lze jasně vidět nejenom v celkové délce, ale i ve výpočtu délky poslední, zelené části tyče. Nesprávné zlomky u podúloh t2 a t3 ukazují na prohození výsledků jednotlivých částí.

Desátá úloha B1, ve které je cesta rozdělena na deset dílů, ukazuje totožné chyby při výpočtu celkové vzdálenosti a následně i jiných částí jako devátá úloha stejného testu. Jiní respondenti zapomněli na poslední díl 1/5 a do celkové trasy zahrnuli pouze první dvě části čímž vyšel výsledek 80 km. Výsledek 80 km přispěl i k určení velikosti zlomků prvních dvou částí, kde respondenti vypočetli podíl kilometrů vzhledem k délce 80, čímž získali hodnoty 1/8 a 7/8. Jiní řešitelé rozdělili cestu na pětiny a ačkoli výsledek postrádá logiku a je zřejmě chybný, délku i zlomkové vyjádření první a třetí části označili za totožné. Nejdelší části přisoudili velikost 3/5, která by však odpovídala pouhým 30 km. Podobně neúměrnou hodnotu prezentuje i 1/7, která nejspíše vznikla na základě viditelné sedmičky v čísle 70 km u prostřední části. Druhá verze B2 nevykazuje žádnou početnější chybu a zároveň nesprávné výsledky jsou nejspíše způsobeny nedbalostí, kdy místo 5/20 zapsali pouhé 4/20. Žádné výrazné chyby u varianty B2 nebyly zaznamenány ani v jedenácté úloze, tedy nebudou podrobněji popsány chybné postupy.

Na druhé straně verze B1 obsahovala několik početně výrazných omylů a ačkoli má totožné zadání jako dvanáctá úloha verze B2, zastoupení jiných odpovědí je opět výraznější u verze B1. Výsledné hodnoty vztahující se k celé trase vznikají přičítáním určitých kilometrů, k již známé délce 40 km. Připočtená část by měla představovat poslední díl cesty, který prezentuje 3/5 celé délky trasy. V chybných výsledcích u poslední podúlohy však nelze nalézt správná čísla pro získání chybných výsledků k první podúloze. Tento poznatek ukazuje, že respondenti nepropojovali informace a chybné výsledky nevztahovali k dalším podúlohám. Zároveň hodnoty u nesprávných výpočtů byly většinou násobky pěti, ale další vodítka k vysvětlení postupů nebyla objevena.

Podobně nesmyslné jsou i hodnoty u výpočtu první části cesty, kde nejčastější chyba prezentuje 1/3. V případě dopočtení by prostřední část představovala 1/15, která je však zapsána pouze minimálně. Velikosti 1/2 i 11/20 ukazují nepochopení vztahu mezi částmi a celkem, protože jenom při sečtení poloviny či 11/20 se zapsanými 3/5 má výsledek vyšší hodnotu než celek. Hodnota 1/5 se velmi podobá 15, což mohlo některé řešitele jednoduše zmást. Zároveň ve spojitosti, že prostřední část byla několikrát také zapsána jako 1/5, se lze ptát, zda respondenti viděli spojitost hodnot s celkem. Výsledek 3/10 v první části prokazuje, že účastníci tušili, že je potřeba zlomky rozšířit, nicméně rozšíření nebylo dostatečné. Žádné propojení mezi chybnými postupy nebylo nalezeno ani v třetí podúloze, ačkoli hodnoty počtu nesprávných postupů jsou vysoké. Nárůst počtu nesprávných odpovědí mohl být způsoben větší náročností úloh a zároveň vidinou blízkého konce testu.

Ačkoli se poslední úloha opět věnuje dělení celku na dvacetiny, počet chyb u verze B1 je stále vysoký. Zároveň myšlenkové postupy jsou opět těžko pochopitelné, protože nebyla nalezena žádná spojitost mezi chybami jednotlivých podúloh.



Graf 13: Nejčastější chyby u varianty B1

7.2.3 Shrnutí

Zatímco jednodušší verze testů pomohly především rozklíčovat nejčetnější postupy při vzniku chyb, náročnější varianty B1 a B2 napomohly k rozlišení příčin nesprávných odpovědí z důvodu odlišné struktury zadání úloh. Chybující respondenti často nesprávně přisuzovali celku nižší hodnotu než u zadaných zlomků, což predikuje nedostatečné ukotvení rozdílu mezi pojmem celek a jeho částmi. Ačkoli se nesprávné výpočty z důvodu nedostatečného pochopení významu celku objevovali v obou obtížnostech, v jednodušších verzích A1 a A2 bylo zastoupení chyb výrazně početnější. Respondenti upřednostňovali práci s kmenovými či soudělnými zlomky a zároveň reagovali na posloupnost úloh u jednotlivých úloh.

V průběhu hodnocení výsledků byla také zaznamenána kontinuita velmi podobných odpovědí u odlišných úloh. Tento poznatek ukazuje, že účastníci výzkumu ve svých výpočtech příliš neexperimentovali, ale raději se drželi známých čísel. Při vyplňování testů upřednostňovali dekadická nebo dobře uchopitelná čísla a při výpočtech se snažili využít všechna zadaná čísla bez většího rozmyslu. V náročnějších verzích testů chybovali respondenti méně a prováděli méně nesmyslných postupů. V obtížnějších úlohách byl celek rozdělován na tři části, což způsobilo výrazně větší diferenci výsledků. Ačkoli určování velikosti zabarvené části se může zdát totožně obtížné jako cestování za babičkou, výsledky vykazují odlišnou chybovost. Zatímco barevné odlišení si lze dobře představit a jednotlivé části jsou jasně vymezené, v případě cesty za babičkou má struktura úlohy velkou nevýhodu. U chybných odpovědí je zřetelné, že respondenti se mnohdy ztráceli ve vymezených oblastech, což způsobovalo nepřesné vymezení či zdvojení některých částí cesty. Obě náročnější varianty však měli shodný počet úloh zaměřených na výpočet zabarvených částí a určování trasy k babičce, tedy žádná varianta nebyla v tomto směru znevýhodněná.

Pro další využití by však mělo být zváženo, zda nezvolit jiné téma úloh, které by mělo jasnější kontext. Chybovost se zvýšila i v případě, kdy pořadí podúloh nekorespondovalo s pořadím řečených informací. Respondenti se následně ztráceli v testu a zaměňovali mnohdy správné odpovědi s jinými výsledky. Podobně jako v jednodušších variantách testů vykazovali respondenti verzí B1 a B2 větší chybovost u méně využívaných zlomků a preferovali dekadická čísla.

7.3 Správnost řešení jednotlivých úloh u zadaní A1, A2, B1, B2

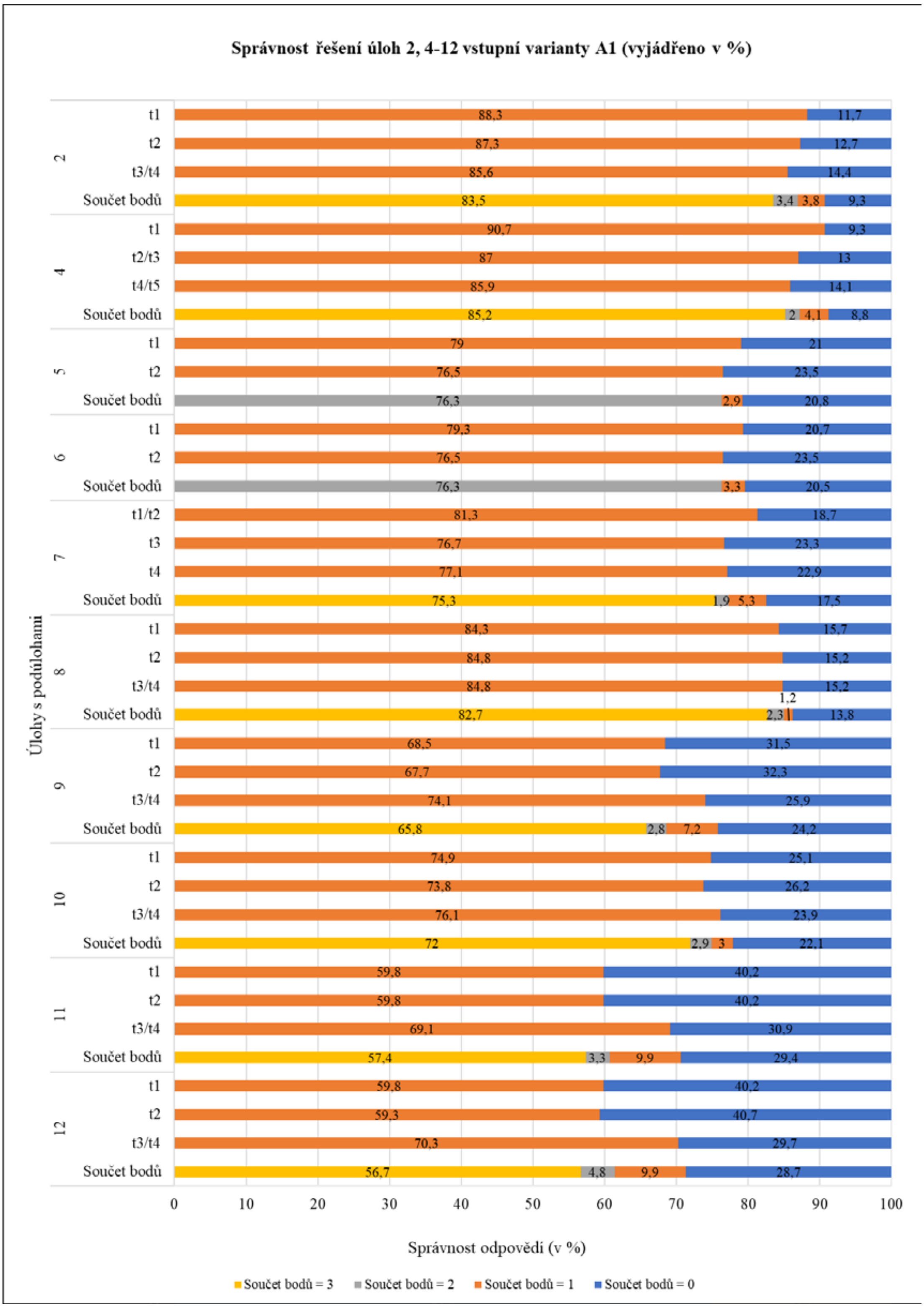
Na závěr se práce zabývá vyhodnocením úspěšnosti či neúspěšnosti respondentů při vyplňování testů. V této kapitole bude nejprve ukázáno zastoupení správných odpovědí u jednotlivých úloh, na které navazují grafy předkládající rozdíly mezi vstupní a výstupní variantou jednotlivých verzí testů. Výsledné hodnoty mohou pomoci zjistit, zda byl kurz úspěšný, tedy zda pomohl k posílení vědomostí jednotlivých účastníků kurzu.

Během vyhodnocování výsledků dat, byly respondentům přidělovány body za správné odpovědi. Maximální počet možných bodů se u úloh pohyboval mezi dvěma až čtyřmi body. Přihlášení účastníci měli vždy vyplňovat dvojici testů A1 a A2 nebo B1 s B2, které měly představovat totožnou obtížnost. Pokud respondenti vyplňovali pretest A1, měli na závěr kurzu řešit shodně náročnou variantu A2 a obráceně. Totožný princip byl naplánován i u obtížnější verze kurzu, akorát s testy B1 a B2. Bohužel systém rozdělování u pár případů selhal, takže někteří respondenti vyplňovali shodný vstupní i výstupní test. Jelikož by chybně vyplněné stejné testy neměly totožnou vypovídající hodnotu, nebyly zařazeny do dat porovnávajících grafů. Ačkoli se výrazně liší počet respondentů, kteří vyplňovali vstupní test, od počtu lidí, kteří vyplňovali test výstupní, predikce kvality je stále stejná.

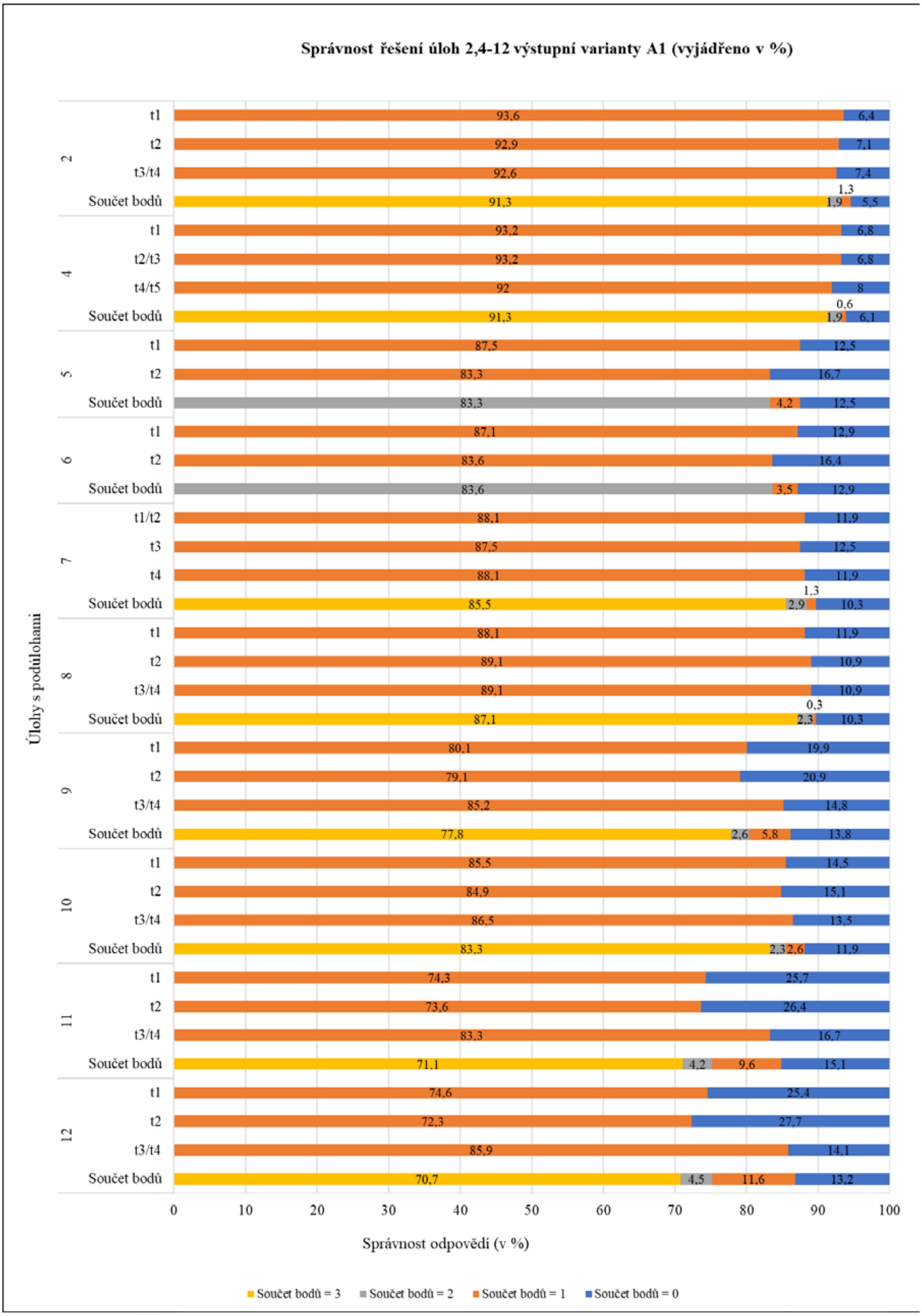
7.3.1 Počet získaných bodů u jednotlivých úloh

Grafy 14 a 15 vykazují součet získaných bodů za jednotlivé úlohy v konkrétních fázích testování verze A1. Ve všech variantách je možné postřehnout snižování procent maximálního počtu bodů se vzrůstajícím číslem úlohy, což naznačuje vzestupující náročnost úloh. Grafy 33 – 38 ukazující postup zbývajících variant testu lze nalézt v příloze.

Při porovnání dvojic vstupních a výstupních testů jednodušších variant A1 a A2, lze podotknout, že výkyvy procentuálního zastoupení nejvyššího počtu bodů, jsou ve většině případů minimální. Ačkoli u vstupních variant má nepatrně lepší výsledky verze A2, naopak u výstupních verzí převažují maximální hodnoty u varianty A1. Tato informace nejenom naznačuje, že verze byly podobně obtížné, ale zároveň poukazuje na lepší znalosti jedné skupiny respondentů.



Graf 14: Správnost řešení úloh 2, 4-12 vstupní varianty A1 (v %)



Graf 15: Správnost řešení úloh 2, 4-12 výstupní varianty A1 (v %)

Výraznější rozdíly lze pozorovat mezi pretesty a post-testy obou dvojic verzí A1 a A2. Výstupná data vykazují nárůst počtu bodů oproti vstupním variantám, což predikuje správné koncipování vzdělávacího kurzu. Zlepšení je viditelné nejenom na snížení počtu procent u lidí, kteří za konkrétní úlohu získali nula bodů, ale zároveň na nárůstu maximálního počtu bodů. Tento poznatek ukazuje, že účastníci, kteří výzkum dokončili, dokázali lépe řešit i náročnější úlohy a chybovost už nebyla výrazněji odstupňovaná. U většiny úloh lze pozorovat nepatrné snížení i v kategoriích, jejichž součet je roven jednomu či dvěma bodům. Na základě snížení počtu procent je možné předpokládat, že pro respondenty se staly úlohy pochopitelnější, díky čemuž lépe zvládali vyřešit celou úlohu. Vyšší počet procent je však znatelný v kategorii, kde je součet bodů roven jedné.

Z toho lze usuzovat, že v případě nepochopení úlohy se respondenti snažili nalézt alespoň jednu podúlohu, ve které by uspěli. Při porovnání dat s grafem prezentující správnost řešení jednotlivých podúloh lze podotknout, že respondenti nejméně chybovali při určování velikosti hledaných částí pomocí zlomku. Snížená chybovost byla nejspíše ovlivněna nižší počtem známých zlomků, takže je možné, že někteří respondenti správnou odpověď uhodli bez většího porozumění souvislostí.

V náročnějších testech B1 a B2 představovaly rozdíly v procentuálním zastoupení maximálního počtu bodů výraznější diferenci. Při porovnání dvojic vstupních testů B1 a B2 a následně dvojice výstupních verzí B1 s B2, lze vidět, že u většiny úloh vykazují výsledky podobné hodnoty s menšími odchylkami okolo šesti procent. Pouze u tří úloh přesahuje rozdíl hranici deseti procent. Vstupní i výstupní varianta B2 jasně dominuje v úlohách číslo 6 a 11, ve kterých má vždy alespoň o dvanáct procent více než test B1. U verze B1 má největší podíl na nižším počtu bodů určení části pomocí zlomku a následně vypočtení velikosti části zadané zlomkem. V testu B2 prezentuje nejvyšší chybovost také vyjádření části pomocí zlomku, ale následné rozdělení chyb nemá přesné pořadí.

Ve výstupní verzi převyšuje B2 variantu B1 o 14 % v úloze číslo osm, ve které bylo určování velikosti zlomku opět spojeno s nejnižším počtem chybných odpovědí. V testu B1 jsou respondenti výrazně úspěšnější pouze v desáté úloze vstupní varianty, kde diference překračuje 13 %. V desáté úloze nejvíce respondentů nedokázalo určit velikosti zlomků, které museli počítat s desetinami u verze B1 a s patnáctinami v testu B2.

Jelikož účastníci výzkumu vyplňovali každou verzi právě jednou, jsou následné poznatky prezentovány pro možné kombinace testů B1 a B2. Při porovnání pretestů s post-testy B1 a B2 lze opět určit nárůst procentuálního podílu v kategorii s nejvyšším počtem bodů a zároveň ke snížení podílu nulového součtu. Ačkoli rozdíl v nejnižší kategorii prezentoval zlepšení i o deset procent, nemohlo se vyrovnat nárůstu procent v kategorii, kde byl součet roven čtyřem. Rozdíl u posledních úloh přesahoval dokonce dvacet procent, tedy pětinu z celku.

U varianty, která pracuje se vstupním testem B1 a výstupním testem B2 lze vidět nejvýraznější rozdíly v úlohách číslo osm, jedenáct a dvanáct. V osmé úloze nedokázali respondenti verze B1 dopočítat třetí část cesty, kterou měli určit jak číselně, tak zlomkem. Podobně jako v desáté úloze se v jedenácté a dvanácté úloze ukázalo jako nejvýraznější problém vyjádření části pomocí zlomku u obou testů. Nicméně zatímco u verze B1 představovala chybovost hodnotu vyšší jak 50 %, u verze B2 nebyla překročena hranice 40 %.

Při porovnání kombinace počáteční verze B2 a závěrečné verze B1 je na první pohled viditelný nižší výsledek rozdílných hodnot a v jedenácté úloze má výstupní varianta dokonce méně procent v kategorii s maximálním součtem bodů. V této úloze nedokázali respondenti určit část s číslem 35 ve jmenovateli. Naopak největší nárůst byl zaznamenán v desáté úloze, kde výstupní verze měla více jak o 20 % vyšší zastoupení v kategorii sesbíraných čtyř bodů. Podobně jako v jedenácté úloze verze B1 nastal u testu B2 problém v určení části celku pomocí zlomku, kde ve jmenovateli byly patnáctiny.

Všechny možné kombinace mezi vyplňovanými testy názorně ukazují lepší výsledky u výstupních testů, které prezentují úspěch a zaručují kvalitu kurzu. Jelikož však množství zpracovávaných dat nebylo totožné, budou porovnávány ještě výsledky vybraných respondentů, kteří správně vyplnili obě verze buď jednodušší nebo naopak náročnější varianty testu.

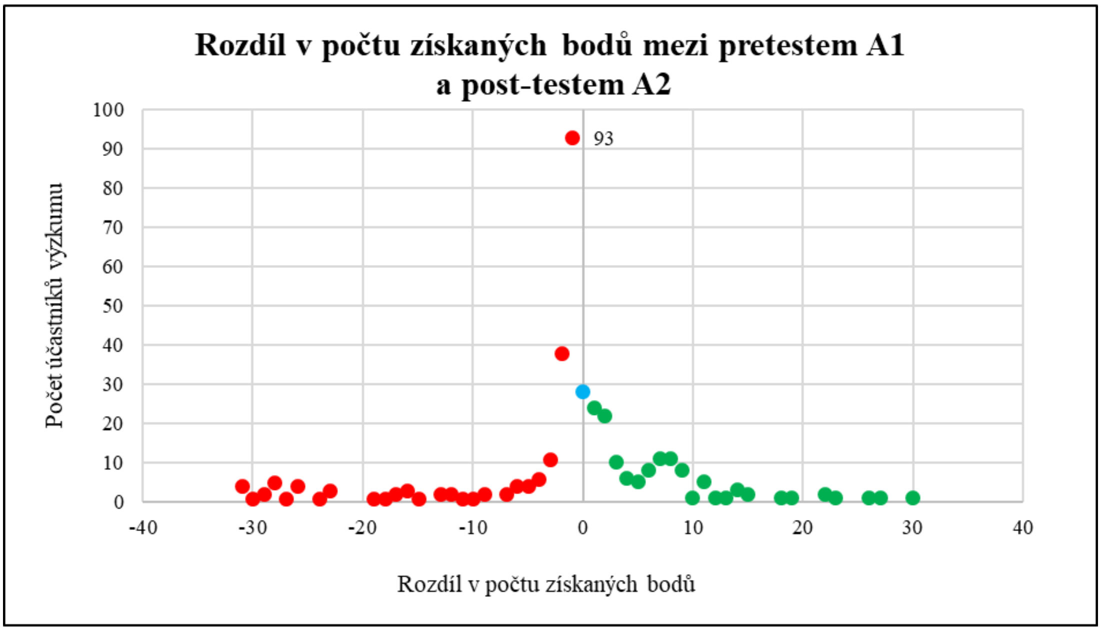
7.3.2 Rozdíl počtu bodů mezi vstupními a výstupními testy

V grafech číslo 16, 17, 39 a 40 (grafy 39 a 40 lze nalézt v příloze) se ukazuje rozdíl počtu bodů získaných účastníky, kteří daný výzkum započali a zároveň vyplnili správný výstupní test, tedy prošly celým kurzem. Rozdíl hodnot tvoří i body z ukázkových úloh jedna a tři, protože i jejich vyplnění prozrazuje, jak respondent k testům přistupuje. U varianty, kde respondenti vyplňovali vstupní verzi A1 a závěrečnou variantu A2, je zřejmé, že nejvíce lidí ve výstupním testu získalo o 1 bod méně než u vstupního testu. Celkové rozložení ukazuje, že 195 respondentů získalo více bodů u vstupního testu, 28 účastníkům se výsledný počet bodů nezměnil a 126 řešitelů se zlepšilo alespoň o jeden bod ve výstupním testu. Tato dvojice testů prezentuje jediný záporný výsledek kurzu. Všechny zbývající kombinace, včetně náročnějších testů, vykazují vyšší počet kladných hodnot, které dokazují vyšší počet bodů u výstupního testu.

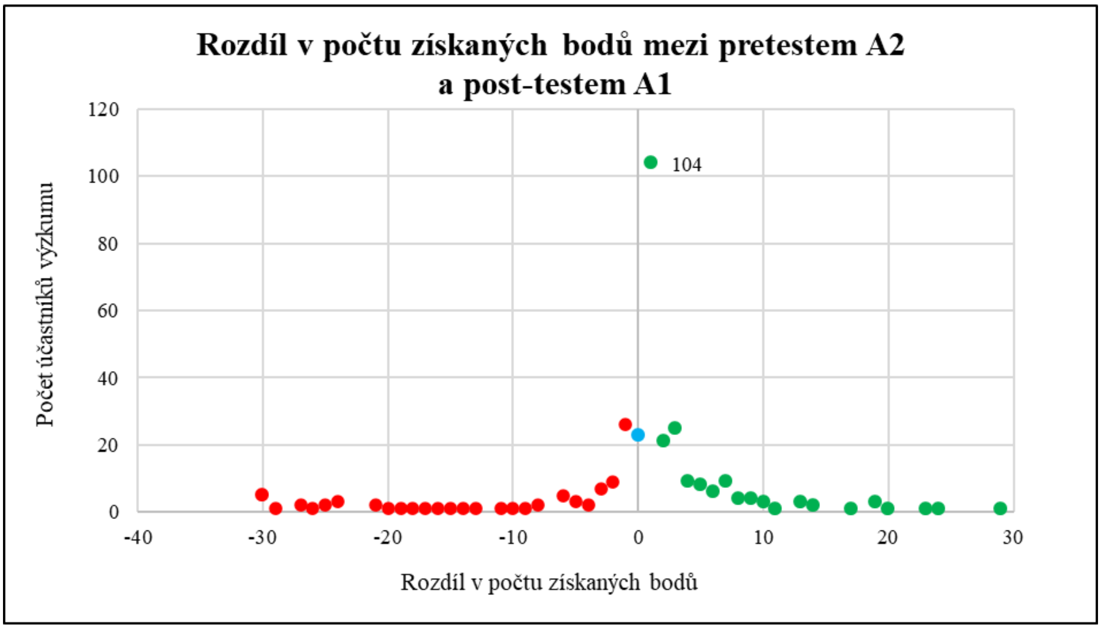
Rozdíl získaných bodů jednotlivých respondentů se nejčetněji pohybuje v rozmezí deseti hodnot, jejímž středem je nula. Podíl účastníků se vstupním testem B1 nebo B2, kteří se nacházeli v rozmezí pěti bodů do kladné i záporné části od nuly, se pohybuje okolo 60 %, zatímco u vstupních testů A1 i A2 přesahuje 70 % vyplňujících. Tyto hodnoty ukazují, že většina respondentů neudělala žádný výrazný posun ve vědomostech, tedy že se nepatrně zhoršili či zlepšili. Při rozšíření posuzované škály na rozpětí dvaceti hodnot se středem v nule, narůstá procentuální zastoupení u náročnějších testů na cca 77 % a u variant A1 a A2 přesahuje rozmezí 80 %. Z těchto dat vyplývá, že pouze čtvrtina či pětina dat představují odlehlejší hodnoty, které poukazují na výraznější zlepšení nebo naopak pochybení.

U vyššího rozdílu hodnot, je možné se ptát, zda účastníci druhý test vůbec vyplňovali, zvláště v případech, kdy ve vstupním testu získali respondenti výrazně více bodů než v závěrečném. Z toho důvodu je dobré se zaměřit na respondenty, kterým kurz pomohl a dosáhli lepších výsledků. Nejvyšší i nejnižší podíl kladných hodnot představují kombinace mezi jednoduššími variantami testu. Zatímco dvojice s počátečním testem A2 prezentuje zastoupení kladných hodnot 66,5 %, kombinace s pretestem A1 vykazuje pouze 36 %, tedy méně jak polovinu. Zde je však nutné podotknout, že v testu A1 bylo možné nasbírat 34 bodů, zatímco ve verzi A2 pouze 33 bodů z důvodu neodpovídajícího počtu podúloh. V obtížnějších verzích byla nejčastějším bodem nula, přesto u verze s počátečním testem B1 se zlepšilo 55 % respondentů. Druhá kombinace s výraznějším zastoupením nulové hodnoty, prezentuje zlepšení u 45 % účastníků výzkumu.

Na základě porovnání výsledného součtu bodů s grafy ukazující rozdíl v počtu bodů, lze považovat kurz za úspěšný, protože respondenti, kteří jej dokončili, dosáhli ve většině případů pozitivních výsledků. Grafy ukazují, že účastníci, kteří měli zájem se vzdělávat, měli dostatečné množství potřebných informací a materiálů napomáhajících k upevnění informací a k rozšiřování vědomostí.



Graf 16: Rozdíl v počtu získaných bodů mezi pretestem A1 a post-testem A2



Graf 17: Rozdíl mezi pretestem A2 a post-testem A1

7.3.3 Shrnutí

Většina grafů vykazovala vyšší zastoupení kladných bodů při porovnání výstupní varianty, což dosvědčuje, že kurz mnoha zájemcům pomohl k pochopení významu celku a jeho částí. Výsledky testu ukazují, že účastníci, kteří měli zájem o zlepšení a pochopení látky, mohli využít dostatečného množství prostředků napomáhající k posílení jejich vědomostí. Pokud však zájem nebyl a účastníci nevyvinuli žádnou potřebnou snahu, výsledek se samozřejmě nedostavil.

Kombinace testů, u kterých vyšel záporný výsledek z rozdílu porovnávaných testů, často obsahovaly nepochopitelnou diferenci vytvořenou autory výzkumu. Jeden výrazný rozdíl prezentuje neshodný počet podúloh, který způsobuje nepoměr mezi maximálními součty získaných bodů u variant A1 a A2. Zároveň náročnější varianty testů B1 a B2 nejsou shodně obtížné, protože u verze B1 není zajištěna gradovanost úloh a jako jediný test obsahuje nejnáročnější úlohu v celém výzkumu. Ačkoli měl kurz mnohé nedostatky, výsledky ukazují, že i přesto splnil kurz svůj cíl a mnohým respondentům se povedlo rozšířit své znalosti.

Závěr

Výuka práce se zlomky má za sebou dlouhou historii, protože mezi první kultury, které se zlomky zabývaly, patřily civilizace Mezopotámie či starověkého Egypta datované k 4. tis. př. Kr. Využití zlomků v té době spočívalo především v zemědělství či spravedlivému rozdělování pozemků nebo potravin. Žáci se museli učit zpaměti výsledky operací, které byly zaznamenány v podrobně vypočtených tabulkách. V dnešní době je naopak snahou žákům látku představit co nejpochopitelněji a nejnázorněji, aby si jednotlivé postupy mohli odvodit a nikoli si je složitě vštěpovat do paměti. Snaha o názorné představení zlomků byla potvrzena rozborem učebnic ze tří různých nakladatelství. Jednotlivé učebnice se dosti lišily, nicméně hlavní cíl měly totožný – chtěly žákům co nejlépe představit učivo zlomků a doufaly, že učebnice se stanou základem pochopení důležité kapitoly matematiky.

Vnímáním a pochopením zlomků žáky se zabýval vzdělávací kurz vytvořený společností H–edu, jehož výsledky jsou zpracovány v této diplomové práci. Zhodnocení výsledků vzdělávacího kurzu však nesplnilo jenom zadaný cíl práce, ale ukázalo i širokou škálu možného využití jednotlivých informací. Vize vzdělávacího kurzu, která chtěla zdarma pomoci žákům poškozených náročnou situací Covid-19, byla naplněná, ačkoli možná v menším měřítku, než autoři očekávali. Vstupní test provedlo více jak 9000 zájemců, nicméně závěrečnou fází prošla pouhá šestina účastníků. Ačkoli u většiny respondentů byl zaznamenán alespoň minimální posun, našli se i respondenti, kteří u výstupní varianty získali méně bodů než u vstupního testu. Tento nedostatek však mohl být způsoben nesprávným rozložením úloh v jednotlivých testech či menší snahou respondentů. Nicméně lze předpokládat, že kurz byl prospěšný i pro žáky, kteří nevyplnili závěrečný test, protože mohli volně využít připravených materiálů a odborné pomoci lektorů k posunutí svých znalostí v učivu o zlomcích.

Odlišné závěrečné výstupy mohly být ovlivněny skladbou a strukturou jednotlivých úloh. Ve výzkumu bylo potvrzeno, že jednodušší verze se velmi lišily od obtížnějších a testovaly respondenty v pouze základních vědomostech v oblasti zlomků. Náročnější verze představovaly soubor úloh, který nejprve ověřoval stěžejní znalosti a následně rozšířil zkoumanou oblast i do náročnějších témat. Gradovanost úloh v jednotlivých testech se nejlépe podařilo vytvořit v testu B2, ve kterém zřetelně narůstala chybovost s vyšším číslem jednotlivých úloh pouze s menšími odchylkami.

Naopak největší diference byly zaznamenány v testu B1. Verze B1 vykazovala nerovnoměrný nárůst chybovosti s výraznými výkyvy procentuálního zastoupení chybných odpovědí podpořeného množstvím potřebného času na vyplnění. Z toho důvodu jsou pro posouzení účinnosti kurzu vhodné spíše varianty A1 a A2. Jednodušší verze testu však obsahují menší chybu v rozdílném počtu podúloh, za které mohli respondenti získat body.

Jednotlivé testy se skládaly z deseti úloh a dvou ukázkových úloh. Zatímco v snadnějších verzích testů byly úkoly pouze přeházené, náročnější varianty obsahovaly minimální počet shodných úloh, ačkoli princip řešení byl u konkrétních čísel úloh obdobný. Schopnost vypočítat jednotlivé úlohy nezávisela pouze na vědomostech respondentů, ale i na zmíněné gradovanosti a struktuře úloh. Ve výsledcích lze rozpoznat narušení kontinuity testu a úlohy, ve kterých museli respondenti počítat s nekmenovými zlomky či nedekadickými čísly. V takových případech se zvýšila chybovost a účastníci kurzu měli větší problém se správným zodpovězením úlohy. Vyšší procento nesprávných výsledků bylo zaznamenáno i v úkolech, ve kterých pořadí úloh nekorespondovalo s posloupností zadaných informací. V náročnějších testech ovlivňoval úspěch rozdíl v přehlednosti vymezení hledaných částí. Na základě odlišných příběhů v úlohách byly jednotlivé části celku rozdílně pochopitelné.

Dále práce zaznamenává nesprávné odpovědi, které jsou seřazeny podle četnosti. U nejpočetnějších chyb byla v práci snaha vysvětlit a vyhledat původ jejich vzniku. Řešitelé jednodušší verze kurzu více odhadovali, jak by výsledek mohl vypadat, čímž vytvořili širokou škálu odlišných odpovědí. U náročnější verze bylo zaznamenáno méně rozdílných chyb, protože pokud respondenti neuměli úlohu vyřešit, spíše úlohu přeskočili a pokračovali ve výpočtech u následujícího úkolu.

U obou obtížností řešitelé mnohdy chybovali pro nedostatečné pochopení vztahu mezi celkem a jeho částmi. Zároveň byli respondenti méně úspěšní u čísel, která jsou v běžném životě méně využívaná. Naopak lepší výsledky prezentovaly úlohy s dekadickými čísly a kmenovými zlomky. V jednodušších verzích se respondenti snažili vyřešit úlohu na základě zadaných čísel, která mezi sebou často bez větších souvislostí násobili, dělili, sčítali či odčítali. Nesprávný postup byl navíc doplněn chybnými výpočty, což poukazuje na nápadné mezery ve vědomostech. Někteří účastníci výzkumu spatřovali výrazný problém v porovnávání velikostí zlomků, ačkoli zlomky měly mnohdy shodného jmenovatele.

Dostatečné pochopení a vžití práce se zlomky lze považovat za zcela zásadní nejenom pro další rozvoj matematických vědomostí a dovedností, ale i pro běžný život. Lidé, kteří ovlivňují vývoj matematických znalostí u mladší populace, by proto měli dávat důraz na dostatečné pochopení a procvičení. Výsledky této práce prezentují oblasti častých nedostatečných znalostí a ukazují místa možného vzniku chyb. Získané záznamy mohou pomoci učitelům při přípravách hodin či autorům učebnic matematiky k zamezení chybných myšlenkových postupů. Poznatky z této práce mohou zároveň přispět i k renovaci některých učebních postupů či k povzbuzení častějšího využívání matematických pomůcek pro názornější představu problému.

Seznam použitých informačních zdrojů

1) BERÁNEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z algebry*. Brno: Masarykova univerzita, 2012. ISBN 978-80-210-5765-4.
2) HAMMEROVÁ, Tereza. *Didaktická vybavenost učebnic matematiky pro 6. ročník ZŠ a příslušný ročník víceletého gymnázia*. Brno, 2015. Diplomová práce. Masarykova univerzita. Vedoucí práce Blažková.
3) HAYLOCK, Derek a Fiona THANGATA. *Key concepts in teaching primary mathematics.* London: Sage, 2008. ISBN 9781412934091. A. Hófler, Didaktik des mathem. Unterrichts, University of Michigan Library, 1910
4) H-edu: Šetří čas učitelům. H-edu [online]. 2018 [cit. 2021-11-22]. Dostupné z: https://www.h-edu.cz/o-nas
5) HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika A: Učebnice pro 2.stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: H-mat, 2015. ISBN 978-80-89859-06-1
6) HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika B: Učebnice pro 2.stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: H-mat, 2018. 978-80-89859-10-8
7) HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika C: Učebnice pro 2.stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: H-mat, 2016. ISBN 978-80-89859-23-8
8) HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika D: Učebnice pro 2.stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: H-mat, 2020. ISBN 978-80-898594-5-0
9) *Hejného metoda: Zasloužená radost z poznávání* [online]. Praha: H-mat, 2021 [cit. 2021-5-6]. Dostupné z: https://www.h-mat.cz/
10) HENDL, J. (2004): Přehled statistických metod, Portál, Praha.
11) HENDL, J. (2006): Kvalitativní přístup, Portál, Praha.
12) HRNĚČKOVÁ, Eva. *Závislosti, vztahy a práce s daty na prvním a druhém stupni ZŠ*. České Budějovice, 2016. Bakalářská práce. Jihoměstská univerzita v Českých Budějovicích. Vedoucí práce Štěpánková.

13) CHRÁSKA, Miroslav. *Metody Pedagogického výzkumu: Základy kvantitativního výzkumu*. Praha: Grada Publishing, 2007, 267 s. ISBN 978-80-247-1369-4.

14) KILHAMN, Cecilia. *Making Sense of Negative Numbers* [online]. Gothenburg, 2011 [cit. 2021-03-25]. Dostupné z: http://hdl.handle.net/2077/24151. Doctoral thesis. Göteborgs universitet. Utbildningsvetenskapliga fakulteten University of Gothenburg. Faculty of Education.

15) KŘÍŽOVÁ, Alžběta. *Gradované úlohy v učivu matematiky 2. stupně ZŠ*. Olomouc, 2019. Diplomová práce. Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky.

16) LERL, K.: *Poznámka k metodice obyčejných zlomků*. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, Vol. 69, No Suppl., D 118–D122.

17) Matematika starověkého Egypta. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2021, 29. 8. 2021 [cit. 2021-02-11]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Matematika_starov%C4%9Bk%C3%A9ho_Egypta

18) ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy: Zlomky, celá čísla, racionální čísla*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2020. ISBN 987-80-7196-423-0.

19) OLECKÁ, Ivana a Kateřina IVANOVÁ. *Metodologie vědecko-výzkumné činnosti*. Olomouc: Moravská vysoká škola Olomouc, 2010. ISBN 978-80-87240-33-5.

20) OTRUBOVÁ, Anna. *Řetězové zlomky a jejich aplikace*. Praha, 2014. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta. Vedoucí práce Zdeněk Halas.

21) PAVLÍČKOVÁ, Lenka, Michaela DREXLER a Petra BIDMANOVÁ STRNADOVÁ. *Učebnice matematiky – zkušenosti z praxe pro ZŠ a nižší stupeň gymnázií* [online]. Brno, 2018 [cit. 2021-5-6]. Dostupné z: https://kap.kr-jihomoravsky.cz/uploads/attachment/attachment/attachment_file/4768/Ucebnice_matematiky_pro_ZS_Prezentace.pdf?fbclid=IwAR2YGqXXLp1gCqbfNOYju3qhRjR_TzQzYn6JvSl0OmLgZBLpmQdSX7182p0

22) PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK a Šárka MÜLLEROVÁ. *Matematika pro základní školy: Aritmetika.* Praha: Pedagogické nakladatelství, 2014. ISBN 978-807235-398-9.
23) Schvalovací doložky učebnic. *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy* [online]. Praha: MŠMT, 2021, 1. 4. 2021 [cit. 2021-6-26]. Dostupné z: https://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/schvalovaci-dolozky-ucebnic
24) ŠESTÁKOVÁ, I. *Zlomky ve výuce matematiky*. České Budějovice, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, diplomová práce, 2011
25) Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: NÚV – Národní ústav pro vzdělávání, 2017. [cit. 2021-03-2]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani
26) TICHÁ M., MACHÁČKOVÁ J. *Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice*. *SUMA, JČMF* [online]. 2006 [cit. 2021-04-23]. Dostupné z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Default.aspx?PorZobr=20&PolozkaID=1&ClanekID=188
27) TICHÁ, M., MACHÁČKOVÁ, J. *Rozvoj pojmu zlomek ve vyučovaní matematice*. Studijní materiál k projektu Operační program rozvoj lidských zdrojů. *Praha: JCMF, 2009.*
28) TRČKOVÁ, D. *Konstruktivistické pojetí výuky v hodinách matematiky*. Brno, Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky, 2021.
29) TRČKOVÁ, D. *Porovnání tradiční výuky matematiky a výuky Hejného metodou na 2. stupni ZŠ*. Brno, Masarykova univerzita, 2017.
30) VEJMELKOVÁ, E. *Zlomky – některé obtíže žáků a didaktické přístupy učitelů*. Praha, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra didaktiky matematiky a didaktiky matematiky, 2014.
31) VLKOVÁ, J. *Zlomky v učivu matematiky 1. stupně ZŠ*. Plzeň západočeská univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra Matematiky, fyziky a technické výchovy, 2017.
32) VYMAZALOVÁ, H. *Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty.* Praha: Český egyptologický ústav FF UK, 2006.

Seznam obrázků

Seznam grafů

Přílohy

Příloha 1 – Soupis jednotlivých variant úloh

<u>Varianta A1</u>

1) Ukázková úloha:

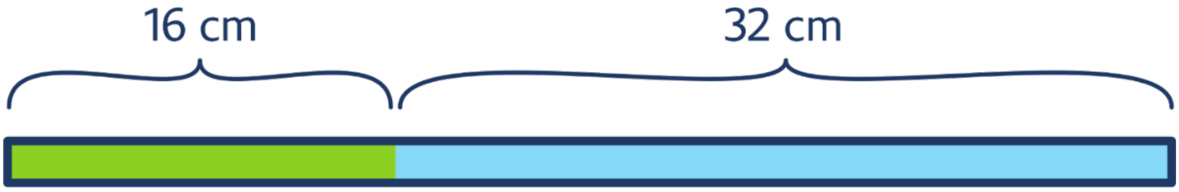
   Tyč je natřena dvěma barvami. Celá tyč je dlouhá 48 cm. Zelená část je 16 cm. Modrá část je 32 cm. Zelená část je 1/3 tyče. Modrá část je 2/3 tyče.

   Budeš vyplňovat žlutá pole čísly. Můžeš je vepsat pomocí klávesnice nebo šipky na kraji políčka, pokud ti je prohlížeč nabídne.

   t1: "t1=32"

   t2: "t2/t3=1/3"

   t3: "t4/t5=2/3"



2) Délka celé tyče je 50 cm. Délka modré části je 25 cm. Zelená část tyče je dlouhá "t1" cm. Modrá část je "t2"/"t3" celé tyče. Zelená část je "t4"/"t5" celé tyče.

   t1: "t1=25"

   t2: "t2/t3=1/2"

   t3: "t4/t5=1/2"

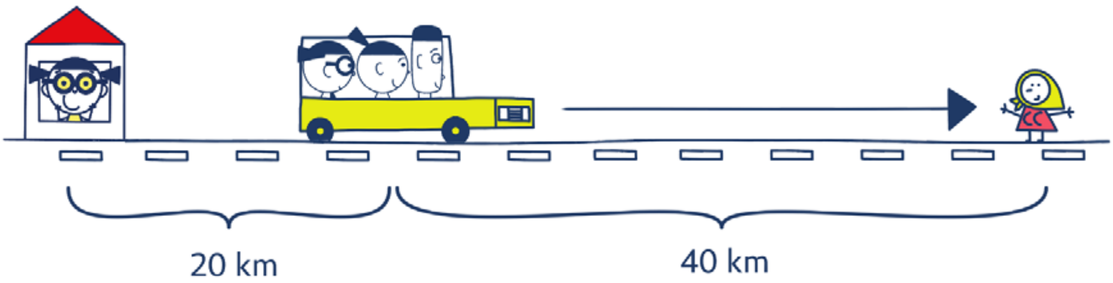
3) Ukázková úloha

Jedeme k babičce. Celá cesta je dlouhá 60 km. Ujeli jsme už 20 km. Zbývá nám 40 km. Ujeli jsme už 1/3 celé cesty. Zbývá nám ujet 2/3 celé cesty.

t1: "t1=40"

t2: "t2/t3=1/3"

t3: "t4/t5=2/3"



4) Jedeme k babičce. Celá cesta je dlouhá 80 km. Ujeli jsme už 40 km. Zbývá nám "t1" km. Ujeli jsme už t2/t3 celé cesty. Zbývá nám ujet t4/t5 celé cesty.

t1: "t1=40"

t2: "t2/t3=1/2"

t3: "t4/t5=1/2"

5) Délka tyče je 60 cm. Modrá část je 1/5 celé tyče. Modrá část měří t1 cm. Zelená část měří "t2" cm.

t1: "t1=12"

t2: "t2=48"

6) Jedeme k babičce. Celá cesta je dlouhá 70 km. Ujeli jsme už 1/5 celé cesty. Ujeli jsme už "t1" km. Zbývá nám "t2" km.

t1: "t1=14"

t2: "t2=56"

7) Délka modré části tyče je 60 cm. Zelená část je ½ celé tyče. Modrá část je "t1"/"t2" celé tyče. Celá tyč měří "t3" cm. Zelená část měří "t4" cm.

t1: "t1/t2=1/2"

t2: "t3=120"

t3: "t4=60"

8) Jedeme k babičce. Ujeli jsme už ½ celé cesty. Zbývá nám ujet 50 km. Celá cesta je dlouhá "t1" km. Ujeli jsme už "t2" km. Zbývá nám ujet "t3"/"t4" celé cesty.

t1: "t1=100"

t2: "t2=50"

t3: "t3/t4=1/2"

9) Délka zelené části tyče je 40 cm. Modrá část je ¾ celé tyče. Celá tyč měří "t1" cm. Modrá část měří "t2" cm. Zelená část je "t3"/"t4" celé tyče.'

t1: "t1=160"

t2: "t2=120"

t3: "t3/t4=1/4"

10) Jedeme k babičce. Ujeli jsme už ¾ celé cesty. Zbývá nám ujet 50 km. Celá cesta je dlouhá "t1" km. Ujeli jsme už "t2" km. Zbývá nám ujet "t3" /"t4" celé cesty.

t1: "t1=200"

t2: "t2=150"

t3: "t3/t4=1/4"

11) Délka zelené části tyče je 60 cm. Modrá část tyče je 3/5 celé tyče. Celá tyč měří "t1" cm. Modrá část měří "t2" cm. Zelená část je "t3" /"t4" celé tyče.'

t1: "t1=150"

t2: "t2=90"

t3: "t3/t4=2/5"

12) Jedeme k babičce. Ujeli jsme už 3/5 celé cesty. Zbývá nám ujet 48 km. Celá cesta je dlouhá "t1" km. Ujeli jsme už "t2" km. Zbývá nám ujet "t3"/"t4" celé cesty.'

t1: "t1=120"

t2: "t2=72"

t3: "t3/t4=2/5"

Varianta A2

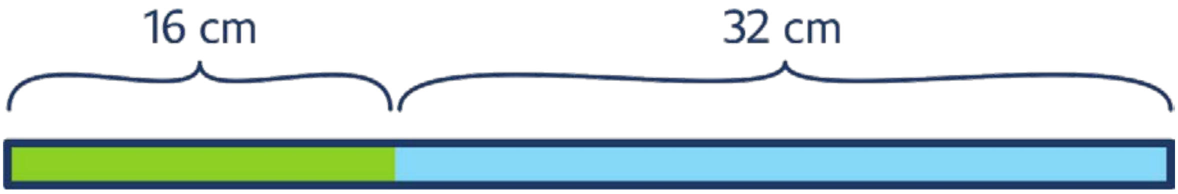
1) Ukázková úloha

   Tyč je natřena dvěma barvami. Celá tyč je dlouhá 48 cm. Zelená část je 16 cm. Modrá část je 32 cm. Zelená část je 1/3 tyče. Modrá část je 2/3 tyče. Budeš vyplňovat žlutá pole čísly. Můžeš je vepsat pomocí klávesnice nebo šipky na kraji políčka, pokud ti je tvůj prohlížeč nabídne.

   t1: "t1=32"

   t2: "t2/t3=1/3"

   t3: "t4/t5=2/3"



2) Délka celé tyče je 40 cm. Délka modré části je 20 cm. Zelená část tyče je dlouhá "t1" cm. Modrá část je "t2"/"t3" celé tyče. Zelená část je "t4"/"t5" celé tyče.

   t1: "t1=20"

   t2: "t2/t3=1/2"

   t3: "t4/t5=1/2"

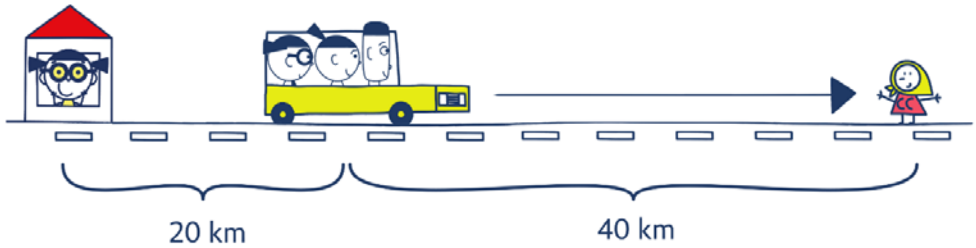
3) Ukázková úloha

   Jedeme k babičce. Celá cesta je dlouhá 60 km. Ujeli jsme už 20 km. Zbývá nám 40 km. Ujeli jsme už 1/3 celé cesty. Zbývá nám ujet 2/3 celé cesty.

   t1: "t1=40"

   t2: "t2/t3=1/3"

   t3: "t4/t5=2/3"



4) Jedeme k babičce. Celá cesta je dlouhá 60 km. Ujeli jsme už 30 km. Zbývá nám "t1" km. Ujeli jsme už "t2"/"t3" celé cesty.

   t1: "t1=30"

   t2: "t2/t3=1/2"

5) Délka tyče je 70 cm. Modrá část je 1/5 celé tyče. Modrá část měří "t1" cm. Zelená část měří "t2" cm.

   t1: "t1=14"

   t2: "t2=56"

6) Jedeme k babičce. Celá cesta je dlouhá 60 km. Ujeli jsme už 1/5 celé cesty. Ujeli jsme už "t1" km. Zbývá nám "t2" km.

   t1: "t1=12"

   t2: "t2=48"

7) Délka modré části tyče je 50 cm. Zelená část je ½ celé tyče. Modrá část je "t1"/"t2" celé tyče. Celá tyč měří "t3" cm. Zelená část měří "t4" cm.

   t1: "t1/t2=1/2"

   t2: "t3=100"

   t3: "t4=50"

8) Jedeme k babičce. Ujeli jsme už ½ celé cesty. Zbývá nám ujet 60 km. Celá cesta je dlouhá "t1" km. Ujeli jsme už "t2" km. Zbývá nám ujet "t3"/"t4" celé cesty.

t1: "t1=120"

t2: "t2=60"

t3: "t3/t4=1/2"

9) Délka zelené části tyče je 50 cm. Modrá část je ¾ celé tyče. Celá tyč měří "t1" cm. Modrá část měří "t2" cm. Zelená část je "t3"/"t4" celé tyče.

t1: "t1=200"

t2: "t2=150"

t3: "t3/t4=1/4"

10) Jedeme k babičce. Ujeli jsme už ¾ celé cesty. Zbývá nám ujet 40 km. Celá cesta je dlouhá "t1" km. Ujeli jsme už "t2" km. Zbývá nám ujet "t3"/"t4" celé cesty.

t1: "t1=160"

t2: "t2=120"

t3: "t3/t4=1/4"

11) Délka zelené části tyče je 48 cm. Modrá část tyče je 3/5 celé tyče. Celá tyč měří "t1" cm. Modrá část měří "t2" cm. Zelená část je "t3"/"t4" celé tyče.

t1: "t1=120"

t2: "t2=72"

t3: "t3/t4=2/5"

12) Jedeme k babičce. Ujeli jsme už 3/5 celé cesty. Zbývá nám ujet 60 km. Celá cesta je dlouhá "t1" km. Ujeli jsme už "t2" km. Zbývá nám ujet "t3"/"t4" celé cesty.

t1: "t1=150"

t2: "t2=90"

t3: "t3/t4=2/5"

Varianta B1

1) Ukázková úloha

Tyč je natřena třemi barvami. Délka celé tyče je 50 cm. Délka zelené části je 30 cm. Délka modré části je 15 cm. Délka červené části je 5 cm. Zelená část je 3/5 celé tyče. Modrá část je 3/10 celé tyče. Červená část je 1/10 celé tyče.

Budeš vyplňovat žlutá pole čísly. Můžeš je vepsat pomocí klávesnice nebo šipky na kraji políčka, pokud ti je tvůj prohlížeč nabídne.

t1: "t1=5"

t2: "t2/t3=3/5"

t3: "t4/t5=3/10"

t4: "t6/t7=1/10"

2) Délka celé tyče je 40 cm. Délka zelené části je 20 cm. Délka modré části je 10 cm. Délka červené části je "t1" cm. Modrá část je "t2"/"t3" celé tyče. Zelená část je "t4"/"t5" celé tyče. Červená část je "t6"/"t7" celé tyče.

t1: "t1=10"

t2: "t2/t3=1/4"

t3: "t4/t5=1/2"

t4: "t6/t7=1/4"

3) Ukázková úloha

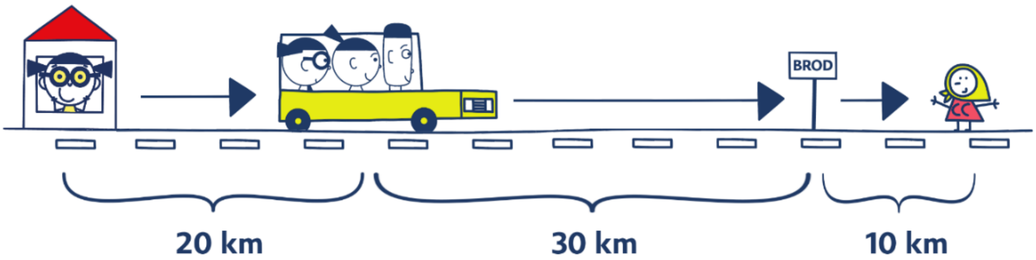
Jedeme k babičce, v Brodu přistoupí do auta teta. Celá cesta je dlouhá 60 km. Ujeli jsme už 20 km. K Brodu nám zůstává 30 km. Od Brodu k babičce je to 10 km. Ujeli jsme 1/3 celé cesty. K Brodu nám zůstává 1/2 celé cesty. Od Brodu k babičce je 1/6 celé cesty.

t1: "t1=10"

t2: "t2/t3=1/3"

t3: "t4/t5=1/2"

t4: "t6/t7=1/6"



4) Jedeme k babičce, v Brodu přistoupí do auta teta. Celá cesta je dlouhá 60 km. Ujeli jsme už 30 km. K Brodu nám zůstává 15 km. Od Brodu k babičce je to "t1" km. Ujeli jsme už "t2"/"t3" celé cesty. K Brodu nám zůstává "t4"/"t5" celé cesty. Od Brodu k babičce je to "t6"/"t7" celé cesty.'

t1: "t1=15"

t2: "t2/t3=1/2"

t3: "t4/t5=1/4"

t4: "t6/t7=1/4"

5) Délka celé tyče je 60 cm. Modrá část je ½ celé tyče. Červená část je 1/6 celé tyče. Modrá část je dlouhá "t1" cm. Červená část je dlouhá "t2" cm. Zelená část je dlouhá "t3" cm. Zelená část je "t4"/"t5" celé tyče.

t1: "t1=30"

t2: "t2=10"

t3: "t3=20"

t4: t4/t5=1/3"

6) Jedeme k babičce, v Brodu přistoupí do auta teta. Celá cesta je dlouhá 90 km. Ujeli jsme už 1/3 celé cesty. K Brodu nám zůstává ½ celé cesty. Od Brodu k babičce je to "t1" km. Ujeli jsme už "t2" km. K Brodu nám zůstává "t3" km. Od Brodu k babičce je to "t4"/"t5" celé cesty.

   t1: "t1=15"

   t2: "t2=30"

   t3: "t3=45"

   t4: "t4/t5=1/6"

7) Celá tyč je dlouhá 50 cm. Modrá část je dlouhá 7/10. Délka zelené části je 10 cm. Modrá část je dlouhá "t1" cm. Červená část je dlouhá "t2" cm. Zelená část je "t3"/"t4" celé tyče. Červená část je "t5"/"t6" celé tyče.

   t1: "t1=35"

   t2: "t2=5"

   t3: "t3/t4=1/5"

   t4: "t5/t6=1/10"

8) Jedeme k babičce, v Brodu přistoupí do auta teta. Celá cesta je dlouhá 60 km. Ujeli jsme už 10 km. K Brodu nám zůstává 7/12 celé cesty. K Brodu nám zůstává "t1" km. Od Brodu k babičce je to "t2" km. Od Brodu k babičce je to "t3"/"t4" celé cesty. Ujeli jsme už "t5"/"t6" celé cesty.

   t1: "t1=35"

   t2: "t2=15"

   t3: "t3/t4=1/4"

   t4: "t5/t6=1/6"

9) Délka modré části je 60 cm. Délka červené části je 20 cm. Zelená část je 1/5 celé tyče. Celá tyč je dlouhá "t1" cm. Modrá část je "t2"/"t3" celé tyče. Červená část je "t4"/"t5" celé tyče. Zelená část je dlouhá "t6" cm.

   t1: "t1=100"

   t2: "t2/t3=3/5"

   t3: "t4/t5=1/5"

   t4: "t6=20"

10) Jedeme k babičce, v Brodu přistoupí do auta teta. Ujeli jsme už 10 km. K Brodu nám zůstává 70 km. Od Brodu k babičce je to 1/5 celé cesty. Celá cesta je dlouhá "t1" km. Ujeli jsme už "t2"/"t3" celé cesty. K Brodu nám zůstává "t4"/"t5" celé cesty. Od Brodu k babičce je to "t6" km.

   t1: "t1=100"

   t2: "t2/t3=1/10"

   t3: "t4/t5=7/10"

   t4: "t6=20"

11) Délka modré části je 55 cm. Délka červené části je 15 cm. Zelená část je 3/5 celé tyče. Celá tyč je dlouhá "t1" cm. Modrá část je "t2"/"t3" celé tyče. Červená část je "t4"/"t5" celé tyče. Zelená část je dlouhá "t6" cm.

   t1: "t1=175"

   t2: "t2/t3=11/35"

   t3: "t4/t5=3/35"

   t4: "t6=105"

12) Jedeme k babičce, v Brodu přistoupí do auta teta. Ujeli jsme už 15 km. K Brodu nám zůstává 25 km. Od Brodu k babičce je to 3/5 celé cesty. Celá cesta je dlouhá "t1" km. Ujeli jsme už "t2"/"t3" celé cesty. K Brodu nám zůstává "t4"/"t5" celé cesty. Od Brodu k babičce je to "t6" km.

t1: "t1=100"

t2: "t2/t3=3/20"

t3: "t4/t5=5/20"

t4: "t6=60"

Varianta B2

1) Ukázková úloha

   Tyč je natřena třemi barvami. Délka celé tyče je 50 cm. Délka zelené části je 30 cm. Délka modré části je 15 cm. Délka červené části je 5 cm. Zelená část je 3/5 celé tyče. Modrá část je 3/10 celé tyče. Červená část je 1/10 celé tyče. Budeš vyplňovat žlutá pole 0 čísly. Můžeš je vepsat pomocí klávesnice nebo šipky na kraji políčka, pokud ti je tvůj prohlížeč nabídne.

t1: "t1=5"

t2: "t2/t3=3/5"

t3: "t4/t5=3/10"

t4: "t6/t7=1/10"

2) Délka celé tyče je 60 cm. Délka zelené části je 30 cm. Délka modré části je 15 cm. Délka červené části je "t1" cm. Zelená část je "t2"/"t3" celé tyče. Modrá část je "t4"/"t5" celé tyče. Červená část je "t6"/"t7" celé tyče.

t1: "t1=15"

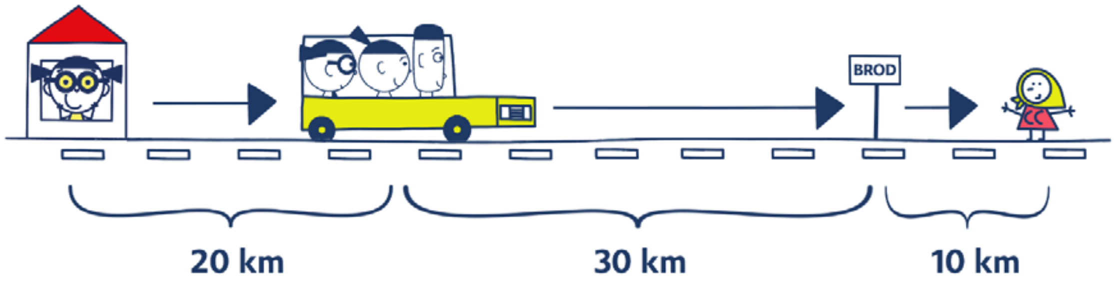
t2: "t2/t3=1/2"

t3: "t4/t5=1/4"

t4: "t6/t7=1/4"

3) Ukázková úloha

Jedeme k babičce, v Brodu přistoupí do auta teta. Celá cesta je dlouhá 60 km. Ujeli jsme už 20 km. K Brodu nám zůstává 30 km. Od Brodu k babičce je to 10 km. Ujeli jsme "1/3 celé cesty. K Brodu nám zůstává 1/2 celé cesty. Od Brodu k babičce je 1/6 celé cesty.



t1: "t1=10"

t2: "t2/t3=1/3"

t3: "t4/t5=1/2"

t4: "t6/t7=1/6"

4) Jedeme k babičce, v Brodu přistoupí do auta teta. Celá cesta je dlouhá 40 km. Ujeli jsme už 20 km. K Brodu nám zůstává 10 km. Od Brodu k babičce je to "t1" km. Ujeli jsme už "t2"/"t3" celé cesty. K Brodu nám zůstává "t4"/"t5" celé cesty. Od Brodu k babičce je to "t6"/"t7" celé cesty.'

t1: "t1=10"

t2: "t2/t3=1/2"

t3: "t4/t5=1/4"

t4: "t6/t7=1/4"

5) Délka celé tyče je 60 cm. Modrá část je 1/3 celé tyče. Červená část je 1/6 celé tyče. Modrá část je dlouhá "t1" cm. Červená část je dlouhá "t2" cm. Zelená část je dlouhá "t3" cm. Zelená část je "t4"/"t5" celé tyče.

t1: "t1=20"

t2: "t2=10"

t3: "t3=30"

t4: "t4/t5=1/2"

6) Jedeme k babičce, v Brodu přistoupí do auta teta. Celá cesta je dlouhá 30 km. Ujeli jsme už ½ celé cesty. K Brodu nám zůstává 1/6 celé cesty. Ujeli jsme už "t1" km. K Brodu nám zůstává "t2" km. Od Brodu k babičce je to "t3" km. Od Brodu k babičce je to "t4"/"t5" celé cesty.'

t1: "t1=15"

t2: "t2=5"

t3: "t3=10"

t4: "t4/t5=1/3"

7) Celá tyč je dlouhá 50 cm. Modrá část je dlouhá 10 cm. Zelená část je 7/10 celé tyče. Zelená část je dlouhá "t1" cm. Červená část je dlouhá "t2" cm. Modrá část je "t3"/"t4" celé tyče. Červená část je "t5"/"t6" celé tyče.

t1: "t1=35"

t2: "t2=5"

t3: "t3/t4=1/5"

t4: "t5/t6=1/10"

8) Jedeme k babičce, v Brodu přistoupí do auta teta. Celá cesta je dlouhá 50 km. Ujeli jsme už 5 km. K Brodu nám zůstává 7/10 celé cesty. K Brodu nám zůstává "t1" km. Od Brodu k babičce je to "t2" km. Ujeli jsme už "t3"/"t4" celé cesty. Od Brodu k babičce je to "t5"/"t6" celé cesty.

t1: "t1=35"

t2: "t2=10"

t3: "t3/t4=1/10"

t4: "t5/t6=1/5"

9) Délka modré části je 20 cm. Délka červené části je 140 cm. Zelená část je 1/5 celé tyče. Celá tyč je dlouhá "t1" cm. Modrá část je "t2"/"t3" celé tyče. Červená část je "t4"/"t5" celé tyče. Zelená část je dlouhá "t6" cm.

t1: "t1=200"

t2: "t2/t3=1/10"

t3: "t4/t5=7/10"

t4: "t6=40"

10) Jedeme k babičce, v Brodu přistoupí do auta teta. Ujeli jsme už 100 km. K Brodu nám zůstává 20 km. Od Brodu k babičce je to 1/5 celé cesty. Celá cesta je dlouhá "t1" km. Ujeli jsme už "t2"/"t3" celé cesty. K Brodu nám zůstává "t4"/"t5"celé cesty. Od Brodu k babičce je to "t6" km.

t1: "t1=150"

t2: "t2/t3=2/3"

t3: "t4/t5=2/15"

t4: "t6=30"

11) Délka modré části je 15 cm. Délka červené části je 25 cm. Zelená část je 3/5 celé tyče. Celá tyč je dlouhá "t1" cm. Modrá část je "t2"/"t3" celé tyče. Červená část je "t4"/"t5" celé tyče. Zelená část je dlouhá "t6" cm.'

t1: "t1=100"

t2: "t2/t3=3/20"

t3: "t4/t5=5/20"

t4: "t6=60"

12) Jedeme k babičce, v Brodu přistoupí do auta teta. Ujeli jsme už 45 km. K Brodu nám zůstává 15 km. Od Brodu k babičce je to 2/5 celé cesty. Celá cesta je dlouhá "t1" km. Ujeli jsme už "t2"/"t3" celé cesty. K Brodu nám zůstává "t4"/"t5" celé cesty. Od Brodu k babičce je to "t6" km.'

t1: "t1=100"

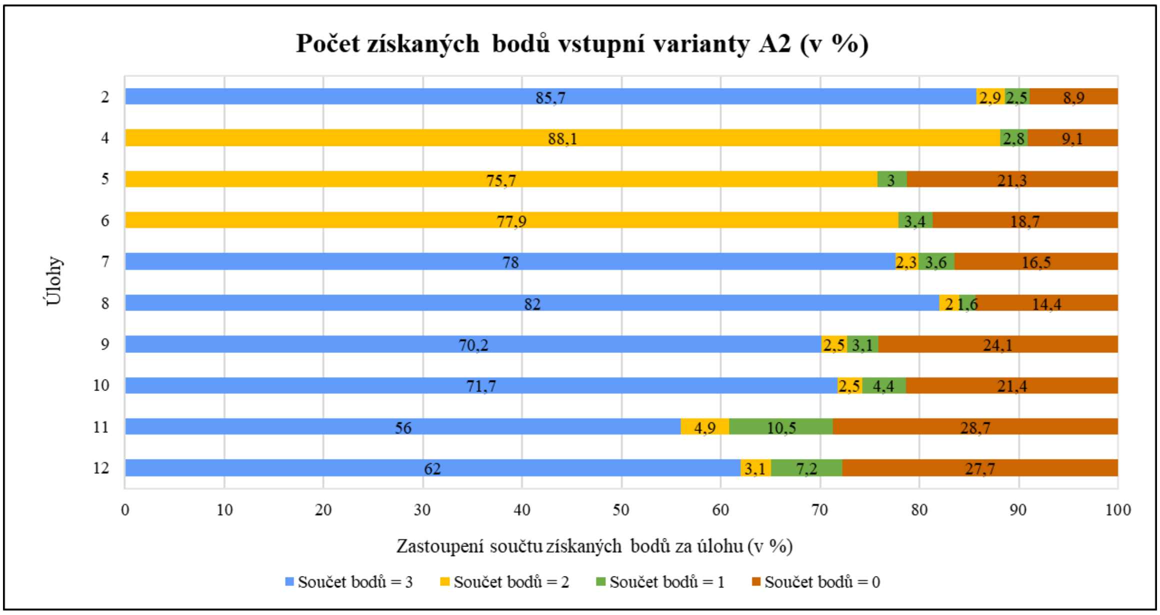
t2: "t2/t3=9/20"

t3: "t4/t5=3/20"

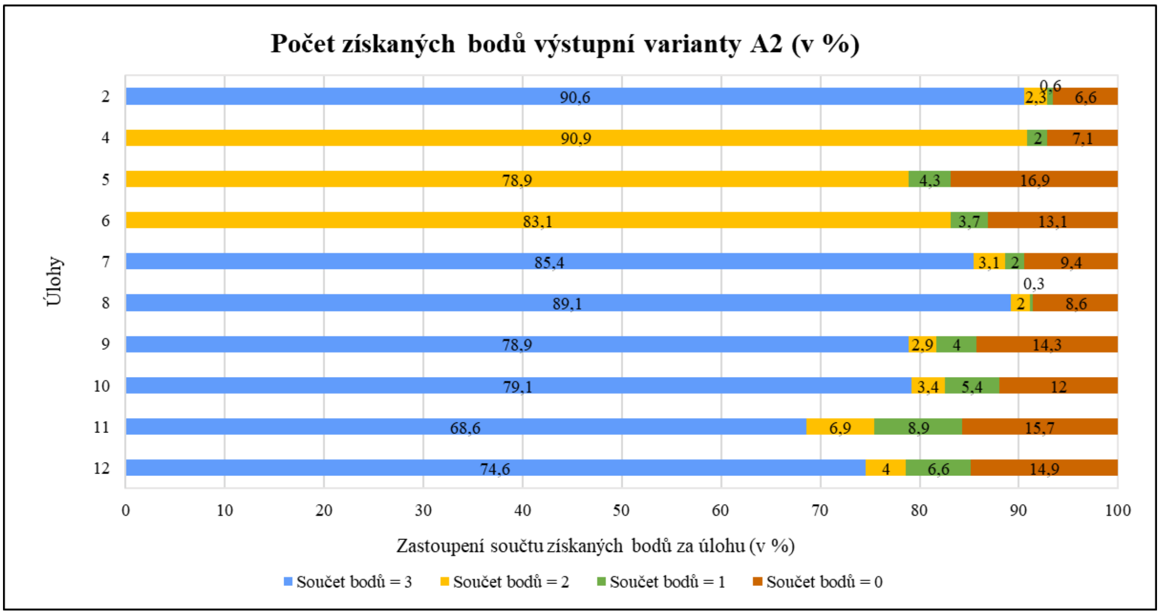
t4: "t6=40"

Příloha 2 – Grafy

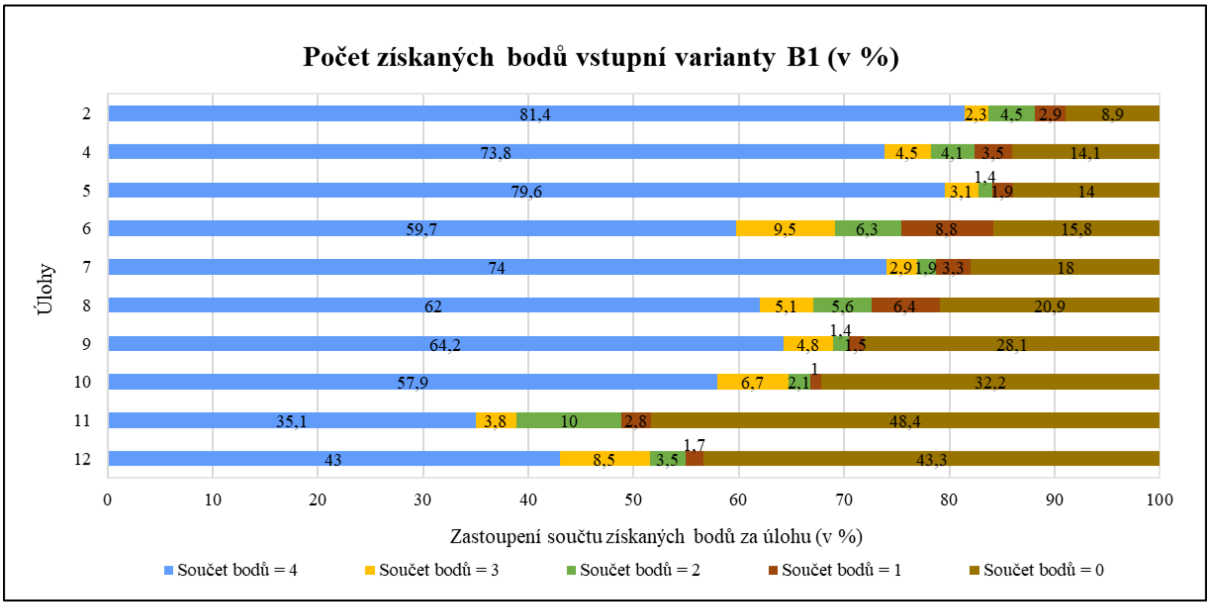
Grafy porovnávající obtížnost testů



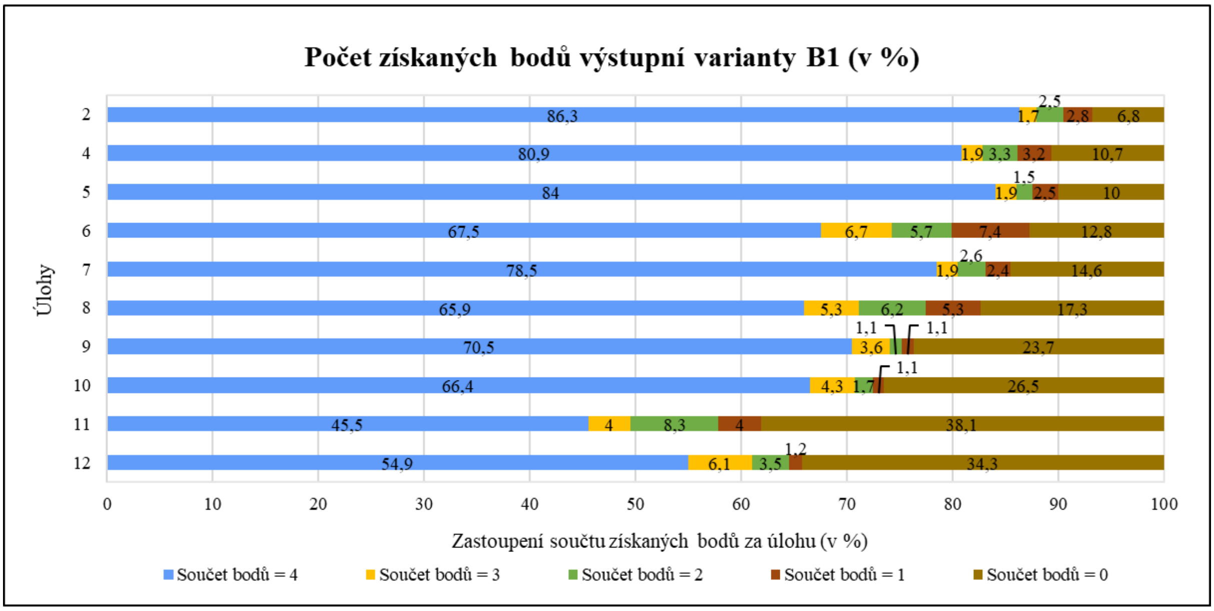
Graf 15: Počet získaných bodů vstupní varianty A2 (v %)



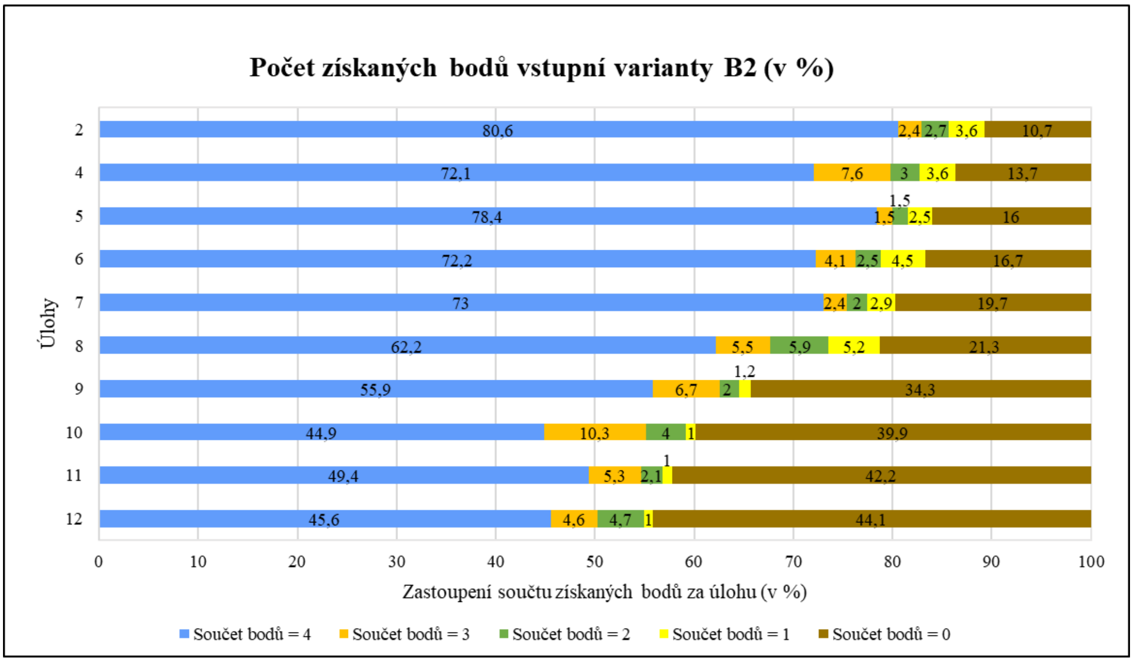
Graf 18: Počet získaných bodů výstupní varianty A2 (vyjádřeno v %)



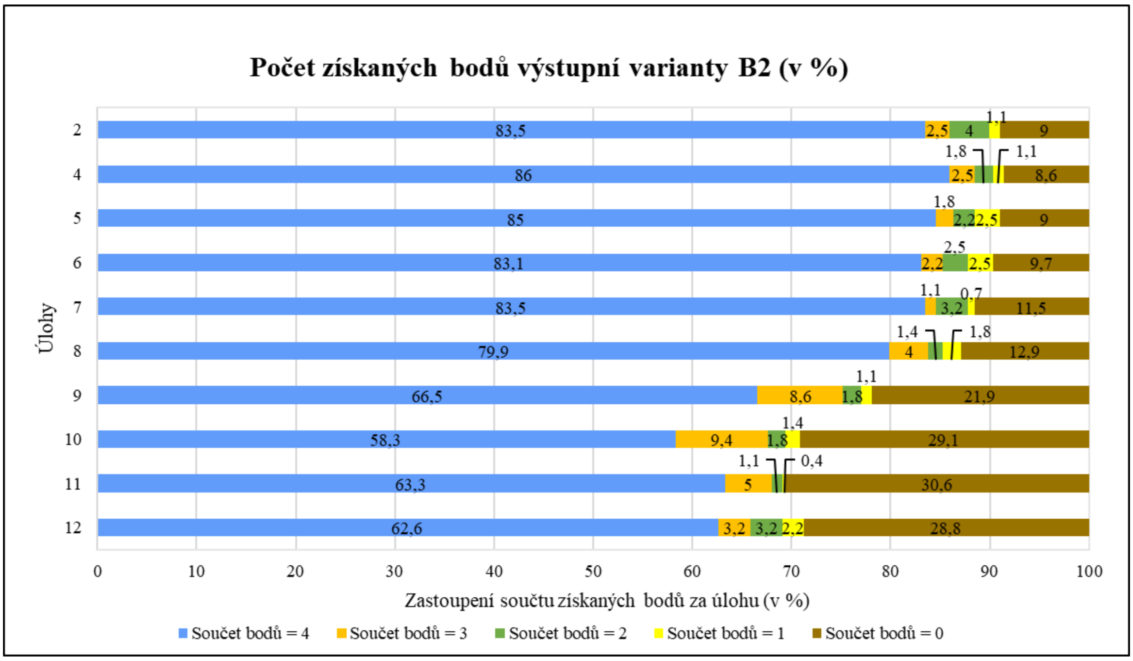
Graf 19: Počet získaných bodů vstupní varianty B1 (v %)



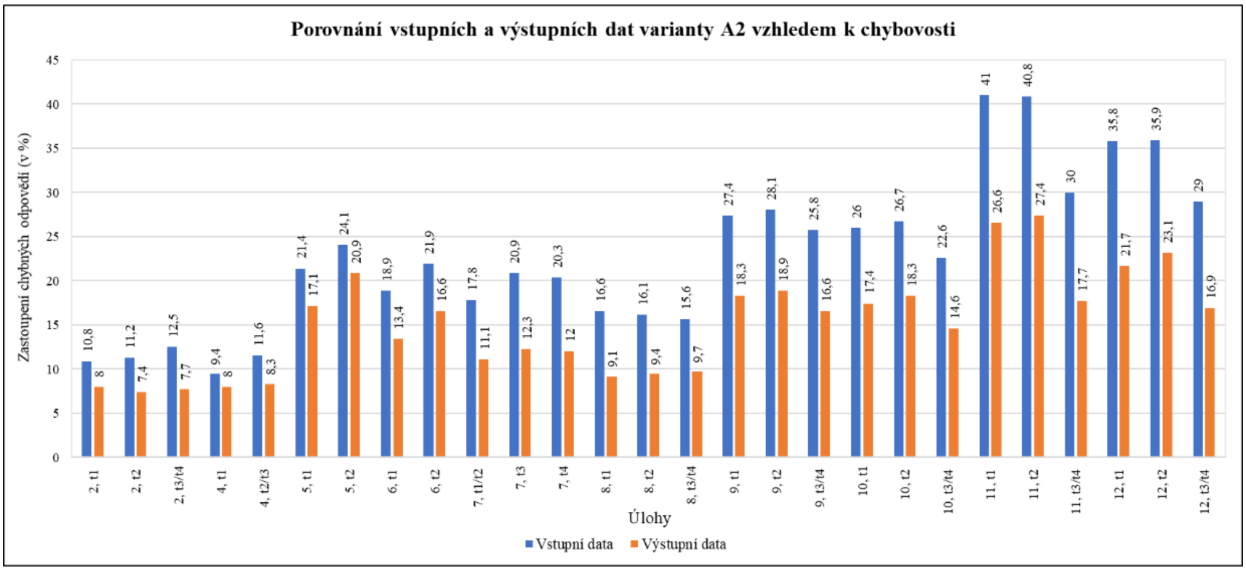
Graf 20: Počet získaných bodů výstupní varianty B1 (v %)



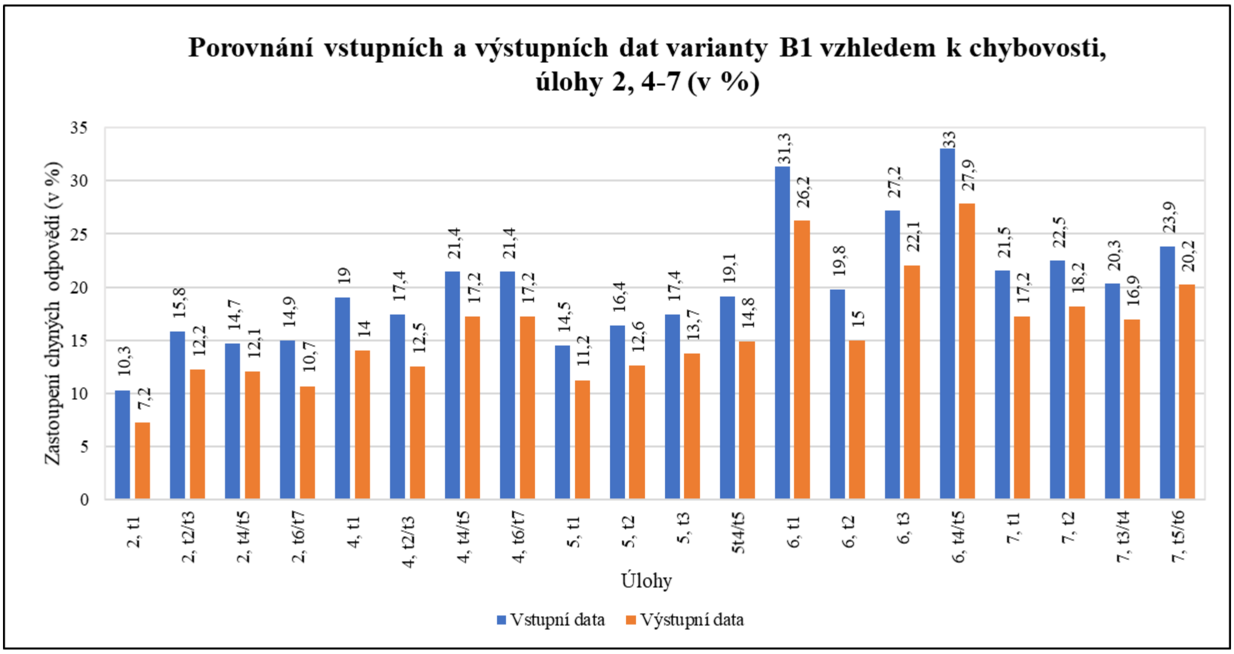
Graf 21: Počet získaných bodů vstupní varianty B2 (v %)



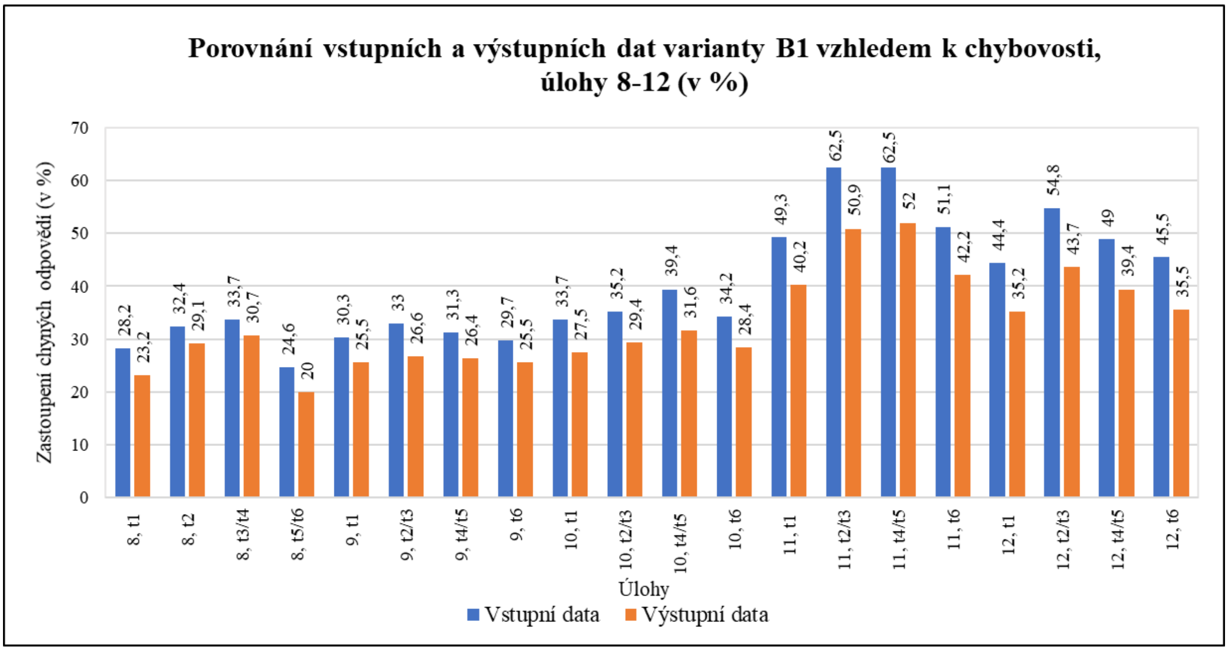
Graf 22: Počet získaných bodů výstupní varianty B2 (v %)



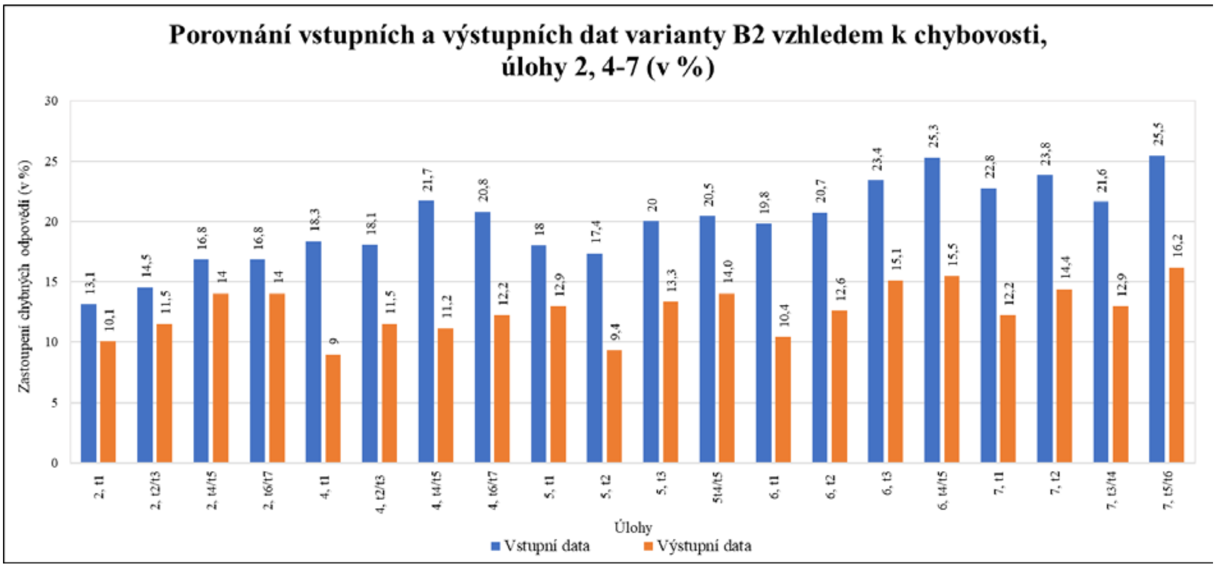
Graf 23: Porovnání vstupních a výstupních dat varianty A2 vzhledem k chybovosti



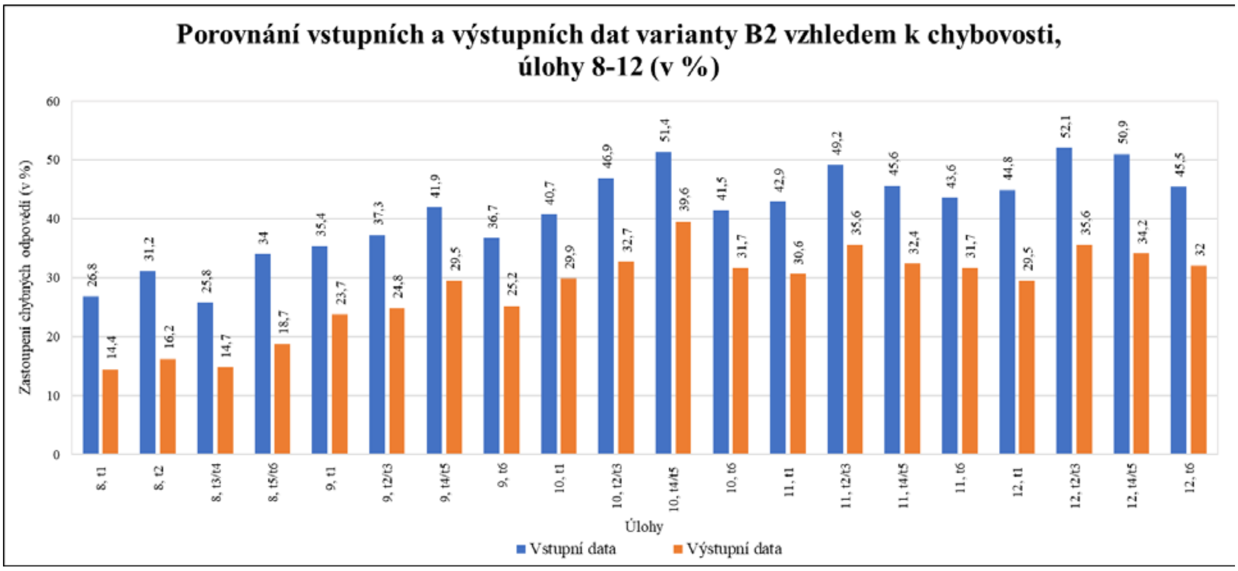
Graf 24: Porovnání vstupních a výstupních dat varianty B1 vzhledem k chybovosti, úlohy 2, 4-7 (v %)



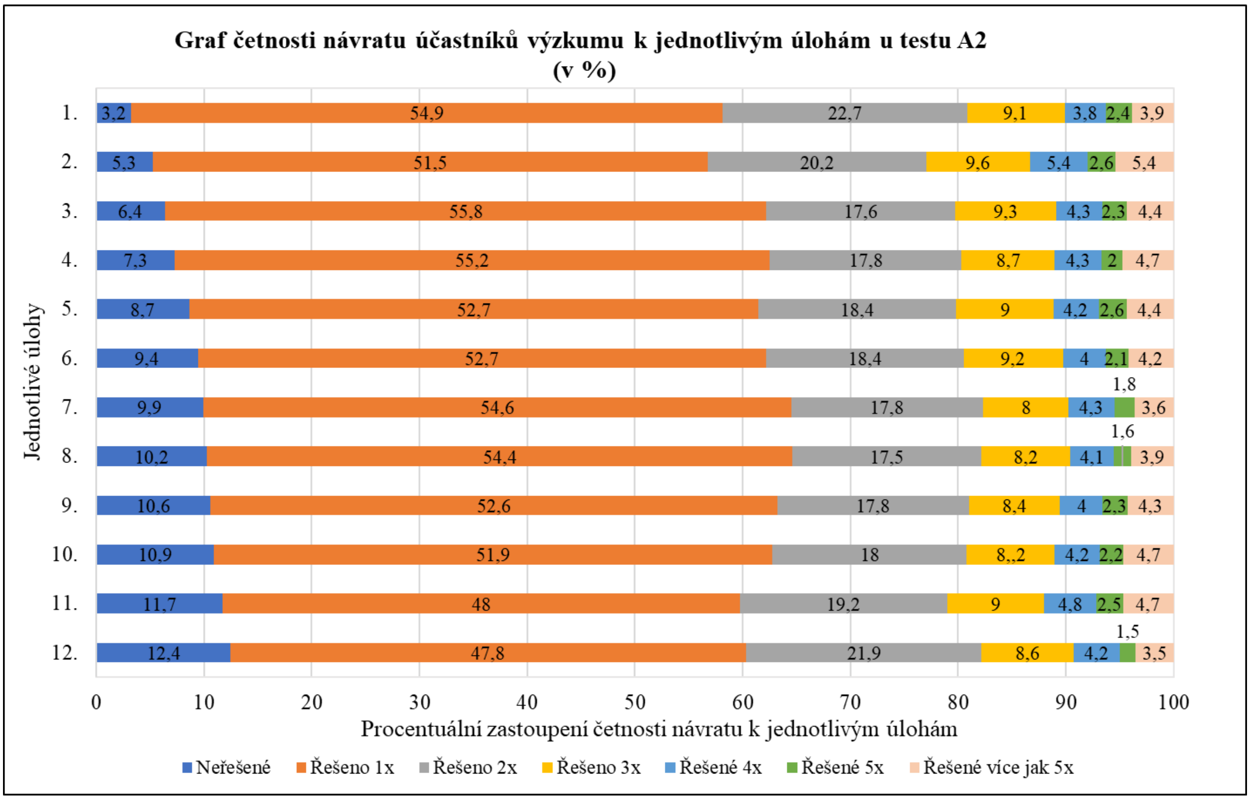
Graf 25: Porovnání vstupních a výstupních dat varianty B1 vzhledem k chybovosti, úlohy 8-12 (v %)



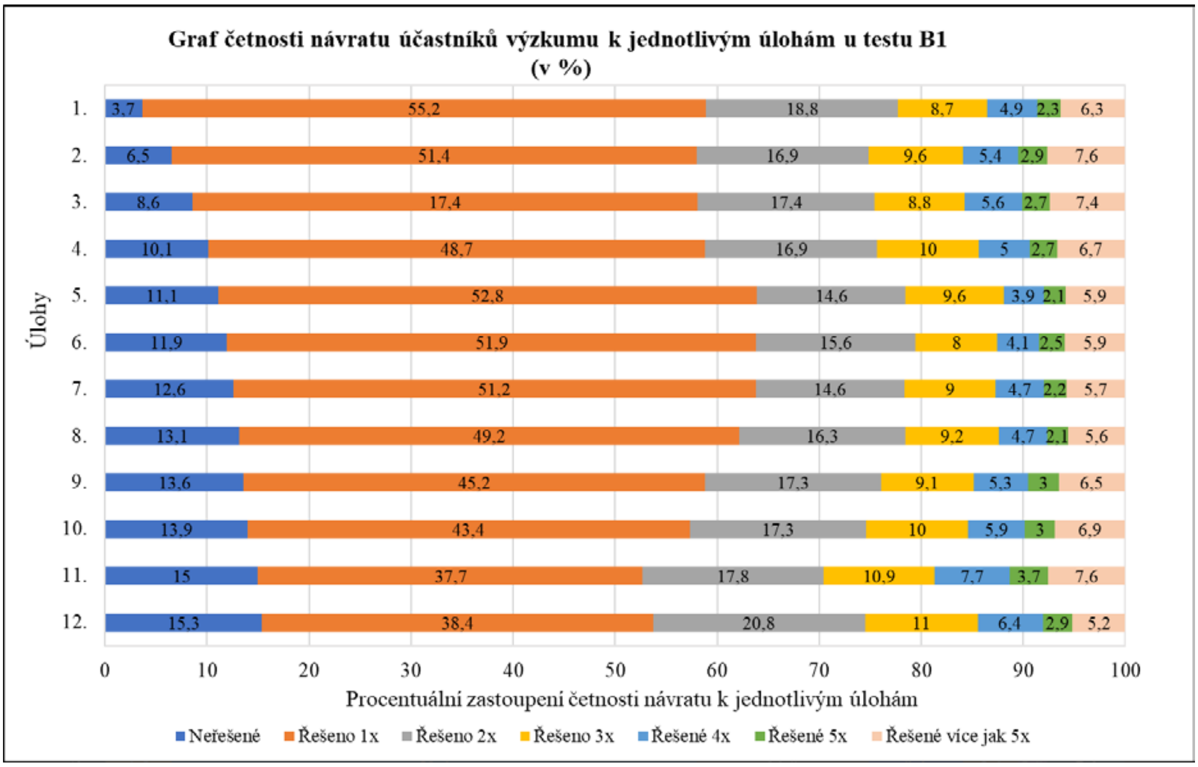
Graf 26: Porovnání vstupních a výstupních dat varianty B2 vzhledem k chybovosti, úlohy 2, 4-7 (v %)



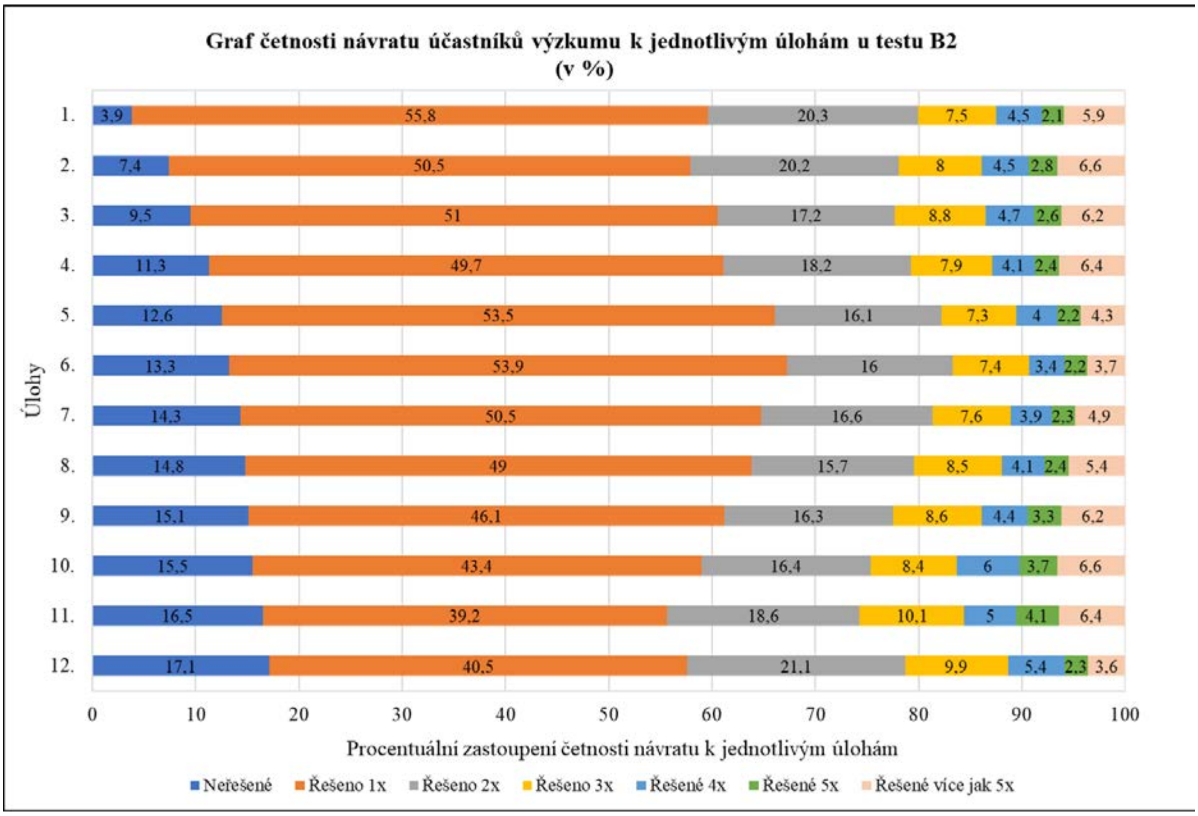
Graf 27: Porovnání vstupních a výstupních dat varianty B2 vzhledem k chybovosti, úlohy 8-12 (v %)



Graf 28: Graf četnosti návratu účastníků k jednotlivým úlohám u testu A2 (v %)

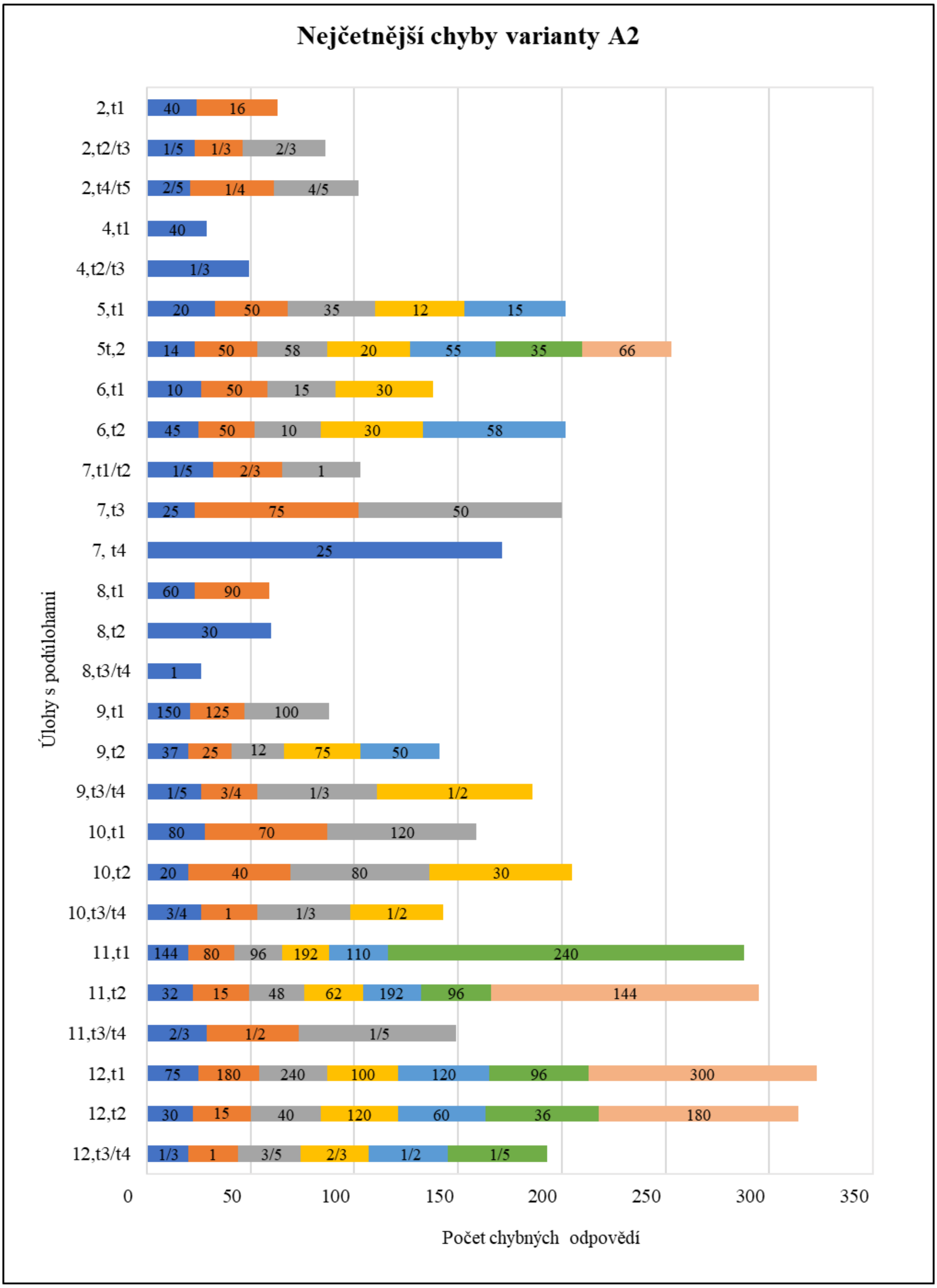


Graf 29: Graf četnosti návratu účastníků k jednotlivým úlohám u testu B1 (v %)

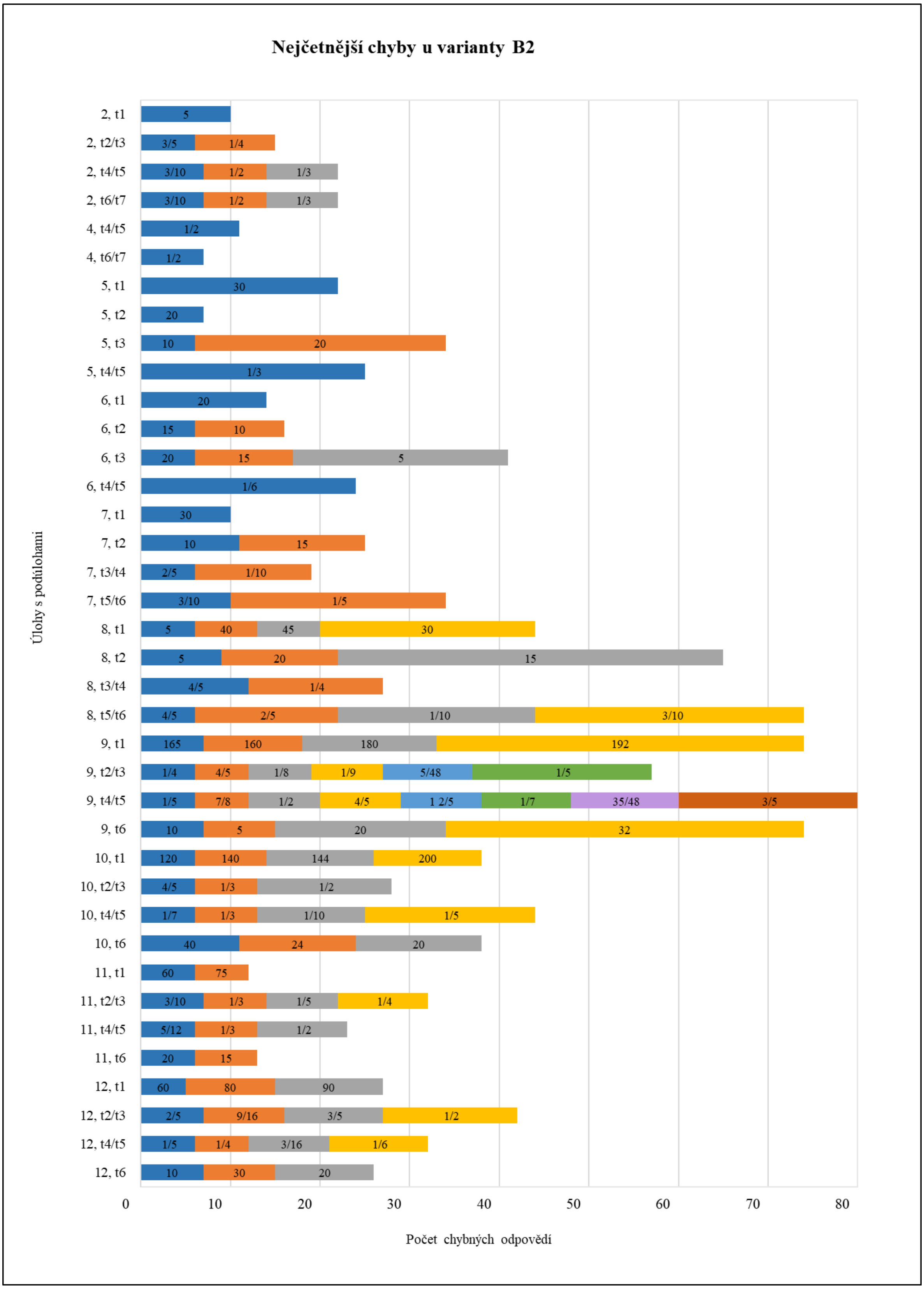


Graf 30: Graf četnosti návratu účastníků k jednotlivým úlohám u testu B2 (v %)

Grafy zobrazující nejčetnější chyby u zadání A2, B1 a B2

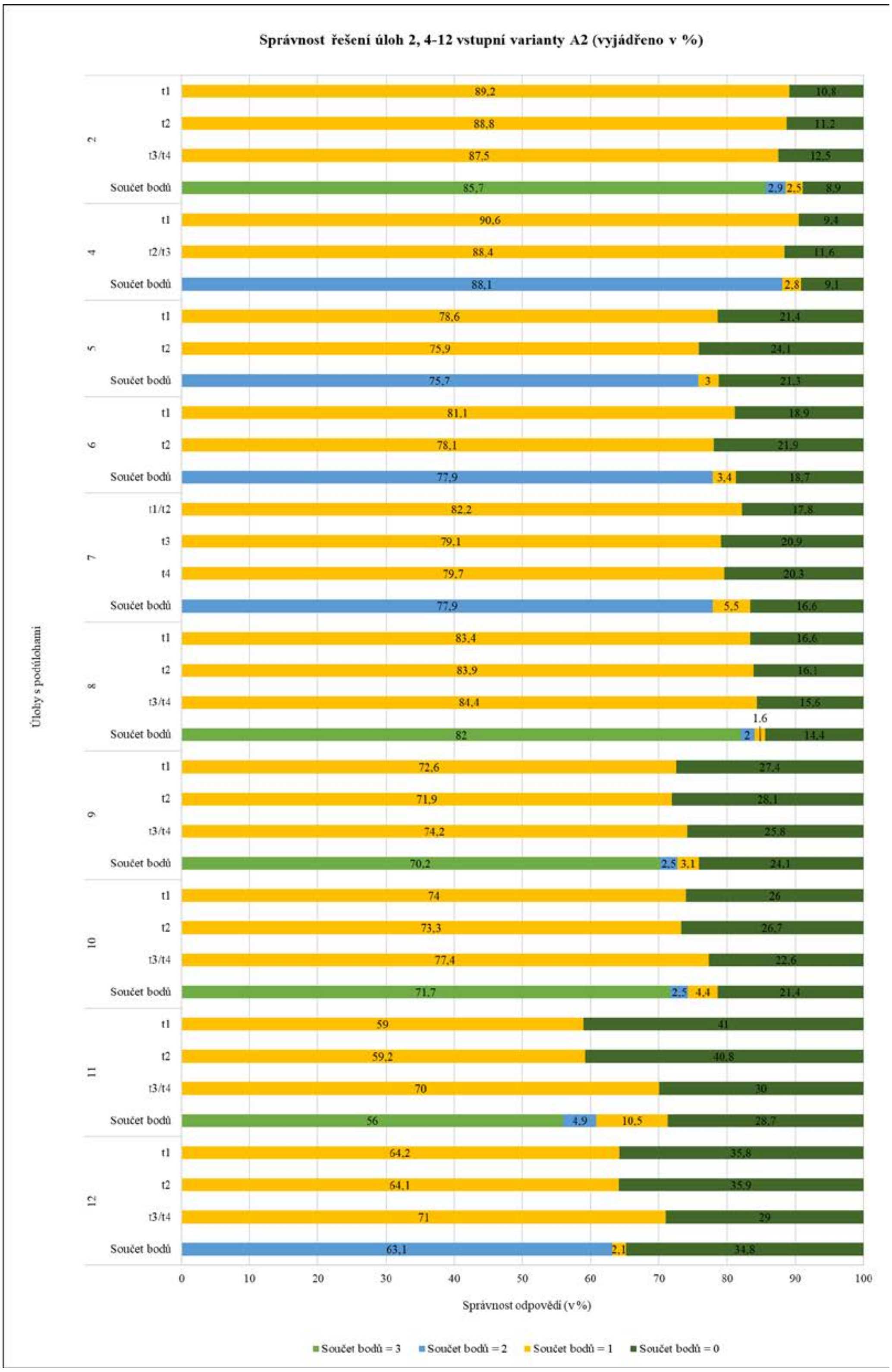


Graf 31: Nejčetnější chyby varianty A2

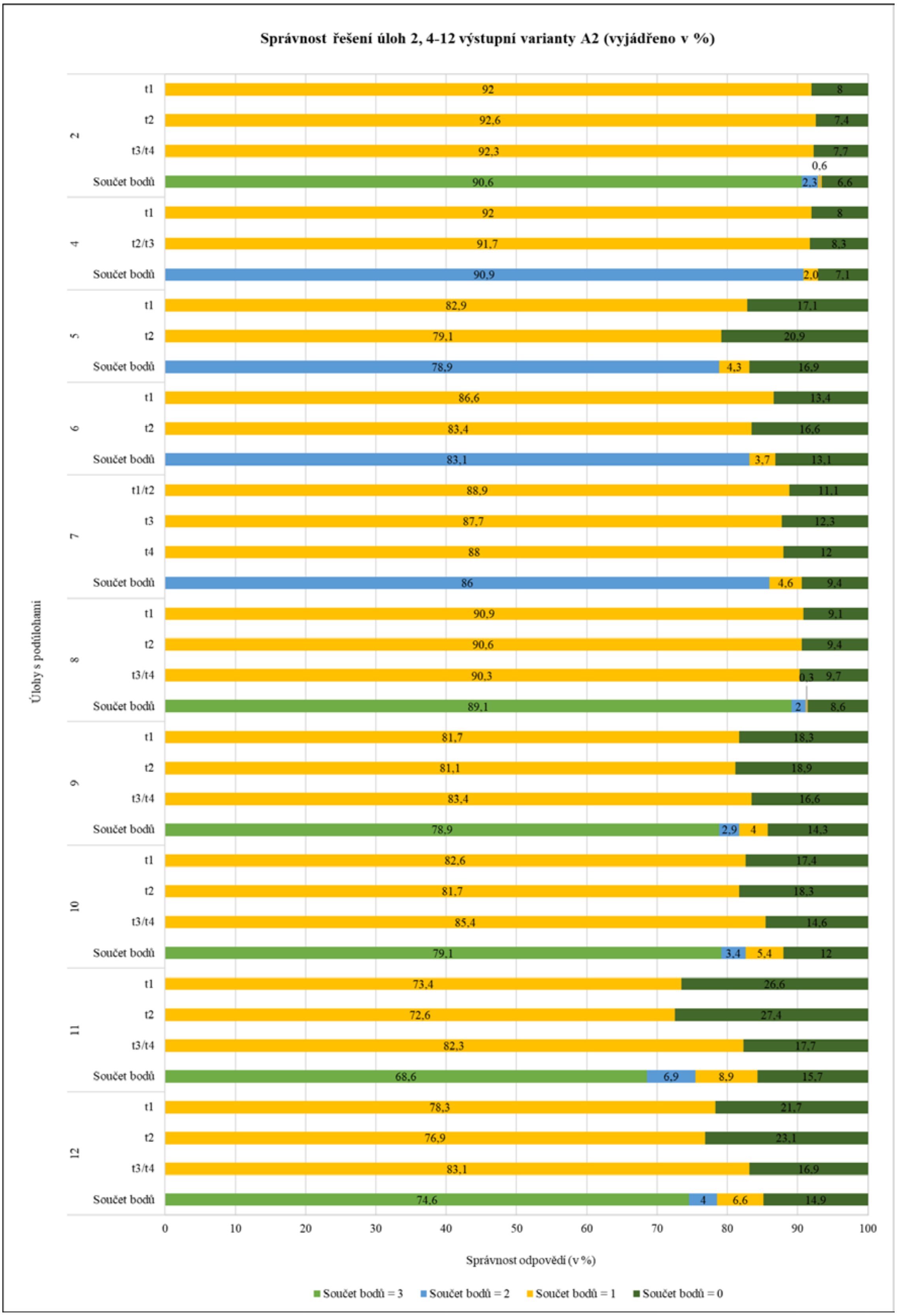


Graf 32: Nejčetnější chyby u varianty B2

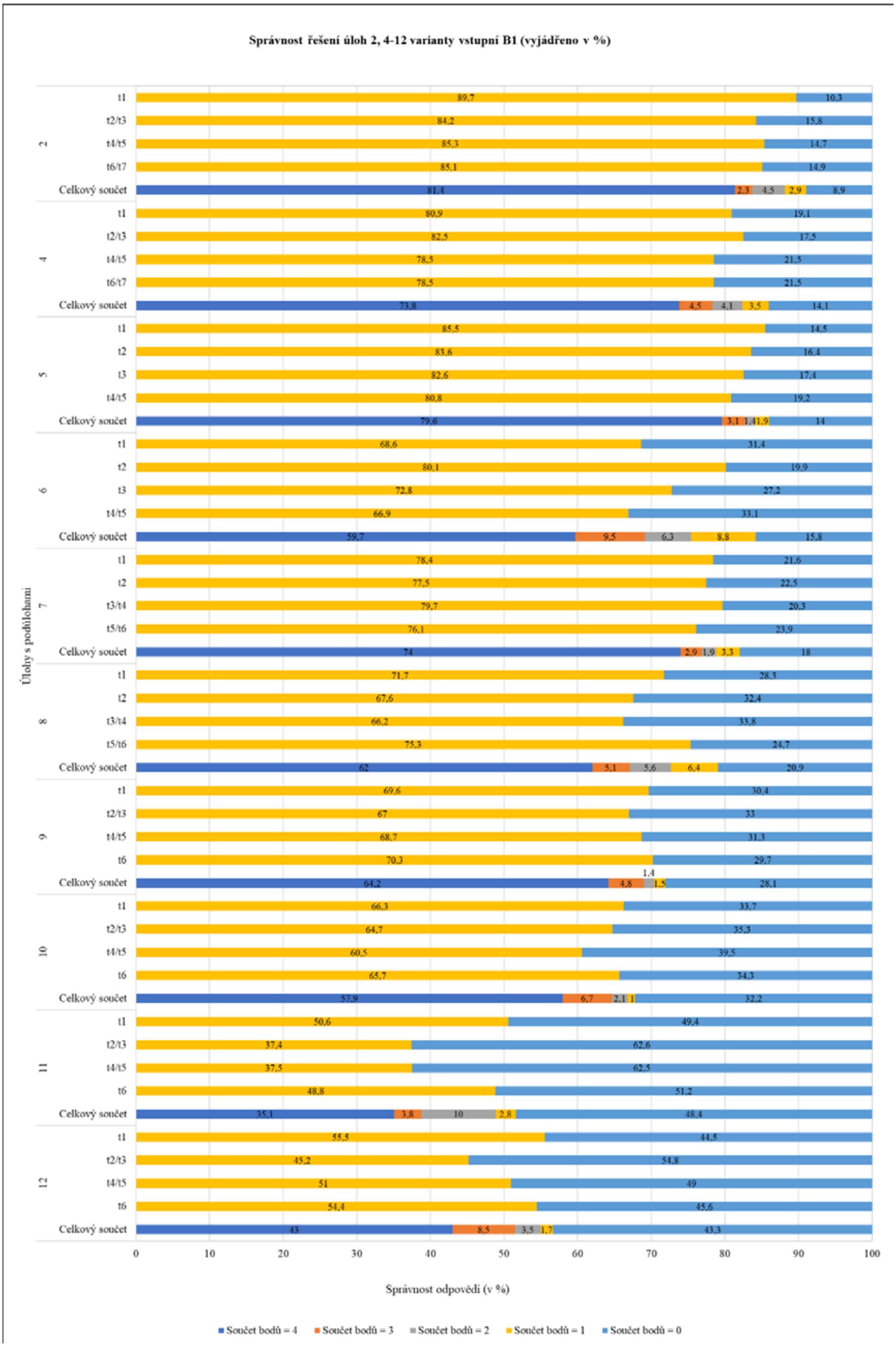
Grafy porovnávající správnost řešení jednotlivých testů



Graf 33: Správnost řešení úloh 2, 4-12 vstupní varianty A2 (vyjádřeno v %)

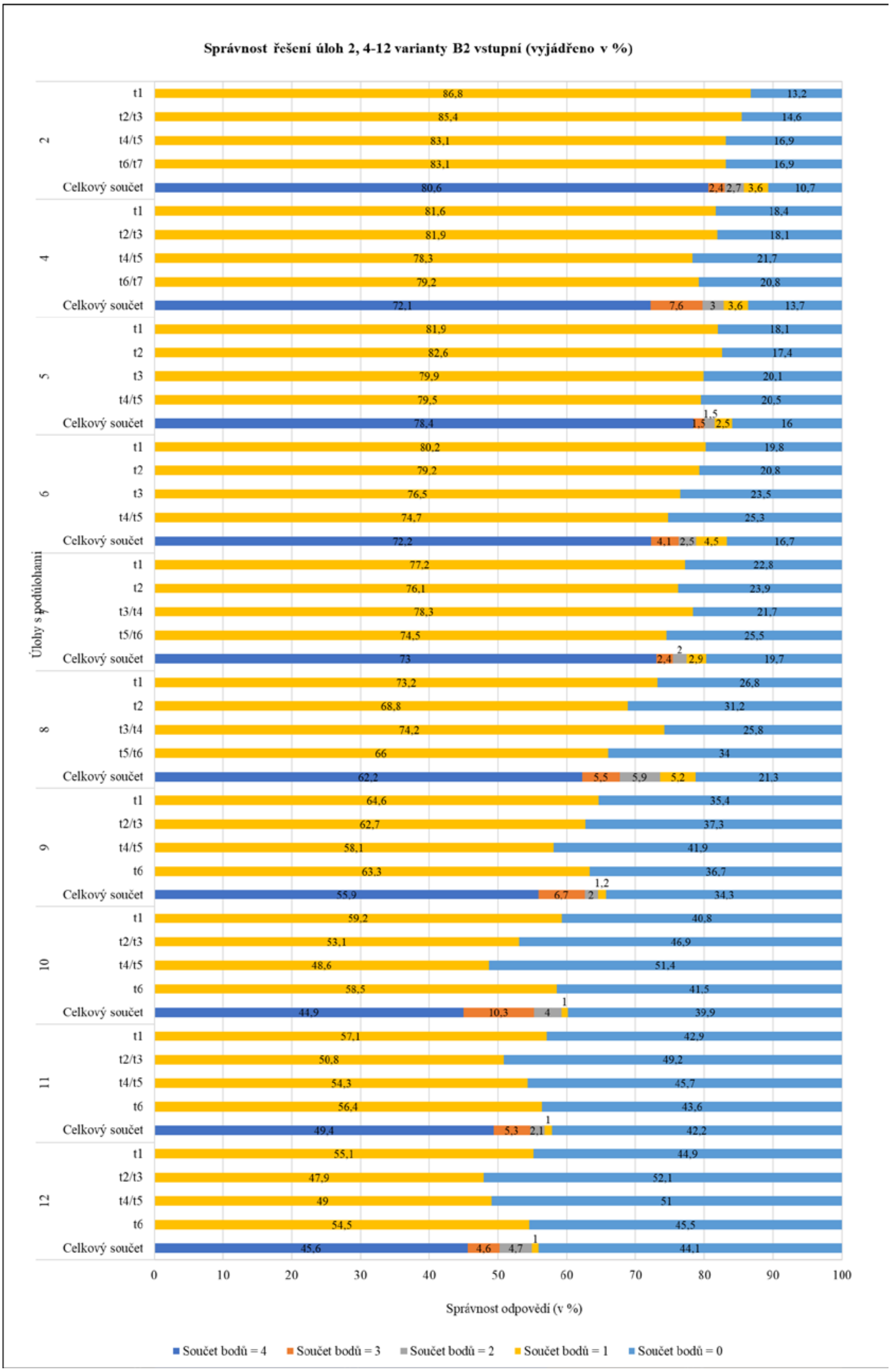


Graf 34: Správnost řešení úloh 2, 4-12 výstupní varianty A2 (vyjádřeno v %)

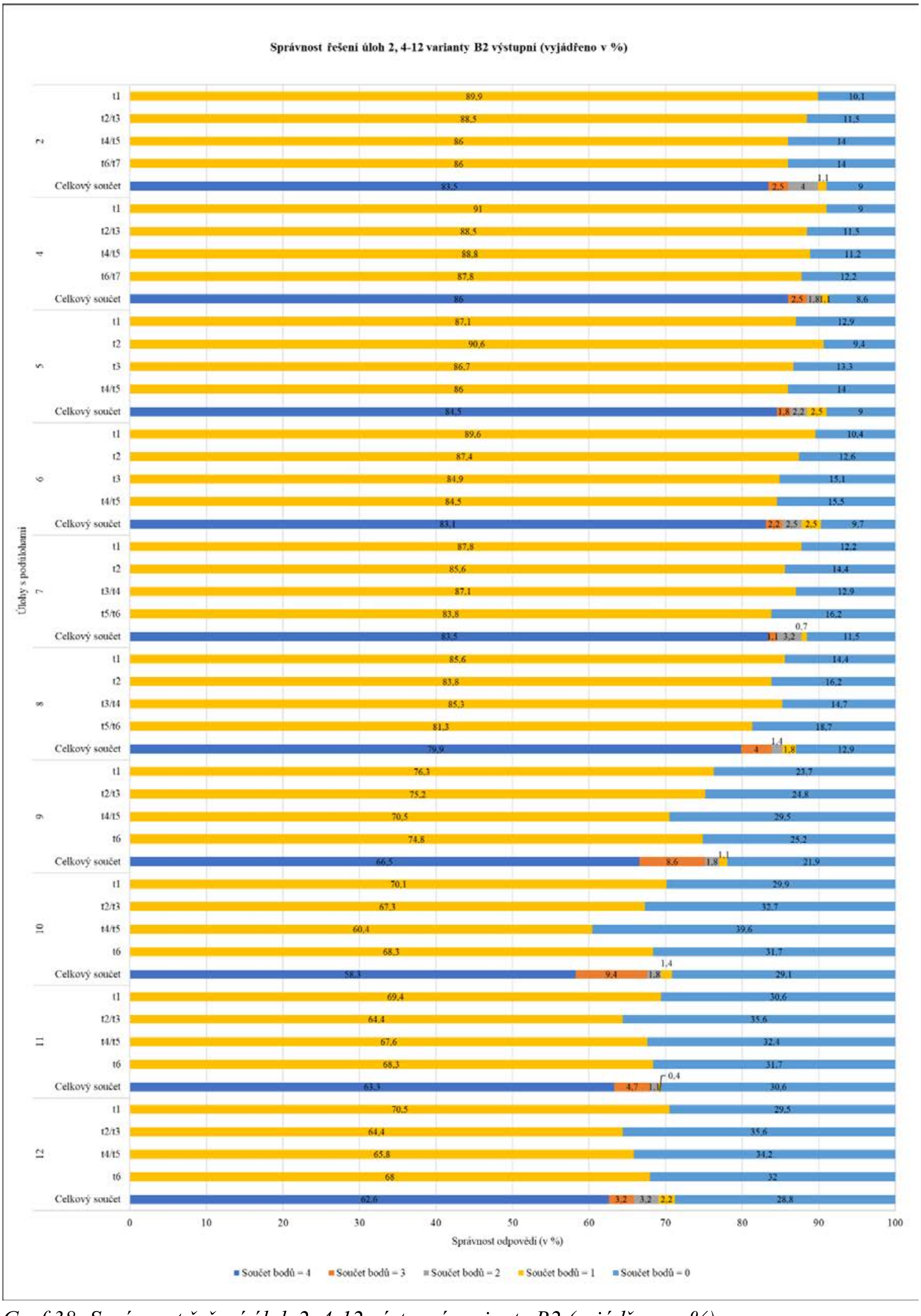


Graf 35: Správnost řešení úloh 2, 4-12 vstupní varianty B1 (vyjádřeno v %)

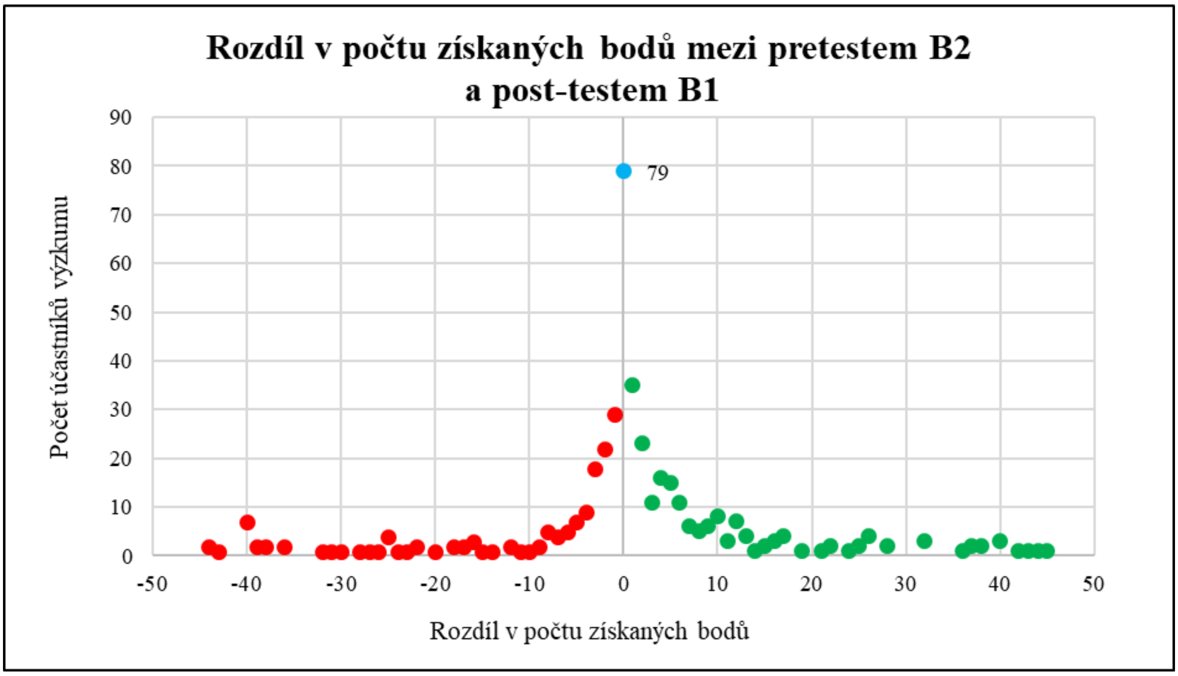
Graf 36: Správnost řešení úloh 2, 4-12 výstupní varianty B1 (vyjádřeno v %)



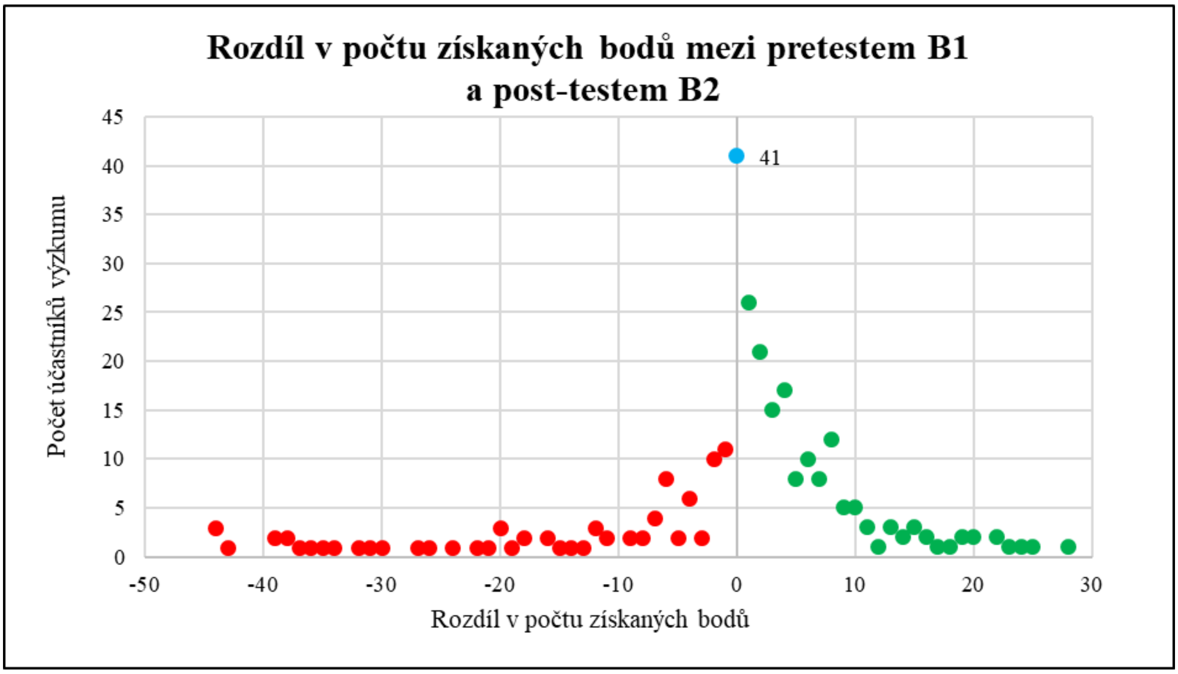
Graf 37: Správnost řešení úloh 2, 4-12 vstupní varianty B2 (vyjádřeno v %)



Graf 38: Správnost řešení úloh 2, 4-12 výstupní varianty B2 (vyjádřeno v %)



Graf 39: Rozdíl v počtu získaných bodů mezi pretestem B2 a post-testem B1



Graf 40: Rozdíl v počtu získaných bodů mezi pretestem B1 a post-testem B2