UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS DO PONTAL
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DANIEL ALVES DA SILVA

ARTE E MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES PARA O APRENDIZADO DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL A VALORES REAIS

ITUIUTABA
2022

DANIEL ALVES DA SILVA

ARTE E MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES PARA O APRENDIZADO DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL A VALORES REAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal da Universidade Federal de Uberlândia (ICENP/UFU), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Moreira.

ITUIUTABA

2022

DANIEL ALVES DA SILVA

ARTE E MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES PARA O APRENDIZADO DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL A VALORES REAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal da Universidade Federal de Uberlândia (ICENP/UFU), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Ituiutaba, 28 de março de 2022.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Carlos Moreira- Orientador

Profa. Dra – Gláucia Signorelli de Queiroz Gonçalves

Profa. Dra. – Milena Leite Almeida Brandão

-

"A matemática, olhada corretamente, possui não apenas verdade, mas suprema beleza, uma beleza fria e austera, como aquela da escultura, sem apelo a qualquer parte da nossa natureza mais fraca, sem as encantadoras armadilhas da pintura ou da música, mas sublimemente pura, e capaz de uma rigorosa perfeição que somente a maior das artes pode exibir. " BERTRAND RUSSEL (1872-1970)

AGRADECIMENTOS

Agradecer é um ato de humildade que me fez perceber que por mais que eu almeje coisas melhores na vida, o suficiente eu já tenho: família, amigos, animais, moradia, comida na mesa e um corpo saudável. Então, deixo aqui meus mais sinceros e afetuosos agradecimentos a todos que me tornam vivo e são o motivo da minha luta e existência.

Inicialmente e obrigatoriamente, devo agradecer a **DEUS**, pela vida e por concebê-la por meio do meu pai, **Mauro** Alves de Jesus e da minha mãe, **Ozanete** Severina da Silva, que me criaram com muito amor, carinho, zelando pela minha ética, educação e prosperidade. A vocês meus pais, dedico a minha vida e todos os frutos que dela eu colher.

Ao meu namorado **Gabriel Marques**, que com seu jeito doce, tem me auxiliado a conquistar as coisas que almejo e feito dos meus dias, memoráveis e inesquecíveis.

Aos membros das Repúblicas: ***UFUracão***, **AP 134** e **UFUdeu**, que são como minha família, compartilhando momentos e histórias espetaculares de muita festa, perrengues, aprendizado em grupo durante os momentos em que moramos juntos.

Às minhas irmãs **Juliene**, **Lídia** e **Gerusa**, que me inspiram.

Aos meus PETS **Marylin Monroe** e **Afonso Sanches**, mãe e filho, respectivamente, que me alegram trazendo amor, fé e alegria para o meu coração, curando e emanando energia positiva para minha alma.

À **Universidade Federal de Uberlândia (UFU),** à antiga **Faculdade de Ciências Integradas do Pontal (FACIP/UFU),** agora, **Instituto de Ciências exatas e Naturais do Pontal (ICENP/UFU), à Universidade de Coimbra** e ao **Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UC (DMFCTUC)**, pela oportunidade de estudar nestas renomadas instituições.

Aos membros do **Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID)** - Subprojeto Matemática, do **Programa Tutorial de Educação (PET) Matemática**, do **Programa de Licenciatura Internacional (PLI)** e do **Programa de Residência Pedagógica**

- Subprojeto Matemática/Química, pela oportunidade de aprender e trocar experiências que nos permitiram o amadurecimento pessoal e profissional e a solidificação de amizades que vão durar por toda a vida.

À **Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)** e ao **Ministério da Educação e Cultura (MEC)**, pelas políticas públicas educacionais e pelo investimento na minha formação e permanência no curso.

Ao meu orientador, **João Carlos Moreira**, por acreditar no meu potencial e ser um grande amigo, que mesmo com meus altos e baixos, não desistiu de me orientar e contribuir para este momento.

À minha amiga e chefe de estágio na Secretaria da Pró-Reitoria de Graduação do Campus Pontal (SECGRAPONTAL), **Viviane Alves de Medeiros Lima**, pelo enorme apoio durante o difícil momento que está sendo a pandemia e por ser uma excelente e carinhosa amiga.

Aos membros da banca avaliadora **Profa. Dra – Gláucia Signorelli de Queiroz Gonçalves**, **Prof. Dr. João Carlos Moreira** e **Profa. Dra. – Milena Leite Almeida Brandão** por contribuírem para a concretização deste trabalho.

A todos os meus amigos, colegas, professores e servidores da UFU e do curso de graduação em Matemática.

MUITO OBRIGADO A TODOS!

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo evidenciar algumas contribuições que a Arte e a Matemática, estudadas por meio das abordagens histórica, geométrica, algébrica e computacional, propiciam no aprendizado geométrico de plotagem de gráficos de funções de uma variável real a valores reais, além de suas inversas e relações isométricas. A metodologia do estudo será qualitativa bibliográfica, tendo como referência para análise autores como Duval(2014), Zaleski Filho(2013), Koga(1998), Marin e Penteado(2020), dentre outros; arquivos bibliográficos de ambas as áreas e a vivência acadêmica oportunizada durante o decorrer da disciplina de Arte e Matemática, ofertada pelo Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP-UFU). A partir disto, será construída uma galeria utilizando o aplicativo Amaziograph como tela de pintura e o Wolfram|Alpha como referência das funções base que gerarão os traços iniciais de cada arte da galeria e serão feitas reflexão teórica baseada nas Representação semióticas de Duval (2014).

Palavras-chave: Registro Semiótico, Gráficos, Wolfram|Alpha, Amaziograph, Arte, Matemática, Interdisciplinaridade.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

CDI – Cálculo Diferencial e Integral

DMFCTUC – Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

FACIP – Faculdade de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

ICENP – Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

IFNMG – Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais

UC – Universidade de Coimbra

UFU – Universidade Federal de Uberlândia

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Reconhecer que a arte e a matemática sempre estiveram presentes na história da humanidade não é um ato difícil. Para um bom entendedor, já no começo desta linha evolutiva o homem pré-histórico utilizou essa relação para fazer os primeiros registros conhecidos, de representações que retratassem a sua própria história e costumes, por meio da Arte. Já na Matemática, utilizava sem fundamentação, traçados, simetrias, retratos, etc.

A continuidade desta bilateralidade se manteve em diversos momentos da história, com ênfase na arquitetura mundial, que deram respaldo para muitas formalizações posteriores na Matemática, podendo citar o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica.

Porém, em algum momento a Matemática e a Arte se distanciaram e tornaram-se independentes, levando a mudanças significativas na relação entre estes campos do conhecimento. Uma das áreas afetadas foi a educação, que com as necessidades do mundo moderno, viu-se diante de um ensino mais tecnicista do que artístico, abstendo-se da expressão cultural como prioridade educacional. Essa inutilização da arte como metodologia facilitadora, acabou provocando um enorme percalço nos currículos formativos das escolas, ocasionados pela falta de ferramentas exclusivamente pertencentes a arte, quando utilizadas dentro da matemática.

Um exemplo de como a ausência da arte influencia negativamente o aprendizado, é na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), em que, embora tenhamos diversas áreas que podem se relacionar com o conteúdo desta disciplina, sendo algumas delas: Matemática, Física, Engenharia, Artes, dentre outras, o que possivelmente facilitaria a aprendizagem, CDI, é de acordo com pesquisas de Wrobel, Zeferino e Carneiro (2013, apud FERNANDES FILHO, 2001; GOMES & LOPES, 2005; LEHMANN & LEHMANN, 2006; PEREIRA et al 2010; GOMES, 2012), uma das disciplinas que possui alto índice de reprovação nos cursos de Ciências Exatas e apontam que dentre os motivos para tal, está a dificuldade de assimilação algébrica e geométrica dos alunos, em relação a análise e plotagem de gráficos em geral, especialmente gráficos que envolvem funções com uma variável real e suas inversas.

Plotar o gráfico de uma função nem sempre é uma tarefa fácil e na maioria das vezes, mesmo que o pesquisador não saiba, em um simples desenho de gráfico de uma função, existem métodos que vão desde técnicas simples a conceitos abstratos da Arte e da Matemática, podendo citar as técnicas de desenho em perspectiva, simetrias e inversões, escalas, além de noções históricas, computacionais, geométricas, algébricas de funções, dentre outros. Nesse sentido, percebemos que são necessárias ferramentas que promovam o uso de todas estas técnicas para a análise das situações estudadas. O uso de tecnologias de informação por meio de softwares dinâmicos pode ser uma alternativa a se utilizar nessas situações, podendo citar os aplicativos *Wolfram|Alpha* e *Amaziograph* como exemplos de recursos metodológicos facilitadores da aprendizagem.

Nesse cenário, levando em consideração a preocupação com uma formação significativa do educando, o problema da pesquisa ficou definido da seguinte forma: *"Como a relação entre a Arte e a Matemática pode contribuir para o aprendizado e visualização, na plotagem de gráficos de funções de uma variável real a valores reais e suas transformações geométricas? "*

Neste sentido, este trabalho tem por objetivo principal evidenciar algumas contribuições que a Arte e a Matemática, estudadas por meio das abordagens histórica, geométrica, algébrica e computacional, propiciam no aprendizado geométrico de plotagem de gráficos de funções de uma variável real a valores reais, além de suas inversas e relações isométricas e das inquietações do autor desta pesquisa em relação ao tema proposto.

Para que o objetivo geral seja alcançado, é necessário ter como objetivos específicos: (a) conhecer o contexto histórico, geométrico, computacional e algébrico a respeito do tema, por meio de estudo bibliográfico; (b) determinar as funções que serão utilizadas para construção da galeria; (c) compreender a interface de softwares dinâmicos *Wolfram|Alpha* e *Amaziograph* para estudo de gráficos de funções diversas e a sua importância; (d) propor reflexões sobre a importância de disciplinas artísticas em cursos de exatas.

Para que estes objetivos sejam concretizados, a metodologia que será utilizada neste trabalho terá abordagem qualitativa e será *pesquisa bibliográfica.* De acordo com Rodrigues e Limena (2006, p.90) a abordagem qualitativa é:

> Quando não emprega procedimentos estatísticos ou não tem, como objetivo principal, abordar o problema a partir desses procedimentos. É utilizada para investigar problemas que os procedimentos estatísticos não podem alcançar ou representar, em virtude de sua complexidade. Entre esses problemas, poderemos destacar aspectos psicológicos, opiniões, comportamentos, atitudes de indivíduos ou de grupos. Por meio da abordagem qualitativa, o pesquisador tenta descrever a complexidade de uma determinada hipótese, analisar a interação entre as variáveis e ainda interpretar os dados, fatos e teorias.

E a pesquisa bibliográfica é de acordo com SEVERINO (2010, p.122):

> É aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utiliza-se dados ou categorias teóricas já trabalhadas por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes de temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos.

Permeando todas estas questões, o trabalho foi estruturado da seguinte forma:

No primeiro capítulo, serão apresentados os diferentes tipos de abordagens do conteúdo e todo o referencial que fornecerá fundamentos para as seções seguintes.

No segundo capítulo, faremos um breve contexto sobre os currículos educacionais no Brasil e na Europa, em relação as disciplinas de Arte e Matemática e apresentaremos a disciplina de Arte e Matemática do ICENP/UFU.

No terceiro capítulo, será abordado os tipos de transformações geométricas isométricas que serão utilizadas no trabalho e na sequência a galeria com as artes criadas a partir dos traços dos gráficos de funções de uma variável real a valores reais, suas inversas e relações isométricas

Por fim, serão feitas as considerações finais onde o autor apresentará sua análise da pesquisa no geral, reflexões acerca dos tópicos apresentados e suas sugestões em relação ao tema.

CAPÍTULO 1

GRÁFICOS: ABORDAGENS HISTÓRICA, GEOMÉTRICA, ALGÉBRICA E COMPUTACIONAL

Para que possamos compreender alguns dos conceitos utilizados para construir gráficos, serão apresentadas neste capítulo, as abordagens: histórica, geométrica, algébrica e computacional, necessárias para que tenhamos ferramentas que respaldem a teoria a ser estudada adiante. Esta abordagem será utilizada com o intuito de apresentar uma nova abordagem no ensino de gráficos.

Quando o assunto é Matemática, nos conteúdos regidos no ambiente escolar, a geometria destaca-se por ser uma ferramenta facilitadora de conceitos algébricos e procedimentais, além de fornecer uma representação visual dos mesmos. Tal situação, só é possível graças aos estudos e descobertas, realizados por diversos estudiosos ao longo do tempo.

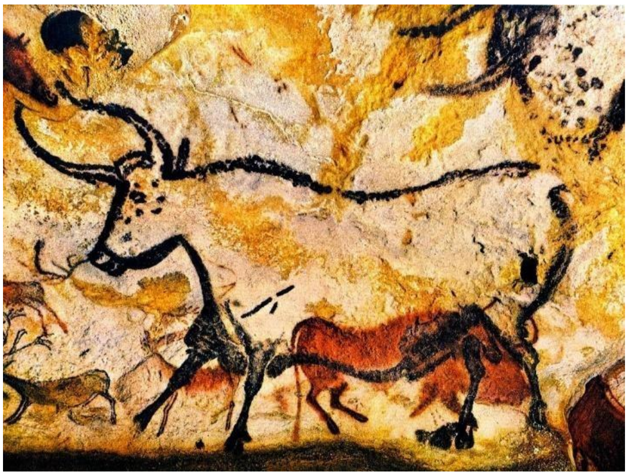
Um dos estudiosos que forneceu significativas contribuições para o estudo da geometria e álgebra, foi o matemático francês René Descartes (1596-1650), que por meio do tratado de *Le Monde*, publicado em 1637 e que tinha como apêndice a obra *La Géométrie*, possibilitou a tradução de problemas entre essas áreas de estudo, por meio de uma abordagem de sistemas de coordenadas que hoje conhecemos como a geometria cartesiana. Apresentaremos a seguir um pouco da trajetória histórica da Arte e Matemática que permitiu os avanços de técnicas conhecidas hoje; uma abordagem algébrica para que possamos ter respaldo formal para estudar graficamente algumas das funções que utilizaremos neste trabalho e por fim, a abordagem computacional acerca do *software* que utilizaremos para realizar as plotagens.

1.1 Abordagem histórica

Desde os princípios da humanidade, a arte é inerente ao desenvolvimento humano e nos permite compreender parte da nossa história, além de características culturais, estéticas e comunicativas, de cada região. As manifestações intelectuais mais antigas, datam do período pré-histórico, onde foram encontradas pinturas rupestres por volta de (40.000 a.C.), no período paleolítico, sendo observado como uma das ferramentas mais eficientes utilizadas pelo homem primitivo, para registrar informações do seu cotidiano e aprimorar técnicas artísticas.

Em geral, estas pinturas são marcadas pela presença de grandes animais selvagens como bisões, cavalos (Figuras 1,2 e 3), entre outros e mais raramente o humano (Figura 4). Acredita-se que essas pinturas estejam ligadas a atividades humanas como dança, luta, ritos religiosos, relações sexuais e caça.

Figura 1. Gruta de Lascaux

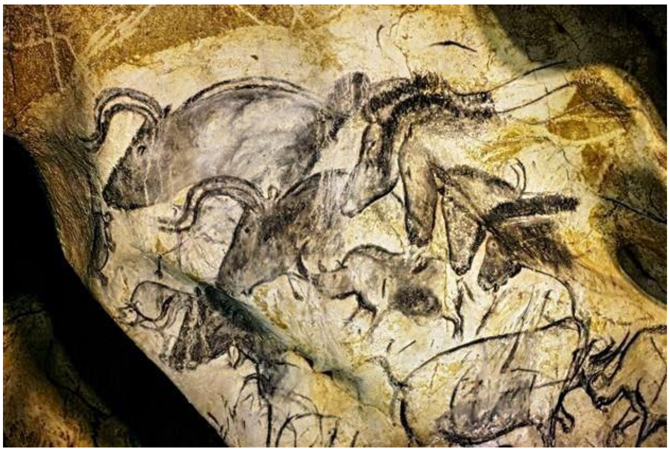


Fonte: http://linguagemgeografica.blogspot.com/2014/12/faca-um-tour-virtual-pela-caverna-de.html

Figura 2. Bisão na caverna de Altamira

Fonte: http://issocompensa.com/arte/o-bisao-de-altamira-15-000-anos

Figura 3. Caverna de Chauvet



Fonte: https://arqueologiaeprehistoria.com/2014/06/23/caverna-de-chauvet-recebe-da-unesco-o-status-de-patrimonio-mundial/

Figura 4. Parque Nacional da Capivara

Fonte: https://www.icmbio.gov.br/portal/ultimas-noticias/20-geral/4360-serra-da-capivara-onde-mora-o-nosso-rico-passado-ancestral

Segundo Escher (1994, p.6, apud, SAMPAIO (2012, p.50), o mundo matemático e o mundo da arte estão intrinsecamente relacionados. O que é facilmente constatado já nas pinturas rupestres (Figuras 5 e 6), quando o homem primitivo representava segmentos de retas, polígonos e curvas, como as circunferências e espirais, utilizando como materiais básicos os dedos, as mãos e minerais moídos.

Figura 5. Sítio de Bisnau – GO

Fonte: https://www.xapuri.info/arqueologia/o-bisnau-e-seus-petroglifos/

Figura 6. Piracuruca – PI

Fonte: https://portalpiracuruca.com/misterios-do-piaui/o-misterio-da-espiral-a-arte-rupestre-encontrada-na-pedra-do-arco-em-piracuruca-piaui/

A presença da matemática nas expressões artísticas continuou e pode ser encontrada em diversos achados ao longo do desenvolvimento histórico e social da humanidade. As técnicas geométricas dos artistas se aprimoraram e foi no mundo antigo que estas ganharam notoriedade e passaram a ser o alicerce da criação arquitetônica e artística. Naquela época, as construções megalíticas eram feitas por arquitetos que, por exigência, eram também matemáticos.

Uma grande construção que permitiu a evolução das técnicas matemáticas de geometria foi a basílica de Santa Sofia (Hagia Sophia)(Figura 7), que planejada por dois matemáticos, Isidoro de Mileto (442-537) e Antêmio de Trales (474-534), sob o comando do imperador bizantino Justiniano, tinha como objetivo, superar tudo que já havia sido construído antes.

Figura 7. Basílica de Santa Sofia

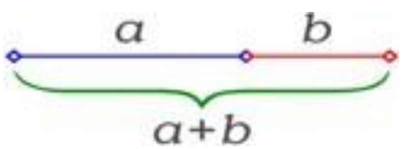
Fonte: https://www.istockphoto.com/br/foto/hagia-sophia-gm670401080-122634573

Esta tradição seguiu na civilização islâmica, onde arquitetos criaram uma riqueza de padrões de azulejos bidimensionais séculos antes que os matemáticos ocidentais estabelecessem uma classificação completa para eles.

Na trajetória de evolução das técnicas de representação de padrões, o matemático Pitágoras de Samos (569 a.C. – 475 a.C.), utilizou a música para desencadear uma série de estudos e descobertas sobre proporções que permitem até os dias atuais, que diversas áreas do conhecimento utilizem estes resultados para criação de padrões.

Outro grande conceito utilizado por matemáticos da época foi a proporção áurea (Figura 8), que resumidamente pode ser entendida através do seguinte princípio: "*Seccionar um segmento de reta de tal forma que a parte menor esteja para a maior como este está para o todo.* "

Figura 8. Representação da Proporção áurea



Fonte: Arquivo Pessoal do Pesquisador

A magia da proporção áurea, encantou não somente Pitágoras, mas também diversos outros estudiosos e artistas como Leonardo da Vinci (1452-1519), Piet Mondrian (1872-1944) e arquitetos medievais, gregos e da atualidade.

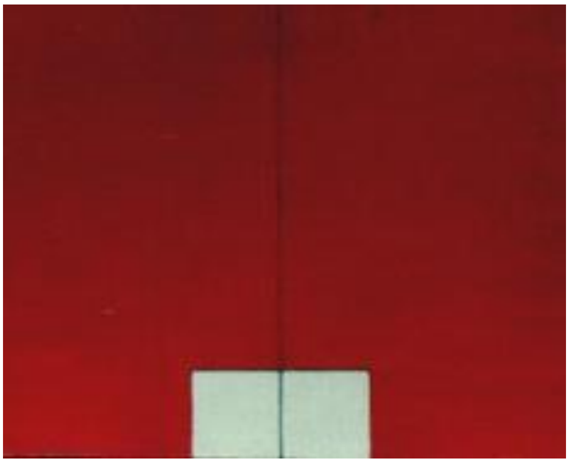
Observando que determinadas regularidades geométricas podem expressar beleza e harmonia, os matemáticos aplicaram este conceito na arquitetura denominando-a como simetria.

Dentro da matemática, estuda-se a simetria de um dado objeto, exibindo todas as operações que preservam sua estrutura. Ao conjunto destas operações dá-se o nome de grupo. Se o objeto for geométrico, teremos um grupo de simetria. Obras como o Panteão romano (Figura 9), artes de Milton Dacosta (1915-1988) (Figura 10) e pinturas de Escher (1898-1970) (Figura 11), exploram e exemplificam muito bem o conceito de grupos de simetria.

Figura 9. Panteão Romano

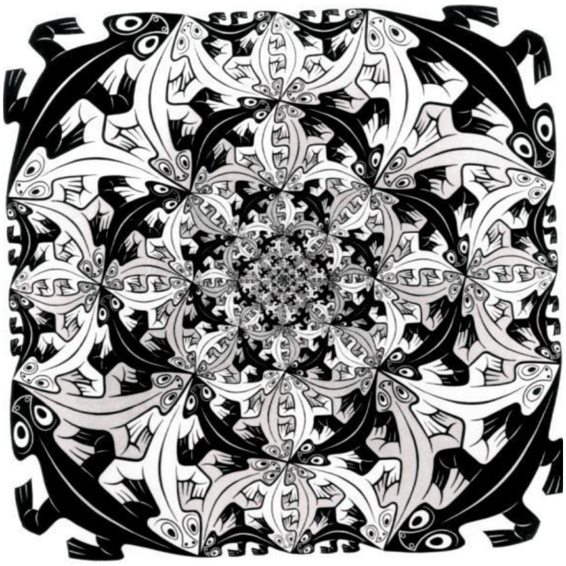
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Pante%C3%A3o_(Roma)

Figura 10. Arte de Milton Dacosta (1915-1988)



Fonte: https://artsandculture.google.com/asset/em-vermelho/lQFOVrdxGtKHjw

Figura 11. Pintura do artista Escher (1898-1970)



Fonte: https://crimideia.com.br/blog/?p=971

Outro conceito muito utilizado na arte e na matemática, é o de profundidade. Estudos de al-Haytham (c. 965-1040), Filipo Brunelleschi (1377-1466), Piero Della Francesca (1416-1492), Luca Pacioli, Leonardo da Vinci (1452-1519), Albrechet Durer (1471-1528), Frederico Commandino (1506-1575), Daniele Barbaro (1574-1570), dentre outros, contribuíram significativamente para o avanço desta perspectiva e foram os pilares para a construção artística da sociedade moderna.

Já no século XIX, ocorreram diversas mudanças que levaram a separação na mente das pessoas do científico e do artístico, separando os papéis de matemáticos e arquitetos, na sociedade. Isso não significa que as conexões tenham sido desfeitas, apenas que os aspectos científicos e artísticos foram vistos como habilidades complementares que não podem ser encontradas na mesma pessoa.

Com os avanços tecnológicos, no século XX, a utilização de computadores para a produção, manipulação e exibição de imagens apenas se tornou possível a partir da década de 1950, graças ao surgimento de monitores capazes de exibir gráficos e de plotters para imprimi-los.

Esta ferramenta tecnológica agregou enorme auxílio ao estudo gráfico de funções e vai muito além do que a simples matemática visual, visto que, de acordo com Zaleski Filho, (2013, p. 129 apud EMMER, 2005, p.6) o computador:

> [...] tem comportado não só o desenvolvimento de um setor da Matemática que podemos chamar de Matemática Visual, mas também um interesse renovado por parte dos artistas pela Matemática, pelas imagens matemáticas, que tem suscitado também por parte dos próprios matemáticos uma atenção renovada para os aspectos estéticos de algumas novas imagens científicas.

Zaleski Filho (2013) pondera ainda, sobre como o computador contribui para a lapidação da capacidade criativa em matemáticos e dos antigos anseios que este instrumento estimula a partir da sua utilização para fins gráficos:

> O computador é um autêntico instrumento para experimentar e formular conjecturas. O que pode interessar aos que se dedicam à relação entre Arte e Ciência é o eixo de que esta utilização gráfica por parte dos matemáticos tem desenvolvido muito sua capacidade criativa no que se refere às imagens. Ele tem levado, por um lado, a fazer renascer com mais intensidade a ambição dos matemáticos serem considerados como artistas, e, por outro lado, o redescobrimento da Matemática pelos artistas. (EMMER, 2005, p. 6)

Nesse sentido, os *softwares* e computadores gráficos permitem a análise de problemas já conhecidos e em aberto na Matemática, que possivelmente não seriam resolvidos pelos métodos tradicionais. Nas últimas décadas, com esse desenvolvimento tecnológico, tem-se intensificado a utilização de softwares como o GeoGebra, Mathematica, Maple, Ultra Fractral, entre outros, que se baseiam nos conceitos de perspectiva, simetrias e proporções e auxiliam na visualização de situações artísticas, arquitetônicas e matemáticas, nesta última, mais especificadamente na visualização de gráficos geométricos.

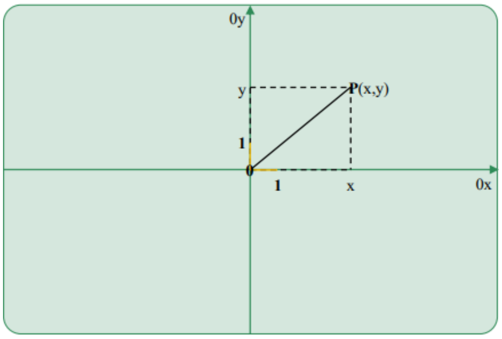
Alguns matemáticos têm utilizado esses recursos não apenas para o ensino da matemática, mas também para produzir arte. Essa arte vem sendo chamada de arte computacional. Dentre esses matemáticos destacamos Thomas Banchoff, David Austin, John Robinson, Dick Thermes, George Hart e João Carlos Moreira.

1.2 Abordagem geométrica

EM $\mathbb{R}^2$

Definição 1. Um sistema de coordenadas ortogonais cartesianas (ou retangulares) no espaço $\mathbb{R}^2$ é composto de um segmento de comprimento da unidade e duas retas orientadas perpendiculares; chamadas de eixos de coordenadas. O ponto de intersecção $\mathbf{0}$ dos eixos de coordenadas é chamado de origem do sistema de coordenadas. Um dos eixos de coordenadas $\mathbf{0x}$ é chamado de eixo das abscissas e o outro $\mathbf{0y}$ é chamado de eixo das ordenadas. Os eixos de coordenadas subdividem o plano $\mathbb{R}^2$ em quatro regiões chamadas de quartos ou quadrantes. As coordenadas cartesianas retangulares de um ponto **P** são representadas por um par ordenado $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ de números reais, sendo usualmente o primeiro chamado de abscissa e o segundo de ordenada, conforme a Figura 12.

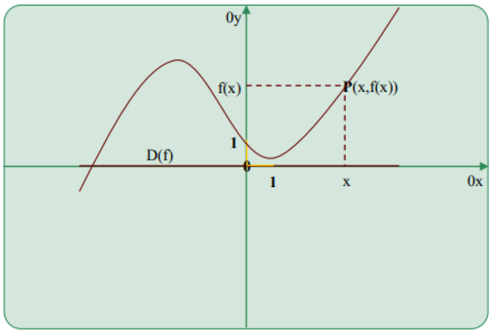
Figura 12 Representação do sistema de coordenadas ortogonais cartesianas em $\mathbb{R}^2$



Fonte: Arquivo pessoal do orientador

Definição 2. O lugar geométrico descritos pelos pontos da função $f = \{(x,\ f(x)): x \in D(f)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ representados em um sistema de coordenadas retangulares cartesianas denomina-se gráfico da função f, conforme a Figura 13.

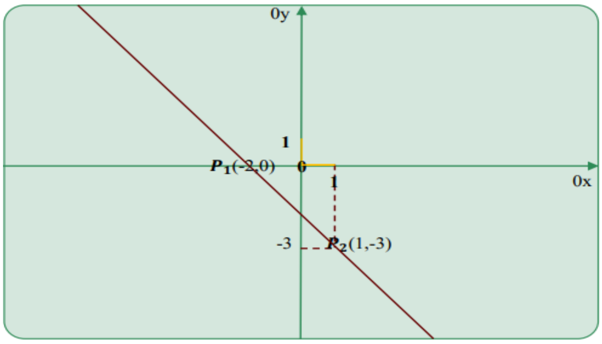
Figura 13. Representação do gráfico de uma função de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



Fonte: Arquivo pessoal do orientador

Exemplo 1. O gráfico da função $f = \{(x, -x-2): x \in D(f)\}$. (Figura 14)

Figura 14. Representação do gráfico de uma função de R→R



Fonte: Arquivo pessoal do orientador

Definição 3. A expressão algébrica $\sum_{i=0}^{m} a_i\, x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ é chamada de polinomial com coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_m$ e variável x. Os monômios $a_0 + a_1 x, \ldots, a_m x^m$, são chamados de termos da polinomial. Adotamos, por convenção que ($x^0 = 1$). O termo a_0 é chamado de termo constante da polinomial.

Definição 4. Uma relação $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é chamada de função polinomial de uma variável real a valores reais, se existir uma polinomial $\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ com coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\boldsymbol{f} = \{(\boldsymbol{x}, \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{m}} a_i x^i) : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\}$$

Escólio: O conjunto de todas as funções polinomiais de uma variável real a valores reais é denotado por $\mathbb{R}\,[x]$.

Exemplo 2: $f = \{(\boldsymbol{x}, \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{m}} a_i x^i): x \in \mathbb{R}\}$ é uma representação algébrica de uma função polinomial $f \in \mathbb{R}\,[x]$.

Definição 5. Seja $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ uma relação. Definimos a relação inversa de f, denotada por f^{-1} , como sendo a relação

$$f^{-1} \overset{\text{def}}{=} \{(y\,,x): (x\,,y) \in f\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Dizemos que uma relação $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é uma função do conjunto $U \subseteq \mathbb{R}$ em $V \subseteq \mathbb{R}$, denotada por $f{:}U \to V$, se: $(D(f) = U) \wedge (\forall x)(x \in U)((\exists!\, y)(y \in V) \wedge (x, y) \in f))$.

Escólio. Decorre imediatamente da definição de relação inversa de f que:

$$(D(f^{-1}) = Im(f)) \wedge (Im(f^{-1}) = D(f)) \wedge (f^{-1})^{-1} = f)$$

Escólio. Uma condição necessária e suficiente para que a relação inversa de f ser uma função $f^{-1} : V \to U$, chamada de função inversa de $f:U \to V$, é que a função $f:U \to V$ seja bijetora.

Definição 6. Se $f:U \to V$ e $g: V \to U$ são funções tais que

$$(\forall x)(x \in V)((f \circ g)(x) = x),$$

então a função g é chamada de função inversa à direita de f.

Escólio. Dada uma função $f: U \to V$, uma condição necessária e suficiente para que exista a função inversa $f^{-1}:V \to U$ de f, é que f^{-1} seja a função inversa à direita e à esquerda de f.

Definição 7. Uma função bijetora $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma **isometria** se

$$\|T(x_1, y_1) - T(x_2, y_2)\| = \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|, \forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, \forall (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Neste caso, se $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é uma relação binária e $T_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, n, n \in \mathbb{N}$ sãoisometrias, então R e $T_1 \circ \ldots \circ T_n(R)$ são ditas **congruentes**.

Definição 8. Uma **relação** $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tem simetria se existem relações $R_i \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n, n \in \mathbb{N}$ tal que $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$, e para algum $R_i, l = 1, \ldots, n, n \in \mathbb{N}$,

$$R_i = T_i^1 \circ \ldots \circ T_i^{ni} (R_i),$$

Onde $T_i^j: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, i = 1, \ldots, n$, n $\in \mathbb{N}$, j $= 1, \ldots, n_i, n_i \in \mathbb{N}$, são isometrias.

Exemplo 3: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, y)$é uma **isometria**. Em particular, uma relação $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é sempre congruente com ela mesma.

Exemplo 4: As translações $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, y) + (a, b)$ são **isometrias**. Em particular, dois triângulos $\Delta_1 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ **e** $T(\Delta_1) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ são congruentes**.**

Exemplo 5: As rotações anti-horárias de ângulo θ em relação à origem (0,0), $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, R_\theta = (\cos\theta + sen\,\theta\, y, -sin\,\theta\, x + cos\,\theta\, y)$ são **isometrias.**

1.3 Abordagem computacional

O uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no ensino da Matemática têm sido pauta de diversos estudos e fomenta desafios acerca da utilização dessas ferramentas e as suas contribuições para o ensino e aprendizagem nessa e em outras áreas do conhecimento. Essas tecnologias possibilitam a utilização de recursos que podem ser metodologias de mediação na construção do conhecimento em conteúdos pragmáticos, como também em habilidades do estudante, estimulando a relação entre professor-aluno- conteúdo.

Segundo Marin e Penteado (2011), quando o estudante chega ao ensino superior, na área de exatas, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é uma das que possui maior índice de reprovação. Embasados em estudos de outros autores como Koga (1998), Nasser (2004), Palis (1995), apontam que dentre os motivos para tal, destacam-se o fato de que esta disciplina, na maioria dos currículos é ministrada no início do curso, momento em que o aluno acaba de chegar do ensino médio, na maioria das vezes com uma experiência precária e um ensino defasado. Diante deste cenário, o estudante acaba tendo rendimento insuficiente e dificuldades de assimilação de conteúdo, ou, em alguns casos, possui o rendimento suficiente, porém a aprendizagem é técnica e não significativa, levando a novos empecilhos durante a trajetória acadêmica.

Tentando formalizar estas constatações, os pesquisadores Macêdo e Gregor (2020), fizeram em 2014 uma pesquisa com 105 alunos da disciplina de CDI 1, em seis cursos diferentes que possuem a disciplina no currículo, por meio de teste diagnóstico e aplicação de questionário, no início de cada semestre, no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais (IFNMG), campus Januária. A pesquisa teve como base outros estudos realizados com o mesmo intuito em outras universidades do país. Os autores constataram que a maioria dos estudantes participantes da pesquisa, alegaram que a maior dificuldade na ementa era a representação e análise de gráficos. Este fato é de fácil constatação quando consultamos os dados sobre aprovação e reprovação por disciplina em cursos que ofertam CDI, sendo que esta, encontra-se sempre entre as com maior índice de reprovação.

Pensando nisso, é indispensável o uso de tecnologias de informação como uma das alternativas para sanar este desafio. Um dos recursos que auxiliam nestas situações de aprendizagem são os *softwares*, que segundo Machado, Apud, Marin e Penteado (2011, p.531), fazem com que:

> [...] as aulas de Matemática com o auxílio da ferramenta computacional provoquem mudanças nos papéis e nas interações de professores e estudantes. Na sala de aula com a ferramenta computacional não tem espaço para o saber pronto e acabado a ação educativa ocorre em lócus. A sala de aula ou laboratório é transformada em local de trabalho com o conhecimento, espaço de construção de habilidades e competências tanto do educando quanto do educador (MACHADO, 2008, p.193).

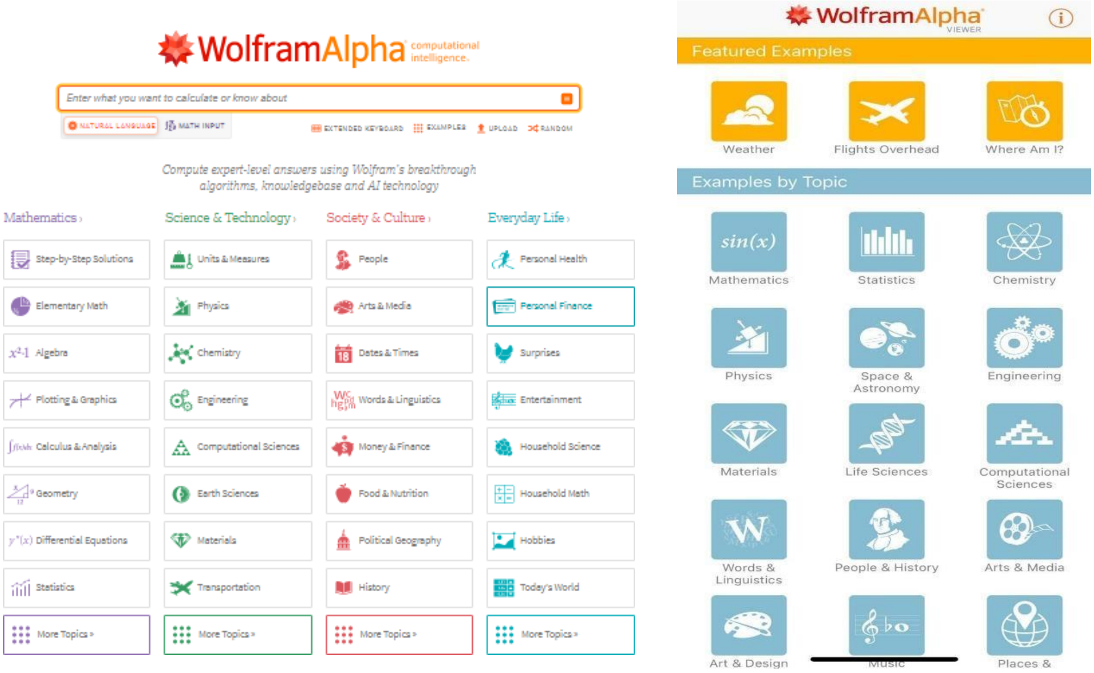
Atualmente existem diversos *softwares* de plotagem de gráficos conhecidos, podendo citar o Wolfram/Alpha, Winplot, GeoGebra, Graphmatica, MATLAB, dentre outros e aplicativos artísticos que auxiliam a visualização e memorização de gráficos, como o *Amaziograph*. Neste trabalho, iremos utilizar o Wolfram/Alpha para realizar o estudo geométrico das funções que serão escolhidas e suas respectivas plotagens, devido a familiaridade do autor com a plataforma.

Lançado em maio de 2009, o mecanismo Wolfram/Alpha foi desenvolvido por Stephen Wolfram, que é também o criador do software Mathematica e é disponibilizado gratuitamente na internet. Segundo Rodrigues (2011, p.1):

> Trata-se dum serviço baseado num motor de busca inovador que fornece respostas concretas ás questões formuladas. Calcula de forma dinâmica os resultados das consultas, científicas ou não, feitas em linguagem natural por aplicação de algoritmos de busca na sua extensa base de dados.

O desenvolvedor, Wolfram Group LLC disponibiliza os recursos de pesquisa e solução, em forma de aplicativo para os sistemas operacionais IOS, Android, Kindle e Windows Phone, com uma interface dinâmica, sem deixar de priorizar as ferramentas e funcionalidades da versão online, como mostra a Figura 15.

Figura 15. Interface da versão online (à esquerda) e do aplicativo do Wolfram/Alpha (à direita)

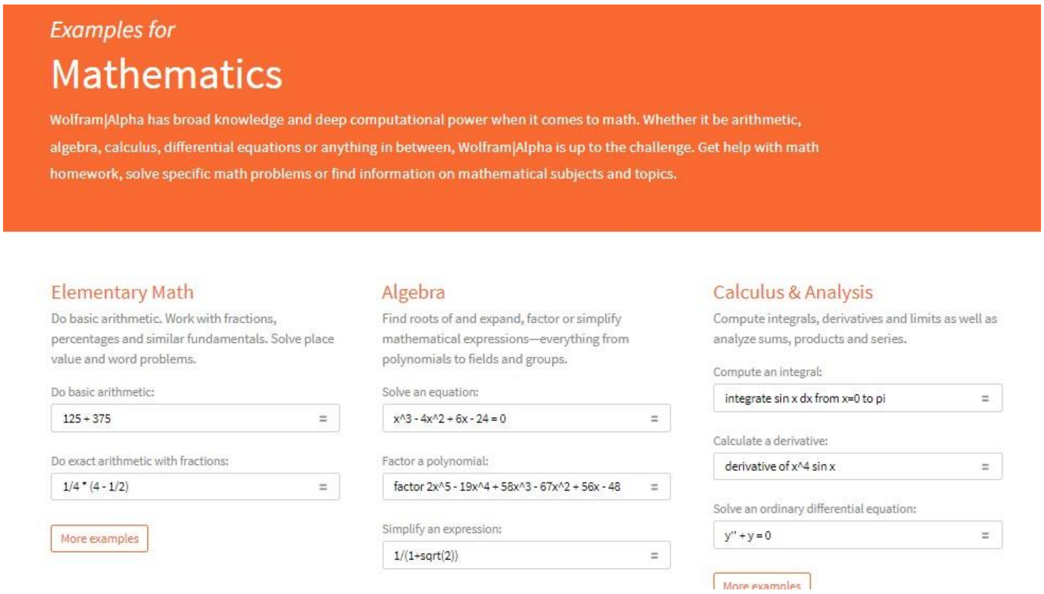


Fonte: https://www.wolframalpha.com/

Neste trabalho, iremos utilizar os recursos de plotagem de gráficos disponíveis na aba “Mathematics” (Figura 16), mais especificadamente o tópico “Plotting & Graphics” desta seção. Nela, é possível a plotagem de gráficos de funções diversas em duas e três dimensões (2D e 3 D), equações, inequações, equações paramétricas e coordenadas polares (Figura 17). Além disso, é possível plotar mais de um gráfico no mesmo sistema de coordenadas.

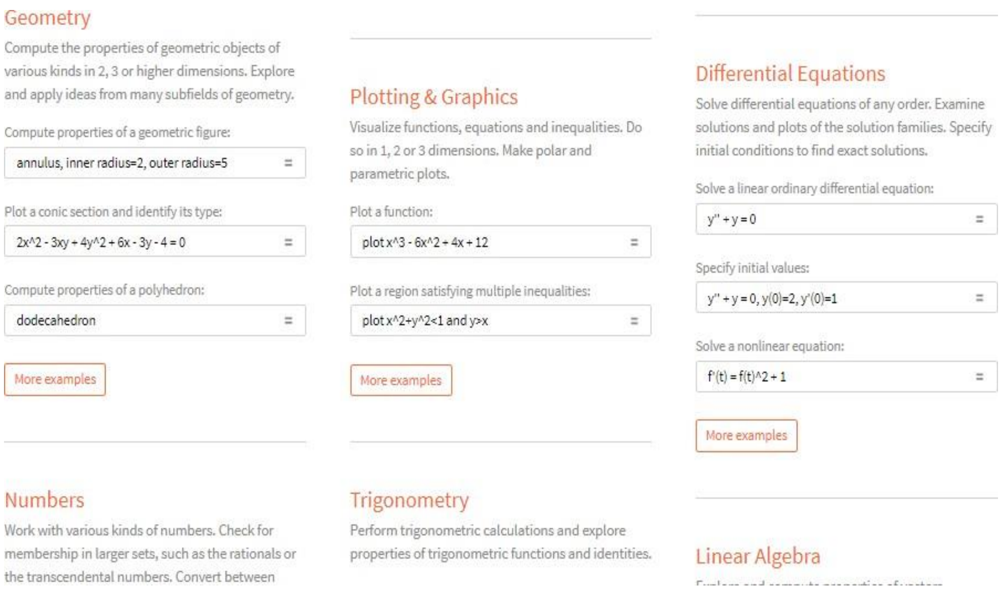
.

Figura 16. Algumas funcionalidades da aba “Mathematics” do Wolfram/Alpha



Fonte: https://www.wolframalpha.com/

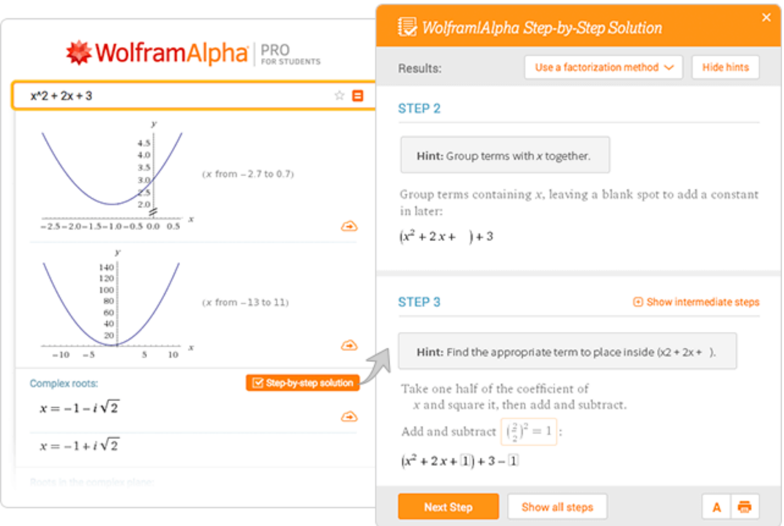
Figura 17. Algumas funcionalidades da aba "Mathematics" do Wolfram/Alpha



Fonte: https://www.wolframalpha.com/

Embora pouco utilizado por professores, o mecanismo de pesquisa e resolução de problemas é mais difundido entre estudantes, que utilizam a interface pela enorme capacidade de resolução tanto simbólica, quanto gráfica, possibilitando uma análise mais detalhada de cada situação, por meio da funcionalidade "*Step-by-step*", que apresenta a solução passo-a-passo do problema, estimulando a compreensão total da solução e o aprofundamento e continuidade do estudo, por parte do estudante.

Figura 18. Exemplo de solução "Step-by-step" no Wolfram/Alpha

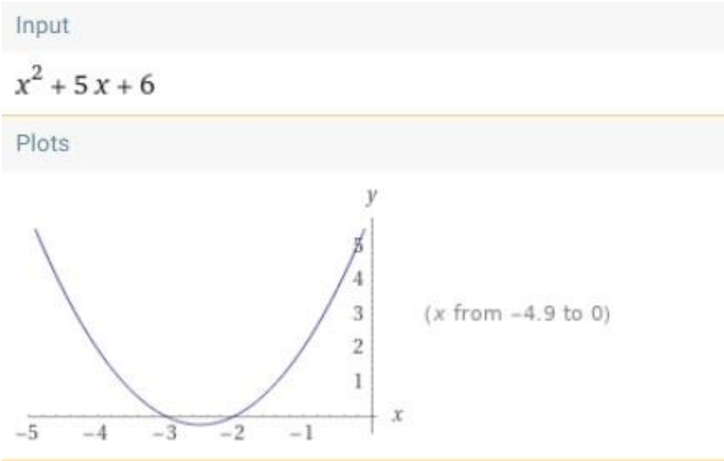


Fonte: https://www.wolframalpha.com/examples/pro-features/step-by-step-solutions/

No exemplo acima (Figura 18), para a equação dada, a interface apresenta o gráfico, o tipo de figura, outras representações para a mesma expressão, raízes complexas e reais se houverem, e as etapas de como calculá-las. Caso o usuário deseje plotar um gráfico, ele deverá na barra comando, digitar o termo em inglês "*plot*", acrescido da expressão algébrica que deseja se obter o gráfico.

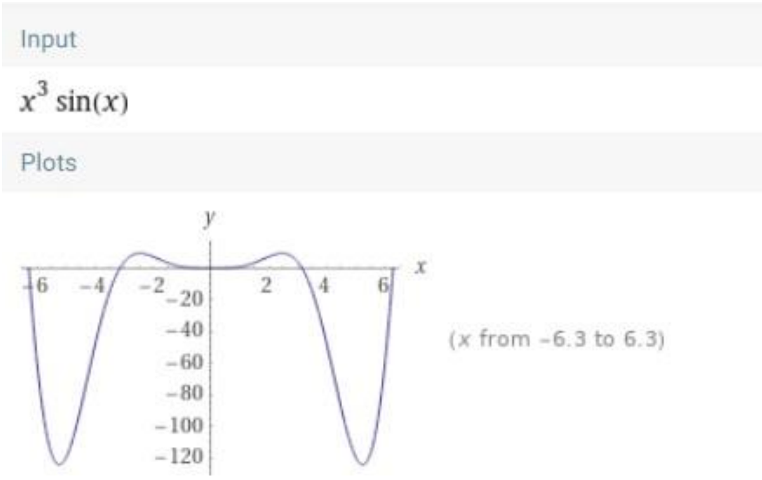
Abaixo, nas Figuras 19 e 20, temos o exemplo de plotagem da funções cuja as imagens são expressas por $f(x) = x^2 + 5x + 6$ e $f(x) = x^3 senx$, respectivamente.

Figura 19. Exemplos de plotagem de gráfico no Wolfram/Alpha



Fonte: https://www.wolframalpha.com/

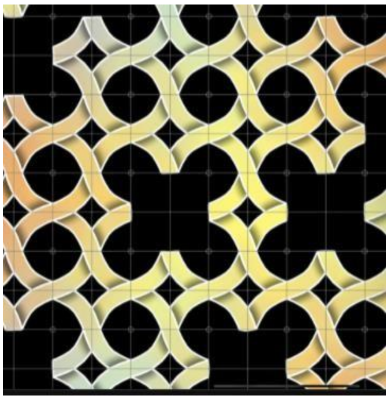
Figura 20. Exemplos de plotagem de gráfico no Wolfram/Alpha



Fonte: https://www.wolframalpha.com/

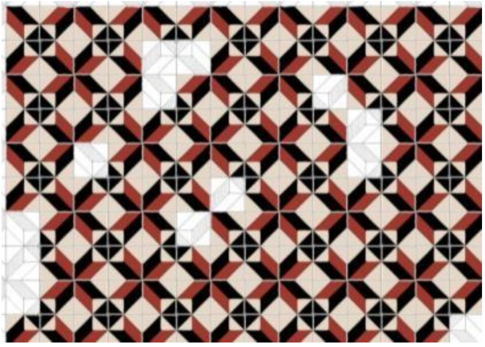
Além deste *software*, será utilizado também o aplicativo Amaziograph, utilizado na disciplina de Arte e Matemática. Desenvolvido com a finalidade de criar mandalas e mosaicos, o aplicativo oferece diversos tipos de simetrias, que proporcionam resultados fascinantes e que dialogam com conceitos matemáticos, conforme mostram as Figuras 21 e 22.

Figura 21. Exemplos de simetria criada com o Amaziograph



Fonte: Aplicativo Amaziograph para Windows

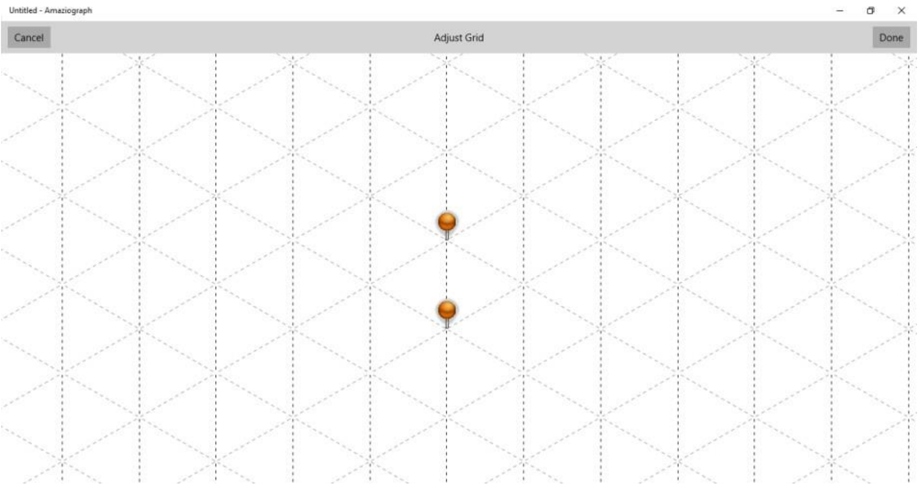
Figura 22. Exemplos de simetria criada com o Amaziograph



Fonte: Aplicativo Amaziograph para Windows

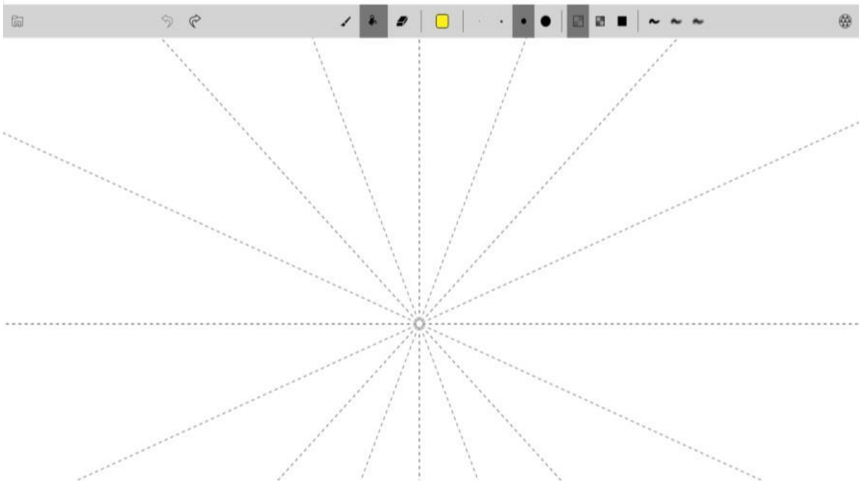
Existem cerca de 30 eixos de simetrias na tela do aplicativo, o artista pode definir a quantidade de eixos como desejar. O desenho pode ser feito livremente com o dedo ou o mouse do computador. Este recurso permite a criação de simetrias cada vez mais complexas, conforme mostram as Figuras 23 e 24.

Figura 23. Exemplos de seleção de eixos de simetria no Amaziograph



Fonte: Aplicativo Amaziograph para Windows

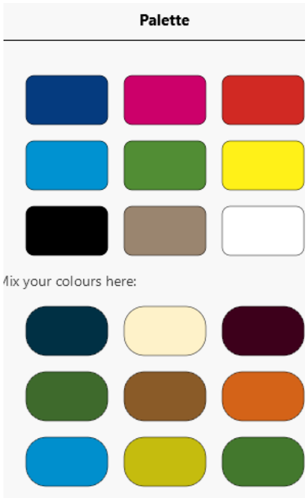
Figura 24. Exemplos de seleção de eixos de simetria no Amaziograph



Fonte: Aplicativo Amaziograph para Windows

Em relação a paleta de cores do aplicativo, a interface oferece um recurso inovador para misturar cores, onde o artista arrasta uma cor de uma célula para a outra, resultando em uma nova cor de acordo com a intensidade do arrasto, conforme mostra a Figura 25, onde as nove cores da parte inferior, foram criadas pela mixagem em pares das nove superiores.

Figura 25. Paleta de cores do Amaziograph



Fonte: Aplicativo Amaziograph para Windows

Softwares e aplicativos como o Wolfram e o Amaziograph são alguns dos vários exemplos de ferramentas com esta finalidade na internet. Como dito anteriormente, aqui priorizados devido a familiaridade e vivência do autor com a utilização destes softwares dinâmicos.

Sabemos que no mundo atual, com a pandemia e já com o movimento tecnológico que está em curso neste século, o uso de tecnologias de aprendizagem se tornou indispensável. Neste sentido, cabe ao educador ter domínio de ferramentas metodológicas tecnológicas que o permitam contextualizar, aprofundar e facilitar a aprendizagem por estes meios.

Na direção oposta ao caminho do desenvolvimento tecnológico, estão problemas como a pouca habilidades/conhecimentos dos docentes em lidar com a tecnologia, a falta de computadores, laboratórios e orçamento para manutenção dos equipamentos, dificultando o progresso educacional justo e atualizado, para todos. São necessários mais investimentos em políticas públicas educacionais neste sentido e também estipulação de padrões de controle de qualidade da utilização destes recursos pelos estudantes durante as aulas.

CAPÍTULO 2

A IMPORTÂNCIA DE CURSOS ARTÍSTICOS EM CURRÍCULOS FORMATIVOS NA ÁREA DE EXATAS

Neste capítulo será feita uma breve abordagem histórica acerca do desenvolvimento educacional do Brasil e na Europa, especificadamente para as disciplinas de Arte e Matemática, buscando ressaltar as potencialidades da presença de disciplinas de cunho artístico no currículo do curso de Matemática e algumas reflexões acerca do tema abordado. A seguir, apresentaremos a disciplina de Arte e Matemática, ofertada pelo ICENP/UFU, além de algumas obras que foram produzidas no decorrer da disciplina e que serviram de inspiração para a produção desta pesquisa.

2.1 O Ensino da Arte e Matemática na Europa

O sistema educacional no mundo medieval, na Europa, particularmente, de acordo com Zaleski Filho (2013, p.25) baseava-se no *Trivium* e *Quadrivium,* que eram impostos pela Antiguidade, e eram estruturados na forma de currículo básico, abordando conceitos de Gramática, Geometria, Música e Astronomia, conforme a Figura 26:

Figura 26. Representação do Quadrivium

Fonte: Quadrivium

Estes dois princípios, destinavam-se a todos os cidadãos e não tinha como foco principal o preparo para o trabalho ou formação específica. O autor pondera que a expressão "isto é trivial" é uma referência direta aos saberes do *Trivium* e do *Quadrivium,* considerados básicos e elementares. Sobre os dois modelos, Matineau (2014, p.2), descreve que:

> Pode-se dizer que o trivium da linguagem está estruturado sobre os valores fundamentais e objetivos da Verdade, da Beleza e da Bondade. Seus três temas são: a gramática, que assegura a boa estrutura da linguagem; a lógica, para encontrar a verdade, - e a retórica, para o belo uso da linguagem ao expressar a verdade. O quadrivium, por sua vez, surge do mais reverenciado de todos os assuntos disponíveis à mente humana: o número. A primeira das disciplinas que o compõem é a aritmética. A segunda é a geometria, ou a ordem do espaço como número no espaço. A terceira é a música, que, para Platão, significava o número no tempo. A quarta é a astronomia, ou o número no espaço e no tempo. Esses sete estudos oferecem uma escada segura e confiável para alcançar os valores simultâneos da Verdade, da Beleza e da Bondade, o que leva ao valor essencial e harmonioso da Totalidade.

Ainda sobre a utilização do *Trivium* como currículo básico, Zaleski Filho (2013, p.26) apud Machado (2002, p.137) afirma que:

> [...] De fato desde o Trivium, o currículo básico na Grécia Clássica, era composto pelas disciplinas de Lógica, Gramática e Retórica. Certamente o que se visava não era o desenvolvimento destas enquanto disciplinas, nem a formação de lógicos e linguistas; visava-se à formação de cidadãos. Depois do Trivium havia o Quadrivium composto pelas disciplinas de Música, Aritmética, Geometria e Astronomia, por meio das quais se buscava um aperfeiçoamento ou uma afinação da mente. No fim da Idade Média, no limiar da Ciência Moderna, ocorre paulatinamente uma inversão das disciplinas clássicas, passando a Matemática e a Física, ainda que sob o rótulo mais amplo de Filosofia Natural, a compor o instrumental para a formação básica, e o interesse pelas Letras e pela Retórica passa a ser associado ao polimento do espírito.

Machado (2002), ressalta que desde o *Trivium*, as disciplinas desempenham tanto o papel de sentido pleno, apoiado na arte ou na religião, e o suporte para a construção do caráter e da cidadania em pessoas em crescimento, como crianças.

As raízes criadas por estes dois modelos perduraram e precisaram de alguns séculos para serem superadas. Até o século IX, pouco se evoluiu em relação as Artes Liberais.

Já no século XI, a Geometria volta a ganhar destaque com o auxílio de Leonardo Fibonacci (1170-1250), com os livros "*Practica geometriae e Liber quadratorum*" e no auge com Brunelleschi (1377-1446) e sua teoria sobre perspectiva. Apesar das significativas contribuições, a geometria, neste período, ainda era pouco difundida nos currículos universitários.

No século XII, com os adventos da Renascença e era Moderna, a geometria começa a formalizar-se teoricamente e volta a ter destaque na Arte Renascentista. Essa era, marca uma Matemática de analogias e poucas fórmulas, e na Arte, a representação da natureza como um todo.

Zaleski Filho (2013) apud Nunes (2006), aponta que o destaque veio graças ao trabalho de artistas e engenheiros que foram personagens importantes na mudança da visão em relação à Arte e por relacioná-la com a Matemática e ainda pondera que:

> No Renascimento ocorre um significativa mudança em relação a Idade Média, na maneira de encarar a Pintura, a Escultura e a Arquitetura, que anteriormente eram encaradas como artes servis. Leonardo da Vinci e outros artistas reivindicam para essas artes o *status* de atividade intelectual, que antes era só concedido à Poesia. As belas-artes ganham o reconhecimento de síntese da práxis com a imaginação, da atividade formadora com a inteligência, que tem como objetivo registrar a beleza das formas naturais em obras que peçam, simultaneamente, a visão sensível e a contemplação intelectual.

O século XV, no qual se inicia o Renascimento, com o redescobrimento da Arte e do Saber, mostra um interesse dos artistas em mostrar que a arte possa ser um retrato da vida real, muito além do que a já questionada utilização para representação da história sagrada.

Já no século XVI, a descoberta da solução algébrica de equações de terceiro e de quarto graus, por matemáticos italianos, foi o estimulo para que a Álgebra e Aritmética pudessem continuar se desenvolvendo. Esta época vem marcada na Arte, pelo interesse dos pintores em produzir quadros mais fidedignos aos objetos representados, buscando formulações para representação em tela.

Seguindo para o século XVII, sob a influência de Gerard Desargues, alguns matemáticos buscaram aprofundar a teoria sobre perspectiva. Em 1637, René Descartes (1596-1650), apresenta suas formulações sobre a Geometria Analítica, baseado numa interpretação e solução algébrica para problemas geométricos, fazendo com que esta área obtivesse mais destaque do que a Geometria Projetiva e sendo considerado um dos mais importantes métodos da Matemática. Entretanto, o maior destaque deste século vai para a criação do Cálculo Diferencial e Integral, desenvolvido por Wilhelm Leibniz e Isaac Newton, oriundo da Álgebra e da Geometria.

No século XVIII, Augustin Louis Cauchy aperfeiçoa o Cálculo, permitindo assim, que este se tornasse um dos principais alicerces da Matemática e de outras áreas do conhecimento, devolvendo o destaque a Arte e Geometria neste momento do mundo moderno.

No século XIX, Monge, Lagrange, Laplace, Carnot e Condorcet, são os precursores de uma nova visão na matemática no ramo geométrico e analítico, trazendo de volta o rigor matemático e a expansão da geometria. Este momento marca a mudança do ensino, afetada pela Revolução Industrial, onde o interesse estava mais voltado para o ensino tecnicista e produção mecânica. O progresso material e o consumismo de produtos fabricados em larga escala, evidencia neste período o descaso com artistas e as artes em geral.

Na Matemática, Zaleski Filho (2013) apud Boyer (1974), consideram o século XIX como:

> A idade de ouro da Geometria". Entre os ramos da Matemática, a Geometria tem sido a que mais se sujeitou às mudanças de uma época para outra. Subiu ao topo na Grécia clássica para cair quase ao esquecimento no final do Império Romano. Recuperou-se em parte na Arábia e na Europa do Renascimento; no século XVII esteve no começo de uma nova era, mas foi novamente colocada de lado, ao menos pelos pesquisadores de Matemática. Por quase duzentos anos permaneceu sob os ramos fecundos da nova análise. Em particular, a Inglaterra lutou para novamente colocar os Elementos de Euclides em posição de destaque, embora pouco fazendo para o desenvolvimento da pesquisa no assunto.

O século XX, traz nas suas duas primeiras décadas uma perca de referência nas artes e com a 1ª e 2ª Guerra Mundial, causa um vão histórico no desenvolvimento cultural e científico. Entretanto, este século também é marcado pelo brilhantismo do artista Mondrian, no Neoplasticismo baseado em movimentos cubistas e naturalistas, abstração geométrica e redução da expressão plástica. Na Matemática, trava-se um empasse entre teóricos e práticos, na busca pela razão.

O desenvolvimento tecnológico muda os interesses na Arte e na Matemática e a forma como estas áreas são vistas. Para este século, Zaleski Filho (2013, p.142), aponta que:

> Mondrian é o precursor na Idade Contemporânea da união entre a Arte e a Matemática, e um dos precursores da Matemática Visual, pois, como foi citado anteriormente, nos últimos anos o uso do computador em Matemática produzindo imagens tem contribuído para um interesse recíproco entre artistas e matemáticos. O trabalho de Mondrian foi um dos primeiros, senão o primeiro, a caminhar nesse sentido. O século XX, segundo Hobsbawm, seria o século dos matemáticos, e ele foi um século de grandes conquistas e de muitas incertezas. Que no século XXI a Arte possa se unir não só a Matemática, mas a todas as outras ciências para juntas ajudarem a pintar um quadro do qual, contrariando Hobsbawm, a escuridão não faça parte.

Para o século XXI, o autor espera que seja uma construção em ambas as áreas sem nos basearmos em prolongamentos do passado ou do presente. E que a evolução até aqui seja o alicerce de novas descobertas, currículos e estudos. A Arte e a Matemática, atreladas aos novos mecanismos de estudos e tecnologias, podem fornecer respostas de perguntas que até então, estavam em aberto e, o aperfeiçoamento e compressão de técnicas artísticas já existentes.

2.2 O Ensino da Arte e Matemática em currículos formativos no Brasil

Como apresentado anteriormente, as áreas de Arte e Matemática estiveram ligadas ao longo do tempo e de acordo com os avanços e necessidades da sociedade moderna e contemporânea, foram se separando e criaram sua própria estrutura. Com a educação ocorreu o mesmo. Recapitulando um pouco da história educacional do país, das disciplinas e dos currículos escolares, de acordo com Zaleski Filho (2013, p. 95, apud ROMANELLI, 2001) desde o descobrimento do Brasil até o ano de 1808, o país não podia criar escolas de ensino superior, o que acabava limitando o ensino ao que os Jesuítas da Companhia de Jesus pretendiam em relação a educação. Só após 49 anos, ou seja, em 1549, foi fundada a primeira escola primária do Brasil, em Salvador, na Bahia, por Tomé de Souza. No ano seguinte, em São Vicente, São Paulo, o Jesuíta Leonardo Nunes fundou a segunda escola primária. Em ambas não era ministrada a disciplina de Matemática.

Em relação ao curso de Artes, somente em 1572, no Colégio Jesuíta de Salvador, que houve a primeira oferta de formação nesta área e que de acordo com Zaleski Filho (2013, p.96, apud, SILVA, 1999, p. 35), estudava-se ao longo do curso:

> Matemáticas, Lógica, Física, Metafísica e Ética. O curso conduzia seus alunos ao grau de bacharel ou licenciado. Naquele Colégio, o ensino das Matemáticas iniciava com Algarismos ou Aritmética e ia até o conteúdo matemático da Faculdade de Matemática (onde se estudava, dentre outros tópicos, Geometria Euclidiana, Perspectiva, Trigonometria, alguns tipos de equações algébricas, Razão, Proporção, Juros), que fora fundada em 1757. Dos dezessete Colégios mantidos pelos jesuítas no Brasil colônia, em apenas oito funcionavam os cursos de Artes ou de Filosofia.

De acordo com o autor, os primeiros cursos de Artes foram concluídos em 1575, na modalidade bacharel e licenciatura. Em 1578, o primeiro grau de mestre e 1581 o primeiro grau de doutor em Teologia. Essa positiva utilização da matemática em cursos de artes, ao longo dos anos, estimulou que em 1757, fosse fundada a primeira Faculdade de Matemática, no Colégio de Salvador. Somente em 1808, com a vinda da família real ao Brasil, os cursos e métodos de ensino começaram a sofrer alterações. Após a declaração de Independência do Brasil, em 1822, houve um aumento no número de faculdades fundadas e consequentemente na utilização da matemática nos currículos formativos dos cursos.

Sendo assim, a forma como os jesuítas inseriram a Matemática na educação primária brasileira mostra como a matemática e a arte estavam diretamente relacionadas e de que forma, ao longo dos anos, devido as necessidades específicas científicas de cada área, o ensino de artes utilizando a matemática foi enfraquecendo e abrindo espaço para uma matemática mais tecnicista e metódica. Isso se deve ao fato de que, como o avanço industrial (que buscava a formação técnica de mão de obra), tecnológico, além de fatores como a não prioridade da disciplina de artes em currículos formativos de escolas de 1º e 2º grau, fazendo com que a disciplina passasse a ser um privilégio das classes mais ricas e da elite.

Zaleski Filho (2013, p. 121, apud, BARBOSA, 2001, p.2) afirma que:

> Desde o século XIX que desenho, na escola, é apenas desenho geométrico, destituído de compreensão e aplicabilidade. A dimensão da criação em Arte, que aliada à técnica gera tantos empregos e renda no país, tem estado fora do alcance das mentes tecnológicas que vêm dirigindo a nossa educação.

O autor pondera que este cenário começou a mudar, quando em 1996, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB), capítulo II, Seção I, artigo 26 no inciso 2, estabelece que “O ensino da Arte constituirá componente curricular obrigatório, nos diversos níveis da educação básica, de forma a promover o desenvolvimento cultural dos alunos”, e posteriormente com a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) para o ensino da Arte, no ensino fundamental I e II, pelo Ministério da Educação, faz com que a Arte tenha espaço na educação básica brasileira.

Esse movimento, fez com que as Universidades repensassem o currículo formativo dos futuros matemáticos, buscando atender essa nova exigência governamental para que os profissionais do ramo sejam devidamente habilitados para promover este tipo de aprendizagem nas escolas e em outras instituições de ensino.

Pensando nas constantes mudanças na aplicação da Matemática em outras áreas do conhecimento, o Ministério da Educação, por meio do Conselho Nacional de Educação (CNE), publicou em 2001, o parecer CNE/CES 1.302/2001 que discute as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura que estabelecem competências e habilidades que sirvam de orientação para universidades, na elaboração dos projetos pedagógicos de seus cursos e que assegurem aos egressos formação adequada para atuação no mercado profissional. O parecer CNE/CES 1.302/2001, afirma nó tópico 2, nas letras (f) e (k), que trata sobre questões pertinentes ao currículo do curso, que:

> Os currículos dos cursos de Bacharelado/Licenciatura em Matemática devem ser elaborados de maneira a desenvolver as seguintes competências e habilidades. f) estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento; k) trabalhar na interface da Matemática com outros campos de saber. (BRASIL, 2001, p. 04)

Já em relação às competências do educador matemático, o documento afirma que o profissional deverá ter a capacidade de:

> d) desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos. (BRASIL, 2001, p. 04)

Embora todas estas competências e habilidades indiquem a pretensão de um currículo interdisciplinar, quando o documento aborda o tópico 3, referente às disciplinas comuns para currículos de cursos de Matemática no Brasil, as áreas afins a Matemática, não são priorizadas no escopo principal da estrutura curricular, conforme o Quadro 1 a seguir:

Quadro 1 - Disciplinas comuns a todos os cursos de Matemática no Brasil

Licenciatura	Bacharelado
Cálculo Diferencial e Integral	Cálculo Diferencial e Integral
Álgebra Linear	Álgebra Linear
Fundamentos da Análise	Topologia
Fundamentos da Álgebra	Análise Matemática
Fundamentos de Geometria	Álgebra
Geometria Analítica	Análise Complexa
----	Geometria Diferencial

Fonte: Ministério da Educação/ Conselho Nacional de Educação. 2001.

O parecer normativo, só aborda outras áreas relacionadas com a Matemática, nos complementos deste tópico, em que apontam que devem ser considerados também:

> a) conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise; b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias; c) conteúdo da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática. (BRASIL, 2001, p. 06)

Como foi visto, disciplinas como Arte e Matemática, não são consideradas prioridades para a área comum dos currículos formativos do Ensino Superior e embora seja considerada no complemento do tópico, o documento estimula que os cursos de Matemática, ofertem estas disciplinas como optativas.

Percebe-se então, que embora tenhamos uma extensa e árdua trajetória educacional no país e que estamos buscando o aperfeiçoamento dos currículos para permitir a formação de um profissional sensível ao mundo contextualizado e no quesito de disciplinas, um profissional que saiba criar e abordar situações interdisciplinares, há um retrocesso no que tange o estimulo destas habilidades, por meio de disciplinas nos currículos das universidades, o que acaba, de certa forma, tornando o ensino defasado em relação as reais necessidades de aprendizagem dos educandos.

2.3 A disciplina de Arte e Matemática do ICENP-UFU: possibilidades de interdisciplinaridade no Ensino Superior

O curso de Matemática, do ICENP-UFU, é ofertado nas modalidades licenciatura e bacharelado e possui em sua estrutura curricular, aprovada no Projeto Pedagógico 2020, disciplinas obrigatórias e optativas conforme a Tabela 1, abaixo:

Tabela 1 – Síntese de distribuição de carga horária por componente curricular

COMPONENTES CURRICULARES	CH TOTAL	%
DISCIPLINAS OBRIGATÓRIAS	2130 h	61,9
DISCIPLINAS OPTATIVAS GERAIS	120 h	3,5
DISCIPLINAS OPTATIVAS DE LICENCIATURA	60 h	1,7
ESTÁGIO SUPERVISIONADO	435 h	12,7
PRÁTICA COMO COMPONENTE CURRICULAR (PROINTER+ Seminário Institucional das Licenciaturas - SEILIC)	435 h	12,7
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO (TCC I+TCC II)	60 h	1,7
ATIVIDADES ACADÊMICAS COMPLEMENTARES	200 h	5,8
TOTAL	**3440 h**	**100**

Fonte: Projeto Pedagógico do Curso de Matemática do ICENP/UFU. Disponível em http://www.icenp.ufu.br/system/files/conteudo/ppc_2020_matematica_licenciatura_correcao_7.pdf

No atual modelo de curso, o discente deve cursar 120h de disciplinas optativas gerais e 60h de disciplinas optativas na licenciatura e só poderão ser cursados após o primeiro período vencido, respeitados os pré-requisitos e co-requisitos de cada componente. Dentre as disciplinas que compõe a estrutura curricular optativa, encontra-se a disciplina de Arte e Matemática, com carga horária de 60 horas, sendo 15 horas para aulas teóricas e 45 horas para aulas práticas, e compõe o "NÚCLEO I - NÚCLEO DE ESTUDOS DE FORMAÇÃO GERAL, AS ÁREAS ESPECÍFICAS E INTERDISCIPLINARES E DO CAMPO EDUCACIONAL", que de acordo com o Projeto Pedagógico do Curso de Matemática (2020) "Constituem esse núcleo os conhecimentos que permitem ao estudante o domínio teórico da matemática, objeto da sua atuação na pesquisa e na educação".

Durante o desenvolvimento desta disciplina, o discente é exposto a diversos estudos e experiências que o permitem perceber como a Matemática é importante na evolução da arte, desde a pré-história até o mundo contemporâneo, além de estimular a expressão de habilidades artísticas, cognitivas e reflexivas nos alunos, conforme mostra o Programa da disciplina apresentado abaixo:

1- Arquitetura

1.1. História da Arquitetura

1.2. O número de ouro.

1.3. Os sólidos de Platão e de Arquimedes

1.4. Superfícies e arquitetura contemporânea

2- Música

2.1. História da Música

2.2. Pitágoras

2.3. Johann Sebastian Bach

2.4. Música Fractal

2.5. Séries de Fourier

2.6. Harmônicos

2.7. Oficinas

3- Artes Plásticas

3.1. História das Artes Plásticas

3.2. Arte Pré-História

3.3. Arte Egípicia

3.4. Arte Grega

3.5. Arte Renascentista

3.6. Barroco

3.7. Realismo

3.8. Arte Abstrata

3.9. Oficinas

4- Poesia

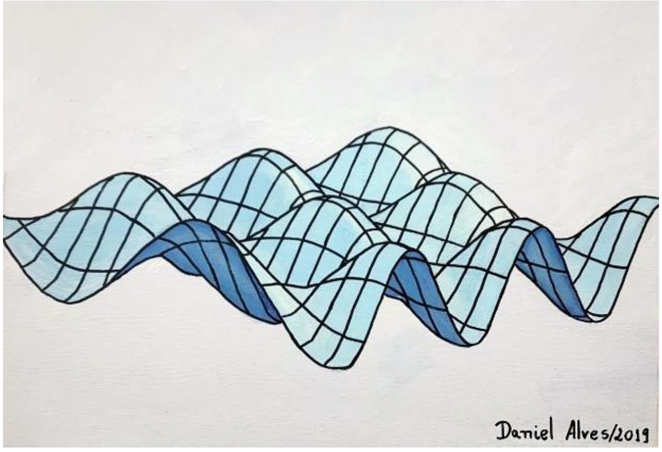
4.1. Poesia Concreta

4.2. Poesia Visual

4.3. Oficinas

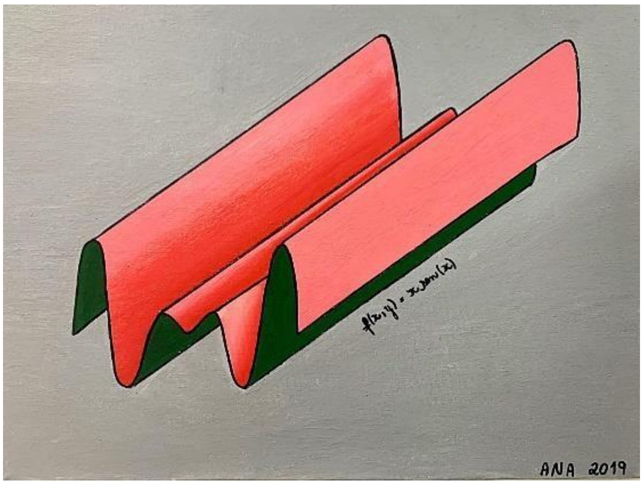
No ano de 2019, o autor desta pesquisa cursou a disciplina e, juntamente com os demais discentes, sob a supervisão do professor da turma, construíram duas galerias: 1- gráficos de funções de duas variáveis reais a valores reais; 2- quadros de pinturas envolvendo desenhos simétricos, desenhados com traço livre. Abaixo, nas Figuras 27 a 32, estão algumas imagens da Galeria 1.

Figura 27. Galeria 1- Gráficos de funções de duas variáveis reais a valores reais



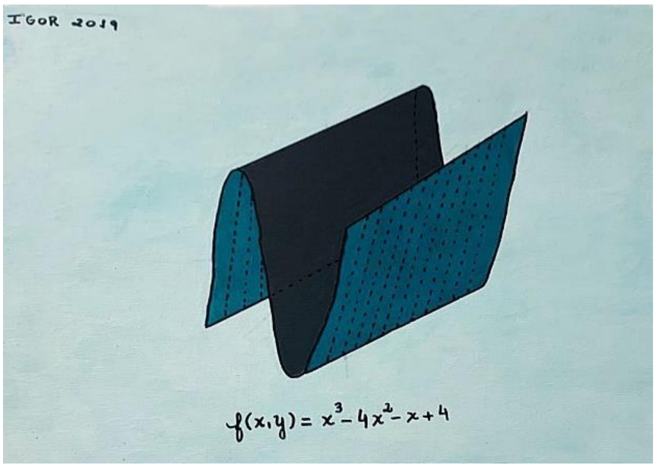
Fonte: Arquivo Pessoal do Pesquisador

Figura 28. Galeria 1- Gráficos de funções de duas variáveis reais a valores reais



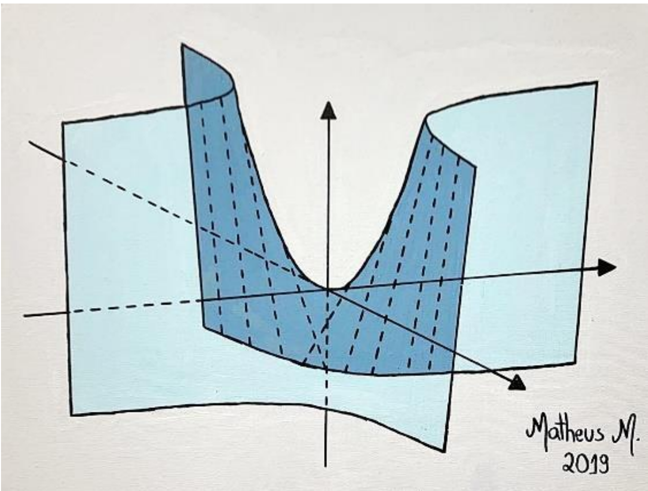
Fonte: Arquivo Pessoal do Pesquisador

Figura 29. Galeria 1- Gráficos de funções de duas variáveis reais a valores reais



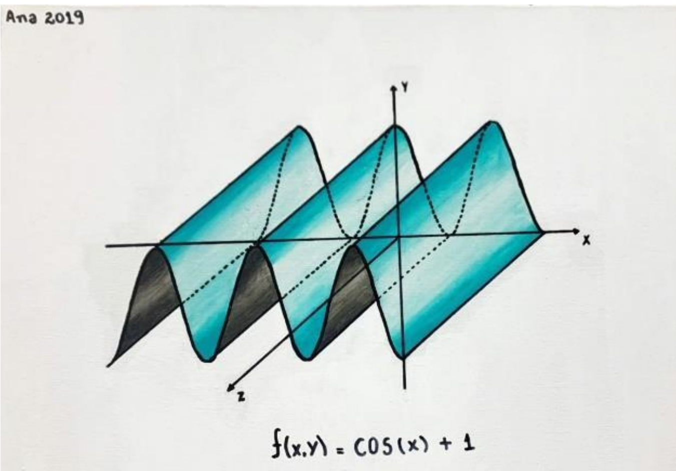
Fonte: Arquivo Pessoal do Pesquisador

Figura 30. Galeria 1- Gráficos de funções de duas variáveis reais a valores reais



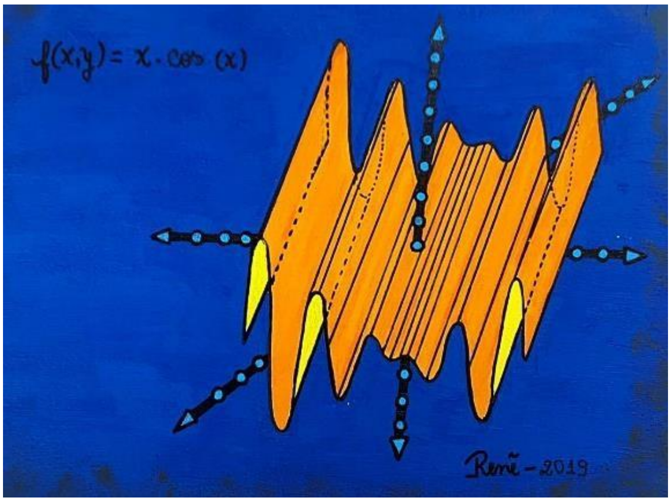
Fonte: Arquivo Pessoal do Pesquisador

Figura 31. Galeria 1- Gráficos de funções de duas variáveis reais a valores reais



Fonte: Arquivo Pessoal do Pesquisador

Figura 32. Galeria 1- Gráficos de funções de duas variáveis reais a valores reais



Fonte: Arquivo Pessoal do Pesquisador

Para realizar a construção da Galeria 2, os discentes tiveram que utilizar o *software Amazongraph.* Os resultados da utilização deste aplicativo, pelos discentes da turma de Arte e Matemática, formaram as seguintes obras de arte conforme mostram as figuras 33 a 38:

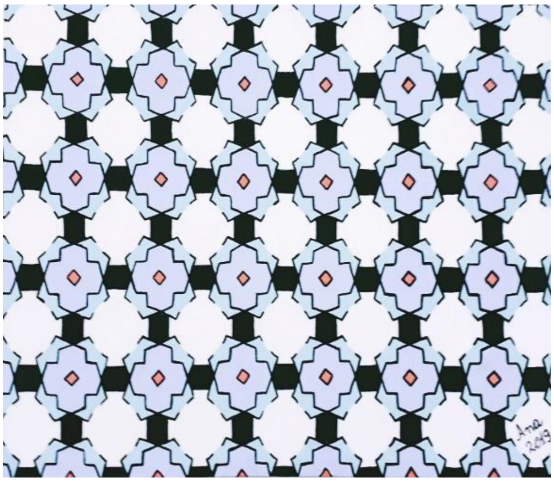
Figura 33. Galeria 2- quadros de pinturas envolvendo desenhos simétricos

Fonte: Arquivo Pessoal do Pesquisador

Figura 34. Galeria 2- quadros de pinturas envolvendo desenhos simétricos

Fonte: Arquivo Pessoal do Pesquisador

Figura 35. Galeria 2- quadros de pinturas envolvendo desenhos simétricos



Fonte: Arquivo Pessoal do Pesquisador

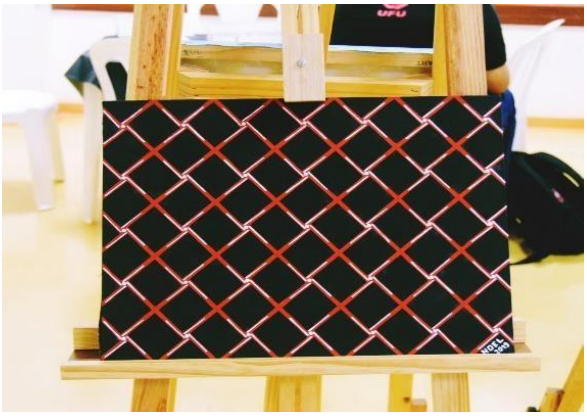
Figura 36. Galeria 2- quadros de pinturas envolvendo desenhos simétricos

Fonte: Arquivo Pessoal do Pesquisador

Figura 37. Galeria 2- quadros de pinturas envolvendo desenhos simétricos

Fonte: Arquivo Pessoal do Pesquisador

Figura 38. Galeria 2- quadros de pinturas envolvendo desenhos simétricos



Fonte: Arquivo pessoal

Como dito, o aplicativo baseia-se na simetria, que de acordo com Martineau (2014):

> [...] significa "medição em conjunto", e as coisas são denominadas simétricas quando possuem proporções harmoniosas, muitas vezes entre elementos repetidos. Os elementos podem ser repetidos de várias maneiras-, deslocados, espelhados, rotacionados, espiralados, escalonados, esticados, dobrados ou múltiplas combinações dessas ações.

Tendo em vista este significado e as obras apresentadas neste tópico, percebemos que o artista, antes de escolher a arte, deve refletir sobre os aspectos estéticos, técnicos e a paleta de cores que utilizará para embelezar e harmonizar o desenho. Estes pontos são fundamentais para uma perfeita expressão artística em pintura, pois de acordo com Plotino: "[...] A beleza visível resulta da simetria das partes, umas em relação às outras e em relação ao conjunto, e, além disso, de certa beleza de suas cores. Nesse caso, a beleza dos seres e de todas as coisas seria devido à sua simetria e sua proporção." (PLOTINO, 2000, p. 20).

Com tudo que foi apresentado neste capítulo, podemos perceber que as instituições de ensino superior, estão buscando aos poucos realizar essa reaproximação entre Arte e Matemática nos seus currículos, a exemplo disso, a disciplina de Arte e Matemática, ofertada pelo ICENP-UFU, como uma das primeiras disciplinas com este conteúdo a ser disponibilizada na grade curricular de um curso superior na área de exatas no Brasil. Este processo, embora lento, fornece mecanismos facilitadores de aprendizagem a medida em que são integrados aos currículos formativos, como pudemos perceber nos exemplos apresentados.

CAPÍTULO 3

GALERIA DE ARTE E MATEMÁTICA

Neste capítulo iremos apresentar a galeria de imagens construída apenas para este trabalho, utilizando como base funções de uma variável real a valores reais e suas transformações geométricas isométricas. A seguir será feita uma reflexão baseada em alguns autores, sobre este tipo de metodologia.

3.1 Construindo a Galeria

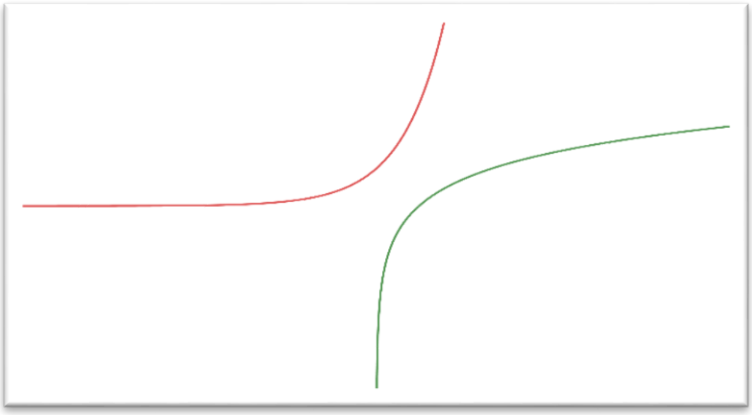
A galeria que será apresentada neste capítulo, é semelhante a que foi criada na disciplina de Arte e Matemática, porém com uma regra adicional: Todas as obras devem conter pelo menos uma aproximação de traço do gráfico de uma função de uma variável real a valores reais e, preferencialmente, que as transformações geométricas destas, também componham a obra.

O termo “aproximação” é utilizado devido ao fato de que o aplicativo *Amaziograph* tem como traço de pincel, o desenho livre, ou seja, não possui ferramentas de precisão na linha. Isso faz com que o movimento fique irregular durante o desenho, causado pela pequena tela do celular ou pela dureza do mouse (no caso do aplicativo para Windows), seja uma representação com aspectos visuais que permitam a identificação da função que se deseja copiar, sem a precisão do gráfico real.

As funções escolhidas para compor esta galeria, foram selecionadas levando em consideração o traço, o tipo de função e tudo que foi aprendido ao longo desta pesquisa e durante as proveitosas aulas de Arte e Matemática, no ICENP-UFU. A seguir, apresentaremos nos exemplos 1 a 3, como foi realizada a construção das obras de arte, desde a plotagem da função no Wolfram|Alpha, a etapa inicial da arte no Amaziograph, até a finalização da obra. As imagens dos exemplos irão seguir a ordem: gráfico, desenho inicial e arte final. Posteriormente, serão exibidas apenas a expressão algébrica da função base e o resultado final, com o restante das obras produzidas para esta galeria.

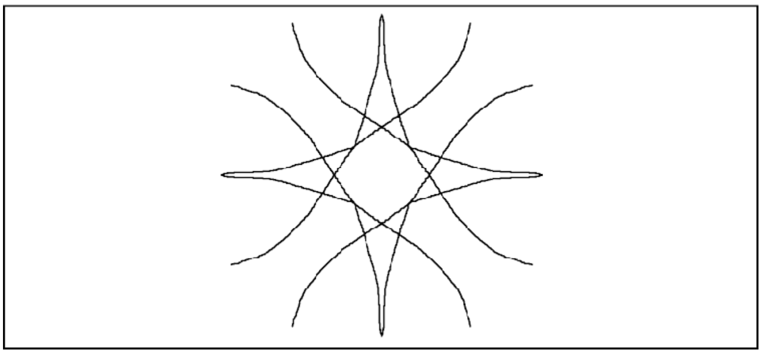
1- Funções cujas imagens são dadas por f(x)=ln x $(verde)e$ $g(x) = e^x(vermelho)$. (Figuras 39,40 e 41)

Figura 39. Gráficos das funções ln x e e^x



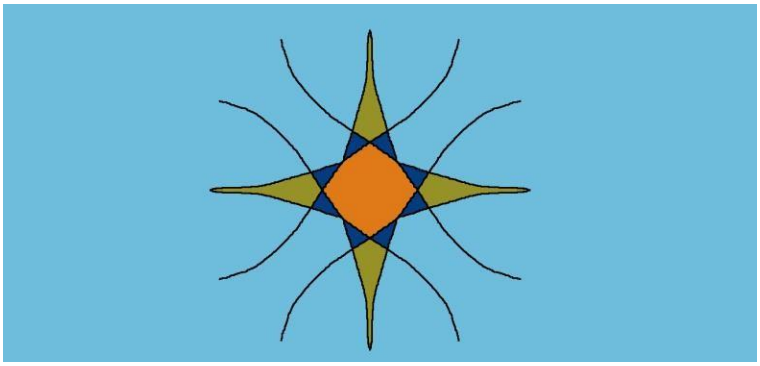
Fonte: Wolfram|Alpha

Figura 40. Simetria feita a partir dos gráficos das funções ln x e e^x



Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

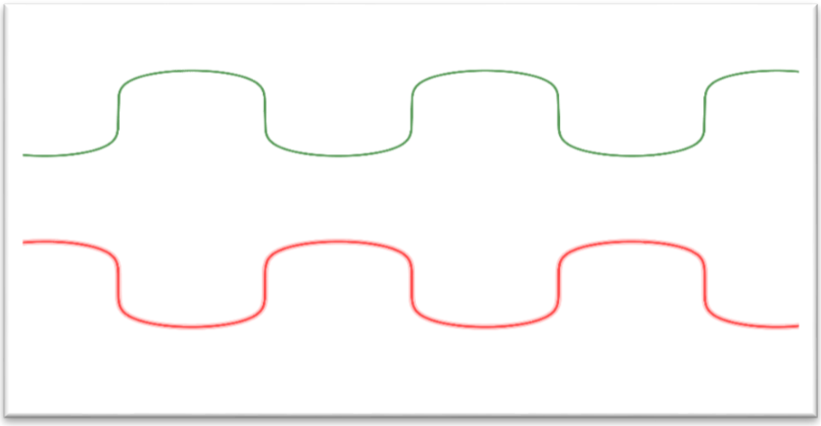
Figura 41. Arte finalizada 1



Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

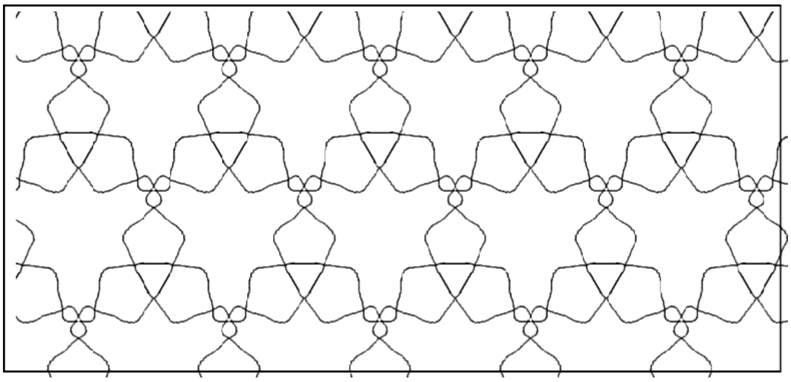
2- Função cuja imagem é dada por $f(x) = \sqrt[5]{senx}$ (verde) e sua reflexão em relação ao eixo x (vermelho). (Figuras 42,43 e 44)

Figura 42. Gráfico da Função $\sqrt[5]{senx}$ *e sua reflexão*



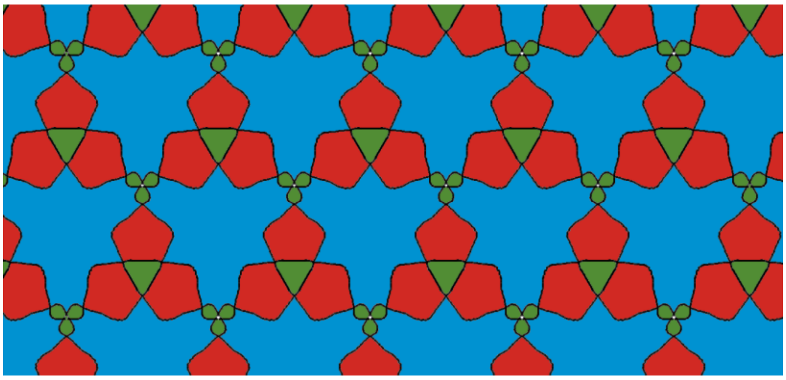
Fonte: Wolfram|Alpha

Figura 43. Simetria feita a partir da função $\sqrt[5]{senx}$



Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

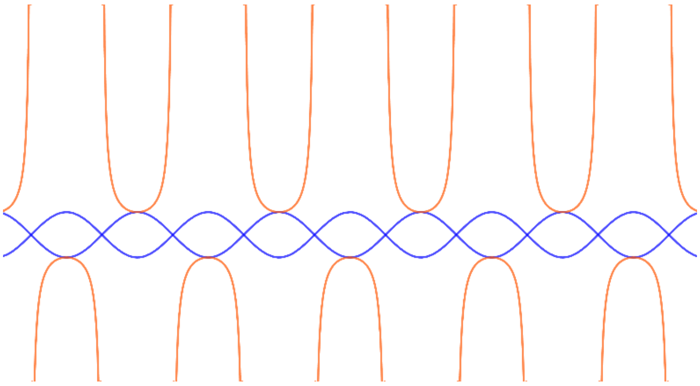
Figura 44. Arte finalizada 2



Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

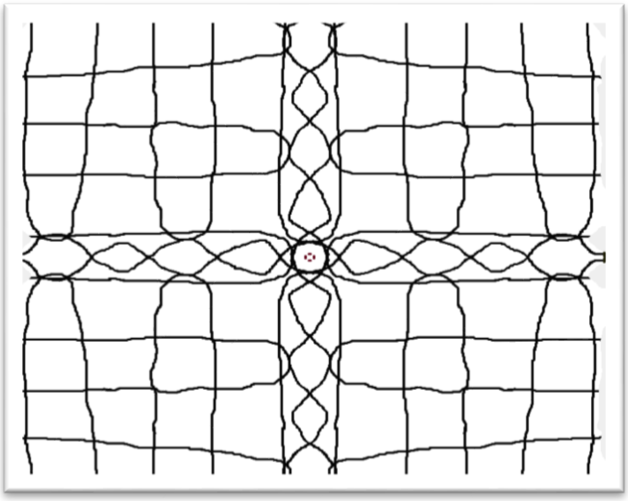
$3 - f(x) = sen\ x,$ sua reflexão em relação ao eixo x $e\ sua\ inversa\ g(x) = cosec\ x.$ (Figuras 45,46 e 47)

Figura 45. Gráfico da função sen x, sua reflexão e sua inversa cosec x



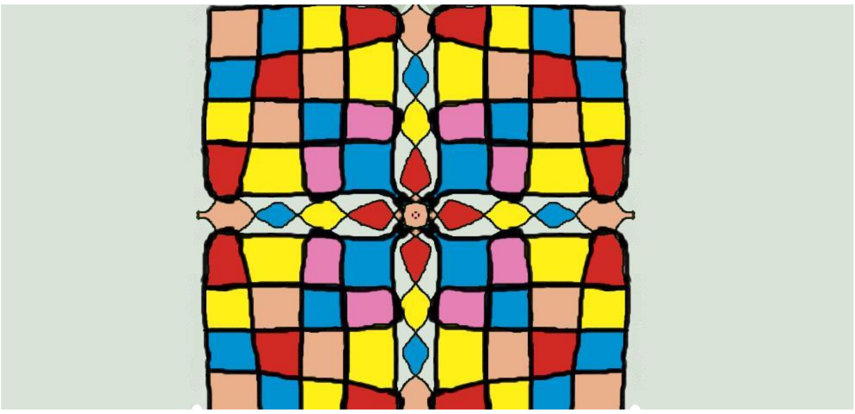
Fonte: Wolfram|Alpha

Figura 46. Simetria feita a partir da funções sen x sua reflexão e sua inversa cosec x



Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

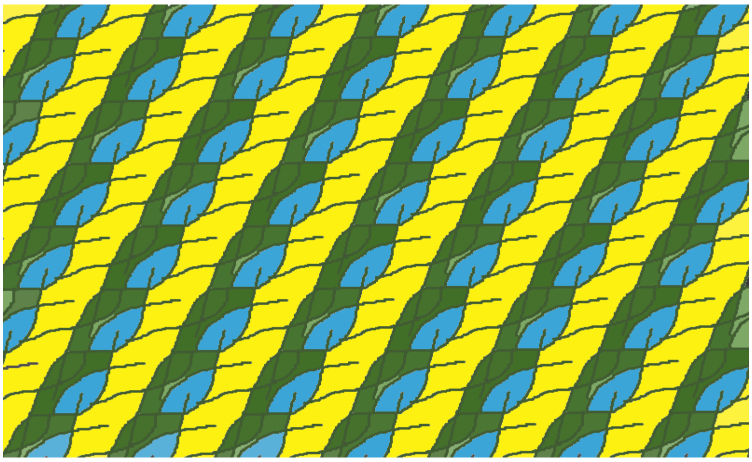
Figura 47. Arte finalizada 3



Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

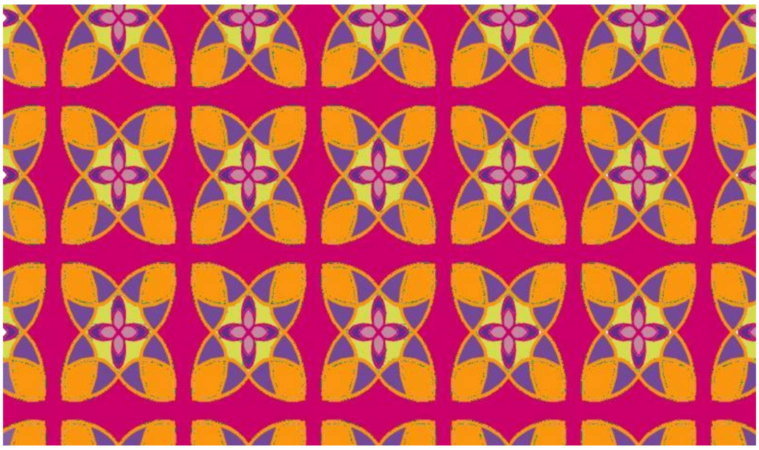
$4 - \ f(x) = x^3 \ e \ sua \ inversa \ g(x) = \sqrt[3]{x}$. (Figura 48 e 49)

Figura 48. Arte finalizada 4



Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

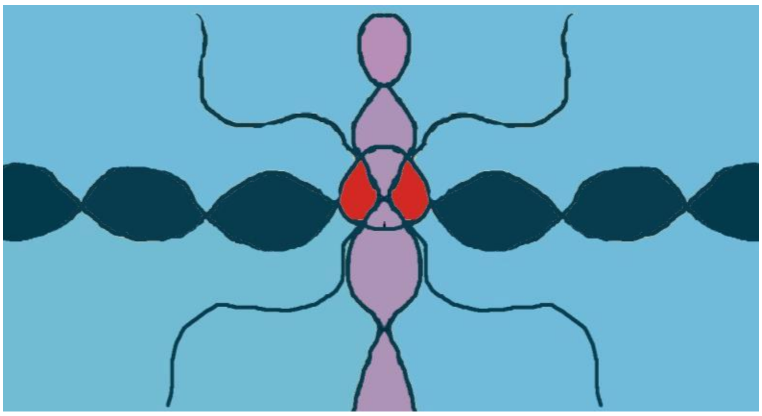
Figura 49. Arte finalizada 5



Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

$5 - \ f(x) = \cos x$ e suas rotações e reflexões. (Figura 50)

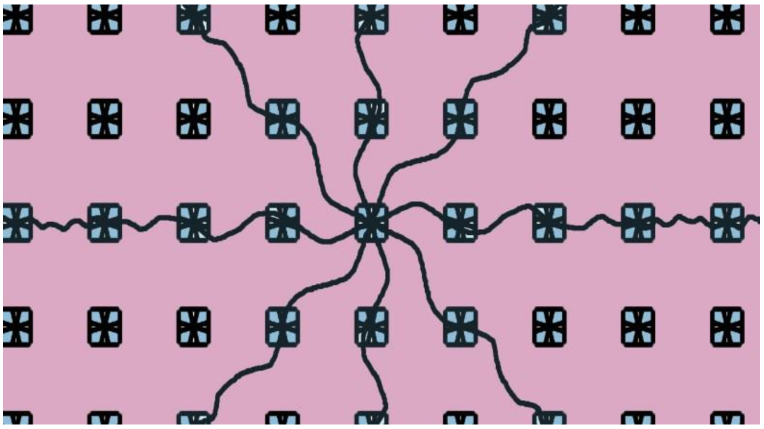
Figura 50. Arte finalizada 6



Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

$6 - \ f(x) = \frac{sen\, x}{\sqrt{x}}$ e suas rotações. (Figura 51)

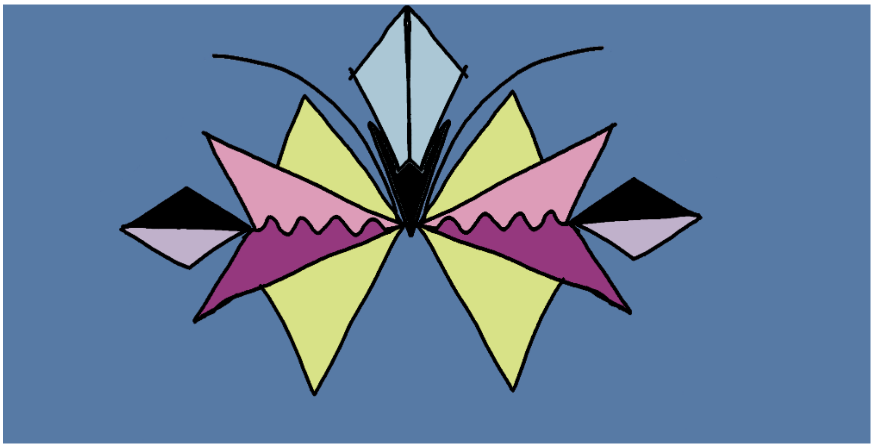
Figura 51. Arte finalizada 7



Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

$7 - \ f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \ sen\, x\ e\ h(x) = |x|$ e suas reflexões em relação ao eixo y. (Figura 52)

Figura 52. Arte finalizada 8



Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

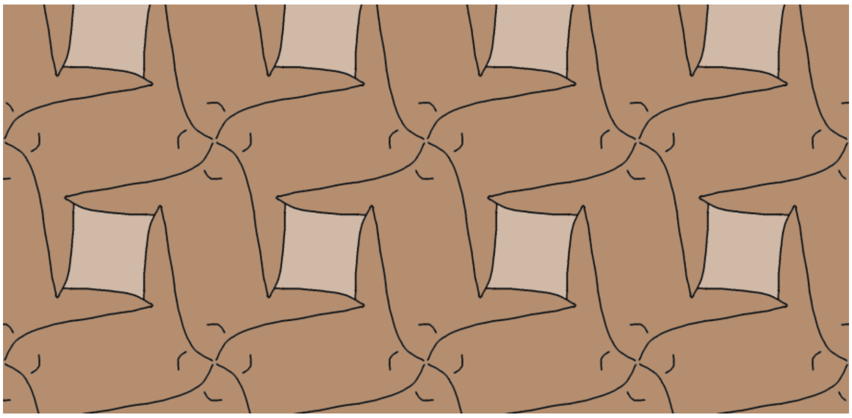
$8 - \ f(x) = \tan x$ e suas rotações. (Figuras 53)

Figura 53. Arte finalizada 9

Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

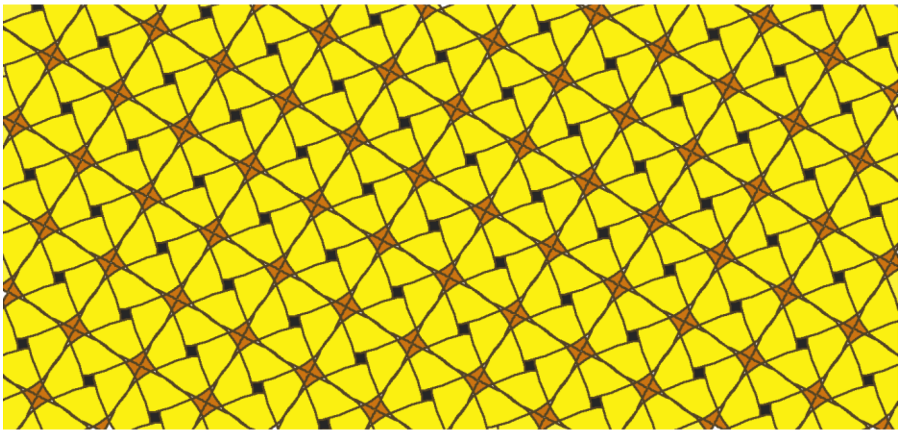
9 – $f(x)=\sqrt{x}$ e suas rotações. (Figuras 54 e 55)

Figura 54. Arte finalizada 10



Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

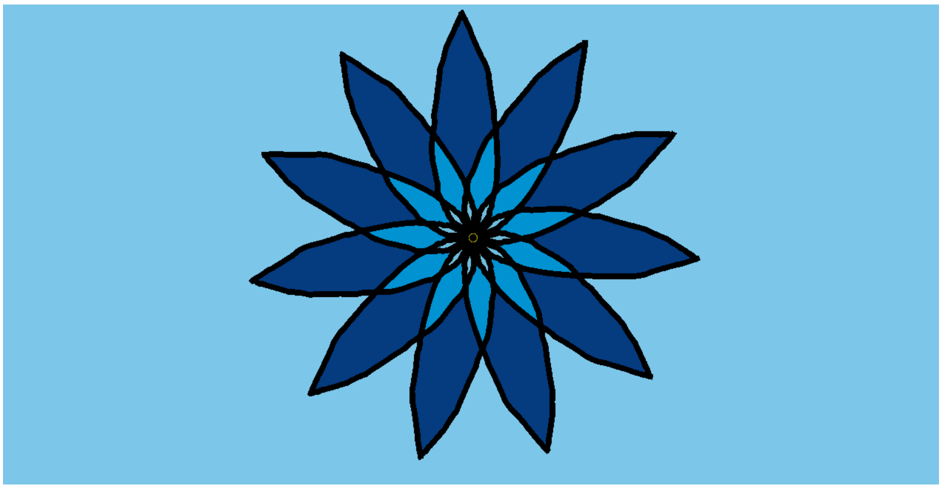
Figura 55. Arte finalizada 11



Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

10 – $f(x)=x^2$ e suas rotações. (Figuras 56)

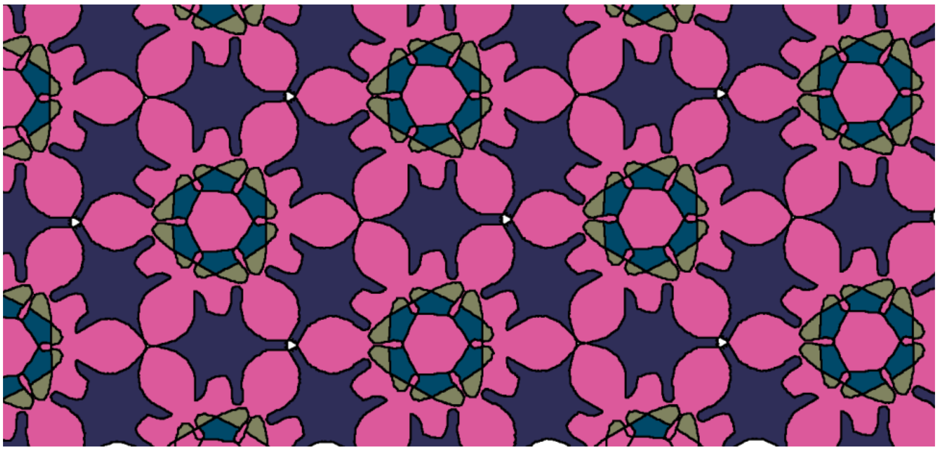
Figura 56. Arte finalizada 12



Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

$11 - f(x) = sen\ (x^4)$ e suas rotações. (Figuras 57)

Figura 57. Arte finalizada 13



Fonte: Criada pelo autor no Amaziograph

3.2 Registro de representação semiótica e a Galeria de Artes

Para construir esta galeria, utilizamos um sistema de Registro Semiótico, termo que de acordo Henriques e Almouloud (2016, p.3 apud DUVAL, 1993) descreve uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua forma no sistema semiótica e de outro lado, pela referência do objeto representado. Savioli e Salgueiro (2014, p.3 apud DUVAL, 2009, p. 32), complementam ainda que as representações:

> [...] consistem em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações "equivalentes" em um outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza. A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para um outro.

Um signo, é o significado que parte do objeto representa para o sujeito, não sendo representado em todos os seus aspectos, mas referenciado com a ideia inicial.

Para estruturação da Galeria de Arte, seguimos as três atividades cognitivas, definidas por Boiago e Viana (2015 apud DUVAL, 1995), como as principais ligadas às representações, sendo elas: a formação, a conversão e tratamento de uma representação identificável. Estas podem ser entendidas da seguinte forma:

A **formação** é a representação de um certo registro, podendo ser desde a expressão de uma fórmula, enunciado, composição do desenho, etc. Esta etapa é diretamente relacionada com a seleção de dados e relações com o conteúdo. Essas relações são feitas de acordo com regras e unidades específicias de um registro cognitivo em que é possível após a representação final do processo comparar com a descrição inicial.

O **tratamento** é a possibilidade de transformações que a representação possui dentro de um mesmo registro semiótico em que ela foi criada. É, portanto, uma transformação interna no registro inicial.

A **conversão**, é a transformação da representação em outro registro, conservando alguns aspectos da representação inicial.

Duval (2012), afirma que saber distinguir o objeto da sua representação, é um dos estímulos para a compreensão da matemática. O autor evidencia que basta analisarmos a história da Arte e da Matemática e fazermos um paralelo com o desenvolvimento das representações semióticas, para perceberemos que a última é fundamental para o pensamento da primeira. Duval ressalta ainda, que graças aos diferentes tipos de *semiósis* (representações) ao longo do tempo, maiores são as *noésis* (conceitualizações) sobre os objetos de estudo destas representações.

Para o autor, no processo de transição de um registro de representação semiótica para outro, o sujeito utiliza diferentes habilidades cognitivas específicas de cada tipo de registro envolvido. Essa passagem simboliza bem mais do que mudar o modo de tratamento do objeto matemático estudado, possibilitando a compreensão de propriedades e significados de um mesmo objeto.

Desta maneira, percebemos que a compreensão matemática está sempre relacionada a ao menos duas representações diferentes, e que possibilitar aos educandos a percepção destes diferentes tipos de representação semiótica funciona como a libertação da mente para o aprendizado.

Ainda segundo Duval (2012), estes três tipos de processos cognitivos são fundamentais para o entendimento da geometria e que o desenvolvimento de atividades geométricas baseadas nesses registros promove a compreensão por meio das figuras e da linguagem materna.

Nesta galeria, obtivemos este resultado ao promovermos a Formação (expressão que define as funções), o Tratamento (construção da arte a partir da função base) e Conversão (a arte finalizada).

Nesse sentido, fica evidente que se o trabalho com conceitos geométricos fosse feito através da exploração das formas de objetos físicos, bem como de obras de arte, esculturas, pinturas, desenhos e artesanatos, proporcionaria uma compreensão mais significativa da geometria, além de permitir o estabelecimento de conexões com outros campos do saber.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como o decorrer deste trabalho, pudemos perceber a importância da indissociabilidade entre Arte e Matemática. Tal fato, é facilmente constatado observando os contextos destas duas ciências apresentado de forma sucinta neste trabalho por meio das abordagens histórica, geométrica, algébrica e computacional. Todas estas abordagens nos levam a perceber que embora a humanidade tenha se reinventado ao longo dos séculos, ocorreram interferências em relação ao conhecimento artístico como expressão cultural e ao saber formal em torno da Arte e da Matemática. Mesmo diante deste cenário, artistas e matemáticos de diversas épocas e momentos da história, buscaram perdurar e continuar os estudos para aperfeiçoamento do conhecimento obtido permitindo mudanças e avanços. Este movimento, trouxe para o mundo técnicas e conceitos formulados que auxiliam nos estudos de diversas áreas atualmente. Exemplos como os da criação do Cálculo Diferencial e Integral por Isaac Newton e Wilhelm Leibniz; da Geometria Analítica por René Descartes ou as inúmeras contribuições de Mondrian para as artes liberais, retratam bem esse aperfeiçoamento.

Além destas abordagens, um dos tópicos que nos fazem perceber esta convergência é no que se refere ao desenvolvimento educacional no Brasil e na Europa da época medieval até a contemporânea, nas duas áreas. Esse contexto, nos mostrou que, o fato destes ramos terem se separado ou a ausência desta ligação entre Arte e Matemática, provocou a defasagem no ensino de ambas.

Pode-se constatar também que com os avanços do mundo contemporâneo, a forma como a sociedade vê a Arte e a Matemática, trouxeram diversas mudanças tanto nos meios de expressão destas áreas, como nos currículos formativos que possuem essas disciplinas. A exemplo disto, a disciplina de Arte e Matemática do ICENP-UFU, que é uma das primeiras disciplinas com essa finalidade em currículos formativos de cursos superiores de exatas no Brasil e que segue basicamente a estrutura deste trabalho, desde abordagens diferenciadas sobre o tema até a utilização das TIC como ferramentas auxiliadoras.

Constatamos, por meio do trabalho desenvolvido na disciplina que os envolvidos, tiveram a oportunidade de perceber, reconhecer e criar a estética artística e matemática das obras, permitindo uma aprendizagem baseada em conceitos técnicos, na emoção, sensibilidade e abstração dos alunos, aspectos inerentes ao que a Arte pode nos provocar, levando-os ao desenvolvimento de um olhar diferente sobre o mundo que os cerca, fugindo um pouco dos cálculos e fórmulas que, como mostrado, são um das maiores dificuldades dos alunos de CDI, e trouxe verdadeiro significado para o que lhes foi ensinado ao longo do percurso acadêmico. Este exemplo, pode servir de estimulo a outras instituições para implementarem estas disciplinas em seus currículos e até mesmo oferta-las como disciplinas obrigatórias.

Nessa perspectiva, outro fator que nos recorre com a elaboração deste trabalho, é que o professor, neste processo inclusivo de tecnologias como ferramentas facilitadoras da aprendizagem, entenda o que pretende estudar com seus alunos e analise como deve utilizar esses recursos para despertar nos sujeitos o desejo de aprender e, assim, garantir que eles compreendam o que estão fazendo. Fica demonstrado no estudo que o acesso à informação pode ser facilitado pelo uso da tecnologia, entretanto, a produção de conhecimento pelo aluno deve envolver participação ativa na investigação e análise da situação. O software Wolfram|Alpha e o aplicativo *Amaziograph* utilizados na construção da Galeria de Arte deste trabalho, corresponderam a todas as expectativas educacionais e artísticas geradas inicialmente, mostrando-se uma excelente e potente ferramenta metodológica que facilita a aprendizagem e estimula uma percepção mais ampla, clara e dinâmica de diversas situações.

Orientados pela pergunta *"Como a relação entre a Arte e a Matemática, pode contribuir para o aprendizado e visualização, na plotagem de gráficos de funções de uma variável real a valores reais e suas transformações geométricas*? ", a galeria de funções apresentada no Capítulo 3, é claramente o desfecho deste trabalho, respondendo esta pergunta de forma clara, gráfica e artística. Todas as técnicas, desde a seleção das funções, plotagem dos gráficos no Wolfram|Alpha; o traçado do desenho partindo da função base, no Amaziograph, até a seleção das cores, perspectiva da plotagem e tratamento das imagens, foram realizados, considerando cada uma das diferentes abordagens, desde os conceitos algébricos que formalizam cada tipo de gráfico; das técnicas de desenho oriundas dos estudos, geométrico das funções; sobre a história destas formas de arte e como elas estão inseridas no contexto educacional; os tipos de Representação Semiótica para elaboração das etapas de criação da galeria; até a utilização do computador e dos softwares para promover a aprendizagem.

Percebeu-se também, que o ato de iniciar o desenho com uma função base, contribuiu para a memorização do traçado de cada função, visto que, com a atenção direcionada à precisão do desenho, o sujeito, por meio da repetição e do significado da obra arte, atinge as habilidades necessárias para a plotagem de gráficos de funções de uma variável real a valores reais e suas transformações geométricas.

Uma sugestão para pesquisas futuras, seria a aplicação de uma sequência didática com as mesmas premissas desta pesquisa, aplicada para diferentes níveis de ensino, na busca de um banco de dados convergente para o resultado aqui apresentado. Além disso, podem ser acrescidos outros tipos de funções, como as de Duas variáveis reais a valores reais, por exemplo.

Por fim, a realização deste trabalho foi como a pintura de um quadro, envolveu conceitos formais, sentimentos, criatividade, interesse e busca pela tranquilidade enquanto se aprende e produz conhecimento. Espera-se que esta pesquisa sirva de referência para outros estudos de entusiastas da área e para a continuidade e aplicação dos resultados, pelo autor, em oportunidades futuras na sua jornada profissional.

REFERÊNCIAS

BOIAGO, C. P. VIANA, O. A**. Área de figuras planas: uma proposta de ensino com modelagem matemática**. Repositório Institucional UFU.2015. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/18762/1/AreaFigurasPlanas.pdf . Acesso em 05 de março de 2022.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Parecer normativo, n. 1302, de 06 de novembro de 2001. Legislação Federal e marginalia. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf . Acesso em 12 de janeiro de 2022.

ZALESKI FILHO, D. **Matemática e arte**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013. (Coleção tendências em educação matemática).

HENRIQUE, A., & ALMOULOUD, S. A. (2016). **Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple**. Ciência & Educação, 22(2), pp. 465-487. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/15’6-731320160020012. Acesso em 09 de março de 2022.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS DO PONTAL. **Projeto pedagógico do curso de Graduação em Matemática**. Ituiutaba: Universidade Federal de Uberlândia (UFU), 2020. Disponível em: http://www.icenp.ufu.br/graduacao/matematica/projeto-pedagogico . Acesso em 15 de janeiro de 2022.

KOGA, M.T. (1998). **Uma Análise do Discurso De Alguns Professores de Cálculo Diferencial e Integral do Curso de Licenciatura em Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista**. Rio Claro.

MARIN, D., PENTEADO, M. G. **Dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.** Educação Matemática Debate, Montes Claros (MG), Brasil, v. 4, e202008, p. 1-24, 2020. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/1804 . Acesso em 20 de janeiro de 2022.

MARIN, D., PENTEADO, M. G. **Professores que utilizam tecnologia de informação e comunicação para ensinar Cálculo.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.13, n.3, p.527-546, 2011. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/7057 . Acesso em 24 de janeiro de 2022.

NASSER, L. (2004). “**Educação Matemática no ensino superior. Mesa redonda: “Educação Matemática no ensino superior”**, Anais do VIII ENEM. Pernambuco: UFPE. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/13/MR02.pdf . Acesso em 29 de janeiro.

PALIS, G.R. (1995**). Computadores em Cálculo uma alternativa que não se justifica por si mesma. Temas & Debates, Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, ano VIII, 6ª edição, p. 22-38.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: **Artes**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasileira: MEC/SEF, 1998.

PLOTINO. ***Tratados das Enéadas.* Trad. Américo Sommerman**. São Paulo: Polar, 2000.

QUADRIVIUM. **As quatro artes liberais clássicas da aritmética, da geometria, da música e da cosmologia/John Martineau**. Tradução Jussara Trindade de Almeida. –São Paulo: É Realizações, 2014. - (Coleção Educação Clássica). Disponível em: https://www.erealizacoes.com.br/produto/quadrivium---as-quatro-artes-liberais-classicas-da-aritmetica-da-geometria-da-musica-e-da-cosmologia . Acesso em 20 de março de 2022.

DUVAL, R**. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, v. 07, n. 2, 2012. p.266-297.

RODRIGUES, Maria Lucia; LIMENA, Maria Margarida Cavalcanti (Orgs.). **Metodologias multidimensionais em Ciências Humanas**. Brasília: Líber Livros Editora, 2006. 175p.

SAVIOLI, A. M. P., D. E SALGUEIRO, N. C.C. **Registros de representação semiótica de funções: análise de produções escritas de estudantes de ensino médio.** v. 34, n. 2. Revista Eletrônica Vidya. 2014.

SEVERINO, A, J. **Metodologia do Trabalho Científico.** 23ª edição. São Paulo. Cortez Editora, 2007. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5562413/mod_resource/content/1/Metodologia-Do-Trabalho-Cientifico-23%C2%AA-Edicao-Severino-EBOOK-Escolhido.pdf . Acesso em 07 de março de 2022.

SKOVSMOSE, O & PENTEADO, MG 2008, **Riscos trazem consigo possibilidades**. in *Desafios da Reflexão: Em Educação Matemática Crítica*. Papirus, Campinas, pp. 41-50.

ZEFERINO, M. V. C.; WROBEL, J. S.; CARNEIRO, T. C. J. **Cálculo diferencial e integral no Enem: um mapa da produção científica na última década**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2013, Curitiba. Anais…, Brasília: SBEM, 2013. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/2264_687_ID.pdf . Acesso em 02 de fevereiro de 2022.