Quasi-periodic Motions of a Rigid Body. A case study on perturbations of superintegrable systems

Hanssmann, Heinz

Samenvatting

Iedereen heeft ooit wel eens met een bromtol gespeeld en daarmee een typisch voorbeeld van een star lichaam leren kennen. De bromtol is niet alleen 'star' (bij zijn beweging verandert de afstand van elk tweetal van zijn punten niet), maar ook rotatie-symmetrisch (op de voor het brommen nodige gaatjes na). De symmetrie- of figuur-as eindigt in de punt van de tol die op de grond geplaatst wordt nadat we de tol in snelle rotatie hebben gebracht. Men herinnert zich misschien dat de bromtol bij zijn dans ook een beetje over de grond beweegt, maar we willen er hier van uitgaan dat de ruwheid van de grond ervoor zorgt dat het scherpe uiteinde van de figuur-as niet van plaats verandert. Men spreekt ook van een star lichaam met een vast punt.
In dit proefschrift worden reguliere bewegingen van een star lichaam met een vast punt onderzocht. Wat zijn in het geval van de bromtol de mogelijke draaibewegingen ?

De eenvoudigste draaibeweging is de rotatie rond de figuur-as wanneer deze loodrecht op de grond staat, een periodieke beweging. Terwijl deze voor een langzame rotatie instabiel zou zijn, de tol valt om, is zij voor een snelle rotatie stabiel. Deze 'gyroscopische stabilisatie' is één van de fraaie fenomenen die bij het starre lichaam om de hoek komen kijken (nog afgezien van dat hij zo kan brommen...).

Een andere mogelijke beweging is de 'reguliere precessie'. De figuur-as draait rond de (loodrechte) zwaartekracht-as, terwijl het lichaam rond de figuur-as blijft roteren. Men kan zich deze beweging als door de twee symmetrieën van het probleem voortgebracht denken, de ruimtelijke circel- of S^1-symmetrie rond de zwaartekracht-as en de S^1-symmetrie van het lichaam zelf rond de figuur-as. Dit leidt tot een invariante 2-torus $\mathsf{T} = S^1 \times S^1$ in de faseruimte, met daarop een conditioneel periodieke dynamica. Indien de verhouding tussen de twee frequenties (voor de rotatie rond de figuur-as en voor de precessie van de figuur-as rond de zwaartekracht-as) rationaal is, sluit de baan en de beweging is periodiek — zij het met meestal een zeer grote periode. Voor irrationale (en dus bijna alle) frequentieverhoudingen ligt de baan dicht op T , de beweging is quasi-periodiek.

De 'algemene' beweging van de tol is conditioneel periodiek met drie frequenties. Naast

de rotatie van de tol rond de figuur-as en de precessie van de figuur-as rond de zwaartekracht-as vindt er nog een 'nutatie' van de figuur-as plaats : terwijl deze rond de zwaartekracht-as draait, verandert periodiek de hoek met de zwaartekracht-as.
Omdat wij steeds veronderstellen dat de tol een zekere (kinetische) energie heeft, komen andere bewegingen (bijvoorbeeld slingerbewegingen) niet voor.

Het systeem dat de bromtol beschrijft heeft 3 vrijheidsgraden, en de 6-dimensionale faseruimte wordt voor hoge waarden van de energie als volgt uit invariante variëteiten opgebouwd. De invariante 3-tori worden door de component van de draai-impuls ten opzichte van de zwaartekracht-as, de component van de draai-impuls ten opzichte van de figuur-as en de energie geparametriseerd. De vereniging van deze 3-parameterige familie van 3-tori is groot in topologische en in maattheoretische zin, het is een open en dichte verzameling waarvan het complement maat nul heeft.
Voor de reguliere precessie moet de energie bij gegeven componenten van de draai-impuls ten opzichte van zwaartekracht-as en figuur-as minimaal zijn. Men kan de 2-parameterige families van invariante 2-tori als singulariteiten van de 3-torus-vezeling beschouwen. De periodieke rotaties rond de figuur-as (die parallel met de zwaartekracht-as blijft) vormen 1-parameterige families.

De hier geschetste beschrijving van de bromtol gaat terug naar Lagrange. Vergeleken met de werkelijkheid bevat deze modellering enige fouten ; de belangrijkste ervan is dat we geen enkele rekening hebben gehouden met wrijvingsverschijnselen. Aan de ene kant zorgt wrijving ervoor dat het scherpe eindpunt van de figuur-as niet van plaats verandert. Aan de andere kant leidt wrijving ertoe dat de beweging energie verliest en de tol uiteindelijk stil staat (in plaats van eeuwig door te gaan met zijn periodieke of quasi-periodieke beweging, zoals voorspeld). De nutatie dempt zelfs zo snel uit, dat de algemene beweging van een doorsnee bromtol voor het oog op een reguliere precessie lijkt.
Men zou de invloed van wrijving door een beter ontwerp terug kunnen dringen, en in een geïdealiseerde limiet komt dan geen wrijving meer voor. In dit proefschrift wordt het starre lichaam dan ook op basis van de Hamiltoniaanse mechanica geanalyseerd, waarmee behoud van energie tot axioma verheven wordt. De zo verkregen resultaten zouden dan een beschrijving van een 'realistische' beweging voor eindige tijd kunnen leveren, maar het moet gezegd worden dat de overgang van conservatieve naar (licht) dissipatieve systemen tot nu toe nog niet systematisch onderzocht is ; hier ligt wellicht een opgave voor de toekomst.

Wij veronderstellen dus dat we de tol als conservatief systeem kunnen realiseren (in het bijzonder mag hij niet meer brommen). Maar ook in dit kader zou de $S^1 \times S^1$-symmetrische Lagrange-beschrijving te idealistisch kunnen zijn, men denke bijvoorbeeld aan een berg die het in eerste instantie constante krachtveld van de aarde verstoort.
De vraag wat met de invariante tori van de integreerbare Lagrange tol onder (conservatieve) storingen gebeurt, valt in het gebied van de KAM-theorie, genoemd naar Kolmogorov, Arnol'd en Moser. De grondslagen van deze theorie werden in [Kolmogorov;54] gelegd ; grof gezegd blijven de 'meeste' maximale tori (hier dus de 3-tori) onder versto-

ringen behouden. In [Arnol'd;63a] werd een gedetailleerd bewijs hiervan geleverd, onder voorwaarde dat de storing (en het onverstoorde integreerbare systeem) analytisch zijn. Dit werd in [Moser;62] afgezwakt tot eindige differentieerbaarheid. In [Moser;67] werden dan de eerste resultaten omtrent lager dimensionale tori verkregen ; voor storingen van de Lagrange tol betekent dit dat ook de 'meeste' 2-tori onder verstoringen behouden blijven. De meetkundige structuur van de verzameling van persistente tori werd in [Pöschel;82] geanalyseerd. Terwijl resonante tori opbreken, blijven tori met een frequentievector die aan een zekere diophantische conditie voldoet behouden. Dit definieert een Cantor-familie van invariante 3-tori. De vereniging van invariante 3-tori is dus in topologische zin klein (het complement is open en dicht), maar groot in maattheoretische zin : de relatieve maat op compacte delen convergeert naar 1 als de storing naar 0 gaat. De overgebleven 2-tori worden door een Cantorverzameling van (Hausdorff-)dimensie 2 geparametriseerd. Voor de periodieke rotaties kan men met de Impliciete Functiestelling werken, waardoor deze allemaal als (gladde) 1-parameterige families behouden blijven.

We hebben gezien dat de door Lagrange gegeven beschrijving voor de meeste beginwaarden van toepassing blijft — de beweging vindt plaats op invariante 3-tori, en de singulariteiten van deze (Cantor-)vezeling in 3-tori worden door (Cantor-families van) invariante 2-tori gegeven. In het analytische geval kan men hier nog aan toevoegen dat voor alle bewegingen Nehoroševafschattingen gelden ; voor exponentieel lange tijd blijft de beweging dicht bij de Lagrange-approximatie.

De symmetrieën van de Lagrange tol maken dit systeem integreerbaar. Omdat het een niet-gedegenereerd integreerbaar systeem is, blijft de vezeling in invariante tori onder storingen als Cantor-vezeling behouden. In dit proefschrift gaan we na hoe de Euler tol zich onder storingen gedraagt. De Euler tol is een star lichaam dat alleen onder invloed van de eigen traagheid beweegt, want externe krachten zijn in dit model niet aanwezig. Hierdoor blijft de draai-impuls behouden. Samen met de energie levert dit vier onafhankelijke integralen — de Euler tol is superintegreerbaar. De algemene beweging is quasi-periodiek met twee frequenties, zodat de faseruimte uiteen valt in 4-parameterige families van invariante 2-tori en 3-parameterige families van periodieke banen.

Mogelijke storingen van de Euler tol laten een grotere flexibiliteit toe, want in vergelijking met de Lagrange tol zijn er minder eisen. Zo kan men bijvoorbeeld de beweging van een willekeurig star lichaam (met een vast punt) in een willekeurig conservatief krachtveld als storing van de vrije beweging opvatten — mits de potentiële energie voldoende klein is ten opzichte van de kinetische energie. In het bijzonder is de Lagrange tol zo een storing en dit toont aan dat de meeste invariante 2-tori van de Euler tol niet persistent kunnen zijn.
De Euler tol is een superintegreerbaar systeem waarvan de gedegenereerdheid door een 'typische' storing automatisch opgeheven wordt. Voor een dergelijk verstoord superintegreerbaar systeem werd in [Arnol'd;63b] aangetoond dat de meeste bewegingen quasi-periodiek zijn. Maar terwijl voor een storing van de Lagrange tol de meetkundige structuur van de Cantor-vezeling in 3-tori door de 3-torus-vezeling van de Lagrange tol zelf

bepaald wordt, en dus niet van de storing afhangt, worden de invariante 3-tori in storingen van de Euler tol juist pas door de storing opgebouwd. Een belangrijk doel van dit proefschrift is dan ook om na te gaan hoe de meetkunde van de Cantor-vezeling in invariante 3-tori door de storing bepaald wordt.

De 4-parameterige familie van invariante 2-tori van de Euler tol is te gedegenereerd om persistent te zijn. Echter, juist die 2-tori die de storing overleven leggen de meetkundige structuur van de Cantor-vezeling in 3-tori vast. We gaan dit expliciet na voor een storing die door een affien (constant+lineair) krachtveld gedefinieerd is.

Voor een rotatie-symmetrisch star lichaam vereenvoudigt zich de gestelde opgave : we gebruiken in dit geval de S^1-symmetrie van het systeem om het aantal vrijheidsgraden van 3 naar 2 te verlagen. Hierdoor worden invariante 2-tori tot periodieke banen gereduceerd, en hun persistentie kan dan ook door middel van de Impliciete Functiestelling worden aangetoond ; degenen die de storing overleven formen gladde 2-parameterige families.
We kunnen in dit geval nog een stap verder gaan en ook naar de singulariteiten (of 'bifurcaties') van deze 2-parameterige families kijken. Naast de evenwichtspunten, die voor periodieke rotaties van de tol staan, zijn dit parabolische periodieke banen, waarin de familie een periodieke centrum-zadel bifurcatie doorloopt, en door heterocliene banen met elkaar verbonden hyperbolische periodieke banen. Deze situaties worden eerst algemeen bestudeerd en dan in Stelling 6.5 gebruikt om de beweging van het starre lichaam te beschrijven. Zie § 6 voor de details.

Voor een willekeurig star lichaam moeten we in drie vrijheidsgraden werken. We vervangen de Impliciete Functiestelling door een KAM-stelling en laten zo de persistentie van Cantor-families van invariante 2-tori zien. De Euler tol blijkt echter te gedegenereerd te zijn om bovengenoemde bifurcaties in niet S^1-symmetrische storingen te kunnen induceren ; zie hiervoor § 7.

In beide gevallen is de analyse gebaseerd op een normaalvorm, die verkregen is door over de ongestoorde beweging te middelen. Dit laat een reductie naar één vrijheidsgraad toe, en het zijn de evenwichtspunten van het resulterende systeem welke aanleiding geven tot persistente 2-tori. Dit is in § 5 beschreven, waar ook de familie van systemen met één vrijheidsgraad behandelt wordt.

 9503843