Over roosterpunten op en in de omgeving van bepaalde krommen

Schepel Kzn, Dirk

EINLEITUNG [1]).

Das Problem eine obere Schranke für die Gitterpunktzahl auf einer Kurve oder in ihrer Umgebung zu bestimmen, kommt in der Zahlentheorie vielfach vor. In einigen Fällen wird ein sehr genaues Ergebnis erreicht. Bekanntlich ist zum Beispiel die Anzahl der Gitterpunkte auf jeder Kreisperipherie mit Radius $R > 2$ für jede positive Zahl ε höchstens von der Grössenordnung R^{ε}. Ebenso ist die Gitterpunktzahl auf der Hyperbel $uv = x$, wo $x > 2$ ist, für jedes positive ε höchstens von der Grössenordnung x^{ε}.

Ein so scharfes Resultat ist nur für sehr spezielle Kurven erreicht worden.

Mir ist jedoch ein Satz bekannt, der in sehr allgemeinen Fällen eine nicht triviale obere Schranke liefert für die Anzahl der Gitterpunkte auf einer Kurve oder in ihrer Umgebung. Der betreffende Satz ist der Hauptsatz in der Dissertation von Herrn J. G. VAN DER CORPUT [2]). Dieser Satz lautet folgendermassen:

Es sei $a < b$; $a - \frac{1}{2}$, $b - \frac{1}{2}$ und $q - \frac{1}{2}$ seien ganz. Die Funktion $f(u)$ sei im Intervall $a \leq u \leq b$ mindestens zweimal differentiierbar und $f(a) > q + 1$. Ueberdies gebe es eine Zahl $r > 1$, derart dass $f'(u) > \frac{1}{\sqrt[3]{r}}$ und $f''(u) > \frac{1}{r}$ für jedes u im Intervall $a \leq u \leq b$ ist.

Es bezeichne $\mathfrak{G}$ das Gebiet

$$a \leqq u \leqq b, \quad q \leqq v \leqq f(u),$$

$I(\mathfrak{G})$ *seinen Flächeninhalt*

$$I(\mathfrak{G}) = \int_a^b (f(u) - q)\, du,$$

$A(\mathfrak{G})$ *die Anzahl der ihm angehörigen Gitterpunkte*

$$A(\mathfrak{G}) = \sum_{h=a+\frac{1}{2}}^{b-\frac{1}{2}} ([f(h)] - [q]) \qquad ^{3)}.$$

---

[1]) Diese Einleitung ist auch veröffentlicht worden in: Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **40**, 1937, S. 46—53.

[2]) J. G. VAN DER CORPUT, Over roosterpunten in het platte vlak. Groningen 1919. Diss. Leiden.

[3]) Für reelles α bezeichnet $[\alpha]$ die grösste ganze Zahl $\leq \alpha$. Der VAN DER CORPUTsche Satz, wie er hier formuliert ist, folgt z.B. sofort aus der von Herrn LANDAU angegebenen Fassung. Vergl. E. LANDAU, Vorlesungen über Zahlentheorie, 1927 (S. HIRZEL). Band **2**, S. 192 und 279—302.

Dann gilt

$$|A(\mathfrak{S}) - I(\mathfrak{S})| < c\, r^{2/3} f'(b),$$

wo c eine absolute Konstante bezeichnet.

Zunächst folgt hieraus, dass die Anzahl der Gitterpunkte auf der Kurve

$$a \leqq u \leqq b,\ v = f(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

höchstens gleich $2cr^{2/3}f'(b)$ ist; denn wird die Kurve parallel nach oben verschoben, so ändert sich $I(\mathfrak{S})$ stetig, sodass die Sprünge höchstens gleich $2cr^{2/3}f'(b)$ sind.

Zugleicherzeit kann man mit dem VAN DER CORPUTschen Satze eine obere Schranke finden für die Anzahl der Gitterpunkte, die in der *Umgebung* der Kurve (1) liegen. Betrachtet man nämlich den Streifen [4])

$$a \leqq u \leqq b, \qquad -\delta \leqq v - f(u) \leqq \delta,$$

wo δ eine beliebige feste positive Zahl bezeichnet, so erhält man mittels zweifacher Anwendung des VAN DER CORPUTschen Satzes, dass die Anzahl der Gitterpunkte in diesem Streifen kleiner ist als

$$2\, c\, r^{2/3} f'(b) + 2\,(b - a)\,\delta.$$

Dieser Satz hat zwei Nachteile. Erstens fordert er einen, wenigstens bis heute, komplizierten Beweis [5]). Weiter ist der Satz nur anzuwenden, wenn die Funktion eine zweite Ableitung besitzt, die gewissen Bedingungen genügt.

Das Ziel meiner Dissertation ist in elementarer Weise einige Sätze herzuleiten, die diese Nachteile nicht besitzen und dennoch für die Anzahl der Gitterpunkte auf und in der Umgebung von Kurve (1) eine brauchbare obere Schranke geben.

Meine Dissertation habe ich in sechs Kapitel zerlegt. Die Kapitel I, V und VI enthalten allgemeine Sätze, während die drei übrigen Anwendungen der in Kapitel I hergeleiteten Sätze geben. Die im letzten Kapitel entwickelte Theorie stützt sich auf die Theorie der FAREY-brüche, aber diese Theorie kommt in den fünf vorangehenden Kapiteln nicht vor.

Um den Gedankenkreis der Kapitel I, II, III und IV anzugeben, nehme ich hier in der Einleitung Satz 1 auf, den ich in Kapitel I beweisen werde.

Satz 1. *Sei $\delta \geqq 0$ und $< \frac{1}{2}$, $\alpha < \beta$, k ganz $\geqq 2$; sei die Funktion $f(u)$ im Interval $\alpha \leqq u \leqq \beta$ definiert und k-mal differentiierbar; seien weiterhin*

---

[4]) Ist $a < b$, sind $f(u)$ und $\delta(u)$ im Intervall $a \leqq u \leqq b$ definiert und ist dort $\delta(u)$ eine positive Funktion von u, so verstehe ich unter dem Streifen

$$a \leqq u \leqq b, \ -\delta(u) \leqq v - f(u) \leqq \delta(u)$$

die Menge der Punkte (u, v), wofür diese Ungleichungen gelten.

[5]) Man vergleiche z.B. den LANDAUschen Beweis.

die von u unabhängigen positiven Zahlen r und R so gewählt, dass im Interval $\alpha \leqq u \leqq \beta$

$$r \leqq |f^{(k)}(u)| \leqq R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ist; dann ist die Anzahl der Gitterpunkte (u, v) *im Streifen*

$$\alpha \leqq u \leqq \beta, \; -\delta \leqq v - f(u) \leqq \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

höchstens gleich

$$k + k(\beta - \alpha)\, Max \left\{ R^{\frac{2}{k(k+1)}}, \left(\frac{(k+1)\,\delta}{r}\right)^{\frac{2}{k(k-1)}} \right\}$$ [6].

Dieser Satz, der, wie gesagt, in einfacher Weise bewiesen wird, hat den grossen Vorteil, dass darin für k eine beliebige ganze Zahl $\geqq 2$ genommen werden kann.

Der Spezialfall $k = 2$ stimmt etwa überein mit dem Ergebnis, das man erhält, wenn man den VAN DER CORPUTschen Satz auf die Lehre der Gitterpunkte auf oder in der Umgebung einer Kurve anwendet.

Zur Erläuterung der Kapitel I, II, III und IV skizziere ich hier kurz den Beweis des vorstehenden Satzes im Spezialfall $k = 2$:

Enthält der genannte Streifen drei Gitterpunkte (p_0, q_0), (p_1, q_1) und (p_2, q_2), so ist, wie sich leicht herausstellt, das Verhältnis

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ \frac{1}{2} p_0 (p_0 - 1) & \frac{1}{2} p_1 (p_1 - 1) & \frac{1}{2} p_2 (p_2 - 1) \end{vmatrix}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

annähernd gleich $f''(\xi)$ bei geeignet gewähltem ξ und je schmäler der Streifen um so schärfer ist die Approximation.

Im Spezialfall $k = 2$ von Satz 1 wird $f''(u)$ ungleich Null vorausgesetzt. Bei genügend klein gewählter Streifenbreite verschwindet also das in (4) genannte Verhältnis nicht. Der darin vorkommende Zähler ist deshalb nicht gleich Null, also sein Absolutwert ist $\geqq 1$, woraus hervorgeht, dass der Nenner mindestens dieselbe Grössenordnung als $\dfrac{1}{|f''(\xi)|}$ hat, also gross ist, falls $f''(u)$ klein angenommen wird.

Hieraus folgt, dass die drei Zahlen p_0, p_1, und p_2 nicht dicht bei einander liegen können. Je drei dem Streifen angehörigen Gitterpunkte haben also die Eigenschaft, dass die zwei äusseren weit von einander entfernt sind, sodass es ausgeschlossen ist, dass der Streifen viele Gitterpunkte enthält.

---

[6]) Unter *Max* (a, b), Maximum von a und b, wird die grössere der Zahlen a und b oder, falls $a = b$ ist, ihr gemeinsamer Wert verstanden.

Mit dieser, in Kapitel I näher ausgearbeiteten Methode finde ich für die dem Streifen (3) angehörigen Gitterpunktzahl eine obere Schranke, nicht nur für den Spezialfall $k=2$, sondern für beliebiges ganzes $k \geqq 2$.

Bei der Anwendung von Satz 1 wird oft die Schwierigkeit auftreten, dass für grosses $\beta - \alpha$ die Zahl R viel grösser als r gewählt werden muss. Um dennoch ein scharfes Ergebnis zu erhalten, ist es notwendig den betrachteten Streifen in Teilstreifen zu verteilen. Weil diese Verteilung die Beweisführung manchmal undurchsichtig macht, wird in Kapitel I noch ein zweiter Satz hergeleitet, wobei man diese Verteilung nicht braucht. Gerade dieser zweite Satz wird in den Kapiteln II, III und IV angewendet.

In Kapitel II bestimme ich eine obere Schranke für die Anzahl der Gitterpunkte (u, v) auf und in der Umgebung der Kurve

$$(mu + u_0)^f (nv + v_0)^h = x, \quad mu + u_0 > 0, nv + v_0 > 0, \quad . \quad . \quad (5)$$

worin f, h, m und n positive, und u_0 und v_0 beliebig feste Zahlen sind.

Z.B. hat Satz 9 in diesem Kapitel, wie aus Satz 10 hervorgeht, u.a. das folgende Korollar:

Satz 2. *Sind u_0 und v_0 beliebige feste, m, n, f und h beliebige feste positive Zahlen und ist k eine ganze Zahl $\geqq 3$, derart dass*

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2} \leqq \frac{f}{h} < \frac{k(k-1)}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

gilt, so ist die Anzahl der Gitterpunkte (u, v) im Streifen

$$-X \leqq (mu + u_0)^f (nv + v_0)^h \leqq X, \qquad mu + u_0 > 0, nv + v_0 > 0,$$

wobei

$$X = x \, Min \left(x^{-\frac{1}{h}}, x^{-\frac{2k(k+1)}{2kh + (k+3)f}} \right)$$

ist [7]), *gleich*

$$O\left(x^{\frac{k+1}{2kh + (k+3)f}} \right).$$

Wird die Bedingung (6) durch

$$\frac{k(k-1)}{2} < \frac{f}{h} < \frac{k(k+1)}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

ersetzt, wobei k ganz $\geqq 2$ ist, so ist, wie Satz 11 zeigt, die Anzahl der der Kurve (5) angehörigen Gitterpunkte (u, v) gleich

$$O\left(x^{\frac{2k}{(k+1)(2f+kh)}} \right).$$

Aus dem Satze in § 88 der Dissertation von Herrn J. G. VAN DER

---

[7]) Unter *Min* (a, b), Minimum von a und b, verstehe ich die kleinere der Zahlen a und b oder, falls $a = b$ ist, ihren gemeinsamen Wert.

CORPUT geht hervor: die erwähnte Gitterpunktzahl auf der Kurve (5) ist gleich

$$O\left(x^{\frac{1}{3f}} \log x\right), \qquad \text{falls } f = h$$

und

$$O\left(x^{\frac{1}{2f+h}}\right) + O\left(x^{\frac{1}{f+2h}}\right), \text{ falls } f \neq h.$$

Wende ich Satz 2 mit $k = 3$ an, so erhalte ich u.a. dass die Anzahl der Gitterpunkte auf der betrachteten Kurve (5) für $f = h$ gleich $O\left(x^{\frac{1}{3f}}\right)$ ist; dieses Ergebnis ist schärfer als das vorangehende VAN DER CORPUTsche Resultat.

Ausserdem ist für $f > h$ (da in diesem Falle

$$\frac{k+1}{2kh + (k+3)f} < \frac{1}{f+2h} \text{ und } \frac{2k}{(k+1)(2f+kh)} < \frac{1}{f+2h}$$

ist) das Resultat der Sätze 10 und 11 für Kurven schärfer als dasjenige des Satzes in § 88 der Dissertation von Herrn VAN DER CORPUT.

Wenn $f < h$ ist, so verwechsle ich in den Sätzen 10 und 11 die Grössen f und h. Die so erhaltenen Sätze geben dann für Kurven wieder besseres Ergebnis als das, was aus dem erwähnten Satze von Herrn VAN DER CORPUT folgt.

Kapitel III behandelt Streifen, die im ersten Quadranten liegen und die begrenzt werden von Kurven mit der Gleichung

$$A u^{\alpha} + B v^{\beta} = x, \qquad \dots\dots\dots \qquad (8)$$

worin A, B, α und β positiv sind.

Ist $\beta < \alpha < \frac{3}{2}\beta, \beta \leqq \frac{1}{3}$, so ist nach Satz 15 die Anzahl der Gitterpunkte auf der Kurve (8) im ersten Quadranten gleich $O\left(x^{\frac{\alpha+3\beta}{6\alpha\beta}}\right)$. Ist dagegen $\frac{3}{2}\beta \leqq \alpha \leqq 2\beta$, $\beta \leqq \frac{1}{4}$, so hat die betrachtete Gitterpunktzahl höchstens die Grössenordnung $x^{\frac{\alpha+6\beta}{10\alpha\beta}}$ (Satz 16).

Allgemeiner folgt z.B. aus Satz 12 unter Beachtung der zugehörigen Bemerkung und der Hilfssätze 11 und 12, dass, falls $\varkappa = \left[\frac{2\alpha}{\beta}\right] + 1$ gesetzt wird und $\beta \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$, $\beta \leqq \frac{1}{\varkappa}$ ist, die Anzahl der dem ersten Quadranten angehörigen Gitterpunkte (u, v) auf der Kurve (8) gleich $O\left(x^{\frac{2\alpha+\varkappa(\varkappa-1)\beta}{\varkappa(\varkappa+1)\alpha\beta}}\right)$ ist.

Ist $\frac{2\alpha}{\beta}$ ganz und $\beta \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$, so gibt es $O\left(x^{\frac{2}{2\alpha+\beta}}\right)$ solche Gitterpunkte.

Im Spezialfall $\alpha = \beta$ stellt sich heraus, dass die erwähnte Gitterpunktzahl gleich $O\left(x^{\frac{2}{3\alpha}}\right)$ ist (Satz 17). Man erhält das letzte Resultat, wenn man im Hauptsatz $k = 2$ setzt; es kann auch mit Hilfe des VAN DER CORPUTschen Satzes [8]) gefunden werden.

Kapitel IV ist der PILLAIschen Kurve

$$x^y - y^x = 0 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

gewidmet. Herr PILLAI [9]) hat bewiesen:

Wenn $A(a)$ *die Anzahl der ganzen Lösungen* (x, y) $(x > 1, \; y > 1)$ *von* (9) *bezeichnet, so gilt für jedes positive* δ *bei hinreichend grossem a die Beziehung*

$$A\,(a) \leqq (1 + \delta)\, \frac{\log a}{\log \log a}.$$

Wie Herr J. F. KOKSMA [10]) im „Zentralblatt" erwähnt hat, kann man die Ungleichung für $A(a)$ verschärfen. Herr KOKSMA hat nämlich bewiesen:
Wenn $A(a)$ *die Anzahl der Gitterpunkte* (x, y) $(x > 1, \; y > 1)$ *auf der* PILLAI*schen Kurve* (9) *bezeichnet, so gilt für jedes positive* δ *und für jedes* $a > a_0(\delta)$, *worin* $a_0(\delta)$ *eine geeignet gewählte nur von* δ *abhängige Zahl ist, die Ungleichung*

$$A\,(a) \leqq (2 + \delta)\, \frac{\log a}{(\log \log a)^{3/2}}.$$

Dieses Ergebnis hat er jedoch nicht veröffentlicht [11]), weil er aufmerksam gemacht wurde auf die Tatsache, dass der VAN DER CORPUTsche Satz ein noch schärferes Resultat ergibt, nämlich dass die Anzahl der Gitterpunkte (x, y) $(x > 1, \; y > 1)$ auf der PILLAIschen Kurve (9) gleich

$$O\left(\frac{\log^{2/3} a}{\log \log a}\right)$$

ist. Dasselbe Ergebnis wird in dieser Dissertation mit Hilfe des Satzes 6 von Kapitel I, also in elementarer Weise, hergeleitet. Ausserdem bestimme ich in Kapitel IV eine obere Schranke für die Gitterpunktzahl in der *Umgebung* der PILLAIschen Kurve.

Die Sätze des Kapitels I haben den Nachteil, dass sie nur für sehr schmale Streifen mit Erfolg anwendbar sind. Deswegen habe ich in den letzten zwei Kapiteln Sätze hergeleitet, die für verhältnismässig breite Streifen brauchbar sind. Die betreffende Untersuchung hat in Bezug auf

---

[8]) Siehe die Dissertation von Herrn VAN DER CORPUT, S. 90, Satz § 109.

[9]) S. SIVASANKARANARAYANA PILLAI, On the indeterminate equation $x^y - y^x = a$. Annamalai Univ. J. **1**, 1932, S. 59—61.

[10]) Zentralblatt für Math. und ihre Grenzgebiete **5**, 1933, S. 53.

[11]) Die nicht publizierte Abhandlung ist mir freundlichst zur Verfügung gestellt worden.

die Resultate, nicht in Bezug auf die Beweismethode grosse Aehnlichkeit mit der, welche Herr SKOLEM [12]) in 1926 veröffentlicht hat. Diese SKOLEMsche Untersuchung besteht hauptsächlich aus drei Teilen:

Im ersten Teil tritt eine Funktion $f(x)$ auf, deren k^{te} Differenzfunktion bei geeignet gewähltem k gegen eine irrationale Konstante strebt; im zweiten Teil konvergiert diese k^{te} Differenzfunktion gegen Null und im dritten Teil treten nur Funktionen auf, die so schnell zunehmen, dass keine einzige ihrer Differenzfunktionen beschränkt ist.

Das Verfahren meiner Dissertation gibt nicht die Möglichkeit auch nur eine Frage dieses dritten Teiles zu behandeln.

Andererseits kommen die Ergebnisse des ersten und zweiten Teiles der SKOLEMschen Arbeit alle in den Kapiteln V und VI vor und erhalten sogar eine bedeutende Ergänzung.

Während Herr SKOLEM bei seinen Problemen die Differenzfunktion einführt, ziehe ich es vor Derivierten zu benutzen, weil diese in der Praxis bequemer zu verwenden sind. Dabei werde bemerkt, dass man in den betreffenden Sätzen in meiner Dissertation die Derivierten durch Differenzfunktionen ersetzen darf.

Herr SKOLEM führt zwei neue Begriffe ein und zwar folgendermassen:

Definition 1. *Sind μ und ν beliebige positive Zahlen mit $\mu \leqq \nu$ und ist $A(\mu, \nu)$ die Anzahl ganzer Zahlen einer aus ganzen Zahlen bestehenden Menge M im geschlossenen Intervall (μ, ν), so heisse $\dfrac{A(\mu, \nu)}{\nu - \mu + 1}$ die Dichte der Menge M im Intervall (μ, ν).*

Ist $\lim\limits_{\nu \to \infty} \dfrac{A(1, \nu)}{\nu} = g$, so nennen wir g die durchschnittliche Dichte oder kurz die Dichte von M.

Definition 2. *Sind $f(u)$ und $\delta(u)$ für $u \geqq 1$ definiert und ist $\delta(u)$ eine positive, für $u \to \infty$ gegen Null strebende Funktion von u, so heisse die Menge der Punkte (u, v) mit*

$$-\delta(u) \leqq v - f(u) \leqq \delta(u)$$

ein der Funktion $\delta(u)$ angehöriger asymptotischer Streifen oder eine der Funktion $\delta(u)$ angehörige asymptotische Umgebung der Kurve $v = f(u)$.

Ersetzt man in Satz 2 von Herrn SKOLEM die k^{te} Differenzfunktion durch die k^{te} Ableitung, so erhält man den folgenden Satz:

Satz 3. *Ist k eine natürliche Zahl, $f(u)$ für $u \geqq 1$ mindestens k-mal differentiierbar und strebt $f^{(k)}(u)$ für $u \geqq 1$ bei unbeschränkt anwachsendem u gegen eine Irrationalzahl C, so hat die Menge der Gitterpunktabszissen in jeder asymptotischen Umgebung der Kurve $v = f(u)$ die Dichte Null.*

---

[12]) TH. SKOLEM, Ganzzahlige Lösungen, Math. Ann. **95**. 1926, S. 2—68.

Dieser Satz wird in Kapitel V hergeleitet. In diesem Kapitel wird aber noch mehr bewiesen. Während Herr SKOLEM nur zeigt, dass $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{A(1,\nu)}{\nu} = 0$ ist, gebe ich für den Zähler $A(1,\nu)$ eine obere Schranke woraus das SKOLEMsche Ergebnis sofort folgt.

Als Beispiel erwähne ich hier

Satz 4. *Sei $0 < \delta < \frac{1}{2}$, k ganz $\geqq 2$, $\beta \geqq \alpha + 1$; besitzt die irrationale Zahl C eine regelmässige Kettenbruchentwicklung, deren Teilnenner beschränkt sind*[13]) *und ist $f(u)$ ein Polynom k^{ten} Grades in u mit Anfangsglied $\frac{C\,u^k}{k!}$*, so *ist die Zahl der Gitterpunkte (u, v) im Streifen*

$$\alpha \leqq u \leqq \beta, \quad -\delta \leqq v - f(u) \leqq \delta$$

höchstens gleich

$$k + c(\beta - \alpha)\,\delta^{\frac{2}{k(3k+1)}},$$

worin c nur von k und C abhängt.

Das letzte Kapitel steht mit dem zweiten Teil der SKOLEMschen Abhandlung in Zusammenhang.

Ersetzt man in Satz 4 von Herrn SKOLEM die Differenzfunktion durch die Derivierte und schlieszt man den Wert $k = 1$ aus, so findet man den folgenden Satz:

Satz 5. *Ist k eine beliebige ganze Zahl $\geqq 2$, ist die Funktion $f(u)$ für $u \geqq 1$ mindestens k-mal differentiierbar und nimmt $f^{(k)}(u)$ bei unbeschränkt anwachsendem u monoton gegen Null ab, aber so dass $\frac{1}{u\,f^{(k)}(u)}$ beschränkt ist, so hat die Menge der Gitterpunktabszissen in jeder asymptotischen Umgebung der Kurve $v = f(u)$ die Dichte Null.*

Dieser Satz wird nicht nur im letzten Kapitel bewiesen, sondern ich finde ausserdem eine obere Schranke für $A(1,\nu)$, woraus das SKOLEMsche Resultat wieder unmittelbar folgt.

Als Beispiel betrachte ich den Streifen

$$1 \leqq u \leqq x, \quad -\frac{1}{\sqrt{u}} \leqq v - u^{7/2} \leqq \frac{1}{\sqrt{u}}$$

und ich beweise, dass die Anzahl der Gitterpunkte in diesem Streifen gleich $O\left(x^{\frac{25}{26}}\right)$ ist, während Herr SKOLEM nur zeigt, dass $\frac{A(1,x)}{x}$ bei unbeschränkt anwachsendem x gegen Null konvergiert.

---

13) Diese Bedingung ist z.B. erfüllt, wenn C eine quadratische Irrationalität ist.