University of Groningen

Brune sections in nonstationary system theory

Alpay, Daniel; Bolotnikov, Vladimir; Dewilde, Patrick; Dijksma, Aad

Published in:
Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Serie 1: Mathématique

IMPORTANT NOTE: You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Publication date:
2000

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database]

Citation for published version (APA):
Alpay, D., Bolotnikov, V., Dewilde, P., & Dijksma, A. (2000). Brune sections in nonstationary system theory. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Serie 1: Mathématique*, *330*(3), 173-178.

Copyright
Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

The publication may also be distributed here under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license. More information can be found on the University of Groningen website: https://www.rug.nl/library/open-access/self-archiving-pure/taverne-amendment.

Take-down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): http://www.rug.nl/research/portal. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.

Download date: 21-01-2023

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 173–178, 2000
Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Sections de Brune en théorie des systèmes non stationnaires

Daniel ALPAY [a], Vladimir BOLOTNIKOV [b], Patrick DEWILDE [c], Aad DIJKSMA [d]

[a] Département de mathématiques, Université Ben-Gurion du Negev, POB 653, 84105 Beer-Sheva, Israel
Courriel : dany@cs.bgu.ac.il

[b] Département de mathématiques, College of William and Mary, Williamsburg, VA, USA
Courriel : vladi@MATH.WM.EDU

[c] DIMES, Department of Electrical Engineering, Delft University of Technology, PObox 5031, 2600 GA Delft, Pays-Bas
Courriel : dewilde@renaer.et.tudelft.nl

[d] Département de mathématiques, Université de Groningue, POB 800, 9700 AV Groningue, Pays-Bas
Courriel : dijksma@math.rug.nl

(Reçu et accepté le 23 novembre 1999)

Résumé. Les « sections de Brune » sont des fonctions matricielles rationnelles analytiques dans le disque unité $\mathbb{D}$, J-intérieures et qui ont un pôle sur le cercle unité (*voir* la formule (1)). Elles ont ont un rôle important en théorie des systèmes stationnaires. Dans cette note, nous présentons leur analogue dans le cadre des systèmes non stationnaires, lorsque les fonctions analytiques et bornées dans $\mathbb{D}$ sont remplacées par des opérateurs triangulaires supérieurs bornés. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Brune sections in nonstationary system theory

Abstract. *"Brune sections" are rational functions analytic in the open unit disk $\mathbb{D}$, J-inner and with a pole on the unit circle* (see *formula* (1))*. They play an important role in the theory of stationary systems. In this Note we present their analogues in the setting of nonstationary systems, where analytic functions bounded in the open unit disk are replaced by upper triangular bounded operators.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

The inverse scattering problem consists in finding all representations $s = (a\sigma + b)/(c\sigma + d)$ of a given function s analytic and contractive in the open unit disk $\mathbb{D}$ (a *Schur function*), where σ is still a Schur function and where $\Theta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ is meromorphic in $\mathbb{D}$ and J-inner: $\Theta(z)J\Theta(z)^* \leqslant J$ for all z in $\mathbb{D}$,

---

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

0764-4442/00/03300173 © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

where Θ is analytic, with $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, and equality holds almost everywhere on the unit circle. The inequality means that the difference $J - \Theta(z)J\Theta(z)^*$ is a nonnegative matrix. This problem is closely related to the theory of linear time-invariant dissipative systems, and has numerous ramifications (*see* [1] for a survey). Two keystones in obtaining such Θ are the works of I. Schur in 1917 (the celebrated Schur algorithm; *see* [9]) and of O. Brune in the early thirties (*see* [5], p. 148). The resulting Θ's are of the form

$$\Theta(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{(1-z)}{\varepsilon \cdot (1-za^*)(1-a)} \begin{pmatrix} 1 & -k \\ k^* & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

In the case of the sections introduced by Schur (and later more generally by R. Nevanlinna) we have $a \in \mathbb{D}$, $k \in \mathbb{D}$ and $\varepsilon = \frac{1-|k|^2}{1-|a|^2}$, while in the case of Brune sections a and k are of modulus 1 (with $a \neq 1$) and ε is a strictly positive number. In the first case Θ is also called a Blaschke factor (the matrix analogue of $\frac{z-a}{1-za^*}$) and its entries are bounded in the open unit disk while this does not hold in the second case.

When one considers nonstationary systems, Schur functions are replaced by upper (or lower, depending on convention) doubly infinite contractive matrices (*see* [3]). The analogue of the Blaschke factors is known (*see* [3]), but up to now, there was no known analogue of the Brune sections. This is the problem we address in this note. One of the main difficulties is that the definition of an upper triangular unbounded operator is not so clear in the present setting. For instance, if e_j is the canonical basis of $\ell_2(\mathbb{Z})$ and Z is the bilateral shift on $\ell_2(\mathbb{Z})$: $Ze_n = e_{n+1}$, then one has (in the weak topology)

$$\left(\sum_0^\infty Z^n\right)(e_j - e_{j-1}) = -\sum_{-\infty}^{-1} Z^n(e_j - e_{j-1}),$$

where the operator on the left is unbounded and "upper triangular" while the operator on the right is unbounded and "lower triangular". These operators are of course the analogues of the two Laurent expansions of $\frac{1}{1-z}$ centered at 0. To overcome the difficulty, we will use the Zadeh transform (for the definition, *see* the end of the next paragraph).

1. Le cadre non stationnaire

Nous renvoyons à [8] pour une discussion plus détaillée. Nous désignons par $\mathcal{U}$ les opérateurs triangulaires supérieurs de $\ell_2(\mathbb{Z})$ dans lui-même et par Z l'opérateur de déplacement bilatéral. Un élément $S \in \mathcal{U}$ s'écrit $S = \sum_0^\infty Z^n S_{[n]}$, où les $S_{[n]}$ sont des opérateurs diagonaux ($S_{[n]} \in \mathcal{D}$). Cette écriture formelle signifie que pour tout entier positif N, la différence $S - \sum_0^N Z^n S_{[n]} \in Z^{N+1}\mathcal{U}$. L'application suivante a été introduite dans [2] et permet de traduire la plupart des problèmes de fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$ dans le cadre des opérateurs triangulaires supérieurs.

DÉFINITION 1. – Soit $V \in \mathcal{D}$ et soit ℓ_V le rayon spectral de ZV^*. Supposons $\ell_V < 1$. L'opérateur $F^\wedge(V) \in \mathcal{D}$ est défini par

$$F^\wedge(V) = \sum_0^\infty (VZ^*)^n Z^n S_{[n]}. \tag{2}$$

On rappelle le résultat suivant [7], Theorem 7.3, p. 212, avec les formules p. 185 and p. 193–194 de ce dernier article. Dans les formules, $V^{(1)} = Z^*VZ \in \mathcal{D}$.

THÉORÈME 2. – *Soient $V \in \mathcal{D}$ avec $\ell_V < 1$ et $E, \beta \in \mathcal{D}$, avec de plus E inversible dans $\mathcal{D}$. Soit Λ la solution de*

$$\Lambda - V\Lambda^{(1)}V^* = \alpha\alpha^* - \beta\beta^*. \tag{3}$$

Supposons Λ inversible et strictement positive et soit Θ donnée par

$$\begin{aligned}
\Theta_{11} &= \left(-\alpha^{-1}V\Lambda^{(1)} + \alpha^*(I - ZV^*)^{-1}Z\right) \cdot \left(\Lambda^{(1)} + \Lambda^{(1)}V^*(\alpha\alpha^*)^{-1}V\Lambda^{(1)}\right)^{-1/2},\\
\Theta_{12} &= \alpha^*(I - ZV^*)^{-1}\Lambda^{-1}\beta \cdot \left(I + \beta^*\Lambda^{-1}\beta\right)^{-1/2},\\
\Theta_{21} &= \beta^*(I - ZV^*)^{-1} \cdot \left(\Lambda^{(1)} + \Lambda^{(1)}V^*(\alpha\alpha^*)^{-1}V\Lambda^{(1)}\right)^{-1/2},\\
\Theta_{22} &= \left(I + \beta^*(I - ZV^*)^{-1}\Lambda^{-1}\beta\right) \cdot \left(I + \beta^*\Lambda^{-1}\beta\right)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Les entrées de la matrice Θ sont dans $\mathcal{U}$ et $\Theta J\Theta^* = \Theta^* J\Theta = J$. La formule

$$S = T_\Theta(\sigma) \overset{\text{def.}}{=} (\Theta_{11}\sigma + \Theta_{12})(\Theta_{21}\sigma + \Theta_{22})^{-1}$$

décrit l'ensemble de toutes les contractions $S \in \mathcal{U}$ telles que $(\alpha S)^\wedge(V) = \beta$ lorsque σ décrit l'ensemble des contractions triangulaires supérieures.

Il est tentant de mettre dans ces formules V tel que $\ell_V = 1$ et de définir le résultat comme étant une section de Brune. Le problème est que l'opérateur $I - ZV^*$ n'est pas inversible. Pour pouvoir définir une section de Brune non stationnaire, on utilise la transformée de Zadeh d'un opérateur $S \in \mathcal{U}$. Cette dernière est la fonction $S(t) = \sum_0^\infty t^n Z^n S_{[n]}$, avec $t \in \mathbb{D}$.

2. Sections de Brune

DÉFINITION 3. – Soient α, β, V_0 des opérateurs diagonaux, avec $\ell_{V_0} = 1$, et supposons que l'équation (3) a une solution $\Lambda \in \mathcal{D}$ inversible et strictement positive dans $\mathcal{D}$. On appelle *section de Brune non stationnaire* l'application $t \longmapsto \Theta(t)$ définie par les formules :

$$\Theta(t)_{11} = \left(-\alpha^{-1}V_0\Lambda^{(1)} + \alpha^*(I - tZV_0^*)^{-1}tZ\right) \cdot \left(\Lambda^{(1)} + \Lambda^{(1)}V_0^*(\alpha\alpha^*)^{-1}V_0\Lambda^{(1)}\right)^{-1/2}, \tag{4}$$

$$\Theta(t)_{12} = \alpha^*(I - tZV_0^*)^{-1}\Lambda^{(1)}\beta\left(I + \beta^*\Lambda^{-1}\beta\right)^{-1/2}, \tag{5}$$

$$\Theta(t)_{21} = \beta^*(I - tZV_0^*)^{-1}tZ \cdot \left(\Lambda^{(1)} + \Lambda^{(1)}V_0^*(EE^*)^{-1}V_0\Lambda^{(1)}\right)^{-1/2}, \tag{6}$$

$$\Theta(t)_{22} = \left(I + \beta^*(I - tZV_0^*)^{-1}\Lambda^{-1}\beta\right) \cdot \left(I + \beta^*\Lambda^{-1}\beta\right)^{-1/2}. \tag{7}$$

Les formules (4)–(7) sont l'analogue de (1) dans le cas des sections de Brune non stationnaires.

La transformée de Redheffer de $\Theta(t)$ est l'application $\Sigma(t)$ définie par

$$\Sigma(t) = \begin{pmatrix} \Theta(t)_{11} - \Theta(t)_{12}\left(\Theta(t)_{22}\right)^{-1}\Theta(t)_{21} & -\Theta(t)_{12}\left(\Theta(t)_{22}\right)^{-1}\\ \left(\Theta(t)_{22}\right)^{-1}\Theta(t)_{21} & \Theta(t)_{22}\end{pmatrix} \tag{8}$$

est contractive et a pour entrées des opérateurs triangulaires supérieurs, dont les expressions sont :

$$\Sigma(t)_{11} = \left(-\alpha^{-1}V_0\Lambda^{(1)} + (\Lambda + \beta\beta^* - t\Lambda ZV_0^*)^{-1}\Lambda tZ\right)\left(\Lambda^{(1)} + \Lambda^{(1)}V_0^*(\alpha\alpha^*)^{-1}V_0\Lambda^{(1)}\right)^{-1/2}, \tag{9}$$

$$\Sigma(t)_{12} = \alpha^*(\Lambda + \beta\beta^* - t\Lambda ZV_0^*)^{-1}\beta, \tag{10}$$

$$\Sigma(t)_{21} = \big(I + \beta\Lambda^{-1}\beta\big)^{1/2}\big(\beta^*(\Lambda + \beta\beta^* - t\Lambda Z V_0^*)^{-1}\Lambda t Z\big)\big(\Lambda^{(1)} + \Lambda^{(1)}V_0^*(\alpha\alpha^*)^{-1}V_0\Lambda^{(1)}\big)^{-1/2}, \quad (11)$$

$$\Sigma(t)_{22} = \big(I + \beta\Lambda^{-1}\beta\big)^{1/2} \cdot \big(I - \beta^*(\Lambda + \beta\beta^* - t\Lambda Z V_0^*)^{-1}\beta\big). \quad (12)$$

THÉORÈME 4. – *Soit* $V = (\Lambda + \beta\beta^*)^{-1}\Lambda(V_0^*)^{(1)}$ *et supposons* $\ell_V < 1$. *La transformée de Redheffer de* $\Theta(t)$ *existe pour* $t = 1$ *et est unitaire en ce point. De plus,* $\Sigma(t)$ *est la transformée de Zadeh de* $\Sigma \stackrel{\text{def.}}{=} \Sigma(1)$ (*et donc on peut écrire* $\Sigma_{ij}(t)$ *au lieu de* $\Sigma(t)_{ij}$).

3. PLL : points de non dissipativité locale

Les sections de Brune sont « le cas limite » des sections de Blaschke. Les points de non dissipativité locale sont les points où les sections de Blaschke tendent vers les sections de Brune (*voir* [6]). Dans le cadre non stationnaire nous avons :

DÉFINITION 5. – Soit $S \in \mathcal{S}$. Un opérateur diagonal V_0 tel que $\ell_{V_0} = 1$ est un point de non-dissipativité locale (*point of local « losslessness »*) dans la direction $\alpha \in \mathcal{D}$ si V_0 et α sont inversibles, si Λ et Λ^{-1} sont positifs et appartiennent à $\mathcal{D}$, où

$$\Lambda = \sup_{0 \leqslant r < 1}\left(\sum_0^\infty r^{2n} V_0^{[n]}\big(\alpha\alpha^* - (\alpha S)^\wedge(rV_0)(\alpha S)^\wedge(rV_0)^*\big)^{(n)} V_0^{[n]*}\right), \quad (13)$$

et si finalement la limite $\lim_{r\to 1}(\alpha S)^\wedge(rV_0)$ existe (pour la topologie opérateur).

THÉORÈME 6. – *Soit* $S \in \mathcal{S}$ *et soit* V_0 *un point de non dissipativité locale pour* S *dans la direction* α. *Soit la section de Brune* $t \longmapsto \Theta(t)$ *définie par les formules* (4)–(7) *avec* $\beta = \lim\limits_{r\to 1}(\alpha S)^\wedge(rV_0)$. *Alors,* $(\Theta(t)_{22})^{-1} \in \mathcal{U}$ *pour chaque* $t \in \mathbb{D}$, $0 \leqslant t < 1$, *et il existe* $\sigma \in \mathcal{S}$ *tel que*

$$S(t) = T_{\Theta(t)}\big(\sigma(t)\big), \quad (14)$$

où $S(t)$ *et* $\sigma(t)$ *sont les transformées de Zadeh de* S *et* σ.

Idée de la démonstration du théorème 6. – On applique le théorème 2 à $V = rV_0$ et $\beta = \beta_r = (\alpha S)^\wedge(rV)$. On désigne par Λ_r la solution unique de (3) avec ces valeurs. Pour chaque $r \in \mathbb{D}$ il existe $\sigma_r \in \mathcal{S}$ tel que $S = T_{\Theta_r}(\sigma_r)$, avec Θ_r une section de Blaschke non stationnaire. La transformation de Zadeh nous donne $S(t) = T_{\Theta_r(t)}(\sigma_r(t))$ avec

$$(\Theta_r)_{11}(t) = \big(\big(-r\alpha^{-1}V_0\big)\Lambda_r^{(1)} + \alpha^*(I - rtZV_0^*)^{-1}tZ\big) \cdot \big(\Lambda_r^{(1)} + r^2\Lambda_r^{(1)}V_0^*(\alpha\alpha^*)^{-1}V_0\Lambda_r^{(1)}\big)^{-1/2},$$

$$(\Theta_r)_{12}(t) = \alpha^*(I - rtZV_0^*)^1\Lambda_r^{(1)}\beta_r\big(I + \beta_r\Lambda_r^{-1}\beta_r\big)^{-1/2},$$

$$(\Theta_r)_{21}(t) = \beta_r^*(I - rtZV_0^*)^{-1}tZ \cdot \big(\Lambda_r^{(1)} + r^2\Lambda_r^{(1)}V_0^*(\alpha\alpha^*)^{-1}V_0\Lambda_r^{(1)}\big)^{-1/2},$$

$$(\Theta_r)_{22}(t) = \big(I + \beta_r^*(I - rtZV_0^*)^{-1}\Lambda_r^{-1}\beta_r\big) \cdot \big(I + \beta_r^*\Lambda_r^{-1}\beta_r\big)^{-1/2}.$$

Les hypothèses sur V_0 nous permettent de passer à la limite $r \to 1$, et on obtient le résultat.

4. Exemples

Le cas où les composantes de V_0 sont toutes de module 1 est déjà plein d'enseignement. On suppose que α et β sont unitaires. L'opérateur Λ est alors scalaire et on obtient des simplifications dans les formules. En particulier,

$$\left(\alpha\Theta(t)_{12}\Theta(t)_{22}^{-1}\right)^{\wedge}(V_0)=\frac{\beta}{1+(1-t)\Lambda}, \tag{15}$$

$$\left(\Theta(t)_{22}^{-1}\right)^{\wedge}(V_0)=\sqrt{\frac{1+\Lambda}{\Lambda}}\left(1-\frac{1}{1+\Lambda}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right)^{n}\beta^{(n)*}\beta\right). \tag{16}$$

La formule (16) montre qu'en général,

$$\lim_{t\to 1}\left(\Theta(t)_{22}^{-1}\right)^{\wedge}(V_0)\neq 0$$

(si β est scalaire, cette limite est bien égale à 0). En particulier, on ne peut espérer que la fonction $\Theta(t)$ paramétrise un problème d'interpolation sur la frontière, contrairement au cas des sections de Blaschke.

5. Espaces à noyau reproduisant

Le résultat suivant est l'analogue non stationnaire d'un théorème de structure lié aux espaces de de Branges de dimension finie (*voir* par exemple [4], Theorem 4.1, p. 134).

THÉORÈME 7. – *Soient $\alpha,\ \beta,\ V_0\in\mathcal{D}$ avec $\ell_{V_0}=1$ et définissons*

$$F(t)=\begin{pmatrix}\alpha^*\\ \beta^*\end{pmatrix}\left(I-tZV_0^*\right)^{-1},\quad t\in\mathbb{D}. \tag{17}$$

Supposons que, pour $D\in\mathcal{D}$,

$$F(t)D\equiv 0 \implies D=0,$$

et que l'équation (3) *a une solution Λ strictement positive. Alors,*

$$F(t)\Lambda^{-1}F(t)^{\wedge}(W)^*=\left(J-\Theta(t)J\left(\Theta(t)\right)^{\wedge}(W)^*\right)\left(I-t^2ZW^*\right)^{-1}\quad (W\in\mathcal{D}),$$

où Θ est la section de Brune dans la direction α au point V_0.

En d'autres termes, soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions de la forme $F(t)D$ avec $D\in\mathcal{D}_2$ et doté du produit scalaire

$$\left[F(t)D,F(t)D\right]_{\mathcal{M}}=D^*\Lambda D,$$

alors $\mathcal{M}$ est égal à l'espace à noyau reproduisant de noyau

$$\left(J-\Theta(t)J\left(\Theta(t)\right)^{\wedge}(W)^*\right)\left(I-t^2ZW^*\right)^{-1}.$$

6. Conclusions

La théorie non stationnaire des systèmes a été jusqu'à maintenant étudiée dans le cadre des opérateurs bornés. Les résultats mentionnés dans cette Note permettent de considérer le cas non borné. Ce cas est particulièrement important pour traiter le cas de fréquences réelles.

Références bibliographiques

[1] Alpay D., Algorithme de Schur, espaces à noyau reproduisant et théorie des systèmes, Panoramas et Synthèses, Vol. 6, Soc. Math. de France, Paris, 1998.

[2] Alpay D., Dewilde P., Time-varying signal approximation and estimation, in: Signal Processing, Scattering and Operator Theory, and Numerical Methods, M. Kaashoek, J.H. van Schuppen, A.C.M. Ran (Eds.), Amsterdam 1989, Progress in Systems and Control Theory, Vol. 5, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 1–22.
[3] Alpay D., Dewilde P., Dym H., Lossless inverse scattering and reproducing kernels for upper triangular operators, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 47, Birkhäuser, Basel, 1990, pp. 61–133.
[4] Alpay D., Dym H., On a new class of realization formulas and their applications, Linear Algebra Appl. 241/243 (1996) 3–84.
[5] Belevitch V., Classical Network Theory, Holden-Day, San Francisco, Calif., 1968.
[6] Dewilde P., Dym H., Lossless inverse scattering, digital filters and estimation theory, IEEE Trans. Inform. Theory 30 (1984) 644–662.
[7] Dewilde P., Dym H., Interpolation for upper triangular operators, in: Time-Variant Systems and Interpolation, I. Gohberg (Ed.), Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 56, Birkhäuser, Basel, 1992, pp. 153–260.
[8] Dewilde P., van der Veen A.J., Time-Varying Systems and Computations, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1998.
[9] Schur I., Über die Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises beschränkt sind, I, J. Reine Angew. Math. 147 (1917) 205–232.