Een involutie in de kegelsneden-ruimte

Jansen, Cristianus Johannes Aloysius

Publication date:
1933

INLEIDING.

Het is op de volgende wijze mogelijk de kegelsneden van de ruimte één aan één involutorisch aan elkaar toe te voegen.

Twee punten T_1 en T_2 als toppen en een kegelsnede α als richtlijn bepalen twee kwadratische kegels: respectievelijk τ_1 en τ_2. Deze beide kegels hebben behalve de kegelsnede α nog een kegelsnede α' gemeen. Worden deze twee kegelsneden aan elkaar toegevoegd, waarbij de punten T_1 en T_2 als vast worden beschouwd, dan is in het algemeen aan een kegelsnede α één kegelsnede α' involutorisch toegevoegd.

Een involutie, die dezelfde paren geeft van niet ontaarde kegelsneden, welke aan elkaar zijn toegevoegd, kan als volgt worden gedefinieerd.

Een kegelsnede α en het puntenpaar T_1, T_2, beide beschouwd als ontaarde kwadratische klasse-oppervlakken, bepalen een lineaire verzameling van ∞^1 kwadratische klasse-oppervlakken. Deze verzameling bevat behalve de genoemde ontaardingen in het algemeen nog slechts één ontaard kwadratisch klasse-oppervlak: de kegelsnede α'. Worden de kegelsneden α en α' aan elkaar toegevoegd, waarbij het puntenpaar T_1, T_2 als vast wordt beschouwd, dan is in het algemeen aan een kegelsnede α één kegelsnede α' involutorisch toegevoegd.

Is bij een gegeven puntenpaar T_1, T_2 en een gegeven niet ontaarde kegelsnede α de volgens de eerste definitie bepaalde kegelsnede α' niet ontaard, dan is deze identiek met de kegelsnede α', die volgens de tweede definitie wordt bepaald. In dat geval kan dus zoowel de eerste als de tweede definitie dienen ter bepaling van de kegelsnede α'. In het geval echter, dat die kegelsnede α' ontaard is, zal deze volgens de eerste definitie bijv. een dubbelrechte zijn, terwijl ze dan volgens de tweede definitie een puntenpaar is.

Is echter de gegeven kegelsnede α een lijnenpaar, dan is het aangewezen om de toegevoegde te bepalen aan de hand van de eerste definitie; is daarentegen de gegeven kegelsnede α een kwadratisch klasse-oppervlak, dat in een puntenpaar ontaard is, dan is het aangewezen om de toegevoegde te bepalen aan de hand van de tweede definitie.

In deze bladzijden zal de genoemde involutie in de kegelsnedenruimte nader worden bestudeerd. Bij het zoeken naar de stelsels kegelsneden α', die zijn toegevoegd aan de singuliere kegelsneden α, beperken we ons tot de bestudeering van het volledige stelsel singuliere ontaarde kwadratische klasse-oppervlakken, terwijl de stelsels kegelsneden α', die zijn toegevoegd aan singuliere lijnenparen, slechts zullen worden behandeld voor zoover dit in verband met de daarna volgende hoofdstukken noodzakelijk is.

Achtereenvolgens zullen dan verder onderzocht worden de stelsels kegelsneden α', die zijn toegevoegd aan de volgende stelsels kegelsneden α, waarbij hier reeds de gevonden conclusies beknopt worden aangeduid.

De kegelsneden α', *die zijn toegevoegd aan een bundel van kegelsneden* α, *vormen een kubische bimonoïde met kegelpunten* T_1 *en* T_2, *terwijl de vlakken van deze kegelsneden* α' *een bundel vormen.*

De kegelsneden α', *die zijn toegevoegd aan een schaar van kegelsneden* α, *vormen een oppervlak van de zesde graad, dat* T_1 *en* T_2 *tot viervoudige punten heeft, terwijl de vlakken van deze kegelsneden een kwadratische kegel omhullen.*

De kegelsneden α', *die zijn toegevoegd aan een net van kegelsneden* α, *vormen een congruentie* (1, 1) *van kegelsneden, waarvan de vlakken een schoof vormen, terwijl de kegelsneden* α' *in zes punten rusten op drie kegelsneden door* T_1 *en* T_2, *die niet op eenzelfde kwadratisch oppervlak liggen.*

De kegelsneden α', *die zijn toegevoegd aan een graad-kluwen van kegelsneden* α, *vormen een complex* (0, 1) *van kegelsneden.*

De kegelsneden α', *die zijn toegevoegd aan het complex van kegelsneden, waarvan alle exemplaren op eenzelfde kwadratisch oppervlak liggen, vormen een complex* (1, 4) *van kegelsneden.*

De ontaarde kegelsneden α', *die zijn toegevoegd aan de ontaarde kegelsneden* α, *die op eenzelfde kwadratisch oppervlak liggen, vormen een congruentie* (8, 6).

De kegelsneden α', *die zijn toegevoegd aan de kegelsneden* α, *volgens welke een kwadratisch oppervlak wordt gesneden door de vlakken gaande door eenzelfde punt, vormen een congruentie* (4, 3).

De kegelsneden α', *die zijn toegevoegd aan de kegelsneden* α, *volgens welke een kwadratisch oppervlak door een bundel vlakken wordt ge-*

sneden, vormen een oppervlak van de zesde graad, terwijl door een algemeen punt drie vlakken van een kegelsnede α' gaan.

Uit de beschouwing van het stelsel kegelsneden a', dat is toegevoegd aan een bundel van kegelsneden a, kunnen op eenvoudige wijze de volgende eigenschappen van het lijnenstelsel op een kubische bimonoïde worden afgeleid:

1⁰. De vier punten, waarin de acht niet-torsale rechten door de kegelpunten van een kubische bimonoïde elkaar twee aan twee buiten de kegelpunten snijden, liggen in één vlak.

2⁰. In het onder 1⁰ genoemde vlak liggen ook de drie punten, waarin de zes niet op de verbindingslijn van de beide kegelpunten rustende rechten elkaar twee aan twee snijden.

3⁰. De zeven onder 1⁰ en 2⁰ genoemde punten zijn gerangschikt in zes collineaire drietallen.

4⁰. Het snijpunt van de verbindingslijn van de beide kegelpunten met het vlak door de onder 1⁰ en 2⁰ genoemde punten is het vierde harmonische punt van het punt, waarin een rechte van het kubisch oppervlak buiten de kegelpunten op de verbindingslijn daarvan rust, ten opzichte van het puntenpaar, dat door de kegelpunten wordt gevormd.

5⁰. De rechte van het kubisch oppervlak, die buiten de kegelpunten op de verbindingslijn daarvan rust, snijdt het vlak van de onder 1⁰ en 2⁰ genoemde punten in het punt, dat toegevoegd is aan het snijpunt van de verbindingslijn van de kegelpunten met het genoemde vlak ten opzichte van alle exemplaren van de bundel van kegelsneden, die door de vier onder 1⁰ genoemde punten wordt bepaald.

Uit de beschouwing van het stelsel kegelsneden a', dat is toegevoegd aan een net van kegelsneden a, volgt dan nog:

1⁰. Als δ_1, δ_2 en δ_3 drie kegelsneden zijn, die door twee punten T_1 en T_2 gaan en die niet op eenzelfde kwadratisch oppervlak liggen, dan is er een congruentie (1, 1) van kegelsneden, waarvan alle exemplaren in zes punten buiten T_1 en T_2 op de kegelsneden δ_1, δ_2 en δ_3 rusten.

2⁰. De vlakken van de exemplaren van deze congruentie van kegelsneden vormen een schoof, waarvan het centrum C ligt op de verbindingslijn T_1T_2.

3⁰. Het puntenpaar, dat gevormd wordt door het punt C en het snijpunt van T_1T_2 met het vlak door de drie polen van T_1T_2

ten opzichte van δ_1, δ_2 en δ_3, ligt harmonisch ten opzichte van het puntenpaar T_1, T_2.

4^0. De genoemde congruentie van kegelsneden bevat ∞^1 lijnenparen. De dubbelpunten van deze lijnenparen liggen op een kubische kromme in het vlak door de polen van T_1T_2 ten opzichte van δ_1, δ_2 en δ_3. De genoemde kubische kromme rust in zes punten op de kegelsneden δ_1, δ_2 en δ_3.

Algemeene eigen

§ **1.** ONDERLIN

1. Elke kegelsn
snede α' op eenzel
en snijdt dus deze

2. De kegels τ_1

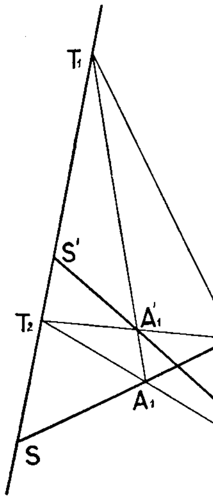

Fig. 1.

3. Een raakvlak
de beide kegels τ_1
De punten A_1, A_2,
samengevallen. De
zelfde punt aan d
GEVOLG: *de ke*
S_1 *en* S_2, *die de ra*