

## University of Groningen

### Een involutie in de kegelsneden-ruimte

Jansen, Cristianus Johannes Aloysius

**IMPORTANT NOTE: You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.**

*Document Version*

Publisher's PDF, also known as Version of record

*Publication date:*

1933

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database](#)

*Citation for published version (APA):*

Jansen, C. J. A. (1933). *Een involutie in de kegelsneden-ruimte*. Noordhoff Uitgevers.

**Copyright**

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

The publication may also be distributed here under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license. More information can be found on the University of Groningen website: <https://www.rug.nl/library/open-access/self-archiving-pure/taverne-amendment>.

**Take-down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

*Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): <http://www.rug.nl/research/portal>. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.*

## INLEIDING.

---

Het is op de volgende wijze mogelijk de kegelsneden van de ruimte één aan één involutorisch aan elkaar toe te voegen.

Twee punten  $T_1$  en  $T_2$  als toppen en een kegelsnede  $\alpha$  als richtlijn bepalen twee kwadratische kegels: respectievelijk  $\tau_1$  en  $\tau_2$ . Deze beide kegels hebben behalve de kegelsnede  $\alpha$  nog een kegelsnede  $\alpha'$  gemeen. Worden deze twee kegelsneden aan elkaar toegevoegd, waarbij de punten  $T_1$  en  $T_2$  als vast worden beschouwd, dan is in het algemeen aan een kegelsnede  $\alpha$  één kegelsnede  $\alpha'$  involutorisch toegevoegd.

Een involutie, die dezelfde paren geeft van niet ontaarde kegelsneden, welke aan elkaar zijn toegevoegd, kan als volgt worden gedefinieerd.

Een kegelsnede  $\alpha$  en het puntenpaar  $T_1, T_2$ , beide beschouwd als ontaarde kwadratische klasse-oppervlakken, bepalen een lineaire verzameling van  $\infty^1$  kwadratische klasse-oppervlakken. Deze verzameling bevat behalve de genoemde ontaarding in het algemeen nog slechts één ontaard kwadratisch klasse-oppervlak: de kegelsnede  $\alpha'$ . Worden de kegelsneden  $\alpha$  en  $\alpha'$  aan elkaar toegevoegd, waarbij het puntenpaar  $T_1, T_2$  als vast wordt beschouwd, dan is in het algemeen aan een kegelsnede  $\alpha$  één kegelsnede  $\alpha'$  involutorisch toegevoegd.

Is bij een gegeven puntenpaar  $T_1, T_2$  en een gegeven niet ontaarde kegelsnede  $\alpha$  de volgens de eerste definitie bepaalde kegelsnede  $\alpha'$  niet ontaard, dan is deze identiek met de kegelsnede  $\alpha'$ , die volgens de tweede definitie wordt bepaald. In dat geval kan dus zowel de eerste als de tweede definitie dienen ter bepaling van de kegelsnede  $\alpha'$ . In het geval echter, dat die kegelsnede  $\alpha'$  ontaard is, zal deze volgens de eerste definitie bijv. een dubbelrechte zijn, terwijl ze dan volgens de tweede definitie een puntenpaar is.

Is echter de gegeven kegelsnede  $\alpha$  een lijnenpaar, dan is het aangewezen om de toegevoegde te bepalen aan de hand van de

eerste definitie; is daarentegen de gegeven kegelsnede  $\alpha$  een kwadratisch klasse-oppervlak, dat in een puntenpaar ontaard is, dan is het aangewezen om de toegevoegde te bepalen aan de hand van de tweede definitie.

In deze bladzijden zal de genoemde involutie in de kegelsnedenruimte nader worden bestudeerd. Bij het zoeken naar de stelsels kegelsneden  $\alpha'$ , die zijn toegevoegd aan de singuliere kegelsneden  $\alpha$ , beperken we ons tot de bestudeering van het volledige stelsel singuliere ontaarde kwadratische klasse-oppervlakken, terwijl de stelsels kegelsneden  $\alpha'$ , die zijn toegevoegd aan singuliere lijnenparen, slechts zullen worden behandeld voor zoover dit in verband met de daarna volgende hoofdstukken noodzakelijk is.

Achtereenvolgens zullen dan verder onderzocht worden de stelsels kegelsneden  $\alpha'$ , die zijn toegevoegd aan de volgende stelsels kegelsneden  $\alpha$ , waarbij hier reeds de gevonden conclusies beknopt worden aangeduid.

*De kegelsneden  $\alpha'$ , die zijn toegevoegd aan een bundel van kegelsneden  $\alpha$ , vormen een kubische bimonoid met kegelpunten  $T_1$  en  $T_2$ , terwijl de vlakken van deze kegelsneden  $\alpha'$  een bundel vormen.*

*De kegelsneden  $\alpha'$ , die zijn toegevoegd aan een schaar van kegelsneden  $\alpha$ , vormen een oppervlak van de zesde graad, dat  $T_1$  en  $T_2$  tot viervoudige punten heeft, terwijl de vlakken van deze kegelsneden een kwadratische kegel omhullen.*

*De kegelsneden  $\alpha'$ , die zijn toegevoegd aan een net van kegelsneden  $\alpha$ , vormen een congruentie (1, 1) van kegelsneden, waarvan de vlakken een schoof vormen, terwijl de kegelsneden  $\alpha'$  in zes punten rusten op drie kegelsneden door  $T_1$  en  $T_2$ , die niet op eenzelfde kwadratisch oppervlak liggen.*

*De kegelsneden  $\alpha'$ , die zijn toegevoegd aan een graad-kluwen van kegelsneden  $\alpha$ , vormen een complex (0, 1) van kegelsneden.*

*De kegelsneden  $\alpha'$ , die zijn toegevoegd aan het complex van kegelsneden, waarvan alle exemplaren op eenzelfde kwadratisch oppervlak liggen, vormen een complex (1, 4) van kegelsneden.*

*De ontaarde kegelsneden  $\alpha'$ , die zijn toegevoegd aan de ontaarde kegelsneden  $\alpha$ , die op eenzelfde kwadratisch oppervlak liggen, vormen een congruentie (8, 6).*

*De kegelsneden  $\alpha'$ , die zijn toegevoegd aan de kegelsneden  $\alpha$ , volgens welke een kwadratisch oppervlak wordt gesneden door de vlakken gaande door eenzelfde punt, vormen een congruentie (4, 3).*

*De kegelsneden  $\alpha'$ , die zijn toegevoegd aan de kegelsneden  $\alpha$ , volgens welke een kwadratisch oppervlak door een bundel vlakken wordt ge-*

*sneden, vormen een algemeen punt drie*

Uit de beschouwing toegevoegd aan een bundel wijze de volgende kubische bimonoid

1<sup>o</sup>. De vier punten van de kegelpunten van buiten de kegelpunten

2<sup>o</sup>. In het onderstaande waarin de zes niet rustende rechten e

3<sup>o</sup>. De zeven ontaarde in zes collineaire d

4<sup>o</sup>. Het snijpunt van de punten met het vlak van het vierde harmonische het kubisch oppervlak lijn daarvan rust, de kegelpunten wordt

5<sup>o</sup>. De rechte van de punten op de verbinding onder 1<sup>o</sup> en 2<sup>o</sup> genoten aan het snijpunt van het genoemde vlak van kegelsneden, die bepaald.

Uit de beschouwing toegevoegd aan een n

1<sup>o</sup>. Als  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  en  $T_1$  en  $T_2$  gaan en liggen, dan is er een alle exemplaren in  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  en  $\delta_3$  rusten

2<sup>o</sup>. De vlakken van kegelsneden vorme de verbindinglijn

3<sup>o</sup>. Het snijpunt van T

*sneden, vormen een oppervlak van de zesde graad, terwijl door een algemeen punt drie vlakken van een kegelsnede  $\alpha'$  gaan.*

Uit de beschouwing van het stelsel kegelsneden  $\alpha'$ , dat is toegevoegd aan een bundel van kegelsneden  $\alpha$ , kunnen op eenvoudige wijze de volgende eigenschappen van het lijnenstelsel op een kubische bimonoiden worden afgeleid:

1<sup>o</sup>. De vier punten, waarin de acht niet-torsale rechten door de kegelpunten van een kubische bimonoiden elkaar twee aan twee buiten de kegelpunten snijden, liggen in één vlak.

2<sup>o</sup>. In het onder 1<sup>o</sup> genoemde vlak liggen ook de drie punten, waarin de zes niet op de verbindingslijn van de beide kegelpunten rustende rechten elkaar twee aan twee snijden.

3<sup>o</sup>. De zeven onder 1<sup>o</sup> en 2<sup>o</sup> genoemde punten zijn gerangschikt in zes collineaire drietallen.

4<sup>o</sup>. Het snijpunt van de verbindingslijn van de beide kegelpunten met het vlak door de onder 1<sup>o</sup> en 2<sup>o</sup> genoemde punten is het vierde harmonische punt van het punt, waarin een rechte van het kubisch oppervlak buiten de kegelpunten op de verbindingslijn daarvan rust, ten opzichte van het puntenpaar, dat door de kegelpunten wordt gevormd.

5<sup>o</sup>. De rechte van het kubisch oppervlak, die buiten de kegelpunten op de verbindingslijn daarvan rust, snijdt het vlak van de onder 1<sup>o</sup> en 2<sup>o</sup> genoemde punten in het punt, dat toegevoegd is aan het snijpunt van de verbindingslijn van de kegelpunten met het genoemde vlak ten opzichte van alle exemplaren van de bundel van kegelsneden, die door de vier onder 1<sup>o</sup> genoemde punten wordt bepaald.

Uit de beschouwing van het stelsel kegelsneden  $\alpha'$ , dat is toegevoegd aan een net van kegelsneden  $\alpha$ , volgt dan nog:

1<sup>o</sup>. Als  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  en  $\delta_3$  drie kegelsneden zijn, die door twee punten  $T_1$  en  $T_2$  gaan en die niet op eenzelfde kwadratisch oppervlak liggen, dan is er een congruentie (1, 1) van kegelsneden, waarvan alle exemplaren in zes punten buiten  $T_1$  en  $T_2$  op de kegelsneden  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  en  $\delta_3$  rusten.

2<sup>o</sup>. De vlakken van de exemplaren van deze congruentie van kegelsneden vormen een schoof, waarvan het centrum  $C$  ligt op de verbindingslijn  $T_1T_2$ .

3<sup>o</sup>. Het puntenpaar, dat gevormd wordt door het punt  $C$  en het snijpunt van  $T_1T_2$  met het vlak door de drie polen van  $T_1T_2$

ten opzichte van  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  en  $\delta_3$ , ligt harmonisch ten opzichte van het puntenpaar  $T_1$ ,  $T_2$ .

4<sup>o</sup>. De genoemde congruentie van kegelsneden bevat  $\infty^1$  lijnenparen. De dubbelpunten van deze lijnenparen liggen op een kubische kromme in het vlak door de polen van  $T_1T_2$  ten opzichte van  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  en  $\delta_3$ . De genoemde kubische kromme rust in zes punten op de kegelsneden  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  en  $\delta_3$ .

Algemeene eigen

§ 1. ONDERLIN

1. Elke kegelsnede  $\alpha'$  op eenzel en snijdt dus deze

2. De kegels  $\tau_1$

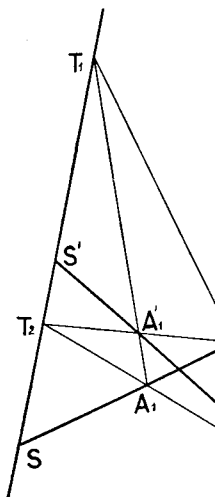


Fig. 1.

3. Een raakvlak de beide kegels  $\tau_1$ . De punten  $A_1, A_2$  samengevallen. De zelfde punt aan d

GEVOLG: de ke  $S_1$  en  $S_2$ , die de ra