

EPM/RT-88/7

(VERS UNE MODÉLISATION DES ENSEMBLES FRACTALS)

Gilles (Deslauriers) professeur
Jean-Pierre (Mongeau) étudiant au Ph.D.

Département de mathématiques appliquées

École Polytechnique de Montréal
mars (1988)

Gratuit

Ce document a pu être publié grâce à une subvention du F.C.A.R. du Québec pour l'aide et le soutien à la recherche, (CRP-2093). Boursier C.R.S.N.G., Gouvernement du Canada.

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite de l'auteur.

Dépôt légal, 1^{er} trimestre 1988
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

Pour ce procurer une copie de ce document, s'adresser aux:

Éditions de l'École Polytechnique de Montréal
École Polytechnique de Montréal
Case postale 6079, Succursale "A"
Montréal (Québec) H3C 3A7
(514) 340-4000

Compter 0,10\$ par page (arrondir au dollar le plus près) et ajouter 3,00\$ (Canada) pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal. Nous n'honorons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable, dans le cas d'établissements d'enseignement, de société ou d'organismes canadiens.

Table des matières

1. Introduction	1
2. Ensembles récurrents de M. Dekking	2
3. Systèmes de fonctions itératives de	9
4. Schéma d'interpolation itérative de	15
5. Ensembles de Fatou et ensembles de Julia	20
Bibliographie	30

VERS UNE MODÉLISATION DES ENSEMBLES FRACTALS

par

Gilles Deslauriers⁽¹⁾ et Jean-Pierre Mongeau⁽²⁾

1. INTRODUCTION

B. Mandelbrot, par ses écrits, est en quelque sorte responsable de l'activité de recherche sur les fractals.

J. Hutchinson en publiant un article important en 1981 a sans aucun doute inspiré d'autres chercheurs. M. Barnsley et S. Demko indiquent que certains résultats qu'ils obtiennent, ont été obtenus auparavant par Hutchinson. Ces deux auteurs présentent les systèmes de fonctions itératives comme une manière unifiée de classifier et d'engendrer les ensembles fractals. Ils sont les premiers avec P. Diaconis et M. Shashahani à parler du problème inverse, c'est-à-dire partant d'un ensemble fractal, construire une procédure itérative dont le résultat serait cet ensemble.

Au tout début les exemples classiques d'ensembles fractals satisfont une propriété d'auto-similarité, c'est-à-dire que l'objet se décompose en un nombre fini de sous-ensembles similaires à lui même, souvent disjoints deux à deux. Fin 1979 début 1980, on assiste à une généralisation de cette propriété et conséquemment à l'obtention de d'autres modèles. Nous en avons choisi trois, les ensembles récurrents de M. Dekking, les systèmes de fonctions itératives de M. Barnsley et S. Demko et un schéma d'interpolation itérative que S. Dubuc et G. Deslauriers ont dernièrement développé.

Nous présentons dans les quelques pages qui suivent, assez brièvement, ces trois modèles pour engendrer des courbes ou des ensembles fractals. Dans la dernière section, on y retrouve la méthode de Newton appliquée aux polynômes complexes.

Texte basé sur une conférence présentée jeudi le 4 février 1988 dans le cadre de l'année des Fractales à l'École Polytechnique.

(1) Publié grâce à une subvention du F.C.A.R. du Québec pour l'aide et le soutien à la recherche. CRP-2093.

(2) Boursier C.R.S.N.G., Gouvernement du Canada.

Nous avons intégré à ce texte les ensembles de Julia et de Fatou car ils sont obtenus par une méthode itérative très utilisée, la méthode de Newton (approximation de la racine d'une fonction non linéaire). Cette méthode fut utilisée pour obtenir les images du vidéo "Danse de Julia" que nous avons présenté lors de la conférence du 4 février 1988 dans le cadre de "L'année des fractales à l'École Polytechnique".

Nous avons illustré le texte de figures pour chaque modèle. Ces figures furent créées sur ordinateur et nous tenons à remercier les personnes qui en ont écrit les programmes. Deux étudiants, Roselyne Perrault et Tran Trung-Dung, ont comme projet de fin d'études, écrit les programmes du modèle de Dekking et du modèle de Barnsley et Demko respectivement. Les programmes du troisième modèle furent écrit en collaboration avec M. L'Heureux, associé professionnel au département de mathématiques appliquées.

2. ENSEMBLES RECURRENTS DE M. DEKKING

Michel Dekking introduisit en 1982 une procédure itérative pour décrire et générer une grande classe d'ensembles fractals comme par exemple les courbes de Peano, de von Koch-Mandelbrot et d'autres ensembles comme l'ensemble triadique de Cantor, le tapis de Sierpinski, ou l'éponge de Menger, etc. Le formalisme mathématique qui caractérisa cette procédure itérative fait intervenir deux fonctions définies sur deux domaines très différents.

La première fonction assigne des mots aux lettres d'un alphabet, (ensemble fini de lettres), tandis que la seconde est une application linéaire dans l'espace Euclidien de dimension d , \mathbb{R}^d , espace où vivra l'ensemble fractal ainsi généré.

Nous rappelons ici cette procédure et en donnons quelques exemples. Il est évident que nous ne pouvons entrer dans tout les détails et le lecteur devra consulter la bibliographie pour en savoir davantage sur le sujet.

Désignons par:

S un alphabet fini.

S^* l'ensemble de tous les mots que l'on peut écrire à l'aide des lettres de l'alphabet S .

θ un endomorphisme de S^* tel que $\theta(uv) = \theta(u)\theta(v)$ pour tout les mots u et v de S^* . Evidemment θ est définie par ses valeurs $\theta(s)$ sur les lettres s de S .

Comme nous voulons obtenir des ensembles fractals dans l'espace Euclidien de dimension d , \mathbb{R}^d , il existe un homomorphisme f de S^* dans \mathbb{R}^d tel que $f(uv)=f(u)+f(v)$ quelque soit les mots u et v de S^* et une application linéaire (associée à θ) L de \mathbb{R}^d dans lui même telle que

$$f(\theta(s)) = L f(s) \text{ pour } s \text{ dans } S.$$

Comme θ , cette fonction f est définie par ses valeurs $f(s)$ sur les lettres s de l'alphabet S . Cet homomorphisme assigne des points de \mathbb{R}^d aux différents mots, mais nous voulons associer des courbes ou en général des ensembles compacts aux mots. Pour ce faire, considérons une application K de S^* dans $K_0(\mathbb{R}^d)$ (les sous-ensembles compacts de \mathbb{R}^d) telle:

$$K[uv]=K[u] \cup (K[v]+f(u)) \text{ pour } u \text{ et } v \text{ dans } S^*. \quad (1)$$

En particulier, on peut prendre $K[u]=\{\alpha f(u): 0 \leq \alpha \leq 1\}$, mais tout autre dessin associé au mot u et fait au point $f(u)$ serait acceptable.

Nous sommes intéressés au comportement des ensembles $K[\theta_n(u)]$ lorsque n tend vers l'infini où θ_n est l'itération n fois de θ et où u est un mot fixe. Si les valeurs propres de L sont supérieures à 1 en valeur absolue (L est dite expansive) on peut contracter l'ensemble $K[\theta_n(u)]$ en lui appliquant L^{-n} .

THÉORÈME

Soit θ l'endomorphisme tel que défini précédemment et L l'application linéaire expansive qui lui est associée, K l'application de S^* dans $K_0(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant la relation (1) et supposons que pour chaque lettre s , $K[s]$ soit non vide. Alors, pour un mot u de S^* , il existe un ensemble compact $K_\theta[u]$ tel que:

$L^{-n} K[\theta_n(u)]$ converge vers $K_\theta[u]$ lorsque n tend vers l'infini dans l'espace métrique d'Hausdorff. Ce compact ne dépend pas de l'application K et est une courbe continue dite courbe récurrente. \diamond

On pourra trouver dans l'article de M. Dekking [2], plusieurs remarques ou modifications que l'on peut apporter à ce résultat.

Mentionnons que l'on pourrait prendre une suite d'endomorphismes θ_i (au lieu d'un seul) où θ_i appartient à un ensemble fini d'endomorphismes ayant la même représentation expansive L .

Notons qu'il est possible que deux mots différents donnent la même courbe récurrente.

Donnons quelques exemples.

EXEMPLES:

Exemple 1: Triangle de Sierpinski.

$$S = \{ s_i : i=0,1,2,3,4,5 \}.$$

L'endomorphisme θ est tel que $\theta(s_i) = s_i s_{i+2} s_i s_{i+4} s_i$ pour $i=0,1,\dots,5$ et où la somme $i+j$ se fait modulo 6.

L'homomorphisme f est tel que:
 $f(s_i) = (\cos \pi i/3, \sin \pi i/3)$ pour $i=0,1,\dots,5$.

La fonction K utilisée est celle décrite précédemment.

La figure 1 qui suit donne les 5 premières itérations de $K_\theta(s_0)$ et la 4^{ième} itération du mot $s_0 s_5 s_0 s_1 s_0$.

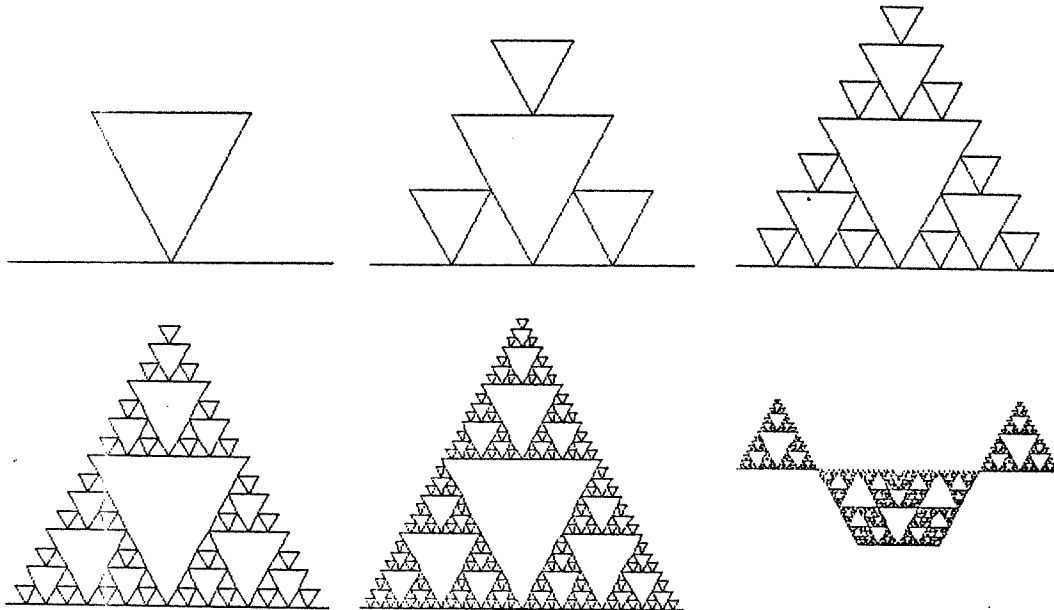


figure 1

Exemple 2: Une courbe de von-Koch généralisée.

$$S = \{ s_{i,j} : i=0,1 \text{ et } j=0,1,2,3,4,5 \}.$$

L'endomorphisme θ est tel que:

$$\begin{aligned} \theta(s_{0,j}) &= s_{0,j} s_{1,j+1} s_{1,j+5} s_{0,j}, \\ \theta(s_{1,j}) &= s_{1,j} \theta(s_{0,j+1}) \theta(s_{0,j+5}) s_{1,j}, \end{aligned}$$

pour $j=0, \dots, 5$ et où les sommes sur j se font modulo 6.

L'homomorphisme f est tel que:

$$f(s_{i,j}) = 2^i (\cos \pi j/3, \sin \pi j/3).$$

La fonction K sera celle utilisée précédemment.

La figure 2 représente les 4 premières itérations pour le mot $s_{0,0}$ et la 4^{ième} itération du mot

$$s_{0,0} s_{0,0} s_{1,2} s_{1,4}.$$

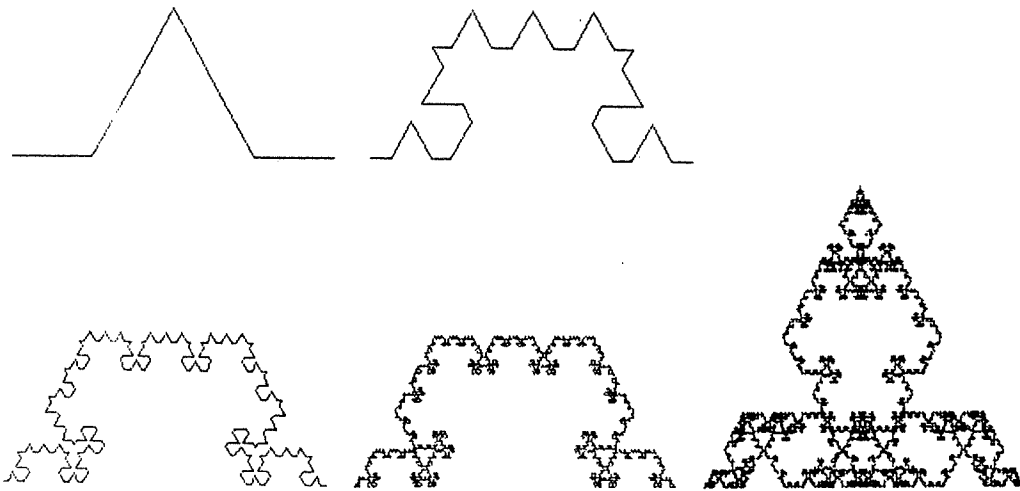


figure 2

Une généralisation de ce résultat consiste à accepter que certaines lettres s de l'alphabet soient telles que $K[s]$ est vide, c'est-à-dire qu'aucune représentation graphique dans \mathbb{R}^d ne sera donnée à ces lettres. Les lettres s de S telles que $K[s]$ est vide seront dites lettres virtuelles. Posons Q l'ensemble de ces lettres virtuelles.

Donnons les conditions pour que l'ensemble limite ne soit pas vide. Nous dirons que l'endomorphisme θ est Q -stable s'il existe un nombre naturel m tel que chaque lettre s possède un des deux types de comportement:

type (I): si pour tout $k \geq m$, $\theta_k(s)$ appartient à Q^* sous-ensemble de S^* .

type (II): si pour tout $k \geq m$, $\theta_k(s)$ n'appartient pas à Q^* sous-ensemble de S^* .

Les lettres satisfaisant à (II) sont dites essentielles et on désigne l'ensemble de telles lettres par E . Un mot devra contenir au moins une de ces lettres pour qu'il puisse y avoir une représentation graphique limite obtenue par itération et contraction.

THÉORÈME

Soit θ un endomorphisme de S^* et L l'application linéaire expansive associée à θ , K l'application de S^* dans $K_0(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant la relation (1). Soit $Q = \{s \text{ de } S : K[s] = \emptyset\}$, et supposons que θ soit Q -stable. Alors, pour un mot u contenant au moins une lettre de E , il existe un ensemble compact $K_\theta[u]$ non-vide tel que:

$L^{-n} K[\theta_n(u)]$ converge dans la métrique d'Hausdorff vers $K_\theta[u]$ lorsque n tend vers l'infini. $K_\theta[u]$ est dit ensemble récurrent. \diamond

Cet auteur donne d'autres généralisations d'ensembles fractals. Il indique [2] une façon d'obtenir les pavages apériodiques de Penrose.

Nous terminons ce bref aperçu du modèle de M. Dekking par deux exemples.

EXEMPLES:

Exemple 1: Variation de Peano.

$$S = \{ s_{i,j} : i=0,1 \text{ et } j=0,1,2,3 \}.$$

L'endomorphisme θ est tel que:

$$\theta(s_{0,j}) = s_{0,j} s_{0,j+1} s_{0,j} s_{1,j+3} s_{0,j+1} s_{1,j+3} s_{0,j} s_{0,j+1} s_{0,j}$$

où la somme sur j est faite modulo 4 et $j=0,1,2,3$.

$$\theta(s_{1,j}) = s_{1,j} s_{1,j} s_{1,j} \text{ pour } j=0,1,2,3.$$

On utilisera la fonction K définie précédemment sauf pour le symbole $s_{1,j}$ qui ne sera pas dessiné.

La fonction f est la suivante:

$$f(s_{i,j}) = (\cos(\pi j/2), \sin(\pi j/2)) \text{ pour } i=0,1 \text{ et pour } j=0,1,2,3.$$

Toutes les lettres sont essentielles et la figure 3 qui suit donne les quatre premières itérations pour le mot $s_{0,0}$.

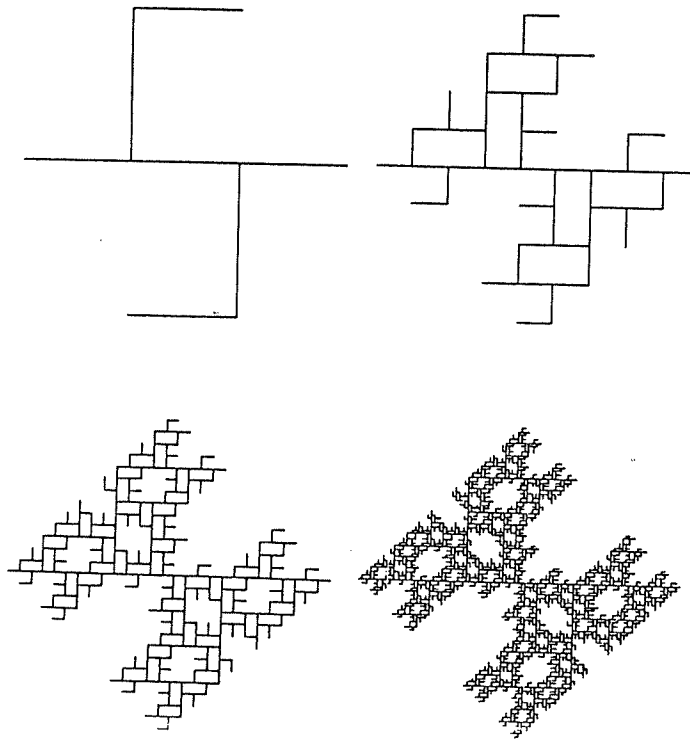


figure 3

Exemple 2: Le terdragon.

$S = \{ s_{i,j} : i=0,1 \text{ et } j=0,1,2 \}$.

L'endomorphisme θ est le suivant:

$$\theta(s_{i,j}) = s_{i+1,j} s_{i,j+1} s_{i+1,j}$$

où la somme sur i est modulo 2, celle sur j l'est modulo 3 et où $i=0,1$ et $j=0,1,2$.

L'homomorphisme f est tel que la lettre $s_{i,j}$ est envoyée sur $(\cos(2\pi j/3), \sin(2\pi j/3))$.

La fonction K assigne un segment de droite aux lettres $s_{0,j}$ et l'ensemble vide aux lettres $s_{1,j}$ pour $j=0,1,2$.

L'ensemble $Q = \{ s_{i,j} : j=0,1,2 \}$, l'ensemble $E=S$ c'est-à-dire que toutes les lettres sont essentielles. La figure 4 donne les 5 premières itérations pour le mot $s_{0,0} s_{0,1} s_{0,2}$.

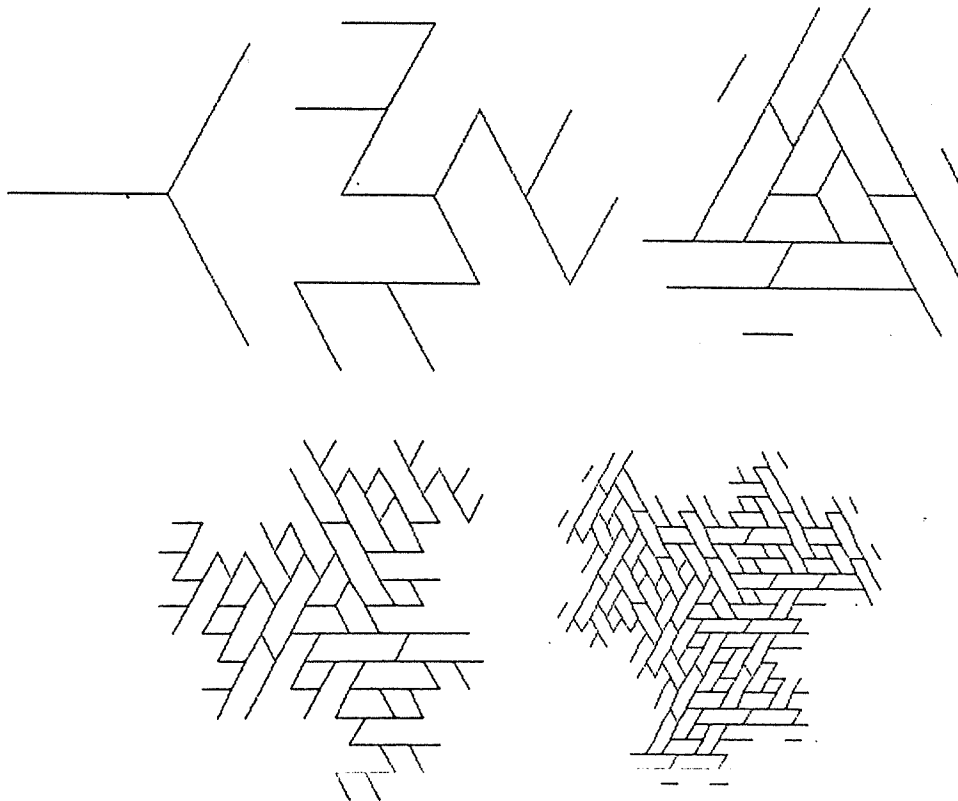


figure 4

2. SYSTÈMES DE FONCTIONS ITÉRATIVES de M. F. BARNSLEY et S. DEMKO

Dans ce modèle, les ensembles fractals sont obtenus comme les "attracteurs" (ensembles récurrents) d'un certain processus aléatoire de Markov. Cet ensemble est le support d'une distribution stationnaire de probabilité.

Evidemment nous ne pourrions pas traiter ici de tous les articles de ces deux auteurs et les personnes intéressées par le sujet pourront consulter la bibliographie à la fin de ce texte. Nous exposerons les principales parties de ces systèmes assez brièvement dans les lignes qui suivent.

K un espace métrique compact.

$W = \{ w_i : i=1, 2, \dots, d \}$ une collection finie de fonctions Borel-mesurables de K dans K .

$P = \{ p_i : i=1, 2, \dots, d \}$ un ensemble de probabilités telles que $p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^d p_i = 1$.

$C(K)$ l'espace de Banach des fonctions continues à valeurs réelles définies sur K .

DÉFINITION:

(K, W) est un système de fonctions itératives, SFI, si et seulement si on peut associé un ensemble de probabilités P à l'opérateur T défini par:

$$(T f)(x) = \sum_{i=1}^d p_i f(w_i(x)) \text{ pour } f \text{ dans } C(K),$$

tel que T soit une application de $C(K)$ dans lui même. \diamond

Si chaque w_i est continue alors (K, W) est un SFI et n'importe quel ensemble P peut être associé à l'opérateur T .

EXEMPLES:

Exemple 1: $K = [0, 1]$, $w_1(x) = x/3$, $w_2(x) = (x+2)/3$, $d=2$. Alors (K, W) est un SFI pour n'importe quel ensemble de probabilités $P = (p_1, p_2)$.

Exemple 2: $K = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $P(w, z)$ est un polynôme à coefficients complexes dont le degré est $d \geq 1$ en w et $e \geq 1$ en z . On définit $W = \{w_i(z) : i=1, \dots, d\}$ les solutions de $P(w, z) = 0$ pour z dans K , où les racines multiples sont séparées. Alors (K, W) est un SFI avec $p_i = 1/d$ comme probabilités associées. On aurait pu faire de même pour les solutions de $P(w, z) = 0$ pour w dans K et on aurait eu un autre SFI.

On peut traiter W comme une fonction dont les valeurs sont des ensembles; $W(x) = \{w_i(x) : i=1, 2, \dots, d\}$. Nous sommes intéressés à l'action des itérations de W sur K , $\{W^{(n)}(x)\}$ où $W^{(n)}(x) = W(W^{(n-1)}(x))$ pour $n=0, 1, \dots$ et on définit pour les sous-ensembles B de K , $W(B) = \{W(x) : x \text{ dans } B\}$.

DÉFINITION

Pour x dans K , on définit l'attracteur (correspondant à x) pour le SFI (K, W) comme étant $A(x) = \lim W^{(n)}(x)$.

Lorsque $A(x)$ ne dépend pas de x , pour x appartenant à un certain sous-ensemble de K , alors on posera $A = A(x)$ et ce sera l'attracteur du SFI (K, W) . Un attracteur A est compact et invariant sous W , c'est-à-dire, $W(A) = A$.

EXEMPLES:

Exemple 1: (suite) L'attracteur est indépendant du point x dans $[0, 1]$ et est l'ensemble triadique de Cantor.

Exemple 2: (suite) Si $P(w, z) = (2w - z + 1)(2w - z - 1)(2w - z - 2i)$, pour tout z complexe, l'attracteur A du SFI (K, W) , est le triangle de Sierpinski dont les sommets sont $-1, 1, 2i$. Voir la figure 1. Les petits encadrés indiquent l'effet des différentes fonctions du système.

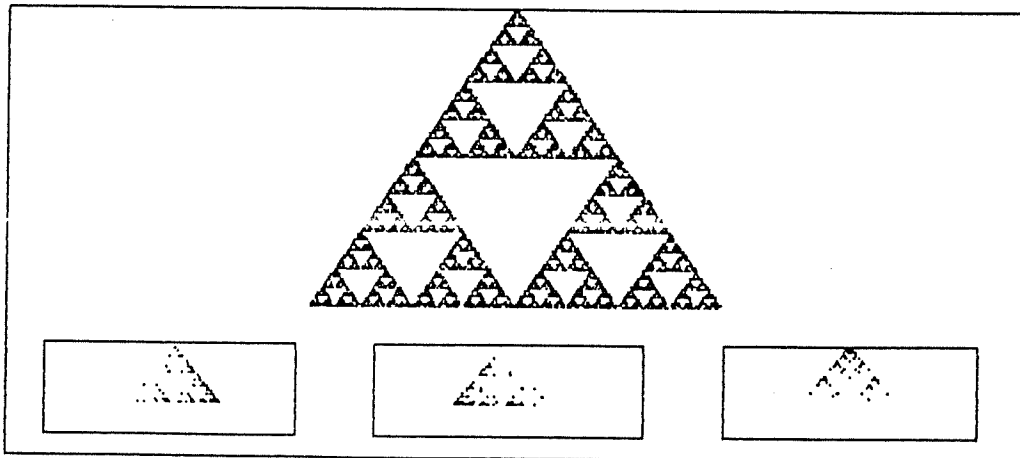


figure 1

Considérons le processus de Markov à temps discret (K, W, P) défini par:

$$P[x, B] = \sum_{i=1}^d p_i \delta(w_i(x), B) \text{ où } \delta(w_i(x), B) = 1 \text{ si } w_i(x) \text{ est dans } B \text{ sinon elle est nulle.}$$

$P[x, B]$ est la probabilité, partant du point x , de se rendre en une étape dans l'ensemble B .

Ce processus de Markov est équivalent à une marche aléatoire: partant du point z_0 on se rendra au point $z_1 = w_i(z_0)$ avec probabilité p_i , c'est-à-dire qu'on choisit l'application w_i avec probabilité p_i . On recommence le processus pour z_2, \dots, z_n .

Nous montrons qu'il y a une mesure de probabilité stationnaire pour ce processus.

THÉORÈME

Il existe une mesure de probabilité μ telle que:

$$\mu(B) = \int_K P[x, B] d\mu(x), \text{ pour tout borelien } B \text{ de } K. \diamond$$

Nous disons que cette mesure stationnaire est la mesure P-équilibrée du SFI (K, W) .

Nous donnerons plus loin une condition pour que cette mesure P-équilibrée soit unique.

Pour le SFI (exemple 2) dont l'attracteur A est le triangle de Sierpinski, cette mesure est unique et son support est l'attracteur A . Ce triangle est l'union de trois triangles $w_1(A)$, $w_2(A)$ et $w_3(A)$ de mesure p_1 , p_2 et p_3 respectivement où p_1 , p_2 et p_3 sont les probabilités associées au SFI. De même le triangle $w_i(w_j(A))$ a la mesure $p_i p_j$.

DÉFINITION

(K, W) est un SFI hyperbolique si et seulement si il existe une constante s , $0 \leq s < 1$, telle que:

$$|w_i(x) - w_i(y)| < s |x - y| \text{ pour tout } x, y \text{ dans } K, i = 1, \dots, d. \diamond$$

THÉORÈME

Soit (K, W) un SFI hyperbolique. Il possède un attracteur A unique (indépendant du point x dans K). \diamond

Le lecteur intéressé aux propriétés des SFI voudra bien consulter l'article [1] des deux auteurs. Ils y démontrent des résultats très intéressants. Le résultat suivant donne une indication pour tracer les attracteurs.

THÉORÈME

Soit (K, W) un SFI hyperbolique et P l'ensemble associé des probabilités. Alors, il existe une mesure P -balancée unique dont le support est l'attracteur du SFI et cet attracteur est récurrent pour l'opérateur T . (en particulier, le support de la mesure est l'attracteur et ceci ne dépend pas de P). \diamond

On peut ainsi générer l'attracteur d'un SFI hyperbolique lorsque K est un ensemble borné du plan réel ou complexe. En effet, partons d'un point quelconque x_0 de K et choisissons par récurrence x_n parmi $\{w_i(x_{n-1}) : i=1, \dots, d\}$ avec probabilité P_i au choix $w_i(x_{n-1})$, pour $n=1, 2, \dots$

Traçons successivement les points x_n pour $n > N$, N assez grand pour que x_N soit dans A , a moins que le point initialement choisit x_0 soit dans K .

L'ensemble des points tracés sur un ordinateur donne l'attracteur et la densité des points donne une indication sur la mesure.

EXEMPLES :

Exemple 1: La courbe en C de Gosper.

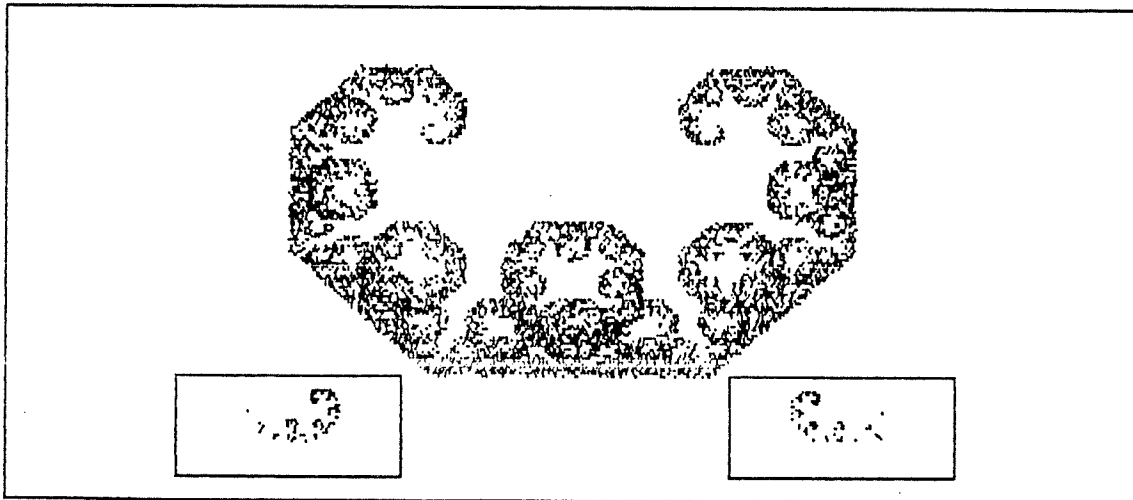


figure 2

Exemple 2: Le dragon

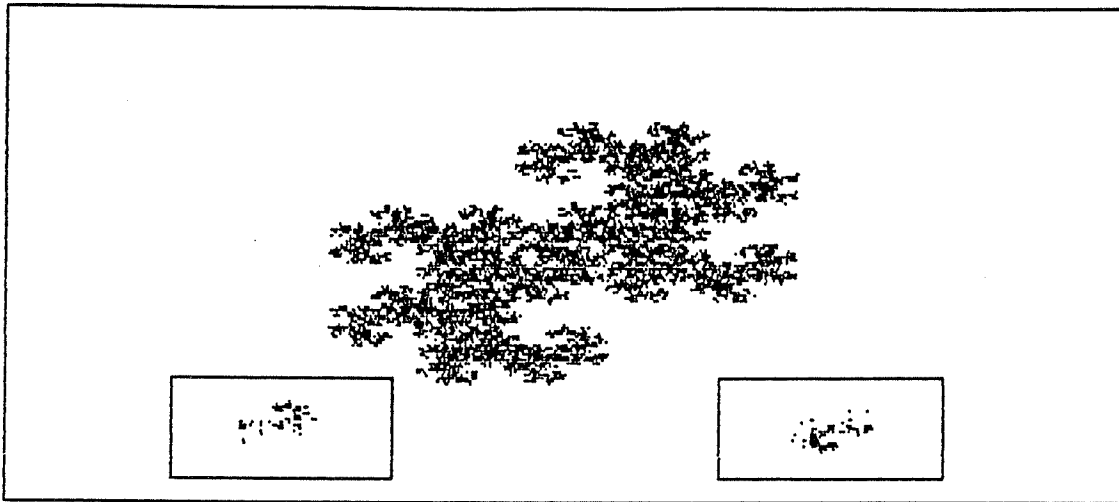


figure 3

Un cas particulier des SFI est celui où les fonctions w_i sont des applications affines de K dans K .

Une propriété importante de l'attracteur A d'un SFI hyperbolique est la suivante:

$$A = w_1(A) \cup w_2(A) \dots \cup w_d(A).$$

Cette propriété d'auto-recouvrement de A indique comment on peut approximativement recouvrir un ensemble fractal par un attracteur A d'un SFI hyperbolique.

Dans ce cas particulier de SFI où les fonctions sont des applications affines, les moments pour la mesure stationnaire μ peuvent être calculés explicitement en termes des paramètres qui définissent les SFI. Ce résultat permet donc de construire un SFI dont l'attracteur serait une bonne approximation d'un ensemble fractal en estimant les paramètres du SFI.

On pourrait dire beaucoup sur ce modèle mais nous nous devons d'être bref. Nous terminons cette modélisation en donnant deux exemples que l'on retrouve dans les articles de M. F. Barnsley et S. Demko.

EXEMPLES :

Exemple 1: La feuille d'érable.

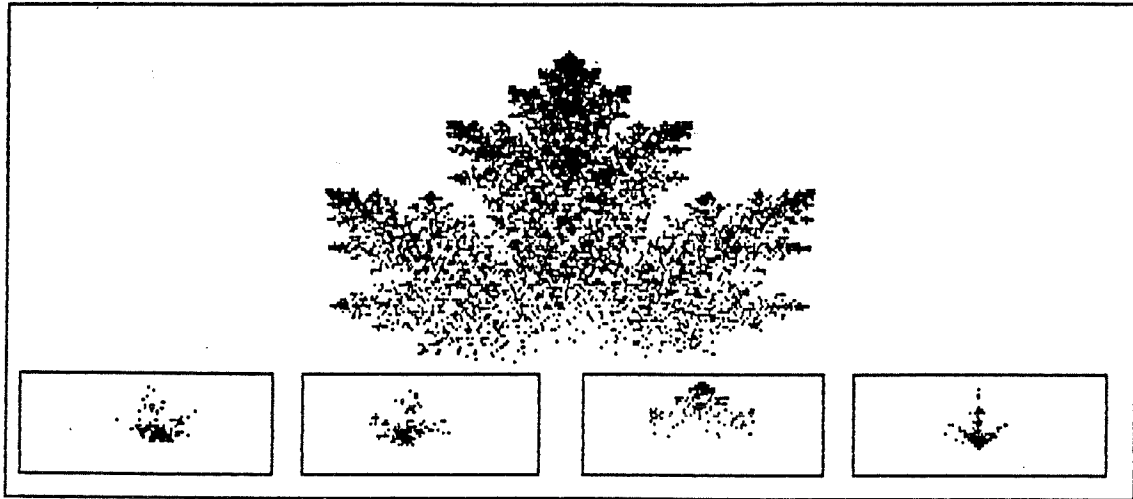


figure 4

Exemple 2: La fougère.

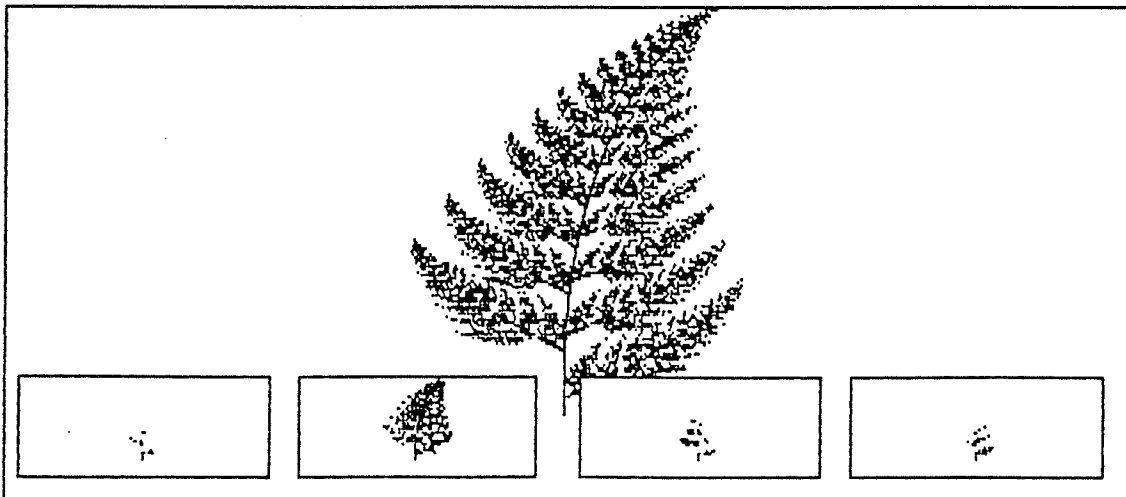


figure 5

3. SCHÉMA D'INTERPOLATION ITÉRATIVE DE G. DESLAURIERS ET S. DUBUC

Nous présentons une nouvelle méthode d'interpolation dite interpolation itérative. Elle nous fournit une nouvelle manière de construire des courbes irrégulières et en particulier celles de von Koch-Mandelbrot.

Cette méthode est très générale, cependant nous limiterons notre présentation au plan complexe. Le lecteur intéressé par le sujet devra consulter les références à la fin de ce texte.

Le point de départ de ce schéma d'interpolation itérative est une fonction $z(n)$ définie sur les entiers relatifs que nous prolongeons à tout l'axe réel.

Désignons par:

d un entier supérieur à 1,

D_n l'ensemble des nombres rationnels m/d^n où m est un entier relatif et $n=0,1,\dots$, D_0 est l'ensemble des entiers relatifs,

p_k est une suite de nombres réels ou complexes qui remplit la condition de compatibilité: $p_0=1$ et $p_{kd}=0$ pour k entier relatif non-nul.

Par réurrence, z étant déjà définie sur D_0 , on prolonge z à D_1, D_2, D_3, \dots . Au point j/d on prolonge z de la façon suivante:

$$z(j/d) = \sum_k p_{j-dk} z(k).$$

On peut poursuivre le prolongement à D_2, D_3, \dots : si j est un entier, on pose:

$$z(j/d^{n+1}) = \sum_k p_{j-dk} z(k/d^n). \quad (1)$$

La condition de compatibilité permet de prolonger la fonction z de façon consistante. De plus, si la série $\sum_k |p_k|$ converge, la formule (1) sera bien définie à condition que $z(n)$ soit bornée. Une condition un peu plus forte consiste à exiger que pour un nombre fini d'indices k , p_k est non nul, alors la formule (1) est toujours bien définie. On notera le prolongement de la suite $z(n)$ par $z(t)$.

Nous donnons, comme premier exemple de cette procédure itérative, comment on peut générer les courbes de von Koch-Mandelbrot.

Soient $d+1$ points du plan complexe z_0, z_1, \dots et z_d , on suppose $z_0=0$ et $z_d=1$. Nous posons $z(0)=0$, $z(1)=1$, et les autres valeurs $z(n)$ sont choisies de façon arbitraire. Nous recommandons le choix suivant pour les poids p_k :

$p_k=1-z_k$ si k est un entier compris entre 0 et d ,

$p_k=z_{k+d}$ si k est un entier compris entre $-d$ et 0,

$p_k=0$ pour les autres valeurs de k , $|k|>d$.

Si j est un entier donné, et si $j=md+r$ (m et r sont respectivement le quotient et le reste de la division de j par d), la formule (1) devient dans ce cas-ci:

$$z(j/d^{n+1}) = (1-z_r) z(m/d^n) + z_r z((m+1)/d^n).$$

La fonction $z(t)$ ainsi obtenue par cette formule et restreinte à l'intervalle $[0, 1]$ est la courbe de von Koch-Mandelbrot observées sur l'ensemble des fractions d -adiques.

EXEMPLES:

Dans ces exemples on posera toujours $z_0=0$ et $z_d=1$.

Exemple 1: La courbe en C de Gosper, $d=2$ et $z_1=.5+.5i$. La représentation graphique est connue.

Exemple 2: La figure 1 (la spirale) est la représentation graphique de la courbe lorsque: $d=2$, $z_1=.2+.45i$.

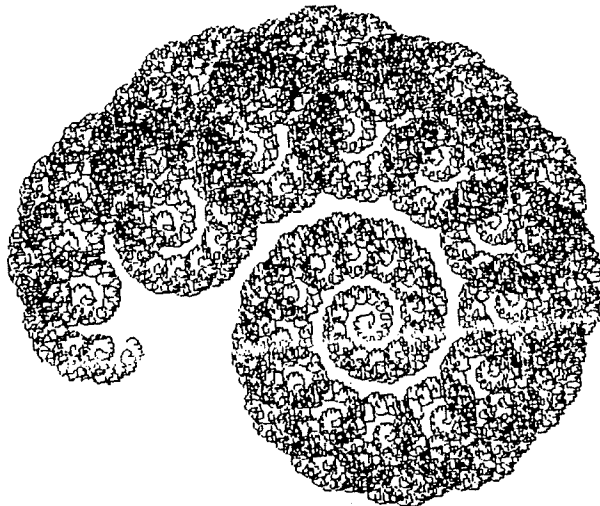


figure 1

Exemple 3: On obtient la courbe connue du flocon de neige de von Koch en posant $d=4$, $z_1=1/3$, $z_2=.5+i/3$, et $z_3=2/3$.

Exemple 4: Pour $d=6$, $z_1=1/4$, $z_2=(1+i)/4$, $z_3=1/2$, $z_4=(3+i)/4$ et $z_5=3/4$, la courbe est représentée par la figure 2.

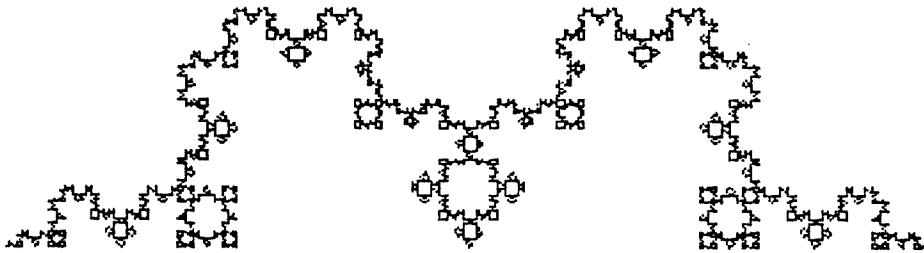


figure 2

Exemple 5: La courbe la plus connue, celle de Peano, s'obtient en posant: $d=9$, $z_1=1/3$, $z_2=(1+i)/3$, $z_3=(2+i)/3$, $z_4=2/3$, $z_5=1/3$, $z_6=(1-i)/3$, $z_7=(2-i)/3$, et $z_8=2/3$.

Exemple 6: Comme dernier exemple prenons $d=4$, $z_1=1/2$, $z_2=(i+2)/4$ et $z_3=(i+5)/4$. La figure 3 (le givre) donne cette courbe.

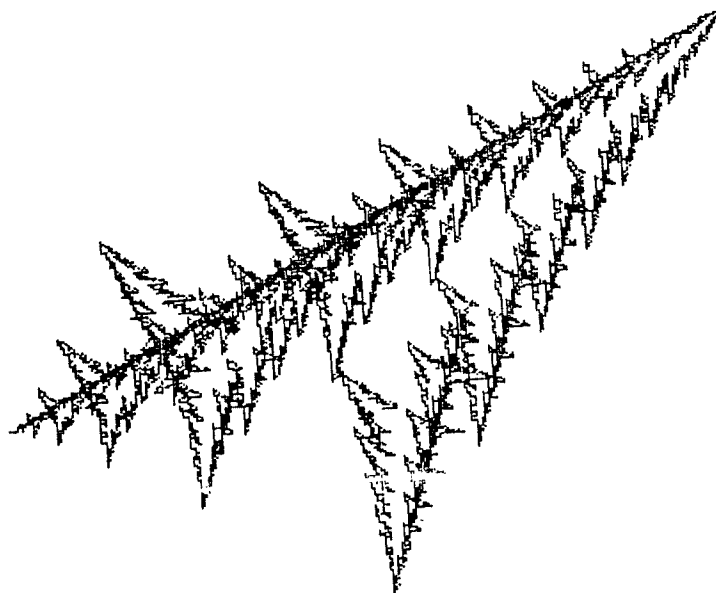


figure 3

Afin d'étudier le prolongement obtenu par interpolation itérative, nous introduisons une fonction très importante. Nous l'appelons l'interpolante fondamentale. Si $F(0)=1$ et si $F(n)=0$ pour les autres valeurs entières de n , la fonction prolongée, $F(t)$, obtenue par le schéma d'interpolation est cette interpolante fondamentale. Cette fonction est telle que sur D_1 , $F(j/d)=p_j$.

Notons que pour les courbes de von Koch-Mandelbrot, $z(t)=F(t-1)$ pour t dans l'intervalle $[0, 1]$. La fonction F est nulle hors de l'intervalle $[-1, 1]$, et la fonction $\sum_n F(t+2n-1)$ sera un prolongement périodique de période 2 de la courbe de von Koch-Mandelbrot. Nous avons démontré que, sous des conditions très simples, (toujours vérifiées pour ces courbes) nous pouvons écrire les séries de Fourier de ces courbes.

Il est connu que si chacun des accroissements $|z_{k+1}-z_k|$ est inférieur à un, la courbe de von Koch-Mandelbrot est continue. L'interpolante fondamentale correspondante se prolonge continûment à tout l'axe réel avec un support compact. Il est évident que la courbe ainsi obtenue est de carré sommable. On peut dire un peu plus. On a démontré, [3], que si $\sum_{k=1, d} |z_k - z_{k-1}|^2 < d$, alors la courbe de von Koch-Mandelbrot est de carré sommable.

Comme deuxième exemple de cette procédure itérative, posons $d=2$, et $p_0=1$, $p_{-3}=a$, $p_{-1}=b$, $p_1=c$, $p_3=d$ où a , b , c et d sont complexes et de somme 1. Les autres p_n sont nuls. Voici deux exemples d'interpolantes fondamentales. On pose $z(0)=1$ et $z(n)=0$ pour les autres valeurs entières de n .

EXEMPLES:

Exemple 1: La figure 4, de $z(t)$, est obtenue pour $a=-i/4$, $b=(2+i)/4$, $c=(2-i)/4$ et $d=i/4$. Nous avons fait 10 itérations et fait varier t de -3 à 3.

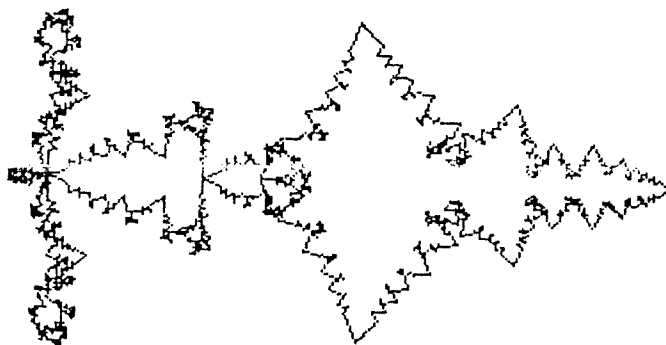


figure 4

Exemple 2: Posons $a=-(1+i)/10$, $b=(6-i)/10$, $c=(6+i)/10$ et $d=(i-1)/10$. Après 12 itérations, pour t entre -3 et 3 on obtient la figure 5 suivante.

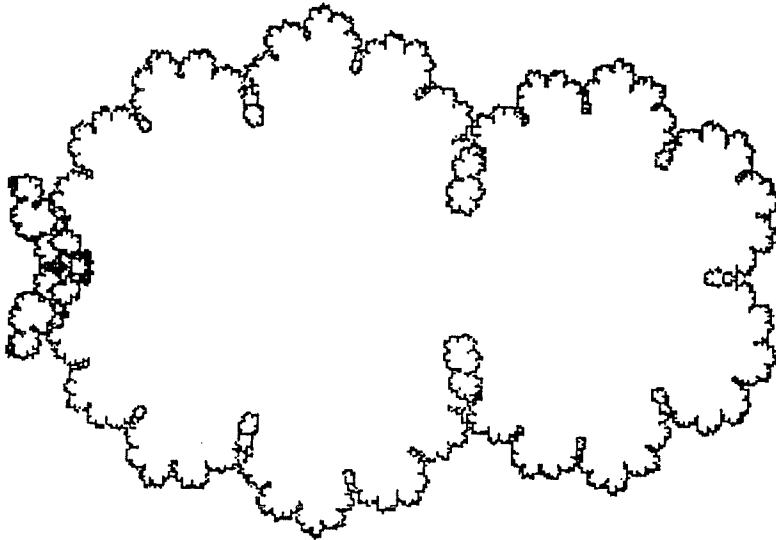


figure 5

Les courbes hyperboliques de S. Dubuc, [4], peuvent être obtenues par cette méthode d'interpolation. Donnons un exemple.

Ici $z_0=0$, $z_1=(2i-1)/3$, $z_2=(1+4i)/3$ et $z_3=1+i$. Posons $z(1)=z_3$ et $z(n)=0$ pour toutes les autres valeurs entières, $d=3$, et la somme des poids sur les voisins immédiats est égale à $1+i$. Voir figure 6.

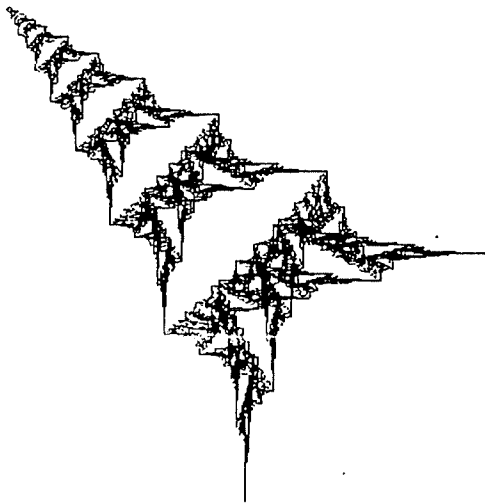


figure 6

4. ENSEMBLES DE FATOU ET ENSEMBLES DE JULIA

Nous allons étudier le comportement des itérations successives de fonctions rationnelles dans le plan complexe. En particulier, nous allons décrire la dynamique de la méthode de Newton (approximation de racines de fonctions non linéaires) appliquée aux polynômes dans le plan complexe.

Préliminaires:

Soit le polynôme: $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, où z et les coefficients sont complexes et $\{ x_i \mid i = 1 \dots n \}$ est l'ensemble de ses n racines.

L'équation de Newton s'écrit:

$$z_{n+1} = N(z_n) = z_n - p(z_n) / p'(z_n) .$$

On remarque que:

- 1- $N'(x_i) = p''(x_i) p(x_i) / (p'(x_i))^2$
 $= 0$ (si x_i est une racine simple).
- 2- $N(z) = (z p'(z) - p(z)) / p'(z)$ est une fonction rationnelle de degré $n = \deg(N(z))$.
- 3- $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x_i$ pour "certains points de départ" z_0 .

Donnons nous quelques définitions:

1- Itération d'une fonction rationnelle: Soit $R(z)$ une fonction rationnelle, $R_n(z)$ sera la $n^{\text{ième}}$ itération de z (sous $R(z)$, $R_0(z)=z$) et sera égale à:

$$R_n(z) = \underbrace{R \cdot R \cdot \dots \cdot R}_{n \text{ fois}}(z) \\ = R(R(\dots R(z))) .$$

2- Orbite: On appelle orbite d'un point z l'ensemble:

$$O(z) = \{ R_n(z) \mid n \in \mathbb{Z} \} .$$

3- On a : $O(z) = O^+(z) \cup O^-(z)$,

où : $O^+(z) = \{ R_n(z) \mid n \in \mathbb{N} \}$ et

$$O^-(z) = \{ R_{-n}(z) \mid n \in \mathbb{N} \} .$$

Remarque: Comme R n'est pas nécessairement inversible on définit: $R_{-n}(z_0) = \{ z \mid R_n(z) = z_0 \}$.

4- Un ensemble de points p (ou un point p) est périodique lorsqu'il existe un entier n tel que $R_n(p) = p$. Le plus petit entier n est l'ordre de la période et l'ensemble $\delta(p) = \{ R_i(p) \mid i = 1 \dots n \}$ est le cycle de p .

5- Le bassin attractif d'un point périodique p est l'ensemble:

$$A(p) = \{ z \mid \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) \in \delta(p) \}$$

Points périodiques:

Globalement, on distingue deux tendances chez les orbites des points de C . En effet, on remarque que d'une part l'orbite tend vers un ensemble périodique ($R_n(z) \rightarrow \delta(p)$ lorsque n tend vers l'infini pour un certain p), d'autre part elle possède une dynamique étrange bien que sa trace ne soit pas un ensemble distribué aléatoirement dans le plan. La figure 1 représente une telle orbite.

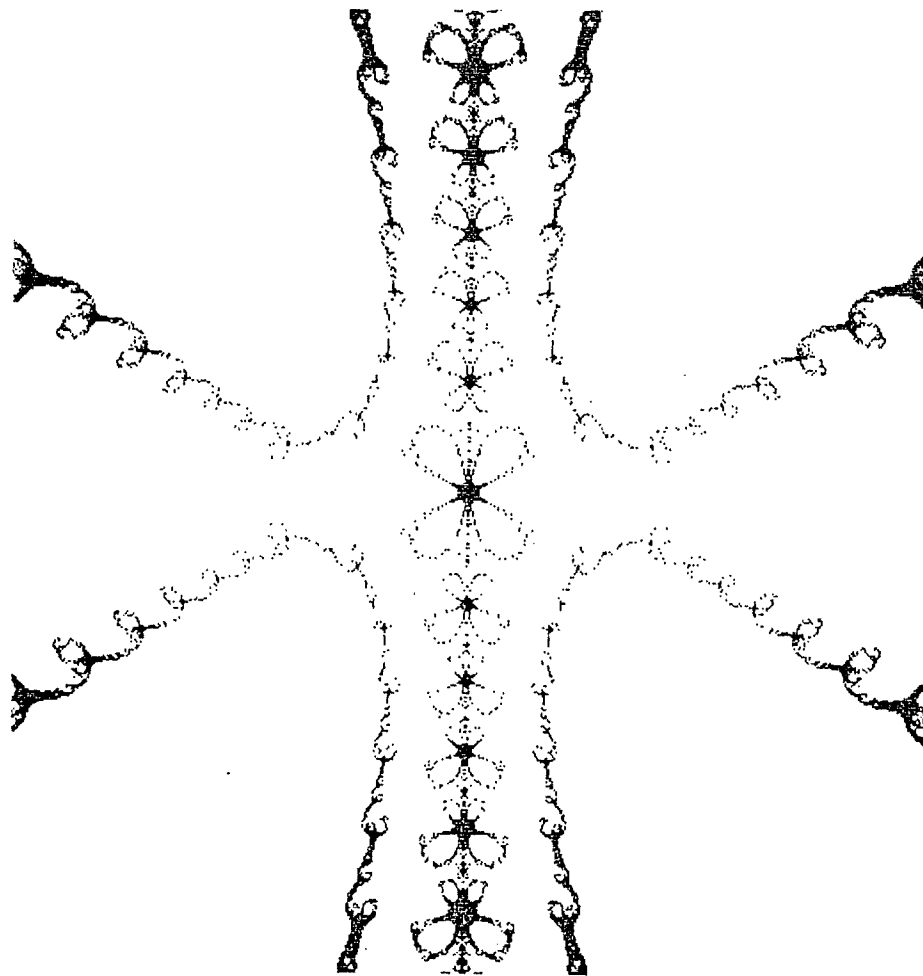


figure 1

Ensemble de Julia d'un polynôme complexe du sixième degré.
Les racines sont identifiées par des croix.

Ces ensembles sont nommés les ensembles de Julia en l'honneur du mathématicien Gaston Julia qui en 1919 publia (voir référence) un mémoire les décrivant. Voyons, en un premier temps, le cas des orbites éventuellement périodiques. Ces orbites font partie des bassins attractifs des cycles vers lesquelles elles tendent et sont caractérisées par la nature de ces cycles. On distingue cinq types de points périodiques:

- 1- point super-attractif: $R'_n(p) = 0$.
- 2- point attractif: $|R'_n(p)| < 1$.
- 3- point répulsif: $|R'_n(p)| > 1$.
- 4- point indifférent: $|R'_n(p)| = 1$.
 - a) $|R'_n(p)| = e^{2\pi\theta i}$, où $\theta \in \mathbb{Q}$
(parabolique).
 - b) $|R'_n(p)| = e^{2\pi\theta i}$, où $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
(irrationnel) .

Ensembles de Fatou:

La réunion de tous les bassins d'attractions que comporte le plan complexe (relativement à $R(z)$) forme l'ensemble de Fatou. Cet ensemble est ainsi nommé en l'honneur d'un autre mathématicien M. P. Fatou contemporain à G. Julia (voir référence). L'ensemble de Fatou se compose d'une infinité dénombrable de composantes connexes. Chacune de ces composantes est éventuellement périodique. On distingue cinq types de composantes périodiques selon le type de points périodiques qu'elles contiennent. Et la dynamique y est uniquement déterminée.

- 1- Composante super-attractive:

Il existe un homéomorphisme Φ (autour du point périodique) tel que:

$$\Phi \circ R_n \circ \Phi^{-1}(z) = z^k$$

où k est l'ordre de la première dérivée de R_n qui ne s'annule pas. Le comportement des itérées dans cette composante est ainsi identique au comportement des itérées du polynôme z^k au voisinage du point zéro. Lorsque l'on considère la méthode de Newton, les bassins d'attraction des racines simples sont tous de cette nature.

- 2- Composante attractive.
- 3- Disque de Siegel:

Un point périodique indifférent dont θ satisfait la condition diophantienne.

Pour ces deux derniers types, il existe un homéomorphisme Φ tel que:

$$\Phi \cdot R_n \cdot \Phi^{-1}(z) = \lambda z \text{ où } \lambda = R'_n(p).$$

Pour la composante attractive, comme $|\lambda| < 1$, on a que les itérées tendent vers p (le point périodique) comme les itérées de λz tendent vers le point zéro (dans un voisinage du point zéro). Par contre, lorsque $|\lambda| = 1$ pour les disques de Siegel, nous aurons un comportement analogue à une rotation d'un angle irrationnel.

4- Composante parabolique:

Il existe un homéomorphisme Φ tel que:

$$\Phi \cdot R_n \cdot \Phi^{-1}(z) = \lambda z (1+z^{nk}) \text{ où } k \geq 1.$$

5- Anneau d'Herman:

Il existe une conjugaison topologique avec la rotation irrationnelle.

La figure 2 montre l'ensemble de Fatou associé au même polynôme que celui de la figure 1. Les anneaux emboîtés représentent les bassins d'attraction. Les six grands lobes sont les bassins immédiats des racines (identifiées par des croix). Un point d'un de ces bassins prendra autant d'itérations, pour converger (avec une certaine tolérance) vers sa racine, qu'il y a de permutations du noir au blanc le long du segment le liant à sa racine. En fait, un anneau représente un ensemble de points convergeant vers une même racine en un même nombre d'itérations. Les groupes d'anneaux concentriques autres que les six grands lobes sont les composantes connexes éventuellement périodiques (pré-périodiques). Ici tous les bassins sont du type super-attractif.

La figure 3 illustre le problème d'instabilité rencontré lors du calcul des orbites. On remarque que les lobes de la figure 2 sont devenus des zones dont la frontière est brisée et très irrégulière. Ce problème vient de la représentation tronquée des nombres dans l'ordinateur. Ce phénomène nous amène à penser qu'il se peut que les figures 1 et 2 soient elles aussi entachées d'erreurs au point de ne plus être significatives. Ceci proviendrait d'une trop grande sensibilité de la méthode de Newton aux erreurs de troncature des nombres. Nous avons calculé de nouveau les figures 2 et 3 avec une précision doublée. Ce n'est que dans le cas de la figure 3 que nous avons constaté un changement brusque dans la forme des zones. Ainsi on suppose (sans trop se tromper) que les figures 1 et 2 sont correctes.

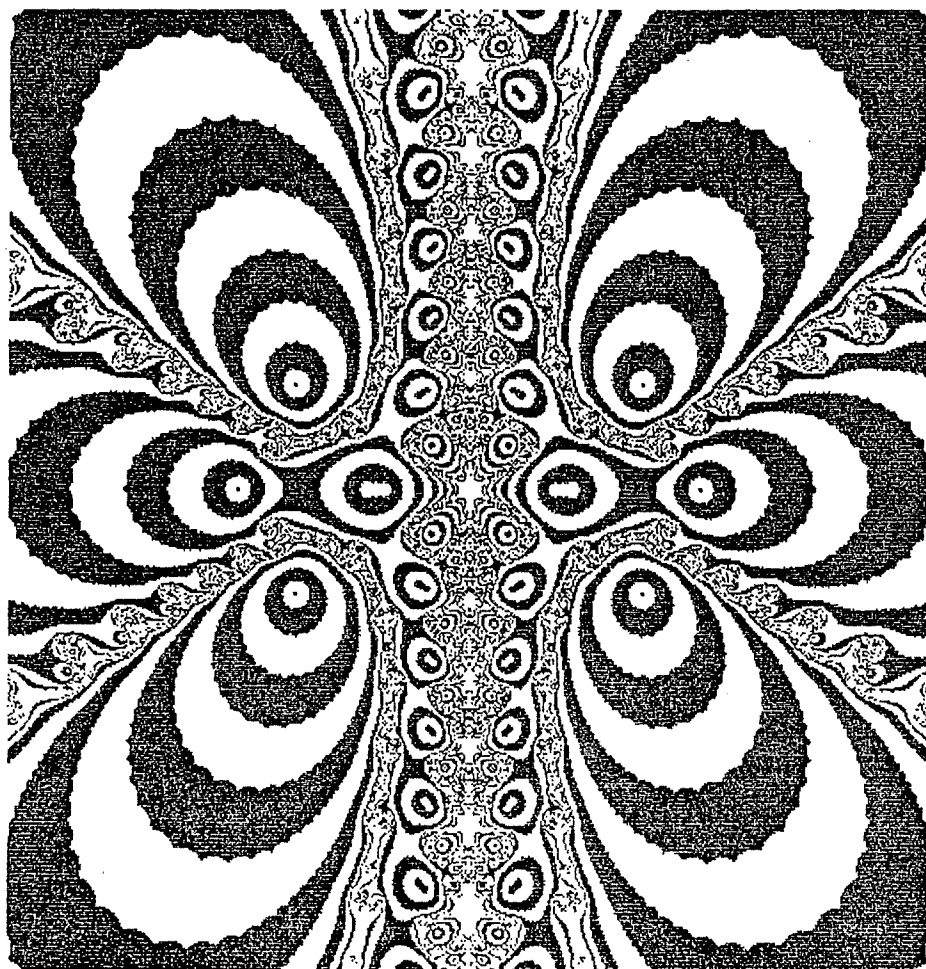


figure 2

Ensemble de Fatou d'un polynôme complexe du sixième degré.
Les zéros sont identifiés par des croix.

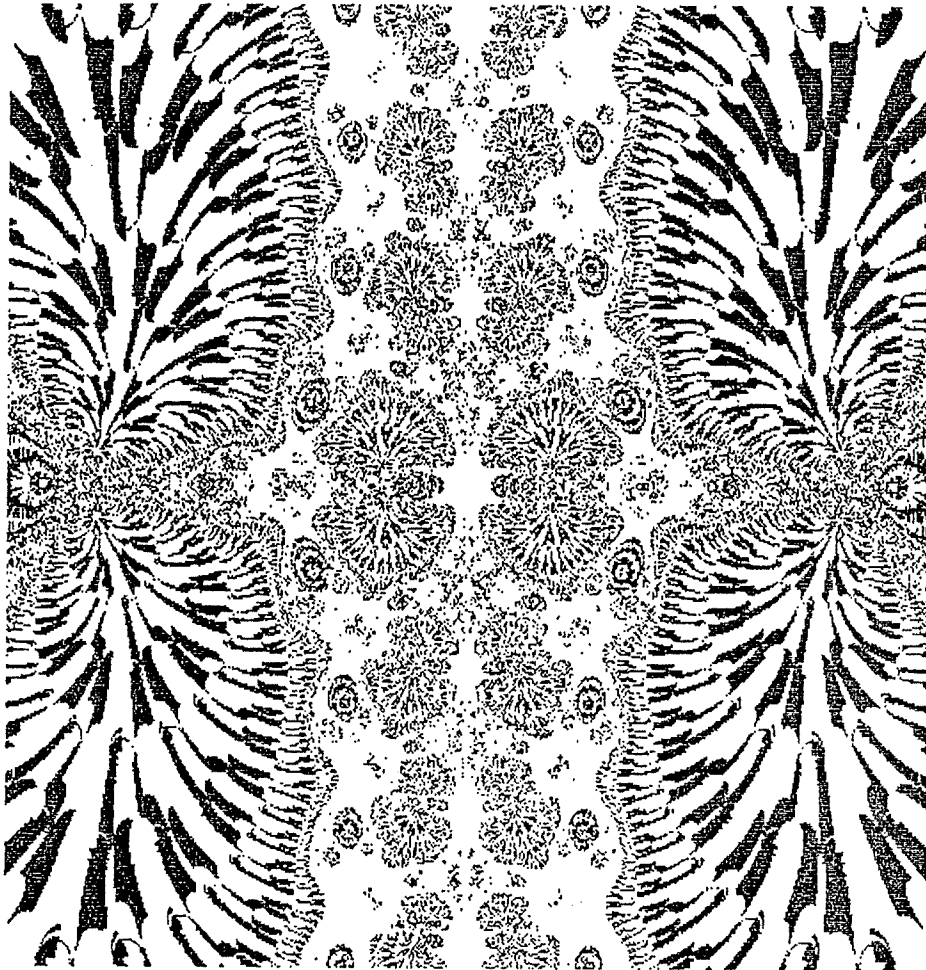


Figure 3
Erreur numérique sur un ensemble de
Fatou d'un polynôme du sixième degré.
Les zéros sont identifiés par des croix.

Ensemble de Julia:

Considérons maintenant l'ensemble formé du plan complexe moins l'ensemble de Fatou. Etant donné sa nature, l'ensemble de Fatou est clairement invariant (i.e. $R(\text{Fatou}) \subset \text{Fatou}$), ainsi l'ensemble que nous venons de définir sera aussi invariant. Il s'agit en fait de l'ensemble de Julia (noté J) que nous avons identifié précédemment. La principale caractéristique de la dynamique sur cet ensemble est sa nature chaotique. Donnons nous en une définition.

Une fonction R est dite chaotique sur J si

- 1- R a une dépendance sensible aux conditions initiales.
Soit $z \in J$ alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(z+c) = x_1 \text{ (pour la plupart des } c \text{).}$$

La racine x_1 dépend de c mais non de $|c|$.

Ainsi chaque point de l'ensemble de Julia touche à chaque bassin d'attraction. On comprend mieux l'instabilité numérique ressentie au voisinage de certains points.

- 2- R est topologiquement transitive. Soit $U, V \subseteq J$ deux ouverts alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que:

$$R_n(U) \cap V \neq \emptyset .$$

En effet, soit $z \in J$ et U un voisinage de z ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(U) = \mathbb{C} \setminus \{ P_{\text{exceptionnels}} \} .$$

$$\text{Comme } U \setminus J \subseteq \{ \text{Fatou} \} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(U \cap J) = J .$$

Cette propriété implique que l'ensemble de Julia possède un intérieur non vide seulement s'il est le plan complexe en entier. De plus on remarque que l'ensemble $O^-(z)$ est dense dans l'ensemble de Julia et ce pour tous points de \mathbb{C} . On possède donc un algorithme pour tracer cet ensemble.

$$J \subseteq \text{fermeture} \left(\bigcup_n R_{-n}(z) \right) \text{ pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{ P_{\text{exceptionnels}} \} .$$

Il est cependant peu efficace car certaines parties de l'ensemble sont rarement visitées par les itérées inverses successives.

- 3- Les points périodiques sont denses dans J . On a que:

$$J \subseteq \text{fermeture} \{ \text{points périodiques répulsifs} \} .$$

De plus, soit p un point périodique attractif, τ son orbite alors:

$$J \subseteq \text{frontière}(A(\tau)).$$

C'est à dire que si $\{ x_n \}$ sont des points périodiques attractifs et $\{ \tau_n \}$ leurs orbites respectives alors quelque soit i et j :

$$\text{frontière}(A(\tau_i)) = \text{frontière}(A(\tau_j)).$$

Les propriétés 1 et 2 de la définition du chaos laissent supposer qu'il sera difficile de comprendre la dynamique sur l'ensemble de Julia. On se doute qu'elle ne sera pas uniquement déterminée par la nature de certains points que l'ensemble contient mais qu'elle dépendra entièrement de la fonction rationnelle choisie.

Remarque:

Dans ce travail, nous avons résumé quelques caractéristiques de la dynamique des fonctions rationnelles dans le plan complexe. Nous laissons au lecteur le soin d'aller chercher le formalisme de ces notions dans les articles et livres cités dans la bibliographie.

Conclusion:

Revenons sur la troisième propriété énoncée dans les préliminaires:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x_i \text{ pour "certains points de départ" } z_0 \in \mathbb{C}.$$

De façon classique, dans les livres d'analyse numérique, cette propriété s'énonce comme suit: si z_0 est assez près de x_i alors les itérées convergeront vers x_i . La notion "d'assez près" est définie par la nature de l'ensemble de Fatou. Nous voyons qu'elle signifie que z_0 doit appartenir au bassin d'attraction de x_i . Les figures 4 et 5 montrent le bassin d'attraction d'une des racines du polynôme du sixième degré utilisé jusqu'à maintenant. La complexité de cette structure est due au fait que tous les bassins d'attraction doivent avoir la même frontière (chaque point de l'ensemble de Julia touche à tous les bassins d'attraction). Nous avons donc réparti dans le plan six ensembles de frontière commune.



figure 4

Bassin d'attraction d'une racine d'un polynôme du sixième degré.
Les racines sont identifiées par des croix.

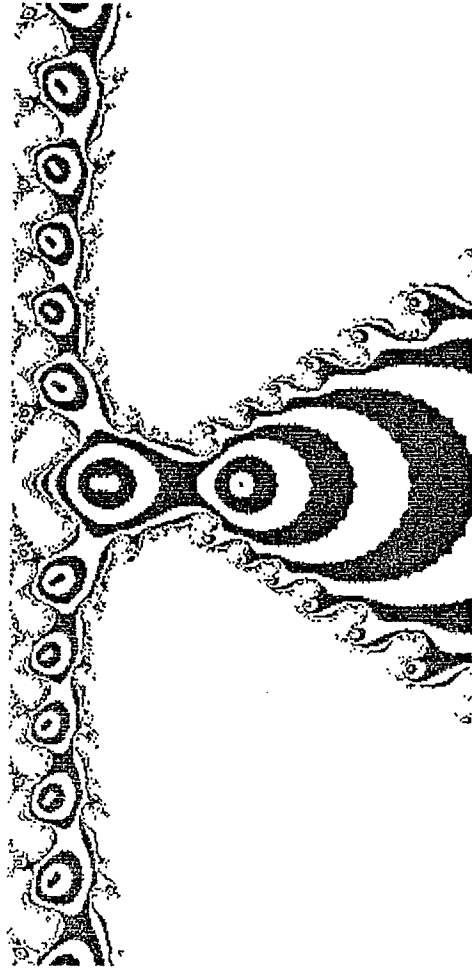


figure 5
Bassin d'attraction d'une racine d'un polynôme du sixième degré
Les racines sont identifiées par des croix.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. M. Barnsley, S. Demko, "Iterated function systems and the global construction of fractals" Proc. R. Soc. Lond. A 399, (1985), pages 243-275.
- F. M. Barnsley, S. Demko, "Rational approximation and interpolation" Proc. of the Tampa conf. on rational Approximation, Springer Verlag Lectures notes in Mathematics, No. 1105, (1984), pages 73-88.
- F. M. Barnsley, V. Ervin, D. Hardin, J. Lancaster, "Solution of inverse problem for fractals and other sets" Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 83, (1986), pages 1975-1977.
- P. Blanchard, "Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere" Bull. A.M.S. Vol. 11, No. 1, (1984), pages 85-141.
- [2] M. Dekking, "Recurents sets" Advances in Math. Vol. 44 No. 1, (1982), pages 78-104.
- F. M. Dekking, "Variations on Peano" Nieuw Archief Voor Wiskunde (3), XXVIII (1980), pages 275-281.
- F. M. Dekking, "Recurents sets: a fractal formalism" Reports of the Departement of Math. and Info. Delft University of Technology, No. 82-32, (1982), 26 pages.
- S. Demko, L. Hodges, B. Naylor, "Applications of iterated function systems to geometric modeling" Technical Reports of Georgia Institute of Technology, GIT-ICS 85/14, (1985), 18 pages.
- S. Demko, L. Hodges, B. Naylor, "Conctruction of fractals objects with iterated function systems" Computers Graphics Vol. 19 No. 3, Siggraph (1985), pages 271-278.
- G. Deslauriers, S. Dubuc, "Interpolation dyadique" Fractals. Dimensions non entières et applications. Masson (1987), pages 44-55.
- [3] G. Deslauriers, S. Dubuc, "Transformées de Fourier de courbes irrégulières" Comptes rendus de l'atelier de géométrie fractale. Mai 1986. Ann. sc. math. Québec, Vol. 11 No. 1, (1987), pages 25-44.
- G. Deslauriers, S. Dubuc, "Symmetric iterative interpolation" Constructive approximation (to appear).

- R. L. Devaney, "An introduction to Chaotic Dynamical Systems" The Benjamin/Cummings Publishing Company, (1986).
- P. Diaconis, M. Shahshahani, "Isoteric Math has practical result" Science, Vol. 225, (1984) pages 494-495.
- A. Douady, J. H. Hubbard, "Etude dynamique des polynômes complexes" Publications Mathématiques d'Orsay, (1984).
- S. Dubuc, "Interpolation through an iterative scheme" J. of Math. and Appl., Vol. 114, No. 1, (1986) pages 185-204.
- [4] S. Dubuc, "Une foire de courbes sans tangentes" Actualités mathématiques. Actes VI ème Congrès mathématiciens d'expression latine. Gauthier-Villars, Paris (1982), pages 99-123.
- P. Fatou, "Sur les équations fonctionnelles" Bull. Soc. Math. France, tome 47 et 48, (1919-1920), pages 161-271 et 33-94, 208-314.
- J. Hutchinson, "Fractals and self-similarity", Indiana University of Math. 30, (1981), pages 713-747.
- G. Julia, "Sur l'itération des fonctions rationnelles" Journal de Math. Pures, sér. 8.1, (1918), pages 47-245.
- B. Mandelbrot, "The fractal geometry of nature" W. H. Freeman and Co., San Francisco, (1983).
- J. Marion, "Le calcul de la mesure de Hausdorff des sous-ensembles parfaits isotypiques de R^m ", C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, 289, (1979), pages 65-68.
- H.-O. Peitgen, D. Saupe, F. v. Haeseler, "Cayleys' Problem and Julia Sets" The Mathematical Intelligencer, Vol. 6, No. 2, (1984), pages 11-20.
- H.-O. Peitgen, P. H. Richter, "The Beauty of Fractals" Springer-Verlag, (1986).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00289536 3