

**SUIVI DE TRAJECTOIRES DANS L'ESPACE DE TRAVAIL  
D'UNE CLASSE DE MANIPULATEURS FLEXIBLES**

**Pascal Bigras  
Maarouf Saad  
Jules O'Shea**

**JANVIER 1996**

*gratuit*

**Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite des auteurs.**

**Dépôt légal, Janvier 1996  
Bibliothèque nationale du Québec  
Bibliothèque nationale du Canada**

**Suivi de trajectoires dans l'espace de travail  
d'une classe de manipulateurs flexibles**

**Pascal Bigras, Maarouf Saad et Jules O'Shea  
Département de Génie Électrique et  
Génie Informatique**

**Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au:**

**Service des Éditions  
École Polytechnique de Montréal  
Case postale 6079, Succursale Centre-Ville  
Montréal (Québec) H3C 3A7  
Téléphone: (514) 340-4473  
Télécopie: (514) 340-3734**

**Compter 0,10\$ par page et ajouter 3,00\$ pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal.**

**Nous n'honorons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable dans le cas d'établissements d'enseignement, de sociétés ou d'organismes canadiens.**

## **ERRATA**

### **À la page 8**

Dans le paragraphe "Preuve des propriétés 1 à 5" aux lignes 2 et 3, à la place de CGR on devrait lire CGR et CGF.

### **À la page 32**

À la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>e</sup> ligne du haut, il faut supprimer la barre sur  $g_1$ .

**SUIVI DE TRAJECTOIRES DANS L'ESPACE DE TRAVAIL D'UNE  
CLASSE DE MANIPULATEURS FLEXIBLES**

**Pascal Bigras, Maarouf Saad† & Jules O'Shea**

Département de Génie Électrique et Génie Informatique

† École de technologie supérieure, Montréal

Département de génie de la production automatisée

Janvier 1996

# **SUIVI DE TRAJECTOIRES DANS L'ESPACE DE TRAVAIL D'UNE CLASSE DE MANIPULATEURS FLEXIBLES**

## **SOMMAIRE**

Ce rapport présente une stratégie de commande qui assure la stabilité asymptotique globale de l'erreur de suivi dans l'espace des articulations virtuelles d'une classe de systèmes mécaniques formés d'une chaîne de corps rigides terminée par une poutre flexible. Les articulations virtuelles sont définies de façon à être liées à l'espace de travail par simple cinématique. Ainsi, lorsque la cinématique inverse est non singulière, la trajectoire désirée peut être transformée de l'espace de travail à l'espace des articulations virtuelles. Dans ce contexte, le suivi de la trajectoire dans l'espace des articulations virtuelles est équivalent au suivi de la trajectoire dans l'espace de travail. Pour obtenir ce suivi, les trajectoires désirées des articulations et des variables de déformation correspondant à la trajectoire désirée des articulations virtuelles sont d'abord obtenues par une méthode itérative. Le contrôleur est ensuite formé d'une loi de commande linéarisante par rapport aux articulations suivie de deux lois de commande linéaires. Une étude basée sur le théorème de passivité et sur la stabilité des systèmes hiérarchiques (ie: systèmes qui peuvent s'exprimer sous une forme triangulaire) permet alors de calculer les gains du contrôleur qui assurent la stabilité asymptotique et un amortissement souhaitable des erreurs de suivi dans l'espace des articulations virtuelles. Une simulation du contrôleur appliqué à un manipulateur constitué d'un membre rigide et d'un dernier membre flexible est finalement présentée afin de valider l'approche. Les résultats de cette simulation montrent les bonnes performances du système de commande proposé.

## TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE.....	i
TABLE DES MATIÈRES.....	ii
LISTE DES FIGURES.....	iii
LISTE DES TABLEAUX.....	iii
LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES.....	iv
LISTE DES ACRONYMES.....	iv
1. INTRODUCTION.....	1
2. CLASSE DE SYSTÈMES MÉCANIQUES.....	3
3. MODÈLE DYNAMIQUE.....	5
3.1 Propriétés du modèle.....	7
4. LINÉARISATION PAR RETOUR D'ÉTAT.....	15
5. CALCUL DES TRAJECTOIRES DÉSIRÉES.....	17
5.1 Solution non périodique.....	19
5.2 Solution périodique.....	24
6. LOI DE COMMANDE.....	26
7. SIMULATION DU CONTRÔLEUR.....	37
7.1 Modélisation du manipulateur.....	37
7.2 Trajectoires désirées.....	39
7.3 Loi de commande.....	40
8. CONCLUSION.....	45
RÉFÉRENCES.....	46
ANNEXE A: Calcul de l'énergie cinétique.....	49
ANNEXE B: Preuve du lemme 6.1.....	54

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 Classe de systèmes mécaniques. ....	5
Figure 3.1 Cinématique de la poutre flexible. ....	9
Figure 7.1 Manipulateur planaire et trajectoire désirée. ....	38
Figure 7.2 Trajectoires désirées: a) de l'outil; b) des CGRV; c) des CGR; d) des CGF..	39
Figure 7.3 a) Trajectoire de l'outil. b) Erreur de suivi des CGRV. ....	41
Figure 7.4 Erreur de suivi a) des CGR; b) des CGF.....	41
Figure 7.5 Efforts de commande a) pour l'articulation 1; b) pour l'articulation 2. ....	42
Figure 7.6 a) Trajectoire de l'outil. b) Erreur de suivi des CGRV. ....	42
Figure 7.7 Erreur de suivi a) des CGR; b) des CGF.....	43
Figure 7.8 Efforts de commande a) pour l'articulation 1; b) pour l'articulation 2. ....	43
Figure 7.9 a) Trajectoire de l'outil. b) Erreur de suivi des CGRV. ....	44
Figure 7.10 Erreur de suivi a) des CGR; b) des CGF.....	44
Figure 7.11 Efforts de commande a) pour l'articulation 1; b) pour l'articulation 2. ....	44

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 7.1 Paramètres physiques du manipulateur.....	38
---	----

## LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES

$q_{ri}$	ième coordonnée généralisée de la partie rigide.
$q_{ei}$	ième coordonnée généralisée de la partie flexible.
$n_r$	Nombre de coordonnées généralisées de la partie rigide.
$n_e$	Nombre de coordonnées généralisées de la partie flexible.
$\mathbf{q}_r$	Vecteur des coordonnées généralisées de la partie rigide.
$\bar{\mathbf{q}}_r$	Vecteur des coordonnées généralisées virtuelles de la partie rigide.
${}^1\mathbf{q}_r$	Vecteur des $n_r-1$ premières coordonnées généralisées de la partie rigide.
${}^2q_r$	dernière coordonnée généralisée de la partie rigide.
$\mathbf{q}_e$	Vecteur des coordonnées généralisées de la partie flexible.
$\phi_i$	Fonction de forme associée à la ième coordonnée généralisée flexible.
$\mu$	Déformation de la poutre flexible.
$\rho$	Masse par unité de longueur de la poutre flexible.
$I$	Moment d'inertie d'une section de la poutre flexible.
$E$	Module de Young de la poutre flexible.
$l$	Longueur de la poutre flexible.
$\mathbf{g}$	Vecteur de la force gravitationnelle.
${}^jR$	Matrice de projection du repère $\{i\}$ dans le repère $\{j\}$ .
${}^j\mathbf{v}_i$	Vitesse linéaire du repère $\{i\}$ par rapport au repère inertiel projeté dans le repère $\{j\}$ .
${}^j\Omega_i$	Vitesse angulaire du repère $\{i\}$ par rapport au repère inertiel projeté dans le repère $\{j\}$ .
$S(\mathbf{x})$	Opérateur qui transforme un vecteur $\mathbf{x}$ en une matrice antisymétrique.
$y'$	Dérivée partielle de $y$ par rapport à $x$ .
$\dot{y}$	Dérivée de $y$ par rapport au temps $t$ .

## LISTE DES ACRONYMES

CGR	Coordonnée généralisée de la partie rigide.
CGF	Coordonnée généralisée de la partie flexible.
CGRV	Coordonnée généralisée virtuelle de la partie rigide.



## 1. INTRODUCTION

Ces dernières années, nombre d'auteurs ont travaillé sur le problème du contrôle non-linéaire des manipulateurs flexibles. Plus précisément, plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre le problème du suivi de trajectoires dans l'espace des articulations (Lammerts & al., 1995; Nathan & Singh, 1991; Siciliano & Book, 1988). En particulier, ce problème peut être résolu en utilisant une linéarisation par retour d'état (De Luca & Siciliano, 1989; De Schutter & al., 1988). Dans ce contexte, le système est à minimum de phase (Isidori, 1989) et cela implique généralement que la dynamique non observable est bornée (De Luca & Siciliano, 1989). La faiblesse de cette méthode vient de ce que le suivi est réalisé par rapport à l'espace des articulations. En effet, pour les manipulateurs à membrures flexibles, l'espace de travail et l'espace des articulations sont liés par des relations cinématique et dynamique. La cinématique inverse ne peut donc servir à transformer la trajectoire désirée de l'espace de travail à l'espace des articulations. À cause de cela, on sera plutôt intéressé à obtenir un suivi de trajectoires directement par rapport à l'espace de travail ou par rapport à un espace d'articulations virtuelles (Asada & al., 1990 ; De Luca & Siciliano, 1989) défini de façon à être lié à l'espace de travail par une relation cinématique.

Le suivi dans l'espace de travail ou dans l'espace des articulations virtuelles peut également être obtenu à l'aide d'une linéarisation par retour d'état (Yim, 1994; Lucibello & Di Benedetto, 1993; Wang & Vidyasagar, 1991; De Luca & Siciliano, 1989). Dans ce cas, le système est à non minimum de phase et cela implique que le suivi de la trajectoire désirée engendre une dynamique non observable non bornée. Pour contourner ce problème, il est possible d'obtenir un suivi approximatif tout en garantissant la stabilité de la dynamique des zéros (Yim, 1994; De Luca & Siciliano, 1989). Une autre approche peut également être utilisée pour réaliser un suivi exact dans l'espace des articulations virtuelles. En effet, il est possible de trouver une solution bornée de la dynamique non observable correspondant à la trajectoire désirée des articulations virtuelles. Il s'agit alors de trouver une loi de commande qui assure la stabilité locale des erreurs de suivi des articulations virtuelles et de la déformation (Lucibello & Di Benedetto, 1993; Lucibello, 1989).

Cette approche ne s'applique cependant qu'à des manipulateurs et à des trajectoires très spécifiques. De plus, elle n'assure que la stabilité locale du système.

Dans ce rapport, une nouvelle approche qui assure la stabilité asymptotique globale de l'erreur de suivi dans l'espace des articulations virtuelles est proposée. Cette approche s'adresse à une classe de systèmes mécaniques formés d'une chaîne de corps rigides terminée par une poutre flexible. Cette classe de systèmes est, à peu de chose près, similaire à celle définie par Wang & Vidyasagar (1991). Elle est cependant moins restrictive puisqu'elle n'est pas caractérisée par des hypothèses sur le nombre de membres rigides et sur la géométrie des membres entre eux.

La méthode proposée consiste d'abord à obtenir les trajectoires désirées des articulations et des variables de déformation qui correspondent à la trajectoire désirée des articulations virtuelles. Ce calcul est, d'une certaine façon, inspiré de l'approche quasi-statique (Pfeiffer, 1989) puisqu'il consiste à corriger la trajectoire désirée des articulations de façon à tenir compte de la flexibilité de la poutre. Cependant, contrairement à la méthode quasi-statique, avec l'approche que nous préconisons, la dynamique de la flexibilité n'est pas négligée et la stabilité asymptotique globale du système est garantie. En fait, parce que le système est non-linéaire et à non minimum de phase par rapport aux articulations virtuelles, nous proposons d'utiliser, de façon itérative, la méthode d'intégration causale anti-causale (Kwon & Book, 1994) pour obtenir les trajectoires désirées des articulations et des variables de déformation correspondant à la trajectoire désirée des articulations virtuelles. Une étude de convergence de cette procédure itérative est également présentée dans ce rapport. Suite à cela, un contrôleur qui assure le suivi des trajectoires désirées est obtenu. Ce dernier se compose d'une linéarisation par retour d'état par rapport aux articulations suivie de deux lois de commande linéaires. Le théorème de passivité et l'étude de stabilité des systèmes hiérarchiques (Vidyasagar, 1993) nous permettent alors d'obtenir les gains du contrôleur qui assurent la stabilité asymptotique globale et un amortissement souhaitable des erreurs de suivi des articulations et des variables de déformation. Parce que les erreurs de suivi des articulations virtuelles sont liées aux erreurs de suivi des articulations et des variables de déformation par une

relation linéaire, la stabilité asymptotique du suivi dans l'espace des articulations virtuelles est du même coup assurée.

Le rapport est organisé de la façon suivante. D'abord, la section 2 présente la classe de systèmes mécaniques considérée et les propriétés s'y rattachant. Ensuite, une brève section est consacrée à la linéarisation par retour d'état par rapport aux articulations. Suite à cela, la méthode itérative pour obtenir les trajectoires désirées des articulations et des variables de déformation correspondant à la trajectoire désirée des articulations virtuelles est présentée. Une étude de convergence de la méthode est également considérée. À la section suivante, la loi de commande, et l'étude de stabilité permettant le calcul des gains du contrôleur sont présentées. Finalement, la dernière section est consacrée à la présentation des résultats de simulations appliquées sur un manipulateur planaire comportant un membre rigide et un membre flexible.

## **2. CLASSE DE SYSTÈMES MÉCANIQUES**

L'étude présentée dans ce rapport est valide pour une classe de systèmes mécaniques formés de deux parties: une chaîne de  $p$  corps rigides d'une part et une poutre flexible comportant une charge à son extrémité d'autre part. Comme l'indique la figure 2.1 les corps  $p-1$  et  $p$  de la partie rigide sont liés par une articulation rotoïde. Cette articulation est fixée sur le corps  $p-1$  d'une part et au centre de masse du corps  $p$  d'autre part. Puis, l'extrémité sans charge de la poutre flexible est également fixée au centre de masse du corps  $p$ . De façon plus précise, les deux parties du système sont caractérisées par les hypothèses suivantes:

**hypothèse 1:** *Toutes les contraintes mécaniques de la partie rigide sont holonomes.*

**hypothèse 2:** *Un actionneur et un frottement visqueux linéaire sont associés à chacune des  $n_r$  Coordonnées Généralisées de la partie Rigide (CGR)<sup>1</sup>.*

**hypothèse 3:** *La masse par unité de longueur de la poutre flexible ( $\rho$ ) est constante et le modèle de la poutre respecte les hypothèses d'Euler-Bernoulli: i) les sections restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre; ii) le cisaillement dû à l'effort tranchant est négligeable; iii) l'inertie de rotation d'une section est négligeable.*

**hypothèse 4:** *Seule la flexibilité dans le plan orthogonal à l'axe de l'articulation rotoïde liant les corps  $p$  et  $p-1$  est considérée.*

**hypothèse 5:** *La flexibilité peut être approximée par une somme de  $n_f$  Coordonnées Généralisées Flexible (CGF)<sup>2</sup> dépendants uniquement du temps pondérées par des fonctions de forme.*

**hypothèse 6:** *Un frottement visqueux linéaire est associé à chaque CGF.*

**hypothèse 7:** *La déformation de la poutre est faible de sorte que l'énergie cinétique associée aux termes quadratiques de flexibilité est négligeable.*

Ces hypothèses peuvent évidemment caractériser un manipulateur à  $n_r$  degrés de liberté dont le dernier membre est flexible. Elles peuvent également caractériser d'autres types de systèmes holonomes (eg: un véhicule spatial combiné à un manipulateur dont le dernier membre est flexible).

---

<sup>1</sup>Dans un contexte de robotique, les CGR sont simplement les articulations du manipulateur. Par contre, dans un contexte plus général, cet acronyme peut désigner autre chose qu'une articulation.

<sup>2</sup>Les CGF sont les coordonnées généralisées qui servent à modéliser l'évolution de la déformation de la poutre flexible par rapport au temps.

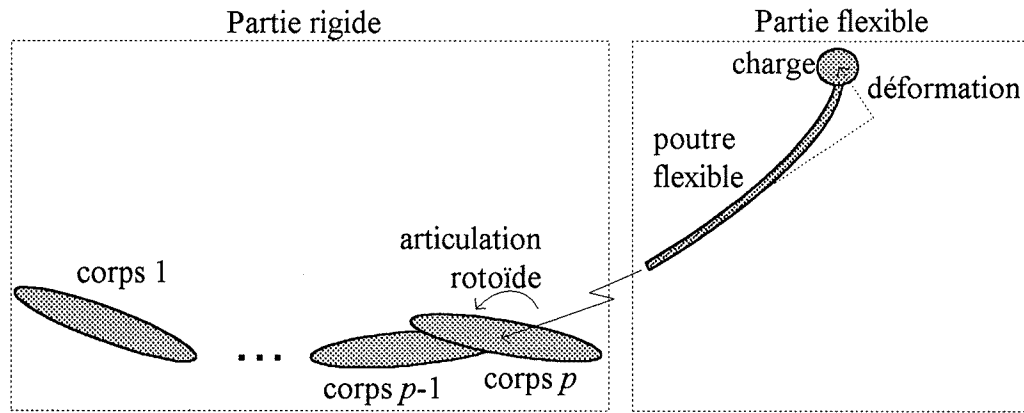


Figure 2.1 Classe de systèmes mécaniques.

D'autres auteurs ont considéré des classes de systèmes mécaniques similaires à celle-ci. Par exemple, Wang & Vidyasagar (1991) ont défini une classe de manipulateurs comportant trois articulations et un dernier membre flexible. La grande différence entre la classe définie par Wang & Vidyasagar (1991) et la nôtre réside principalement dans l'hypothèse de flexibilité du dernier membre. En effet, ces auteurs supposent que la flexibilité se situe dans le plan orthogonal à l'axe de rotation de la première articulation. Ils supposent également que le manipulateur comporte au plus trois articulations et que ses deux derniers membres forment un plan horizontal.

### 3. MODÈLE DYNAMIQUE

Selon l'hypothèse 5, la déformation du membre flexible peut s'exprimer sous la forme suivante:

$$\mu(x_p) = \sum_{i=1}^{n_e} \phi_i(x_p) q_{e_i} \quad (3.1)$$

où  $\phi_i$  est la fonction de forme associée à la CGF  $q_{e_i}$  et  $n_e$  est le nombre de CGF considéré. Les hypothèses 1 et 5 nous permettent ainsi d'utiliser la méthode des modes assumés (Meirovich, 1967) (Book, 1984) ou la méthode des éléments finis (Reddy, 1993) pour obtenir le modèle dynamique du système. Il suffit donc de choisir des fonctions de forme appropriées, de calculer les énergies du système et d'appliquer l'équation d'Euler-Lagrange pour chaque coordonnée

généralisée. Selon les hypothèses 2 et 6, le modèle dynamique est par conséquent obtenu en solutionnant les relations suivantes:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = \tau_i - f_r \dot{q}_r, \quad i = 1 \dots n_r \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_e} - \frac{\partial L}{\partial q_e} = -f_e \dot{q}_e, \quad i = 1 \dots n_e \quad (3.3)$$

où  $L$  est le Lagrangien,  $q_r$  est la  $i^{\text{ème}}$  CGR,  $f_r$  et  $f_e$  sont respectivement les coefficients de frottement visqueux associés aux  $i^{\text{ème}}$  vitesses des CGR et des CGF. Finalement,  $\tau_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  force généralisée de la partie rigide. La solution des relations (3.2) et (3.3) nous conduit à un modèle dynamique de la forme suivante (Yuan & Book, 1993):

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}\boldsymbol{\tau} \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{q} = [q_{r_1} \dots q_{r_{n_r}} \ q_{e_1} \dots q_{e_{n_e}}]^T$  est le vecteur des coordonnées généralisées,  $\mathbf{M}$  est la matrice des inerties,  $\mathbf{V}$  est la matrice des forces centrifuges et de Coriolis,  $\mathbf{F}$  est la matrice des forces de frottement qui est diagonale positive,  $\mathbf{K} = \text{diag}(\mathbf{0}_{n_r \times n_r}, \mathbf{K}_e)$ ,  $\mathbf{K}_e$  est la matrice de rigidité qui est symétrique et définie positive,  $\mathbf{G}$  est le vecteur des forces de gravité et  $\mathbf{B}^T = [\mathbf{I} \ \mathbf{0}]$  est une matrice qui caractérise le couplage entre les actionneurs et la dynamique. De façon plus spécifique, la dynamique peut être réexprimée en une partie rigide et une partie flexible de la façon suivante:

$$\mathbf{M}_r(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{M}_{re}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{V}_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{V}_{re}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{F}_r\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{G}_r(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{M}_{re}^T(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{M}_e(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{V}_{er}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{V}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{F}_e\dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e\mathbf{q}_e + \mathbf{G}_e(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

où les indices  $re$  et  $er$  indiquent le couplage entre la dynamique de la partie rigide et celle de la partie flexible. Finalement, la dynamique de la partie flexible donnée par la relation (3.6) peut être réécrite sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} & {}^1\mathbf{M}_{re}^T(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + {}^2\mathbf{M}_{re}^T(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{M}_e(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_e + {}^1\mathbf{V}_{er}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + {}^2\mathbf{V}_{er}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{V}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_e \\ & + \mathbf{F}_e\dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e\mathbf{q}_e + \mathbf{G}_e(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.7)$$

où  ${}^1\mathbf{q}_r$  est le vecteur des  $n_r-1$  premières CGR,  ${}^2\mathbf{q}_r$  est la dernière CGR qui est en fait l'articulation rotoïde qui lie les deux derniers corps de la partie rigide,  ${}^1\mathbf{M}_{re}$  est une matrice formée des  $n_r-1$

premières lignes de la matrice  $M_{re}$ ,  ${}^2M_{re}$  est la dernière ligne de la matrice  $M_{re}$ ,  ${}^1V_{er}$  est une matrice formée des  $n_r-1$  premières colonnes de la matrice  $V_{er}$  et  ${}^2V_{er}$  est la dernière colonne de la matrice  $V_{er}$ .

### 3.1 Propriétés du modèle

De façon générale, le modèle dynamique décrit par la relation (3.4) respecte les propriétés suivantes.

**propriété 1:** *La matrice  $M(q)$  est symétrique et définie positive.*

**propriété 2:** *Les matrices  $M(q)$ ,  $V(q, \dot{q})$  et le vecteur  $G(q)$  peuvent toujours être décomposés sous la forme suivante:*

$$\begin{aligned} M(q) &= Mo(q) + \sum_{i=1}^{n_r} Ml_i(q)q_{r_i} + \sum_{j=1}^{n_r} \sum_{k=1}^{n_r} Mn_{jk}(q)q_{r_j}q_{r_k} \\ V(q, \dot{q}) &= Vo(q, \dot{q}) + \sum_{i=1}^{n_r} Vl_i(q, \dot{q})(q)q_{r_i} + \sum_{j=1}^{n_r} \sum_{k=1}^{n_r} Vn_{jk}(q, \dot{q})q_{r_j}q_{r_k} \\ G(q) &= Go(q) + \sum_{i=1}^{n_r} Gl_i(q)q_{r_i} \end{aligned}$$

où les matrices  $Mo(q)$ ,  $Ml_i(q)$ ,  $Mn_{jk}(q)$ ,  $Vo(q, \dot{q})$ ,  $Vl_i(q, \dot{q})$  et  $Vn_{jk}(q, \dot{q})$  ainsi que les vecteurs  $Go(q)$  et  $Gl_i(q)$  dépendent des CGR seulement par l'entremise de fonctions sinusoidales.

**propriété 3:** *Les matrices  $M_r(q)$  et  $M_e(q)$  sont symétriques et définies positives.*

**propriété 4:** *Si on définit la matrice*

$$H(q) = \begin{bmatrix} H_r(q) & H_{re}(q) \\ H_{re}^T(q) & H_e(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_r(q) & M_{re}(q) \\ M_{re}^T(q) & M_e(q) \end{bmatrix}^{-1} = M^{-1}(q),$$

alors, les matrices  $H(q)$ ,  $H_r(q)$  et  $H_e(q)$  sont symétriques et définies positives.

**propriété 5:** Les trois égalités suivantes sont vérifiées

$$a) \quad H_{re}^T(q)H_r^{-1}(q) = -M_e^{-1}(q)M_{re}^T(q)$$

$$b) \quad M_e^{-1}(q) = H_e(q) - H_{re}^T(q)H_r^{-1}(q)H_{re}(q)$$

$$c) \quad H_r^{-1}(q) = M_r(q) - M_{re}(q)M_e^{-1}(q)M_{re}^T(q)$$

**Preuve des propriétés 1 à 5:** La propriété 1 découle de ce que l'énergie cinétique est une forme quadratique des dérivées des CGR et de ce que l'énergie potentielle est dépend seulement des CGR (Spong & Vidyasagar, 1989, p.141). La propriété 2 peut se démontrer par l'argumentation qui suit. D'abord, la position et l'orientation des membres par rapport au repère inertiel peuvent toujours s'exprimer par une matrice de transformation homogène. Dans cette matrice, la partie qui représente l'orientation dépend des CGR seulement par l'entremise de fonctions sinusoïdales. À cause de cela, les vitesses angulaires des membres, qui sont obtenues à partir des matrices de rotation et de leurs dérivées dépendent également des CGR seulement par l'entremise de fonctions sinusoïdales. La deuxième partie de la matrice homogène représente la translation. À cause de l'existence possible de CGR de translation, cette partie dépend des CGR par l'entremise de produits de fonctions sinusoïdales et linéaires. Pour cette raison, les vitesses des membres dépendent également des CGR par l'entremise de produits de fonctions sinusoïdales et linéaires. Ainsi, il est clair que l'énergie cinétique dépend des CGR seulement par l'entremise de produits de fonctions sinusoïdales, linéaires et quadratiques tandis que l'énergie potentielle de gravité dépend des CGR seulement par l'entremise de produits de fonctions sinusoïdales et linéaires. Le modèle dynamique dépend donc des CGR seulement par l'entremise de produits de fonctions sinusoïdales, linéaires et quadratiques puisque l'équation de Lagrange est formée d'une somme de dérivées des énergies. Ainsi, la propriété 2 est vérifiée. Passons aux propriétés 3, 4 et 5. D'abord, la symétrie et la positivité de  $M_r(q)$  et de  $M_e(q)$  sont une conséquence directe de celles de  $M(q)$  (Goulub, 1989). Puis, de la même façon, la symétrie et la positivité de  $H(q)$  sont une conséquence directe de celles de  $M(q)$  et la symétrie et la positivité des matrices  $H_r(q)$  et  $H_e(q)$  sont une conséquence directe de



celles de  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ . Enfin, les propriétés 5a) et 5b) se démontrent en considérant l'égalité  $\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \mathbf{I}$  et la propriété 5c) se démontre en considérant l'égalité  $\mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{I}$ .  $\square$

Dans un contexte moins général pour lequel on suppose que les hypothèses 1 à 7 sont vérifiées, il est possible de faire ressortir plusieurs autres propriétés associées à la partie flexible du modèle dynamique donnée par la relation (3.7). Pour ce faire, trouvons d'abord le modèle dynamique associé à cette partie de la dynamique du système. Sachant que le Lagrangien du système peut s'exprimer sous la forme suivante:

$$L = L_e + \sum_{i=1}^p L_{r_i}$$

où  $L_{r_i}$  est le Lagrangien du  $i^{\text{em}}$  corps rigide et  $L_e$  est le Lagrangien de la poutre flexible, il est clair que  $L_{r_i}$  est indépendant de  $\mathbf{q}_e$  et de  $\dot{\mathbf{q}}_e$ . Par conséquent, la relation (3.3) peut être réexprimée de la façon suivante:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_e}{\partial \dot{q}_{e_i}} - \frac{\partial L_e}{\partial q_{e_i}} = -f_{e_i} \dot{q}_{e_i}, \quad i = 1 \dots n_e \quad (3.8)$$

où  $L_e = \bar{K}_e - U_e$ ,  $\bar{K}_e$  et  $U_e$  sont respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la poutre flexible. Nous nous référons maintenant à la figure 3.1 pour obtenir les énergies cinétique et potentielle de la poutre.

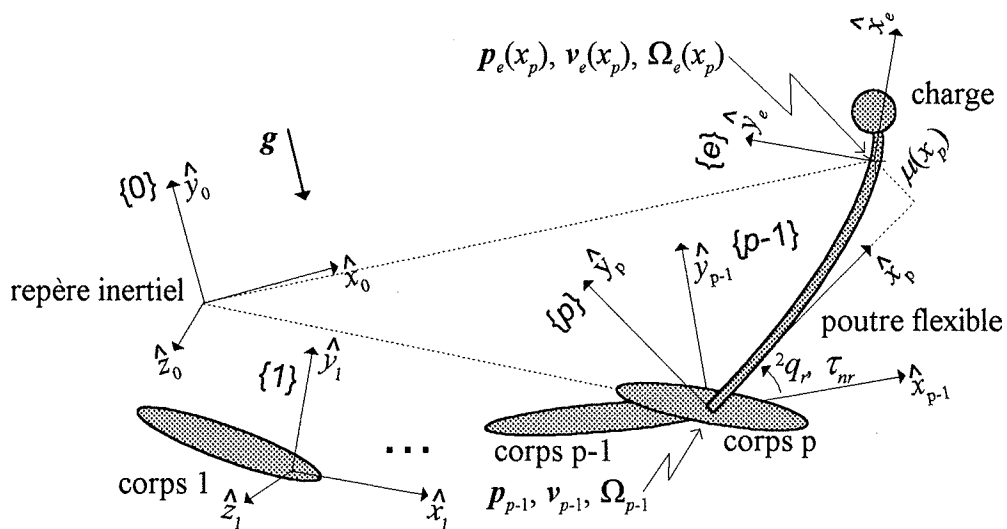


Figure 3.1 Cinématique de la poutre flexible.

Selon l'hypothèse 3, l'énergie cinétique de la poutre flexible est donnée par

$$\bar{K}_e = \frac{1}{2} \left[ \rho \int_0^l \mathbf{v}_e^T(x_p) \mathbf{v}_e(x_p) dx_p + m_c \mathbf{v}_e^T(l) \mathbf{v}_e(l) + {}^e\Omega_e^T(l) \mathbf{I}_c {}^e\Omega_e(l) \right] \quad (3.9)$$

où  ${}^0\mathbf{v}_e(x_p)$  est la vitesse de l'origine du repère  $\{e\}$  par rapport au repère  $\{0\}$  en fonction de  $x_p$ ,  ${}^e\Omega_e(x_p)$  est la vitesse angulaire du repère  $\{e\}$  par rapport au repère  $\{0\}$  projetée dans le repère  $\{e\}$  en fonction de  $x_p$ ,  $\rho$  est la masse par unité de longueur de la poutre flexible,  $l$  est sa longueur et  $m_c$  ainsi que  $\mathbf{I}_c$  sont respectivement la masse et la matrice d'inertie de la charge. En observant la figure 3.1, nous obtenons les relations cinématiques suivantes:

$${}^0\mathbf{p}_e(x_p) = {}^0\mathbf{p}_{p-1} + {}^{p-1}\mathbf{R} \mathbf{p}_e(x_p) \quad (3.10)$$

$${}^0\mathbf{v}_e(x_p) = \frac{d}{dt} \left[ {}^0\mathbf{p}_{p-1} + {}^{p-1}\mathbf{R} \mathbf{p}_e(x_p) \right] = {}^0\mathbf{v}_{p-1} + {}^{p-1}\dot{\mathbf{R}} \mathbf{p}_e(x_p) + {}^{p-1}\mathbf{R} \dot{\mathbf{p}}_e(x_p)$$

où  ${}^0\mathbf{p}_{p-1}$  est la position de l'origine du repère  $\{p-1\}$  exprimée dans le repère  $\{0\}$ ,  ${}^0\mathbf{p}_e(x_p)$  est la position de l'origine du repère  $\{e\}$  exprimée dans le repère  $\{0\}$  en fonction de  $x_p$ ,  ${}^{p-1}\mathbf{p}_e(x_p) = [c_2 x_p - s_2 \mu(x_p) \quad s_2 x_p + c_2 \mu(x_p) \quad 0]^T$  est la position de l'origine du repère  $\{e\}$  exprimée dans le repère  $\{p-1\}$  en fonction de  $x_p$ ,  $\mu(x_p)$  est la déformation de la poutre en fonction de  $x_p$ ,  $c_2 = \cos^2(q_r)$ ,  $s_2 = \sin^2(q_r)$ , et  ${}^{p-1}\mathbf{R}$  est la matrice de rotation servant à projeter un vecteur exprimé dans le repère  $\{p-1\}$  dans le repère  $\{0\}$ . Ensuite, en utilisant la loi de propagation des vitesses angulaires (Craig, 1989, p.163), nous obtenons

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{v}_e(x_p) &= {}^0\mathbf{v}_{p-1} + \mathcal{S}({}^0\Omega_{p-1}) {}^{p-1}\mathbf{R} \mathbf{p}_e(x_p) + {}^{p-1}\mathbf{R} \dot{\mathbf{p}}_e(x_p) \\ {}^0\mathbf{v}_e(x_p) &= {}^{p-1}\mathbf{R} \left[ {}^{p-1}\mathbf{v}_{p-1} + \mathcal{S}({}^{p-1}\Omega_{p-1}) \mathbf{p}_e(x_p) + \dot{\mathbf{p}}_e(x_p) \right] \\ {}^0\mathbf{v}_e(x_p) &= {}^{p-1}\mathbf{R} \left[ \mathbf{J}_v({}^1\mathbf{q}_r) \dot{\mathbf{q}}_r + \mathcal{S}(\mathbf{J}_\Omega({}^1\mathbf{q}_r) \dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{p}_e(x_p) + \dot{\mathbf{p}}_e(x_p) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

où

$$\mathcal{S}(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix},$$

${}^{p-1}\Omega_{p-1}$  ainsi que  ${}^{p-1}\mathbf{v}_{p-1}$  sont respectivement les vitesses angulaire et linéaire du repère  $\{p-1\}$  par rapport au repère  $\{0\}$  projetées dans le repère  $\{p-1\}$  et  $\mathbf{J}_v({}^1\mathbf{q}_r)$  ainsi que  $\mathbf{J}_\Omega({}^1\mathbf{q}_r)$  sont respectivement les jacobiens associés aux vitesses linéaire et angulaire  ${}^{p-1}\mathbf{v}_{p-1}$  et  ${}^{p-1}\Omega_{p-1}$ . De façon similaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} {}^e\Omega_e(x_p) &= \left( {}^2\dot{\mathbf{q}}_r + \dot{\mu}'(x_p) \right) \hat{\mathbf{z}}_e + {}^{p-1}R^T(x_p) {}^{p-1}\Omega_{p-1} \\ {}^e\Omega_e(x_p) &= \left( {}^2\dot{\mathbf{q}}_r + \dot{\mu}'(x_p) \right) \hat{\mathbf{z}}_e + {}^{p-1}R^T(x_p) \mathbf{J}_\Omega({}^1\mathbf{q}_r) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r \end{aligned} \quad (3.12)$$

où  $(\cdot)$  indique la dérivée partielle par rapport à  $x_p$  et où  ${}^{p-1}R(x_p)$  est la matrice de rotation servant à projeter un vecteur exprimé dans le repère  $\{e\}$  dans le repère  $\{p-1\}$  en fonction de  $x_p$ . Parce que la déformation est supposée petite (hypothèse 7), cette matrice de rotation est donnée par

$${}^{p-1}R(x_p) = \begin{bmatrix} c_2 - s_2\mu'(x_p) & -s_2 - c_2\mu'(x_p) & 0 \\ s_2 + c_2\mu'(x_p) & c_2 - s_2\mu'(x_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En remplaçant (3.11) et (3.12) dans (3.9), en considérant l'hypothèse 7 ( $\mu^2(x_p) = \mu'^2(x_p) = 0$ ) et en utilisant la relation (3.1), nous obtenons l'énergie cinétique de la poutre flexible qui est donnée par

$$\begin{aligned} \bar{K}_e &= \bar{K}_0 + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{n_e} m_{e_{ij}} \dot{\mathbf{q}}_{e_i} \dot{\mathbf{q}}_{e_j} + 2 \left( {}^2\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{J}_6 {}^1\dot{\mathbf{q}}_r \right) \sum_{i=1}^{n_e} w_i \dot{\mathbf{q}}_{e_i} + 2(c_2 J_2 - s_2 J_1) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r \sum_{i=1}^{n_e} v_i \dot{\mathbf{q}}_{e_i} \right] \\ &+ {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^T \left[ s_2 c_2 (J_4^T J_4 - J_5^T J_5) - (c_2^2 - s_2^2) J_4^T J_5 \right] {}^1\dot{\mathbf{q}}_r \sum_{i=1}^{n_e} \left( w_i + (I_y - I_x - I_z) \phi_i'(l) \right) \dot{\mathbf{q}}_{e_i} \\ &+ \left[ {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^T \left[ s_2 (J_3^T J_5 - J_2^T J_6) + c_2 (J_3^T J_4 - J_1^T J_6) \right] {}^1\dot{\mathbf{q}}_r - {}^2\dot{\mathbf{q}}_r (c_2 J_1 + s_2 J_2) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r \right] \sum_{i=1}^{n_e} v_i \dot{\mathbf{q}}_{e_i} \end{aligned} \quad (3.13)$$

où  $\bar{K}_0$  est une partie de l'énergie cinétique qui est indépendante de  $\mathbf{q}_e$  et de  $\dot{\mathbf{q}}_e$ ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_1^T & J_2^T & J_3^T \end{bmatrix}^T &= \mathbf{J}_v({}^1\mathbf{q}_r), \begin{bmatrix} J_4^T & J_5^T & J_6^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{J}_\Omega({}^1\mathbf{q}_r), \text{diag}(I_x, I_y, I_z) = \mathbf{I}_c, m_{e_{ij}} = \rho \int_0^l \phi_i(x) \phi_j(x) dx \\ &+ m_c \phi_i(l) \phi_j(l) + I_z \phi_i'(l) \phi_j'(l), w_i = \int_0^l x \phi_i(x) dx + m_c l \phi_i(l) + I_z \phi_i'(l) \quad \text{et} \quad v_i = \int_0^l \phi_i(x) dx + m_c \phi_i(l). \end{aligned}$$

Pour plus de détails concernant le calcul de l'énergie cinétique, le lecteur peut consulter l'annexe A de ce rapport. En se référant une fois de plus à la figure 3.1, nous obtenons l'énergie potentielle de la poutre flexible qui est donnée par

$$U_e = U_{ref} - \left[ \rho \int_0^l {}^0P_e^T(x) dx + m_c {}^0P_e^T(l) \right] \mathbf{g} + \frac{1}{2} \rho EI \int_0^l (\mu''(x))^2 dx \quad (3.14)$$

où  $U_{ref}$  est l'énergie potentielle de référence,  $E$  est le module d'élasticité de Young de la poutre,  $I$  est le moment d'aire d'une section de la poutre et  $\mathbf{g}$  est le vecteur de gravité exprimé dans le repère  $\{0\}$ . En remplaçant (3.10) et (3.1) dans (3.14), on obtient

$$U_e = U_0 + [s_2 \quad -c_2 \quad 0]_{p-1} {}^0\mathbf{R}^T \mathbf{g} \sum_{i=1}^{n_e} v_i \mathbf{q}_{e_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{n_e} k_{e_{ij}} \mathbf{q}_{e_i} \mathbf{q}_{e_j} \quad (3.15)$$

où  $U_0$  est une partie de l'énergie potentielle qui est indépendante de  $\mathbf{q}_e$  et

$$k_{e_{ij}} = \rho EI \int_0^l \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx.$$

En remplaçant (3.13) et (3.15) dans (3.8), on obtient la dynamique de la partie flexible du système qui est donnée par

$$\begin{aligned} [w_i J_6 + v_i (c_2 J_2 - s_2 J_1)] {}^1\dot{\mathbf{q}}_r + w_i {}^2\ddot{\mathbf{q}}_r + \sum_{j=1}^{n_e} m_{e_{ij}} \ddot{\mathbf{q}}_{e_j} + {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^T \bar{\Psi}_i(\mathbf{q}_r) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r \\ + f_{e_i} \dot{\mathbf{q}}_{e_i} + \sum_{j=1}^{n_e} k_{e_{ij}} \mathbf{q}_{e_j} + [s_2 \quad -c_2 \quad 0]_{p-1} {}^0\mathbf{R}^T \mathbf{g} v_i = 0, \quad \text{pour } i = 1 \dots n_e \end{aligned} \quad (3.16)$$

où

$$\bar{\Psi}_i(\mathbf{q}_r) = \frac{1}{2} (\Psi_i(\mathbf{q}_r) + \Psi_i^T(\mathbf{q}_r))$$

et

$$\begin{aligned} \Psi_i(\mathbf{q}_r) = \frac{\partial J_6}{\partial {}^1\mathbf{q}_r} w_i + \left[ (J_5^T J_5 - J_4^T J_4) c_2 s_2 + J_4^T J_5 (c_2^2 - s_2^2) \right] \left[ w_i + (I_y - I_x - I_z) \phi_i'(l) \right] \\ + \left[ c_2 \frac{\partial J_2}{\partial {}^1\mathbf{q}_r} - s_2 \frac{\partial J_1}{\partial {}^1\mathbf{q}_r} + s_2 (J_2^T J_6 - J_3^T J_5) + c_2 (J_1^T J_6 - J_3^T J_4) \right] v_i \end{aligned} \quad (3.17)$$

En considérant l'égalité terme à terme entre les relations (3.16) et (3.7), les propriétés suivantes sont déduites.

**propriété 6:** La matrice  $M_e(\mathbf{q})$  est constante.

**propriété 7:** La matrice  ${}^1M_{re}(\mathbf{q})$  est indépendante de  $\mathbf{q}_e$  et elle peut toujours s'exprimer sous la forme suivante:

$${}^1M_{re}(\mathbf{q}) = M_0({}^1\mathbf{q}_r) + M_1({}^1\mathbf{q}_r) \sin({}^2q_r) + M_2({}^1\mathbf{q}_r) \cos({}^2q_r)$$

**propriété 8:** La matrice  ${}^2M_{re}(\mathbf{q})$  est constante.

**propriété 9:** Les matrices  $V_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  et  ${}^2V_{er}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  sont nulles.

**propriété 10:** La matrice  ${}^1V_{er}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  est indépendante de  $\mathbf{q}_e$ , de  $\dot{\mathbf{q}}_e$  et de  ${}^2\dot{q}_r$  et peut toujours s'exprimer sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} {}^1V_{er}(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r) &= V_0({}^1\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r) + V_1({}^1\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r) \sin({}^2q_r) + V_2({}^1\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r) \cos({}^2q_r) \\ &\quad + V_3({}^1\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r) \sin({}^2q_r) + V_4({}^1\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r) \cos({}^2q_r) \end{aligned}$$

**propriété 11:** L'égalité  ${}^1V_{er}(\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^a) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^b = {}^1V_{er}(\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^b) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^a$  est vérifiée  $\forall {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^a, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^b \in \mathfrak{R}^{n-1}$ .

**propriété 12:** l'inégalité suivante est vérifiée

$$\|{}^1V_{er}(\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^a) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^b\|_2 \leq \left[ \gamma_0 + \gamma_1 \|{}^1\mathbf{q}_r\|_2 + \gamma_2 \|{}^1\mathbf{q}_r\|_2^2 \right] \|{}^1\dot{\mathbf{q}}_r^a\|_2 \|{}^1\dot{\mathbf{q}}_r^b\|_2, \quad \forall {}^1\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^a, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^b \in \mathfrak{R}^{n-1}$$

**propriété 13:** Le vecteur  $G_e(\mathbf{q})$  est indépendant de  $\mathbf{q}_e$  et il peut toujours s'exprimer sous la forme suivante:

$$G_e(\mathbf{q}) = G_1({}^1\mathbf{q}_r) \sin({}^2q_r) + G_2({}^1\mathbf{q}_r) \cos({}^2q_r)$$

**Preuve des propriétés 6 à 13:** Du fait que  $J_i$  et  ${}_{p-1}^0R$  ne dépendent que de  ${}^1\mathbf{q}_r$ , les propriétés 6, 7, 8 et 13 se déduisent par simple inspection. Pour ce qui des propriétés 9 et 10, l'égalité entre (3.16) et (3.7) nous permet d'écrire:

$$\begin{bmatrix} {}^1V_{er}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & {}^2V_{er}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & V_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\dot{\mathbf{q}}_r \\ {}^2\dot{q}_r \\ \dot{\mathbf{q}}_e^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^T \bar{\Psi}_1(\mathbf{q}_r) \\ \vdots \\ {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^T \bar{\Psi}_n(\mathbf{q}_r) \end{bmatrix} {}^1\dot{\mathbf{q}}_r \quad (3.18)$$

En fait, pour que cette égalité soit vraie, les matrices  $V_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  et  ${}^2V_{er}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  doivent être nulles et la matrice  ${}^1V_{er}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  doit être indépendante de  $\mathbf{q}_e$ , de  $\dot{\mathbf{q}}_e$  et de  ${}^2\dot{\mathbf{q}}_r$ .

À cause de cela, nous avons

$${}^1V_{er}(\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r) = \begin{bmatrix} {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^T \bar{\Psi}_1(\mathbf{q}_r) \\ \vdots \\ {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^T \bar{\Psi}_{n_e}(\mathbf{q}_r) \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Parce que  $\bar{\Psi}_i(\mathbf{q}_r)$  est symétrique, il est clair que la propriété 11 est vérifiée. Ensuite, pour prouver la propriété 10, remplaçons  $c_2 s_2 = \frac{1}{2} \sin(2 {}^2q_r)$  et  $c_2^2 - s_2^2 = \cos(2 {}^2q_r)$  dans la relation (3.17).

$\bar{\Psi}_i(\mathbf{q}_r)$  peut alors s'exprimer sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_i(\mathbf{q}_r) &= \bar{\Psi}_{0_i}({}^1\mathbf{q}_r) + \bar{\Psi}_{1_i}({}^1\mathbf{q}_r) \sin({}^2q_r) + \bar{\Psi}_{2_i}({}^1\mathbf{q}_r) \cos({}^2q_r) \\ &\quad + \bar{\Psi}_{3_i}({}^1\mathbf{q}_r) \sin(2 {}^2q_r) + \bar{\Psi}_{4_i}({}^1\mathbf{q}_r) \cos(2 {}^2q_r) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Puis, de la propriété 2, les matrices  $\bar{\Psi}_{j_i}({}^1\mathbf{q}_r)$  peuvent se décomposer de la façon suivante

$$\bar{\Psi}_{j_i}({}^1\mathbf{q}_r) = \bar{\Psi}_{0_{j_i}}({}^1\mathbf{q}_r) + \sum_{k=1}^{n_r-1} \bar{\Psi}_{l_{j_i}^k}({}^1\mathbf{q}_r) q_{r_k} + \sum_{l=1}^{n_r-1} \sum_{s=1}^{n_r-1} \bar{\Psi}_{n_{j_i}^{ls}}({}^1\mathbf{q}_r) q_{r_l} q_{r_s}, \quad (3.21)$$

où les matrices  $\bar{\Psi}_{0_{j_i}}({}^1\mathbf{q}_r)$ ,  $\bar{\Psi}_{l_{j_i}^k}({}^1\mathbf{q}_r)$  et  $\bar{\Psi}_{n_{j_i}^{ls}}({}^1\mathbf{q}_r)$  sont uniformément bornées puisqu'elle dépendent de  ${}^1\mathbf{q}_r$  seulement par l'entremise de fonctions sinusoïdales. En remplaçant (3.20) dans (3.19), nous obtenons le résultat escompté. Pour prouver la propriété 12, nous utilisons la relation (3.19) qui nous permet d'écrire (Craig, 1988)

$$\begin{aligned} \left\| {}^1V_{er}(\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^a) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^b \right\|_2 &\leq \sqrt{n_e} \left\| {}^1V_{er}(\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^a) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^b \right\|_\infty \leq \sqrt{n_e} \max_{1 \leq i \leq n_e} \left[ \left\| {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^{aT} \bar{\Psi}_i(\mathbf{q}_r) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^b \right\| \right] \\ &\leq \sqrt{n_e} \max_{1 \leq i \leq n_e} \left[ \left\| \bar{\Psi}_i(\mathbf{q}_r) \right\|_2 \right] \left\| {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^a \right\|_2 \left\| {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^b \right\|_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Puis, des relations (3.20) et (3.21), nous avons

$$\left\| \bar{\Psi}_i(\mathbf{q}_r) \right\|_2 \leq \gamma_{i0} + \gamma_{i1} \left\| {}^1\mathbf{q}_r \right\|_2 + \gamma_{i2} \left\| {}^1\mathbf{q}_r \right\|_2^2 \quad (3.23)$$

Ainsi, des relations (3.22) et (3.23), nous avons

$$\left\| {}^1V_{er}(\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^a) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^b \right\|_2 \leq \left[ \gamma_0 + \gamma_1 \left\| {}^1\mathbf{q}_r \right\|_2 + \gamma_2 \left\| {}^1\mathbf{q}_r \right\|_2^2 \right] \left\| {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^a \right\|_2 \left\| {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^b \right\|_2$$

où  $\gamma_j = \sqrt{n_e} \max_i \gamma_{ji}$ . Le résultat de la propriété 12 est donc obtenu.  $\square$

Dans les sections qui suivent, ces propriétés seront essentielles pour prouver la stabilité de l'erreur de suivi de trajectoires dans l'espace des CGRV et la convergence des algorithmes de calcul des trajectoires désirées.

#### 4. LINÉARISATION PAR RETOUR D'ÉTAT

Pour une classe de systèmes mécaniques similaire à celle définie à la section 2, Wang & Vidyasagar (1991) ont montré que la linéarisation par retour d'état de type entrée-état n'est pas réalisable. Par contre, la linéarisation de type entrée-sorties par retour d'état est réalisable pour plusieurs catégories de sorties (De Schutter & al., 1988; De Luca & Siciliano, 1989; Lucibello & Di Benedetto, 1993; Yim, 1994). En particulier, la linéarisation peut être obtenue en considérant le vecteur des CGR comme sortie (De Schutter & al., 1988; De Luca & Siciliano, 1989). Dans ce cas, la loi de commande peut être déduite de façon usuelle en dérivant la sortie jusqu'à ce que l'entrée apparaisse. Cette loi de commande est donnée par (De Schutter & al., 1988):

$$\begin{aligned} \tau = & (V_r(q, \dot{q}) + F_r) \dot{q}_r + V_{re}(q, \dot{q}) \dot{q}_e + G_r(q) + H_r^{-1}(q) u \\ & + H_r^{-1}(q) H_{re}(q) [V_{er}(q, \dot{q}) \dot{q}_r + (V_e(q, \dot{q}) + F_e) \dot{q}_e + G_e(q) + K_e q_e] \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $u$  est la nouvelle variable de commande. Puis, les propriétés 5a et 5c ainsi que les propriétés 6, 7, 8, 9, 10 et 13 permettent de réexprimer la loi de commande (4.1) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \tau = & (V_r(q, \dot{q}) + F_r) \dot{q}_r + V_{re}(q, \dot{q}) \dot{q}_e + G_r(q) + (M_r(q) - M_{re}(q_r) M_e^{-1} M_{re}^T(q_r)) u \\ & - M_{re}(q_r) M_e^{-1} [{}^1V_{er}(q_r, {}^1\dot{q}_r) {}^1\dot{q}_r + F_e \dot{q}_e + G_e(q_r) + K_e q_e] \end{aligned} \quad (4.2)$$

**Remarque 4.1:** À cause de la propriété 6, la seule matrice qui doit être inversée dans la loi de commande (4.2) est constante. Cette dernière peut donc être préalablement inversée de façon à ce qu'il n'y ait aucune matrice à inverser lors de l'implantation en temps réel. Ainsi, la loi de commande (4.2) est, à toute fin pratique, du même ordre de complexité de calcul qu'une loi de commande de type couple précalculé régulièrement utilisée pour la commande des manipulateurs rigides.

En appliquant la loi de commande (4.1) à la dynamique décrite par les relations (3.5) et (3.6), puis en utilisant les propriétés 5a et 5b ainsi que les propriétés 6, 7, 8, 9, 10 et 13 nous obtenons

$${}^1\ddot{\mathbf{q}}_r = {}^1\mathbf{u} \quad (4.3)$$

$${}^2\ddot{\mathbf{q}}_r = {}^2\mathbf{u} \quad (4.4)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_e = -\mathbf{M}_e^{-1} [\mathbf{F}_e \dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e + \mathbf{G}_e(\mathbf{q}_r) + {}^1\mathbf{V}_{er}(\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r + {}^1\mathbf{M}_{re}^T(\mathbf{q}_r) {}^1\mathbf{u} + {}^2\mathbf{M}_{re}^T {}^2\mathbf{u}] \quad (4.5)$$

où  ${}^1\mathbf{u}$  est un vecteur formé des  $n_r-1$  premiers éléments de  $\mathbf{u}$  et  ${}^2\mathbf{u}$  est le dernier élément de  $\mathbf{u}$ . Les relations (4.3) et (4.4) représentent la dynamique linéarisée du système tandis que la relation (4.5) représente sa dynamique interne ou non observable. Généralement, le système doit être à minimum de phase pour que la partie linéarisée puisse être commandée tout en assurant que la dynamique interne soit bornée (Isidori, 1988). Pour que le système soit à minimum de phase, il suffit de vérifier la stabilité de la dynamique des zéros qui est obtenue en posant  $\mathbf{q}_r = 0$  dans les relations (4.3), (4.4) et (4.5). Ainsi, on peut montrer que le système est à minimum de phase en considérant le changement de variable  $\bar{\mathbf{q}}_e = \mathbf{q}_e + \mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{G}_e(0)$  et en choisissant la fonction de Lyapunov suivante  $v = \frac{1}{2}\dot{\bar{\mathbf{q}}}_e^T \mathbf{M}_e \dot{\bar{\mathbf{q}}}_e + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{K}_e \bar{\mathbf{q}}_e$ . En plus de cela, il est clair que l'on peut facilement trouver une loi de commande linéaire  $\mathbf{u}$  qui assure la stabilité exponentielle de l'erreur entre les CGR et une trajectoire désirée des CGR.

Généralement, l'intérêt n'est pas de trouver une loi de commande qui assure la stabilité de l'erreur de suivi dans l'espace des CGR mais plutôt dans l'espace de travail. Parce que la poutre est flexible, l'espace des CGR et l'espace de travail sont liés non seulement par une relation cinématique mais également par la dynamique de la poutre flexible. On ne peut donc utiliser la cinématique pour transformer la trajectoire désirée, de l'espace de travail à celle des CGR. Pour contourner ce problème plusieurs auteurs (De Luca & Siciliano, 1989; Asada & al., 1990) ont défini des articulations virtuelles qui ont l'avantage d'être liées à l'espace de travail par simple cinématique. Pour être consistant avec la notation adoptée dans ce rapport, nous désignerons les articulations virtuelles par coordonnées généralisée rigides virtuelles (CGRV). Parce que l'on



suppose que la déformation est faible, le vecteur des CGRV peut être approximé par (De Luca & Siciliano, 1989):

$$\bar{\mathbf{q}}_r = \mathbf{q}_r + \Gamma \mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} {}^1\bar{\mathbf{q}}_r \\ {}^2\bar{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{q}_r \\ {}^2\mathbf{q}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ {}^2\Gamma \end{bmatrix} \mathbf{q}_e \quad (4.6)$$

Dans ce cas, si l'on suppose que la cinématique qui lie l'espace de travail à l'espace des CGRV est inversible, la trajectoire désirée peut facilement être transformée d'un espace à l'autre. Le suivi de la trajectoires dans l'espace des CGRV est alors équivalent au suivi de la trajectoire dans l'espace de travail. Dans ce contexte, certains auteurs ont considéré une linéarisation par retour d'état avec comme sortie, le vecteur des CGRV (Lucibello & Di Benedetto, 1993). Malheureusement, le système est alors à non minimum de phase. La dynamique interne est donc non bornée.

Pour contourner ce problème, nous utilisons une approche différente de celle proposée dans (Lucibello & Di Benedetto, 1993). En effet, dans la prochaine section, nous présentons deux algorithmes pour obtenir les trajectoires désirées des CGF et des CGR qui correspondent à la trajectoire désirée des CGRV. Ensuite nous considérerons une loi de commande qui garantit la stabilité asymptotique globale des erreurs de suivi des CGR, des CGF et des CGRV.

## 5. CALCUL DES TRAJECTOIRES DÉSIRÉES

Considérons maintenant le problème consistant à obtenir les trajectoires désirées des CGR et des CGF qui correspondent à la trajectoire désirée des CGRV que l'on suppose lisse et uniformément bornée. Pour résoudre ce problème, réexprimons d'abord la relation (4.6) par rapport aux coordonnées généralisées désirées. De cette relation, nous obtenons

$$\mathbf{q}_r^d = \bar{\mathbf{q}}_r^d - \Gamma \mathbf{q}_e^d = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{q}_r^d \\ {}^2\mathbf{q}_r^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d \\ {}^2\bar{\mathbf{q}}_r^d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ {}^2\Gamma \end{bmatrix} \mathbf{q}_e^d \quad (5.1)$$

Puis, en remplaçant (4.3) et (4.4) dans (4.5) et en réexprimant par rapport aux coordonnées généralisées désirées nous avons

$$\ddot{\mathbf{q}}_e^d = -\mathbf{M}_e^{-1} \left[ \mathbf{F}_e \dot{\mathbf{q}}_e^d + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e^d + \mathbf{G}_e(\mathbf{q}_r^d) + {}^1V_{er}(\mathbf{q}_r^d, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^d) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^d + {}^1\mathbf{M}_{re}^T(\mathbf{q}_r^d) {}^1\ddot{\mathbf{q}}_r^d + {}^2\mathbf{M}_{re}^T \ddot{\mathbf{q}}_r^d \right] \quad (5.2)$$

La trajectoire désirée des CGRV étant connue, il suffit de résoudre les relations (5.1) et (5.2) pour obtenir les trajectoires désirées des CGR et des CGF correspondantes. Pour ce faire, on remplace (5.1) dans (5.2) et on suppose que la matrice  $(M_e^{-2}M_{re}^{T-2}\Gamma)$  est non singulière. Les propriétés 7, 10 et 13 nous permettent alors d'obtenir l'équation d'état suivante:

$$\dot{\mathbf{x}}^d = A\dot{\mathbf{x}}^d + B\mathbf{f}^d(\mathbf{q}_e^d, t) \quad , \quad \mathbf{q}_e^d = C\mathbf{x}^d \quad (5.3)$$

où

$$\mathbf{x}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_e^d \\ \dot{\mathbf{q}}_e^d \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -(M_e^{-2}M_{re}^{T-2}\Gamma)^{-1}K_e & -(M_e^{-2}M_{re}^{T-2}\Gamma)^{-1}F_e \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -(M_e^{-2}M_{re}^{T-2}\Gamma)^{-1} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T,$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^d(\mathbf{q}_e^d, t) = & {}^2M_{re}^T \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_r^d + \bar{f}_0({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d(t), t) + \bar{f}_1({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d(t), t) \sin({}^2\bar{\mathbf{q}}_r^d(t) - 2\Gamma\mathbf{q}_e^d) + \bar{f}_2({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d(t), t) \cos({}^2\bar{\mathbf{q}}_r^d(t) - 2\Gamma\mathbf{q}_e^d) \\ & + \bar{f}_3({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d(t), t) \sin({}^2\bar{\mathbf{q}}_r^d(t) - 2\Gamma\mathbf{q}_e^d) + \bar{f}_4({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d(t), t) \cos({}^2\bar{\mathbf{q}}_r^d(t) - 2\Gamma\mathbf{q}_e^d) \end{aligned} \quad (5.4)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{f}_0({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d, t) &= M_0^T({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d) \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_r^d(t) + V_0({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_r^d(t)) \dot{\bar{\mathbf{q}}}_r^d(t), \\ \bar{f}_1({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d, t) &= M_1^T({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d) \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_r^d(t) + V_1({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_r^d(t)) \dot{\bar{\mathbf{q}}}_r^d(t) + G_1({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d), \\ \bar{f}_2({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d, t) &= M_2^T({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d) \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_r^d(t) + G_2({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d) + V_2({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_r^d(t)) \dot{\bar{\mathbf{q}}}_r^d(t), \\ \bar{f}_3({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d, t) &= V_3({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_r^d(t)) \dot{\bar{\mathbf{q}}}_r^d(t), \\ \bar{f}_4({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d, t) &= V_4({}^1\bar{\mathbf{q}}_r^d, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_r^d(t)) \dot{\bar{\mathbf{q}}}_r^d(t). \end{aligned}$$

L'équation différentielle (5.3) possède un ensemble de solutions uniques puisque  $\mathbf{f}^d(\mathbf{q}_e^d, t)$  est uniformément bornée et globalement Lipschitz par rapport à  $\mathbf{q}_e^d$ . En effet  $\mathbf{f}^d(\mathbf{q}_e^d, t)$  dépend de  $t$  par l'entremise de la trajectoire désirée des CGRV qui est supposée uniformément bornée et dépend de  $\mathbf{q}_e^d$  par l'entremise de fonctions sinusoïdales. La trajectoire désirée des CGF peut donc être obtenue en solutionnant cette équation différentielle. Cette dernière est malheureusement non linéaire et instable parce que le système est à non minimum de phase par rapport aux CGRV. Dans ce contexte, la méthode causale anti-causale proposée par Kwon & Book (1994) peut être utilisée de façon itérative pour obtenir une solution bornée de l'équation. En effet, la méthode de Kwon & Book (1994) est basée sur le principe qu'il existe une transformation de similarité telle que

l'équation d'état (5.3) puisse être réexprimée sous la forme suivante:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_s^d = \bar{\mathbf{A}}_s \bar{\mathbf{x}}_s^d + \bar{\mathbf{B}}_s \mathbf{f}^d(\mathbf{q}_e^d(t), t) \quad (5.5)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_u^d = \bar{\mathbf{A}}_u \bar{\mathbf{x}}_u^d + \bar{\mathbf{B}}_u \mathbf{f}^d(\mathbf{q}_e^d(t), t) \quad (5.6)$$

$$\mathbf{q}_e^d = \mathbf{C}\mathbf{x}^d = \mathbf{C}(\bar{\mathbf{C}}_s \bar{\mathbf{x}}_s^d + \bar{\mathbf{C}}_u \bar{\mathbf{x}}_u^d) \quad (5.7)$$

où  $\bar{\mathbf{A}}_s$  est une matrice caractérisée uniquement par des valeurs propres à partie réelle négative ou nulle et  $\bar{\mathbf{A}}_u$  est une matrice caractérisée uniquement par des valeurs propres à partie réelle positive.

La solution causale de l'équation différentielle (5.5) est alors obtenue en imposant une condition initiale  $\bar{\mathbf{x}}_s^d(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_{s0}^d$  et la solution anti-causale de l'équation (5.6) est obtenue en imposant une condition finale  $\bar{\mathbf{x}}_u^d(t_f) = \bar{\mathbf{x}}_{uf}^d$ . Nous avons donc

$$\bar{\mathbf{x}}_s^d(t) = e^{\bar{\mathbf{A}}_s(t-t_0)} \bar{\mathbf{x}}_{s0}^d + \int_{t_0}^t e^{\bar{\mathbf{A}}_s(t-\tau)} \bar{\mathbf{B}}_s \mathbf{f}^d(\mathbf{q}_e^d(\tau), \tau) d\tau \quad (5.8)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_u^d(t) = e^{\bar{\mathbf{A}}_u(t-t_f)} \bar{\mathbf{x}}_{uf}^d + \int_{t_f}^t e^{\bar{\mathbf{A}}_u(t-\tau)} \bar{\mathbf{B}}_u \mathbf{f}^d(\mathbf{q}_e^d(\tau), \tau) d\tau \quad (5.9)$$

Pour faciliter l'intégration par des méthodes numériques, les changements de variables  $t = t_f - t^*$  et  $\tau = t_f - \tau^*$  sont appliqués à la relation (5.9) de sorte que

$$\bar{\mathbf{x}}_u^d(t_f - t^*) = e^{-\bar{\mathbf{A}}_u t^*} \bar{\mathbf{x}}_{uf}^d - \int_0^{t^*} e^{-\bar{\mathbf{A}}_u(t_f - \tau^*)} \bar{\mathbf{B}}_u \mathbf{f}^d(\mathbf{q}_e^d(t_f - \tau^*), t_f - \tau^*) d\tau^* \quad (5.10)$$

Parce que les équations (5.8) et (5.10) dépendent implicitement de  $\mathbf{q}_e^d$ , une solution peut être obtenue de façon itérative. Cependant, selon la nature de la trajectoire désirée des CGRV, la solution cherchée peut être périodique ou non périodique.

### 5.1 Solution non périodique

Lorsque la trajectoire désirée des CGRV est non périodique, on suppose qu'elle est définie dans l'intervalle  $[t_0, t_f]$  où  $t_0$  est le temps initial et  $t_f$  est le temps final. On impose alors des conditions initiales et finales nulles et on utilise les relations (5.8) et (5.10) de façon itérative pour trouver une solution bornée de l'équation d'état (5.3). Cette procédure est résumée par l'algorithme 5.1.

**Algorithme 5.1:**

**ÉTAPE 1)** Trouver la transformation de similarité  $Q$  telle que

$$AQ = Q \begin{bmatrix} \bar{A}_s & 0 \\ 0 & \bar{A}_u \end{bmatrix}$$

où  $A$  est donnée à la relation (5.3),  $\bar{A}_s$  est caractérisée uniquement par des valeurs propres à partie réelle négative ou nulle et  $\bar{A}_u$  est caractérisée uniquement par des valeurs propres à partie réelle positive. Cette transformation peut être obtenue par diagonalisation de la matrice  $A$ .

**ÉTAPE 2)** Calculer la forme similaire donnée par les équations (5.5) à (5.7) en utilisant les relations suivantes:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_s & 0 \\ 0 & \bar{A}_u \end{bmatrix} = Q^{-1}AQ, \quad \begin{bmatrix} \bar{B}_s \\ \bar{B}_u \end{bmatrix} = Q^{-1}B \quad \text{et} \quad [\bar{C}_s \quad \bar{C}_u] = CQ$$

où  $A$  et  $B$  sont données à la relation (5.3).

**ÉTAPE 3)** Poser  $k = 0$  et  $q_e^{d(0)}(t) = 0$ .

**ÉTAPE 4)** Calculer, pour  $t \in [t_0 \quad t_f]$ , la solution de l'itération  $k+1$  à l'aide des relations suivantes:

$$\bar{x}_s^{d(k+1)}(t) = \int_{t_0}^t e^{\bar{A}_s(t-\tau)} \bar{B}_s f^d(q_e^{d(k)}(\tau), \tau) d\tau \quad (5.11)$$

$$\bar{x}_u^{d(k+1)}(t_f - t^*) = - \int_0^{t^*} e^{-\bar{A}_u(t^*-\tau)} \bar{B}_u f^d(q_e^{d(k)}(t_f - \tau^*), t_f - \tau^*) d\tau^* \quad (5.12)$$

$$x^{d(k+1)}(t) = \bar{C}_s \bar{x}_s^{d(k+1)}(t) + \bar{C}_u \bar{x}_u^{d(k+1)}(t) \quad (5.13)$$

$$q_e^{d(k+1)} = Cx^{d(k+1)}(t). \quad (5.14)$$

**ÉTAPE 5)** Poser  $k = k + 1$  et retourner à l'ÉTAPE 4). □

Voyons maintenant une condition suffisante pour que l'algorithme 5.1 converge.

**Proposition 5.1:** *Si on suppose que la trajectoire désirée des CGRV est lisse et si on définit*

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \gamma \mathbf{B}\mathbf{B}^T \\ -\gamma \mathbf{C}^T \mathbf{C} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

et

$$\gamma = \sup_t \left[ \sigma_{\max} \left( \frac{\partial \mathbf{f}^d(\mathbf{q}_e^d(t), t)}{\partial \mathbf{q}_e^d} \right) \right] \quad (5.16)$$

où  $\sigma_{\max}([\cdot])$  est la plus grande valeur singulière de  $[\cdot]$ , alors, lorsque  $k \rightarrow \infty$ , l'algorithme 5.1 fait converger  $\mathbf{x}^{d(k)}(t)$  vers une solution lisse et uniformément bornée de l'équation différentielle (5.3) à condition que les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  et de  $\mathbf{H}$  ont toutes une partie réelle non nulle.

**Remarque 5.1:** *Selon les conditions de la proposition 5.1, l'algorithme 5.1 converge après un nombre infini d'itérations. Pour implanter cet algorithme, il faudra évidemment interrompre la procédure après un nombre fini d'itérations ou selon la norme de la différence entre les solutions aux itérations  $k+1$  et  $k$ .*

Pour établir la preuve de la proposition 5.1, nous avons besoin du résultat suivant (Boyd & al., 1989) qui donne une façon de vérifier que la norme infinie d'une matrice de transfert est plus petite qu'un certain facteur.

**Lemme 5.1:** *Soit une représentation d'état  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  ayant comme matrice de transfert  $\mathbf{G}(s)$ . Dans ce contexte, si  $\gamma$  est une constante positive et que  $\mathbf{H}$  est définie par la relation (5.15), alors,*

- 1)  $\gamma \|\mathbf{G}\|_{\infty} < 1$  ssi  $\mathbf{A}$  est Hurwitz et  $\mathbf{H}$  n'a pas de valeurs propres à partie réelle nulle;
- 2)  $\gamma \|\mathbf{G}\|_{L_{\infty}} < 1$  ssi  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{H}$  n'ont pas de valeurs propres à partie réelle nulle.

**Remarque 5.2:** La définition de  $\|G\|_{L_\infty}$  diffère légèrement de celle de  $\|G\|_\infty$ . En effet,  $\|G\|_\infty$  existe ssi les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle négative tandis que  $\|G\|_{L_\infty}$  existe ssi les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle non nulle.

**Preuve de la proposition 5.1:** La preuve de la proposition sera établie à l'aide du théorème de contraction (Khalil, 1992, pp. 70). En effet l'algorithme 5.1 peut être vu comme une recherche de la solution d'un point fixe de la forme  $q_e^d = T(q_e^d)$  à l'aide de  $q_e^{d(k+1)} = T(q_e^{d(k)})$  avec l'application  $T$  de  $L_2^{n_e}$  à  $L_2^{n_e}$  où  $L_2^{n_e}$  est l'espace des vecteurs de dimension  $n_e$  qui sont à énergie finie. Dans ce contexte la procédure itérative converge vers une solution unique si la condition de contraction suivante

$$\|T(q_e^{d(k)}) - T(q_e^{d(\ell)})\|_e \leq \alpha \|q_e^{d(k)} - q_e^{d(\ell)}\|_e, \quad \alpha < 1$$

est vérifiée avec la norme

$$\|(\cdot)\|_e = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (\cdot)^T(\tau)(\cdot)(\tau) d\tau}$$

qui représente l'énergie de  $(\cdot)$ . D'abord, nous savons que la solution recherchée concerne seulement l'intervalle  $[t_0, t_f]$ . Du point de vue de l'analyse de convergence, les relations (5.11) et (5.12) peuvent donc être remplacées par

$$\bar{x}_s^{d(k+1)}(t) = u_T(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\bar{A}_s(t-\tau)} \bar{B}_s u_s(t-\tau) f_T^d(q_e^{d(k)}(\tau), \tau) d\tau \quad (5.17)$$

$$\bar{x}_u^{d(k+1)}(t) = u_T(t) \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{\bar{A}_u(t-\tau)} \bar{B}_u u_s(\tau-t) f_T^d(q_e^{d(k)}(\tau), \tau) d\tau \quad (5.18)$$

où  $u_s(t)$  est la fonction échelon,  $u_T(t) = 1$  si  $t \in [t_0, t_f]$  et  $u_T(t) = 0$  ailleurs et  $f_T^d(t) = f^d(t)u_T(t)$ .

Ainsi, les relations (5.13), (5.14), (5.17) et (5.18) impliquent que

$$T(q_e^d)(t) = u_T(t) \int_{-\infty}^{+\infty} [\bar{C}_s e^{\bar{A}_s(t-\tau)} \bar{B}_s u_s(t-\tau) - \bar{C}_u e^{\bar{A}_u(t-\tau)} \bar{B}_u u_s(\tau-t)] f_T^d(q_e^d(\tau), \tau) d\tau$$

Puis, parce que les valeurs propres de  $A$  ont toutes une partie réelle non nulle, le théorème de

convolution et le théorème de Parseval nous permettent d'écrire

$$\|T(\mathbf{q}_e^{d(k)}) - T(\mathbf{q}_e^{d(\ell)})\|_e \leq \|G\|_{L_\infty} \left\| \mathbf{f}_T^{d(k)} - \mathbf{f}_T^{d(\ell)} \right\|_e \quad (5.19)$$

où

$$\|G\|_{L_\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}[G(j\omega)]$$

avec

$$G(j\omega) = C\bar{C}_s[j\omega\mathbf{I} - \bar{A}_s]^{-1}\bar{B}_s + C\bar{C}_u[j\omega\mathbf{I} - \bar{A}_u]^{-1}\bar{B}_u = C[j\omega\mathbf{I} - A]^{-1}B$$

Ensuite, de la relation (5.4) et du théorème des accroissements finis ("mean value theorem"), nous avons

$$\left\| \mathbf{f}_T^{d(k)} - \mathbf{f}_T^{d(\ell)} \right\|_e \leq \gamma \left\| \mathbf{q}_e^{d(k)} - \mathbf{q}_e^{d(\ell)} \right\|_e \quad (5.20)$$

où  $\gamma$  est donnée par la relation (5.16). À partir des relations (5.19) et (5.20), nous obtenons la condition de contraction suivante

$$\gamma \|G\|_{L_\infty} < 1 \quad (5.21)$$

En général, la norme  $L_\infty$  est obtenue par des méthodes graphiques. Par ailleurs, le résultat du lemme 5.1 nous permet de vérifier directement la condition (5.21). La condition de la proposition 5.1 établit donc la convergence de  $\mathbf{q}_e^{d(k)}$  vers la solution unique de  $\mathbf{q}_e^d$  dans  $L_2^{n_e}$ . Mais parce que la solution de l'équation différentielle (5.3) est unique dans l'espace des fonctions continues, il s'en suit que dans l'intervalle  $[t_0, t_f]$ ,  $\mathbf{q}_e^{d(k)}$  ne peut converger que dans l'espace des fonctions continues. La solution obtenue est donc continue dans l'intervalle  $[t_0, t_f]$ . Ainsi, la solution est uniformément bornée dans l'intervalle  $[t_0, t_f]$  puisque cet intervalle est compact. À cause de cela, et parce que la trajectoire désirée des CGRV est continue par hypothèse,  $\mathbf{f}^d$  est également continue sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ . Ainsi, à cause des relations (5.11), (5.12) et (5.13), cela implique que lorsque  $k$  tend vers l'infini,  $\mathbf{x}_e^{d(k)}$  tend vers la solution unique de l'équation différentielle (5.3) qui est continue et donc uniformément bornée sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ . Il reste à prouver que la solution obtenue est lisse. Parce que la trajectoire désirée des CGRV est lisse par hypothèse,  $\mathbf{f}^d(\mathbf{q}_e, t)$  est lisse par rapport à  $t$ . Selon les relations (5.11), (5.12), (5.13) et (5.14), il est donc clair que  $\mathbf{x}_e^{d(k+1)}$  et  $\mathbf{q}_e^{d(k+1)}$  sont

continûment dérivables une fois de plus que  $q_e^{d(k)}$  dans l'intervalle  $[t_0, t_f]$ . Par induction, puisqu'à l'étape 3)  $q_e^{d(0)}$  est continue,  $x_e^{d(k)}$  est lisse dans l'intervalle  $[t_0, t_f]$  lorsque  $k$  tend vers l'infini.  $\square$

## 5.2 Solution périodique

Lorsque la trajectoire désirée des CGRV est périodique, on suppose d'une part que sa période correspond à  $T = t_f - t_0$  et d'autre part que les valeurs propres de  $A$  ont toutes une partie réelle non nulle. Pour forcer une solution périodique, on impose alors des conditions initiales et finales égales dans les relations (5.8) et (5.10). On utilise ensuite ces relations de façon itérative pour trouver une solution périodique de l'équation d'état (5.3). Cette procédure est résumée par l'algorithme 5.2.

**Algorithme 5.2:** Identique à l'algorithme 5.1 mise à part les relations (5.11) et (5.12) qui doivent être substituées par

$$\bar{x}_s^{d(k+1)}(t) = e^{\bar{A}_s(t-t_0)} \bar{x}_{s0}^{d(k+1)} + \int_{t_0}^t e^{\bar{A}_s(t-\tau)} \bar{B}_s f^d(q_e^{d(k)}(\tau), \tau) d\tau \quad (5.22)$$

$$\bar{x}_u^{d(k+1)}(t_f - t^*) = e^{-\bar{A}_u t^*} \bar{x}_{uf}^{d(k+1)} - \int_0^{t^*} e^{-\bar{A}_u(t^*-\tau^*)} \bar{B}_u f^d(q_e^{d(k)}(t_f - \tau^*), t_f - \tau^*) d\tau^* \quad (5.23)$$

où les conditions initiales sont données par les relations suivantes

$$\bar{x}_{s0}^{d(k+1)} = \left[ \left( \mathbf{I} - e^{\bar{A}_s T} \right)^{-1} \int_0^T e^{\bar{A}_s(T-\tau)} \bar{B}_s f^d(q_e^{d(k)}(\tau + t_0), \tau + t_0) d\tau \right]$$

et

$$\bar{x}_{uf}^{d(k+1)} = - \left[ \left( \mathbf{I} - e^{-\bar{A}_u T} \right)^{-1} \int_0^T e^{-\bar{A}_u(T-\tau^*)} \bar{B}_u f^d(q_e^{d(k)}(T - \tau^*), T - \tau^*) d\tau^* \right]$$

**Proposition 5.2:** Identique à la proposition 5.1 mais en considérant l'algorithme 5.2.

**Preuve de la proposition 5.2:** Une fois de plus, la preuve de la proposition sera établie à l'aide du théorème de contraction. Cependant, nous considérons l'application  $T: L_2^n[t_0, t_f] \rightarrow L_2^n[t_0, t_f]$  où



$L_2^{n_e} [t_0 t_f]$  est l'espace des vecteurs de dimension  $n_e$  qui sont de puissance finie dans l'intervalle  $[t_0 t_f]$ . Dans ce contexte, nous considérons la norme

$$\|(\cdot)\|_{eT} = \frac{1}{T} \sqrt{\int_{t_0}^{t_f} (\cdot)^T(\tau)(\cdot)(\tau)d\tau}$$

qui représente la puissance de  $(\cdot)$ . Parce que les valeurs propres de  $A$  ont toutes une partie réelle non nulle, les valeurs propres de  $e^{AT}$  sont certainement toutes différentes de un. À cause de cela,  $I - e^{AT}$  est non singulière et cela implique que la solution périodique  $q_e^{d(k+1)}$  est unique (Deo, & Raghavendra, 1980, pp.95) à chaque itération. Cette solution continue peut donc être obtenue de façon tout à fait équivalente si on exprime  $f^{d(k)}$  et  $q_e^{d(k+1)}$  sous forme de séries de Fourier. Dans ce cas, nous savons que les vecteurs de coefficients des séries sont liées par la relation suivante:

$$a_n^{(k+1)} = G(nj\omega) b_n^{(k)}$$

où  $a_n^{(k+1)}$  et  $b_n^{(k)}$  sont respectivement les vecteurs de coefficients des séries  $q_e^{d(k+1)}$  et  $f^{d(k)}$ . Ainsi, le théorème de Parseval nous permet d'écrire

$$\|T(q_e^{d(k)}) - T(q_e^{d(\ell)})\|_{eT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|a_n^{(k+1)} - a_n^{(\ell+1)}\|_2 \leq \|G\|_{L_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|b_n^{(k)} - b_n^{(\ell)}\|_2 = \|G\|_{L_\infty} \| [f^{d(k)} - f^{d(\ell)}] \|_{eT}$$

qui est similaire à ce que nous avons obtenu à l'expression (5.19). Le reste de la démonstration est identique à ce qui a été présenté pour la démonstration de la proposition 5.1.  $\square$

Les algorithmes 5.1 et 5.2 nous permettent ainsi de trouver une trajectoire désirée des CGF qui est lisse, uniformément bornée et qui correspond à la trajectoire désirée des CGRV si la condition de convergence des propositions 5.1 et 5.2 est satisfaite. Si ce n'est pas le cas, il suffit de considérer des trajectoires désirées impliquant des vitesses et des accélérations plus faibles ou tout simplement, un temps final plus grand. Le facteur  $\gamma$ , donné par la relation (5.16), s'en trouvera alors nécessairement réduit et la condition de convergence pourra être satisfaite.

Une fois la trajectoire désirée des CGF obtenue, il suffit d'utiliser la relation (5.1) pour obtenir la trajectoire désirée des CGR correspondante. La méthode décrite dans cette section permet donc

de trouver les trajectoires désirées des CGR et des CGF qui sont lisses, uniformément bornées et qui solutionnent les équations (5.1) et (5.2). Dans la prochaine section, nous considérerons une loi de commande qui assure la stabilité asymptotique globale des erreurs de suivi des trajectoires désirées des CGR, des CGF et des CGRV.

## 6. LOI DE COMMANDE

Dans cette section, on suppose que la trajectoire désirée des CGRV est connue, lisse et uniformément bornée. On suppose également que les trajectoires désirées des CGR et des CGF sont lisses, uniformément bornées et qu'elles solutionnent les relations (5.1) et (5.2). Finalement, on suppose que toutes les variables d'état du système sont disponibles soit par l'entremise d'appareils de mesure soit par reconstruction. D'abord, la première loi de commande qui est appliquée au système est la commande linéarisante donnée par la relation (4.2). La dynamique du système est alors représentée par les relations (4.3), (4.4) et (4.5). Comme seconde loi de commande, nous considérons

$${}^1u = {}^1\ddot{q}_r^d + {}^1K_{rd} \dot{{}^1\tilde{q}}_r + {}^1K_{rp} {}^1\tilde{q}_r \quad (6.1)$$

où  ${}^1q_r^d$  est la trajectoire désirée des  $n_r-1$  premières CGR,  ${}^1\tilde{q}_r = {}^1q_r^d - {}^1q_r$  est l'erreur de suivi et  ${}^1K_{rd}$  ainsi que  ${}^1K_{rp}$  sont des matrices de gains qui doivent être symétriques et définies positives. Dans ce contexte, il est clair que l'erreur de suivi des  $n_r-1$  premières CGR est globalement exponentiellement stable et qu'elle peut être représentée par l'équation d'état suivante:

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 \quad (6.2)$$

où le polynôme caractéristique de la matrice  $A_1$  est Hurwitz et  $x_1^T = [{}^1\tilde{q}_r^T \quad \dot{{}^1\tilde{q}}_r^T]$ . La dynamique qui reste à commander est alors représentée par les relations (4.4) et (4.5). Parce que les trajectoires désirées des CGR et des CGF sont solutions des relations (5.1) et (5.2), la dynamique des erreurs de suivi est obtenue en soustrayant  ${}^2\ddot{q}_r^d$  de part et d'autre de (4.4) et en soustrayant (4.5) de (5.2). Cette dynamique est donnée par l'équation d'état suivante

$$\dot{x}_2 = Ax_2 + B({}^2\ddot{q}_r^d - {}^2u) - \bar{B}g_0(t) \quad (6.3)$$

où

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} {}^2\tilde{q}_r \\ {}^2\dot{\tilde{q}}_r \\ \tilde{q}_e \\ \dot{\tilde{q}}_e \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{M}_e^{-1}\mathbf{K}_e & -\mathbf{M}_e^{-1}\mathbf{F}_e \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_e^{-1} {}^2\mathbf{M}_{re}^T \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_e^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}_0(t) = {}^1\mathbf{M}_{re}^T(\mathbf{q}_r^d) {}^1\ddot{\mathbf{q}}_r^d - {}^1\mathbf{M}_{re}^T(\mathbf{q}_r) {}^1\mathbf{u} + {}^1\mathbf{V}_{er}(\mathbf{q}_r^d, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^d) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^d - {}^1\mathbf{V}_{er}(\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{G}_e(\mathbf{q}_r^d) - \mathbf{G}_e(\mathbf{q}_r)$$

En remplaçant  ${}^1\dot{\mathbf{q}}_r = {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^d - {}^1\dot{\tilde{q}}_r$  et en utilisant la propriété 11,  $\mathbf{g}_0(t)$  peut être réexprimé sous la forme suivante:

$$\mathbf{g}_0(t) = {}^1\mathbf{M}_{re}^T(\mathbf{q}_r) ({}^1\ddot{\mathbf{q}}_r^d - {}^1\mathbf{u}) + 2 {}^1\mathbf{V}_{er}(\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^d) {}^1\dot{\tilde{q}}_r - {}^1\mathbf{V}_{er}(\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\tilde{q}}_r) {}^1\dot{\tilde{q}}_r \\ {}^1\mathbf{M}_{re}^T(\mathbf{q}_r^d) {}^1\ddot{\mathbf{q}}_r^d - {}^1\mathbf{M}_{re}^T(\mathbf{q}_r) {}^1\ddot{\mathbf{q}}_r^d + {}^1\mathbf{V}_{er}(\mathbf{q}_r^d, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^d) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^d - {}^1\mathbf{V}_{er}(\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{G}_e(\mathbf{q}_r^d) - \mathbf{G}_e(\mathbf{q}_r)$$

La perturbation  $\mathbf{g}_0(t)$  est bornée par rapport à  $\mathbf{x}_1$  et uniformément bornée par rapport à  $t$  puisqu'elle dépend seulement des trois ensembles de variables suivants: 1) la trajectoire désirée qui est supposée uniformément bornée; 2) les vecteurs  ${}^1\mathbf{q}_r$  et  ${}^1\dot{\mathbf{q}}_r$  qui peuvent être réexprimés en fonction de  $\mathbf{x}_1$  et de la trajectoire désirée; 3) le scalaire  ${}^2q_r(t)$  qui est sollicité seulement par l'entremise de fonctions sinusoidales (propriétés 7, 10 et 13).

**Remarque 6.1:** Dans la relation (6.3), la perturbation  $\mathbf{g}_0$  ne satisfait pas la condition de reproductibilité ("matching condition"). À cause de cela, les méthodes standards de commande robuste non-linéaire (Khalil, 1992, p.304) ne peuvent être utilisées pour assurer la stabilité asymptotique du système.

On considère alors une troisième loi de commande qui a la forme suivante

$${}^2u = {}^2\ddot{q}_r^d + \mathbf{K}\mathbf{x}_2 \quad (6.4)$$

Cette loi de commande nous permet d'obtenir le résultat suivant.

**Proposition 6.1:** Si le couple  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  de la relation (6.3) est stabilisable et si la matrice de gains  $\mathbf{K}$  associée à la loi de commande (6.4) est choisie de façon à ce que le polynôme caractéristique

de  $\bar{A} = A - BK$  soit Hurwitz, alors, la dynamique des erreurs de suivi des CGR, des CGF et des CGRV est ultimement bornée.

**Preuve de la proposition 6.1:** Parce que le polynôme caractéristique de  $A - BK$  est Hurwitz, les relations (6.3) et (6.4) décrivent un système linéaire exponentiellement stable perturbé par  $g_0(t)$ . Puis, nous savons que cette perturbation est uniformément bornée par rapport à  $t$  et bornée par rapport à  $x_1$ . Parce que  $x_1$  est exponentiellement stable, sa contribution à la perturbation  $g_0(t)$  tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Ainsi, il s'en suit que  $x_2$  est ultimement bornée (Khalil, 1992, pp. 201). Les erreurs de suivi des CGR et des CGF données par  $x^T = [x_1^T \quad x_2^T]$  sont par conséquent ultimement bornées. Enfin, parce que les CGRV sont une combinaison linéaire des CGR et des CGF, la dynamique des erreurs de suivi des CGR, des CGF et des CGRV est ultimement bornée.  $\square$

La proposition 6.1 nous assure donc que les erreurs de suivi sont ultimement bornées. Malheureusement, la borne ultime de l'erreur pourra, dans certains cas, être très grande. Dans ce contexte, le système pourra se comporter, à toute fin pratique, comme un système instable. À la section 7, un exemple illustrant cette situation sera présenté. Pour éviter ce problème, nous allons maintenant contraindre le choix de la matrice des gains de la loi de commande (6.4) de façon à obtenir une stabilité asymptotique globale des erreurs de suivi. Pour arriver à cela, utilisons d'abord les propriétés 7, 10 et 13 pour réexprimer  $g_0(t)$  de la façon suivante:

$$g_0(t) = g_1(t) + g_2(t) \quad (6.5)$$

où

$$\begin{aligned} g_1(t) = & {}^1M_{re}^T(q_r)({}^1\ddot{q}_r - {}^1u) + 2{}^1V_{er}(q_r, {}^1\dot{q}_r) {}^1\ddot{q}_r - {}^1V_{er}(q_r, {}^1\dot{q}_r) {}^1\dot{q}_r + \bar{f}_0({}^1q_r, t) - \bar{f}_0({}^1q_r, t) \\ & + (\bar{f}_1({}^1q_r, t) - \bar{f}_1({}^1q_r, t)) \sin({}^2q_r) + (\bar{f}_2({}^1q_r, t) - \bar{f}_2({}^1q_r, t)) \cos({}^2q_r) \\ & + (\bar{f}_3({}^1q_r, t) - \bar{f}_3({}^1q_r, t)) \sin({}^2q_r) + (\bar{f}_4({}^1q_r, t) - \bar{f}_4({}^1q_r, t)) \cos({}^2q_r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_2(t) = & \bar{f}_1({}^1\mathbf{q}_r^d, t)(\sin({}^2q_r^d) - \sin({}^2q_r)) + \bar{f}_2({}^1\mathbf{q}_r^d, t)(\cos({}^2q_r^d) - \cos({}^2q_r)) \\ & + \bar{f}_3({}^1\mathbf{q}_r^d, t)(\sin(2{}^2q_r^d) - \sin(2{}^2q_r)) + \bar{f}_4({}^1\mathbf{q}_r^d, t)(\cos(2{}^2q_r^d) - \cos(2{}^2q_r)) \end{aligned}$$

et où les  $\bar{f}_i$  sont données à la relation (5.4) et dépendent du temps seulement par l'entremise de la trajectoire désirée. Nous allons maintenant réexprimer  $\mathbf{g}_1$  et  $\mathbf{g}_2$  de façon à faire ressortir leurs dépendances respectives aux erreurs de suivi des  $n_r-1$  premières et de la dernière CGR. Ainsi, en remplaçant (6.1) dans l'expression de  $\mathbf{g}_1$  et en utilisant le théorème des accroissements finis ("mean value theorem"), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, t) = & -{}^1\mathbf{M}_{re}^T(\mathbf{q}_r)({}^1\mathbf{K}_{rd}{}^1\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r + {}^1\mathbf{K}_{rp}{}^1\tilde{\mathbf{q}}_r) + 2{}^1\mathbf{V}_{er}(\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^d) {}^1\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r - {}^1\mathbf{V}_{er}(\mathbf{q}_r, {}^1\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r) {}^1\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r + [\mathbf{Q}_0(t) \\ & + \mathbf{Q}_1(t) \sin({}^2q_r) + \mathbf{Q}_2(t) \cos({}^2q_r) + \mathbf{Q}_3(t) \sin(2{}^2q_r) + \mathbf{Q}_4(t) \cos(2{}^2q_r)] {}^1\tilde{\mathbf{q}}_r \end{aligned} \quad (6.6)$$

où

$$\mathbf{Q}_i(t) = \left. \frac{\partial \bar{f}_i({}^1\mathbf{q}_r^d, t)}{\partial {}^1\mathbf{q}_r^d} \right|_{{}^1\mathbf{q}_r^d = \mathbf{z}_i(t)}$$

et

$$\mathbf{z}_i(t) \in \{ \mathbf{z}(t) | \mathbf{z}(t) = \alpha {}^1\mathbf{q}_r^d(t) + (1-\alpha) {}^1\mathbf{q}_r(t); 0 < \alpha < 1 \} = \{ \mathbf{z}(t) | \mathbf{z}(t) = {}^1\mathbf{q}_r^d(t) - (1-\alpha) {}^1\tilde{\mathbf{q}}_r(t); 0 < \alpha < 1 \}$$

Parce que la trajectoire désirée est supposée uniformément bornée, la propriété 2 implique que

$$\|\mathbf{Q}_i(t)\|_2 \leq \alpha_{0i} + \alpha_{1i} \|{}^1\tilde{\mathbf{q}}_r\|_2 + \alpha_{2i} \|{}^1\tilde{\mathbf{q}}_r\|_2^2$$

et les propriétés 2 et 7 impliquent que

$$\|{}^1\mathbf{M}_{re}(\mathbf{q}_r)\|_2 = \|{}^1\mathbf{M}_{re}(\mathbf{q}_r^d - \tilde{\mathbf{q}}_r)\|_2 \leq \lambda_0 + \lambda_1 \|{}^1\tilde{\mathbf{q}}_r\|_2 + \lambda_2 \|{}^1\tilde{\mathbf{q}}_r\|_2^2$$

où les  $\alpha_{ji}$  et les  $\lambda_j$  sont des constantes positives bornées. Les deux dernières inégalités, la relation (6.6) ainsi que la propriété 12 nous permettent alors d'obtenir l'inégalité suivante:

$$\|\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, t)\|_2 \leq \sum_{i=1}^4 \beta_{2i} \|\mathbf{x}_1(t)\|_2^i \quad (6.7)$$

où les  $\beta_{2i}$  sont des constantes positives bornées. Cette inégalité sera utilisée pour prouver la stabilité asymptotique globale du système. Mais avant de passer à cette étape, utilisons d'abord le théorème des accroissements finis ("mean value theorem") pour réexprimer  $\mathbf{g}_2$  de la façon suivante:

$$\mathbf{g}_2({}^2\tilde{q}_r, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{g}_2(t)}{\partial {}^2q_r^d} \right|_{{}^2q_r^d = z(t)} \quad {}^2\tilde{q}_r = \mathbf{Q}(t) \quad {}^2\tilde{q}_r \quad (6.8)$$

où  $z(t) \in \{\zeta(t) | \zeta(t) = \alpha \quad {}^2q_r^d(t) + (1-\alpha) \quad {}^2q_r(t); 0 < \alpha < 1\}$  et où la matrice  $\mathbf{Q}(t)$  est certainement uniformément bornée puisqu'elle dépend de  $z(t)$  par l'entremise de fonctions sinusoïdales et du temps par l'entremise de la trajectoire désirée qui est supposée uniformément bornée. La dynamique décrite par les relations (6.3), (6.4), (6.5), (6.6) et (6.8) peut alors s'exprimer sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_2 &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}_2 + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{B}}\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, t) \\ y &= \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}_2 \quad , \quad \bar{\mathbf{u}} = -\mathbf{g}_2(y, t) \end{aligned} \quad (6.9)$$

où  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$  et  $\bar{\mathbf{C}} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$ . Pour faire ressortir le coeur commandable et observable de la dynamique décrite par (6.9) nous considérons maintenant une transformation de similarité  $[\mathbf{x}_{\bar{c}}^T \quad \mathbf{x}_{co}^T \quad \mathbf{x}_{c\bar{o}}^T]^T = \mathbf{Q}\mathbf{x}$  telle que (Chen, 1984):

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}} = \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}}\bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \quad (6.10)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{co} = \bar{\mathbf{A}}_{co}\bar{\mathbf{x}}_{co} + \bar{\mathbf{A}}_{21}\bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} + \bar{\mathbf{B}}_{co}\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{B}}_{co}\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, t) \quad (6.11)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{c\bar{o}} = \bar{\mathbf{A}}_{c\bar{o}}\bar{\mathbf{x}}_{c\bar{o}} + \bar{\mathbf{A}}_{31}\bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} + \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{x}}_{co} + \bar{\mathbf{B}}_{c\bar{o}}\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{B}}_{c\bar{o}}\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, t) \quad (6.12)$$

$$y = \bar{\mathbf{C}}_{co}\bar{\mathbf{x}}_{co} + \bar{\mathbf{C}}_{\bar{c}}\bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \quad , \quad \bar{\mathbf{u}} = -\mathbf{g}_2(y, t) \quad (6.13)$$

où l'indice  $co$  indique la partie commandable et observable, l'indice  $c\bar{o}$  indique la partie commandable et non observable et l'indice  $\bar{c}$  indique la partie non commandable. Dans ce contexte, le résultat suivant nous permet d'assurer la stabilité du système complet en vérifiant seulement la stabilité de la partie commandable et observable.

**Proposition 6.2:** *Si dans la relation (6.9), le polynôme caractéristique de  $\bar{\mathbf{A}}$  est Hurwitz et si la dynamique commandable et observable extraite des relations (6.10) à (6.13) et donnée par*

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{co} &= \bar{\mathbf{A}}_{co}\bar{\mathbf{x}}_{co} + \bar{\mathbf{B}}_{co}\bar{\mathbf{u}} \\ y &= \bar{\mathbf{C}}_{co}\bar{\mathbf{x}}_{co} \quad , \quad \bar{\mathbf{u}} = -\mathbf{g}_2(y, t) \end{aligned} \quad (6.14)$$

est globalement exponentiellement stable, alors, la dynamique des erreurs de suivi des CGR, des CGF et des CGRV est globalement uniformément asymptotiquement stable.

Pour prouver la proposition 6.2, nous avons besoin du résultat suivant qui porte sur la stabilité des systèmes hiérarchiques ou triangulaires.

**Lemme 6.1:** Soit le système dynamique hiérarchique décrit par la relation suivante:

$$\dot{\bar{x}}_1 = f_1(\bar{x}_1, t) \quad , \quad \dot{\bar{x}}_2 = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, t) \quad , \dots , \quad \dot{\bar{x}}_\ell = f_\ell(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_\ell, t) \quad (6.15)$$

où  $f_i$  est une fonction continûment différentiable par rapport à  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i$  et  $t$ . Si,

1) la dynamique suivante est globalement exponentiellement stable

$$\dot{\bar{x}}_1 = f_1(\bar{x}_1, t) \quad , \quad \dot{\bar{x}}_2 = f_2(0, \bar{x}_2, t) \quad , \dots , \quad \dot{\bar{x}}_\ell = f_\ell(0, 0, \dots, \bar{x}_\ell, t) \quad (6.16)$$

2) les matrices suivantes sont uniformément bornées

$$\frac{\partial f_2(0, \bar{x}_2, t)}{\partial \bar{x}_2} \quad , \quad \frac{\partial f_3(0, 0, \bar{x}_3, t)}{\partial \bar{x}_3} \quad , \dots , \quad \frac{\partial f_\ell(0, 0, \dots, \bar{x}_\ell, t)}{\partial \bar{x}_\ell}$$

3) Les inégalités suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned} \|f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, t) - f_2(0, \bar{x}_2, t)\|_2 &\leq \sum_{i=1}^{m_2} \beta_{2i} \|\bar{x}_1\|_2^i \\ &\vdots \\ \|f_\ell(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_\ell, t) - f_\ell(0, 0, \dots, \bar{x}_\ell, t)\|_2 &\leq \sum_{i=1}^{m_\ell} \beta_{\ell i} \left\| \begin{bmatrix} \bar{x}_1^T & \bar{x}_2^T & \dots & \bar{x}_{\ell-1}^T \end{bmatrix} \right\|_2^i \end{aligned} \quad (6.17)$$

où  $\beta_{ji}$  sont des constantes positives ou nulles et  $m_j$  sont des entiers positifs, alors, la dynamique décrite par la relation (6.15) est globalement uniformément asymptotiquement stable.

**Preuve du lemme 6.1:** La preuve du lemme 6.1 est donnée à l'annexe B de ce rapport.

**Preuve de la proposition 6.2:** La proposition 6.2 peut être prouvée en appliquant directement le résultat du lemme 6.1. En effet, en posant  $\bar{x}_1 = x_1$ ,  $\bar{x}_2 = \bar{x}_c$ ,  $\bar{x}_3 = \bar{x}_{co}$ ,  $\bar{x}_4 = \bar{x}_{c\bar{o}}$ ,  $f_1(\bar{x}_1, t) = A_1 \bar{x}_1$ ,  $f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, t) = \bar{A}_c \bar{x}_2$ ,  $f_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t) = \bar{A}_{co} \bar{x}_3 - \bar{B}_{co} Q(t) \bar{C}_{co} \bar{x}_3 - \bar{B}_{co} Q(t) \bar{C}_c \bar{x}_2 +$

$\bar{A}_{21}\bar{x}_2 - \bar{B}_{co}\bar{g}_1(\bar{x}_1, t)$  et  $f_4(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, t) = \bar{A}_{co}\bar{x}_4 + \bar{A}_{31}\bar{x}_2 + \bar{A}_{12}\bar{x}_3 - \bar{B}_{co}Q(t)\bar{C}_c\bar{x}_2 - \bar{B}_{co}Q(t)\bar{C}_{co}\bar{x}_3 - \bar{B}_{co}\bar{g}_1(\bar{x}_1, t)$ , la dynamique décrite par les relations (6.2) et (6.10) à (6.13) est de la même forme que celle décrite par la relation (6.15). Puis, nous savons que les polynômes caractéristiques de  $A_c$  et de  $A_{co}$  sont Hurwitz puisque dans la relation (6.9), le polynôme caractéristique de  $\bar{A}$  est Hurwitz par hypothèse. À cause de cela,  $\dot{\bar{x}}_2 = f_2(0, \bar{x}_2, t)$  et  $\dot{\bar{x}}_4 = f_4(0, 0, 0, \bar{x}_4, t)$  sont globalement exponentiellement stables. Nous savons également que  $\dot{\bar{x}}_1 = f_1(\bar{x}_1, t)$  est globalement exponentiellement stable selon la loi de commande (6.1). Pour ce qui est de la dynamique décrite par  $\dot{\bar{x}}_3 = f_3(0, 0, \bar{x}_3, t)$ , elle est globalement exponentiellement stable par hypothèse puisqu'il s'agit de la dynamique décrite par la relation (6.14). La condition 1) du lemme 6.1 est donc vérifiée. Ensuite, parce que  $Q(t)$  est uniformément bornée et selon la relation (6.7), il est clair que les conditions 2) et 3) du lemme 6.1 sont également vérifiées. La dynamique des erreurs de suivi des CGR et des CGF est donc globalement uniformément asymptotiquement stable. Enfin, la dynamique des erreurs de suivi des CGRV, des CGR et des CGF est également globalement uniformément asymptotiquement stable puisque les CGRV sont une combinaison linéaire des CGR et des CGF. □

La proposition 6.1 nous donne donc une façon simplifiée de vérifier la stabilité asymptotique du système. En effet, ce résultat nous permet d'assurer la stabilité de tout le système en vérifiant seulement la stabilité d'un sous-système beaucoup plus simple. Mais en vérité, cette stabilité peut être vérifiée de façon encore plus simple si on utilise le théorème de passivité. En fait une interprétation particulière de ce théorème est donnée par le lemme suivant.

**Lemme 6.2:** *Soit, le système décrit par la relation (6.14),  $G_{co}(s)$  la matrice de transfert correspondant à la représentation d'état  $(\bar{A}_{co}, \bar{B}_{co}, \bar{C}_{co})$  et  $\gamma$  une constante positive telle que  $\|g_2(y, t)\|_2 \leq \gamma \|y\|_2$ . Dans ce contexte, le système décrit par (6.14) est globalement exponentiellement stable si 1)  $(\bar{A}_{co}, \bar{B}_{co}, \bar{C}_{co})$  est une réalisation minimale et 2)  $\gamma \|G_{co}\|_\infty < 1$ .*



La preuve de ce lemme est donnée sous la forme d'un exemple dans Khalil (1992, pp. 245). Le lecteur pourra cependant remarquer que même si dans cette référence, l'auteur parle de stabilité absolue (globale, uniforme et asymptotique), il n'en demeure pas moins que les conditions invoquées sont suffisantes pour assurer une stabilité exponentielle. Le lecteur pourra également remarquer que contrairement à ce qui est présenté dans Khalil, le système décrit par la relation (6.14) n'est pas carré (ie: le nombre de sorties n'est pas égale au nombre d'entrées). Cette particularité n'affecte pas le résultat donné par le lemme 6.2. En effet, pour contourner ce problème, il suffit de compléter le système par un vecteur de sorties  $y_2$  nul de façon à le rendre carré. Il apparaît dans ce cas que les conditions du lemme 6.2 ne sont modifiées d'aucune façon.

En appliquant directement ce résultat à la proposition 6.2, nous obtenons la proposition suivante qui nous donne une alternative très simple pour vérifier la stabilité du système.

**Proposition 6.3:** *Si le couple  $(A,B)$  de la relation (6.3) est commandable et si les gains de la loi de commande (6.4) sont choisis de façon à ce que*

$$\gamma \|G\|_{\infty} < 1 \quad (6.18)$$

*où  $G(s)$  est la matrice de transfert associée à la partie linéaire de l'équation d'état (6.9),  $\gamma = \sup_t \|Q(t)\|_2$  et  $Q(t)$  est donnée à la relation (6.8), alors, la dynamique des erreurs de suivi des CGR, des CGF et des CGRV est globalement uniformément asymptotiquement stable.*

**Preuve de la proposition 6.3:** Par définition,  $\|G\|_{\infty}$  existe ssi le polynôme caractéristique de  $\bar{A}$  est Hurwitz. La première condition de la proposition 6.2 est donc vérifiée. Il reste à vérifier la stabilité de la dynamique décrite par la relation (6.14). Pour ce faire, il suffit de vérifier les hypothèses du lemme 6.2. D'abord, la réalisation associée à la dynamique décrite par la relation (6.14) est certainement minimale puisqu'elle est commandable et observable. Ensuite, la relation (6.8) nous indique que  $\|g_2(y,t)\|_2 \leq \sup_t \|Q(t)\|_2 \|y\|_2 = \gamma \|y\|_2$ . Il reste donc à vérifier la condition  $\gamma \|G_{co}\|_{\infty} < 1$ .

Parce que la matrice de transfert associée à la partie commandable et observable est la même que celle du système complet et parce qu'elle est insensible aux transformations de similarité, la condition  $\gamma \|G_{co}\|_\infty < 1$  est équivalente à celle de la proposition 6.3.  $\square$

Le problème consiste maintenant à trouver une matrice de gains  $K$  qui satisfasse la condition de stabilité de la proposition 6.3 et qui assure une bonne performance au niveau du suivi de la trajectoire. Pour satisfaire ces deux objectifs, on choisit  $K$  de façon à ce que l'équation caractéristique de  $\bar{A}$  soit

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\Delta_e(\lambda, \eta) \quad (6.19)$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des valeurs propres stables que l'on peut choisir arbitrairement et  $\Delta_e(\lambda, \eta)$  est donnée par

$$\Delta_e(\lambda, \eta) = \prod_{i=1}^{n_e} (\lambda^2 + 2(\xi_{e_i} + \eta)\omega_{e_i}\lambda + \omega_{e_i}^2) \quad (6.20)$$

telle que  $\Delta_e(\lambda, 0)$  est l'équation caractéristique de la matrice suivante

$$A_e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -M_e^{-1}K_e & -M_e^{-1}F_e \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

$\omega_{e_i}$  est donc la fréquence naturelle du  $i^{\text{ème}}$  mode de vibration de la poutre flexible,  $\xi_{e_i}$  est son amortissement naturel et  $\eta$  est l'amortissement additionnel que l'on impose au système. Dans ce contexte, nous obtenons le résultat suivant.

**Proposition 6.4:** *Si le couple  $(A,B)$  de la relation (6.3) est commandable et si la matrice  $K$  de la loi de commande (6.4) est choisie de façon à ce que l'équation caractéristique de  $\bar{A}$  soit donnée par la relation (6.19) avec  $\eta=0$ , alors, la dynamique des erreurs de suivi des CGR, des CGF et des CGRV est globalement uniformément asymptotiquement stable.*

**Preuve de la proposition 6.4:** Pour prouver la stabilité du système, il suffit de vérifier la condition de la proposition 6.3. D'abord, nous savons que  $G(s) = \bar{C}[s\mathbf{I} - \bar{A}]^{-1} \bar{B} = \bar{C}[s\mathbf{I} - (A - BK)]^{-1} \bar{B}$  où  $\bar{A}$  et  $\bar{C}$  sont données à la relation (6.9) et où  $A$  et  $\bar{B}$  sont données à la relation (6.3). Puis, parce que la loi de commande (6.4) est scalaire la matrice  $K = [\lambda_1 \lambda_2 \quad -\lambda_1 - \lambda_2 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]$  est la seule qui fait en sorte que l'équation caractéristique de  $\bar{A}$  est donnée par la relation (6.19) avec  $\eta=0$ . Parce que les derniers éléments de cette matrice de gains sont nuls, la matrice  $\bar{A}$  est triangulaire par blocs et cela implique que  $[s\mathbf{I} - \bar{A}]^{-1}$  est également triangulaire par blocs. Ainsi, selon la structure des matrices  $\bar{B}$  et  $\bar{C}$ , il apparaît que  $G(s) = \mathbf{0}$ . À cause de cela, il est clair que la condition de la proposition 6.3 est satisfaite. □

Le résultat de la proposition 6.4 nous permet donc de trouver facilement une matrice de gains  $K$  qui assure la stabilité asymptotique globale des erreurs de suivi. Le problème est que lorsque  $\eta=0$ , l'amortissement de l'erreur de suivi des CGF est très similaire à l'amortissement naturel de la poutre flexible. Malheureusement, cet amortissement est généralement très faible. En fait, il existe des matériaux qui offrent des amortissements élevés. Cependant, la modélisation de cet amortissement élevé se fait normalement en introduisant la notion de dérivées fractionnaires (Piedboeuf, 1989). Selon l'hypothèse 6, la méthode présentée n'est pas applicable dans ce contexte. On est donc forcé d'utiliser des matériaux impliquant un amortissement naturel très faible qui peut alors être modélisé par un simple frottement visqueux linéaire.

Pour contourner ce problème, il suffit simplement de choisir un amortissement additionnel  $\eta$  désiré, de calculer la matrice de gains  $K$  correspondante et de vérifier la condition de la proposition 6.3 en appliquant directement le résultat du lemme 5.1. Si la condition est satisfaite, la stabilité du système est assurée. Dans le cas contraire, il serait souhaitable d'obtenir la plage d'amortissement additionnel qui assure la stabilité du système. Il suffirait alors de choisir l'amortissement additionnel désiré dans cette plage. Parce que la condition de stabilité de la

proposition 6.3 peut être transformée en un test de positivité d'un polynôme, la plage de stabilité peut être trouvée de façon exacte à l'aide d'une méthode d'étude de stabilité généralisée proposée par Saydy & al. (1990). En effet, cette méthode permet entre autres, pour un polynôme paramétrisé par un facteur  $r$ , de trouver la plage de  $r$  qui est telle que les racines du polynôme sont dans une région de stabilité choisi. Dans notre cas, la positivité du polynôme est assurée en choisissant comme région de stabilité tout le plan complexe à l'exception de l'axe réel positif. Malheureusement, cette méthode qui est expliquée plus en détails dans (Bigras & al. 1994), nécessite une quantité très importante de manipulations symboliques. Pour cette raison, une méthode par essai erreur peut être avantageuse surtout si on considère que l'amortissement additionnel choisi est généralement proche de 1 et que la stabilité est garantie lorsqu'il est nul. En effet, cette particularité nous permettra d'obtenir une solution acceptable en démarrant avec l'amortissement additionnel désiré et en diminuant par petit pas jusqu'à ce que le critère de stabilité soit satisfait. Cette approche, quoique moins précise, nous permettra d'obtenir une solution légèrement plus conservatrice en seulement quelques itérations.

**Remarque 6.2:** *Le facteur  $\eta$  est un amortissement additionnel que l'on impose à la partie linéaire de la dynamique décrite par la relation (6.9). Parce que cette dynamique est non linéaire,  $\eta$  n'est pas directement lié à l'amortissement des erreurs de suivi. En effet, l'amortissement des erreurs est modulé par la rétroaction non linéaire  $g_2$ . Cette perturbation  $g_2$  peut donc faire augmenter l'amortissement à certains moments et le faire diminuer à certains autres. De plus, l'étude de stabilité est basée sur le cas limite pour lequel  $g_2$  contribue le plus à déstabiliser le système. Normalement, on peut supposer que  $g_2$  sera, le plupart du temps, loin de cette limite. Pour ces raisons, si  $\eta$  est choisi de façon à respecter le critère de stabilité, on peut supposer qu'en moyenne, l'effet de la rétroaction  $g_2$  sur l'amortissement du système ne sera pas significatif.*

## 7. SIMULATION DU CONTRÔLEUR

Pour valider l'approche présentée dans les sections précédentes, nous avons simulé le contrôleur proposé avec le manipulateur planaire illustré par la figure 7.1.

### 7.1 Modélisation du manipulateur

La modélisation du manipulateur a été obtenue à l'aide de la méthode des modes assumés en considérant deux modes de type pseudo-encasté avec charge (Bellezza & al., 1990). De cette modélisation, nous obtenons l'équation dynamique suivante:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= M_{r11} \dot{\ddot{q}}_r + M_{r12} \dot{\ddot{q}}_r + M_{re11} \ddot{q}_{e1} + M_{re12} \ddot{q}_{e2} + \bar{F}_{r1} + f_{r1} \dot{q}_r + G_{r1} \\
 \tau_2 &= M_{r12} \dot{\ddot{q}}_r + M_{r22} \dot{\ddot{q}}_r + M_{re21} \ddot{q}_{e1} + M_{re22} \ddot{q}_{e2} + \bar{F}_{r2} + f_{r2} \dot{q}_r + G_{r2} \\
 0 &= M_{re11} \dot{\ddot{q}}_r + M_{re21} \dot{\ddot{q}}_r + M_{e11} \ddot{q}_{e1} + M_{e12} \ddot{q}_{e2} + \bar{F}_{e1} + f_{e1} \dot{q}_{e1} + G_{e1} \\
 0 &= M_{re12} \dot{\ddot{q}}_r + M_{re22} \dot{\ddot{q}}_r + M_{e21} \ddot{q}_{e1} + M_{e22} \ddot{q}_{e2} + \bar{F}_{e2} + f_{e2} \dot{q}_{e2} + G_{e2}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

où

$$M_{r11} = I_{01} + I_h + I_c + L_1^2(m_h + m_2 + m_c) + L_2^2\left(\frac{m_2}{3} + m_c\right) + L_1L_2(m_2 + 2m_c)c_2 - 2L_1s_2 \sum_{i=1}^2 v_i q_{ei},$$

$$M_{r12} = I_h + I_c + L_2^2\left(\frac{m_2}{3} + m_c\right) + L_1L_2\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right)c_2 - L_1s_2 \sum_{i=1}^2 v_i q_{ei},$$

$$M_{r22} = I_h + I_c + L_2^2\left(\frac{m_2}{3} + m_c\right), \quad M_{re1i} = w_i + L_1c_2v_i, \quad M_{re2i} = w_i,$$

$$\bar{F}_{r1} = -\left[ L_1L_2\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right)s_2 + L_1c_2 \sum_{i=1}^2 v_i q_{ei} \right] (\dot{q}_r^2 + 2\dot{q}_r \dot{q}_r) 2L_1s_2 (\dot{q}_r + \dot{q}_r) \sum_{i=1}^2 v_i \dot{q}_{ei},$$

$$\bar{F}_{r2} = \left[ L_1L_2\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right)s_2 + L_1c_2 \sum_{i=1}^2 v_i q_{ei} \right] \dot{q}_r^2, \quad \bar{F}_{ei} = L_1s_2v_i \dot{q}_r^2,$$

$$G_{r1} = (\bar{L}_1m_1 + L_1(m_h + m_2 + m_c))s_1g + L_2\left(\frac{m_2}{2} + m_c\right)s_{12}g + c_{12}g \sum_{i=1}^2 q_{ei}, \quad G_{ei} = s_{12}v_i g$$

et où  $m_{eij}$ ,  $v_i$  ainsi que  $w_i$  sont données à la relation (3.13),  $k_{eij}$  est donnée à la relation (3.15) et les fonctions de forme  $\phi_i(x_p)$  ainsi que leurs valeurs propres sont données dans Bellezza & al. (1990). Enfin, les paramètres physiques du manipulateur sont donnés dans le tableau 7.1.

Symbole	Valeur	Description
$L_1$	0.5 m	Longueur du premier membre
$m_1$	40 Kg	Masse du premier membre
$I_{o1}$	3.85 Kg m <sup>2</sup>	Moment d'inertie par rapport à la base du premier membre
$\bar{L}_1$	0.15 m	Distance entre la base et le centre de masse du premier membre
$E$	73.1 G pa	Module de Young de l'aluminium
$\rho$	0.27 Kg / m	Masse par unité de longueur du deuxième membre
$h$	0.006 m	Épaisseur du deuxième membre
$b$	0.05 m	Largeur du deuxième membre
$L_2$	1 m	Longueur du deuxième membre
$m_2$	0.81 Kg	Masse du deuxième membre
$I_h$	0.0075 Kg m <sup>2</sup>	Inertie du pivot attaché à la base du deuxième membre
$m_h$	3 Kg	Masse du pivot attaché à la base du deuxième membre
$I_c$	0.005 Kg m <sup>2</sup>	Inertie de la charge
$m_c$	0.5 Kg	Masse de la charge
$f_{e1}$	8.14 Kg/sec	Frottement visqueux associé à la première CGF
$f_{e2}$	61.45 Kg/sec	Frottement visqueux associé à la deuxième CGF

Tableau 7.1 Paramètres physiques du manipulateur.

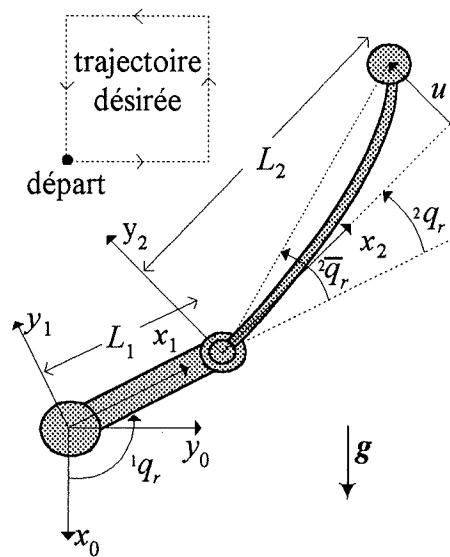


Figure 7.1 Manipulateur planaire et trajectoire désirée.

## 7.2 Trajectoires désirées

La trajectoire désirée dans l'espace de travail est illustrée aux figures 7.1 et 7.2a). Cette trajectoire périodique est formée de quatre polynômes de cinquième ordre: un pour chaque côté du carré. Dans ce contexte, la trajectoire désirée des CGRV est obtenue par cinématique inverse et les trajectoires désirées des CGR et des CGF correspondantes sont obtenues par la méthode décrite à la section 5. Dans ce cas, la condition de la proposition 5.2 est satisfaite sans que l'on est à modifier les vitesses et les accélérations désirées mises en cause. Ces trajectoires désirées sont illustrées à la figure 7.2.

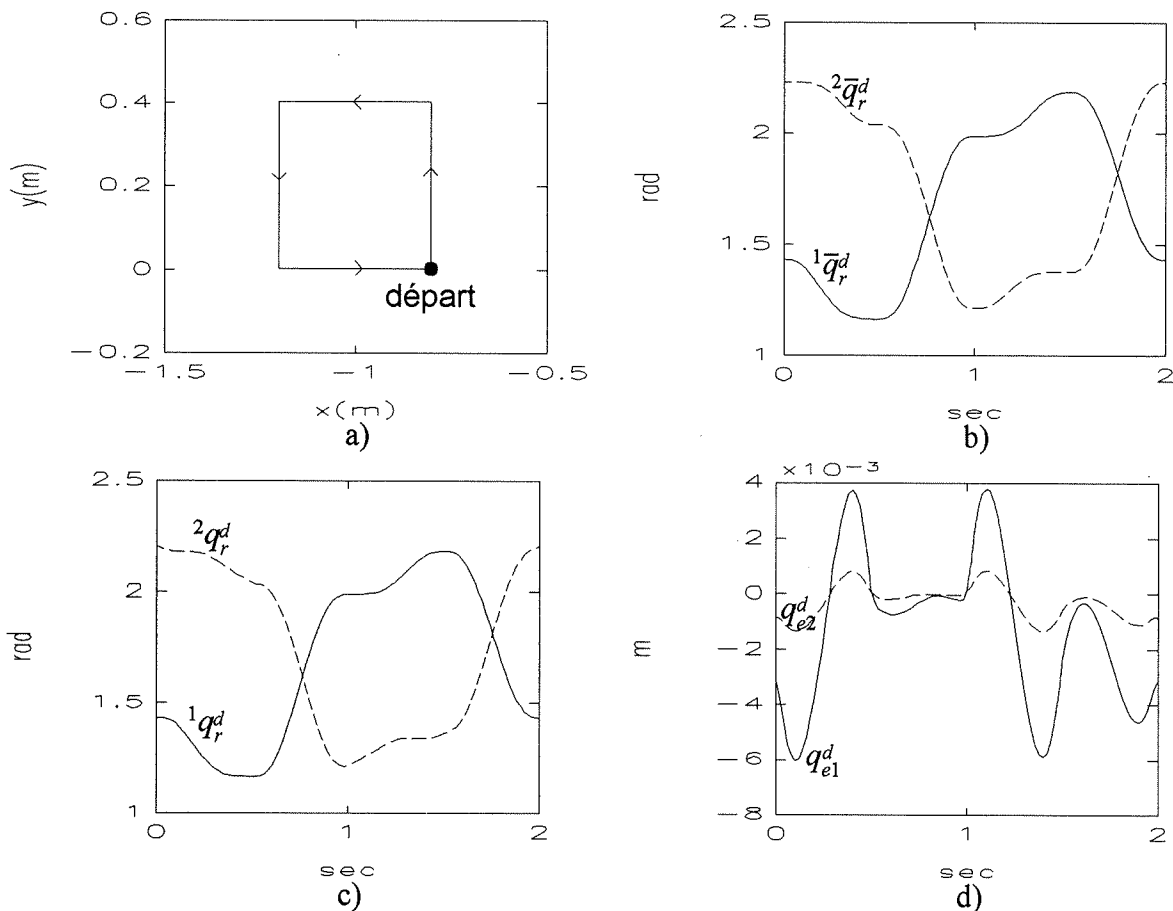


Figure 7.2 Trajectoires désirées: a) de l'outil; b) des CGRV; c) des CGR; d) des CGF.

### 7.3 Loi de commande

Selon ce qui a été présenté à la section 6, la stratégie de commande utilisée pour assurer le suivi de la trajectoire est composée des relations (4.2), (6.1) et (6.4); c'est-à-dire une loi de commande linéarisante augmentée de deux retours d'état du système linéarisé. Les gains de la loi de commande (6.1) ont d'abord été choisis de façon à ce que la dynamique de l'erreur de suivi de la première CGR, décrite par la relation (6.2), soit caractérisée par les valeurs propres  $\lambda_1 = \lambda_2 = -20$ . Nous avons ensuite simulé le système en considérant les trois situations suivantes:

- 1) les gains de la loi de commande (6.4) obtenus de façon à ce que les valeurs propres de  $\bar{A}$  soient  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -15$ ;
- 2) les gains de la loi de commande (6.4) obtenus de façon à ce que l'équation caractéristique de  $\bar{A}$  soit donnée par la relation (6.10) avec  $\lambda_1 = \lambda_2 = -20$  et un amortissement additionnel  $\eta = 0$ ;
- 3) les gains de la loi de commande (6.4) obtenus de façon à ce que l'équation caractéristique de  $\bar{A}$  soit donnée par la relation (6.10) avec  $\lambda_1 = \lambda_2 = -20$  et un amortissement additionnel  $\eta = 0.4$  (ie:  $\eta = 0.4$  est une estimation par essais et erreurs de l'amortissement additionnel maximum qui respecte la condition de stabilité de la proposition 6.3);

Pour chacune de ces situations, nous avons simulé le système en considérant les conditions initiales suivantes :  $\mathbf{q}_r(t_0) = \mathbf{q}_r^d(t_0) + 0.1$  et  $\mathbf{q}_e(t_0) = 0$ .

Les résultats de simulation associés à la première situation sont illustrés par les figures 7.3, 7.4 et 7.5. Comme l'indique la proposition 6.1, la dynamique des erreurs de suivi est dans ce cas ultimement bornée puisque les valeurs propres de  $\bar{A}$  sont stables. Il apparaît toutefois que la borne de l'erreur est tellement importante que le système se comporte, à toute fin pratique, comme un système instable. En effet, la figure 7.3a) nous indique que l'outil du manipulateur se déplace selon



une trajectoire tout à fait arbitraire et les figures 7.3b) et 7.4 illustrent de très grandes erreurs de suivi.

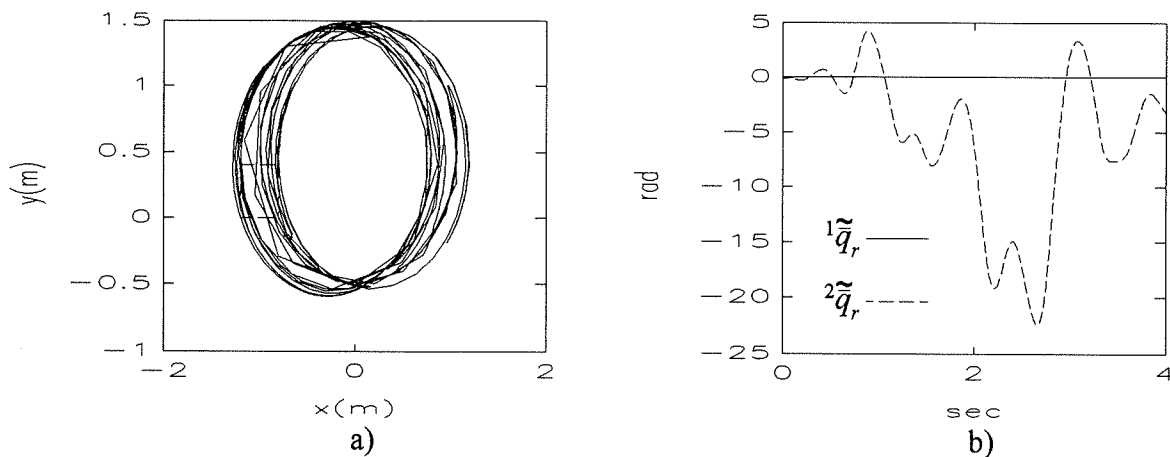


Figure 7.3 a) Trajectoires désirée (- -) et de l'outil (—). b) Erreur de suivi des CGRV.

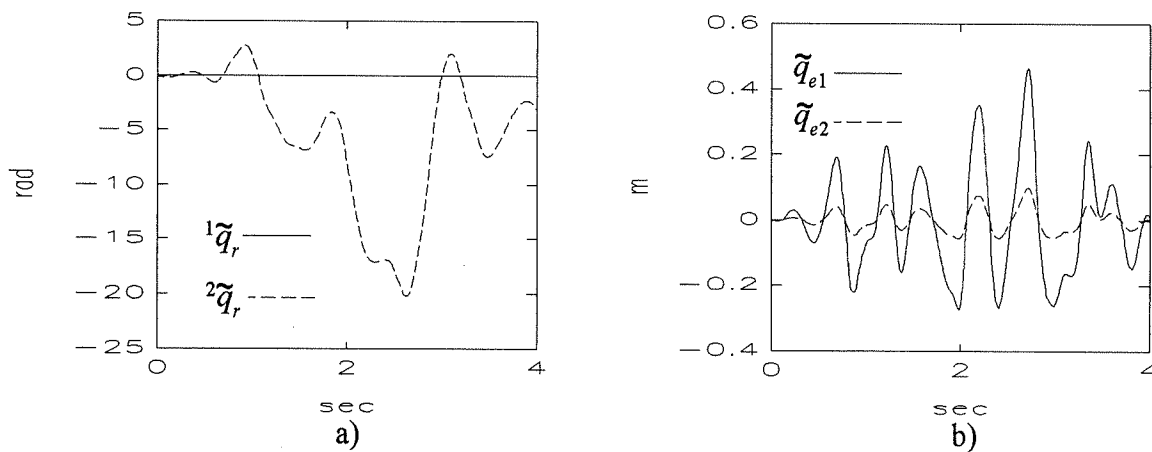


Figure 7.4 Erreur de suivi a) des CGR; b) des CGF.

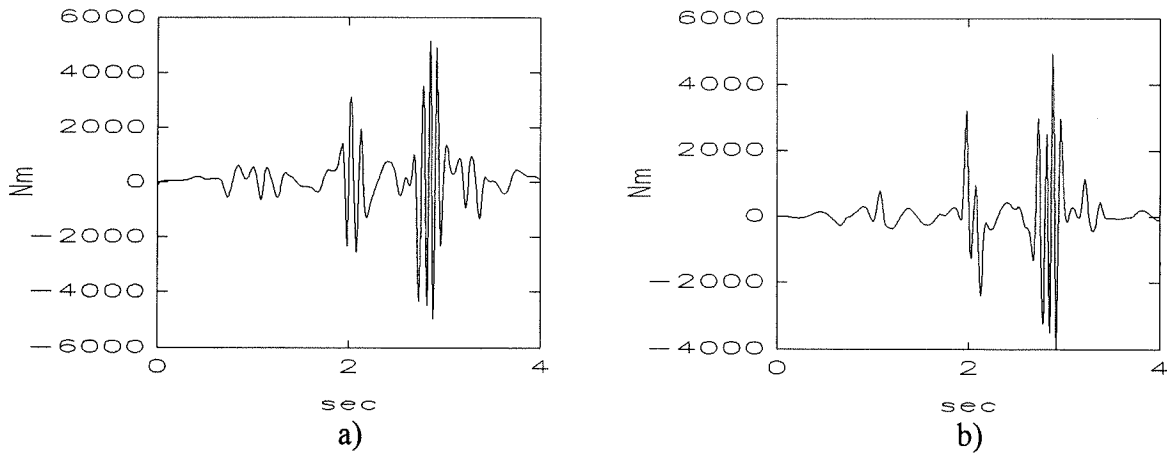


Figure 7.5 Efforts de commande a) pour l'articulation 1; b) pour l'articulation 2.

Les résultats de simulation associés à la deuxième situation sont illustrés par les figures 7.6, 7.7 et 7.8. Dans ce cas, la stabilité asymptotique du système est assurée puisque la condition de la proposition 6.4 est vérifiée. Les erreurs de suivi de la première CGRV et des CGR convergent donc rapidement puisque leur dynamique est caractérisée par les valeurs propres  $\lambda_1 = \lambda_2 = -20$ . D'un autre côté les erreurs de suivi de la dernière CGRV et des CGF convergent très lentement puisque leur dynamique est, à peu de chose près, caractérisée par l'amortissement naturel de la poutre flexible. En effet, les figures 7.6b) et 7.7b) nous indiquent que les erreurs convergent en 40 secondes environ; soit 20 fois la période de la trajectoire désirée.

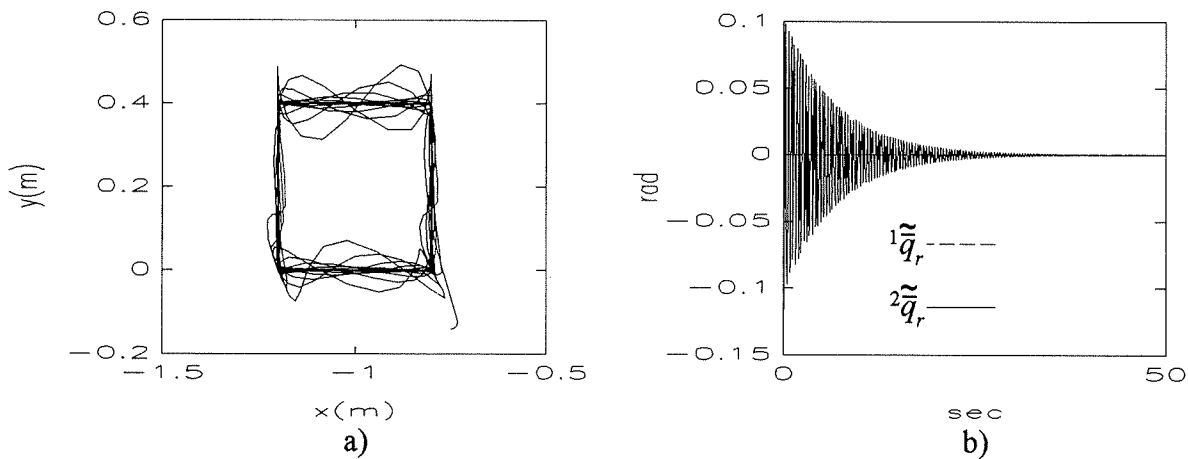


Figure 7.6 a) Trajectoires désirée (- -) et de l'outil (—). b) Erreur de suivi des CGRV.

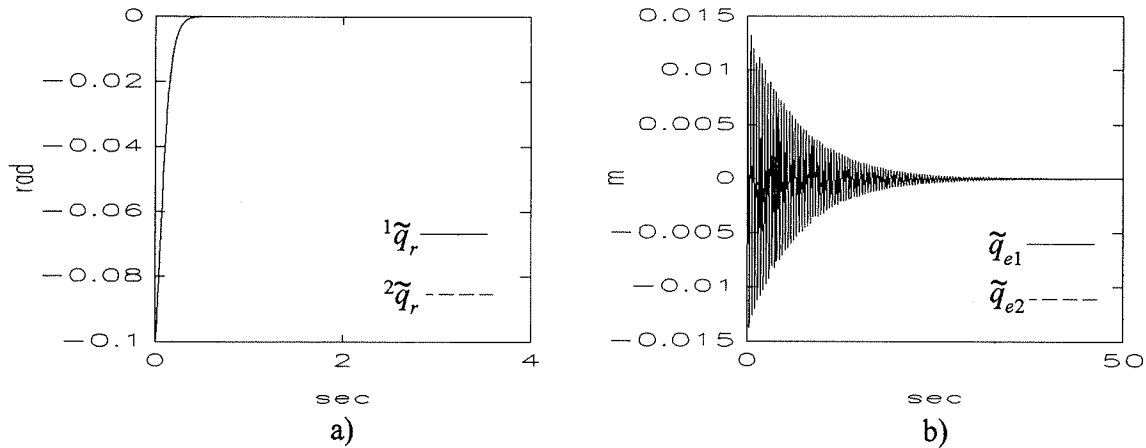


Figure 7.7 Erreur de suivi a) des CGR; b) des CGF.

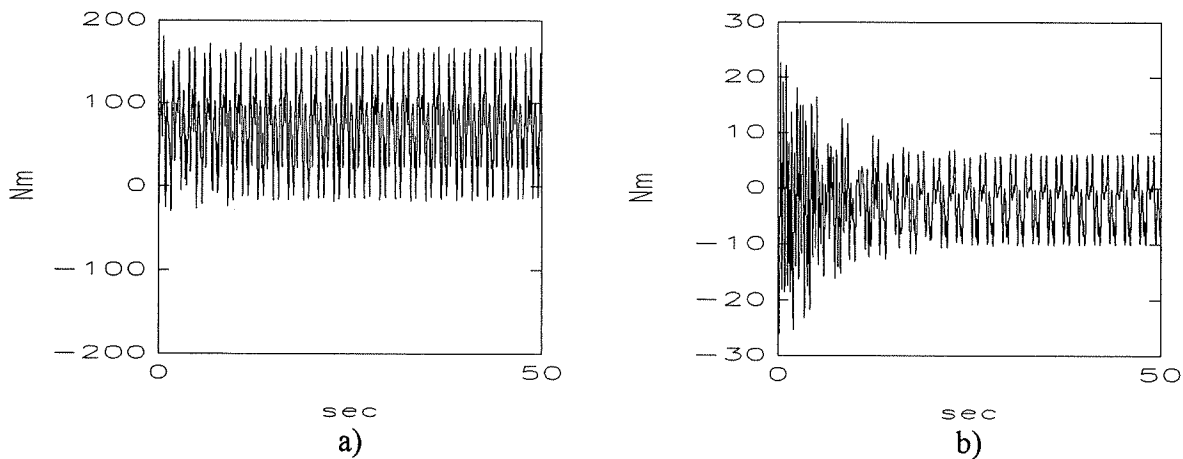


Figure 7.8 Efforts de commande a) pour l'articulation 1; b) pour l'articulation 2.

Les résultats de simulation associés à la troisième situation sont illustrés par les figures 7.9, 7.10 et 7.11. Dans ce cas, la stabilité asymptotique du système est assurée puisque la condition de la proposition 6.3 est vérifiée. Puis, parce que l'amortissement  $\eta = 0.4$ , les erreurs de suivi convergent rapidement à zéro. En fait si on compare les situations 2) et 3), on remarque que pour un effort de commande comparable, les erreurs de suivi de la dernière CGRV et des CGF convergent en 0.75 seconde environ dans la situation 3) tandis qu'elles convergent en 40 secondes environ dans la situation 2).

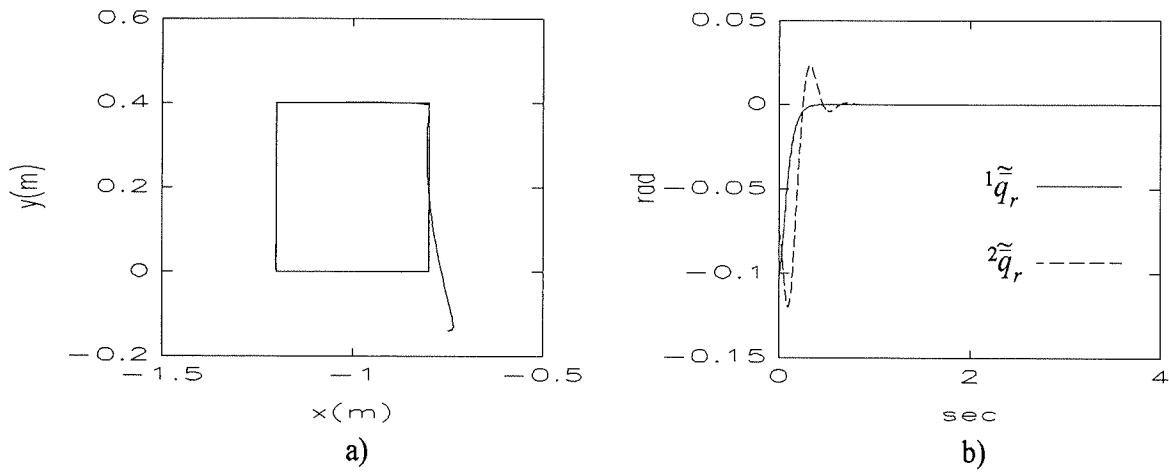


Figure 7.9 a) Trajectoires désirée (- -) et de l'outil (—). b) Erreur de suivi des CGRV.

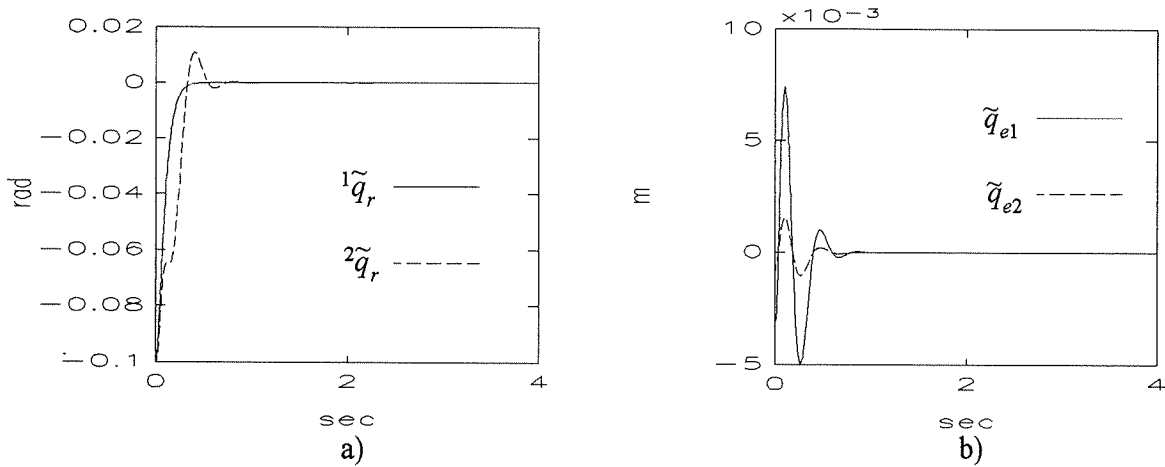


Figure 7.10 Erreur de suivi a) des CGR; b) des CGF.

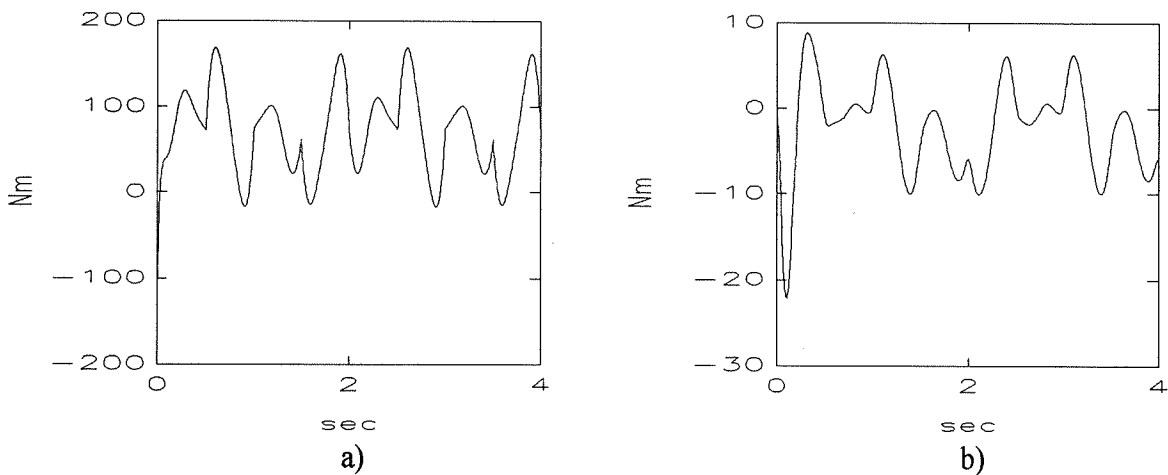


Figure 7.11 Efforts de commande a) pour l'articulation 1; b) pour l'articulation 2.

## 8. CONCLUSION

Dans ce rapport, nous avons présenté une approche pour assurer la stabilité asymptotique globale de l'erreur de suivi de trajectoire dans l'espace des CGRV. Nous avons vu que cette approche est d'abord basée sur le calcul des trajectoires désirées des CGR et des CGF correspondant à la trajectoire désirée des CGRV. Puis, nous avons vu que la stratégie de commande est composée d'une loi de commande linéarisante augmenté de deux retours d'état du système linéarisé. Nous avons alors expliqué que les gains du contrôleur pouvaient être choisis de façon à assurer la stabilité asymptotique globale et un amortissement souhaitable des erreurs de suivi. Des simulations ont ensuite été présentées afin de valider l'approche. En particulier, nous avons simulé le système avec un choix de gains qui n'assure pas la stabilité asymptotique du système mais une stabilité de type ultimement borné. Nous avons constaté que, dans ce cas, le système se comporte, à toute fin pratique, comme un système instable. Nous avons ensuite considéré une simulation avec des gains qui assurent la stabilité asymptotique du système et un amortissement naturel des erreurs de suivi. Dans ce cas, l'amortissement était extrêmement lent. Finalement, le système a été simulé avec des gains qui assurent la stabilité asymptotique et un amortissement rapide des erreurs de suivi. Comme travaux à venir, nous envisageons l'étude de la stabilité du système dans le cas où un observateur est utilisé pour estimer les CGF. Nous prévoyons également être en mesure de rendre l'approche robuste face à une variation de la charge.

## RÉFÉRENCES

- Asada, H., Ma, Z.-D., & Tokumaru, H., 1990, "Inverse Dynamics of Flexible Robot Arms: Modeling and Computation for Trajectory Control," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol.112, pp.177-185.
- Boyd, S., Balakrishnan, V., Kabamba, P., 1989, "A Bisection Method for Computing the  $H_\infty$  Norm of a Transfer Matrix and Related Problems," *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol.2 pp.207-219.
- Bigras, P., Saad, M., O'Shea, J., 1995, "Suivi de trajectoires dans l'espace de travail d'une classe de manipulateurs flexibles: Étude de stabilité," *Congrès Canadien de génie électrique et informatique*, vol.1, pp.67-70.
- Bellezza, F., Lanari, L., Ulivi, G., 1990 "Exact modeling of the flexible slewing link," *Proc. on int. conf. on Robotics and Automation*, vol.1, pp.734-739.
- Book, W. J., 1984, "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms," *The International Journal of Robotics Research*, vol.3, pp.87-101.
- Craig, J.J., 1988, *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*, Addison-Wesley, New York.
- Craig, J.J., 1989, *Introduction to Robotics*, 2nd Edition, Addison-Wesley, New York.
- De Luca, A., & Siciliano, B., 1989, "Trajectory control of non-linear one-link flexible arm," *International Journal of Control*, vol.50, pp.1699-1715.
- Deo, S.G., Rachavendra, V., 1980, *Ordinary differential equations and stability theory*, Tata McGraw-Hill, New Delhi.
- De Schutter, J., Van Brussel, H., Adams, M., Froment, A., & Faillot, J. L., 1988, "Control of Flexible Robots Using Generalized Nonlinear Decoupling," *IFAC Robot Control*, pp.113-118.

Golub, G.H., Van Loan, C.F., 1989, *Matrix Computations*, 2ed Edition, Johns Hopkins University Press, Baltimore.

Khalil, H., 1992, *Nonlinear Systems*, Macmillan, New York.

Kwon, D.S., Book, W.J., 1994, "A Time-Domain Inverse Dynamic Tracking Control of a Single-Link Flexible Manipulator," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol.116, pp.193-200.

Lammerts, I. M. M., Veldpaus, F.E., Van de Molengraft, M. J. G., Kok, J. J., 1995, "Adaptive Computed Reference Computed Torque Control of Flexible Robots," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol.117, pp.31-36.

Lucibello, P., 1989, "Nonlinear Regulation, With Internal Stability, of a two link Flexible Robot arm," *Proc. on int. Conference on Decision and Control*, vol.2, pp.1645-1650.

Lucibello, P., & Di Benedetto, M. D., 1993, "Output Tracking for a Nonlinear Flexible Arm," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol.115, pp.78-85.

Meirovitch, L., 1967, *Analytical Methods in Vibrations*, MacMillan, New York.

Nathan, P. J., & Singh, S. N., 1991, "Sliding Mode Control and Elastic Mode Stabilization of a Robotic Arm With Flexible Links," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol.113, pp.669-676.

Pfeiffer, F., 1989, "A Feedforward Decoupling Concept for the Control of Elastic Robots," *Journal of Robotic Systems*, vol.6, no.4, pp.407-416.

Piedboeuf, J.C., 1989, "Étude du modèle non-linéaire d'un manipulateur avec membrure flexible," thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.

Reddy, J.N., 1993, *An introduction to finite element method*, 2ed Edition, McGraw-Hill, New York.

Saydy, L., Tits, A. L., Abed, E.H., 1990, "Guardian Maps and the Generalized Stability of Parametrized Families of Matrices and Polynomials," *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 3, pp.345-371.

Siciliano, B., & Book, W. J., 1988, "A Singular Perturbation Approach to Control of Lightweight Flexible Manipulators" *International Journal of Robotics Research*, vol.7, pp.79-90.

Spong, M.W. & Vidyasagar, M., 1989, *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, New York.

Vidyasagar, M., 1993, *Nonlinear systems analysis*, 2ed Edition, Prentice hall, London.

Wang, D., & Vidyasagar, M., 1991, "Control of a Class of Manipulators With a Single Flexible Link-Part 1: Feedback Linearization," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol.113, pp.655-661.

Yim, W., 1994, "Inverse Cartesian Trajectory Control and Stabilisation of a Three-Axis Flexible Manipulator," *Journal of Robotic Systems*, v.11, no.4, pp.311-326.

Yuan, B.-S., Book, W. J., & Huggins, J. D., 1993, "Dynamics of Flexible Manipulator Arms: Alternative Derivation, Verification, and Characteristics for Control," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol.115, pp.394-404.



**ANNEXE A**  
**Calcul de l'énergie cinétique**

Cette annexe présente les détails du calcul de l'énergie cinétique de la poutre flexible. Selon la relation (3.9) nous savons que cette énergie est donnée par la relation suivante:

$$\bar{K}_e = \frac{1}{2} \left[ \rho \int_0^l {}^0\mathbf{v}_e^T(x_p) {}^0\mathbf{v}_e(x_p) dx_p + m_c {}^0\mathbf{v}_e^T(l) {}^0\mathbf{v}_e(l) + {}^e\Omega_e^T(l) \mathbf{I}_c {}^e\Omega_e(l) \right] \quad (\text{A.1})$$

Nous allons maintenant décomposer cette équation de façon à simplifier le développement des calculs. D'abord, la relation (3.11) nous permet d'écrire

$${}^0\mathbf{v}_e^T(x_p) {}^0\mathbf{v}_e(x_p) = k_1 + k_2(x_p) + k_3(x_p) + k_4(x_p) + k_5(x_p) \quad (\text{A.2})$$

où

$$k_1 = {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^T \mathbf{J}_v^T({}^1\mathbf{q}_r) \mathbf{J}_v({}^1\mathbf{q}_r) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r \quad (\text{A.3})$$

$$k_2(x_p) = {}^{p-1}\mathbf{p}_e^T(x_p) \mathbf{S}^T(\mathbf{J}_w({}^1\mathbf{q}_r) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{S}(\mathbf{J}_w({}^1\mathbf{q}_r) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r) {}^{p-1}\mathbf{p}_e(x_p) \quad (\text{A.4})$$

$$k_3(x_p) = {}^{p-1}\dot{\mathbf{p}}_e^T(x_p) {}^{p-1}\dot{\mathbf{p}}_e(x_p) \quad (\text{A.5})$$

$$k_4(x_p) = 2 \left[ {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^T \mathbf{J}_v^T({}^1\mathbf{q}_r) + {}^{p-1}\dot{\mathbf{p}}_e^T(x_p) \right] \mathbf{S}(\mathbf{J}_w({}^1\mathbf{q}_r) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r) {}^{p-1}\mathbf{p}_e(x_p) \quad (\text{A.6})$$

$$k_5(x_p) = 2 {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^T \mathbf{J}_v^T({}^1\mathbf{q}_r) {}^{p-1}\dot{\mathbf{p}}_e(x_p) \quad (\text{A.7})$$

Puis, si on pose  $\text{diag}(I_x, I_y, I_z) = \mathbf{I}_c$ , la relation (3.12) nous permet d'écrire

$${}^e\Omega_e^T(l) \mathbf{I}_c {}^e\Omega_e(l) = \bar{k}_6 + \bar{k}_7 + \bar{k}_8 \quad (\text{A.8})$$

où

$$\bar{k}_6 = ({}^2\dot{\mathbf{q}}_r + \dot{\mu}'(l))^2 I_z \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{k}_7 = {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^T \mathbf{J}_\Omega^T({}^1\mathbf{q}_r) {}^{p-1}\mathbf{R}(l) \mathbf{I}_c {}^{p-1}\mathbf{R}^T(l) \mathbf{J}_\Omega({}^1\mathbf{q}_r) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{k}_8 = 2 ({}^2\dot{\mathbf{q}}_r + \dot{\mu}'(l)) \hat{z}_e^T \mathbf{I}_c {}^{p-1}\mathbf{R}^T(l) \mathbf{J}_\Omega({}^1\mathbf{q}_r) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r \quad (\text{A.11})$$

En remplaçant (A.2) et (A.8) dans (A.1), on obtient

$$\bar{K}_e = \frac{1}{2} \left[ \bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3 + \bar{k}_4 + \bar{k}_5 + \bar{k}_6 + \bar{k}_7 + \bar{k}_8 \right] \quad (\text{A.12})$$

où

$$\bar{k}_i = \rho \int_0^l k_i(x_p) dx_p + m_c k_i(l) \quad \text{pour } i = 1, \dots, 5 \quad (\text{A.13})$$

et où  $\bar{k}_6$ ,  $\bar{k}_7$  et  $\bar{k}_8$  sont données par les relations (A.9), (A.10) et (A.11). Nous allons maintenant considérer le calcul de chaque terme de la relation (A.12).

**Calcul du terme  $\bar{k}_1$ :**

Selon les relations (A.3) et (3.1), ce terme est indépendant de  $\mathbf{q}_e$  et de  $\dot{\mathbf{q}}_e$ . Il est donc tout à fait inutile de le calculer puisque, de toute façon, il disparaîtra lors du développement de l'équation dynamique donnée par la relation (3.8).

**Calcul du terme  $\bar{k}_2$ :**

Calculons d'abord  $k_2(x_p)$ . Sachant que

$${}^{p-1}\mathbf{p}_e(x_p) = \begin{bmatrix} c_2 x_p - s_2 \mu(x_p) & s_2 x_p + c_2 \mu(x_p) & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.14})$$

si on pose  $\begin{bmatrix} J_4^T & J_5^T & J_6^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{J}_\Omega({}^1\mathbf{q}_r)$ , nous avons

$$S(\mathbf{J}_\Omega({}^1\mathbf{q}_r){}^1\dot{\mathbf{q}}_r) {}^{p-1}\mathbf{p}_e(x_p) = \begin{bmatrix} 0 & -J_6^1 \dot{\mathbf{q}}_r & J_5^1 \dot{\mathbf{q}}_r \\ J_6^1 \dot{\mathbf{q}}_r & 0 & -J_4^1 \dot{\mathbf{q}}_r \\ -J_5^1 \dot{\mathbf{q}}_r & J_4^1 \dot{\mathbf{q}}_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 x_p - s_2 \mu(x_p) \\ s_2 x_p + c_2 \mu(x_p) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

En remplaçant (A.15) dans (A.4) et en considérant l'hypothèse 7 ( $\mu^2(x_p) = 0$  et  $\mu'^2(x_p) = 0$ ), on obtient

$$\begin{aligned} k_2(x_p) &= x_p^2 {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^T \left[ J_6^T J_6 + s_2^2 J_4^T J_4 + c_2^2 J_5^T J_5 - 2s_2 c_2 J_4^T J_5 \right] {}^1\dot{\mathbf{q}}_r \\ &\quad + 2x_p \mu(x_p) {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^T \left[ s_2 c_2 (J_4^T J_4 - J_5^T J_5) - (c_2^2 - s_2^2) J_4^T J_5 \right] {}^1\dot{\mathbf{q}}_r \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Finalement, en remplaçant (A.16) dans (A.13) puis en utilisant la relation (3.1), on obtient

$$\bar{k}_2 = \bar{k}_{20} + 2 {}^1\dot{\mathbf{q}}_r^T \left[ s_2 c_2 (J_4^T J_4 - J_5^T J_5) - (c_2^2 - s_2^2) J_4^T J_5 \right] {}^1\dot{\mathbf{q}}_r \sum_{i=1}^{n_r} \left( \rho \int_0^l x \phi_i(x) dx + m_c l \phi_i(l) \right) \mathbf{q}_{ei} \quad (\text{A.17})$$

où  $\bar{k}_{20}$  est indépendant de  $\mathbf{q}_e$  et de  $\dot{\mathbf{q}}_e$ .

**Calcul du terme  $\bar{k}_3$ :**

Calculons d'abord  $k_3(x_p)$ . De la relation (A.14), on déduit que

$${}^{p-1}\dot{\mathbf{p}}_e(x_p) = \begin{bmatrix} -s_2 x_p {}^2\dot{\mathbf{q}}_r - c_2 \mu(x_p) {}^2\dot{\mathbf{q}}_r - s_2 \dot{\mu}(x_p) \\ c_2 x_p {}^2\dot{\mathbf{q}}_r - s_2 \mu(x_p) {}^2\dot{\mathbf{q}}_r + c_2 \dot{\mu}(x_p) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Puis, en remplaçant (A.18) dans (A.5) et en considérant l'hypothèse 7 ( $\mu^2(x_p) = 0$  et  $\mu^{12}(x_p) = 0$ ), on obtient

$$k_3(x_p) = x_p^2 \dot{q}_r^2 + \dot{\mu}^2(x_p) + 2x_p \dot{\mu}(x_p) \quad (\text{A.19})$$

En remplaçant (A.19) dans (A.13) puis en utilisant la relation (3.1), on obtient finalement

$$\begin{aligned} \bar{k}_3 = \bar{k}_{30} + \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{n_e} \left( \rho \int_0^l \phi_i(x) \phi_j(x) dx + m_c \phi_i(l) \phi_j(l) \right) \dot{q}_{ei} \dot{q}_{ej} \\ + 2 \dot{q}_r \sum_{i=1}^{n_e} \left( \rho \int_0^l x \phi_i(x) dx + m_c l \phi_i(l) \right) \dot{q}_{ei} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

où  $\bar{k}_{30}$  est indépendant de  $q_e$  et de  $\dot{q}_e$ .

**Calcul du terme  $\bar{k}_4$ :**

Calculons d'abord  $k_4(x_p)$ . Si on pose  $[J_1^T \ J_2^T \ J_3^T]^T = J_v({}^1q_r)$ , que l'on remplace la relation (A.15) dans la relation (A.6) et que l'on considère l'hypothèse 7 ( $\mu^2(x_p) = 0$  et  $\mu^{12}(x_p) = 0$ ), on obtient

$$\begin{aligned} k_4(x_p) = x_p^2 \dot{q}_r J_6^1 \dot{q}_r + 2x_p \dot{q}_r^T \left[ s_2 (J_3^T J_4 - J_1^T J_6) + c_2 (J_2^T J_6 - J_3^T J_5) \right] {}^1\dot{q}_r \\ + 2\mu(x_p) \dot{q}_r^T \left[ s_2 (J_3^T J_5 - J_2^T J_6) + c_2 (J_3^T J_4 - J_1^T J_6) \right] {}^1\dot{q}_r + 2x_p \dot{\mu}(x_p) J_6^1 \dot{q}_r \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

En remplaçant (A.21) dans (A.13) puis en utilisant la relation (3.1), on obtient finalement

$$\begin{aligned} \bar{k}_4 = \bar{k}_{40} + 2 \dot{q}_r^T \left[ s_2 (J_3^T J_5 - J_2^T J_6) + c_2 (J_3^T J_4 - J_1^T J_6) \right] {}^1\dot{q}_r \sum_{i=1}^{n_e} v_i q_{ei} \\ + 2 J_6^1 \dot{q}_r \sum_{i=1}^{n_e} \left( \rho \int_0^l x \phi_i(x) dx + m_c l \phi_i(l) \right) \dot{q}_{ei} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

où  $\bar{k}_{40}$  est indépendant de  $q_e$  et de  $\dot{q}_e$ .

**Calcul du terme  $\bar{k}_5$ :**

Calculons d'abord  $k_5(x_p)$ . En remplaçant (A.18) dans (A.7), on obtient

$$k_5(x_p) = 2 \begin{bmatrix} J_1^1 \dot{q}_r \\ J_2^1 \dot{q}_r \\ J_3^1 \dot{q}_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -s_2 x_p^2 \dot{q}_r - c_2 \mu(x_p)^2 \dot{q}_r - s_2 \dot{\mu}(x_p) \\ c_2 x_p^2 \dot{q}_r - s_2 \mu(x_p)^2 \dot{q}_r + c_2 \dot{\mu}(x_p) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

En remplaçant (A.23) dans (A.13) puis en utilisant la relation (3.1), on obtient donc

$$\bar{k}_5 = \bar{k}_{50} - 2 {}^2\dot{q}_r [c_2 J_1 + s_2 J_2] {}^1\dot{q}_r \sum_{i=1}^{n_e} v_i q_{ei} + 2 [-s_2 J_1 + c_2 J_2] {}^1\dot{q}_r \sum_{i=1}^{n_e} v_i \dot{q}_{ei} \quad (\text{A.24})$$

où  $\bar{k}_{50}$  est indépendant de  $q_e$  et de  $\dot{q}_e$ .

**Calcul du terme  $\bar{k}_6$ :**

Ce terme est obtenu directement en remplaçant (3.1) dans (A.9) de sorte que

$$\bar{k}_6 = \bar{k}_{60} + \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{n_e} I_z \phi'_i(l) \phi'_j(l) \dot{q}_{ei} \dot{q}_{ej} + 2 {}^2\dot{q}_r \sum_{i=1}^{n_e} I_z \phi'_i(l) \dot{q}_{ei} \quad (\text{A.25})$$

où  $\bar{k}_{60}$  est indépendant de  $q_e$  et de  $\dot{q}_e$ .

**Calcul du terme  $\bar{k}_7$ :**

Selon la relation (3.12), nous avons

$${}^{p-1}R^T(x_p) J_\Omega({}^1\dot{q}_r) {}^1\dot{q}_r = \begin{bmatrix} c_2 - s_2 \mu'(x_p) & s_2 + c_2 \mu'(x_p) & 0 \\ -s_2 - c_2 \mu'(x_p) & c_2 - s_2 \mu'(x_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_4 {}^1\dot{q}_r \\ J_5 {}^1\dot{q}_r \\ J_6 {}^1\dot{q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_2 - s_2 \mu'(x_p)) J_4 {}^1\dot{q}_r + (s_2 + c_2 \mu'(x_p)) J_5 {}^1\dot{q}_r \\ -(s_2 + c_2 \mu'(x_p)) J_4 {}^1\dot{q}_r + (c_2 - s_2 \mu'(x_p)) J_5 {}^1\dot{q}_r \\ J_6 {}^1\dot{q}_r \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Ensuite, en remplaçant (A.26) dans (A.10) et en considérant l'hypothèse 7 ( $\mu^2(x_p) = 0$  et  $\mu'^2(x_p) = 0$ ), on obtient

$$\begin{aligned} \bar{k}_7 = & {}^1\dot{q}_r^T [c_2^2 J_4^T J_4 + s_2^2 J_5^T J_5 + 2 s_2 c_2 J_4^T J_5] {}^1\dot{q}_r I_x \\ & {}^1\dot{q}_r^T [s_2^2 J_4^T J_4 + c_2^2 J_5^T J_5 - 2 s_2 c_2 J_4^T J_5] {}^1\dot{q}_r I_x + {}^1\dot{q}_r^T J_6^T J_6 {}^1\dot{q}_r I_z \\ & + 2 {}^1\dot{q}_r^T [-s_2 c_2 (I_x - I_y) J_4^T J_4 + s_2 c_2 (I_x - I_y) J_5^T J_5 + (c_2^2 - s_2^2) (I_x - I_y) J_4^T J_5] {}^1\dot{q}_r \mu'(l) \end{aligned}$$

La relation (3.1) nous permet donc d'obtenir

$$\bar{k}_7 = \bar{k}_{70} + 2 {}^1\dot{q}_r^T [-s_2 c_2 (I_x - I_y) J_4^T J_4 + s_2 c_2 (I_x - I_y) J_5^T J_5 + (c_2^2 - s_2^2) (I_x - I_y) J_4^T J_5] {}^1\dot{q}_r \sum_{i=1}^{n_e} \phi'_i(l) q_{ei} \quad (\text{A.27})$$

où  $\bar{k}_{70}$  est indépendant de  $q_e$  et de  $\dot{q}_e$ .

**Calcul du terme  $\bar{k}_8$ :**

En remplaçant (A.26) dans (A.11) on obtient

$$\bar{k}_8 = 2(\dot{q}_r + \dot{\mu}'(l))I_z J_6^{-1} \dot{q}_r$$

Puis, selon la relation (3.1), nous avons

$$\bar{k}_8 = \bar{k}_{80} + 2J_6^{-1} \dot{q}_r \sum_{i=1}^{n_e} I_z \phi'_i(l) \dot{q}_{ei} \quad (\text{A.28})$$

où  $\bar{k}_{80}$  est indépendant de  $q_e$  et de  $\dot{q}_e$ .

Enfin, l'énergie cinétique donnée par la relation (3.13) est obtenue en remplaçant les relations (A.17), (A.20), (A.22), (A.24), (A.25), (A.27) et (A.28) dans la relation (A.12).

## ANNEXE B

### Démonstration du lemme 6.1

Cette annexe présente la démonstration du lemme 6.1. Cette démonstration est fortement inspirée de la démonstration du lemme sur la stabilité exponentielle des systèmes hiérarchiques (Vidyasagar, 1993, p.261). D'abord, nous savons que  $x_1$  est exponentiellement stable par hypothèse. Par conséquent,

$$\|x_1(t)\|_2 \leq \alpha_{11} e^{-\gamma_1(t-t_0)} \|x_1(t_0)\|_2. \quad (\text{B.1})$$

D'un autre côté, les conditions 1) et 2) nous indiquent que la dynamique décrite par  $\dot{\bar{x}}_2 = f_2(0, \bar{x}_2, t)$  est exponentiellement stable et le jacobien de  $f_2(0, \bar{x}_2, t)$  est uniformément borné. Le théorème converse nous permet alors d'affirmer qu'il existe une fonction  $v_2(\bar{x}_2, t)$  continûment différentiable qui respecte les conditions suivantes (Vidyasagar, 1993, p.246):

$$c_{21} \|\bar{x}_2\|_2^2 \leq v_2(\bar{x}_2, t) \leq c_{22} \|\bar{x}_2\|_2^2 \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial \bar{x}_2} f_2(0, \bar{x}_2, t) \leq -c_{23} \|\bar{x}_2\|_2^2 \quad (\text{B.3})$$

$$\left\| \frac{\partial v_2}{\partial \bar{x}_2} \right\|_2 \leq c_{24} \|\bar{x}_2\|_2 \quad (\text{B.4})$$

Si on utilise la fonction de Lyapunov  $v_2(\bar{x}_2, t)$  pour étudier la stabilité de la dynamique décrite par  $\dot{\bar{x}}_2 = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, t)$ , nous obtenons,

$$\dot{v}_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial \bar{x}_2} f_2(0, \bar{x}_2, t) + \frac{\partial v_2}{\partial \bar{x}_2} [f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, t) - f_2(0, \bar{x}_2, t)]$$

En utilisant la condition 3) et les relations (B.3) et (B.4), nous avons

$$\dot{v}_2 \leq -c_{23} \|\bar{x}_2\|_2^2 + c_{24} \|\bar{x}_2\|_2 \sum_{i=1}^{m_2} \beta_{2i} \|\bar{x}_1\|_2^i$$

La relation (B.2) nous permet ensuite d'écrire

$$\dot{v}_2 \leq -\frac{c_{23}}{c_{22}} v_2 + \frac{c_{24}}{\sqrt{c_{21}}} \sqrt{v_2} \sum_{i=1}^{m_2} \beta_{2i} \|\bar{x}_1\|_2^i$$

En considérant le changement de variable  $w_2 = \sqrt{v_2}$ , nous obtenons

$$\dot{w}_2 = \frac{\dot{v}_2}{\sqrt{v_2}} \leq -\frac{c_{23}}{c_{22}} w_2 + \frac{c_{24}}{\sqrt{c_{21}}} \sum_{i=1}^{m_2} \beta_{2i} \|\bar{x}_1\|_2^i$$

De sorte que

$$\dot{w}_2 + \frac{c_{23}}{c_{22}} w_2 = z(t) \leq \frac{c_{24}}{\sqrt{c_{21}}} \sum_{i=1}^{m_2} \beta_{2i} \|\bar{x}_1(t)\|_2^i$$

En solutionnant cette équation différentielle, on obtient

$$w_2(t) = e^{-\frac{c_{23}(t-t_0)}{c_{22}}} w_2(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\frac{c_{23}(t-\tau)}{c_{22}}} z(\tau) d\tau$$

Nous avons donc

$$w_2(t) \leq e^{-\frac{c_{23}(t-t_0)}{c_{22}}} w_2(t_0) + \frac{c_{24}}{\sqrt{c_{21}}} \sum_{i=1}^{m_2} \beta_{2i} \int_{t_0}^t e^{-\frac{c_{23}(t-\tau)}{c_{22}}} \|\bar{x}_1(\tau)\|_2^i d\tau \quad (\text{B.5})$$

En remplaçant (B.1) dans (B.5) et en intégrant, on obtient

$$w_2(t) \leq e^{-\frac{c_{23}(t-t_0)}{c_{22}}} w_2(t_0) + \sum_{i=1}^{m_2} \frac{c_{24} \beta_{2i}}{\sqrt{c_{21}} \left| \frac{c_{23}}{c_{22}} - i\gamma_1 \right|} \left| e^{-\frac{c_{23}(t-t_0)}{c_{22}}} - e^{-i\gamma_1(t-t_0)} \right| \|\bar{x}_1(t_0)\|_2^i$$

Ensuite, la relation (B.2) nous permet d'écrire

$$\|\bar{x}_2(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{21}}} e^{-\frac{c_{23}(t-t_0)}{c_{22}}} \|\bar{x}_2(t_0)\|_2 + \sum_{i=1}^{m_2} \frac{c_{24} \beta_{2i}}{c_{21} \left| \frac{c_{23}}{c_{22}} - i\gamma_1 \right|} \left| e^{-\frac{c_{23}(t-t_0)}{c_{22}}} - e^{-i\gamma_1(t-t_0)} \right| \|\bar{x}_1(t_0)\|_2^i$$

Ce qui implique

$$\|\bar{x}_2(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{21}}} e^{-\gamma_2(t-t_0)} \|\bar{x}_2(t_0)\|_2 + \sum_{i=1}^{m_2} \frac{c_{24} \beta_{2i}}{c_{21} \left| \frac{c_{23}}{c_{22}} - i\gamma_1 \right|} e^{-\gamma_2(t-t_0)} \|\bar{x}_1(t_0)\|_2^i$$

où  $\bar{\gamma}_2 = \min(\gamma_1, c_{23}/c_{22})$ .

Cette relation peut être exprimée sous la forme suivante:

$$\|\bar{\mathbf{x}}_2(t)\|_2 \leq \alpha_{21} e^{-\gamma_2(t-t_0)} \|\bar{\mathbf{x}}_2(t_0)\|_2 + \sum_{i=1}^{m_2} \alpha_{2i} e^{-\gamma_2(t-t_0)} \|\bar{\mathbf{x}}_1(t_0)\|_2^i$$

où

$$\alpha_{21} = \max \left[ \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{21}}}, \frac{c_{24}\beta_{21}}{c_{21} \left| \frac{c_{23}}{c_{22}} - \gamma_1 \right|} \right]$$

et

$$\alpha_{2i} = \frac{c_{24}\beta_{2i}}{c_{21} \left| \frac{c_{23}}{c_{22}} - i\gamma_1 \right|} \quad \text{pour } i = 2 \dots m_2$$

Ensuite, la relation (B.1) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T(t) & \mathbf{x}_2^T(t) \end{bmatrix} \right\|_2 &\leq \left\| \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_1^T(t)\|_2 & \|\mathbf{x}_2^T(t)\|_2 \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \left\| \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_1^T(t)\|_2 & \|\mathbf{x}_2^T(t)\|_2 \end{bmatrix} \right\|_1 \leq \|\mathbf{x}_1^T(t)\|_2 + \|\mathbf{x}_2^T(t)\|_2 \\ &\leq e^{-\gamma_2(t-t_0)} \left[ \alpha_{11} \|\bar{\mathbf{x}}_1(t_0)\|_2 + \alpha_{21} \|\bar{\mathbf{x}}_2(t_0)\|_2 + \sum_{i=1}^{m_2} \alpha_{2i} \|\bar{\mathbf{x}}_1(t_0)\|_2^i \right] \end{aligned}$$

Si on redéfinit  $\alpha_{21} = \alpha_{21} + \alpha_{11}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T(t) & \mathbf{x}_2^T(t) \end{bmatrix} \right\|_2 &\leq e^{-\gamma_2(t-t_0)} \left[ \alpha_{21} \left( \|\bar{\mathbf{x}}_1(t_0)\|_2 + \|\bar{\mathbf{x}}_2(t_0)\|_2 \right) + \sum_{i=2}^{m_2} \alpha_{2i} \|\bar{\mathbf{x}}_1(t_0)\|_2^i \right] \\ &\leq e^{-\gamma_2(t-t_0)} \left[ \alpha_{21} \left\| \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_1^T(t)\|_2 & \|\mathbf{x}_2^T(t)\|_2 \end{bmatrix} \right\|_1 + \sum_{i=2}^{m_2} \alpha_{2i} \|\bar{\mathbf{x}}_1(t_0)\|_2^i \right] \\ &\leq e^{-\gamma_2(t-t_0)} \left[ \alpha_{21} \sqrt{n} \left\| \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_1^T(t)\|_2 & \|\mathbf{x}_2^T(t)\|_2 \end{bmatrix} \right\|_2 + \sum_{i=2}^{m_2} \alpha_{2i} \|\bar{\mathbf{x}}_1(t_0)\|_2^i \right] \end{aligned}$$

Si on redéfinit  $\alpha_{21} = \sqrt{n}\alpha_{21}$ , on obtient finalement

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T(t) & \mathbf{x}_2^T(t) \end{bmatrix} \right\|_2 \leq e^{-\gamma_2(t-t_0)} \sum_{i=1}^{m_2} \alpha_{2i} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T(t_0) & \mathbf{x}_2^T(t_0) \end{bmatrix} \right\|_2^i \quad (\text{B.6})$$



De façon similaire, on peut obtenir les résultats suivants:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T(t) & \mathbf{x}_2^T(t) & \mathbf{x}_3^T(t) \end{bmatrix} \right\|_2 &\leq e^{-\gamma_3(t-t_0)} \sum_{i=1}^{m_2 \cdot m_3} \alpha_{3i} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T(t) & \mathbf{x}_2^T(t) & \mathbf{x}_3^T(t) \end{bmatrix} \right\|_2^i \\ &\vdots \\ \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T(t) & \mathbf{x}_2^T(t) & \dots & \mathbf{x}_\ell^T(t) \end{bmatrix} \right\|_2 &\leq e^{-\gamma_\ell(t-t_0)} \sum_{i=1}^{m_2 \cdot \dots \cdot m_\ell} \alpha_{\ell i} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T(t) & \mathbf{x}_2^T(t) & \dots & \mathbf{x}_\ell^T(t) \end{bmatrix} \right\|_2^i \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

L'expression (B.7) peut être réécrite de la façon suivante:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|_2, t - t_0) \quad (\text{B.8})$$

où

$$\beta(r, s) = e^{-\gamma_\ell s} \sum_{i=1}^m \alpha_{\ell i} r^i, \quad m = \prod_{i=2}^{\ell} m_i$$

Dans la relation (B.8), la fonction  $\beta$  est de classe  $\mathcal{KL}$ . Le système est donc globalement uniformément asymptotiquement stable par définition (Khalil, 1992, p.168).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00199923 2

École Polytechnique de Montréal  
C.P. 6079, Succ. Centre-ville  
Montréal (Québec)  
H3C 3A7

