EPM/RT-85-4

SIMULATION NUMERIQUE D'ECOULEMENTS VISQUEUX DANS UNE TURBINE HYDRAULIQUE

André Fortin, Ecole Polytechnique, Montréal
Michel Fortin, Université Laval, Québec
Vu C. Thi, Ateliers d'ingénierie Dominion, Montréal
Ricardo Camarero, Ecole Polytechnique, Montréal

Ecole Polytechnique de Montréal
Février 1985

Ce travail a été effectué dans le cadre du projet PRAI No. P-8122 et d'octrois de dépenses courantes du CRSNG.

Dépôt légal, 2e trimestre 1985
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au:

Service de l'édition
Ecole Polytechnique
Case Postale 6079, Succ. "A"
Montréal, Québec H3C 3A7
(514) 340-4903

Compter 0,05$ par page (arrondir au dollar le plus près), plus 1,50$ (Canada) ou 2,50$ (étranger) pour la couverture, les frais de poste et de manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'Ecole Polytechnique de Montréal. Nous n'honorerons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable, dans le cas d'établissements d'enseignement ou d'organismes canadiens.

LISTE DES SYMBOLES

ν	Viscosité cinématique
Re	Nombre de Reynolds
C_p	Coefficient de pression
C_d	Coefficient de trainée (drag)
C_f	Coefficient de friction
S	$1 - C_p$

1. INTRODUCTION

Nous présentons ici les résultats d'une étude visant la simulation numérique d'écoulements visqueux incompressibles dans le canal inter-aubes d'une turbine hydraulique. Cette étude s'insère dans le cadre beaucoup plus vaste d'un projet PRAI en collaboration avec les Ateliers d'ingénierie Dominion et visant la simulation complète de l'écoulement dans une turbine hydraulique. Dans cette première étape, nous considèrerons des écoulements laminaires, bidimensionnels, stationnaires et instationnaires. Des algorithmes de résolution utilisant la méthode des éléments finis sont présentés ainsi que des résultats numériques illustrant l'utilité de ces méthodes dans l'industrie des turbomachines.

2. POSITION DU PROBLEME

L'étude de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible nous amène à considérer la(les) solution(s) des équations de Navier-Stokes. Rappelons que pour un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$, de frontière lipchitzienne Γ, ces équations s'écrivent (utilisant la convention de sommation sur les indices répétés),

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{2}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}(D_{ij}(\underset{\sim}{u})) + (\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{\nabla})u_i + (\underset{\sim}{\nabla}p)_i = \underset{\sim}{f}_i \ , \ 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{2.1}$$

dans Ω, où $D_{ij}(\underset{\sim}{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$,

$$\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{u} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{2.2}$$

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{g} \quad \text{sur} \quad \Gamma \tag{2.3}$$

$$\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x},0) = \underset{\sim}{\bar{u}}(\underset{\sim}{x}) \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{2.4}$$

Dans le système d'équations précédent, $p = p(x_1,x_2,x_3,t)$ désigne la pression hydrostatique au point $\underset{\approx}{x} = (x_1,x_2,x_3)$ et au temps t et $u = (u_1,u_2,u_3)$ est bien entendu le vecteur vitesse. Les fonctions $\bar{\underset{\sim}{u}}$ et $\underset{\sim}{g}$ sont connues et donnent respectivement les conditions initiales (à $t = 0$) et les conditions aux limites (sur Γ). Finalement, Re désigne le nombre adimensionnel de Reynolds et est défini par

$$Re = \frac{Vd}{\nu} \tag{2.5}$$

où V et d sont respectivement une vitesse et une longueur de référence et ν est la viscosité cinématique.

Dans le cas qui nous intéresse, à savoir le canal inter-aubes d'une turbine hydraulique, il est bien évident que l'écoulement est fondamentalement tridimensionnel (et turbulent). On peut cependant obtenir des renseignements utiles (mais incomplets) par une simulation bidimensionnelle. On en vient alors à étudier les écoulements dans des géométries similaires à celle de la figure 1.

Un profil de vitesse $\underset{\sim}{u}_o$ est imposé à l'entrée du canal (1) et la condition de non-glissement ($\underset{\sim}{u} = 0$) sur les parois solides (3). Les conditions de périodicité (2) signifient que l'on a en pratique une cascade de canaux inter-aubes superposés. Les points où ces conditions sont imposées ne font pas véritablement partie de la frontière Γ. Finalement, on impose des conditions de contraintes nulles à la sortie du canal (4) à savoir

$$-p + \frac{2}{Re}\frac{\partial \underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{n}}{\partial \underset{\sim}{n}} \quad \text{(contrainte normale)} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{n}}{\partial \underset{\sim}{\tau}} + \frac{\partial \underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{\tau}}{\partial \underset{\sim}{n}} = 0, \quad \text{(contrainte tangentielle)} \tag{2.7}$$

où $\underset{\sim}{n}$ et $\underset{\sim}{\tau}$ désignent respectivement les vecteurs unitaires normal et tangent à la frontière Γ. Nous verrons plus loin que (2.6) et (2.7) sont des conditions aux limites naturelles associées à la méthode d'éléments finis utilisée. Nous référons le lecteur à [1] pour plus de détails.

3. METHODE DES ELEMENTS FINIS

Nous nous proposons de résoudre le système d'équations (2.1)-(2.4) par la méthode des éléments finis. Nous considérerons tout d'abord le cas d'écoulements stationnaires i.e. d'écoulement ne variant pas dans le temps. La condition (2.4) devient alors superflue tandis que $\underset{\sim}{u}$ et p ne dépendent plus que de $\underset{\sim}{x}$ et on a donc $\partial u_i/\partial t = 0$. Nous montrerons que le cas instationnaire se ramène à la résolution d'un problème stationnaire à chaque pas de temps.

3.1 Ecoulements stationnaires

Dans le cas d'écoulements stationnaires, les équations de Navier-Stokes se réduisent à

$$\frac{-2}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}(D_{ij}(\underset{\sim}{u})) + (\underset{\sim}{u}\cdot\nabla)u_i + (\nabla p)_i = \underset{\sim}{f}_i \ , \ 1 \leqslant i \leqslant n \tag{3.1}$$

$$\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{u} = 0 \tag{3.2}$$

Multipliant l'équation (3.1) par $\underset{\sim}{v} \in V$ et l'équation (3.2) par $q \in Q$ et intégrant (3.1) par parties, on obtient la formulation faible suivante:

$$\frac{2}{Re}(D_{ij}(\underset{\sim}{u}), D_{ij}(\underset{\sim}{v})) + ((\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{\nabla})\underset{\sim}{u} \ , \ \underset{\sim}{v}) - (p,\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{v}) = (\underset{\sim}{f},\underset{\sim}{v}) \quad \forall \underset{\sim}{v} \in V, \tag{3.3}$$

1 $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}_0$

2 frontière périodique.

3 $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}$.

4 contraintes nulles (1.4).

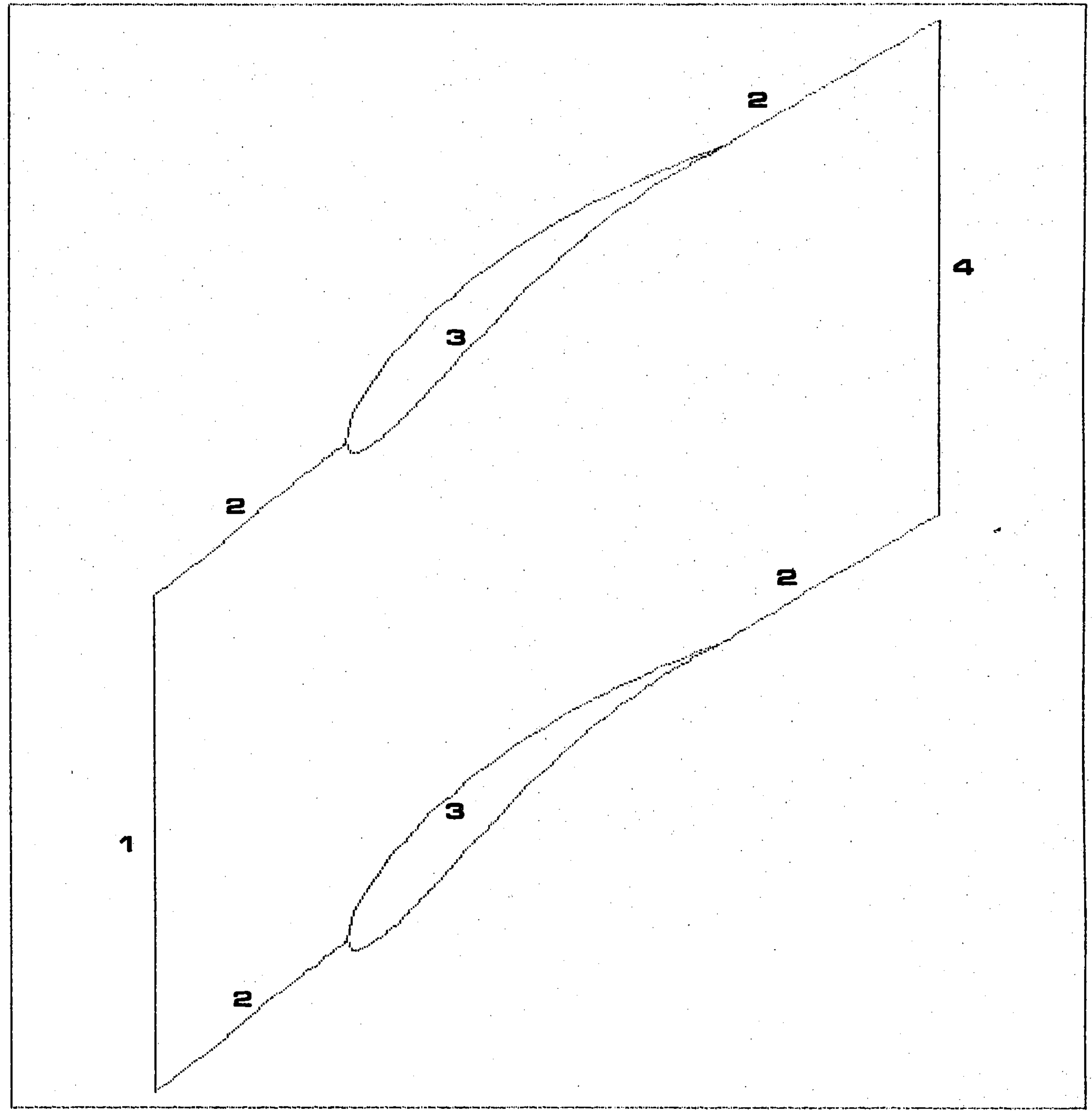


FIGURE 1 CANAL INTER-AUBES

$$(q, \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{u}) = 0 \quad \forall q \in Q. \tag{3.4}$$

Les espaces V et Q doivent être judicieusement choisi de sorte que (3.3)-(3.4) soit équivalent à (3.1)-(3.2) tout au moins au sens des distributions. En général, Q sera l'espace des fonctions de carré sommable et V un sous-espace des fonctions de carré sommable et dont les dérivées sont de carré sommable. Plus précisément, on a

$$Q = L^2(\Omega) = \{v \mid \int_\Omega v^2 \, dX < \infty\}, \tag{3.5}$$

$$H^1_0(\Omega) = \{v \mid v \in L^2(\Omega), \ (\underset{\sim}{\nabla} v) \in (L^2(\Omega))^n, \ v|_\Gamma = 0\} \tag{3.6}$$

$$V = (H^1_0(\Omega))^n. \tag{3.7}$$

Les parenthèses (,) désigne le produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

Pour discrétiser la formulation faible (3.3)-(3.4), on partitionne en premier lieu le domaine Ω en sous-domaines appelés éléments. On construit alors des espaces de dimension finie V_h et Q_h approximant V et Q. On approxime alors la vitesse et la pression par

$$\underset{\sim}{u}_h = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, \underset{\sim}{\varphi}_i(\underset{\sim}{x}) \tag{3.8}$$

$$p_h = \sum_{i=1}^{M} p_i \, \psi_i(\underset{\sim}{x}) \tag{3.9}$$

où N et M désignent le nombre de noeuds d'interpolation en vitesse et en pression respectivement. Les fonctions $\{\underset{\sim}{\varphi}_i(x)\}_{i=1}^N$ et $\{\psi_i(\underset{\sim}{x})\}_{i=1}^M$ forment des bases respectives de V_h et Q_h et sont des fonctions polynomiales par morceaux. Le problème discret consiste alors à trouver $\underset{\sim}{u}_h$ et p_h tels que

$$\frac{2}{Re} (D_{ij}(\underset{\sim}{u}_h), D_{ij}(\underset{\sim}{v}_h)) + ((\underset{\sim}{u}_h \cdot \underset{\sim}{\nabla})\underset{\sim}{u}_h, \underset{\sim}{v}_h) - (p_h, \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{v}_h) = (\underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{v}_h) \quad \forall \underset{\sim}{v}_h \in V_h, \tag{3.10}$$

$$(q_h, \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{u}_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \tag{3.11}$$

que l'on peut réécrire sous forme matricielle

$$K \underset{\sim}{u}_h + N(\underset{\sim}{u}_h) \underset{\sim}{u}_h + C P_h = \underset{\sim}{f} \tag{3.12}$$

$$C^T \underset{\sim}{u}_h = 0 \tag{3,13}$$

On remarque immédiatement que le système d'équations (3.12)-(3.13) est non-linéaire ce qui demandera un traitement particulier. De plus, la contrainte (3.13) (ou 3.11) n'est plus équivalente à $\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{u}_h = 0$. En conséquence, la conservation de la masse ne sera imposée que dans un sens plus faible (voir [1]). Il est de plus maintenant bien connu que l'on ne peut pas choisir indépendamment les espaces V_h et Q_h. En effet, pour que le problème (3.12)-(3.13) soit bien posé, ces espaces doivent satisfaire une condition théorique mieux connue sous le nom de condition de Babuska-Brezzi (cf. [4]). On doit donc être très prudent en ce qui a trait au choix de l'élément utilisé. En deux dimensions, l'un des meilleurs choix possibles est l'élément $Q_2^{(9)} - P_1$ (voir figure 2). La vitesse est biquadratique sur chaque élément et continue d'un élément à l'autre tandis que la pression est linéaire et discontinue. On obtient ainsi 18 degrés de liberté en vitesse et 3 en pression sur chaque élément.

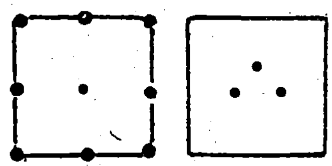


Figure 2 L'élément $Q_2^{(9)} - P_1$

Afin de réduire autant que possible le temps de calcul et l'espace-mémoire nécessaires à la résolution, nous avons mis au point un algorithme permettant d'éliminer le noeud interne en vitesse et les deux composantes du gradient de pression. Cela est possible en utilisant la contrainte (3.11) et nous référons à [3] pour les détails techniques. Nous avons donc, au point de vue calculatoire, 16 degrés de liberté en vitesse et 1 en pression sur chaque élément tout en conservant toute la précision de l'élément $Q_2^{(9)} - P_1$ (qui est un élément d'ordre 2).

Finalement, la non-linéarité de l'équation (3.10) requérant un traitement spécial, une généralisation de l'algorithme d'Usawa , valide pour les équations de Stokes, a été développé et utilisé avec succès pour les équations de Navier-Stokes (voir [2]). Cette nouvelle méthode résulte en l'algorithme suivant:

Posant

$$R(\underset{\sim}{u}, p) = -\frac{1}{Re}\Delta\underset{\sim}{u} + (\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{\nabla})\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{\nabla}p - \underset{\sim}{f}, \qquad (3.14)$$

on résout successivement

Etape 0: u^o, p^o donnés arbitrairement
Etape 1: Pour $n \geq 0$, ($\underset{\sim}{u}^n$, p^n étant connus)

$$-\frac{1}{Re}\Delta\delta\underset{\sim}{u}^n + (\underset{\sim}{u}^n\cdot\underset{\sim}{\nabla})\,\delta\underset{\sim}{u}^n + (\delta\underset{\sim}{u}^n\cdot\nabla)\underset{\sim}{u}^n + r\,\underset{\sim}{\nabla}(\underset{\sim}{\nabla}\cdot\delta\underset{\sim}{u}^n) = R(\underset{\sim}{u}^n, p^n) + r\,\underset{\sim}{\nabla}(\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{u}^n) \qquad (3.15)$$

Etape 2: $\underset{\sim}{u}^{n+1} = u^n - \delta u^n$
$p^{n+1} \cong p^n - r\,\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{u}^{n+1}$

L'algorithme précédent est similaire à la méthode classique de Newton-Raphson, à la différence près qu'un terme de pénalisation est ajouté dans (3.15) pour tenir compte de la condition d'incompressibilité . On remarque également que la résolution de (3.15) requiert l'assemblage et la factorisation d'une nouvelle matrice à chaque itération. On peut contourner aisément cette difficulté en utilisant une méthode dite quasi-Newton pour laquelle la matrice est fixée une fois pour toutes. Il suffit pour cela de remplacer $\underset{\sim}{u}^n$ par $\underset{\sim}{u}^o$ dans le membre de gauche de (3.15). On obtient ainsi un algorithme beaucoup plus économique.

3.2 Ecoulements instationnaires

L'utilisation concrète de l'algorithme (3.15) doit être associé à un processus de montée en nombre de Reynolds. Typiquement, l'utilisateur commencera à Re = 1 et augmentera graduellement jusqu'au nombre désiré. Il y a cependant une limite supérieure aux nombres de Reynolds que l'on peut atteindre au-delà duquel on perd la convergence de l'algorithme. Il peut y avoir plusieurs causes à ce phénomène, notamment des raisons purement numériques. L'expérience a cependant démontré que cette perte de convergence était causée par le développement d'un écoulement instationnaire i.e. variant avec le temps. Pour en tenir compte, on doit retourner aux équations de Navier-Stokes complètes (2.1)-(2.4) et discrétiser le terme $\partial u_i/\partial t$.

Il existe de nombreuses façons de traiter numériquement les écoulements instationnaires. Nous référons par exemple à GRESHO et al. [7] pour les schémas explicites. Nous avons pour notre part opté pour un schéma implicite qui offre une plus grande précision et beaucoup moins de problèmes de stabilité.

Le schéma implicite le plus populaire est sans doute le schéma d'Euler résultant en algorithme

$$\frac{\underset{\sim}{u}^{n+1}-\underset{\sim}{u}^{n}}{\Delta t} - \frac{1}{Re}\Delta \underset{\sim}{u}^{n+1} + (\underset{\sim}{u}^{n+1}\cdot\underset{\sim}{\nabla})\underset{\sim}{u}^{n+1} + (\underset{\sim}{\nabla} p)^{n+1} = \underset{\sim}{f}$$

$$\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{u}^{n+1} = 0 \qquad (3.16)$$

On voit donc que connaissant la solution au pas de temps précédent $\underset{\sim}{u}^n$, on doit donc résoudre à chaque nouveau pas de temps un problème similaire au cas stationnaire auquel on ajoute un terme. Quoique (3.16) donne d'assez bon résultats, on remarque qu'il n'est que d'ordre 1 en temps. On peut se demander s'il ne serait pas possible d'obtenir un schéma d'ordre 2 sans pour cela augmenter indûment le coût. Nous avons donc considéré un schéma d'ordre 2 dit de Gear , pour lequel il suffit de remplacer le premier terme de (3.16) par

$$\frac{3/2\underset{\sim}{u}^{n+1} - 2\underset{\sim}{u}^{n} + 1/2\underset{\sim}{u}^{n-1}}{\Delta t} . \qquad (3.17)$$

Le prix à payer pour utiliser (3.17) est le stokage de la solution $\underset{\sim}{u}^{n-1}$ qui nécessite un plus grand espace-mémoire. Ce coût supplémentaire est à notre avis largement compensé par un gain en précision et la possibilité d'utiliser un pas de temps Δt plus grand. Nous avons en effet testé les schémas (3.16) et (3.17) dans un cas où la solution des équations de Navier-Stokes instationnaires est connue. On peut en effet montrer que

$$\begin{aligned} u &= \sin x \cos y \, e^{-2t} \\ v &= -\sin y \cos x \, e^{-2t} \\ p &= .25(\cos 2x + \cos 2y) \, e^{-4t} \end{aligned} \tag{3.18}$$

est une solution exacte des équations de Navier-Stokes. Nous avons ensuite considéré le domaine $\Omega = [0,\pi]^2$ et nous avons calculé l'erreur $|\underset{\sim}{u}^{n+1} - \underset{\sim}{u} \text{ exact}|$ pour différents pas de temps. Les résultats sont donnés à la figure 3. On remarque immédiatement que pour Δt donné, l'erreur est beaucoup plus petite avec le schéma de Gear. Ce n'est bien sûr pas étonnant car ce dernier a un ordre de précision de plus. Nous pouvons cependant conclure qu'étant donné le faible coût supplémentaire, le schéma de Gear est très avantageux.

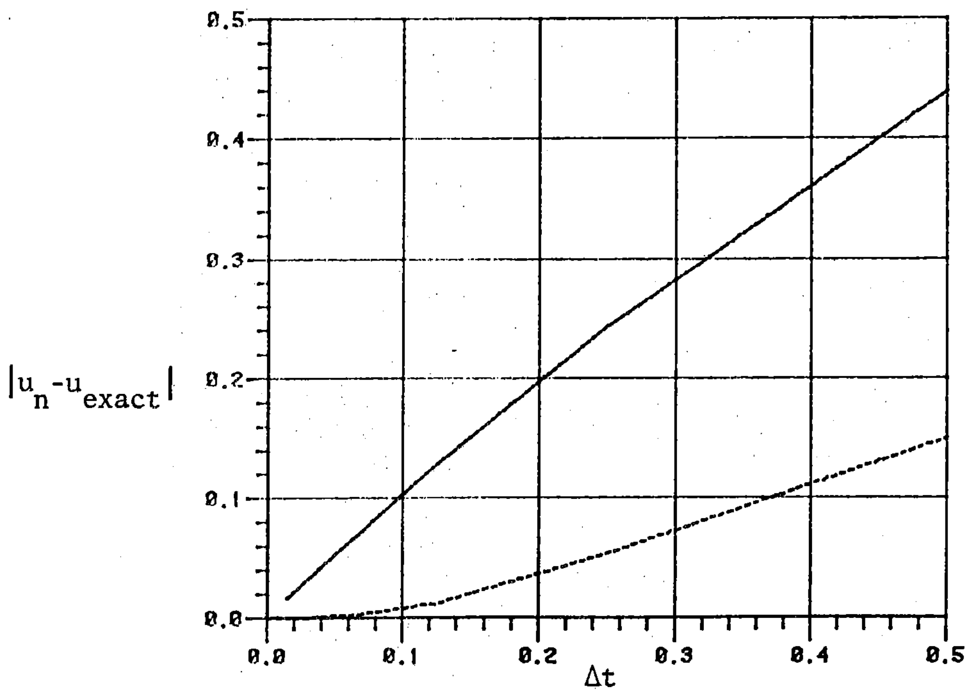


Figure 3

Remarque: Il est à noter qu'il n'est pas nécessaire de refactoriser une nouvelle matrice à chaque pas de temps pour utiliser l'algorithme (3.17). On peut en effet ne factoriser une nouvelle matrice que lorsque, par exemple, le nombre d'itérations nécessaire à la convergence de la méthode quasi-Newton devient trop grand. On économise ainsi beaucoup de temps de calcul. De plus, une méthode de mise-à-jour de type Broyden est envisagée dans le but de diminuer encore le temps de calcul.

Une tentative a été effectuée dans le but d'améliorer ce schéma. En effet, à chaque pas de temps, on doit résoudre un problème non-linéaire par une méthode quasi Newton-Raphson. Au temps t_{n+1}, la meilleure approximation disponible de $\tilde{u}^{n+1}$ est bien sûr $\tilde{u}^{n}$. L'idée est alors d'utiliser une méthode de Prédiction-Correction pour améliorer cet estimé initial. Nous avons testé entre autres le schéma suivant:

Prédicteur: Leap-Frog explicite

$$\frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n-1}}{2\Delta t} - \nu\Delta \tilde{u}^{n} + (\tilde{u}^{n}\cdot\tilde{\nabla})\tilde{u} + \tilde{\nabla} p^{n} = \tilde{f}$$

Correcteur: Gear explicite

L'expérience fut cependant un échec car lorsqu'on utilise $\tilde{u}^{n+1}$ comme estimé initial dans le schéma de Gear, on ralentit la convergence. Cela est du au fait que $\tilde{u}^{n+1}$ ne satisfait pas la condition d'incompressibilité (3.11). En conséquence, les premières itérations du schéma correcteur sont utilisées pour rendre la solution initiale à divergence nulle. Le schéma prédicteur-correcteur a donc été abandonné.

4. RESULTATS NUMERIQUES

4.1 Ecoulements permanents

L'utilisation du logiciel d'éléments finis développé dans le cadre de cette étude, se divise en quatre étapes principales:

1) Obtention ou création d'un profil d'aubes.
2) Création d'un maillage.
3) Résolution numérique par éléments finis.
4) Analyse des résultats.

Les différents profils d'aubes considérés, nous ont été fournis par les Ateliers d'Ingénierie Dominion. Une fois les coordonnées d'un profil disponibles, on procède à la création d'un maillage en vue de la résolution par éléments finis. On obtient typiquement des maillages comme celui de la figure 4. Nous référons à [5] pour les détails concernant la technique de création du maillage.

Les coordonnées du maillage sont alors passées au programme d'éléments finis qui résout les équations de Navier-Stokes et qui donne comme résultats le champ des vitesses et la pression. Ces résultats sont ensuite passés au post-processeur qui les analyse et les traduit sous forme de champ de vitesses, isobares, isovorticité, perte de pression totale, etc. L'utilisateur peut alors, s'il le désire, faire des comparaisons entre différents profils d'aubes et s'en inspirer pour prendre des décisions. Les figures 5 à 6 donnent des exemples d'affichage du post-processeur. On remarquera à la droite du graphique les paramètres fondamentaux tels que nombre de Reynolds, taille du maillage, caractéristiques du profil etc. On obtient ainsi un tableau assez complet des propriétés d'un profil donné (que l'on peut voir dans le cadre supérieur du graphique).

Nous ne prétendons pas bien sûr être en mesure de simuler parfaitement l'écoulement dans une turbine hydraulique. Nous travaillons présentement à l'élaboration d'un logiciel tridimensionnel et turbulent qui sera certainement plus près d'un véritable écoulement. Nous espérons par la suite nous approcher davantage des résultats expérimentaux, ce qui est présentement difficile puisque le programme actuel ne permet de simuler que des écoulements à bas nombres de Reynolds.

```
CARACTERISTIQUES DU PROFIL

PROFIL          =  P30 PRO
CORDE           =   1.000
NOMBRE DE PTS =   30

CARACTERISTIQUES DE LA CASCADE

NOMBRE DE RANGEE  =    21
NO. TOTAL COLONNE =    60
NO. COL. ENTREE   =    15
NO. COL. SORTIE   =    15

LONG. INTERAUBE   =  0.6667
LONG. ENTREE      =   1.000
LONG. SORTIE      =   1.000

ANGLE ENTREE (DEG)=   30.00
ANGLE PROFIL (DEG)=  -25.00
ANGLE SORTIE (DEG)=  -40.00

CONC. RANGEES     =  0.6000
CONC. COL. ENTREE =  0.5000
CONC. COL. SORTIE =  0.5000
```

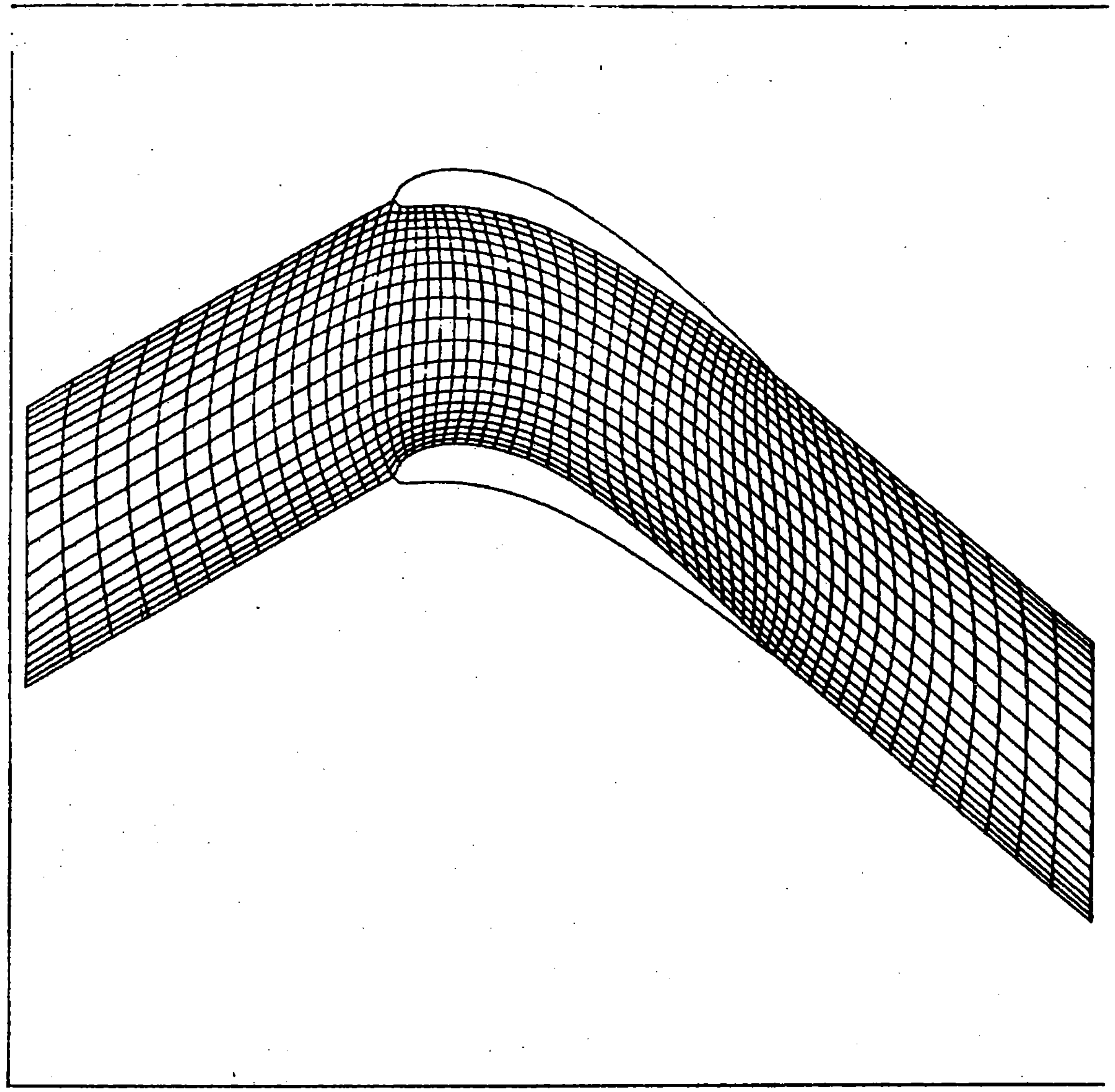


Figure 4   Maillage (Profil NACA80)

```
ANALYSE FEM - NACA80

SOLUTION   R1000.F21

ECOULEMENT VISQUEUX
REYNOLDS =   1000.0

ANGLE PROFIL  =  -25.00
ANGLE ATTAQUE =   30.00
ANGLE FUITE   =  -34.00

COEF. CD  =  0.3543
COEF. CL  =   1.363
COEF. CA  =  0.4121
COEF. CT  =   1.346
TORQUE CM =  -1.203

CARACTERISTIQUES DU PROFIL

PROFIL          =  P30.PRO
CORDE           =    1.000
NOMBRE DE PTS   =   30

CARACTERISTIQUES DE LA CASCADE

CASCADE            =  F2160.CAS
NOMBRE DE RANGEE   =   21
NO. TOTAL COLONNE  =   60
NO. COL. ENTREE    =   15
NO. COL. SORTIE    =   15

LONG. INTERAUBE    =  0.6667
LONG. ENTREE       =   1.000
LONG. SORTIE       =   1.000

ANGLE ENTREE (DEG)=   30.00
ANGLE PROFIL (DEG)=  -25.00
ANGLE SORTIE (DEG)=  -40.00

CONC. RANGEES      =  0.6000
CONC. COL. ENTREE  =  0.5000
CONC. COL. SORTIE  =  0.5000

COMPOSANT UX MAX =    1.622
(RANG= 4 ,COL.=22 )
COMPOSANT UX MIN = -0.1312
(RANG= 4 ,COL.=47 )
```

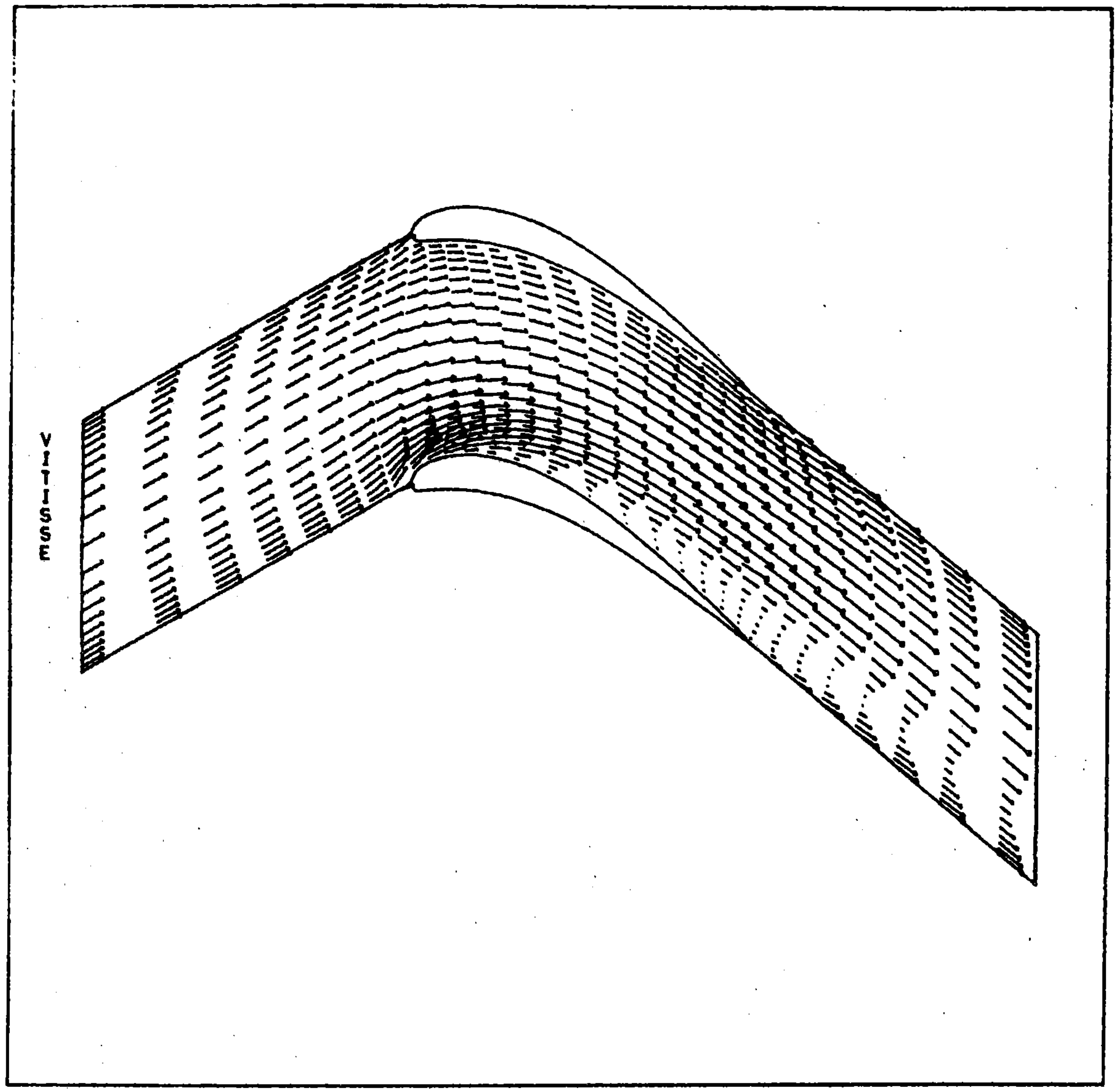


Figure 5a   Profil NACA80

ANALYSE FEM - NACA00

SOLUTION R1000.F21

ECOULEMENT VISQUEUX
REYNOLDS = 1000.0

ANGLE PROFIL = -25 00
ANGLE ATTAQUE = 30.00
ANGLE FUITE = -34.08

COEF. CD = 0.3543
COEF. CL = 1.363
COEF. CA = 0.4121
COEF. CT = 1.346
TORQUE CM = -1.203

CARACTERISTIQUES DU PROFIL

PROFIL = P30.PRO
CORDE = 1.000
NOMBRE DE PTS = 30

CARACTERISTIQUES DE LA CASCADE

CASCADE = F2160.CAS
NOMBRE DE RANGEE = 21
NO. TOTAL COLONNE = 60
NO. COL. ENTREE = 15
NO. COL. SORTIE = 15

LONG. INTERAUBE = 0.6667
LONG. ENTREE = 1.000
LONG. SORTIE = 1.000

ANGLE ENTREE (DEG)= 30.00
ANGLE PROFIL (DEG)= -25.00
ANGLE SORTIE (DEG)= -40.00

CONC. RANGEES = 0.6000
CONC. COL. ENTREE = 0.5000
CONC. COL. SORTIE = 0.5000

PRESSION STAT. MAX = 1.000
(RANG=21 ,COL.=16)
PRESSION STAT. MIN = -2.360
(RANG= 1 ,COL.=18)

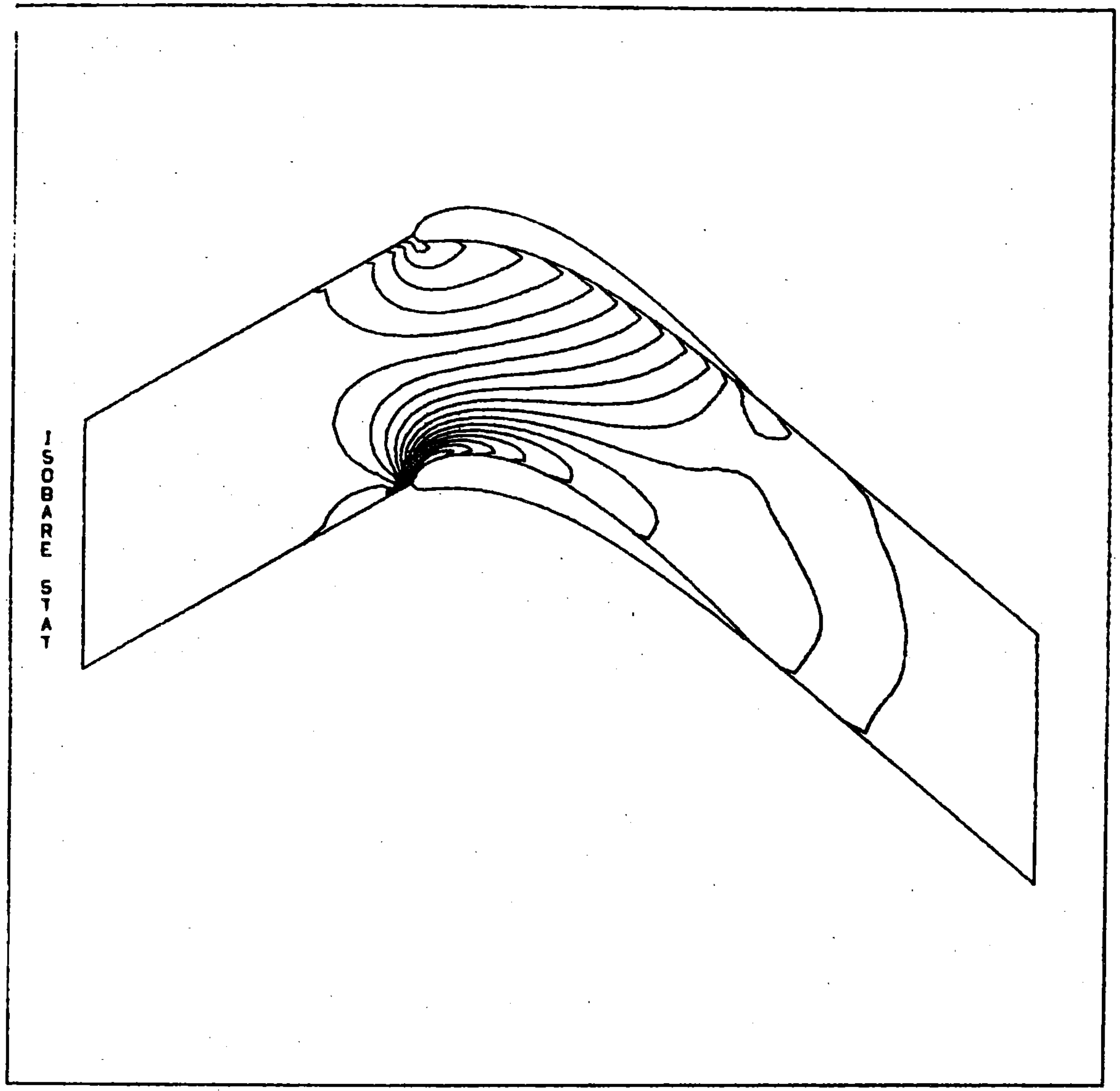


Figure 5b

ANALYSE FEM - NACA00

SOLUTION R'000 F21

ECOULEMENT VISQUEUX
REYNOLDS = 1000.0

ANGLE PROFIL = -25.00
ANGLE ATTAQUE = 30.00
ANGLE FUITE = -34.00

COEF. CD = 0.3543
COEF. CL = 1.363
COEF. CA = 0.4121
COEF. CT = 1.346
TORQUE CM = -1.203

CARACTERISTIQUES DU PROFIL

PROFIL = P30.PRO
CORDE = 1.000
NOMBRE DE PTS = 30

CARACTERISTIQUES DE LA CASCADE

CASCADE = F2160.CAS
NOMBRE DE RANGEE = 21
NO. TOTAL COLONNE = 60
NO. COL. ENTREE = 15
NO. COL. SORTIE = 15

LONG. INTERAUBE = 0.6667
LONG. ENTREE = 1.000
LONG. SORTIE = 1.000

ANGLE ENTREE (DEG)= 30.00
ANGLE PROFIL (DEG)= -25.00
ANGLE SORTIE (DEG)= -40.00

CONC. RANGEES = 0.6000
CONC. COL. ENTREE = 0.5000
CONC. COL. SORTIE = 0.5000

ENERGIE CINETIQUE MAX = 2.925
(RANG= 3 ,COL.=18)
ENERGIE CINETIQUE MIN = 0.0000E+00

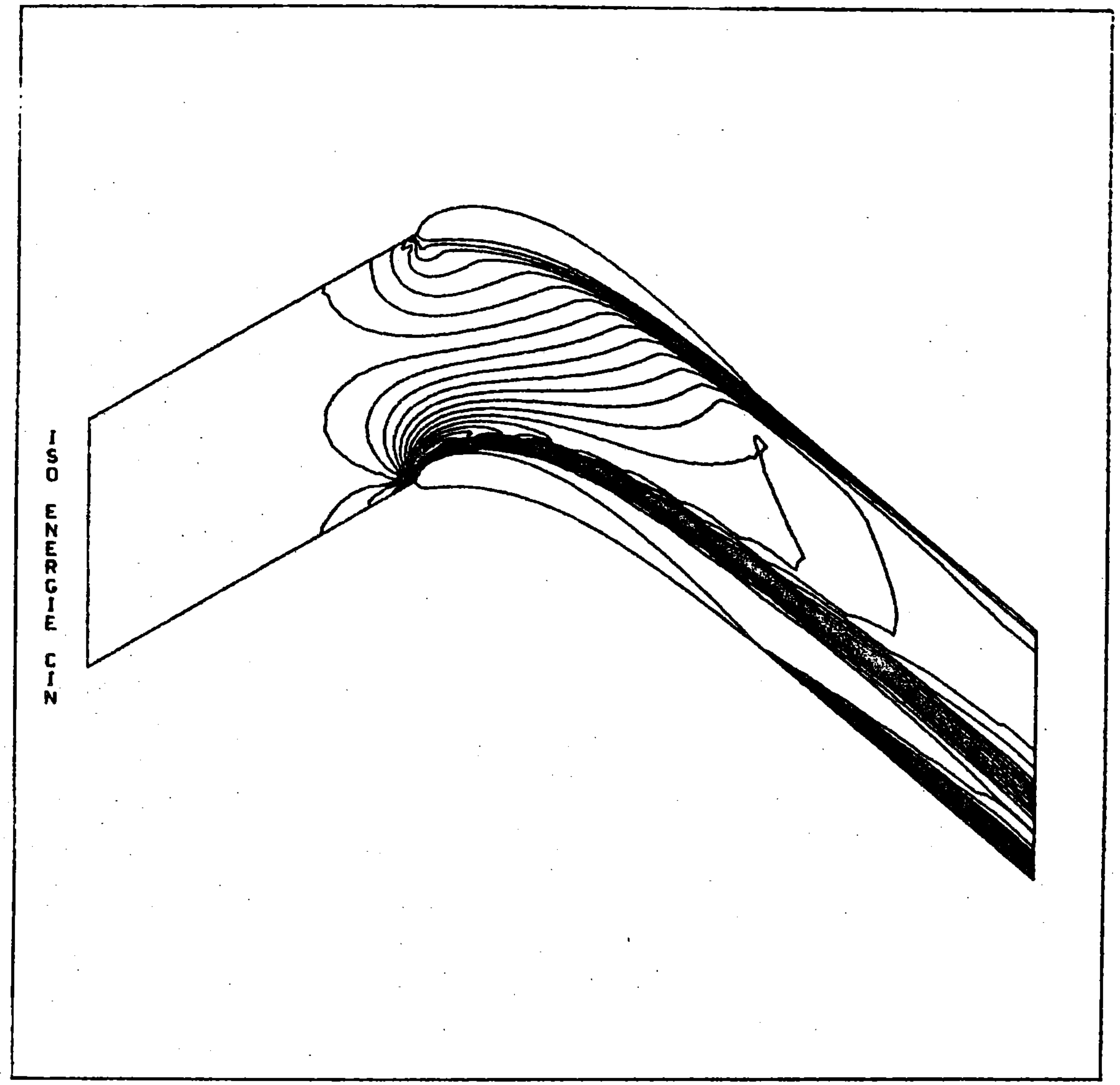


Figure 5c

```
ANALYSE FEM - NACA00

SOLUTION    R1000.F21

ECOULEMENT VISQUEUX
REYNOLDS =    1000.0

ANGLE PROFIL   =  -25.00
ANGLE ATTAQUE  =   30.00
ANGLE FUITE    =  -34.88

COEF. CD  =  0.3543
COEF. CL  =   1.363
COEF. CA  =  0.4121
COEF. CT  =   1.346
TORQUE CM =  -1.203

CARACTERISTIQUES DU PROFIL

PROFIL          =  P30.PRO
CORDE           =   1.000
NOMBRE DE PTS   =   30

CARACTERISTIQUES DE LA CASCADE

CASCADE             =  F2160.CAS
NOMBRE DE RANGEE    =   21
NO. TOTAL COLONNE   =   60
NO. COL. ENTREE     =   15
NO. COL. SORTIE     =   15

LONG. INTERAUBE     =  0.6667
LONG. ENTREE        =   1.000
LONG. SORTIE        =   1.000

ANGLE ENTREE (DEG)=   30.00
ANGLE PROFIL (DEG)=  -25.00
ANGLE SORTIE (DEG)=  -40.00

CONC. RANGEES      =  0.6000
CONC. COL. ENTREE  =  0.5000
CONC. COL. SORTIE  =  0.5000
```

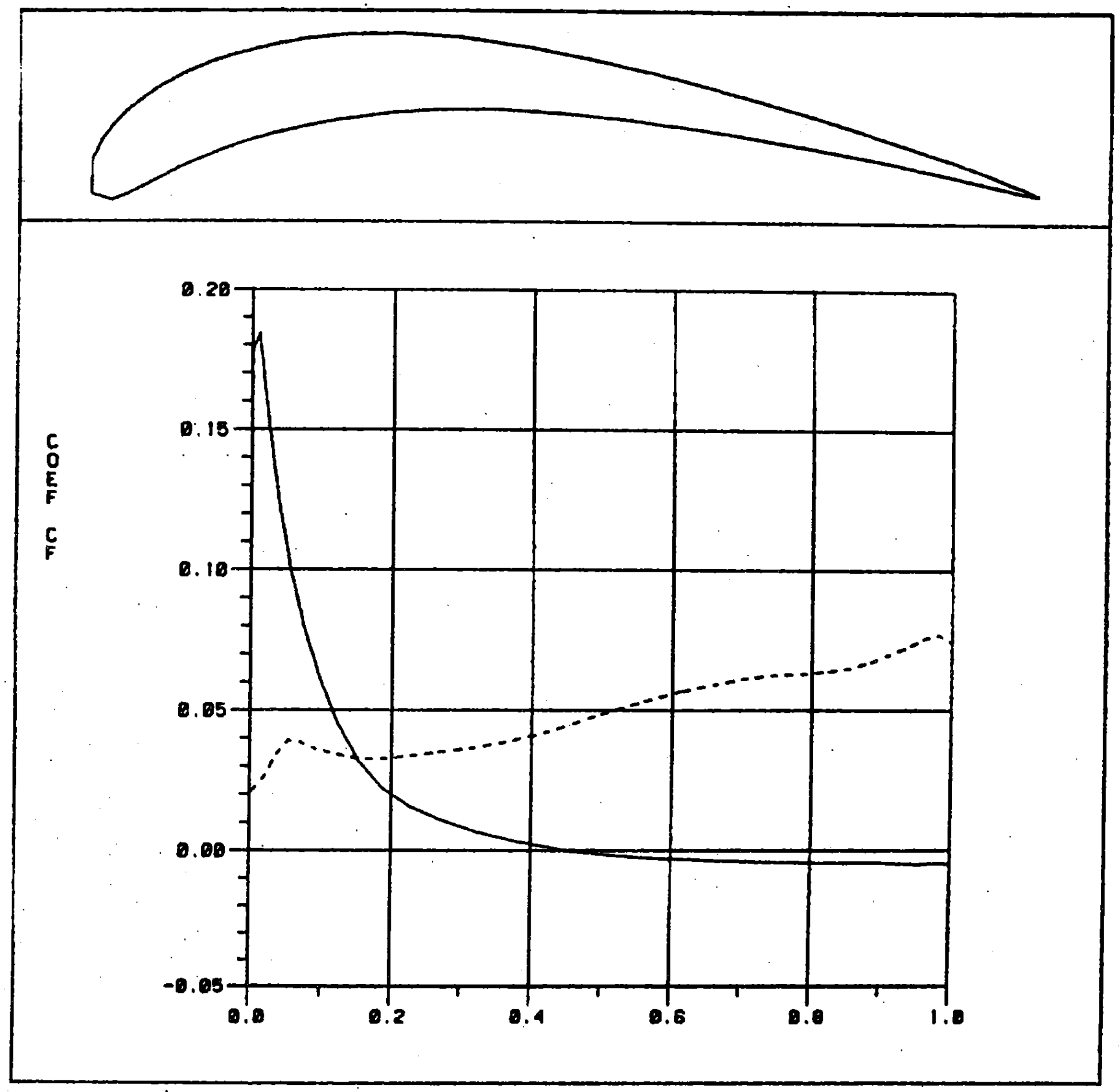


Figure 5d

ANALYSE FEM - NACA00

SOLUTION R1000.F21

ECOULEMENT VISQUEUX
REYNOLDS = 1000.0

ANGLE PROFIL = -25.00
ANGLE ATTAQUE = 30.00
ANGLE FUITE = -34.88

COEF. CD = 0.3543
COEF. CL = 1.363
COEF. CA = 0.4121
COEF. CT = 1.346
TORQUE CM = -1.203

CARACTERISTIQUES DU PROFIL

PROFIL = P30.PRO
CORDE = 1.000
NOMBRE DE PTS = 30

CARACTERISTIQUES DE LA CASCADE

CASCADE = F2160.CAS
NOMBRE DE RANGEE = 21
NO. TOTAL COLONNE = 60
NO. COL. ENTREE = 15
NO. COL. SORTIE = 15

LONG. INTERAUBE = 0.6667
LONG. ENTREE = 1.000
LONG. SORTIE = 1.000

ANGLE ENTREE (DEG)= 30.00
ANGLE PROFIL (DEG)= -25.00
ANGLE SORTIE (DEG)= -40.00

CONC. RANGEES = 0.6000
CONC. COL. ENTREE = 0.5000
CONC. COL. SORTIE = 0.5000

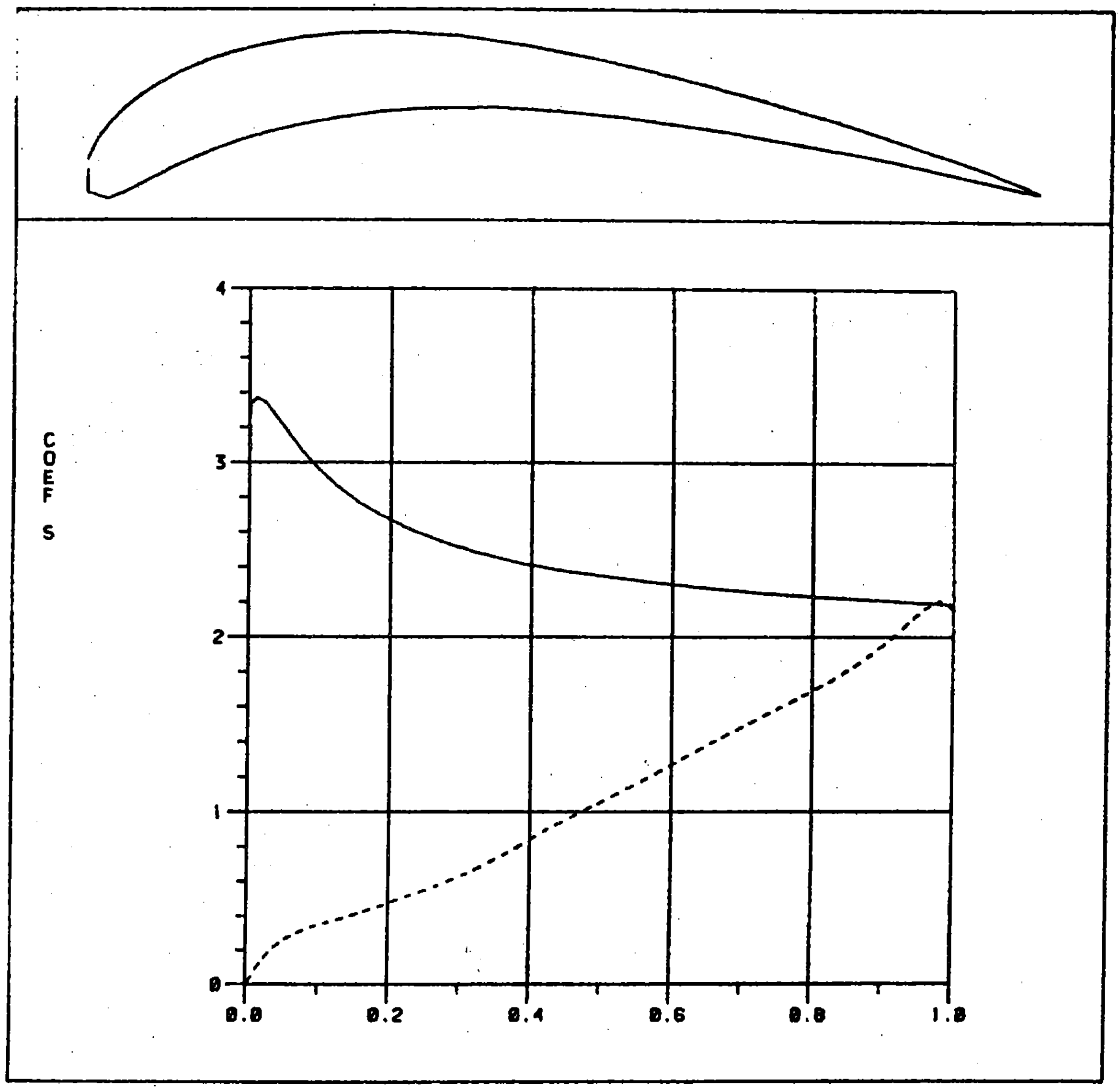


Figure 5e

ANALYSE FEM - NACA80

SOLUTION R1000.F21

ECOULEMENT VISQUEUX
REYNOLDS = 1000.0

ANGLE PROFIL = -25.00
ANGLE ATTAQUE = 30.00
ANGLE FUITE = -34.88

COEF. CD = 0.3543
COEF. CL = 1.363
COEF. CA = 0.4121
COEF. CT = 1.346
TORQUE CM = -1.203

CARACTERISTIQUES DU PROFIL

PROFIL = P30 PRO
CORDE = 1.000
NOMBRE DE PTS = 30

CARACTERISTIQUES DE LA CASCADE

CASCADE = F2160.CAS
NOMBRE DE RANGEE = 21
NO. TOTAL COLONNE = 60
NO. COL. ENTREE = 15
NO. COL. SORTIE = 15

LONG. INTERAUBE = 0.6667
LONG. ENTREE = 1.000
LONG. SORTIE = 1.000

ANGLE ENTREE (DEG)= 30.00
ANGLE PROFIL (DEG)= -25.00
ANGLE SORTIE (DEG)= -40.00

CONC. RANGEES = 0.6000
CONC. COL. ENTREE = 0.5000
CONC. COL. SORTIE = 0.5000

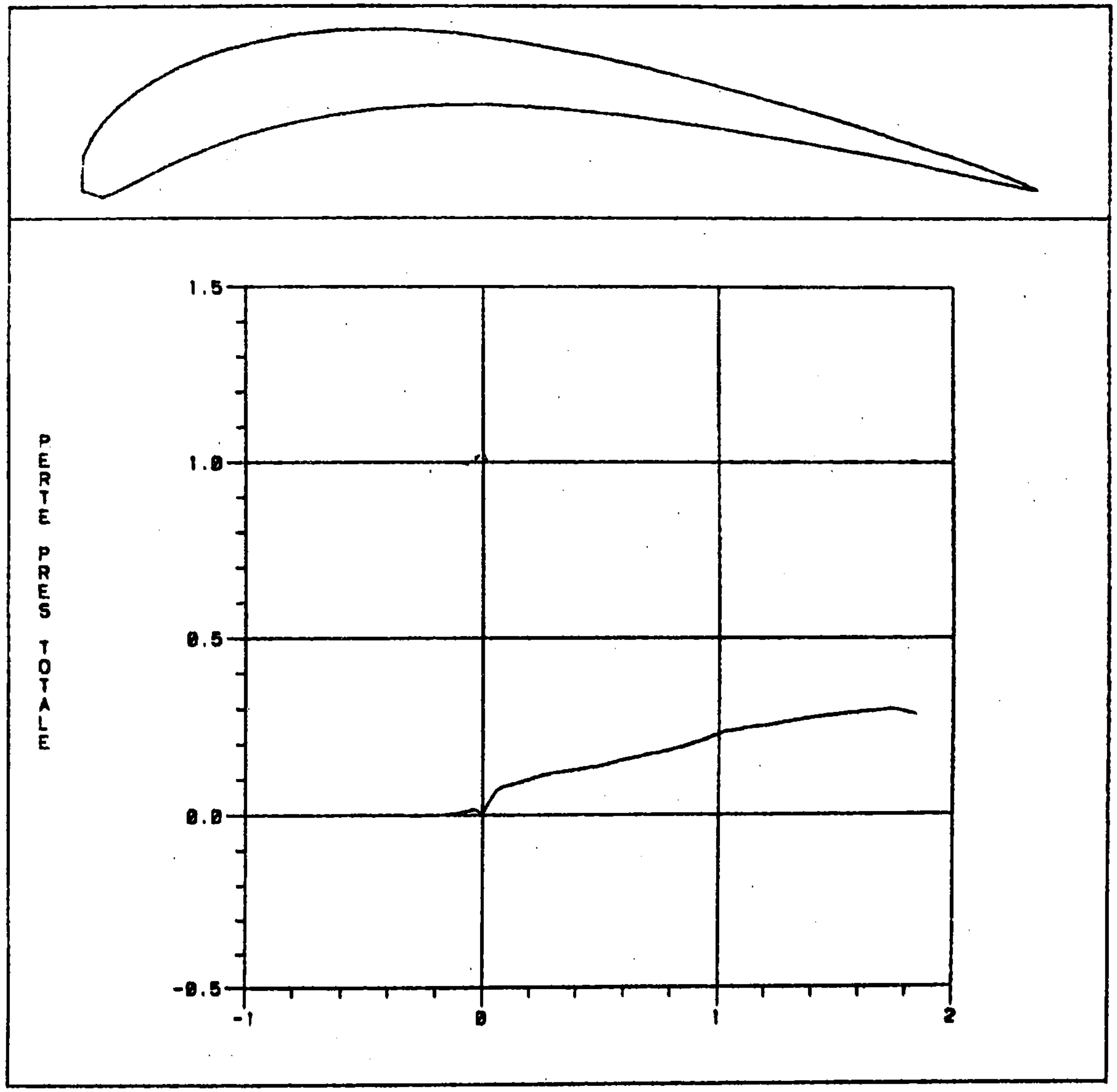


Figure 5f

```
ANALYSE FEM - PROFIL P&W

SOLUTION   R1000.F21

ECOULEMENT VISQUEUX
REYNOLDS =   1000.0

ANGLE PROFIL  =  -35.00
ANGLE ATTAQUE =   45.30
ANGLE FUITE   =  -62.62

COEF. CD  =   1.979
COEF. CL  =   2.935
COEF. CA  =   2.398
COEF. CT  =   2.604
MOMENT CM =  -2.508

CARACTERISTIQUES DU PROFIL

PROFIL         =  P30.PRO
CORDE          =   1.000
NOMBRE DE PTS  =   30

CARACTERISTIQUES DE LA CASCADE

CASCADE             =  F2160.CAS
NOMBRE DE RANGEE    =   21
NO. TOTAL COLONNE   =   60
NO. COL. ENTREE     =   15
NO. COL. SORTIE     =   15

LONG. INTERAUBE     =  0.7810
LONG. ENTREE        =  0.8000
LONG. SORTIE        =   1.500

ANGLE ENTREE (DEG)=   35.00
ANGLE PROFIL (DEG)=  -35.00
ANGLE SORTIE (DEG)=  -55.00

RAPP. RANGEES       =  0.7000
RAPP. COL. ENTREE   =  0.5000
RAPP. COL. SORTIE   =  0.5000

COMPOSANT UX MAX =   1.224
(RANG= 5 ,COL.=28 )
COMPOSANT UX MIN = -0.7793E-01
(RANG=20 ,COL.=45 )
```

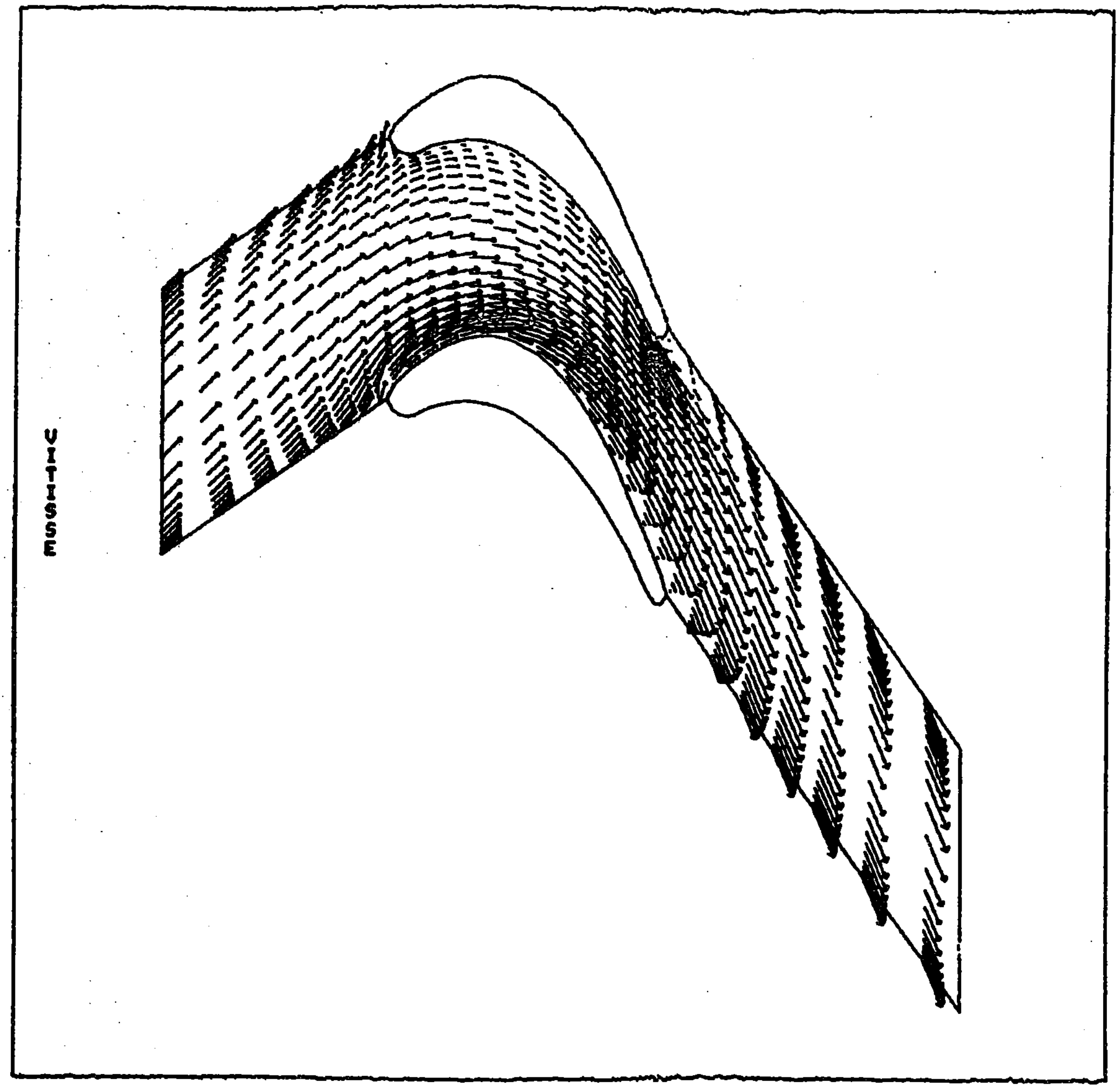


Figure 6a   Profil Pratt & Whitney

ANALYSE FEM - PROFIL P&W

SOLUTION   R1000.F21

ECOULEMENT VISQUEUX
REYNOLDS =   1000.0

ANGLE PROFIL = -35.00
ANGLE ATTAQUE =   45.30
ANGLE FUITE   = -62.62

COEF. CD =   1.979
COEF. CL =   2.935
COEF. CA =   2.398
COEF. CT =   2.604
TORQUE CM = -2.508

CARACTERISTIQUES DU PROFIL

PROFIL   = P30.PRO
CORDE   =   1.000
NOMBRE DE PTS =   30

CARACTERISTIQUES DE LA CASCADE

CASCADE   = F2160.CAS
NOMBRE DE RANGEE   =   21
NO. TOTAL COLONNE   =   60
NO. COL. ENTREE   =   15
NO. COL. SORTIE   =   15

LONG. INTERAUBE   = 0.7810
LONG. ENTREE   = 0.8000
LONG. SORTIE   =   1.500

ANGLE ENTREE (DEG)=   35.00
ANGLE PROFIL (DEG)=   -35.00
ANGLE SORTIE (DEG)=   -55.00

CONC. RANGEES   = 0.7000
CONC. COL. ENTREE   = 0.5000
CONC. COL. SORTIE   = 0.5000

PRESSION STAT. MAX =   1.000
(RANG=21 ,COL.=18)
PRESSION STAT. MIN =   -4.194
(RANG= 1 ,COL.=33)

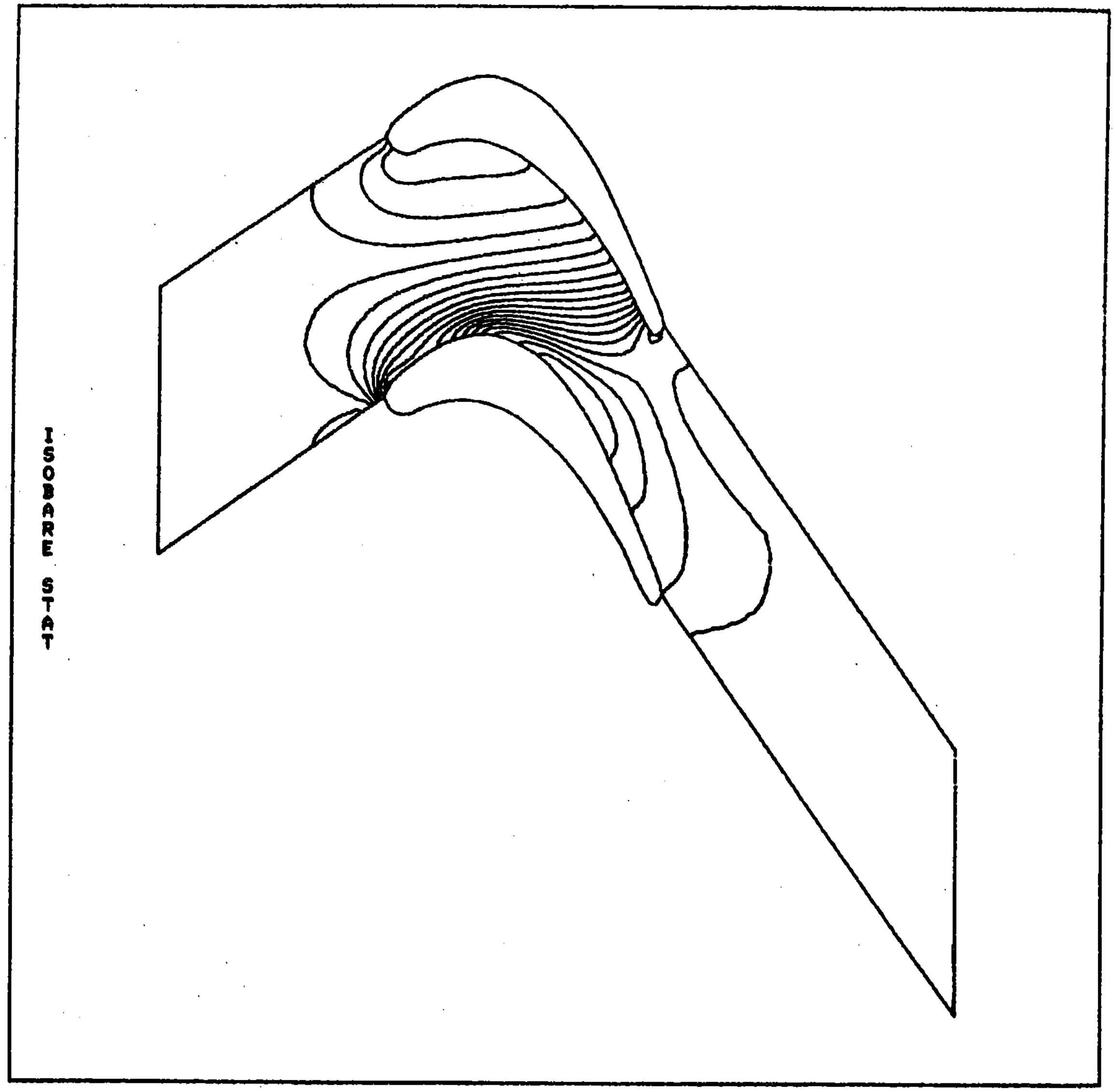


Figure 6b

NALYSE FEM - PROFIL P&W

OLUTION R1000.F21

COULEMENT VISQUEUX
EYNOLDS = 1000.0

NGLE PROFIL = -35.00
NGLE ATTAQUE = 45.30
NGLE FUITE = -62.62

OEF. CD = 1.979
OEF. CL = 2.935
OEF. CA = 2.398
OEF. CT = 2.604
ORQUE CM = -2.508

ARACTERISTIQUES DU PROFIL

ROFIL = P30.PRO
ORDE = 1.000
OMBRE DE PTS = 30

ARACTERISTIQUES DE LA CASCADE

ASCADE = F2160.CAS
OMBRE DE RANGEE = 21
O. TOTAL COLONNE = 60
O. COL. ENTREE = 15
O. COL. SORTIE = 15

ONG. INTERAUBE = 0.7810
ONG. ENTREE = 0.8000
ONG. SORTIE = 1.500

NGLE ENTREE (DEG)= 35.00
NGLE PROFIL (DEG)= -35.00
NGLE SORTIE (DEG)= -55.00

ONC. RANGEES = 0.7000
ONC. COL. ENTREE = 0.5000
ONC. COL. SORTIE = 0.5000

NERGIE CINETIQUE MAX = 4.810
RANG= 7 ,COL.=38)
NERGIE CINETIQUE MIN = 0.0000E+00

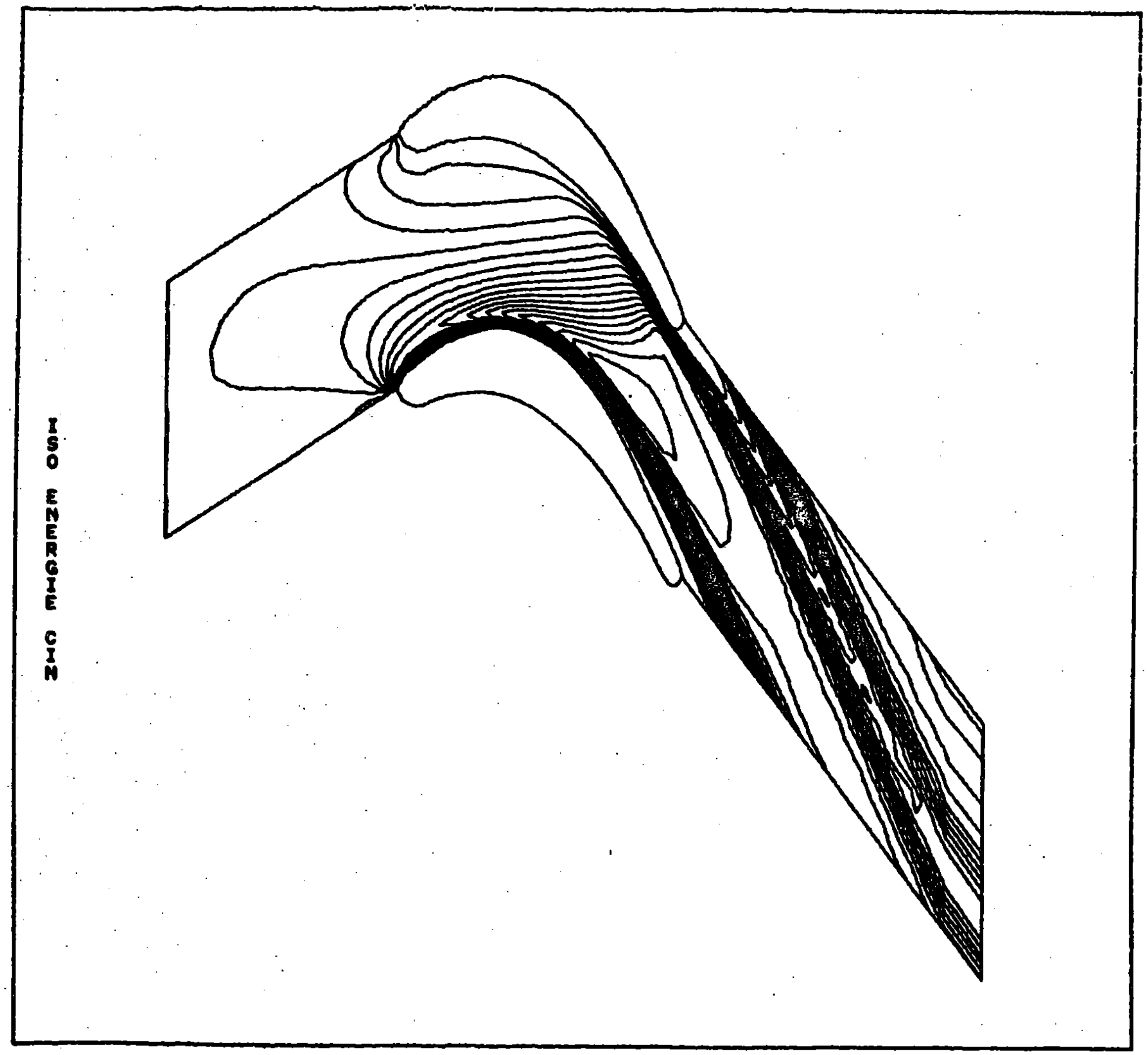


Figure 6c

ANALYSE FEM - PROFIL FLU

SOLUTION R1000.FB1

ECOULEMENT VISQUEUX
REYNOLDS = 1000.0

ANGLE PROFIL = -35.00
ANGLE ATTAQUE = 48.30
ANGLE FUITE = -62.62

COEF. CD = 1.979
COEF. CL = 2.935
COEF. CA = 2.398
COEF. CT = 2.604
TORQUE CM = -2.508

CARACTERISTIQUES DU PROFIL

PROFIL = P30.PRO
CORDE = 1.000
NOMBRE DE PTS = 30

CARACTERISTIQUES DE LA CASCADE

CASCADE = F2160.CAS
NOMBRE DE RANGEE = 21
NO. TOTAL COLONNE = 60
NO. COL. ENTREE = 15
NO. COL. SORTIE = 15

LONG. INTERAUBE = 0.7810
LONG. ENTREE = 0.8000
LONG. SORTIE = 1.500

ANGLE ENTREE (DEG)= 35.00
ANGLE PROFIL (DEG)= -35.00
ANGLE SORTIE (DEG)= -55.00

CONC. RANGEES = 0.7000
CONC. COL. ENTREE = 0.5000
CONC. COL. SORTIE = 0.5000

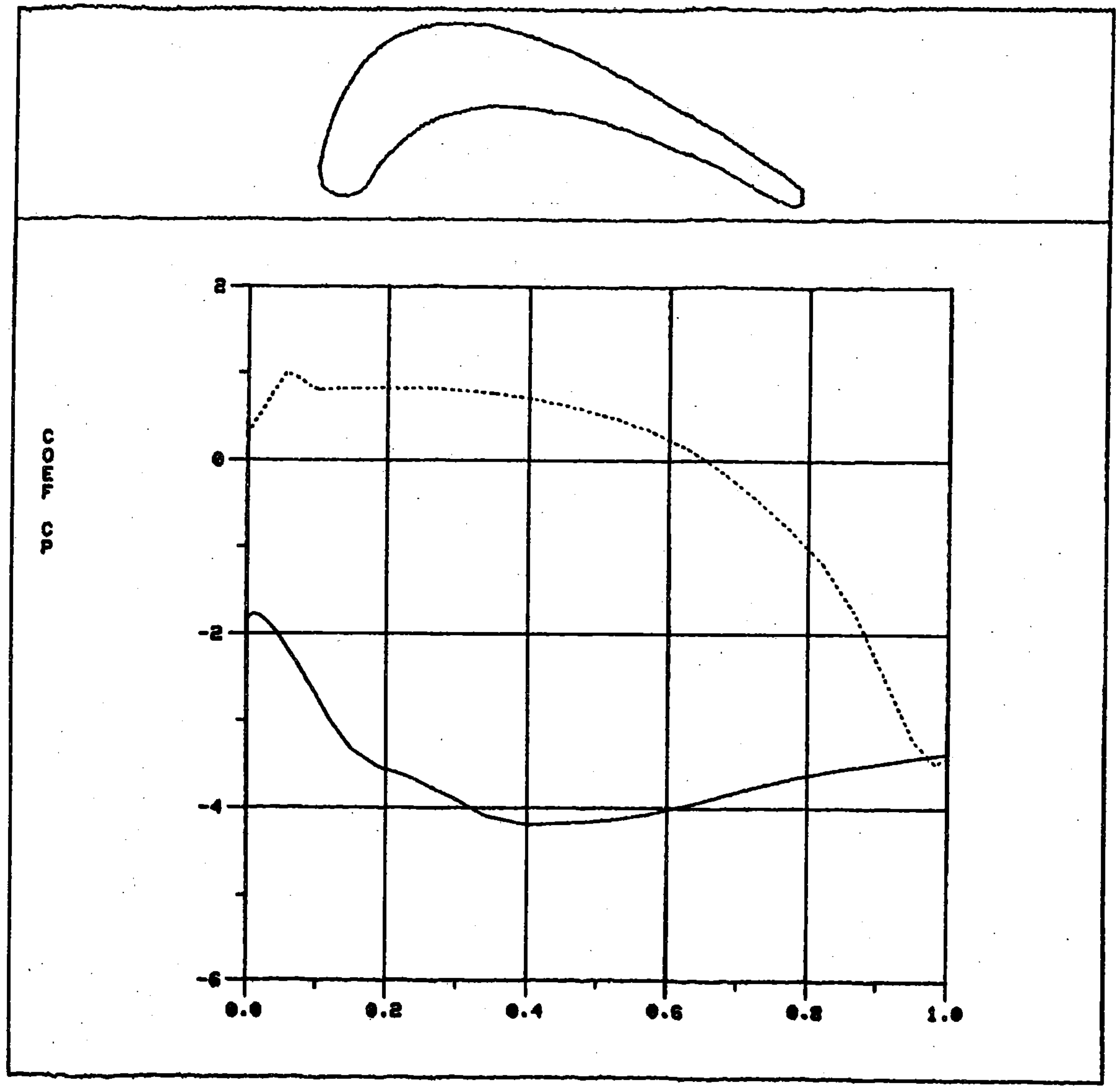


Figure 6d

NALYSE FEM - PROFIL P&W

OLUTION R1000.F21

COULEMENT VISQUEUX
EYNOLDS = 1000.0

NGLE PROFIL = -35.00
NGLE ATTAQUE = 45.30
NGLE FUITE = -62.62

OEF. CD = 1.979
OEF. CL = 2.935
OEF. CA = 0.398
OEF. CT = 2.604
ORQUE CM = -2.508

ARACTERISTIQUES DU PROFIL

ROFIL = P30.PRO
ORDE = 1.000
OMBRE DE PTS = 30

ARACTERISTIQUES DE LA CASCADE

ASCADE = F2160.CAS
OMBRE DE RANGEE = 21
O. TOTAL COLONNE = 60
O. COL. ENTREE = 15
O. COL. SORTIE = 15

ONG. INTERAUBE = 0.7810
ONG. ENTREE = 0.8000
ONG. SORTIE = 1.500

NGLE ENTREE (DEG)= 35.00
NGLE PROFIL (DEG)= -35.00
NGLE SORTIE (DEG)= -55.00

ONC. RANGEES = 0.7000
ONC. COL. ENTREE = 0.5000
ONC. COL. SORTIE = 0.5000

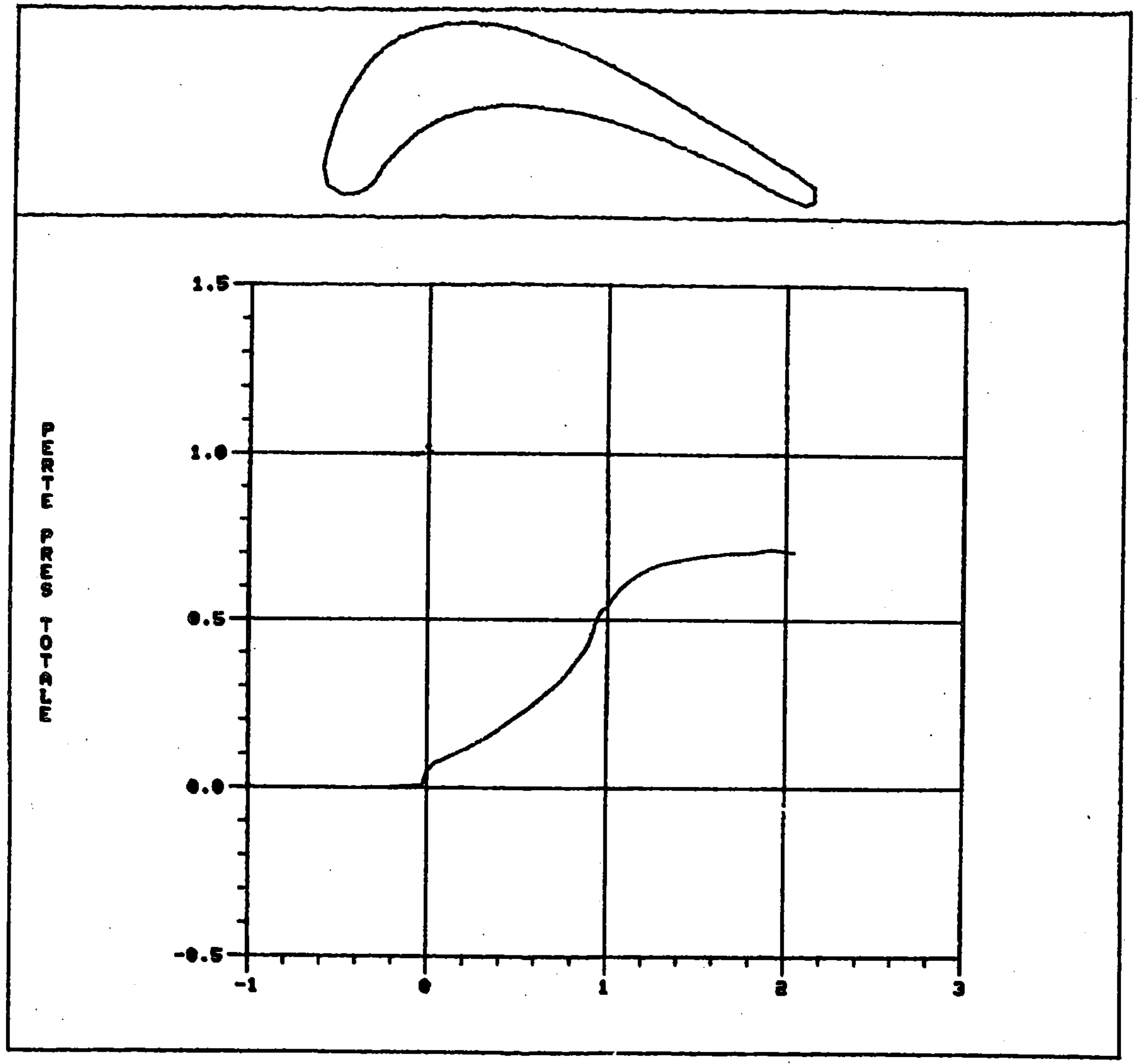


Figure 6e

NALYSE FEM - PROFIL P&W

OLUTION R1000.F21

COULEMENT VISQUEUX
EYNOLDS = 1000.0

NGLE PROFIL = -35.00
NGLE ATTAQUE = 45.30
NGLE FUITE = -68.62

OEF. CD = 1.979
OEF. CL = 2.935
OEF. CA = 2.398
OEF. CT = 2.604
ORQUE CM = -2.508

ARACTERISTIQUES DU PROFIL

ROFIL = P30.PRO
ORDE = 1.000
OMBRE DE PTS = 30

ARACTERISTIQUES DE LA CASCADE

ASCADE = F2160.CAS
OMBRE DE RANGEE = 21
O. TOTAL COLONNE = 60
O. COL. ENTREE = 15
O. COL. SORTIE = 15

ONG. INTERAUBE = 0.7810
ONG. ENTREE = 0.8000
ONG. SORTIE = 1.500

NGLE ENTREE (DEG)= 35.00
NGLE PROFIL (DEG)= -35.00
NGLE SORTIE (DEG)= -55.00

ONC. RANGEES = 0.7000
ONC. COL. ENTREE = 0.5000
ONC. COL. SORTIE = 0.5000

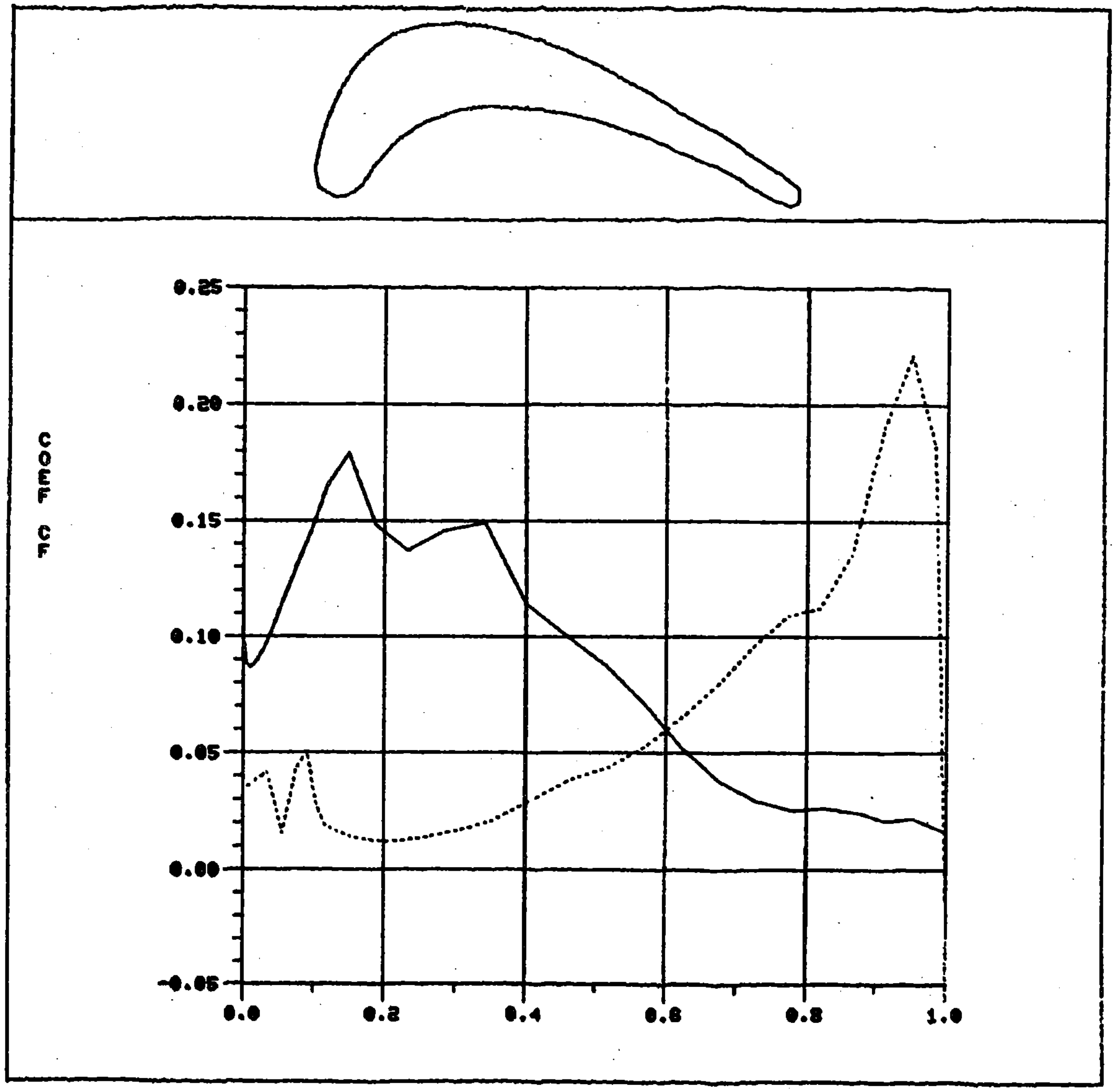


Figure 6f

4.2 Ecoulements instationnaires

Comme nous l'avons déjà mentionné, à partir d'un certain nombre de Raynolds, l'algorithme (3.15) devient divergent. De plus, même en raffinant le maillage, on ne réussit pas à obtenir de nouveau la convergence. Ce phénomène est l'indication du développement d'un écoulement instationnaire. Par exemple, pour la géométrie de la figure (10), le nombre critique est approximativement 600. Prenant cette solution comme point de départ, nous sommes passés aux équations de Navier-Stokes instationnaires en discrétisant le terme de temps à l'aide du schéma de Gear (3.17)($\Delta t = .025$). Les figures (7) à (9) présentent respectivement les champs de vitesses, les isobares et les courbes d'isovorticité pour différents pas de temps.

Malheureusement, les champs de vitesses complets ne permettent pas de distinguer nettement le comportement du fluide près du bord de fuite. On peut cependant deviner, à l'aide des courbes d'isovorticité, qu'il se développe un écoulement périodique. La figure (10) présente des agrandissements de l'écoulement près du bord de fuite pour une période complète. On y distingue très clairement la formation, le décrochement et la réapparition d'un tourbillon à l'extrémité d'une des aubes. Ce phénomène s'apparente beaucoup au développement d'une allée de Von Karman derrière un cylindre (La période est approximativement .725).

De plus, ces résultats sont confirmés par d'autres chercheurs utilisant des méthodes complètement différentes (cf. [6]).

Nous travaillons présentement à suivre l'évolution de cet écoulement périodique lorsqu'on augmente graduellement le nombre de Reynolds. Nous espérons pouvoir ainsi cerner les autres points de bifurcation reliés à ce type d'écoulement.

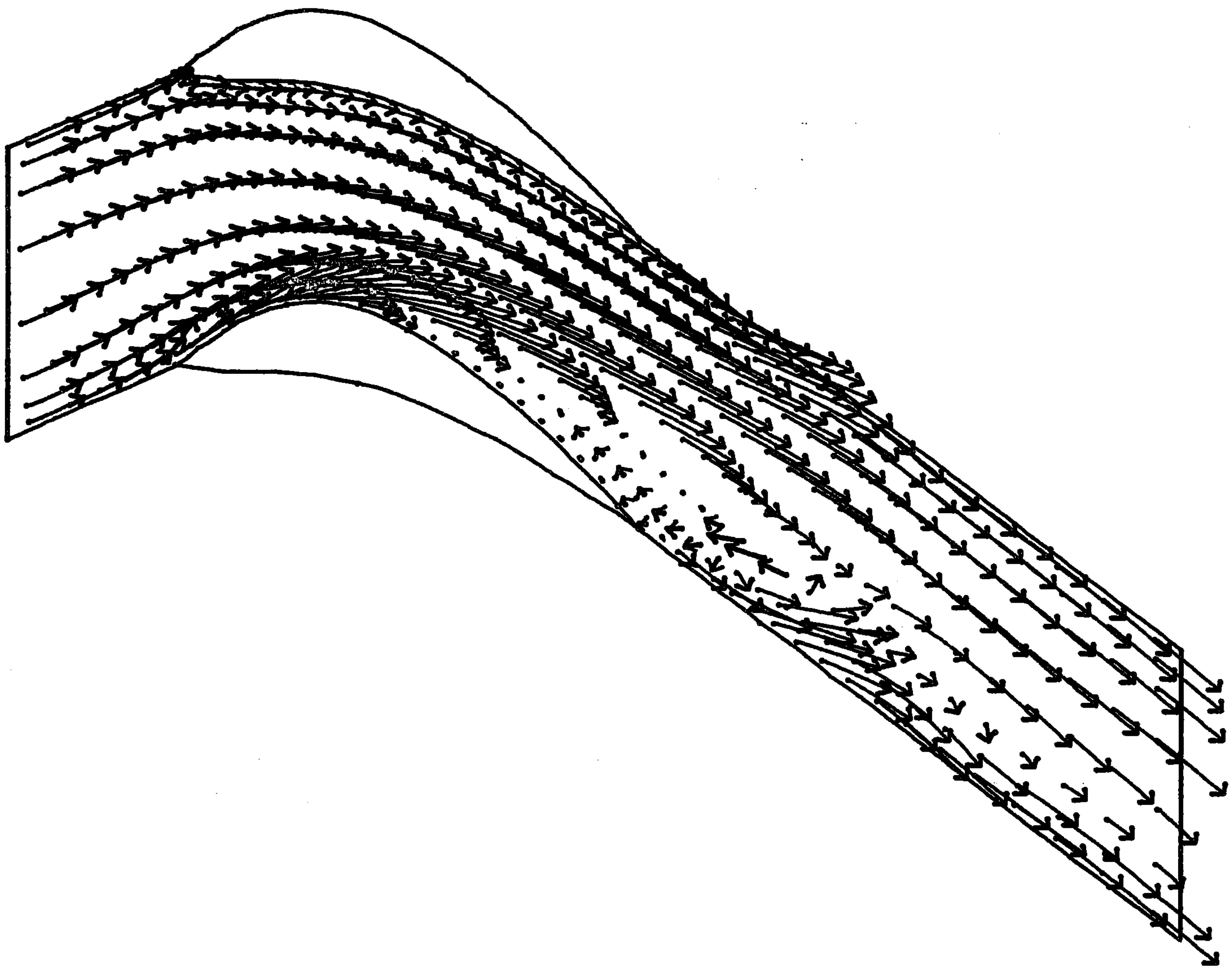


Figure 7a   Re = 1000, t = 2.0 (vitesses)

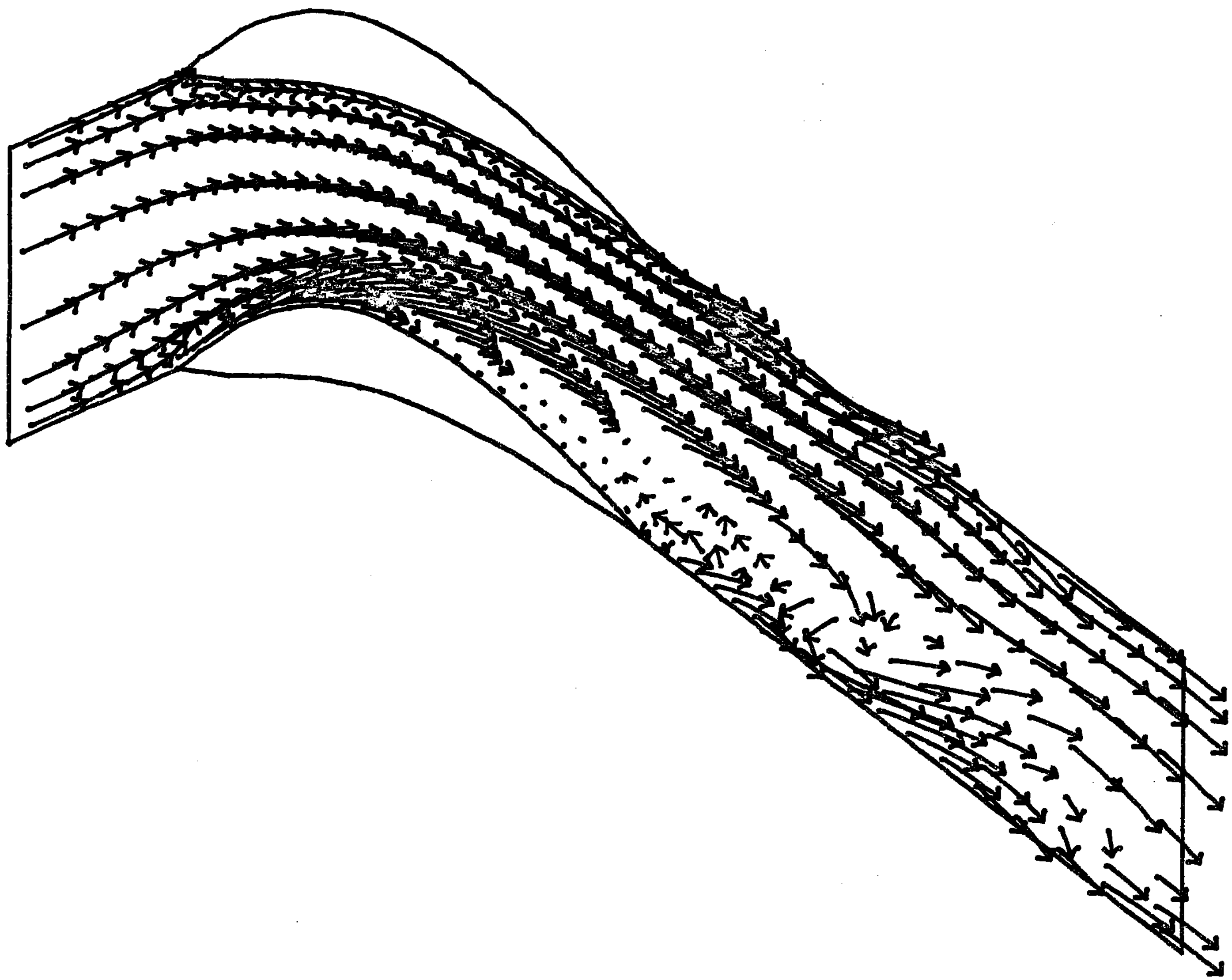


Figure 7b Re = 1000, t = 2.5 (vitesses)

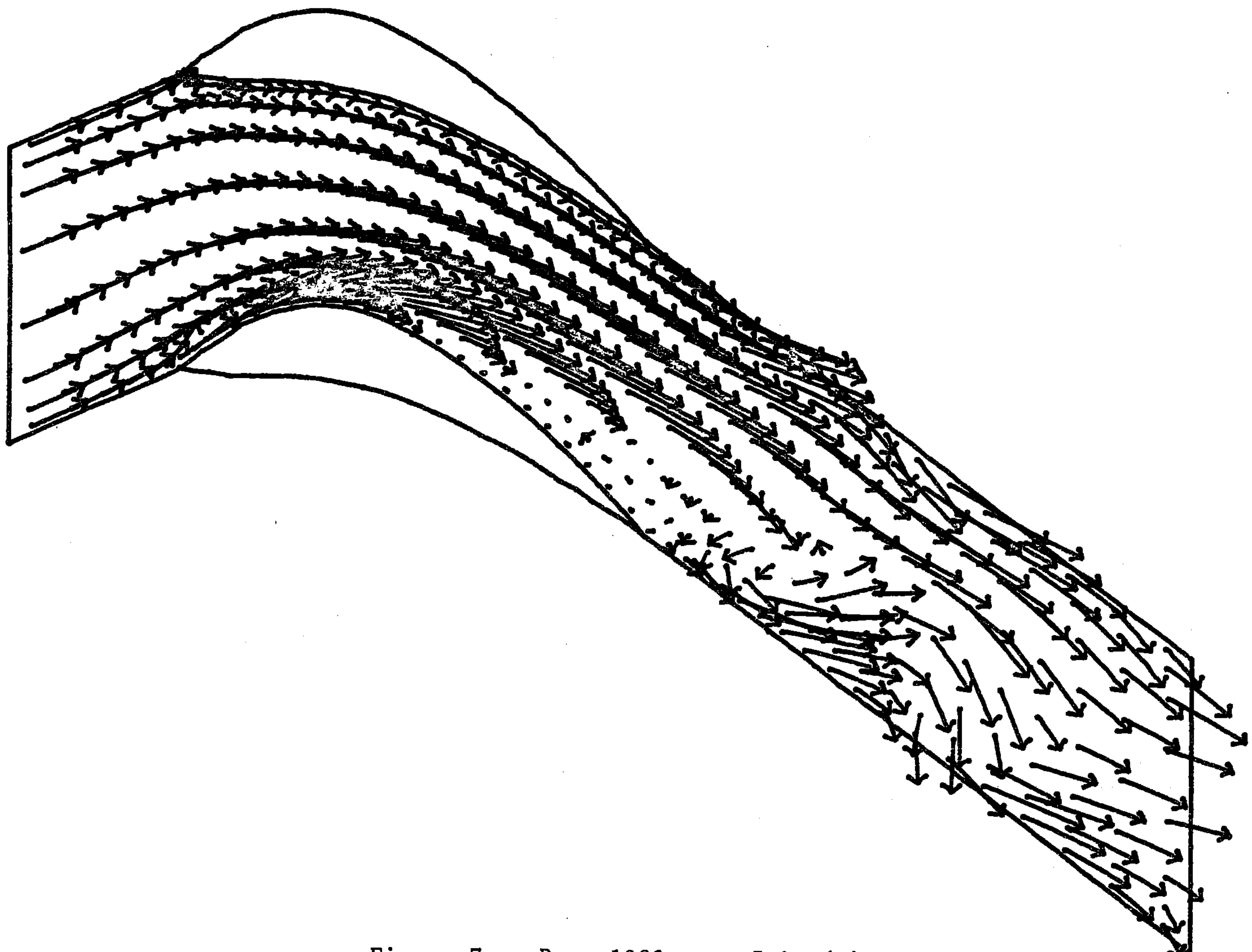
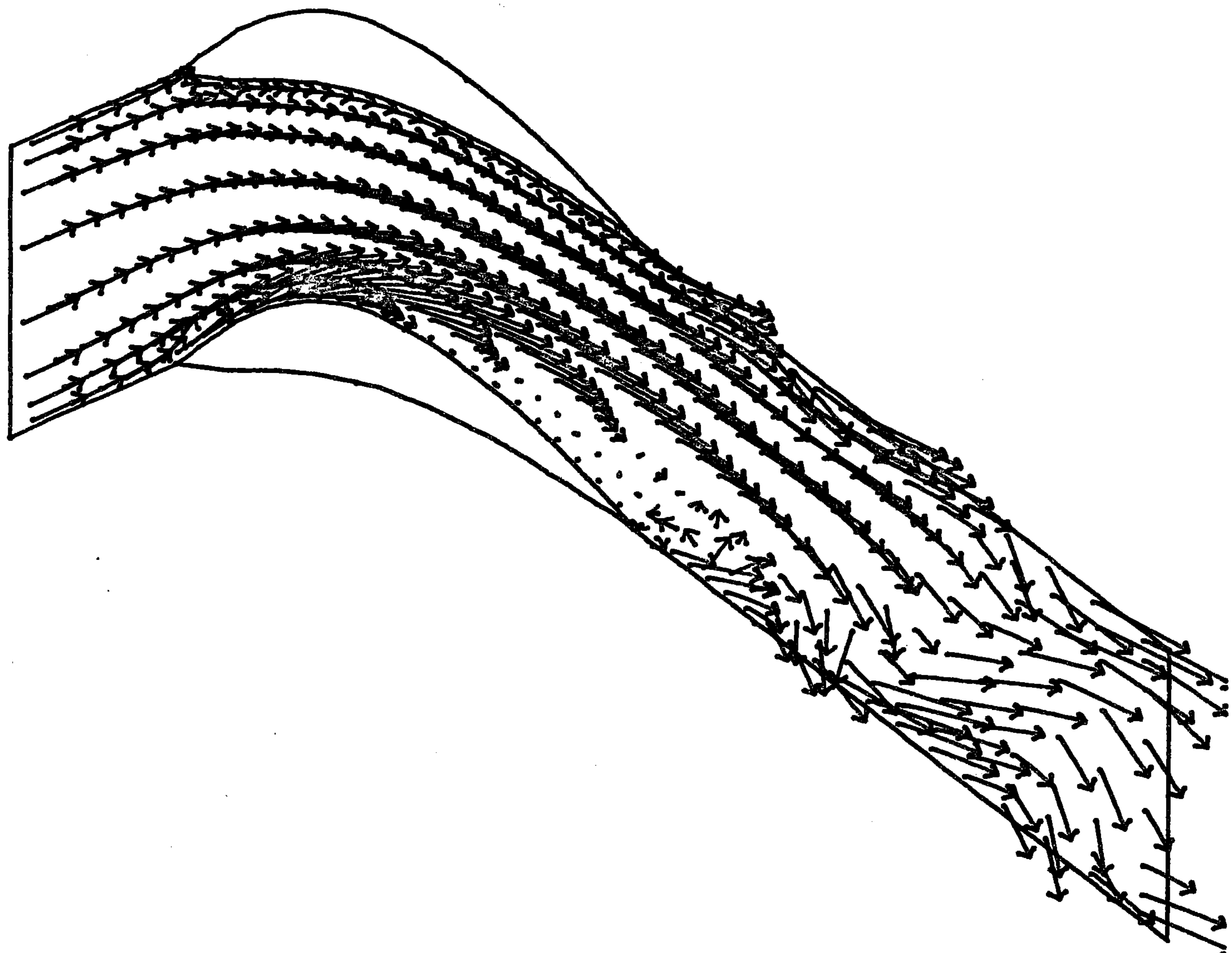


Figure 7c   Re = 1000, t = 3.0 (vitesses)



<u>Figure 7d</u>   Re = 1000, t = 3.5 (vitesses)

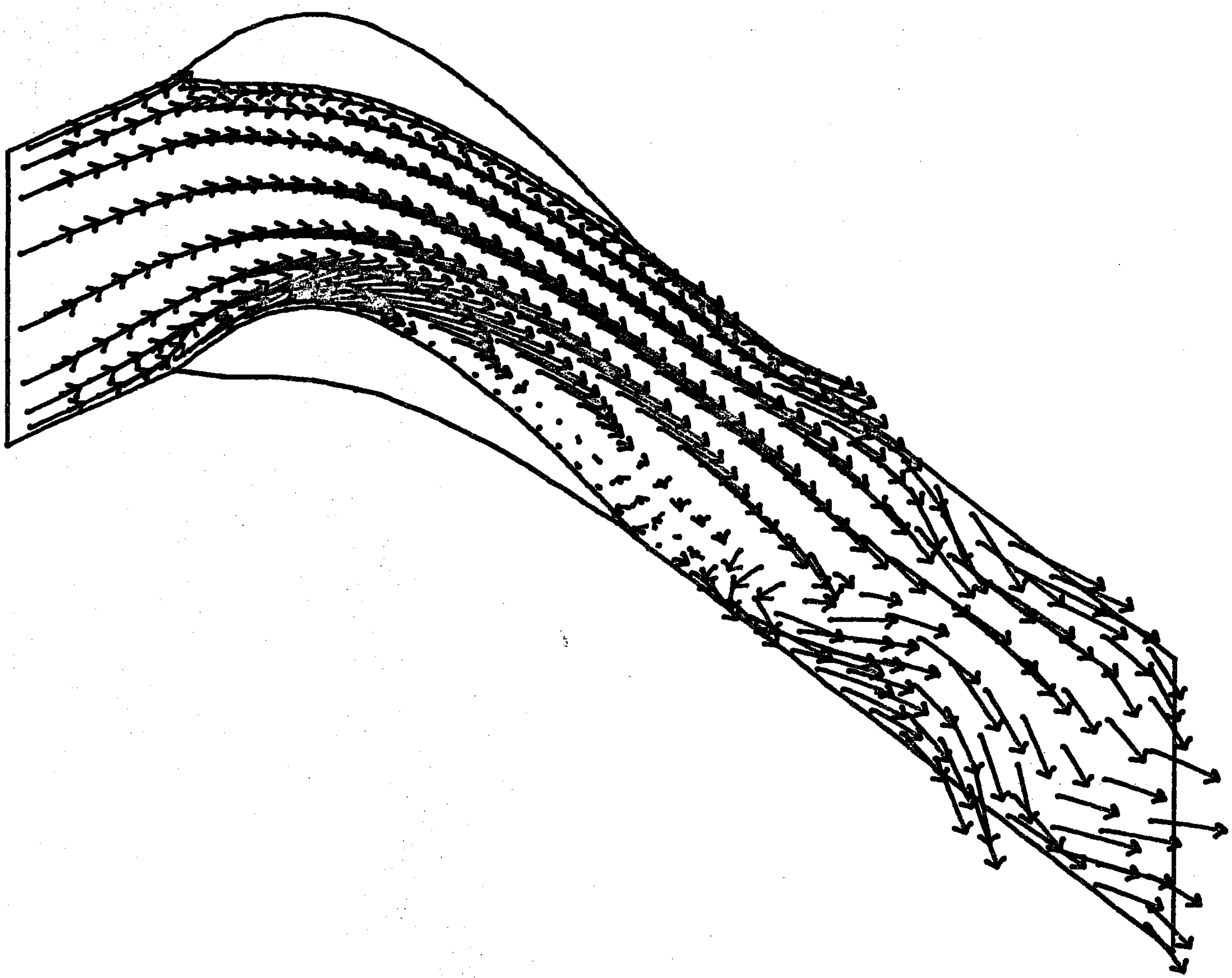
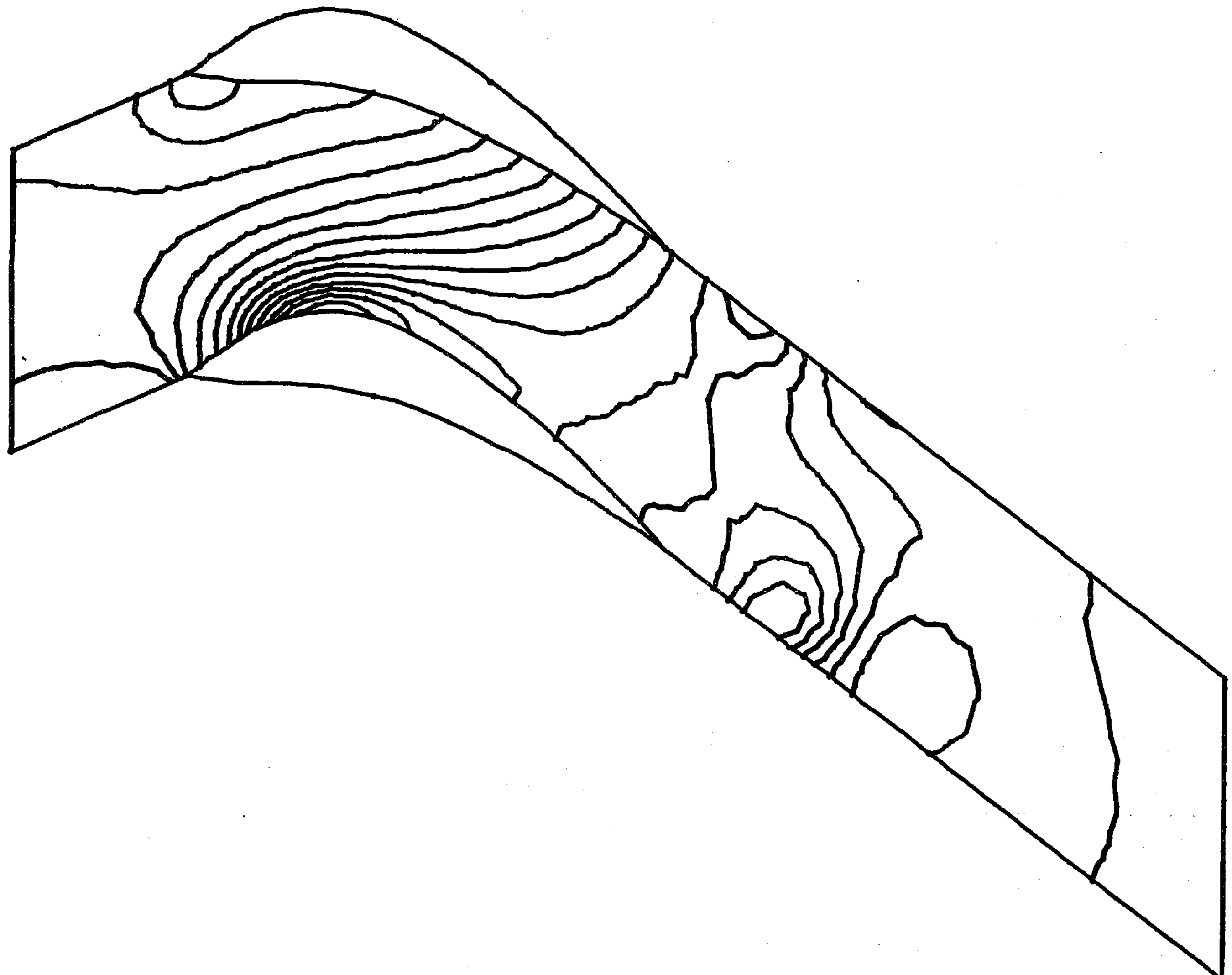


Figure 7e   Re = 1000, t = 4.0 (vitesses)



<u>Figure 8a</u> Re = 1000, t = 2,0 (isobares)

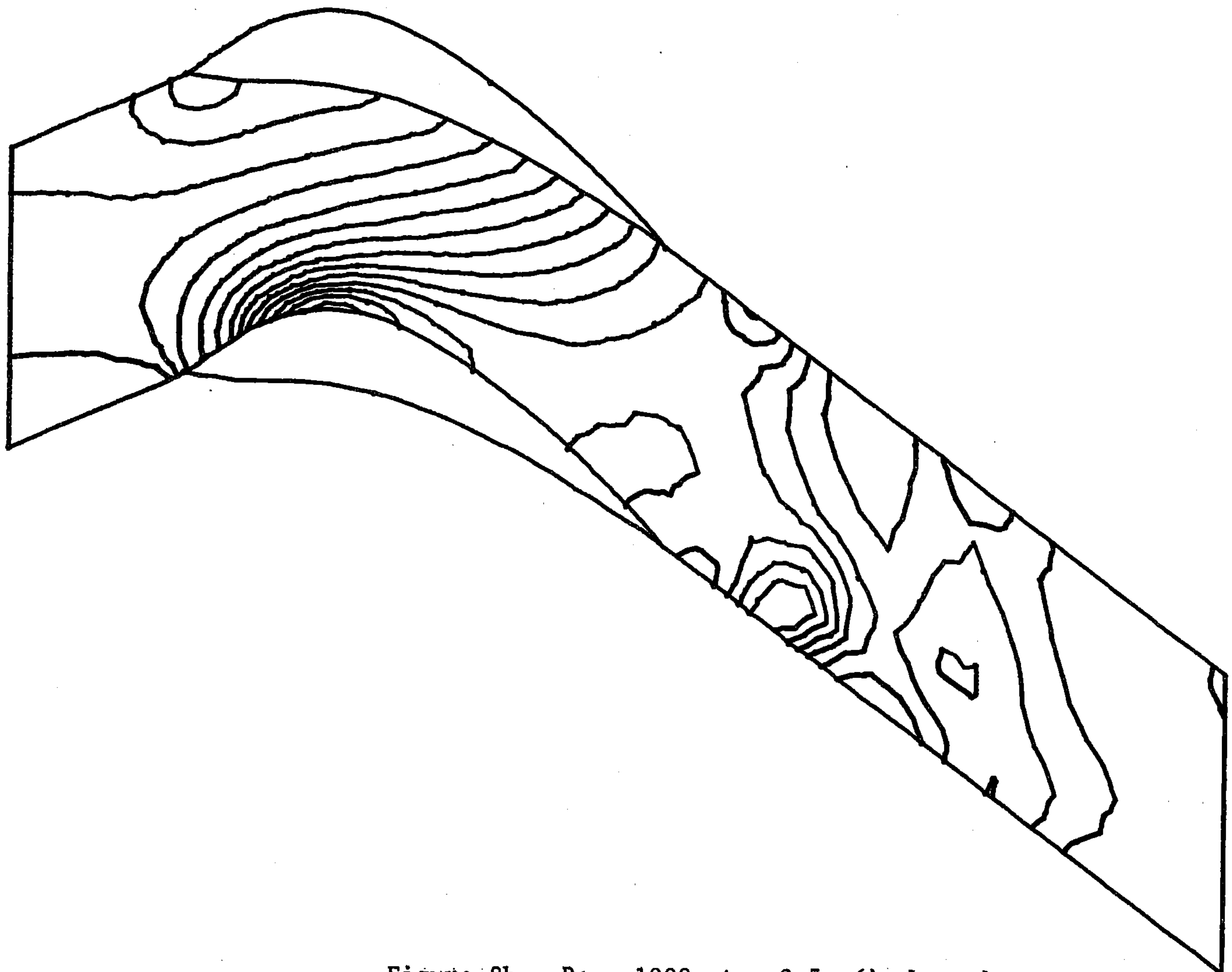


Figure 8b Re = 1000, t = 2,5 (isobares)

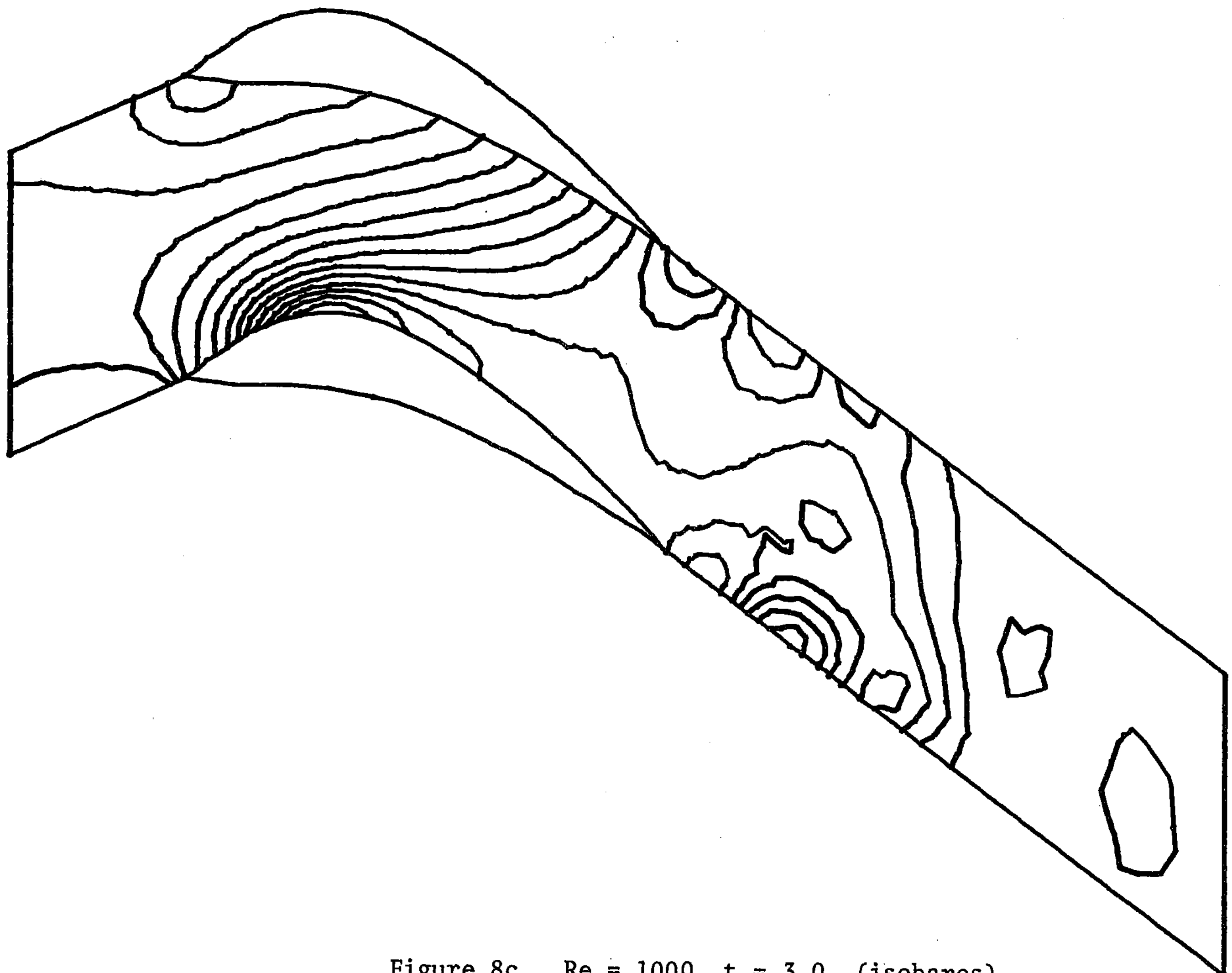


Figure 8c Re = 1000, t = 3,0 (isobares)

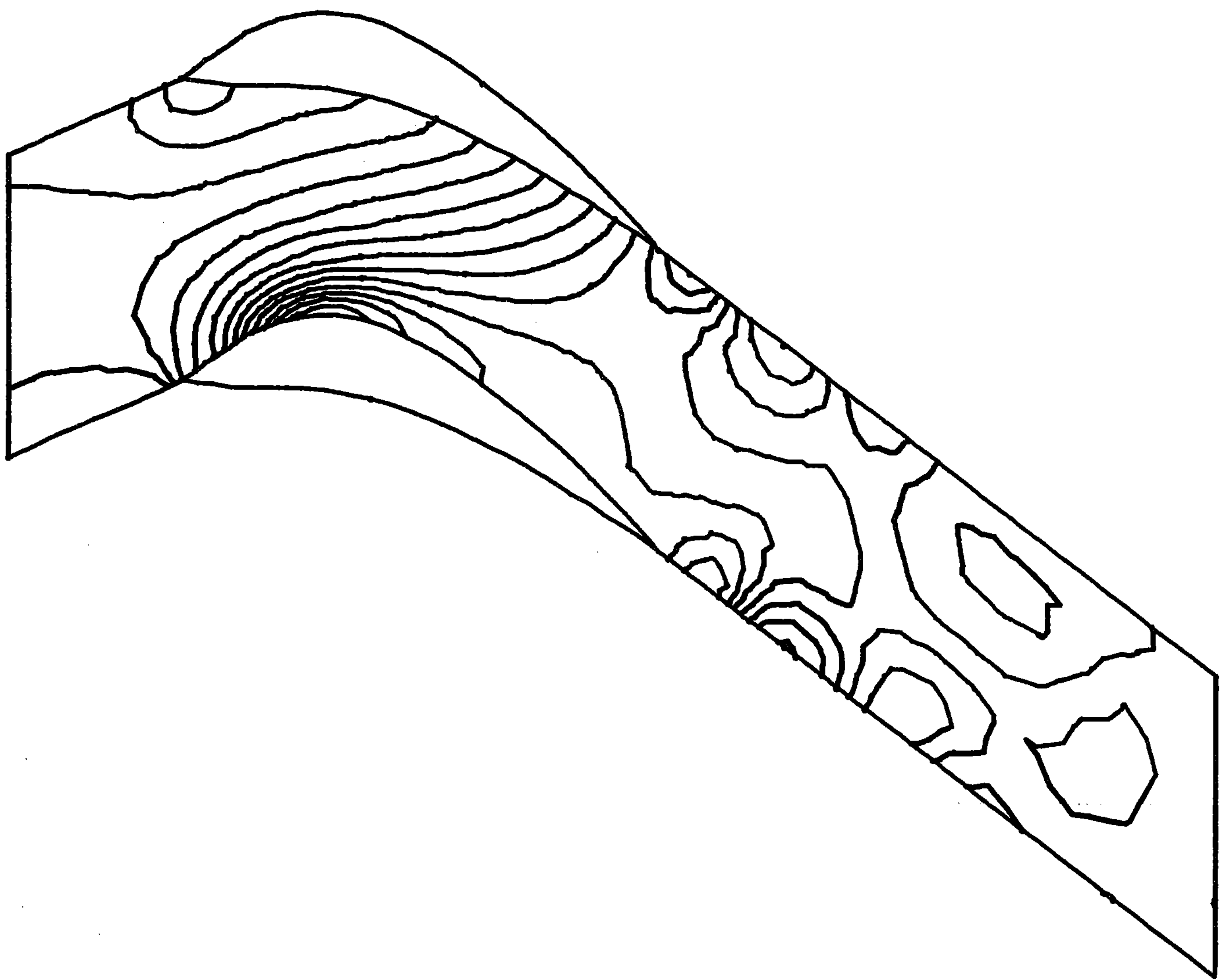


Figure 8d   Re = 1000, t = 3,5 (isobares)

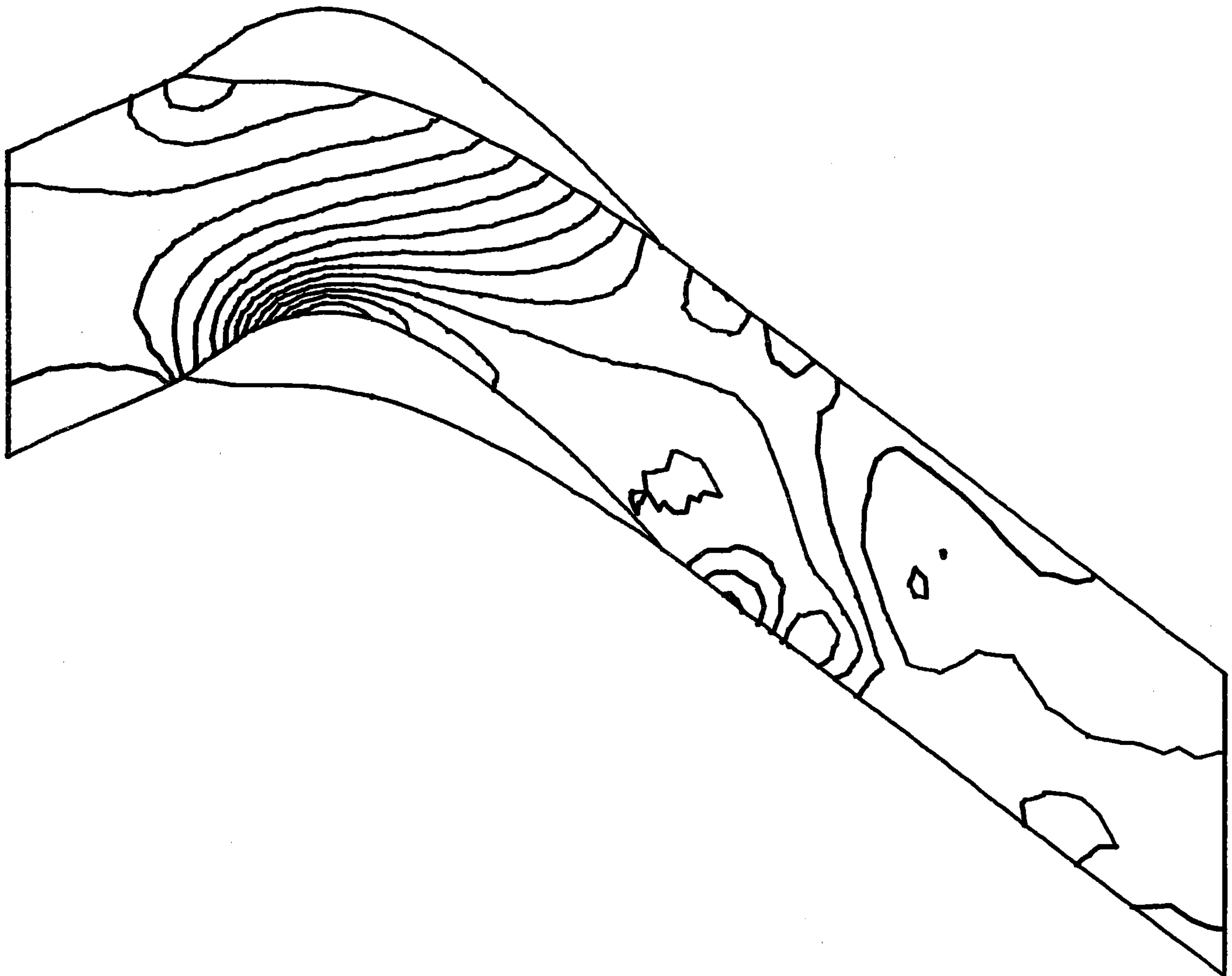


Figure 8e   Re = 1000, t = 4,0 (isobares)

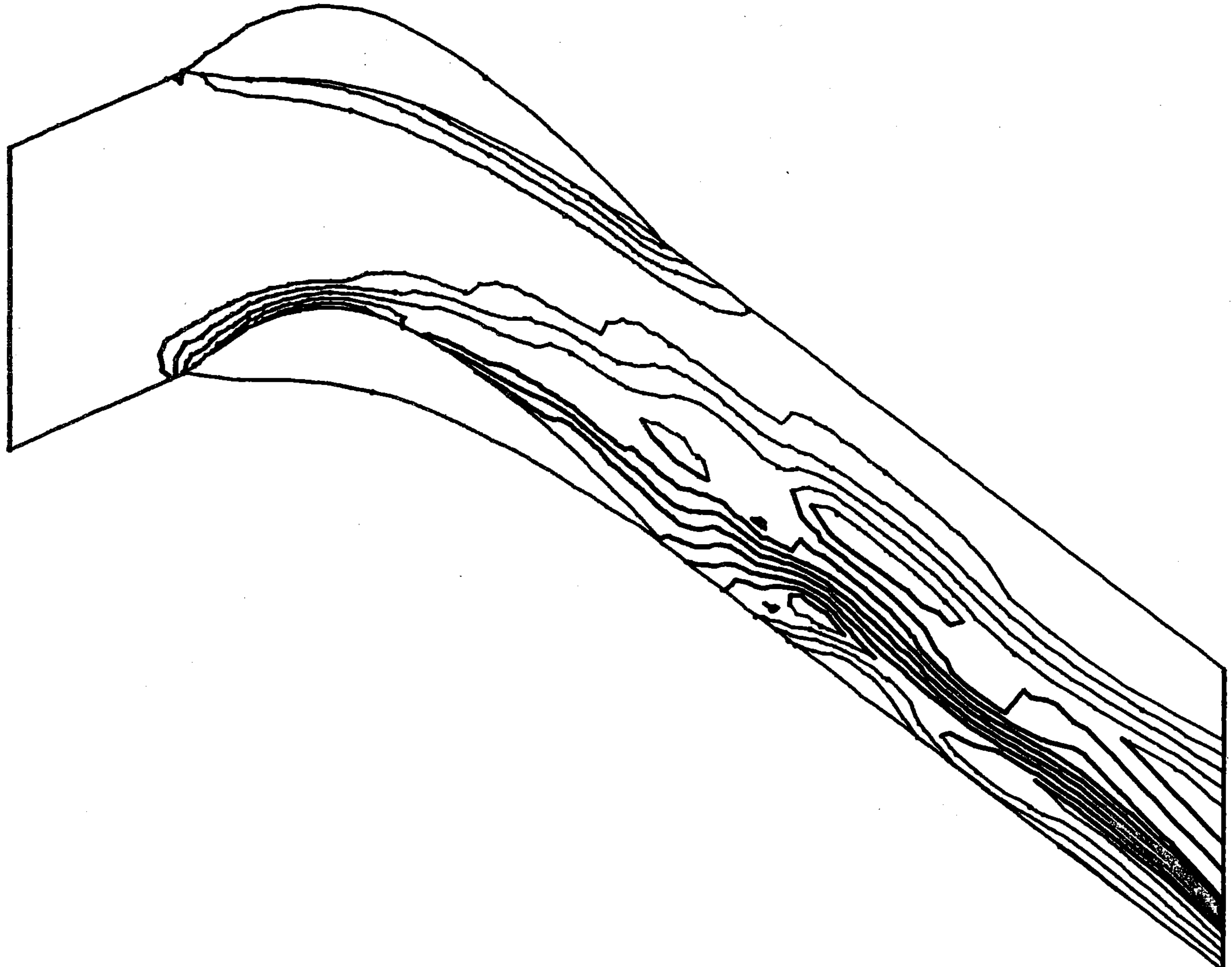


Figure 9a   Re = 1000, t = 2,0 . (isovorticités)

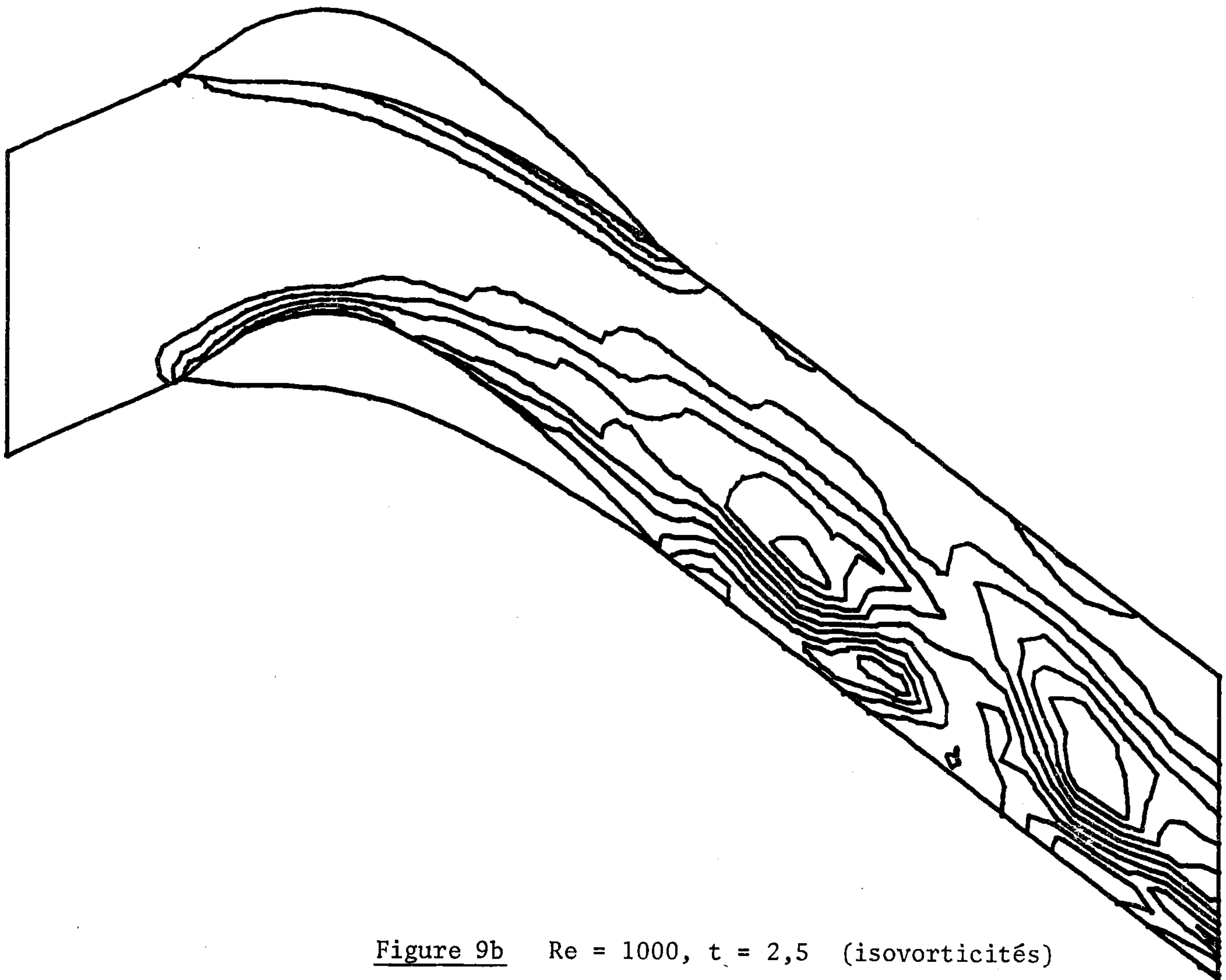


Figure 9b Re = 1000, t = 2,5 (isovorticités)

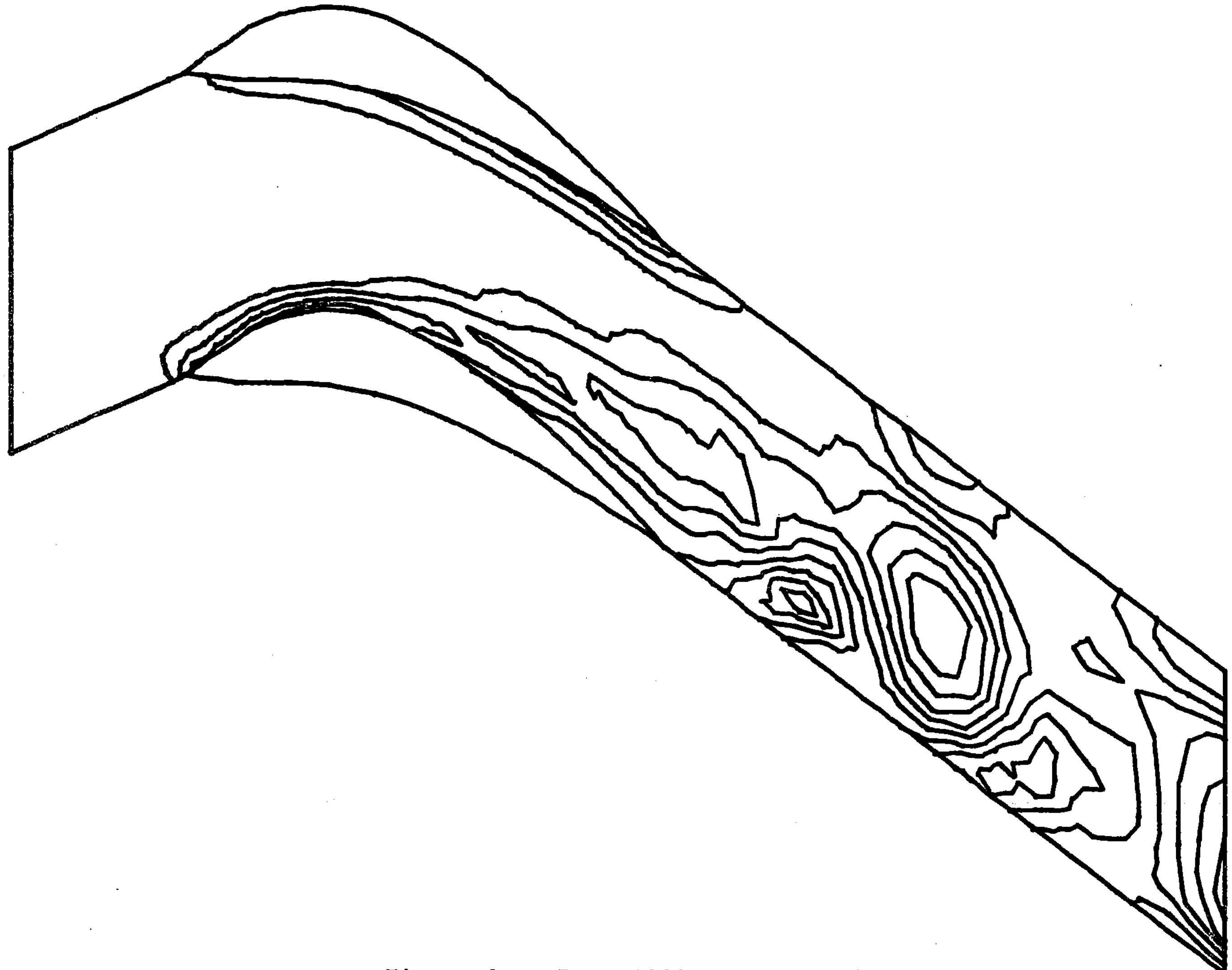


Figure 9c   Re = 1000, t = 3,0 (isovorticités)

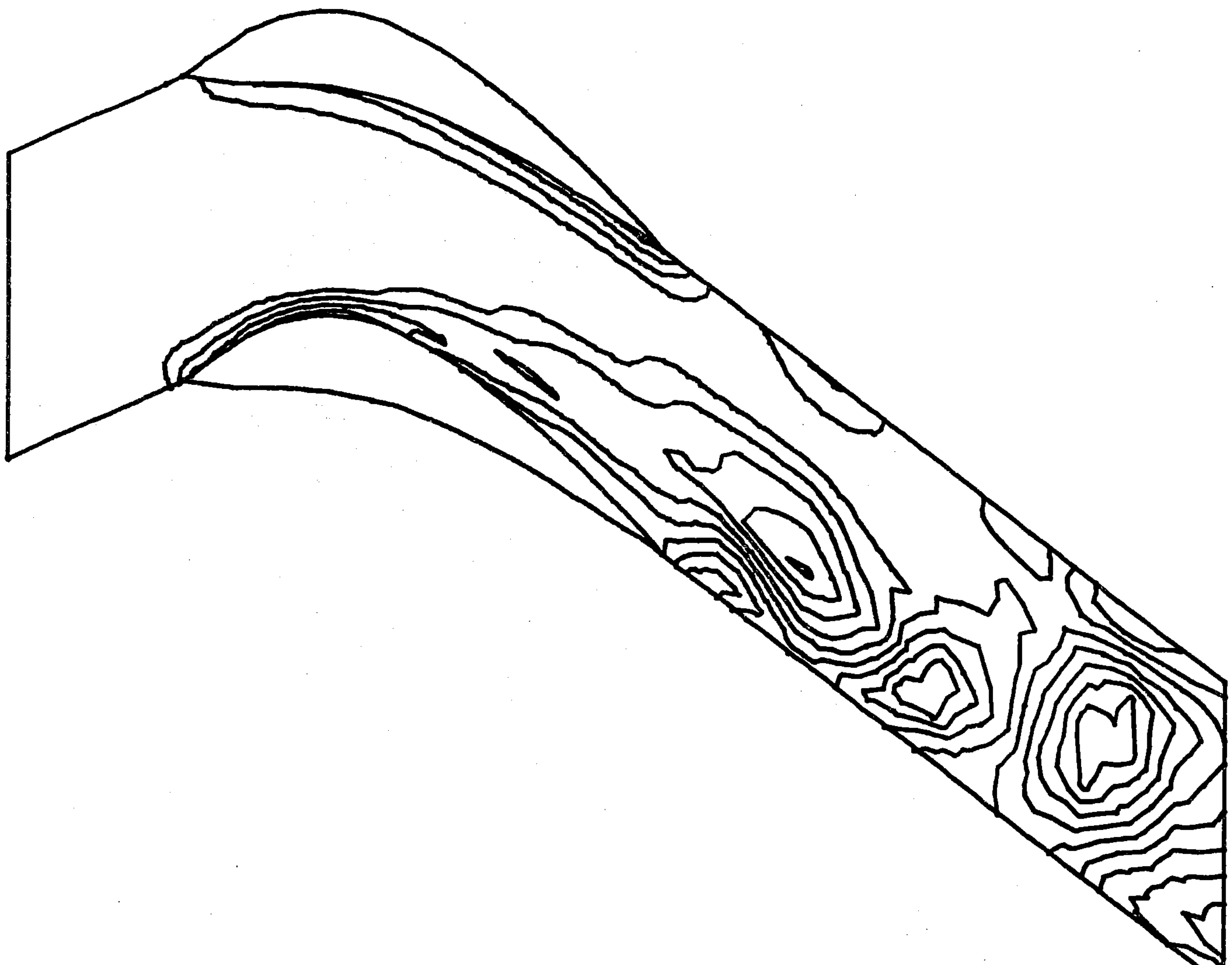


Figure 9d   Re = 1000, t = 3,5 (isovorticités)

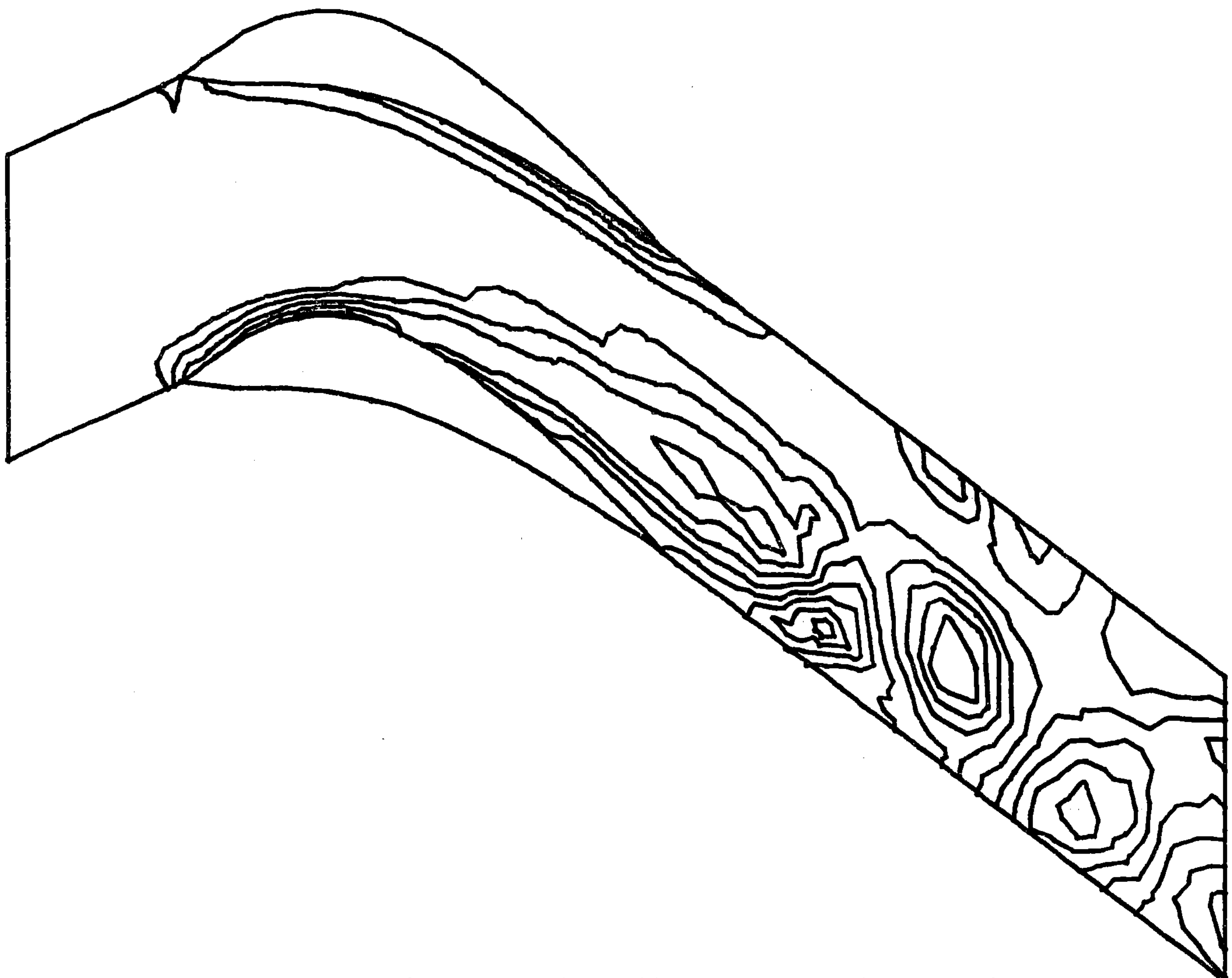


Figure 9e Re = 1000, t = 4,0 (vorticités)

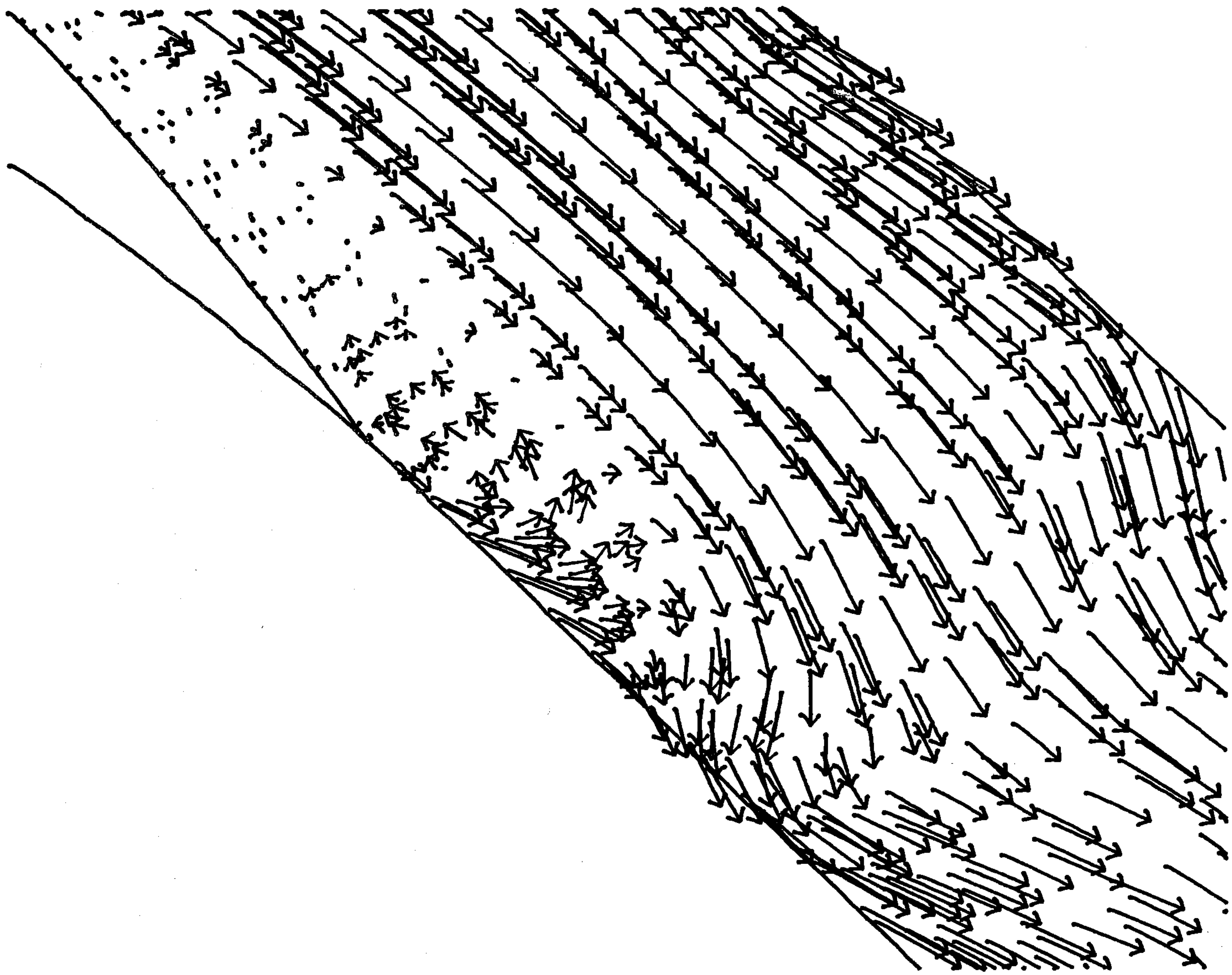


Figure 10a t = 5.0 (Re = 1000)

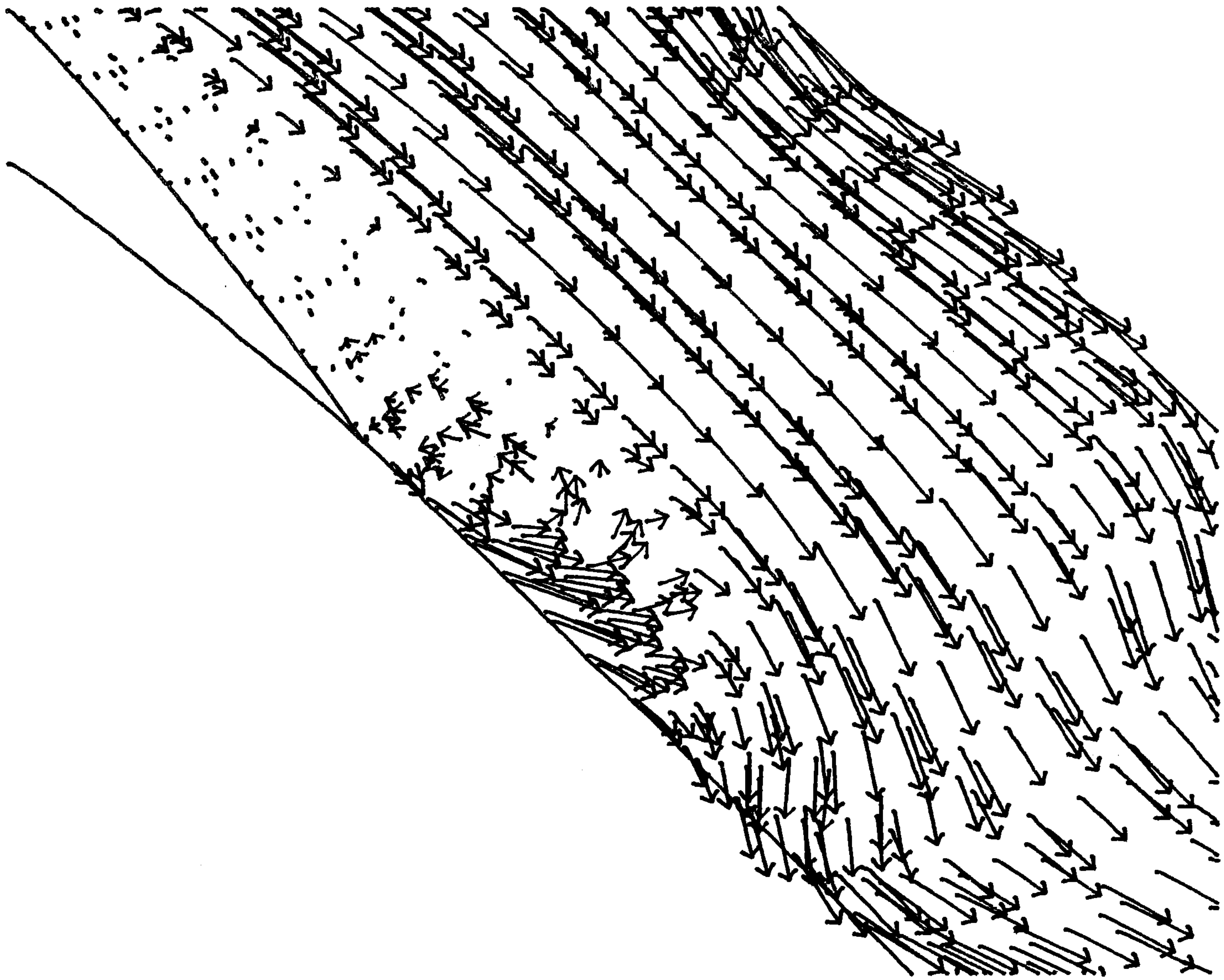


Figure 10b   t = 5.1 (Re = 1000)

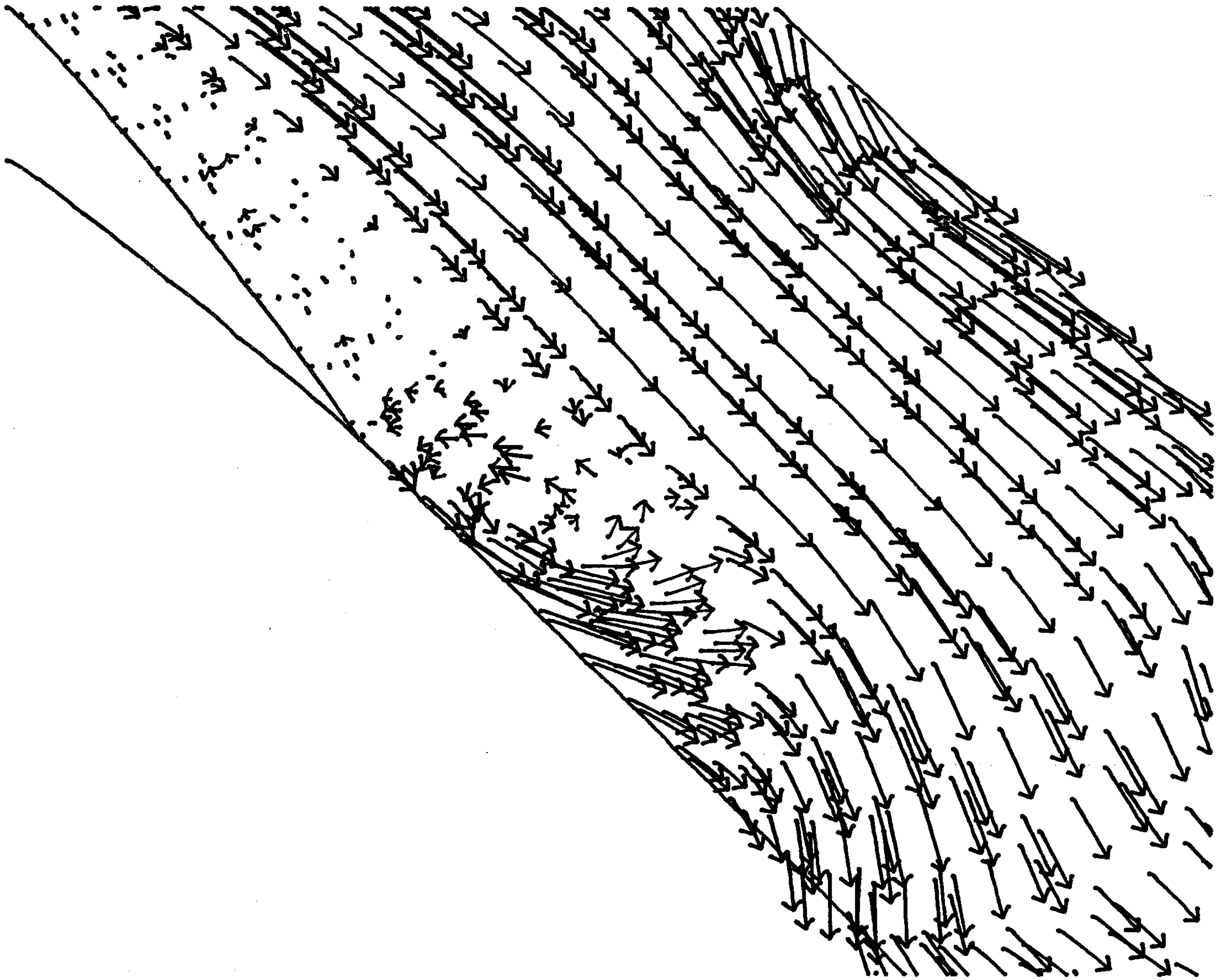


Figure 10c   t = 5.2 (Re = 1000)

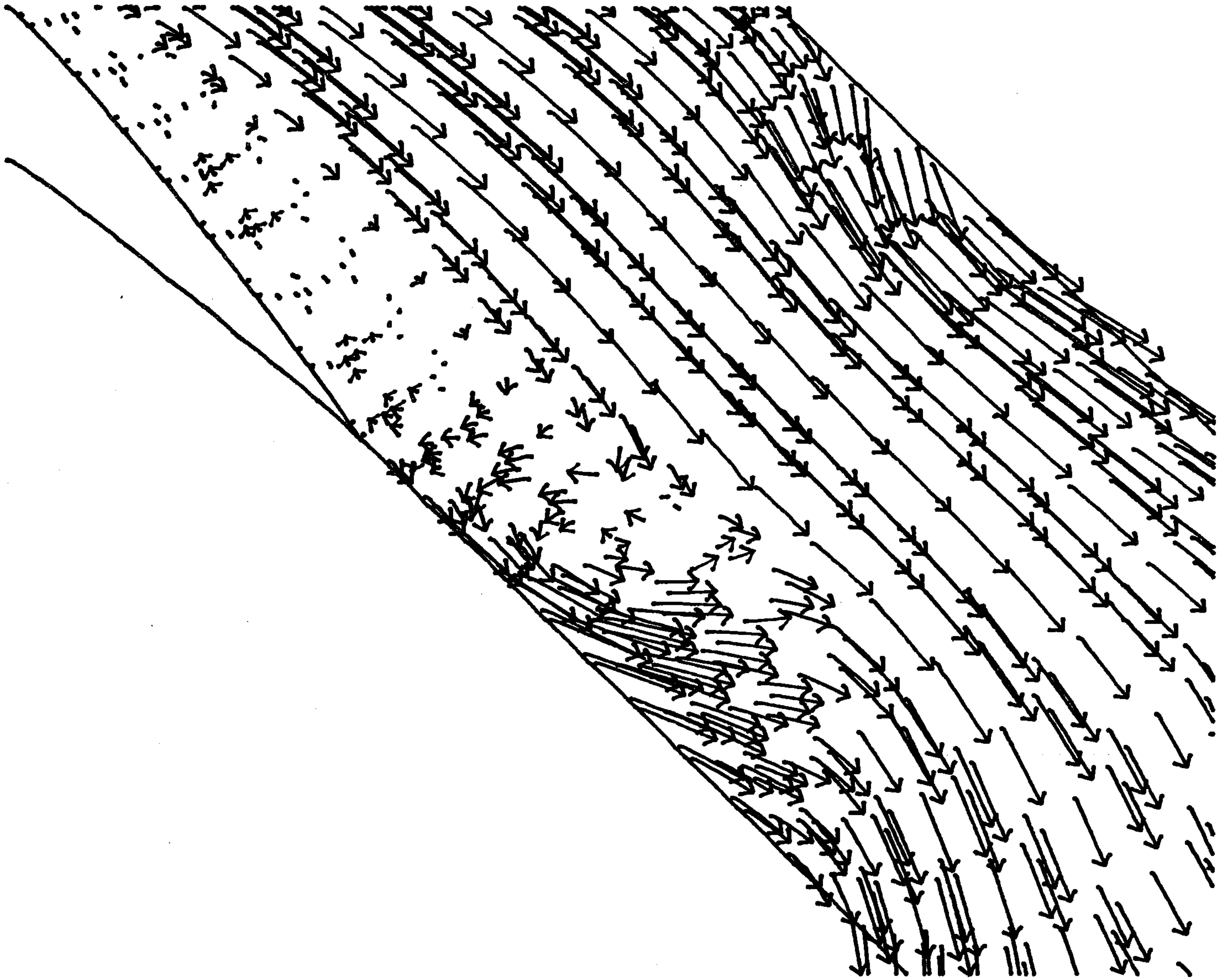


Figure 10d   t = 5.3 (Re = 1000)

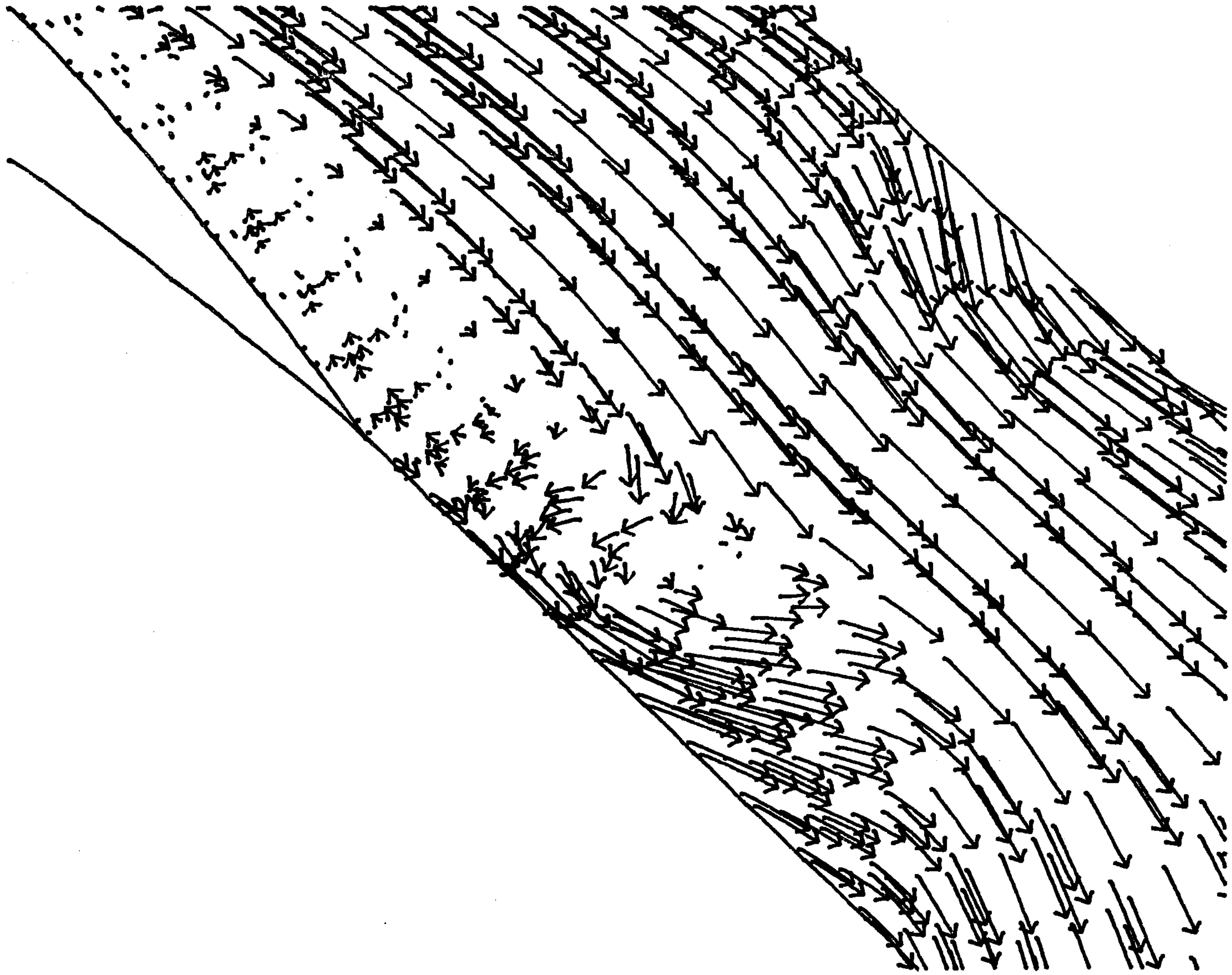


Figure 10e   t = 5.4 (Re = 1000)

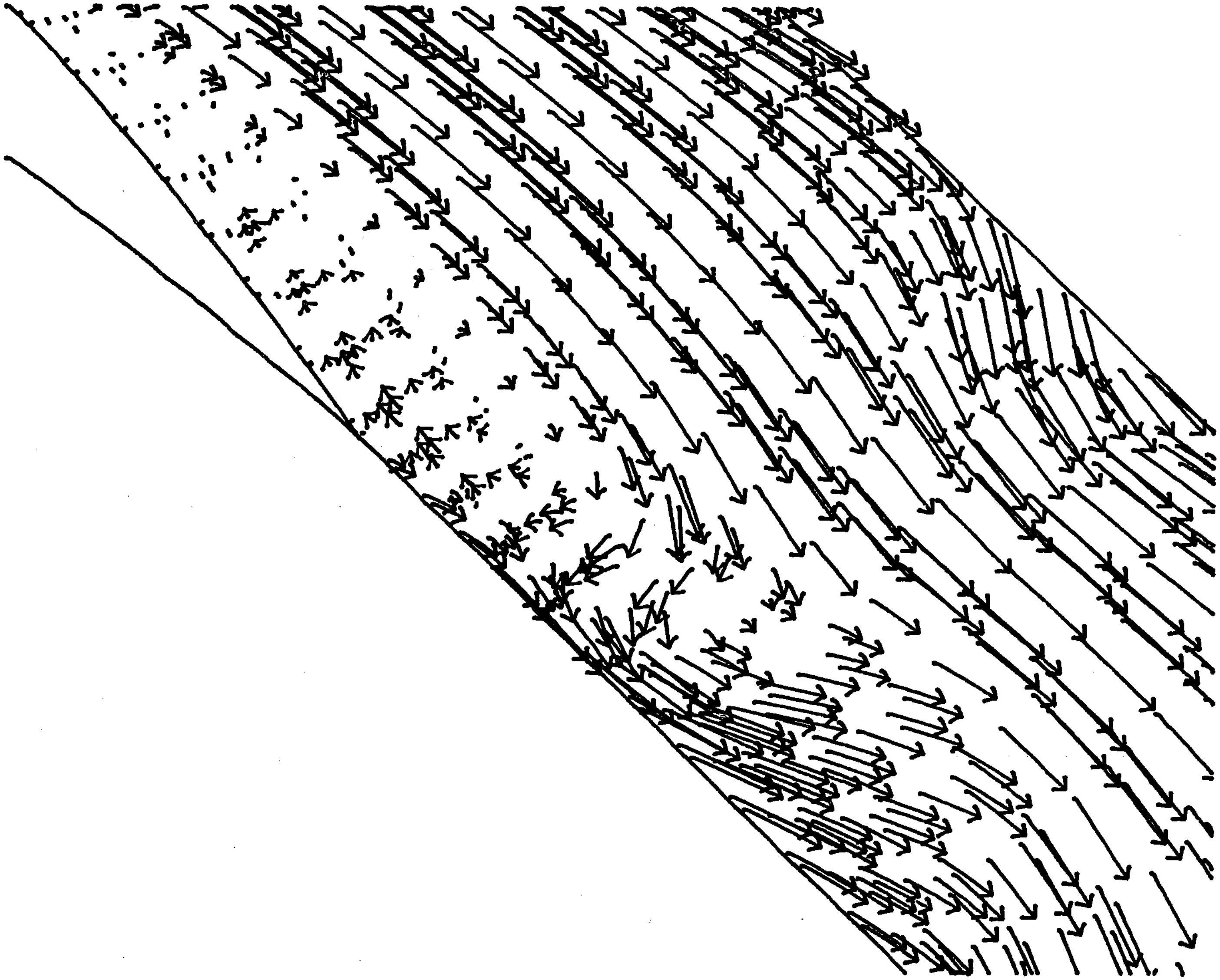


Figure 10f t = 5.5 (Re = 1000)

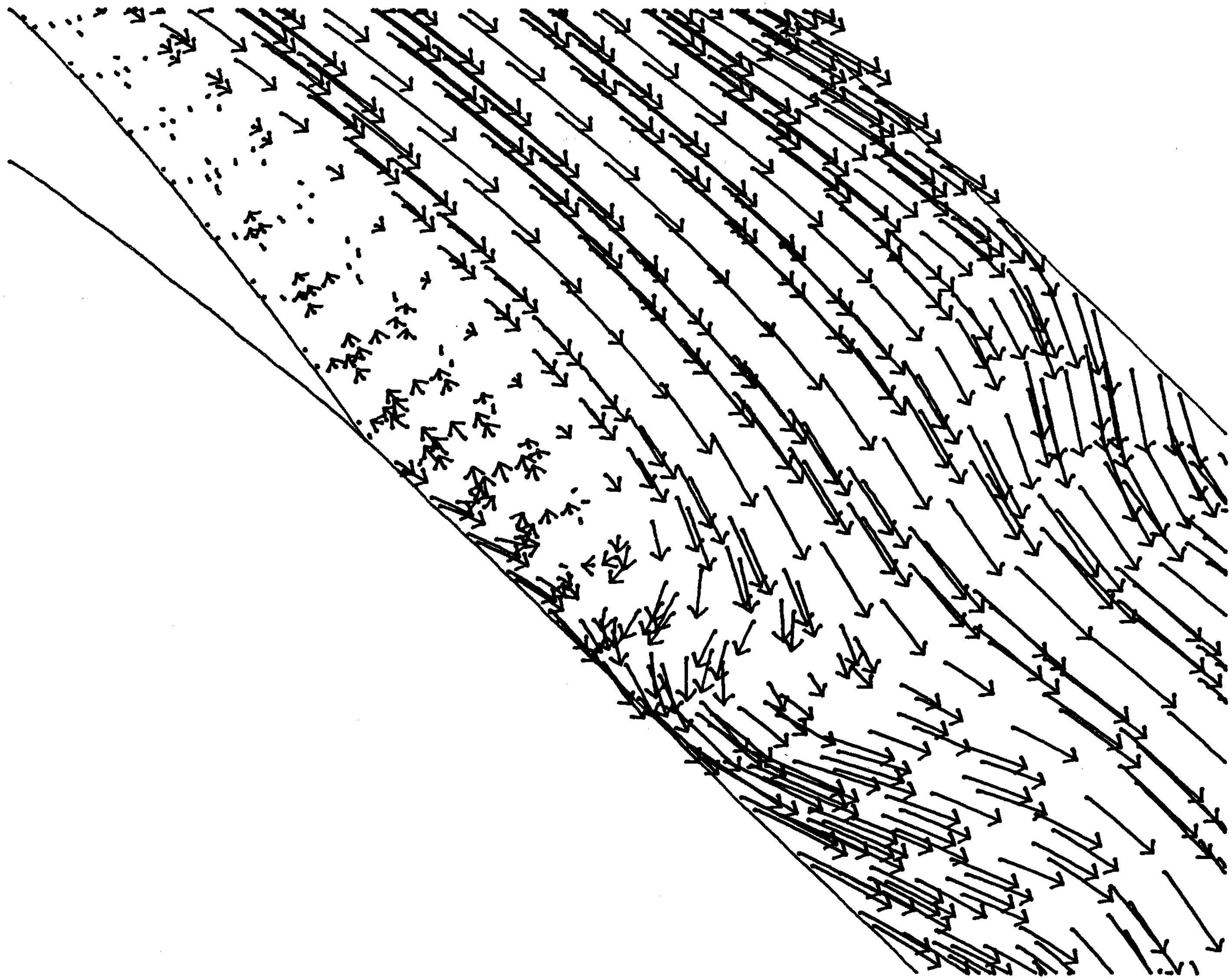


Figure 10g   t = 5.6 (Re = 1000)

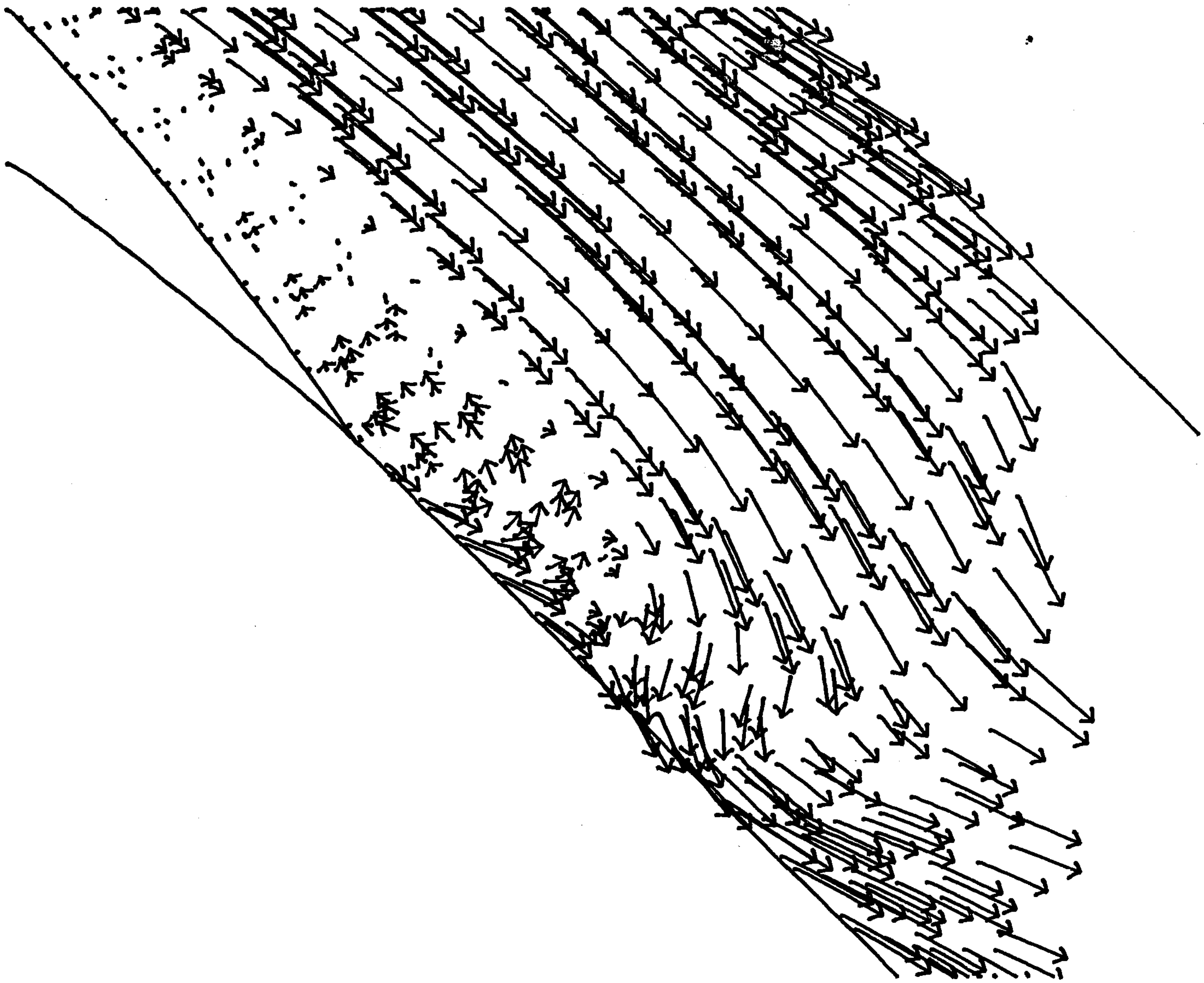


Figure 10h   t = 5.7 (Re = 1000)

REFERENCES

[1] A. Fortin, "Méthodes d'éléments finis pour les équations de Navier-Stokes", thèse de doctorat, Université Laval, Québec, 1984.

[2] M. Fortin, A. Fortin, "A generalisation of Usawa's algorithm for the solution of the Navier-Stokes equations", à paraître dans Communication in Applied Numerical Methods.

[3] M. Fortin, A. Fortin, "Numerical experiments with several elements for incompressible flows", soumis à IJNMF.

[4] F. Brezzi, "On the existence, uniqueness and approximation of Saddle-points problems arising from Lagrangien Multipliers", RAIRO, 8, R2, p. 129-151, (1974).

[5] A. Garon, R. Camarero, "Generation de maillage", rapport technique EPM/RT-84-11, Ecole Polytechnique de Montréal.

[6] T.S. Luu, T.P. Loc, "Développement d'une méthode numérique pour la détermination de l'écoulement visqueux incompressible autour d'une grille d'aubes", Journal de mécanique appliquée, vol. 5, no. 4, 1981.

[7] P.M. Gresho, S.T. Chan, R.L. Lee, D.U. Craig, "A modified finite element method for solving the time dependent, incompressible Navier-Stokes equations". Parties 1 et 2, IJNMF, Vol. 4, p. 557-598 et p. 619-640, (1984).