

EPM/RT-88/37

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉCOULEMENTS  
TRIDIMENSIONNELS TURBULENTS

Mohamed AGOUZOU, étudiant au Ph.D.  
Ricardo CAMARERO, professeur titulaire  
Marcelo REGGIO, professeur adjoint

Département de mathématiques appliquées

École Polytechnique de Montréal  
Décembre 1988

gratuit

Ce document a pu être publié grâce à une subvention du Gaz Métropolitain et du CRIM.

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite de l'auteur.

Dépôt légal, 4<sup>e</sup> trimestre 1988  
Bibliothèque nationale du Québec  
Bibliothèque nationale du Canada

Pour ce procurer une copie de ce document, s'adresser aux:

Éditions de l'École Polytechnique de Montréal  
École Polytechnique de Montréal  
Case postale 6079, Succursale "A"  
Montréal (Québec) H3C 3A7  
(514) 340-4000

Compter 0,10\$ par page (arrondir au dollar le plus près) et ajouter 3,00\$ (Canada) pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal. Nous n'honorons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable, dans le cas d'établissements d'enseignement, de société ou d'organismes canadiens.

# Sommaire

Dans cette étude, on développe une méthode de calcul des écoulements de fluides incompressibles en régime turbulent dans des géométries tridimensionnelles. Le schéma développé n'utilise pas le maillage décalé. La pression est calculée avec les conditions aux frontières sur la vitesse uniquement. Les conditions aux frontières des propriétés turbulentes sont traitées avec une attention particulière.

L'écoulement moyen est modélisé par les équations moyennes de Reynolds. Ce système d'équations est fermé avec un modèle de turbulence à deux équations ( $k - \epsilon$ ).

Le domaine visé par cette étude est celui des turbomachines où les géométries sont très complexes. Ainsi, les équations de base sont écrites sous forme conservative ou faiblement conservative, dans un système de coordonnées curvilignes adapté à la géométrie.

La formulation en variables primitives est utilisée avec les composantes cartésiennes de la vitesse comme variables dépendantes. La discrétisation spatiale des équations de base est obtenue par la technique des volumes de contrôle. L'élément de calcul, un élément où toutes les variables sont stockées au même point, est utilisé au lieu du traditionnel maillage décalé. Afin d'éviter des solutions non physiques, obtenues avec un stockage au même point, une différentiation opposée, pour la pression et le flux de masse, est utilisée dans la direction principale de l'écoulement avec un chevauchement dans les autres directions.

L'une des difficultés des écoulements incompressibles est l'inexistence d'une équation explicite pour la pression. Cette dernière est contrôlée par la contrainte de divergence nulle (de la vitesse). Le couplage vitesse-pression est résolu par un schéma, en temps, à pas fractionnaire modifié et adapté aux coordonnées curvilignes. Par ce schéma, une équation discrétisée pour la pression a été développée tenant compte uniquement de la condition d'adhérence sur la vitesse.

Le modèle de turbulence  $k-\epsilon$  utilisé n'est valable qu'en dehors des sous-couches visqueuses existant près des parois solides. Un traitement spécial est nécessaire près des frontières solides pour prendre en considération l'interaction des effets visqueux avec ceux de la turbulence. Ceci est résolu par la technique de la "loi de paroi". Ainsi, les conditions aux frontières, pour les propriétés turbulentes, sont

calculées, aux noeuds adjacents aux frontières solides, à partir du profil de vitesse.

Pour tenir compte de la loi "loi de paroi" dans les équations discrétisées de quantité de mouvement, une "viscosité équivalente" est calculée et appliquée sur les parois solides avec la condition de non glissement. Cette technique ne nécessite pas la connaissance de la direction de la vitesse aux noeuds près des parois solides contrairement à la technique de la vitesse de glissement imaginaire traditionnellement utilisée. Il en résulte une mise en oeuvre facile, dans les programmes tridimensionnels, et une réduction du temps de calcul.

La méthode de calcul développée est testée dans des configurations d'écoulements bidimensionnels et tridimensionnels. Les résultats numériques sont comparés aux mesures expérimentales et aux calculs numériques disponibles dans la littérature. L'accord est en général très satisfaisant.

# Abstract

In this study, we develop a numerical method to simulate three-dimensional incompressible turbulent flows. The scheme does not use the traditional staggered grid. The boundary conditions of the turbulence quantities are calculated with a particular attention.

The Reynolds average Navier-Stokes equations are used to describe such flows. The turbulent model  $k - \epsilon$  is used as a closure for the previous system of the governing equations.

The equations are written for a general curvilinear coordinate in the conservative or semi-conservative form. The required discretization of the domain is carried out by the use of a grid which is numerically generated by the body-fitted coordinate technique.

The equations are formulated in primitive variables with the cartesian velocity

components as the dependent variables. The control volume technique is used to discretize the equations in a nonstaggered mesh instead of the traditional staggered grid. In order to avoid unrealistic fields arising with such discretization, an opposed differencing for pressure and mass flux is applied in the main flow direction with an overlapping in the other directions.

The coupling between the pressure and the velocity fields, associated with the computation of incompressible flows, is solved by using a fractional step methodology modified for curvilinear coordinate. To derive the discrete equation of the pressure we use only the no-slip boundary condition on the velocity.

The two-equation  $k - \epsilon$  model used is only valid for fully turbulent regions, and does not include the viscous sublayer effects. To account for the interaction of the viscous and turbulent effects near the solid wall, the "wall function" technique is adopted. Following this approach, the boundary conditions, for  $k - \epsilon$ , are derived from the velocity profile at the first node near the wall. An additional treatment is made to avoid errors when computing of the shear stresses on the wall-adjacent elements. This is usually done by using an imaginary wall slip-velocity instead of the zero velocity condition. In the present study, an "equivalent viscosity" is calculated and applied on the solid wall. This method needs the value and not the direction of the velocity at the first node near the wall. It leads to an easy

implementation for three-dimensional codes and a reduction of the computing time.

The numerical scheme developed is applied to simulate the flows in two-dimensional and three-dimensional cases. The computed results are compared with numerical and experimental data. A good agreement is observed.



# Remerciements

Les nombreuses responsabilités de monsieur le professeur Ricardo Camarero ne l'ont pas empêché de m'accueillir au sein du groupe MIAO. Malgré ses nombreuses activités, scientifiques et administratives, il a toujours trouvé le temps de suivre l'évolution de mon travail et de me faire bénéficier de son expérience. Je lui exprime ainsi toute ma reconnaissance.

Je tiens à remercier le professeur Marcelo Reggio pour son esprit coopératif.

Messieurs les professeurs Gérard Degrez de l'Université de Sherbrooke, Patrick Vasseur et Dominique Pelletier de l'École Polytechnique de Montréal ont accepté de critiquer ce travail et de faire partie du jury, qu'ils en soient remerciés.

Cette étude ne serait menée à terme sans le support financier du CRIM et de la Société Gaz métropolitain, je les en remercie.

Je tiens à remercier tous mes amis et collègues du groupe MIAO qui m'ont

enduré et rendu mon séjour agréable parmi eux. Je remercie également Madame Jeannine Leclerc pour la qualité de la présentation de ce document.

Mes remerciements seraient incomplets sans exprimer toute ma gratitude à Souad, mon épouse, pour m'avoir soutenu durant ce travail.

# Table de Matières

Sommaire	iv
Abstract	vii
Remerciements	x
Table des matières	xii
Notations	xvi
Liste des figures	xxi
Chapitre 1 : Introduction	1
1.1 Généralités . . . . .	2
1.2 La Turbulence . . . . .	3

1.3	Méthodes et formulations . . . . .	7
1.3.1	Méthodes . . . . .	7
1.3.2	Formulations . . . . .	10
1.4	Objectif et plan de la thèse . . . . .	11
<b>Chapitre 2 : Les Équations de base</b>		<b>14</b>
2.1	Les équations de mouvement . . . . .	15
2.2	Les modèles de turbulence . . . . .	17
2.2.1	Les modèles à zéro équation ou algébriques . . . . .	19
2.2.2	Les modèles à une équation . . . . .	20
2.2.3	Les modèles à deux équations . . . . .	22
2.2.4	Les modèles aux tensions de Reynolds . . . . .	23
2.3	Conclusion . . . . .	24
2.3.1	Les équations à résoudre . . . . .	24
<b>Chapitre 3 : Transformation des Equations</b>		<b>27</b>
3.1	Introduction . . . . .	28
3.2	Génération du maillage . . . . .	29
3.3	Transformation des équations . . . . .	30

<b>Chapitre 4 : Élaboration du Schéma numérique</b>	<b>34</b>
4.1 Stockage et discrétisation spatiale . . . . .	35
4.2 Discrétisation en temps et calcul de la pression . . . . .	43
4.3 Algorithme de résolution . . . . .	48
4.4 Conditions aux frontières . . . . .	49
<b>Chapitre 5 : Résultats numériques</b>	<b>60</b>
5.1 Introduction . . . . .	61
5.2 Cas bidimensionnels . . . . .	62
5.2.1 Diffuseur axisymétrique . . . . .	62
5.2.2 Les grilles d'aubes . . . . .	64
5.3 Cas tridimensionnels . . . . .	67
5.3.1 Coude à section carrée . . . . .	68
5.3.2 Coude à section circulaire . . . . .	69
5.3.3 Aspirateur tridimensionnel . . . . .	72
<b>Chapitre 6 : Conclusion</b>	<b>77</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>82</b>
<b>Annexe A</b>	<b>92</b>

**Annexe B**

**xv**

**97**

# Notations

$A$	Section
$C_1, C_2, C_d$	Coefficients du modèle de turbulence
$C_{pr}$	Coefficient de récupération de la pression statique
$D_e$	Nombre de Dean
$D_h$	Diamètre hydraulique
$\bar{e}^i$	Vecteurs de la base naturelle
$E_*$	Coefficient de "la loi de paroi"
$E, F, G$	Termes de convection (3.10)
$f, f', \bar{f}$	Variable quelconque, sa fluctuation et sa valeur moyenne
$g$	Déterminant de la métrique covariante
$\bar{g}_i$	Vecteurs de la base covariante
$\bar{g}^i$	Vecteurs de la base contravariante

$g_{ij}$	Coefficients de la métrique covariante
$g^{ij}$	Coefficients de la métrique contravariante
$G_*$	Terme de production (3.8)
$H$	Terme source (3.10)
$J$	Jacobien de la transformation (A.1)
$k$	Energie cinétique de turbulence
$L_c$	Longueur caractéristique
$l_m$	Longueur de mélange
$P$	Pression
$P_e$	Nombre de Peclet
$r$	Rayon
$R, S, T$	Termes visqueux (3.10)
$Re$	Nombre de Reynolds ou rayon de la courbure externe
$R_i$	Rayon de la courbure interne
$R_m$	Rayon moyen
$S$	Intensité du tourbillon
$S_\varphi$	Terme source (4.15)
$t$	Temps
$T_c, T_v$	Termes de convection et visqueux (4.15)



$u_i, u'_i$	Composantes cartésiennes de la vitesse et leurs fluctuations
$U^i$	Composantes curvilignes de la vitesse
$V_*$	Vitesse de frottement
$V^+$	Vitesse adimensionnelle
$w$	Vitesse tangentielle (tourbillon)
$x_i$	Coordonnées cartésiennes
$y$	Distance normale à la paroi solide
$y^+$	Distance adimensionnelle

## Lettres grecques

$\alpha$	Angle ou coefficient de pondération
$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker
$\epsilon$	Taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence
$\theta$	Angle
$\lambda$	Degré de turbulence
$\nu$	Viscosité du fluide
$\nu_e$	Viscosité efficace
$\nu_t$	Viscosité turbulente
$\Gamma_e$	Viscosité équivalente
$\xi^i$	Coordonnées curvilignes (contravariantes)
$\rho$	Masse volumique du fluide
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	Constantes du modèle de turbulence
$\delta$	Contrainte de cisaillement à la paroi
$\varphi$	Variable quelconque
$\kappa$	Constante de Von Kármán

## Indices

$e, w, n, s, f, b$	Réfèrent aux faces de l'élément de calcul
$i, j, k$	Indices de la discrétisation
max	Maximale
moy	Moyenne
$p$	Noeud près de la paroi solide
$w$	Valeur à la paroi solide
0	Valeur moyenne à l'entrée
$e$	Valeur à l'entrée
$s$	Valeur à la sortie

# Figures

1	Transformation du domaine physique $(x_1, x_2, x_3)$ en domaine de calcul $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ . . . . .	102
2	Maillage décalé: a) volume de contrôle pour $v$ ; b) pour $u$ ; c) pour la continuité . . . . .	103
3	Élément de calcul: a) vue 3D; b) vue 2D . . . . .	104
4	Chevauchement des éléments: vue 2D ( $\xi^3 = cste$ ) . . . . .	105
5	Premier noeud près de la paroi solide . . . . .	106
6	Domaine de résolution de $k - \epsilon$ : vue 2D . . . . .	107
7	Maillage du diffuseur axisymétrique . . . . .	108
8	Champ de vitesse et lignes iso-vitesse axiale (diffuseur axisymétrique) . . . . .	109
9	Lignes de courant (diffuseur axisymétrique) . . . . .	110

10	Profil de vitesse à $x/r = 3.2$ (diffuseur axisymétrique): (—) résultats numériques; (□ □ □) mesures de Habib et al. (1982) . . . . .	111
11	Profil de vitesse à $x/r = 6.4$ (diffuseur axisymétrique): (—) résultats numériques; (□ □ □) mesures de Habib et al. (1982) . . . . .	112
12	Profil de vitesse à $x/r = 12.2$ (diffuseur axisymétrique): (—) résultats numériques; (□ □ □) mesures de Habib et al. (1982) . . . . .	113
13	Maillage passage inter-aube (NACA0012) . . . . .	114
14	Champ de vitesse (NACA0012) . . . . .	115
15	Coefficient de pression (NACA0012), (—) résultats numériques, (□ □ □) mesures de Gregory et O'Reilly (1970) . . . . .	116
16	Maillage du passage inter-aube (NACA81) . . . . .	117
17	Champ de vitesse (NACA81) . . . . .	118
18	Coefficient de pression le long du profil (NACA81); (—, ---) résultats numériques (extrados, intrados); (x x x, o o o) mesures de Dunavant et Erwin (1956) . . . . .	119
19	Géométrie du coude à section carrée et Maillage dans le plan longitudinal . . . . .	120
20	Vue 3D du coude à section carrée . . . . .	121
21	Développement de la vitesse dans le plan de symétrie . . . . .	122

22	Écoulement secondaire à $45^\circ$ (coude à section carrée) . . . . .	123
23	Écoulement secondaire à $90^\circ$ (coude à section carrée) . . . . .	124
24	Lignes d'iso-pression vue de la paroi extérieure . . . . .	125
25	Lignes d'iso-pression vue de la paroi intérieure . . . . .	126
26	Iso - $k$ dans le plan de symétrie . . . . .	127
27	Iso - $\epsilon$ dans le plan de symétrie . . . . .	128
28	Iso - $k$ à $90^\circ$ . . . . .	129
29	Iso - $\epsilon$ à $90^\circ$ . . . . .	130
30	Profil de vitesse à la sortie du coude; (—) résultats numériques; (o o o) résultats expérimentaux, Mori et al.(1971) . . . . .	131
31	Géométrie du coude à section circulaire et Maillage dans le plan longitudinal ( $\xi^1$ ) . . . . .	132
32	Maillage dans le plan transversal ( $\xi^2, \xi^3$ ) . . . . .	133
33	Développement de la vitesse dans le plan de symétrie . . . . .	134
34	Écoulement secondaire à $\theta = 30^\circ$ . . . . .	135
35	Écoulement secondaire à $\theta = 60^\circ$ . . . . .	136
36	Écoulement secondaire à $1d$ après le coude . . . . .	137
37	Lignes d'iso-vitesse méridienne à $\theta = 30^\circ$ ; a) résultats numériques; b) résultats expérimentaux de Enay et al.(1982) . . . . .	138

38	Lignes d'iso-vitesse méridienne à $1d$ après le coude; a) résultats numériques; b) résultats expérimentaux de Enayet et al.(1982)	139
39	Coefficient de pression sur les parois solides dans le plan de symétrie; (—) résultats numériques; (---) calcul de Briley et al. (1982); (□□□) mesures d'expérience de Enayet et al. (1982)	140
40	Iso - $k$ dans le plan de symétrie	141
41	Iso - $\epsilon$ dans le plan de symétrie	142
42	Iso - $k$ à $1d$ après le coude	143
43	Iso - $\epsilon$ à $1d$ après le coude	144
44	Vue 3D de l'aspirateur	145
45	Champ de vitesse dans le plan médian	146
46	Ecoulement secondaire à la section $i = 22$ (vers la fin du coude)	147
47	Distribution de la pression dans le plan médian	148
48	Coefficient de récupération de la pression statique en fonction de l'intensité du tourbillon: (●) résultats numériques; (×) calcul de Shy et al.(1986); (Δ) mesure de Thi (1988)	149

# Chapitre 1

## Introduction



## 1.1 Généralités

Le sujet des écoulements internes est très vaste et très complexe. L'étude de ces écoulements constitue un problème d'intérêt fondamental aussi bien que pratique. En effet, l'écoulement d'un fluide joue un rôle très important dans le cas de plusieurs composantes de turbomachines telles que le stator, le rotor ou le diffuseur.

Dans le présent travail, on étudie l'écoulement interne dans des grilles d'aubes ou dans des conduites de courbure quelconque. Dans de telles configurations et dans les conditions de fonctionnement de ces composantes, l'écoulement a généralement un caractère très complexe: il est visqueux, turbulent et tridimensionnel.

Dans le passé, les concepteurs et les ingénieurs se sont basés sur les résultats expérimentaux, effectués sur des modèles, pour concevoir les différentes composantes de turbomachines et prédire leurs performances. Cependant, les investigations expérimentales nécessitent du matériel et des systèmes de mesure très complexes et coûteux. De plus, la connaissance qu'ils offrent sur le caractère de l'écoulement est très limitée.

Depuis quelques années, avec l'avènement d'ordinateurs de plus en plus performants et le développement des méthodes numériques, la tendance s'oriente et s'accroît vers la simulation numérique, véritable expérience par ordinateur, des

phénomènes physiques d'une façon générale et des écoulements en particulier. La résolution numérique d'un modèle mathématique, décrivant l'écoulement du fluide, permet de prévoir le comportement du fluide dans la composante de machine où la résolution est faite. Ainsi, le concepteur peut se baser sur ces résultats numériques pour prédire les performances de telles machines.

## 1.2 La Turbulence

L'observation de l'écoulement d'un fluide permet de distinguer différents régimes d'écoulements: les écoulements turbulents et les écoulements non turbulents. Ces derniers sont dits laminaires dans les régions où les frottements dûs à la viscosité sont dominants.

Notons que la turbulence est une propriété de l'écoulement du fluide et non du fluide lui-même. Plusieurs scientifiques ont essayé de définir le phénomène de la turbulence.

Taylor a dit, pour définir la turbulence:

“Turbulence is an irregular motion which in general makes its appearance in fluids, gaseous or liquid, when they flow past solid surfaces or even when neighbouring streams of the same fluid past or over one

another”.<sup>1</sup>

Il a ajouté après:

“The actual motion is usually so irregular that very little is known of its details”.

Osborne Reynolds a caractérisé ce genre d'écoulement de “mouvement sinus”.

D'après Hinze (1975), ce type d'écoulement peut être défini comme suit:

“Turbulent fluid motion is an irregular condition of flow in which the various quantities show a random variation with time and space coordinates so that statistically distinct average values can be discerned”.

Les citations précédentes montrent à quel point il est difficile de donner une définition générale et précise du phénomène de la turbulence. Cependant, les écoulements turbulents présentent certaines caractéristiques qui permettent de les distinguer des écoulements laminaires.

Les écoulements turbulents ont un caractère aléatoire, de diffusion, dissipatif, ..., etc. En effet, pour ce type d'écoulement, toutes les grandeurs physiques de l'écoulement sont des variables aléatoires dans le temps et l'espace. La diffusion

---

<sup>1</sup>Ref. von Kármán (1937)

est très grande lorsque l'écoulement devient turbulent; un exemple de ce caractère est l'expérience de Reynolds. La dissipation de l'énergie cinétique en chaleur est plus intense dans les mêmes conditions.

Ajoutons que le mouvement turbulent est un mouvement rotationnel et que la turbulence est un phénomène tridimensionnel localisé qui se produit brusquement même si l'écoulement laminaire précédent est bidimensionnel. L'un des critères de l'apparition de la turbulence est le nombre de Reynolds où la viscosité cinématique du fluide est la seule propriété du fluide prise en considération.

La présence d'écoulements en régime turbulent, dans les composantes de machines, présente des avantages aussi bien que des inconvénients. Parmi les avantages on peut citer: l'augmentation des vitesses des réactions chimiques, l'augmentation des échanges de chaleur, le retard de la séparation des couches limites, ..., etc. Parmi les inconvénients on note: l'érosion des surfaces des conduites, les pertes de charge plus élevées, le bruit aérodynamique dû aux fluctuations de la pression, ..., etc d'où la nécessité de comprendre et donc de pouvoir simuler correctement le comportement des composantes sous de telles conditions.

On admet que les écoulements turbulents peuvent être décrits par les équations instationnaires de Navier-Stokes. Cependant, la résolution numérique de ces équations nécessiterait des maillages très fins ainsi que des pas de temps très petits

pour que l'on puisse récupérer les plus petites structures de la turbulence; et par conséquent, des espaces mémoire et des temps de calcul qui dépassent les capacités des ordinateurs actuels.

Pour les problèmes pratiques d'ingénierie, il n'est pas nécessaire de connaître tous les détails (fluctuations des grandeurs physiques de l'écoulement); on s'intéresse uniquement aux moyennes temporelles des valeurs. Ainsi, la prédiction de l'écoulement sera basée sur ces valeurs moyennes.

Les équations de Navier-Stokes sont remplacées par les équations moyennes de Reynolds, dérivées de ces dernières, qui décrivent l'écoulement moyen. Des termes additionnels apparaissent dans ces nouvelles équations et qui peuvent s'interpréter comme des tensions agissant sur le fluide. Ces termes, nommés *les tensions de Reynolds*, peuvent être reliés aux variables moyennes de l'écoulement par le biais de modèles de turbulence. De nombreux modèles existent dans la littérature. Ils sont soit algébriques soit à une ou plusieurs équations de transport.

## 1.3 Méthodes et formulations

### 1.3.1 Méthodes

#### historique

De nombreuses études, faisant l'état des connaissances de l'art sur les méthodes et des théories pour la description des écoulements internes, sont apparues dans la littérature. Dans ce qui suit, nous en donnerons un bref historique de ces méthodes.

Dans les années 50 et 60, on utilisait souvent les méthodes de singularités pour décrire les écoulements bidimensionnels, incompressibles et potentiels dans les grilles d'aubes. Une revue est donnée par Grostelow (1973), Perkins et Horlock (1975).

A partir des années 60, les méthodes des différences finies commencent à être utilisées en bidimensionnel pour les écoulements subsoniques et non visqueux. Des revues de ces méthodes sont données par Perkins et Horlock (1975), Japikse (1976), et complétées par McNally et Sockol (1985).

Durant les années 70, on a commencé la résolution des équations d'Euler instationnaires évoluant dans le temps ("time-marching") pour les écoulements laminares et transoniques, bidimensionnels et tridimensionnels. Japikse (1976) donne

la revue de quelques méthodes, McNally et Soskol (1975) l'ont complétée.

Durant ces mêmes années 70, toutes les méthodes citées continuent d'être utilisées. L'influence de la viscosité commence à être prise en considération; ainsi les approximations des équations de Navier-Stokes font leur apparition. La revue est donnée par Adler (1980) et ensuite par McNally et Sockol (1985). Durant cette décennie, on a commencé à tenir compte de la turbulence lors des simulations numériques, Kline (1982) en donne une revue détaillée.

### Méthodes d'approximation

Pour certains types d'écoulements, les équations de Navier-Stokes ou de Reynolds peuvent être simplifiées pour faciliter leur résolution numérique. Parmi les approximations utilisées pour les configurations tridimensionnelles, on peut citer:

- **Les méthodes quasi-tridimensionnelles:** Elles sont basées sur la décomposition du système tridimensionnel en deux ou trois systèmes bidimensionnels couplés et résolus d'une façon itérative. Elles ont connu un succès en turbomachines, Wu (1952), et Katsanis (1969); mais présentent des difficultés lors de leurs applications avec des effets visqueux.

- **Les méthodes parabolisées ou partiellement parabolisées:** Elles sont utilisées pour les écoulements présentant une direction prédominante dans laquelle les phénomènes de séparation ou de recirculation sont inexistantes ou négligeables. Dans ce cas, les équations sont simplifiées en négligeant les termes visqueux dans cette direction. Pour les méthodes partiellement parabolisées, la pression est traitée d'une manière elliptique, Caretto et al (1972). Par contre, pour les méthodes complètement parabolisées, la pression est traitée d'une manière différente. Arnal et Cousteix (1979) ont utilisé une formulation qui consiste à fixer le gradient de pression longitudinal (direction prédominante) dont la valeur peut être déterminée expérimentalement. L'approche de Patankar et Spalding (1972) consiste à déterminer le gradient de pression longitudinal par l'utilisation d'une contrainte assurant la conservation du débit total.
  
- **Les méthodes tridimensionnelles "exactes":** Ce sont des méthodes qui n'utilisent aucune hypothèse simplificatrice. Elles tiennent compte des effets visqueux dans toutes les directions et peuvent résoudre des écoulements avec ou sans recirculation. Une revue détaillée des différents schémas numériques, aux différences finies et des volumes finis, a été faite récemment par Anderson



et al (1984) et complétée par Lewis (1986).

### 1.3.2 Formulations

Deux formulations principales existent pour la simulation numérique des écoulements. L'une utilise les variables primitives, qui sont la pression et la vitesse. L'autre utilise des variables secondaires telles que: la vorticité et la fonction de courant pour les écoulements bidimensionnels, ou la vorticité et le potentiel vecteur pour les configurations tridimensionnelles. Cette seconde formulation modifie les équations de quantité de mouvement, en éliminant la pression de ces dernières, pour déterminer la vorticité. Des résultats prometteurs ont été obtenus avec cette dernière pour les écoulements externes par Pulliam et Steger (1980), et Spradley et al (1981). Par contre, en écoulements internes peu d'études existent: Khalil et Weber (1984), et Yang et Camarero (1986). Ceci est dû à la difficulté de la dérivation des conditions aux frontières pour les variables secondaires.

Les variables primitives ont été utilisées par Harlow et Welch (1965) dans leur méthode MAC (marker and cell) introduite en 1965. La pression est déterminée par une équation de Poisson pour satisfaire la continuité. Amsden et Harlow (1970) ont modifié cette méthode, initialement développée pour les écoulements

à surface libre, donnant la méthode SMAC (simplified marker and cell) utilisant directement l'équation de continuité. Ce n'est qu'après les travaux de Patankar et Spalding (1972) que l'utilisation des variables primitives est devenue populaire et spécialement pour les écoulements turbulents. Une des méthodes développées par les auteurs est la méthode SIMPLE où la pression et la vitesse sont corrigées, après la résolution des équations de quantité de mouvement, pour satisfaire la continuité.

Toutes ces méthodes, en variables primitives, utilisent un maillage décalé (staggered grid) où les composantes de la vitesse et la pression sont stockées dans différents endroits du maillage.

Des études précédentes, Agouzoul (1985) et Agouzoul et Camarero (1988-A), sur les écoulements turbulents bidimensionnels en formulation vorticité-fonction de courant, nous ont conduit à préférer la formulation en variables primitives. Ainsi, la difficulté des conditions aux frontières ne subsistera que pour les propriétés turbulentes.

## **1.4 Objectif et plan de la thèse**

L'objectif principal de la présente étude est le développement d'un schéma numérique, basé sur la technique des volumes de contrôle, pour les écoulements turbu-

lents tridimensionnels.

Dans le chapitre II, nous présentons les équations qui décrivent un écoulement turbulent moyen. Ces équations contiennent des termes (tensions de Reynolds) qui nécessitent une modélisation. Ainsi, nous donnons un aperçu sur quelques modèles de turbulence et spécialement le modèle utilisé ( $k - \epsilon$ ). Pour le système d'équations de base, aucune simplification n'est utilisée; ainsi on peut résoudre des écoulements avec ou sans recirculation.

Au chapitre III, nous montrons la nécessité d'un système de coordonnées curvilignes généralisées. Les équations sont transformées dans ce système et mises sous une forme conservative.

Le chapitre IV est consacré au développement du schéma numérique utilisant la technique des volumes de contrôle. A la deuxième section du chapitre, la technique de stockage est discutée de même que le développement de la discrétisation spatiale des équations. La discrétisation en temps et le développement de l'équation pour le calcul de la pression y sont aussi. A la dernière section, nous traitons du calcul et l'imposition des conditions aux frontières pour les propriétés turbulentes.

Les résultats numériques obtenus avec le présent schéma, dans des configurations bidimensionnelles et tridimensionnelles, sont rapportés au chapitre V. Ces résultats sont comparés à d'autres résultats expérimentaux et numériques.

Enfin, une conclusion sur le présent travail est donnée au chapitre VI.

# Chapitre 2

## Les Équations de base

## 2.1 Les équations de mouvement

Lorsque l'écoulement d'un fluide devient turbulent, toutes les variables de l'écoulement (vitesse, pression, ..., etc.) deviennent des variables aléatoires en fonction du temps et de l'espace.

En principe, les écoulements turbulents sont régis par les équations de Navier-Stokes instationnaires. Ces équations peuvent être résolues, numériquement, en adoptant les mêmes méthodes déjà développées pour les écoulements laminaires. Cependant, le temps et la longueur caractéristiques des petites structures de l'écoulement turbulent sont respectivement de l'ordre de  $Re^{-\frac{1}{2}}$  et  $Re^{-\frac{3}{4}}$  d'après la théorie de Kolmogorov (1941). Pour qu'une simulation numérique soit représentative le pas de temps et la finesse du maillage doivent être au plus du même ordre de grandeur que ces petites structures. Avec ces limites on dépasse la capacité des ordinateurs modernes dans le cas des problèmes d'intérêt pratique.

Pour les cas pratiques d'écoulements turbulents, seuls les effets moyens sont considérés. Leur prédiction sera basée sur les valeurs moyennes de l'écoulement. Pour cela toutes les variables dépendantes sont décomposées en une partie moyenne et une partie fluctuante, soit pour une variable  $f$ :

$$f = \bar{f} + f' \quad (2.1)$$

avec

$$\bar{f} : \text{moyenne temporelle} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t + \tau) d\tau$$

$$f' : \text{fluctuation de } f$$

$$\bar{f}' = 0$$

Les équations décrivant le mouvement moyen sont obtenues en décomposant toutes les variables dépendantes (vitesse, pression) et en prenant la moyenne des équations de Navier-Stokes. Ces équations ainsi obtenues, connues sous le nom des équations de Reynolds, sont<sup>1</sup>:

- quantité de mouvement:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right] \quad (2.2)$$

- continuité:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.3)$$

Notons que ces équations sont obtenues pour l'écoulement d'un fluide incompressible et newtonien.

---

<sup>1</sup>dans ce qui suit, la barre indiquant la valeur moyenne sera omise pour plus de clarté

L'effet de la turbulence est introduit par les corrélations doubles  $\overline{u'_i u'_j}$  qui peuvent être interprétées comme des contraintes apparentes agissant sur l'élément de fluide. On les appelle tensions de Reynolds.

Le système d'équations (2.2) et (2.3) ne peut pas être résolu à cause de l'existence des tensions de Reynolds. Ces tensions apparentes peuvent être déterminées par des équations supplémentaires ou par des relations algébriques les reliant aux variables moyennes de l'écoulement. L'ensemble de ces équations ou relations constitue le modèle de turbulence qui sera discuté à la section suivante.

## 2.2 Les modèles de turbulence

La résolution des équations de Reynolds, introduites à la section précédente, nécessite l'utilisation d'un modèle de turbulence dont il existe un grand nombre. Leur complexité dépend, en partie, du nombre d'équations supplémentaires utilisées pour déterminer ou modéliser les tensions de Reynolds.

Un grand nombre de modèles de turbulence sont basés sur le concept de la viscosité turbulente, introduit par Boussinesq en 1877, qui stipule que les tensions de Reynolds sont proportionnelles aux déformations moyennes. Pour un écoulement incompressible ceci se traduit par:



$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (2.4)$$

où  $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$  est l'énergie cinétique de turbulence et  $\nu_t$  est appelée viscosité turbulente par analogie à la viscosité moléculaire. Contrairement à cette dernière la viscosité turbulente dépend seulement de l'écoulement et peut varier d'un point à un autre.

Par analogie avec la théorie cinétique des gaz pour la détermination de la viscosité moléculaire des gaz, la viscosité turbulente peut s'écrire comme le produit d'une vitesse caractéristique ( $V_c$ ) et d'une longueur caractéristique ( $L_c$ ) soit:

$$\nu_t = V_c L_c \quad (2.5)$$

Tous les modèles de turbulence, basés sur le concept de la viscosité turbulente, ont pour objectif la détermination de cette vitesse et cette longueur caractéristiques. Notons que pour ce concept, la viscosité turbulente est une fonction scalaire, ce qui n'est valable que pour la turbulence homogène. Dans ce cas les tensions de Reynolds ont une représentation isotrope.

Les modèles de turbulence peuvent être classifiés en trois catégories:

1. Les modèles basés sur le concept de la viscosité turbulente. Ils se classent

aussi suivant le nombre d'équations utilisées pour la détermination de la viscosité turbulente.

2. Les modèles qui permettent de déterminer directement les tensions de Reynolds sans utiliser le concept précédent. Ils sont connus sous le nom des modèles aux tensions de Reynolds.
3. Les modèles qui n'utilisent pas les équations de Reynolds contrairement aux deux premières catégories. Parmi ces modèles on peut citer les méthodes, connues sous le nom anglo-saxon de "Large eddy simulation", qui sont basées sur l'idée que les grosses structures de la turbulence sont décrites par un processus déterministe. Ces méthodes sont encore en cours de développement et leur mise en oeuvre nécessite beaucoup de ressources informatiques. Cette catégorie de modèles est décrite en détail par Mathieu et al (1984).

### 2.2.1 Les modèles à zéro équation ou algébriques

Ces modèles expriment la viscosité turbulente en fonction des variables locales par des relations algébriques. En s'inspirant de la théorie cinétique des gaz, Prandtl en 1925 a proposé un modèle qui peut s'exprimer par la relation suivante:

$$\nu_t = \ell_m^2 \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

où  $\ell_m$ , longueur de mélange, est un paramètre qui dépend du type d'écoulement considéré. Il peut être spécifié d'une manière empirique ou semi-empirique, Rodi (1980).

Ces modèles évaluent la viscosité turbulente en termes de variables ou propriétés locales de l'écoulement et ne tiennent pas compte de l'influence de l'écoulement amont sur la structure de la turbulence. Mais avec un choix judicieux de la longueur de mélange, ces modèles permettent la simulation de certains écoulements simples: couches limites, jets, ..., etc.

### 2.2.2 Les modèles à une équation

Pour tenir compte de l'influence de l'écoulement amont sur la structure de la turbulence en un point donné, Kolmogorov (1942) et Prandtl (1945) ont proposé l'utilisation d'une vitesse caractéristique égale à la racine carrée de l'énergie cinétique de turbulence  $k$ . La distribution de  $k$  est déterminée par une équation de transport tenant compte des phénomènes de la convection, la diffusion, la dissipation et de la production. L'équation exacte de  $k$  est déduite des équations de Navier-Stokes

et fait apparaître d'autres inconnues. Après modélisation des inconnues, Launder et al (1984), l'équation de  $k$  peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu_t \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_d \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\ell} \quad (2.7)$$

où les constantes  $\sigma_k$  et  $C_d$  sont déterminées empiriquement et  $\ell$  est une longueur caractéristique, semblable à la longueur de mélange, déterminée d'une manière empirique ou semi-empirique.

La viscosité turbulente est reliée à  $k$  et  $\ell$  par la relation:

$$\nu_t = C_d k^{\frac{1}{2}} \ell \quad (2.8)$$

D'autres chercheurs ont développé des modèles équivalents dont une revue détaillée est donnée par Launder et Spalding (1972). L'un des points faibles de ces modèles est la difficulté à spécifier une distribution adéquate de la longueur caractéristique qui dépend du type d'écoulement.

Pour remédier à cet inconvénient  $\ell$  peut être déterminée à partir d'une variable dont la distribution est régie par une équation de transport; d'où les modèles à deux équations.

### 2.2.3 Les modèles à deux équations

La plupart de ces modèles utilisent deux équations de transport:

- l'une pour l'énergie cinétique de turbulence (eq.2.7)
- et l'autre pour le transport d'une variable  $z = k^m \ell^n$ .

Différentes valeurs de  $m$  et  $n$  (ou variable  $z$ ) ont été utilisées dans la littérature. Launder et al (1984) donnent les principales variables utilisées telles que  $k\ell$ ,  $k^{1/2}/\ell$ ,  $k^{3/2}/\ell$ , ..., etc. La principale différence entre ces modèles est le choix de la variable dépendante pour la deuxième équation du modèle.

Le plus utilisé de ces modèles est le modèle  $k - \epsilon$ , où  $\epsilon$  est le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence, soit le terme de dissipation de l'équation (2.7) d'où:

$$\epsilon = C_d \frac{k^{3/2}}{\ell} \quad (2.9)$$

La popularité de ce modèle est probablement due à l'interprétation physique d'  $\epsilon$  qui peut être mesurée (bien qu'avec difficultés). Comme pour  $k$  l'équation exacte de  $\epsilon$  peut être dérivée des équations de Navier-Stokes, Launder et al (1984), faisant apparaître d'autres termes inconnus. L'équation modélisée de  $\epsilon$  s'écrit sous la forme:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + C_1 \frac{\epsilon \nu_t}{k} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.10)$$

où  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\sigma_\epsilon$  sont des constantes déterminées empiriquement. La viscosité turbulente est déterminée à partir de  $k$  et  $\epsilon$  par:

$$\nu_t = C_d \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.11)$$

Le seul inconvénient que l'on peut attribuer à ces modèles c'est qu'ils sont basés sur le concept de la viscosité turbulente.

### 2.2.4 Les modèles aux tensions de Reynolds

Ce sont les modèles qui ne sont pas basés sur le concept de la viscosité turbulente. Les équations exactes des tensions de Reynolds peuvent être déduites des équations de Navier-Stokes, Hinze (1975). Ces équations font apparaître d'autres inconnues.

La modélisation de ces termes inconnus, en fonction des variables de l'écoulement moyen ou des tensions de Reynolds elles-mêmes, conduit aux équations constituant cette catégorie de modèles.

Parmi ces modèles on peut citer celui de Hanjalic et Launder (1972). Ces modèles peuvent prédire certains phénomènes qui échappent aux modèles basés sur

la viscosité turbulente. Ils sont encore en cours de développement et font intervenir plusieurs équations supplémentaires ce qui limite encore leur utilisation.

## 2.3 Conclusion

Dans la section (2.1) on a introduit les équations qui décrivent le mouvement des écoulements turbulents. Dans ces équations apparaissent les tensions de Reynolds qui peuvent être modélisées par l'un des modèles discutés à la section (2.2). Parmi les modèles existants, les modèles aux tensions de Reynolds peuvent être considérés comme les plus avancés à l'heure actuelle. Cependant, ils nécessitent la résolution de plusieurs équations (une pour chaque tension de Reynolds) et, par conséquent, une augmentation du temps de calcul et des variables à stocker.

Dans la présente étude, le modèle à deux équations ( $k - \epsilon$ ) est utilisé. Il peut être considéré, à l'état actuel des connaissances, comme le modèle le plus simple réalisant un bon compromis entre la prédiction réaliste et le temps de calcul.

### 2.3.1 Les équations à résoudre

En remplaçant les tensions de Reynolds par leurs expressions (2.4), les équations de Reynolds se mettent sous la forme:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu_e \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (2.12)$$

avec l'équation de continuité

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.13)$$

où l'énergie cinétique de turbulence  $k$ , apparaissant dans les relations (2.4), est absorbée par le terme de pression  $P$ . La viscosité efficace  $\nu_e$  est la somme des viscosités turbulente et moléculaire soit:

$$\nu_e = \nu + \nu_t \quad (2.14)$$

La viscosité turbulente est calculée par la relation (2.11) avec le modèle de turbulence  $k - \epsilon$ . Sous une forme conservative, ce modèle peut s'écrire:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(u_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \epsilon \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \epsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + C_1 \frac{\epsilon \nu_t}{k} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.16)$$

Le système d'équations (2.12), (2.13), (2.15) et (2.16) avec les relations (2.11) et (2.14) constitue le système à résoudre.



Les constantes empiriques apparaissant dans le modèle de turbulence sont celles recommandées par Launder et Spalding (1974):

$$\sigma_k = 1.0$$

$$\sigma_\epsilon = 1.3$$

$$C_1 = 1.40$$

$$C_2 = 1.92$$

$$C_d = 0.09$$

# Chapitre 3

## Transformation des Equations

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté le système d'équations, décrivant les écoulements turbulents moyens, écrit sous une forme conservative dans un système de coordonnées cartésiennes.

Dans les nombreuses applications en turbomachines, les géométries sont souvent complexes. Avec une discrétisation cartésienne de ces domaines physiques, les frontières ne coïncident pas (dans la plupart des cas) avec les noeuds du maillage. De ce fait, les conditions aux frontières devraient être interpolées, par conséquent seraient difficiles à spécifier et introduisent des erreurs dans les calculs. Afin de remédier à ces inconvénients, l'utilisation d'un système de coordonnées curvilignes s'avère nécessaire. Pour un tel système de coordonnées le domaine physique est transformé en un domaine de calcul, de forme rectangulaire, comme le montre la figure 1. Une discrétisation du domaine, utilisant ce type de coordonnées, a l'avantage d'avoir les frontières qui coïncident avec les noeuds du maillage d'où la facilité d'application des conditions aux frontières. Avec ce type de maillage, il est aussi possible d'adapter le maillage à l'écoulement en raffinant le maillage dans les zones où les variables de l'écoulement présentent de grandes variations.

## 3.2 Génération du maillage

De nombreuses méthodes, pour la génération des maillages curvilignes, sont actuellement disponibles. Elles sont soit des méthodes algébriques pour les domaines relativement simples, soit des méthodes plus élaborées nécessitant la résolution d'équations aux dérivées partielles. Une bonne revue bibliographique des différentes méthodes est donnée par Thompson et al. (1985). La plupart des techniques, les plus utilisées, sont basées sur la résolution numérique des équations aux dérivées partielles de type elliptique dans le domaine transformé (du domaine physique) de forme rectangulaire. L'avantage de ces méthodes, dites elliptiques, est leur grand champ d'application à un grand nombre de géométries complexes aussi bien bidimensionnelles que tridimensionnelles.

Dans la présente étude, la transformation utilisée est celle de Thompson et al. (1984) revue par Camarero et al. (1986). Cette technique consiste à transformer le domaine physique  $(x_i)$  en un domaine de calcul  $(\xi^i)$ , fig. 1. Les équations contrôlant cette transformation sont:

$$\nabla^2 \xi^i = P_i \quad i = 1, 3 \quad (3.1)$$

Les techniques de résolution de ces équations sont détaillées par Camarero et

al. (1986). La transformation résultante, définie ponctuellement, peut se mettre sous la forme:

$$\xi^i = \xi^i(x_j) \quad (3.2)$$

et la transformation inverse sous la forme:

$$x_i = x_i(\xi^j) \quad (3.3)$$

### 3.3 Transformation des équations

Les équations de Reynolds, comme les équations de Navier-Stokes, sont des équations vectorielles; leur transformation dans un système de coordonnées curvilignes peut utiliser soit les vitesses contravariantes (curvilignes), soit les vitesses cartésiennes, comme variables dépendantes. Le choix des vitesses contravariantes introduit des termes sources supplémentaires, dus aux changements de direction de la base covariante (curviligne), dans les équations de quantité de mouvement transformées; ainsi seule une forme faiblement conservative peut être développée.

Dans le présent travail, les composantes cartésiennes de la vitesse sont retenues comme variables dépendantes dans les équations de Reynolds; une forme fortement

conservative peut donc être obtenue pour ces équations. Notons que dans les cas bidimensionnels axisymétriques, la forme conservative faible des équations est inévitable. Ceci est dû à l'utilisation des composantes cylindriques de la vitesse qui introduisent un terme source dans l'équation de quantité de mouvement radiale, Agouzoul et al. (1987).

Dans le système de coordonnées curvilignes, les équations de base sont écrites sous la forme fortement conservative pour les équations de Reynolds et sous la forme conservative faible pour le modèle de turbulence  $k - \epsilon$ , Agouzoul et al. (1988-B).

quantité de mouvement:

$$\frac{\partial (\sqrt{g}u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left[ \sqrt{g} \left( u_i U^m + \frac{\partial \xi^m}{\partial x_i} P \right) \right] = \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left[ \nu_\epsilon \sqrt{g} \left( g^{mj} \frac{\partial u_i}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \xi^m}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial \xi^\ell} \right) \right] \quad (3.4)$$

continuité:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{g}U^i) = 0 \quad (3.5)$$

équation de k:

$$\frac{\partial (\sqrt{g}k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi^m} (\sqrt{g}kU^m) = \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_k} \sqrt{g} \left( g^{mj} \frac{\partial k}{\partial \xi^j} \right) \right] + \nu_t G_* - \epsilon \quad (3.6)$$

équation de  $\epsilon$ :

$$\frac{\partial (\sqrt{g}\epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi^m} (\sqrt{g}\epsilon U^m) = \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \sqrt{g} \left( g^{mj} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi^j} \right) \right] + (\nu_t C_1 G_* - C_2 \epsilon) \frac{\epsilon}{k} \quad (3.7)$$

avec

$$G_* = \left[ \frac{\partial u_i}{\partial \xi^m} \cdot \frac{\partial \xi^m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi^m} \cdot \frac{\partial \xi^m}{\partial x_i} \right] \frac{\partial u_i}{\partial \xi^m} \cdot \frac{\partial \xi^m}{\partial x_j} \quad (3.8)$$

$U^m$  représente la vitesse contravariante reliée aux vitesses cartésiennes par la relation suivante:

$$U^m = u_i \frac{\partial \xi^m}{\partial x^i} \quad (3.9)$$

Dans ces équations et relations les termes  $\frac{\partial \xi^m}{\partial x_i}$ ,  $g^{mj}$  et  $g$  représentent respectivement les dérivées des coordonnées curvilignes, les coefficients de la métrique contravariante et le déterminant de la métrique covariante. Les expressions des métriques et des coefficients géométriques sont données en Annexe A.

Le système d'équations de base transformées peut se mettre sous la forme vectorielle suivante:

$$\frac{\partial (\sqrt{g}\phi)}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi^1} + \frac{\partial F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial G}{\partial \xi^3} = \frac{\partial R}{\partial \xi^1} + \frac{\partial S}{\partial \xi^2} + \frac{\partial T}{\partial \xi^3} + H \quad (3.10)$$

où:

$\phi$  est la variable dépendante

$E, F, G$  sont les termes de convection

(incluant la pression pour les équations de quantité de mouvement)

$R, S, T$  sont les termes visqueux

$H$  est le terme source

l'ensemble de ces termes est expliqué à l'Annexe B.



# Chapitre 4

## Élaboration du Schéma numérique

## 4.1 Stockage et discrétisation spatiale

Les équations de base (Équations (3.10)) sont discrétisées spatialement en utilisant l'approche des volumes de contrôle. Cette technique, à base physique, s'appuie sur le principe de conservation; elle consiste à faire des bilans, dans chaque volume fini, des différentes quantités physiques telles que: la quantité de mouvement, la masse, l'énergie, ..., etc. Mathématiquement, cette technique se traduit par l'intégration des équations, écrites sous forme conservative, dans chaque volume et l'application du théorème de la divergence de Gauss. L'intégration des équations permet d'augmenter l'espace des solutions en diminuant l'ordre de dérivabilité des variables dépendantes.

De nombreux schémas aux volumes finis ont été utilisés auparavant; la principale différence entre ceux-ci est le stockage des variables dépendantes (en général les composantes de la vitesse et la pression) ainsi que les différents volumes utilisés pour le calcul de ces variables. La configuration la plus utilisée est le stockage en quinconce introduit initialement par Harlow et Welch (1965) pour les maillages cartésiens et connu sous le nom de maillage décalé (staggered grid).

Ce type de stockage, devenu populaire après les travaux de Patankar et Spalding (1972), consiste à utiliser des emplacements différents pour stocker les compo-

santes de la vitesse et la pression. Avec ce maillage, des volumes différents sont utilisés pour l'intégration des équations de quantité de mouvement et de la continuité; la figure 2 illustre les différents éléments dans le cas d'un maillage cartésien bidimensionnel. La nécessité du maillage décalé est due au fait que seul le gradient de la pression intervient dans les équations de quantité de mouvement, et que pour les écoulements incompressibles il n'y a pas d'équation explicite pour la pression. Cependant, pour les géométries complexes ce type de maillage pose un certain nombre de problèmes. En effet, les conditions aux frontières généralisées sont difficiles à spécifier correctement parce que certaines variables ne sont pas stockées sur la frontière où la condition est imposée. L'utilisation de différents volumes pour les différentes variables complique la mise en oeuvre informatique des schémas numériques basés sur ce type de maillage.

Afin d'éviter la complexité due au maillage décalé, surtout pour les écoulements turbulents dans des géométries complexes; un stockage, initialement utilisé par Reggio et Camarero (1986), est généralisé aux écoulements turbulents. Dans ce cas, toutes les variables (composantes de la vitesse, la pression, l'énergie cinétique de la turbulence et le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence) sont stockés au même point, fig. 3 et 4. Ainsi, le même volume de contrôle est utilisé pour les équations de transport et de la continuité.

Dans le domaine transformé, un élément de calcul est constitué par le domaine suivant:

$$[\xi^1, \xi^1 + \Delta \xi^1] \times [\xi^2 - \Delta \xi^2, \xi^2 + \Delta \xi^2] \times [\xi^3 - \Delta \xi^3, \xi^3 + \Delta \xi^3]$$

Si  $(i, j, k)$  sont les indices de la discrétisation, où  $i$  correspond à la direction principale ( $\xi^1$ ) de l'écoulement  $j$  et  $k$  aux autres directions ( $\xi^2$  et  $\xi^3$  respectivement, l'élément de calcul peut être représenté par: <sup>1</sup>

$$[i, i + 1] \times [j - 1, j + 1] \times [k - 1, k + 1]$$

en utilisant ces notations toutes les variables sont stockées aux noeuds  $(i + \frac{1}{2}, j, k)$ .

Pour calculer les variables dépendantes (à l'exception de la pression) dans les noeuds  $(i + \frac{1}{2}, j + 1, k)$  et  $(i + \frac{1}{2}, j, k + 1)$  un chevauchement des éléments (fig. 4), dans les directions secondaires ( $j$  et  $k$ ), est utilisé pour les équations de transport. Les équations algébriques, qui peuvent être résolues numériquement, sont obtenues en intégrant le système d'équations (3.10) dans chaque élément de calcul du domaine transformé soit:

---

<sup>1</sup>Remarque: ceci n'est qu'une notation.

$$\int_v \frac{\partial(\sqrt{g}\phi)}{\partial t} dv + \int_v \left( \frac{\partial E}{\partial \xi^1} + \frac{\partial F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial G}{\partial \xi^3} \right) dv = \int_v \left( \frac{\partial R}{\partial \xi^1} + \frac{\partial S}{\partial \xi^2} + \frac{\partial T}{\partial \xi^3} \right) dv + \int_v H dv \quad (4.1)$$

Après application du théorème de la divergence de Gauss, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sqrt{g}\phi)}{\partial t} \Big|_p \Delta v &= - \left[ 4(E_e - E_w) \Delta \xi^2 \Delta \xi^3 + 2(F_n - F_s) \Delta \xi^1 \Delta \xi^3 + 2(G_f - G_b) \Delta \xi^1 \Delta \xi^2 \right] \\ &+ \left[ 4(R_e - R_w) \Delta \xi^2 \Delta \xi^3 + 2(S_n - S_s) \Delta \xi^1 \Delta \xi^3 + 2(T_f - T_b) \Delta \xi^1 \Delta \xi^2 \right] \\ &+ H_p \Delta v \end{aligned} \quad (4.2)$$

où

$$\Delta v = 4 \Delta \xi^1 \Delta \xi^2 \Delta \xi^3$$

Pour obtenir l'expression (4.2), certaines approximations ont été utilisées:

- Le taux de variation dans le temps est constant à l'intérieur de chaque volume et il est évalué au centre de l'élément soit:

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\phi)}{\partial t} \Big|_p$$

- Les flux sur chaque face sont calculés par les valeurs au centre de ces faces. Ils sont évalués comme le produit de la valeur au centre de la face et de

l'aire de cette face. Par exemple, sur la face  $e$  ( $i + 1$ ) le flux de quantité de mouvement est donné par:

$$\int_{\text{face } e} E dS = E(i + 1, j, k) \Delta \xi^2 \Delta \xi^3$$

- Le terme source est constant à l'intérieur de l'élément de calcul et il est évalué au centre soit:

$$\int_v H dv = H_p \Delta v = H(i + \frac{1}{2}, j, k) \Delta \xi^1 \Delta \xi^2 \Delta \xi^3$$

ainsi l'équation (4.2) se simplifie et s'écrit: <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \sqrt{g} \phi}{\partial t} \Big|_p &= - (2(E_e - E_w) + F_n - F_s + G_f - G_b) \\ &\quad + (2(R_e - R_w) + S_n - S_s + T_f - T_b) \\ &\quad + 2H \end{aligned} \tag{4.3}$$

L'équation discrète (4.2) ou (4.3), au niveau de l'élément considéré (fig. 3), nécessite l'évaluation du flux de masse ( $U^m$ ), des propriétés convectées ( $\phi$ ), ainsi que les termes de diffusion ( $\frac{\partial u^j}{\partial \xi^i}$ ), sur les faces de l'élément.

---

<sup>2</sup>Dans le domaine transformé, le maillage est uniforme et chaque volume est unitaire ( $\Delta \xi^1 = \Delta \xi^2 = \Delta \xi^3 = 1$ ).

Les termes de diffusion  $\frac{\partial u^j}{\partial \xi^i}$  sur toutes les faces sont approximés par des différences centrées. Cette évaluation ne présente aucune difficulté.

Les propriétés convectées sur toutes les faces sont calculées en utilisant la pondération hybride introduite par Raithby et Torrance (1974). Par exemple:

- Sur la face  $i + 1$  (noeud  $(i + 1, j, k)$ );

$$\phi(i + 1, j, k) = \left(\frac{1}{2} + \alpha_1\right)\phi\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) + \left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right)\phi\left(i + \frac{3}{2}, j, k\right) \quad (4.4)$$

où  $\alpha_1$  est une fonction du nombre de Peclet relatif à la face soit:

$$\alpha_1 = \text{sign}\left(U^1(i + 1, j, k)\right) \cdot \frac{P_{e1}^2}{10 + 2P_{e1}^2} \quad (4.5)$$

avec

$$P_{e1} = \frac{U^1(i + 1, j, k)}{\nu g^{11}(i + 1, j, k)} \quad (4.6)$$

- Sur la face  $j + 1$  (noeud  $(i + \frac{1}{2}, j + 1, k)$ );

$$\phi\left(i + \frac{1}{2}, j + 1, k\right) = \left(\frac{1}{2} + \alpha_2\right)\phi\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) + \left(\frac{1}{2} - \alpha_2\right)\phi\left(i + \frac{1}{2}, j + 2, k\right) \quad (4.7)$$

avec

$$\alpha_2 = \text{sign} \left( U^2 \left( i + \frac{1}{2}, j + 1, k \right) \right) \frac{P_{e2}^2}{10 + 2P_{e2}^2} \quad (4.8)$$

et

$$P_{e2} = \frac{U^2 \left( i + \frac{1}{2}, j + 1, k \right)}{\nu g^{22} \left( i + \frac{1}{2}, j + 1, k \right)} \quad (4.9)$$

- Sur la face  $k + 1$  (noeud  $(i + \frac{1}{2}, j, k + 1)$ );

$$\phi \left( i + \frac{1}{2}, j, k + 1 \right) = \left( \frac{1}{2} + \alpha_3 \right) \phi \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) + \left( \frac{1}{2} - \alpha_3 \right) \phi \left( i + \frac{1}{2}, j, k + 2 \right) \quad (4.10)$$

avec

$$\alpha_3 = \text{sign} \left( U^3 \left( i + \frac{1}{2}, j, k + 1 \right) \right) \frac{P_{e3}^2}{10 + 2P_{e3}^2} \quad (4.11)$$

et

$$P_{e3} = \frac{U^3 \left( i + \frac{1}{2}, j, k + 1 \right)}{\nu g^{33} \left( i + \frac{1}{2}, j, k + 1 \right)} \quad (4.12)$$



- Sur les autres faces, les propriétés convectées sont calculées d'une façon similaire.

En ce qui concerne la pression et les flux de masse, leur évaluation présente certaines particularités dépendamment de la surface considérée. Deux situations se présentent:

- Premièrement, sur les faces  $n, s, b$  et  $f$ , dans les directions  $j$  et  $k$ , toutes les variables (à l'exception de la pression qui est interpolée) sont connues aux noeuds  $(i + \frac{1}{2}, j \pm 1, k)$  et  $(i + \frac{1}{2}, j, k \pm 1)$ ; ceci résulte du chevauchement des éléments pour les équations de transport dans ces directions. Ainsi, les flux de masse représentés par  $U^m$  sont calculés directement par les relations (3.9).  
La pression est calculée en utilisant la continuité, ce qu'on verra par la suite, et aucun chevauchement des éléments n'est utilisé. Ceci est pour conserver le flux de masse. Pour cette raison la pression n'est pas calculée sur les faces  $n, s, b$  et  $f$  mais obtenue par interpolation à partir des points avoisinants.
- Deuxièmement, sur les faces  $w$  et  $e$ , dans la direction  $i$ , aucune variable n'est connue. Dans cette direction, on n'a utilisé ni chevauchement des éléments de calcul ni interpolation des variables pour éviter des solutions non physiques

obtenues si la pression et la vitesse sont stockées au même point. Pour remédier à ceci, une technique de différentiation opposée est utilisée; ainsi le flux de masse est contrôlé par la vitesse à l'amont de la face et la pression par la pression en aval de celle-ci. Si on prend l'exemple de la face  $w$  (indice  $i$ ), le flux de masse est contrôlé par la vitesse au noeud  $(i - \frac{1}{2}, j, k)$  soit en utilisant la relation (3.9):

$$U_w^1 = u_\ell(i - \frac{1}{2}, j, k) \frac{\partial \xi^m}{\partial x_\ell}(i, j, k) \quad (4.13)$$

et la pression agissant sur cette face sera la pression au noeud  $(i + \frac{1}{2}, j, k)$  soit:

$$P_w = P(i + \frac{1}{2}, j, k) \quad (4.14)$$

## 4.2 Discrétisation en temps et calcul de la pression

Dans la section précédente, on a discuté de la discrétisation spatiale des équations de base. Les équations de transport (quantité de mouvement,  $k, \epsilon$ ) ont été utilisées

sous la forme transitoire pour garder le caractère parabolique du système (dans le temps). Ainsi, une méthode en évolution dans le temps peut être utilisée. La méthode retenue, pour sa simplicité et son efficacité, est une discrétisation principalement explicite en temps. En effet, pour les équations de  $k$  et  $\epsilon$ , la discrétisation est totalement explicite. Par contre, pour les équations de quantité de mouvement (équations moyennes de Reynolds) la discrétisation est explicite en vitesse et implicite en pression. La discrétisation en temps de l'équation (4.3), déjà discrétisée spatialement, peut s'écrire sous les formes compactes suivantes:

- équation de  $k$  et  $\epsilon$ :

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \Delta t [-T_{c\varphi} + T_{v\varphi} + S_\varphi]^n \quad (4.15)$$

où  $n$  correspond à l'indice du temps,  $\Delta t$  le pas de temps, et les termes  $T_{c\varphi}$ ,  $T_{v\varphi}$  et  $S_\varphi$  représentent les termes de convection, les termes visqueux et les termes sources.

- quantité de mouvement:

$$\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^n + \Delta t [-T_c + T_v]^n - \Delta t \text{grad}(\vec{P}^{n+1}) \quad (4.16)$$

avec la continuité:

$$\operatorname{div}(\vec{V}^{n+1}) = 0 \quad (4.17)$$

L'une des principales difficultés dans la résolution du système précédent, et des écoulements incompressibles d'une façon générale, est l'absence d'une équation explicite pour la pression. Cette dernière apparaît dans les équations de quantité de mouvement et sa variation est contrôlée par la contrainte de divergence nulle de la vitesse (Eq. (4.17)). Ce couplage entre la vitesse et la pression est résolu par une méthode à pas fractionnaire similaire à celle utilisée par Mizukami et al (1984) lors de la résolution numérique, par la technique des éléments finis, des écoulements laminaires incompressibles. Dans leur méthode, une certaine fonction potentielle, reliée à la correction de pression, est déterminée par la résolution d'une équation de Poisson avec des conditions aux frontières appropriées.

Dans la présente étude, une équation pour la correction de pression est déduite directement des équations de mouvement et des conditions aux limites sur la vitesse. Ainsi, aucune condition sur la pression ou sa correction n'est nécessaire. La méthode peut être décrite comme suit:

On définit, d'abord, une vitesse intermédiaire qu'on peut qualifier de prédiction de la vitesse, soit:

$$\vec{V}^{n+\frac{1}{2}} = \vec{V}^n + \Delta t [T_v - T_c]^n - \Delta t \text{grad} \vec{P}^n \quad (4.18)$$

En général, cette vitesse ne satisfait pas la continuité à cause de l'utilisation de la pression à l'étape  $n$  au lieu de  $n + 1$  comme c'est le cas de  $\vec{V}^{n+1}$  (Eqs. (4.16) et (4.17)). En soustrayant terme à terme l'équation (4.18) de l'équation (4.16) on obtient:

$$\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+\frac{1}{2}} = -\Delta t \text{grad} (P^{n+1} - P^n) \quad (4.19)$$

L'application de l'opérateur divergence à cette équation avec la contrainte de continuité (Eq. (4.17)) nous donne l'équation de Poisson suivante:

$$\nabla^2(\delta P) = \text{div}(\vec{V}^{n+\frac{1}{2}})/\Delta t \quad (4.20)$$

où  $\delta P$  représente la correction de la pression

$$P^{n+1} - P^n$$

La résolution de cette équation de Poisson nécessite la connaissance de certaines conditions aux frontières sur la correction de pression ( $\delta P$ ). Cependant, ces

conditions ne sont pas connues à priori et, de plus, on ne peut appliquer que des conditions numériques, dérivées des équations de quantité de mouvement, à la pression ou à sa correction: c'est le cas lors de la récupération de la pression pour les méthodes en formulation vorticité — fonction de courant, Agouzoul et Camarero (1987-A). Pour les écoulements internes, seule la distribution de vitesse à l'entrée et la condition d'adhérence, vitesse nulle sur les parois solides, sont connues. Par conséquent, l'équation (4.20) n'est pas utilisée directement.

Une technique permettant de ne tenir compte que des conditions aux frontières sur la vitesse est adoptée, Agouzoul et al (1987-D), ses principales étapes sont:

La discrétisation des équations (4.19) et (4.17) avec l'incorporation directe des conditions aux frontières sur la vitesse à l'étape  $n + \frac{1}{2}$  et  $n + 1$ ; on obtient ainsi les équations matricielles suivantes:

$$I ([V]^{n+1} - [V]^{n+\frac{1}{2}}) = -\Delta t C [\delta P] \quad (4.21)$$

$$D[V]^{n+1} = 0 \quad (4.22)$$

où  $I$ ,  $C$  et  $D$  représentent la matrice identité et les matrices des opérateurs gradient et divergence discrétisés. Les crochets ( $[ \cdot ]$ ) désignent les vecteurs globaux.

La combinaison de ces deux équations matricielles nous donne:

$$DI^{-1}C[\delta P] = D[V]^{n+\frac{1}{2}}/\Delta t \quad (4.23)$$

Cette forme discrète, avec les conditions aux frontières sur la vitesse incorporées directement, est une approximation de l'équation de Poisson (Eq. (4.20)) discrétisée. La résolution numérique de cette équation matricielle (Eq. (4.23)) est obtenue par une technique de surrelaxation ligne par ligne. La vitesse  $\vec{V}^{n+1}$  recherchée, est ensuite calculée par l'équation (4.21); ainsi cette vitesse satisfait la contrainte de divergence nulle (continuité). Cette technique permet une programmation simple ainsi qu'une bonne précision de calcul en calculant directement les vitesses cartésiennes sans utilisation de vitesses contravariantes.

Le pas de temps utilisé pour cette méthode est calculé de telle sorte à respecter la condition de CFL (Courant, Friedrichs and Lewy), Anderson et al (1984), pour des raisons de stabilité du schéma numérique.

### 4.3 Algorithme de résolution

Dans cette section, on résume la procédure de résolution en donnant l'algorithme simplifié de la méthode développée dans les deux sections précédentes:

1. estimation initiale du champ de vitesse, de la distribution de pression, de  $k$  et de  $\epsilon$ .
2. prédiction de la vitesse  $\vec{V}^{n+\frac{1}{2}}$  est calculée par l'équation (4.18)
3. calcul de la correction de pression en résolvant l'équation matricielle (4.23)
4. correction de la vitesse en utilisant l'équation (4.21):

$$[V]^{n+1} = [V]^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t I^{-1} C[\delta P]$$

5. calcul de  $k^{n+1}$  et  $\epsilon^{n+1}$  par l'équation (4.15)
6. calcul des conditions aux frontières pour l'énergie cinétique de turbulence ( $k$ ) et le taux de dissipation ( $\epsilon$ ) pour l'étape suivante.
7. calcul de la viscosité efficace avec les nouvelles valeurs de  $k$  et  $\epsilon$  (Eqs. (2.11) et (2.14))
8. On passe à l'étape de temps suivante et les étapes 2 à 7 sont répétées jusqu'à l'atteinte du régime permanent.

## 4.4 Conditions aux frontières

La solution du système d'équations, discrétisé et obtenu aux deux sections précédentes, nécessite la connaissance des conditions aux frontières pour toutes les



propriétés transportées (vitesse,  $k$  et  $\epsilon$ ). Pour les écoulements turbulents, la qualité de toute simulation numérique est fortement liée à la façon avec laquelle ces conditions aux frontières sont calculées ou imposées, surtout pour les propriétés turbulentes. Dans la section précédente (4.3), en plus de la discrétisation en temps, le développement d'une équation pour la correction de la pression qui tient compte uniquement des conditions sur la vitesse a été discuté. Dans cette section, on développera le calcul des conditions aux frontières pour le modèle de turbulence  $k - \epsilon$ .

Le modèle  $k - \epsilon$  utilisé n'est valable que dans les régions où l'écoulement est complètement turbulent. Il ne tient pas compte des sous-couches visqueuses, existantes près des parois solides, où les effets visqueux prédominent par rapport aux effets turbulents. L'utilisation d'un modèle  $k - \epsilon$ , tenant compte de ces sous-couches, nécessiterait un maillage très fin près des parois solides; ce qui augmenterait le nombre de valeurs à stocker et le temps de calcul, surtout pour les configurations tridimensionnelles.

Pour tenir compte de ces sous-couches visqueuses, la technique de la "loi de paroi" est adoptée. Cette technique consiste à supposer que près des parois solides la vitesse suit une loi déterminée d'une façon semi-empirique. Connaissant la variation de la vitesse près des frontières solides, les conditions aux frontières pour

$k$  et  $\epsilon$  seront calculées et appliquées aux premiers noeuds adjacents aux parois solides.

On introduit une échelle de vitesse locale  $V_*$  nommée vitesse de frottement, reliée à la contrainte de cisaillement à la paroi solide par la relation:

$$V_* = \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.24)$$

L'échelle des longueurs, basée sur cette vitesse de frottement, est déterminée par  $\nu/V_*$ . Ainsi, en un point situé à une distance  $y$  de la paroi solide, fig. 5, la variation de la vitesse adimensionnelle se met sous la forme:

$$V^+ = f(y^+) \quad (4.25)$$

avec

$$V^+ = V/V_* \quad (4.26)$$

et

$$y^+ = yV_*/\nu \quad (4.27)$$

où  $y$  est la distance normale à la paroi et  $V$  est le module de la vitesse parallèle

à la paroi. La nature de la fonction  $f$  dépend de la zone ou de la région considérée. Plusieurs modèles pour les zones, existantes près des parois solides, ont été rapportés dans la littérature, Amano (1984). Pour un modèle à deux zones, adopté dans le présent travail, on a:

Pour  $0 \leq y^+ < 10$  la zone de la sous-couche visqueuse où la fonction est linéaire ainsi:

$$\frac{V}{V_*} = y^+ \quad (4.28)$$

Pour  $10 \leq y^+ < 100$  la zone de recouvrement où la variation de la vitesse est logarithmique, Launder et Spalding (1974), soit:

$$\frac{V}{V_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(E_* y^+) \quad (4.29)$$

où  $\kappa = 0.44$  est la constante de Von Kármán et  $E_*$  est une constante, déterminée empiriquement, qui dépend de la rugosité de la paroi solide; pour les parois lisses on a  $E_* = 9$ .

Pour être consistant avec la "loi de paroi", décrite précédemment, les conditions aux frontières pour  $k$  et  $\epsilon$  sont calculées aux premiers noeuds adjacents aux parois solides en tenant compte de la variation de la vitesse. A cet effet deux situations

peuvent se présenter:

- Premièrement, si le noeud adjacent à la paroi se trouve dans la zone de recouvrement,  $10 \leq y^+ < 100$ , la vitesse parallèle à la paroi en ce noeud est décrite par la loi logarithmique (Eq. 4.29) ainsi:

$$\frac{V_p}{V_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(E_* y_p V_* / \nu) \quad (4.30)$$

A chaque étape de temps  $n$ , la vitesse  $V_p$  étant connue et la vitesse de frottement  $V_*$  est calculée itérativement par la méthode de Newton-Raphson à partir de l'équation (4.30).

Avec la supposition que la contrainte de cisaillement est constante (elle ne dépend que de la position sur la paroi) et que la turbulence est en équilibre local, le terme de production est égale au terme de dissipation dans l'équation de  $k$ , on en déduit les valeurs de  $k$  et  $\epsilon$  à ces noeuds:

$$k_p = V_*^2 / C_d^{\frac{1}{2}} \quad (4.31)$$

$$\epsilon_p = V_*^3 / \kappa y_p \quad (4.32)$$

- Deuxièmement, si le noeud se trouve à l'intérieur de la sous-couche visqueuse ( $0 \leq y^+ < 10$ ); la vitesse, en ce noeud, est régie par la relation linéaire (Eq. 4.28):

$$\frac{V_p}{V_*} = y_p V_* / \nu \quad (4.33)$$

Dans ce cas, connaissant  $V_p$ , la vitesse de frottement  $V_*$  est calculée directement à partir de l'équation précédente (4.33) par l'expression:

$$V_* = \left( \frac{V_p \nu}{y_p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.34)$$

Les relations (4.31) et (4.32) sont encore valables pour le calcul de  $k$  et  $\epsilon$  aux premiers noeuds adjacents aux parois solides avec  $V_*$  déterminée par la relation (4.34).

Dans les deux cas, les valeurs  $k$  et  $\epsilon$  déterminées par les expressions (4.31) et (4.32) et appliquées aux premiers noeuds adjacents aux parois solides sont utilisées comme conditions aux frontières pour l'étape suivante ( $n + 1$ ). Ainsi, on tient compte des conditions aux frontières d'une manière explicite et le domaine de résolution du modèle de turbulence ne contient pas la zone près des frontières solides, fig. 6.

L'utilisation de cette "loi de paroi" nécessite un traitement spécial des termes visqueux dans les équations de quantité de mouvement discrétisées. En effet, dans ces équations les contraintes de cisaillement apparaissent dans les termes visqueux comme le produit des gradients de la vitesse et de la viscosité. Comme il a été déjà mentionné (chap. 3), les dérivées de la vitesse sont calculées par des différences finies. Loin des parois solides, ces approximations représentent bien les dérivées de la vitesse. Cependant, près des parois, ceci peut conduire à des erreurs à cause de la variation logarithmique de la vitesse (si le noeud adjacent à la paroi se trouve dans la zone de recouvrement). Donc près des parois, l'approximation des dérivées devrait tenir compte de la "loi de paroi".

Vu la complexité des maillages (curvilignes) utilisés, des corrections additionnelles devraient être apportées aux approximations par des différences finies des contraintes de cisaillement sur les parois solides; afin d'éviter les erreurs et être consistant avec la "loi de paroi". Habituellement, le traitement consiste à supposer une vitesse de glissement imaginaire qui sera utilisée dans l'approximation des dérivées de la vitesse à la paroi au lieu de la vitesse nulle (condition d'adhérence), El Dib (1985). L'utilisation de cette approche nécessite la détermination de la direction de la vitesse aux noeuds adjacents à la paroi pour le calcul des composantes de cette vitesse de glissement. L'application de cette condition sur la vitesse devrait

se faire avec précaution car elle ne concerne que les termes visqueux.

Dans le présent travail, une autre alternative, similaire à celle utilisée par Nakayama (1981), qui ne nécessite que la valeur de la vitesse aux premiers noeuds adjacents à la paroi, a été développée et utilisée. L'idée est d'introduire une "viscosité équivalente" imposée sur la paroi à la place de la viscosité cinématique. En plus de sa simplicité, contrairement à la vitesse de glissement surtout pour les configurations tridimensionnelles, cette "viscosité équivalente" est appliquée avec la condition d'adhérence. De sa définition, elle ne concerne que les termes visqueux; ainsi il n'y a pas de précaution à prendre.

"La viscosité équivalente" est déterminée de telle sorte que lorsque multipliée par l'approximation en différences finies de la dérivée de la vitesse, on obtient la contrainte de cisaillement à la paroi  $\tau_w$ . Ainsi, si  $\Gamma_e$  représente la viscosité équivalente on a l'égalité suivante:

$$\rho \Gamma_e \frac{V_p - V_w}{y_p} = \tau_w \quad (4.35)$$

où  $V_p$  est la vitesse parallèle à la paroi au premier noeud adjacent à la paroi,  $V_w$  est la vitesse à la paroi (nulle avec la condition d'adhérence). De cette égalité, en utilisant la relation (4.24), on obtient:

$$\Gamma_e = \frac{V_*^2 y_p}{V_p} \quad (4.36)$$

Comme pour le calcul des conditions aux frontières pour  $k$  et  $\epsilon$ , deux situations se présentent:

- Si le premier noeud se situe dans la région de recouvrement,  $V_*$  étant déterminé comme indiqué précédemment, en remplaçant dans (4.36)  $V_p$  par son expression (4.30), on trouve:

$$\Gamma_e = \frac{\kappa V_*^2 y_p}{\ln(E_* y_p V_* / \nu)} \quad (4.37)$$

- Si le premier noeud adjacent à la paroi se situe dans la sous-couche visqueuse, en remplaçant  $V_p$  par son expression (4.33), on obtient:

$$\Gamma_e = \nu \quad (4.38)$$

résultat auquel on peut s'attendre du fait que dans cette région la variation de la vitesse est linéaire et les différences finies donnent l'approximation exacte des dérivées de la vitesse. Dans les deux cas, à chaque étape de temps la "viscosité équivalente" est calculée pour être appliquée à l'étape de temps suivante.



A l'entrée, les distributions de l'énergie cinétique de turbulence et du taux de dissipation de celle-ci sont estimées en se basant sur l'expérience à l'exception des noeuds adjacents aux parois solides. Les valeurs à ces noeuds sont calculées à partir du profil de vitesse, spécifié à l'entrée, et de la "loi de paroi" (Eqs. (4.30), (4.31), et (4.32) ou (4.33), (4.31) et (4.32)). Une façon de spécifier  $k$  et  $\epsilon$  à l'entrée est d'estimer un degré de turbulence  $\lambda\%$  à l'entrée. La valeur de  $k$  est donc calculée, à partir de la vitesse moyenne à l'entrée, par la relation:

$$k_e = \frac{\lambda}{100} \cdot u_0^2 \quad (4.39)$$

où  $u_0$  est la vitesse moyenne à l'entrée. Le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence est calculé à partir de  $k$  par la relation (2.9) soit:

$$\epsilon_e = C_d \frac{k_e^{\frac{3}{2}}}{\ell} \quad (4.40)$$

où  $\ell$  est une longueur caractéristique de la conduite à l'entrée.

A la sortie, toutes les variables sont extrapolées en supposant que l'écoulement est complètement établi.

# Chapitre 5

## Résultats numériques

## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus avec le présent schéma numérique, développé aux chapitres précédents, pour des configurations d'écoulements internes, turbulents et incompressibles.

Pour la plupart des cas, sauf contre-indication, la vitesse moyenne à l'entrée  $u_o$  et le diamètre hydraulique  $D_h$  à l'entrée sont utilisés comme valeurs de référence. Le nombre de Reynolds, basé sur ces valeurs, est défini comme suit:

$$\text{Re} = \frac{\rho u_o D_h}{\nu} \quad (5.1)$$

L'un des premiers tests effectués, non présenté ici, est le développement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel, Reggio et Agouzoul (1987). Ce test nous a permis de valider le schéma et déduire son comportement: influence du maillage, symétrie du schéma, ... etc.

Après les tests préliminaires, deux séries de calcul ont été effectuées. La première série concerne les configurations d'écoulements bidimensionnels ou axisymétriques: diffuseur axisymétrique à expansion conique et passage inter-aube. La deuxième concerne les écoulements tridimensionnels: coude à section carrée, coude à section circulaire et un aspirateur tridimensionnel d'une turbine hydraulique.

Les résultats de calcul obtenus sont comparés avec les résultats expérimentaux ou numériques existants.

## 5.2 Cas bidimensionnels

### 5.2.1 Diffuseur axisymétrique

L'une des premières applications considérées est l'étude de l'écoulement turbulent incompressible dans un canal axisymétrique avec expansion conique. La géométrie choisie est le diffuseur, de demi-angle  $20^\circ$ , sur lequel Habib et Witelaw (1982) ont effectué des mesures expérimentales.

Nous avons effectué les calculs sur la moitié du canal en utilisant la condition de symétrie à l'axe du diffuseur. On utilise un maillage de  $31 \times 51$  points. Le nombre de Reynolds est de 20,000, avec une distribution de vitesse, à l'entrée, se rapprochant le plus du profil développé d'un écoulement turbulent dans une conduite à section circulaire, soit:

$$\begin{aligned} u &= \frac{60}{49} \left( \frac{D_h - 2r}{D_h} \right)^{1/7} \\ v &= 0.0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

où  $u$ ,  $v$  et  $r$  sont respectivement la vitesse axiale, la vitesse radiale et la distance radiale.

Nous présentons, sur la figure 8, le champ de vitesse et les lignes d'iso-vitesse axiale. Sur la figure 9, on présente les lignes de courant, calculées à partir du champ de vitesse. Ceci permet de mettre en évidence la zone de recirculation. Les résultats numériques confirment les résultats expérimentaux et numériques obtenus par Habib et Witelaw (1982).

La distribution de la vitesse axiale, calculée, est comparée aux résultats des mesures effectuées par Habib et Witelaw (1982) en trois stations  $x/r = 3.2$ ,  $6.4$  et  $12.2$  (fig 10, 11, et 12). Les comparaisons montrent que les résultats numériques présentent un très bon accord avec les données expérimentales, exception faite des différences observées, en particulier, à la station  $x/r = 6.4$ . Cette station a la particularité de se situer vers la fin de la zone de recirculation. Habib et Witelaw (1982) ont trouvé le même comportement lors de la comparaison de leurs résultats numériques et expérimentaux. Ils attribuent ces petites différences aux rectifications des signaux du fil-chaud (utilisé pour les mesures) dans ces régions.

Nous ajoutons que ces différences peuvent être attribuées à l'utilisation de la "loi de paroi", qui suppose que le profil de vitesse est logarithmique près des parois solides. Cependant, dans les régions près des zones de rattachement (cas

de la station  $x/r = 6.4$ ), la variation de la vitesse ne suit pas, tout à fait, une loi logarithmique. Après la zone de recirculation (station  $x/r = 12,2$ ), les différences sont moins importantes.

### 5.2.2 Les grilles d'aubes

Comme application aux turbomachines, deux tests ont été effectués pour des écoulements turbulents dans des passages inter-aube bidimensionnels. Le premier avec un profil symétrique et sans cambrure NACA0012; le deuxième avec un profil cambré le NACA81.

Un passage inter-aube est un élément isolé de la grille d'aube formée de ces éléments juxtaposés l'un à côté de l'autre. La géométrie est constituée de deux profils prolongés aux bords d'attaque et de fuite par des frontières fictives, prises dans le fluide, reliant ainsi les profils à l'entrée et à la sortie. Ces frontières fictives sont aussi nommées frontières périodiques sur lesquelles la condition de périodicité est appliquée.

Pour plus de clarté, introduisons certaines caractéristiques d'un passage inter-aube:

- $\alpha_a$  = angle d'attaque: formé par la tangente à la ligne de cambrure,

au bord d'attaque, avec la vitesse à l'entrée

- $\alpha_p$  = angle du profil: formé par la corde du profil avec l'horizontale
- $h$  = distance inter-aube

### NACA0012

Le canal inter-aube est constitué des profils symétriques NACA0012 avec un angle d'attaque nul et un angle du profil nul. La distance entre les profils est la moitié de la corde. L'entrée et la sortie sont situées, respectivement, à une corde du bord d'attaque et de fuite. Le maillage utilisé pour le calcul est de  $21 \times 53$  points, fig. 13.

Dans cette configuration d'écoulement, la vitesse est prise constante à l'entrée avec un nombre de Reynolds, basé sur la vitesse moyenne et la corde du profil, de 40,000. L'énergie cinétique de turbulence est prise constante en fixant un degré de turbulence à 1%, d'où:

$$k_e = 0.01u_0^2 \quad (5.3)$$

où  $u_0$  est la vitesse moyenne à l'entrée. Le taux de dissipation est calculée, à partir de  $k_e$ , par la relation:



$$\epsilon_e = C_D \frac{k_e^{3/2}}{\ell} \quad (5.4)$$

où  $\ell$  est une longueur caractéristique reliée à la distance  $h$  entre les profils par la relation, Hah (1984):

$$\ell = 0.01h \quad (5.5)$$

où  $h$  est la distance inter-aube.

Le champ de vitesse, calculé, est présenté à la figure 14. A la figure 15, nous présentons la comparaison du coefficient de pression, sur l'intrados et l'extrados, avec les résultats de mesures effectuées par Gregory et O'Reilly (1970).

La distribution de pression calculée présente un très bon accord avec les résultats expérimentaux. Le minimum de la pression est prédit correctement; cependant sa position est légèrement déplacée vers l'aval par rapport aux données expérimentales.

## NACA81

La géométrie est telle que l'entrée et la sortie se situent, respectivement à une corde axiale du bord d'attaque et de fuite. La distance, inter-aube est de 0.666

fois la corde axiale. L'angle d'attaque est de  $55^\circ$  et l'angle du profil est de  $-25^\circ$ . Le maillage, fig. 16, est de  $25 \times 89$  points. Les conditions d'écoulement sont les mêmes que pour le cas précédent (NACA0012) avec un nombre de Reynolds, basé sur la corde du profil, de 60,000.

Nous présentons sur la figure 17 le champ de vitesse calculé. Le coefficient de pression sur le profil est présenté à la figure 18 et comparé avec les données expérimentales de Dunavant et Erwin (1956). La concordance entre les résultats numériques et expérimentaux est, en général, très bonne à l'exception du bord d'attaque. La différence entre les deux résultats peut être attribuée à la finesse du maillage, au bord d'attaque, qui n'est pas suffisante pour avoir une bonne approximation des grands gradients de pression dans ces régions.

### 5.3 Cas tridimensionnels

Pour les configurations d'écoulements turbulents tridimensionnels, nous présentons trois cas tests. Le premier test consiste à étudier un écoulement turbulent dans un coude à section carrée. Le second est le calcul de l'écoulement dans un coude à section circulaire. Le troisième est un aspirateur réel, de turbine hydraulique de type Francis, fourni par les Ateliers Dominion Engineering à Montréal.

### 5.3.1 Coude à section carrée

La distribution de vitesse à l'entrée est spécifiée par le profil de vitesse d'un écoulement turbulent développé dans un canal rectiligne à section carrée. Le nombre de Reynolds est de 3980, pour ce cas le nombre de Dean défini par:

$$De = Re \left( \frac{D_h}{R_m} \right)^{0.5} \quad (5.6)$$

est de 2717, avec  $D_h = 1$  le diamètre hydraulique et  $R_m = 2.5$  est le rayon moyen de courbure de la conduite. L'angle du coude est de  $90^\circ$ . Dans la direction longitudinal 30 stations sont utilisées avec 19 et 15 points dans les directions radiales et transversales. Les figures 19 et 20 montrent le maillage aussi bien que la géométrie du coude.

Le développement de la vitesse méridienne, dans le plan de symétrie, le long du canal est représenté à la figure 21. Il met en évidence le déplacement du maximum de la vitesse vers l'extérieur de la courbure de la conduite. Ceci est dû aux effets centrifuges résultant de la courbure du canal.

La déformation des lignes d'iso-pression dans la direction radiale (fig. 24 et 25) montre la création d'écoulements secondaires (fig. 22 et 23). Ces écoulements sont liés au caractère tridimensionnel de l'écoulement.

Sur les figures 26 à 29, nous présentons les lignes d'iso-énergie cinétique de turbulence et d'iso-taux de dissipation pour différentes stations. Vu le manque des résultats expérimentaux, pour ces grandeurs, on peut noter que les gradients sont très grands près des frontières solides et à l'entrée du canal (fig. 26 et 27). Ce résultat est prévisible du fait que près des parois solides la nature de l'écoulement change du laminaire au turbulent. Dans la section à  $90^\circ$  les lignes d'iso- $k$  (ou  $\epsilon$ ) se sont déplacées sous, l'effet des forces centrifuges, vers l'extérieur.

Le profil de la vitesse méridienne à la sortie du coude est comparé aux résultats expérimentaux de Mori et al. (1971) dans le plan de symétrie. La concordance entre les deux résultats est très bonne à l'exception de la légère inflexion du profil calculé près de la courbure extérieure.

### 5.3.2 Coude à section circulaire

L'écoulement turbulent d'un fluide incompressible, dans un coude à section circulaire, a été étudié expérimentalement par Enayet et al. (1982) et numériquement par Briley et al. (1982).

La géométrie, fig. 31, consiste en un coude à  $90^\circ$  de section circulaire avec un rayon moyen de courbure de 2.8 fois le diamètre de la conduite. Le coude

est prolongé à l'entrée et à la sortie par des conduits circulaires rectilignes. Ces extensions sont, respectivement, de 2 et 3.2 fois le diamètre de la conduite. Le maillage utilisé est de 33 stations dans la direction longitudinale ( $\xi^1$ ), fig. 34, et de  $15 \times 15$  points dans le plan transversal ( $\xi^2, \xi^3$ ), fig. 32.

La distribution de la vitesse, à l'entrée du canal, correspond au profil de l'écoulement turbulent développé dans une conduite rectiligne à section circulaire. La vitesse méridienne est spécifiée par la relation (5.2) et les composantes transversales nulles. Le degré de turbulence estimé à l'entrée est de 3%, ainsi l'énergie cinétique de turbulence est calculée par:

$$k_e = 0.03 u_0^2 \quad (5.7)$$

où  $u_0 = 1$  est la vitesse moyenne à l'entrée. Le taux de dissipation est calculé, à partir de  $k_e$ , par:

$$\epsilon_e = C_D \frac{k_e^{3/2}}{\ell} \quad (5.8)$$

où  $\ell$  la longueur caractéristique est calculée par la relation:

$$\ell = 0.03 R \quad (5.9)$$

où  $R$  est le rayon de la conduite.

A la figure 33, nous présentons le développement de la vitesse méridienne dans le plan de symétrie. Aux figures 34, 35 et 36, on présente l'écoulement secondaire dans différentes stations  $\theta = 30^\circ, 60^\circ$  et à 1 diamètre après le coude. Ce qu'on peut remarquer, surtout sur la figure 33 montrant le développement, que la vitesse méridienne se déplace vers l'intérieur de la courbure à l'entrée du coude ( $\theta > 0^\circ$ ) pour se déplacer ensuite vers l'extérieur de la courbure à la sortie du coude. Ceci est dû au fait qu'à l'entrée du coude l'écoulement s'accélère près de la courbure interne, plus forte, et plus en avance dans le coude les effets centrifuges dominant, ainsi l'écoulement s'accélère près de la courbure externe. On peut aussi remarquer que l'existence d'un écoulement secondaire (rotationnel) à la station, située à un diamètre de la sortie du coude (fig. 36), montre que les effets de la courbure subsistent à la sortie.

Nous présentons sur les figures 37 et 38 les lignes d'iso-vitesse méridienne, calculées numériquement et les résultats des mesures effectuées par Enayet et al. (1982), en deux stations:  $\theta = 30^\circ$  et à un diamètre après le coude. En comparant les deux résultats on remarque que les lignes calculées présentent, qualitativement, les mêmes caractéristiques que les mesures expérimentales: le maximum de la vitesse est déplacé vers l'intérieur à  $30^\circ$  et une distorsion des lignes avec un déplacement

du maximum vers l'extérieur à un diamètre après le coude.

La figure 39 montre le coefficient de pression, sur les parois solides, dans le plan de symétrie. Il est comparé avec les résultats expérimentaux de Enayet et al. (1982) et les résultats numériques de Briley et al. (1982). Les deux résultats numériques sont en très bon accord tant qualitatif que quantitatif. Cependant, les deux diffèrent des résultats expérimentaux surtout du côté de la courbure interne. Notons que le maillage qu'on a utilisé est de 7425 points pour la totalité du canal alors que Briley et al. (1982) ont utilisé 9576 points pour la moitié du canal en utilisant la condition de symétrie; ainsi leur maillage est 2.42 (à peu près) plus dense que le nôtre.

Sur les figures 40 à 43, nous présentons les lignes d'iso-énergie cinétique de turbulence et d'iso-taux de dissipation dans différentes stations. La même remarque que pour le coude à section carrée est valable aussi dans ce cas.

### 5.3.3 Aspirateur tridimensionnel

Le troisième test concerne l'écoulement tridimensionnel dans un aspirateur réel de turbine hydraulique de type Francis. Le rôle d'un tel aspirateur est de transformer l'énergie cinétique du fluide, à la sortie de la turbine (entrée de l'aspirateur), en

pression statique en plus de changer la direction de l'écoulement. Cette transformation devrait se faire avec un minimum de pertes (un bon rendement).

La géométrie de l'aspirateur nous a été fournie par Les Ateliers Dominion Engineering à Montréal (Canada). C'est un coude à 90° de section divergente et de forme variable, fig. 44. La section circulaire, à l'entrée, se transforme en section elliptique pour devenir rectangulaire à la sortie. Le rapport des sections extrêmes est  $A_s/A_e = 4$ .

L'écoulement dans cet aspirateur a été étudié numériquement par Shy et al. (1986) et expérimentalement, en partie, par Thi (1988). En suivant ces études, une approximation des conditions à l'entrée de l'aspirateur peut être considérée comme la combinaison d'un écoulement uniforme et d'un tourbillon forcé. On définit une intensité du tourbillon à l'entrée comme le rapport de la vitesse maximale du tourbillon et de la vitesse axiale moyenne, soit:

$$S = \frac{w_{\max}}{u_{\text{moy}}}$$

A la figure 44, en plus de la géométrie de l'aspirateur, nous montrons le maillage utilisé pour la résolution numérique. Ce maillage est de  $33 \times 15 \times 11$  points: 33 stations dans la direction principale, 15 et 11 points dans les autres directions.

Dans ce domaine, quatre configurations d'écoulements ont été considérées: la



première avec un écoulement uniforme sans tourbillon à l'entrée ( $S = 0.0$ ) et les trois autres avec, en plus, des intensités du tourbillon de 0.50, 0.75 et 1.00.

Le champ de vitesse dans le plan médian dans le cas où  $S = 0$  est montré à la figure 45a. Au début du coude, le maximum de la vitesse est du côté de la courbure interne et plus l'écoulement avance dans le coude plus le maximum se déplace rapidement vers la courbure externe: conséquence des forces d'inertie. Vers la sortie de l'aspirateur nous remarquons l'apparition d'une zone de décollement de la couche limite.

Les figures 45b - 45d montrent l'effet du tourbillon d'entrée sur le champ de vitesse au plan médian. L'influence se traduit par l'augmentation de la vitesse près des parois (au coude à  $45^\circ$  à peu près) avec la présence d'une zone de faible vitesse entre les deux maximums (à  $S = 1$ , fig. 45d on apprécie plus l'influence). La zone de décollement diminue avec l'augmentation de l'intensité du tourbillon pour disparaître à  $S = 0.75$  et  $S = 1.00$ . Ces prédictions concordent parfaitement avec les prédictions numériques de Shy et al. (1986).

L'influence du tourbillon d'entrée sur l'écoulement secondaire est illustrée aux figures 46a - 46d dans une section à la sortie du coude (où la section est presque rectangulaire). Pour  $S = 0.0$  nous remarquons le développement de deux tourbillons

quasi-symétriques.<sup>1</sup> Ce comportement ressemble aux écoulements dans des conduits courbés. Avec la superposition du tourbillon forcé à l'entrée, on remarque un changement de la structure de l'écoulement. L'écoulement présente un grand tourbillon et un petit au coin supérieur droit qui diminue pour disparaître à  $S = 1.0$ .

Les figures 47a - 47d montrent la distribution de la pression statique dans le plan médian pour les différentes valeurs de  $S$ . L'influence du tourbillon se manifeste au niveau de la courbure des lignes d'iso-pression, surtout à l'entrée de l'aspirateur: plus  $S$  augmente plus les lignes changent de concavité pour devenir concaves. Qualitativement, nos résultats se comparent à ceux obtenus par Shy et al. (1986). Cependant nos prédictions ne présentent pas de structures cellulaires, non physiques, comparativement à celles prédites par le schéma de Shy et al. (1986) dans la région de l'élargissement de l'aspirateur.

Un paramètre caractérisant la performance d'un aspirateur est le coefficient de récupération de la pression statique  $C_{pr}$ . Ce coefficient est le rendement de la transformation de l'énergie cinétique du fluide en pression statique. Il peut être défini comme suit:

$$C_{pr} = \frac{\tilde{P}_s - \tilde{P}_e}{\frac{1}{2}\rho(\widetilde{u^2 + w^2})_e}$$

---

<sup>1</sup>On note que l'aspirateur présente une légère asymétrie.

où  $\tilde{P}_e$  et  $\tilde{P}_s$  sont les pressions statiques moyennes à l'entrée et à la sortie pondérées par la masse. Par exemple:

$$\tilde{P}_e = \frac{\int_e P_e \rho \vec{v} d\vec{s}}{\int_e \rho \vec{v} d\vec{s}}$$

$\frac{1}{2}\rho(\widetilde{u^2 + w^2})$  est aussi la moyenne de l'énergie cinétique du fluide à l'entrée pondérée par la masse.

Le coefficient  $C_{pr}$  en fonction de  $S$ , fig. 48, est comparé aux résultats numériques de Shy et al. (1986) et aux valeurs expérimentales de Thi (1988). Notons que les résultats de mesures sont concentrés aux alentours du point de fonctionnement optimal de l'aspirateur, soit  $S \simeq 0.4$ . Nos prédictions sont légèrement supérieures aux valeurs expérimentales avec un maximum de  $C_{pr} \simeq 85\%$  à  $S \simeq 0.5$ . Les résultats numériques de Shy et al. (1986) prévoient un maximum de  $C_{pr} \simeq 75\%$  obtenu à  $S \simeq 0.75$ . Cependant le coefficient mesuré se situe entre 77 et 83%. On peut conclure, malgré l'insuffisance des résultats expérimentaux, que le schéma numérique de la présente étude permet de prédire convenablement le coefficient de récupération de la pression statique.

# Chapitre 6

# Conclusion

L'objectif de cette étude est le développement d'une méthode numérique pour la simulation des écoulements tridimensionnels en régime turbulent. Ceci a été accompli avec succès en développant un schéma numérique basé sur la technique des volumes de contrôle. Le schéma est explicite en vitesse et implicite en pression et présente les caractéristiques, essentielles, suivantes:

- l'utilisation d'un élément de calcul où toutes les variables sont stockées au même point.

- une technique de différentiation opposée pour la masse et la pression.

- une pondération hybride pour calculer les propriétés convectées sur les faces.

- le couplage entre la pression et la vitesse est traité par une discrétisation en temps à pas fractionnaire. L'équation de la pression ne nécessite que la condition d'adhérence sur la vitesse. En aucun cas, lors des tests effectués, la résolution de cette équation n'a posé de problème de stabilité.

- les conditions aux frontières pour les propriétés turbulentes sont calculées en adoptant la technique de la "loi de paroi" avec l'introduction d'une "viscosité équivalente" sur les parois solides.

- toutes les équations de base sont écrites, sous forme conservative ou semi-conservative, dans un système de coordonnées curvilignes généralisées.

Le schéma ainsi développé a été d'abord testé pour des configurations d'écoulements bidimensionnelles avec ou sans recirculation. L'extension aux configurations tridimensionnelles s'est effectuée sans trop de problèmes. En général, une bonne concordance est observée entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux ou numériques existants dans la littérature. Notons que le modèle de turbulence  $k - \epsilon$ , comme la plupart des modèles existants, introduit un certain degré d'empirisme dans les résultats numériques obtenus.

A la suite de ce travail, de nombreuses améliorations peuvent être envisagées. Les unes pour modéliser, d'une manière plus réaliste, les écoulements turbulents; les autres pour accélérer la convergence du schéma numérique ou améliorer sa précision. Parmi ces améliorations, on peut citer:

- l'utilisation d'un modèle de turbulence anisotrope pour éviter les limitations du modèle  $k - \epsilon$ . Par exemple, un modèle algébrique aux tensions de Reynolds.

- une pondération d'ordre deux ou plus, pour le calcul des propriétés convectées, permettra d'améliorer la précision du schéma.

- le calcul de la pression par la technique de surrelaxation ligne par ligne peut être remplacé par une autre méthode plus efficace et plus rapide.

- l'utilisation de l'élément de calcul, décrit précédemment, permet, avec plus de facilité, l'implantation de la technique de multigrid pour l'accélération de la

convergence.

- le programme d'ordinateur, développé à partir du schéma, peut être amélioré en profitant des avantages du compilateur vectoriel.

Comme suite à ce travail, de nombreuses extensions ou adaptations de la méthode numérique, développée, peuvent être envisagées à d'autres types d'écoulements tels que:

- les écoulements faiblement compressibles avec réaction chimique (la combustion par exemple).

- les écoulements dans les composantes tournantes de turbomachines. Ceci se traduit par l'addition de termes sources, les forces de Coriolis, dans les équations de quantité de mouvement.

La résolution numérique des écoulements turbulents soulève encore de nombreux problèmes. L'un d'eux, pour ne citer que celui-là, est l'interaction de la turbulence avec les sous-couches visqueuses près des frontières solides. Ce problème peut être résolu par des modèles à faible nombre de Reynolds. Mais, ils nécessitent beaucoup de points près des frontières solides. Ainsi, un modèle de turbulence ou des "lois de parois" généralisées pouvant tenir compte de ces interactions avec un minimum de points sont vivement recherchés.

La validation des schémas numériques se base sur des résultats d'expériences.

Un domaine où la validation est très difficile est celui des géométries tridimensionnelles complexes (l'aspirateur testé par exemple). Ainsi, des résultats expérimentaux, pour les écoulements turbulents dans de telles géométries (surtout les valeurs des propriétés turbulentes), sont fortement demandés pour les différents développements numériques futurs.



# Bibliographie

1. Adler, D. (1980). Status of Centrifugal Impeller Aerodynamics, Part I: Inviscid Flow Prediction Methods, *ASME Journal of Engineering for Power*, July (1980), pp. 728-737; Part II: Experiments and Influence of Viscosity, *ASME Journal of Engineering for Power*, July (1980), pp. 738-746.
2. Agouzoul, M. (1985). Etude numérique des écoulements turbulents bidimensionnels, Msc.A. Ecole Polytechnique de Montréal (Canada).
3. Agouzoul, M., Reggio, M., and Camarero, R. (1987). A Numerical Study of Turbulent Flows using a Nonstaggered Mesh, *Computational Fluid Dynamics*, proceeding of the International Symposium on Computational Fluid Dynamics, Sydney, Australia, August 1987, pp. 193-203, G. de Vahl Davis and C. Fletcher Editors (North-Holland).
4. Agouzoul, M., and Camarero, R. (1988-A). Numerical Computation of Two-Dimensional Turbulent Flow in a Cascade, *CSME* Volume 12, No. 2.
5. Agouzoul, M., Reggio, M., and Camarero, R. (1988-B). A Three-dimensional Turbulent Flow Analysis in a Draft tube, IAHR Symposium 1988, Vol. 2, Trondheim, Norway.

6. Agouzoul, M., Reggio, M., and Cámararo, R. (1988-C). Simulation of Three-dimensional Internal Turbulent Flows, International Symposium on Fluid Dynamics, ASME WAM, Chicago, November 1988.
7. Amano, R. S. (1984). Development of a Turbulence Near-wall Model and its Application to Separated and Reattached Flows, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 7, pp. 59-75.
8. Amsden, A. A., and Harlow, F. H. (1970). The SMAC Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows, Los Alamos Scientific Laboratory, Report LA-4370, Los Alamos, New Mexico.
9. Anderson, D. A., Tannehill, J. C., and Pletcher, R. H. (1984). *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, HPC New York.
10. Arnal, D. et Cousteix, J. (1979). Ecoulement dans l'angle de deux parois. A) Mise au point de méthodes numériques de résolution des équations de Navier-Stokes parabolisées: Application en écoulement laminaire. Rapport ONERA-CERT, septembre (1979).
11. Briley, W. R., Buggeln, R. C., and McDonald, H. (1982). Computation of Laminar and Turbulent Flow in 90-degree Square Duct and Pipe Bends Using

- the Navier-Stokes Equations, SRA Report, R82-920009-F, April (1982).
12. Camarero, R., et al. (1986). Introduction to Grid Generation in Turbomachinery, VKI Lecture, Serie 2, *Numerical Techniques for Viscous Calculations in Turbomachinery*, Jan. 20-24, 1986.
  13. Chorin, A. J. (1967). "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems", *Journal of Computational Physics*, Vol. 2, pp. 12-26.
  14. Dunavant, J. C., and Erwin, J. R. (1956). Investigation of Related Series of Turbine Blade Profiles in a Cascade, NACA TN 3802.
  15. EL Dib, I. E. O. (1985). *Numerical Calculation of Internal Flows with Curvature*, Ph.D. Thesis, Northwestern University.
  16. Enayet, M., Gibson, M., Taylor, A., and Yianneskis, M. (1982). Laser-Doppler Measurements of Laminar and Turbulent Flow in a Pipe Bend, *Int. J. Heat and Fluid Flow* 3, 4.
  17. Gostelow, J. P. (1973). Review of Compressible Flow Theories for Airfoil Cascades, *ASME Journal of Engineering for Power*, Oct. 1973, pp. 281-292.
  18. Gregory, N., and O'Reilly, C. L. (1970). Low Speed Aerodynamic Characteristics of NACA0012 Airfoil Section, Including the Effects of Upper Surface

- Roughness Simulation Hoarfrost, National Physical Laboratory, Teddington, England, Aero Report 1308.
19. Habib, M. A., and Whitelaw, J. H. (1982). The Calculation of Turbulent Flow in Wide-angle Diffusers, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 5, pp. 145-164.
  20. Hah, C. (1984). A Navier-Stokes Analysis of Three-dimensional Turbulent Flows Inside Blade Rows at Design off Design Conditions, *ASME Journal of Engineering for Power*, Paper 83-GT-40.
  21. Hanjalić, K., and Launder, B. E. (1972). A Reynolds Stress Model of Turbulence and Its Application to Asymmetric Shear Flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 52, pp. 609-638.
  22. Harlow, F. H., and Welch, J. E. (1965). Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, *Phys. Fluids*, Vol. 8, No. 12, pp. 2182-2189.
  23. Hinze, J. O. (1975). *Turbulence*, 2d ed., McGraw-Hill, New York.
  24. Japikse, D. (1976). Review-progress in Numerical Turbomachinery Analysis, *ASME Journal of Fluids Engineering*, pp. 592-606, Dec. 1976.

25. Katsanis, T. (1969). Fortran program for Calculating Transonic Velocities on a Blade-to-Blade Stream Surfaces of Turbomachine, NASA TND 5427.
26. Khalil, I. M., and Weber, H. G. (1984). Modeling of Three-dimensional Flow in Turning Channels, ASME paper 84-GT-59, October 1984.
27. Kline, S. J., Cantwell, B. J., and Ferziger, J. H. (1982). Turbulent Flows: Comparison of Computation and Experiment, Proceeding of the 1980-81 AFOSR - HTTM - Stanford Conference on Complex Turbulent Flows, Stanford University Press.
28. Kolmogorov, A. N. (1942). Equations of Turbulent Motion of an Incompressible Turbulent Fluid, *Izv. Akad. Nauk Ser. Phys.*, IV, No. 1-2, 56.
29. Launder, B. E., and Spalding, D. B. (1972). *Lectures in Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press London and New York.
30. Launder, B. E., and Spalding, D. B. (1974). The Numerical Computation of Turbulent Flow, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* 3, 269.
31. Launder, B. E., Reynolds, W. C., Rodi, W., Mathieu, J., and Jeandel, D. (1984). *Turbulence Models and their Applications*, Volume 2, Editions Eyrolles.

32. Lewis, C. H. (1986). Current Status of Computational Aerothermodynamics, AIAA paper-86-0229.
33. Mathieu, J., Jeandel, D., Launder, B. E., Reynolds, W. C., and Rodi, W. (1984). *La simulation des modèles de turbulence et leurs applications*, Volume 1, éditions Eyrolles.
34. McNally, W. D., and Sockol, P. M. (1985). Review: Computational Methods for Internal Flows with Emphasis on Turbomachinery, *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 107.
35. Mizukami, A., and Tsuchiya, M. (1984). A Finite Element Method for the Three-dimensional Non-steady Navier-Stokes Equations, *Inter. Jour. for Num. Methods in Fluids*, Vol. 4, pp. 349-357.
36. Mori, Y., Uchida, Y., and Ukon, T. (1971). Forced Convective Heat Transfer in a Curved Channel with a Square Cross Section, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 14, p. 1781.
37. Nakayama, A. (1981). *Three-dimensional Flow within Conduits of Arbitrary Geometrical Configurations*, Ph.D. Thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign.

38. Patankar, S. V., and Spalding, D. B. (1972). A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-dimensional Parabolic Flow, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 1787-1805.
39. Patankar, S. V. (1980). *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington.
40. Perkins, H. J., and Horlock, J. H. (1975). Computation of Flow in Turbomachine, *Finite Elements in Fluids* Vol. 2, Gallagher et al. Eds John Wiley, pp. 141-157.
41. Pulliam, T. H., and Steger, J. L. (1980). Implicit Finite Difference Simulation of Three-dimensional Compressible Flow, *AIAA Journal*, Vol. 18-2, Feb. 1980.
42. Prandtl, L. (1925). Uber die ausgebildete turbulenz, *ZAMM*, 5, 136.
43. Raithby, G. D., and Torrance, K. E. (1974). Upstream Weighted Differencing Schemes and their Application to Elliptic Problems Involving Fluids Flow, *Computer Fluids*, Vol. 2, pp. 191-206.
44. Reggio, M., and Camarero, R. (1986). A Numerical Solution Procedure for Viscous Incompressible Flows, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 10, pp. 131-146.



45. Reggio, M., Agouzoul, M., and Camarero, R. (1987). Computation of Incompressible Turbulent Flows by an Opposed-Differencing Scheme, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 12, pp. 307-320.
46. Rodi, W. (1980). Turbulence Models and their Application in Hydraulics, State of the Art Presented by the IAHR-Section on Fundamentals of Division II: Experimentals and Mathematical Fluid Dynamics.
47. Shy, W., and Braaten, M. (1986). Three-dimensional Analysis of the Flow in a Curved Hydraulic Turbine Draft Tube, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 6, pp. 861-882.
48. Spradley, L. W., Stalanker, J. F., and Ratliff, A. W. (1981). Solution of the Three-dimensional Navier-Stokes Equations on a Vector Processor, *AIAA Journal*, Vol. 19, No. 10, Oct. 1981.
49. Thi, C. Vu (1988). *Private Communication*, Dominion Engineering Works, Montréal (Canada).
50. Thompson, J. F., Thames, F. C., and Mastin, C. W. (1974). Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing any Number of Arbitrary Two-dimensional Bodies, *J. Comp.*

- Phys.*, Vol. 75, pp. 299-319.
51. Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A., and Mastin, W. (1985). *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*, New York: North-Holland.
  52. Von Kármán (1937). *Collected Works of Theodore Von Kármán, Volume III, (1933-1939)*, Butterworths Scientific Publications, London, 1956, pp. 245-279.
  53. Wu, C. H. (1952). *A General Theory of Three-dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial, Radial and Mixed-flow types*, NASA TN 2604.
  54. Yang, H., and Camarero, R. (1986). *An Improved Vorticity-Potential Method for Three-dimensional Duct Flow Simulations*, *Int. Jour. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 6, pp. 35-45.

## Annexe A

# Calcul des métriques et des coefficients géométriques

La génération du maillage curviligne conduit à une transformation numérique de la forme

$$x_i = x_i(\xi^j) \quad i, j = 1, 3 \quad (\text{A.1})$$

Sa transformation inverse est

$$\xi^i = \xi^i(x_j) \quad i, j = 1, 3 \quad (\text{A.2})$$

Si on représente par  $\{\vec{e}_i\}$  une base naturelle orthonormée, la base covariante  $\{\vec{g}_i\}$  du système de coordonnées curvilignes est donnée par:

$$\vec{g}_i = \frac{\partial x_m}{\partial \xi^i} \vec{e}_m \quad (\text{A.3})$$

La métrique covariante est la matrice  $[g_{ij}]$  dont les composantes sont:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j \\ g &= \det[g_{ij}] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$\sqrt{g}$  est le jacobien de la transformation (A.1).

Contrairement au système de coordonnées cartésiennes, le système curviligne admet une autre base, dite contravariante, définie par les vecteurs  $\{\vec{g}^i\}$  tels que:

$$\bar{g}^i \cdot \bar{g}_j = \delta_{ij} \quad (\text{A.5})$$

La métrique reliée à cette base, nommée métrique contravariante, est définie par la matrice  $[g^{ij}]$  telle que:

$$g^{ij} = \bar{g}^i \cdot \bar{g}^j \quad (\text{A.6})$$

avec

$$[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1} \quad (\text{A.7})$$

Les termes géométriques  $\frac{\partial \xi^m}{\partial x_i}$  peuvent être évalués comme suit:

- en utilisant la transformation (A.1) on obtient:

$$[dx_i] = \left[ \frac{\partial x_i}{\partial \xi^j} \right] [d\xi^j] \quad (\text{A.8})$$

- de même avec l'utilisation de (A.2) on a:

$$[d\xi^i] = \left[ \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \right] [dx_j] \quad (\text{A.9})$$

- des deux relations (A.8) et (A.9) on en déduit que:

$$\left[ \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right] = \left[ \frac{\partial x_i}{\partial \xi^j} \right]^{-1} \quad (\text{A.10})$$

- qu'on peut exprimer sous forme explicite:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi^1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi^2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi^3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi^3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi^3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi^3} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{A.11})$$

- donc:

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} = \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial x_2}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \xi^3} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \xi^3} \right]$$

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} = \frac{-1}{J} \left[ \frac{\partial x_2}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \xi^3} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \xi^3} \right] \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x_3} = \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial x_2}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \xi^3} \right]$$

Les six autres termes restant sont obtenus de la même façon avec  $J$  et le jacobien de la transformation (A.1) soit:

$$J = \det \left[ \frac{\partial x_i}{\partial \xi^j} \right] = \sqrt{g} \quad (\text{A.13})$$

*Remarque:*

Les transformations (A.1) et (A.2) ne sont pas définies analytiquement; ainsi

tous les termes apparaissant dans les expressions précédentes sont évalués par des différences finies centrées.

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi^1}(i, j, k) = \frac{x_1(i+1, j, k) - x_1(i-1, j, k)}{2\Delta \xi^1} \quad (\text{A.14})$$

avec  $i, j$  et  $k$  les indices de la discrétisation du domaine transformé dans les directions  $\xi^1, \xi^2$  et  $\xi^3$ . Notons que dans le domaine transformé le maillage est uniforme et on choisit  $\Delta \xi^1 = \Delta \xi^2 = \Delta \xi^3 = 1$ .

## Annexe B

# Forme vectorielle du système des équations transformées



Dans cet annexe, on donne les expressions détaillées des termes du système d'équations de base écrit sous la forme vectorielle (Eq.3.10).

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\phi)}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi^1} + \frac{\partial F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial G}{\partial \xi^3} = \frac{\partial R}{\partial \xi^1} + \frac{\partial S}{\partial \xi^2} + \frac{\partial T}{\partial \xi^3} + H \quad (\text{B.1})$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ k \\ \epsilon \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{continuité} \\ \\ \text{quantité de mouvement} \\ \\ \text{modèle de turbulence} \end{array}$$

$$E = \sqrt{g} \begin{bmatrix} U^1 \\ u_1 U^1 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} P \\ u_2 U^1 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} P \\ u_3 U^1 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_3} P \\ k U^1 \\ \epsilon U^1 \end{bmatrix}$$

$$F = \sqrt{g} \begin{bmatrix} U^2 \\ u_1 U^2 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} P \\ u_2 U^2 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} P \\ u_3 U^2 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_3} P \\ k U^2 \\ \epsilon U^2 \end{bmatrix}$$

$$G = \sqrt{g} \begin{bmatrix} U^3 \\ u_1 U^3 + \frac{\partial \xi^3}{\partial x_1} P \\ u_2 U^3 + \frac{\partial \xi^3}{\partial x_2} P \\ u_3 U^3 + \frac{\partial \xi^3}{\partial x_3} P \\ k U^3 \\ \epsilon U^3 \end{bmatrix}$$

$$R = \nu_\epsilon \sqrt{g} \left[ \begin{array}{l} 0 \\ g^{1j} \frac{\partial u_1}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_j} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x_1} \frac{\partial u_j}{\partial \xi^\ell} \\ g^{1j} \frac{\partial u_2}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_j} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x_2} \frac{\partial u_j}{\partial \xi^\ell} \\ g^{1j} \frac{\partial u_3}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x_j} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x_3} \frac{\partial u_j}{\partial \xi^\ell} \\ \frac{1}{\sigma_k} g^{1j} \frac{\partial k}{\partial \xi^j} \\ \frac{1}{\sigma_\epsilon} g^{1j} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi^j} \end{array} \right]$$

$$S = \nu_\epsilon \sqrt{g} \left[ \begin{array}{l} 0 \\ g^{2j} \frac{\partial u_1}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_j} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x_2} \frac{\partial u_j}{\partial \xi^\ell} \\ g^{2j} \frac{\partial u_2}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_j} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x_2} \frac{\partial u_j}{\partial \xi^\ell} \\ g^{2j} \frac{\partial u_3}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x_j} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x_3} \frac{\partial u_j}{\partial \xi^\ell} \\ \frac{1}{\sigma_k} g^{2j} \frac{\partial k}{\partial \xi^j} \\ \frac{1}{\sigma_\epsilon} g^{2j} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi^j} \end{array} \right]$$

$$T = \nu_\epsilon \sqrt{g} \begin{bmatrix} 0 \\ g^{sj} \frac{\partial u_1}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x_j} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x_1} \frac{\partial u_j}{\partial \xi^\ell} \\ g^{sj} \frac{\partial u_2}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x_j} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x_2} \frac{\partial u_j}{\partial \xi^\ell} \\ g^{sj} \frac{\partial u_3}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x_j} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x_3} \frac{\partial u_j}{\partial \xi^\ell} \\ \frac{1}{\sigma_k} g^{sj} \frac{\partial k}{\partial \xi^j} \\ \frac{1}{\sigma_\epsilon} g^{sj} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi^j} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \nu_\epsilon G_* - \epsilon \\ (\nu_\epsilon C_1 G_* - C_2 \epsilon) \frac{\epsilon}{k} \end{bmatrix}$$

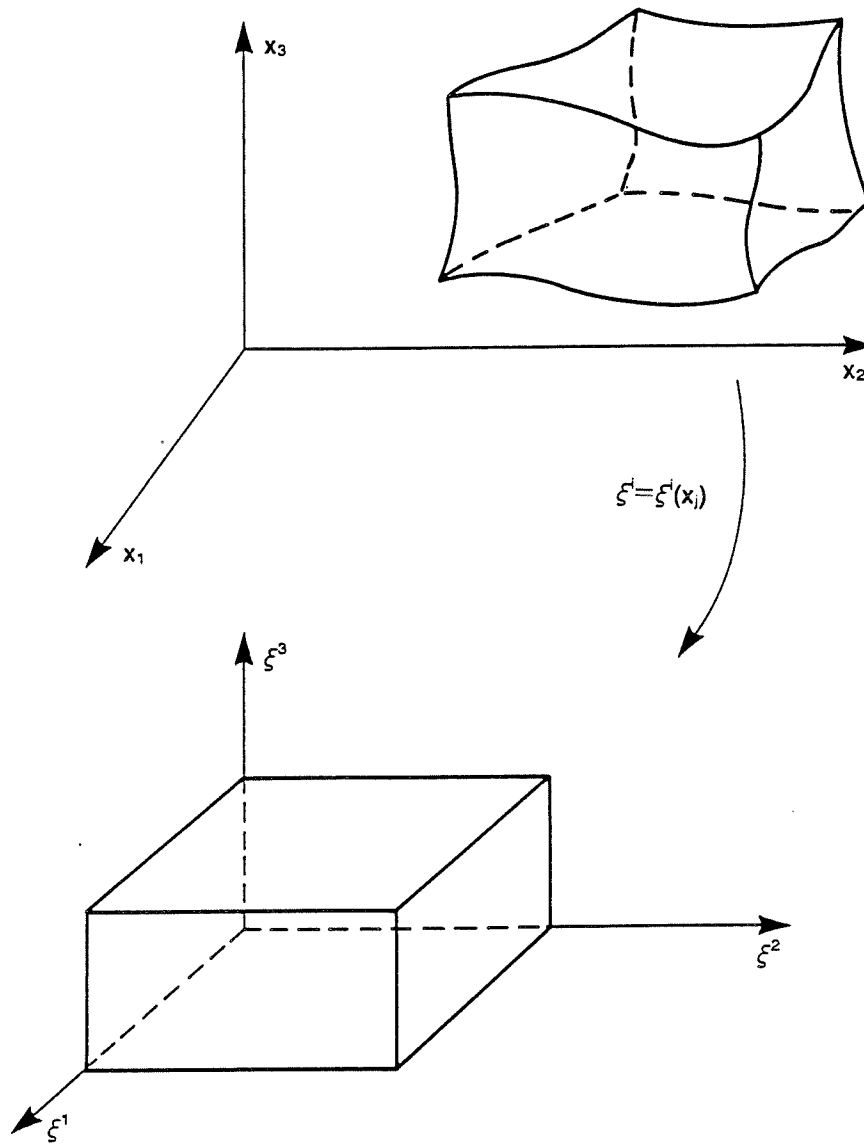


Figure 1: Transformation du domaine physique  $(x_1, x_2, x_3)$  en domaine de calcul  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$

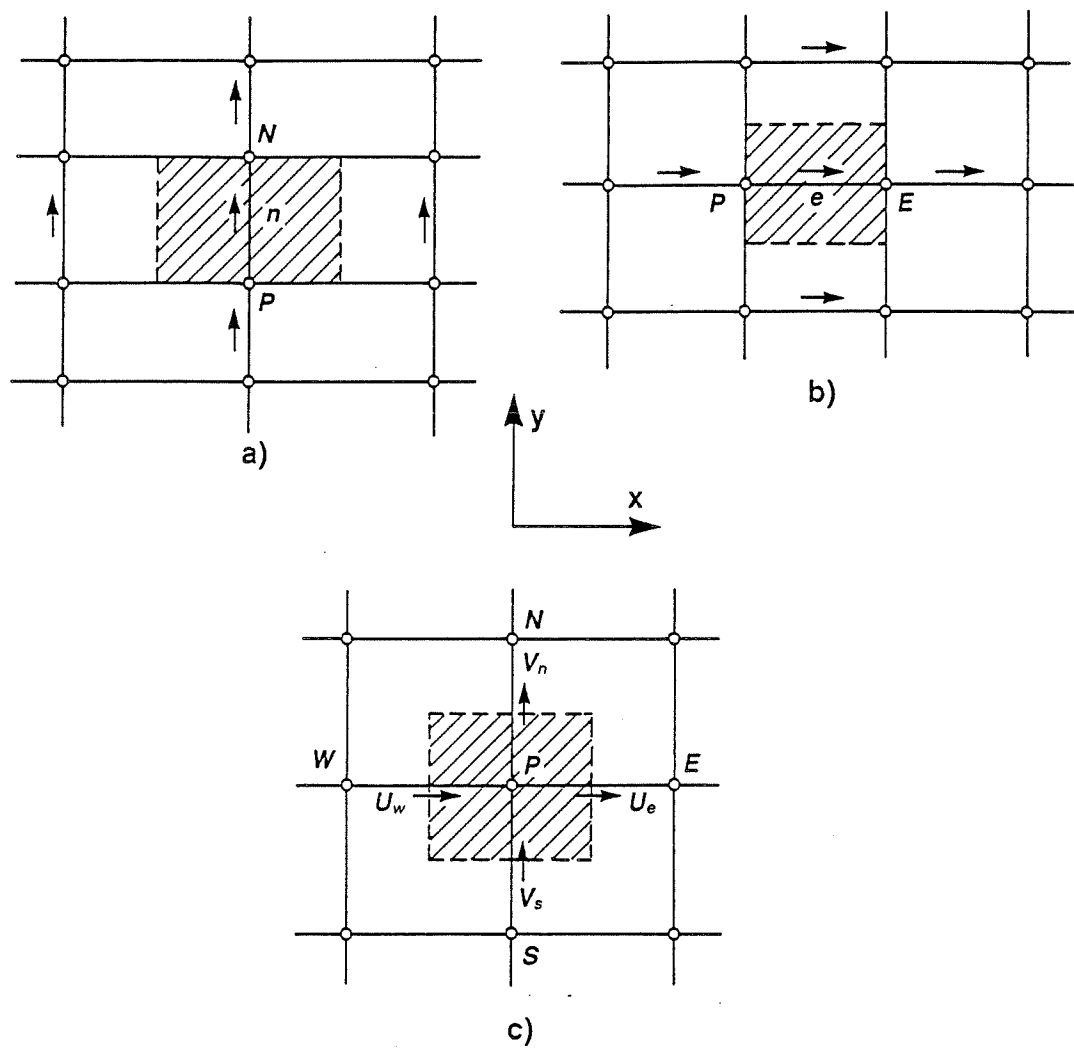


Figure 2: Maillage décalé: a) volume de contrôle pour  $v$ ; b) pour  $u$ ; c) pour la continuité

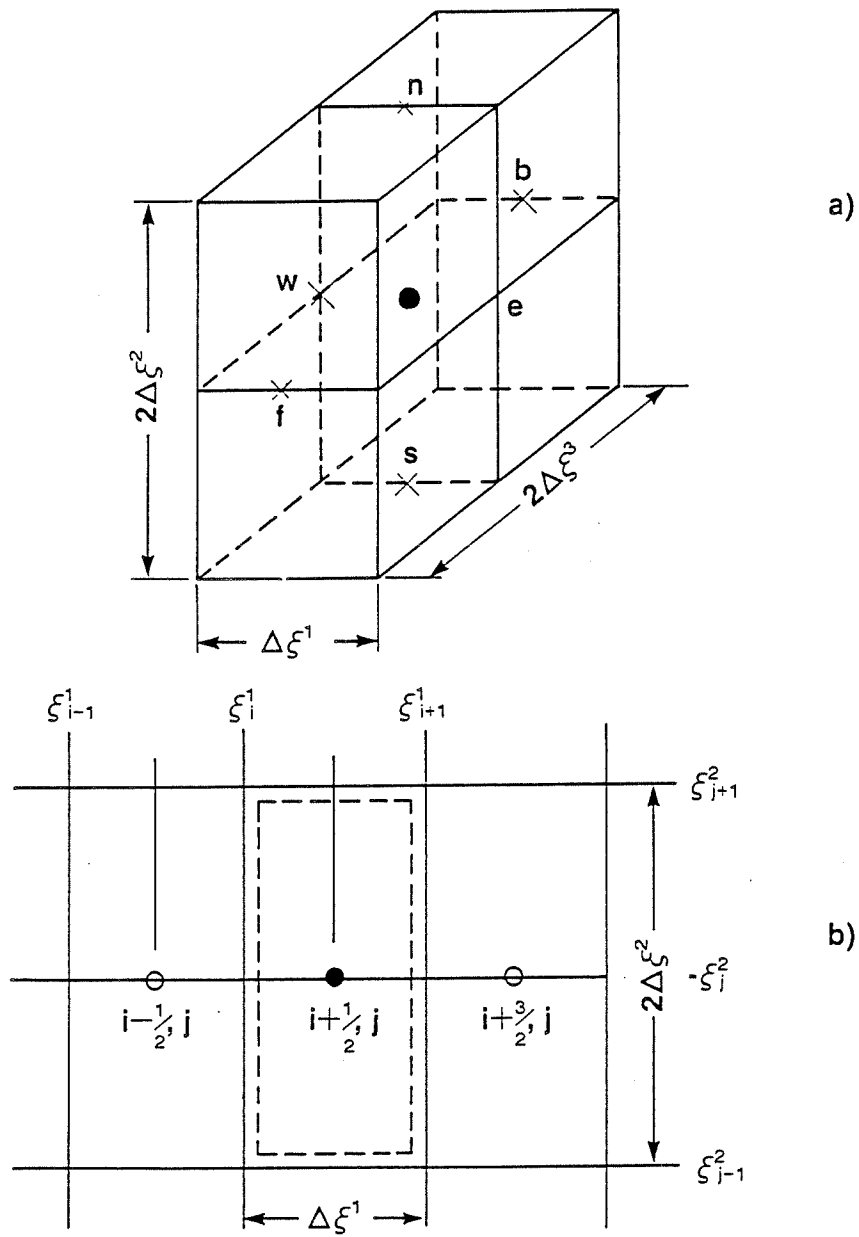


Figure 3: Élément de calcul: a) vue 3D; b) vue 2D

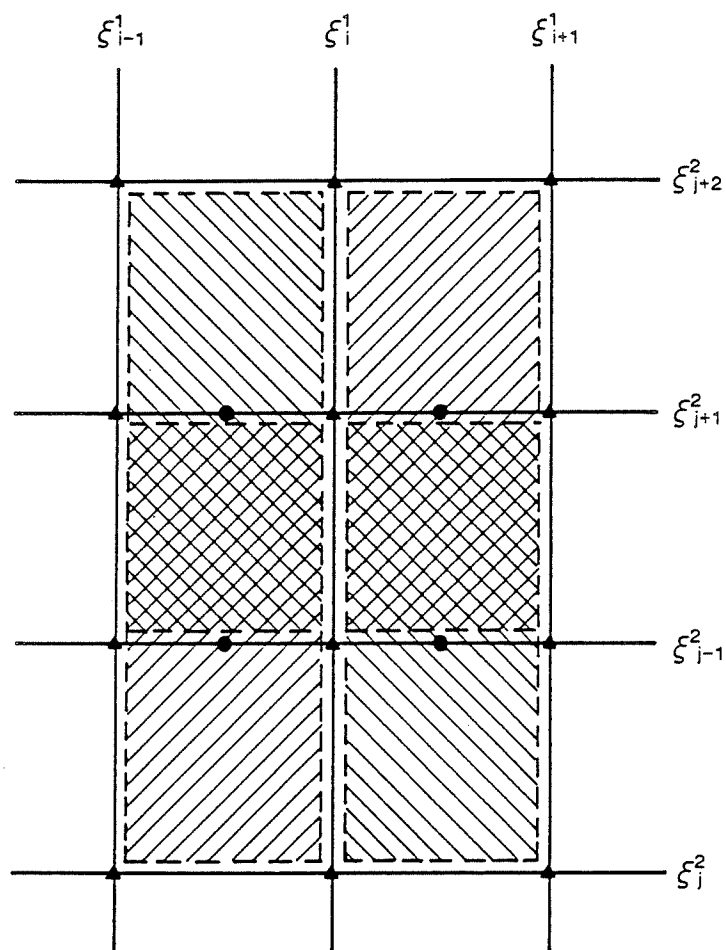


Figure 4: Chevauchement des éléments: vue 2D ( $\xi^3 = cste$ )



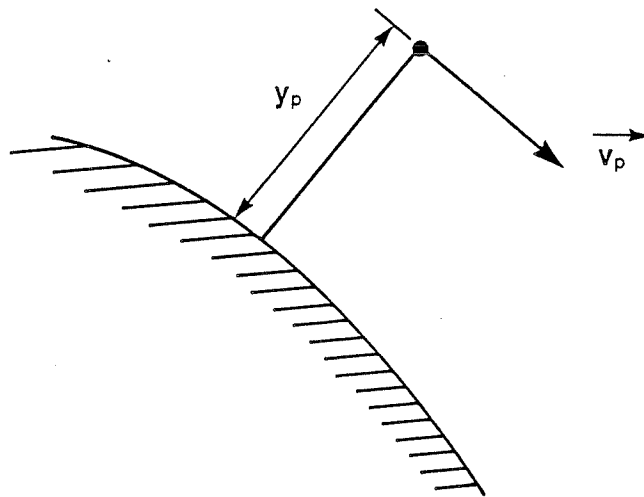


Figure 5: Premier noeud près de la paroi solide

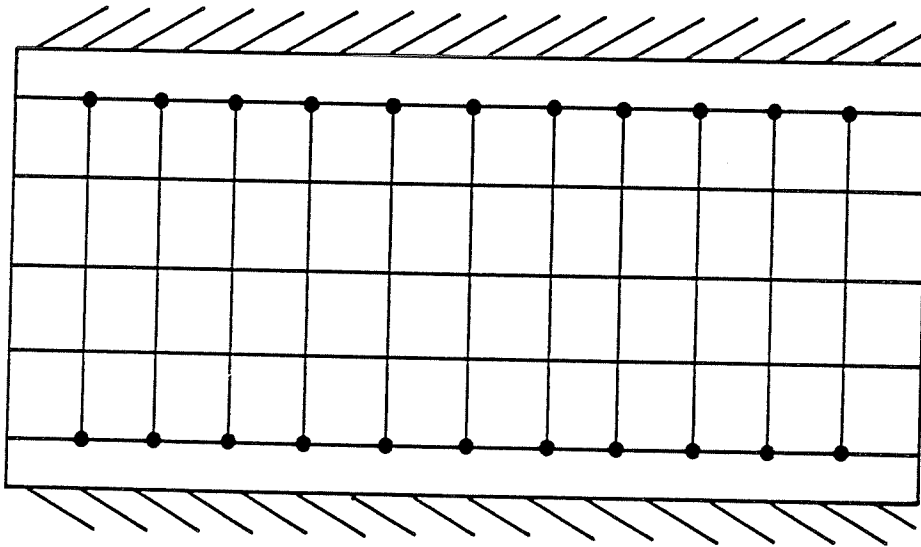


Figure 6: Domaine de résolution de  $k - \epsilon$  : vue 2D

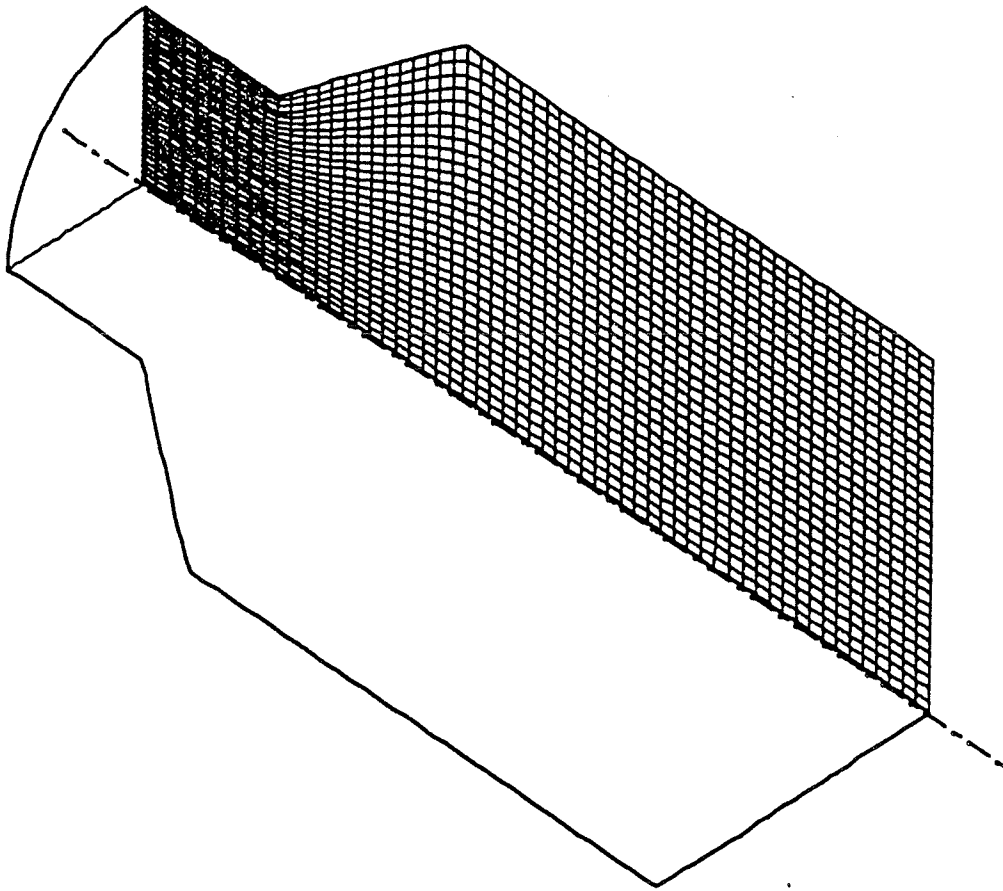


Figure 7: Maillage du diffuseur axisymétrique

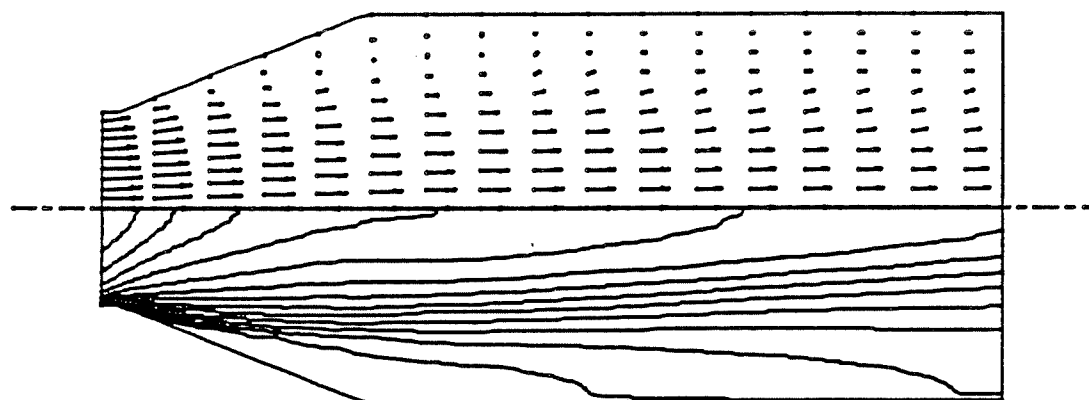


Figure 8: Champ de vitesse et lignes iso-vitesse axiale (diffuseur axisymétrique)



Figure 9: Lignes de courant (diffuseur axisymétrique)

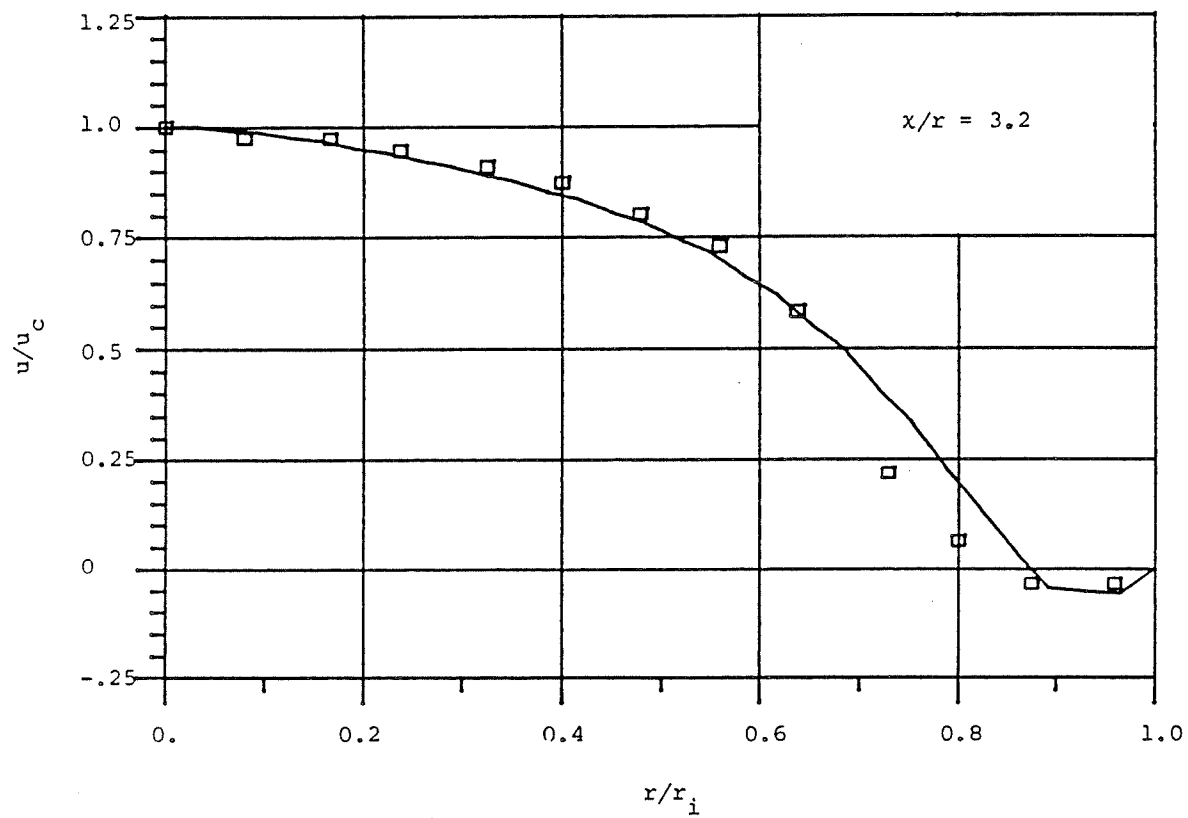


Figure 10: Profil de vitesse à  $x/r = 3.2$  (diffuseur axisymétrique): (—) résultats numériques; ( $\square\square\square$ ) mesures de Habib et al. (1982)

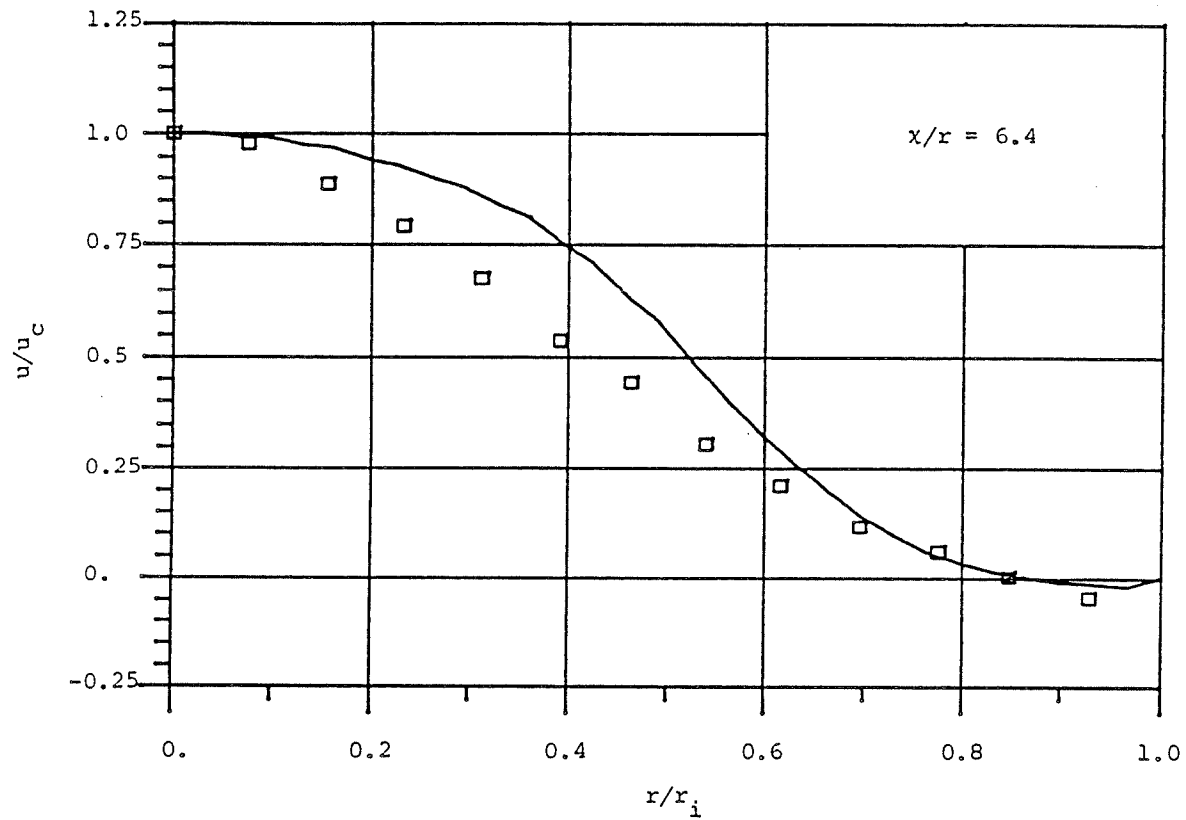


Figure 11: Profil de vitesse à  $x/r = 6.4$  (diffuseur axisymétrique): (—) résultats numériques; ( $\square \square \square$ ) mesures de Habib et al. (1982)

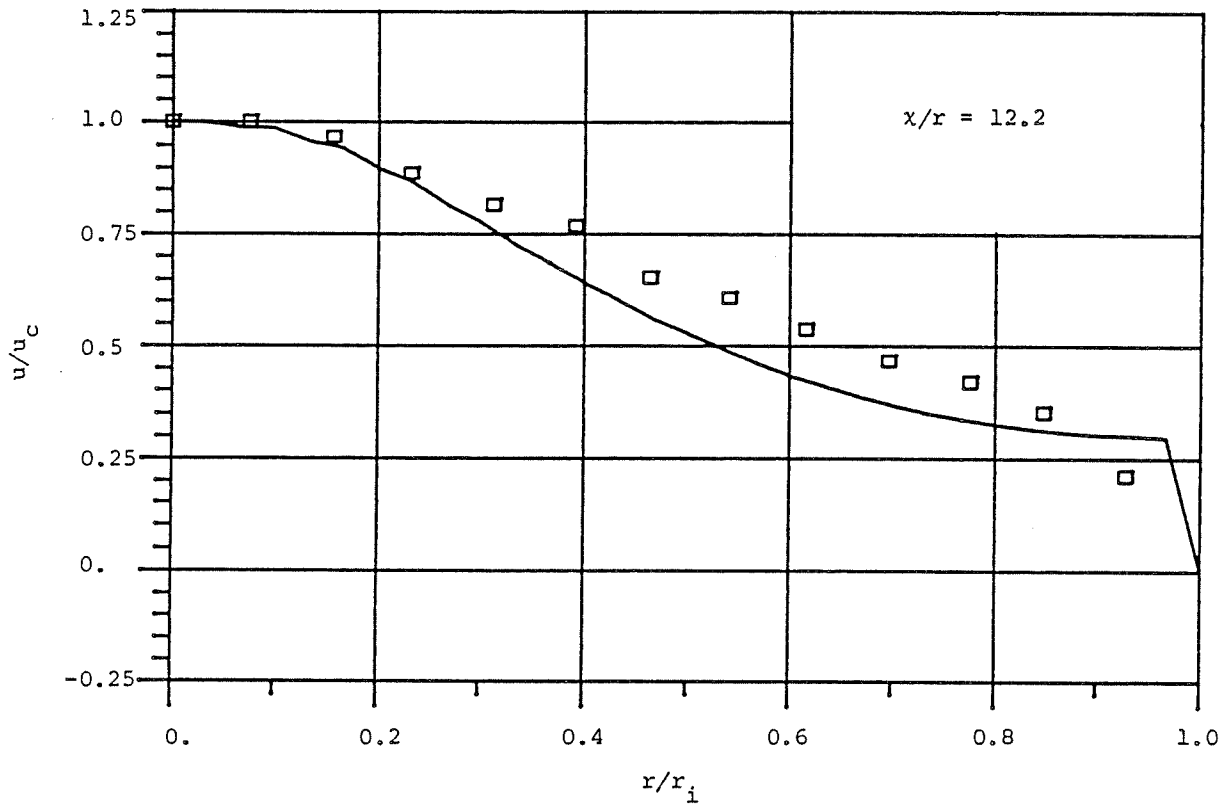


Figure 12: Profil de vitesse à  $x/r = 12.2$  (diffuseur axisymétrique): (—) résultats numériques; ( $\square\square\square$ ) mesures de Habib et al. (1982)



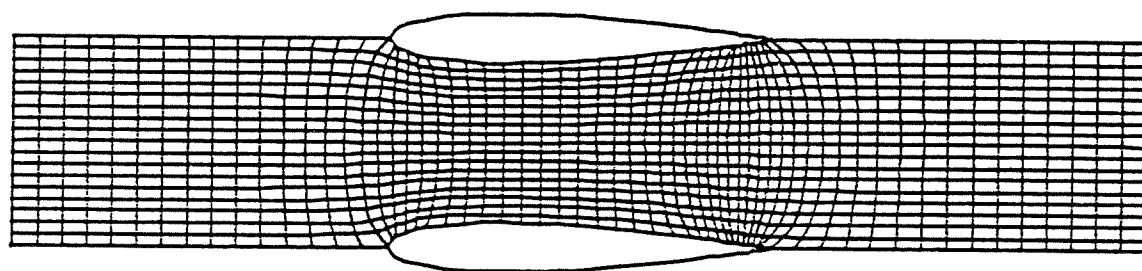


Figure 13: Maillage passage inter-aube (NACA0012)

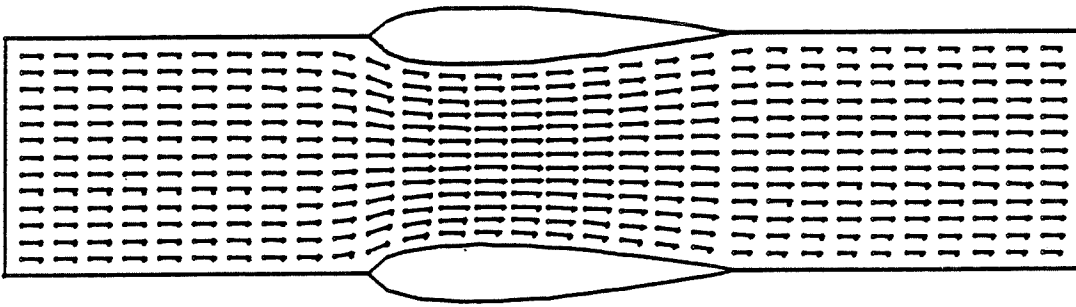


Figure 14: Champ de vitesse (NACA0012)

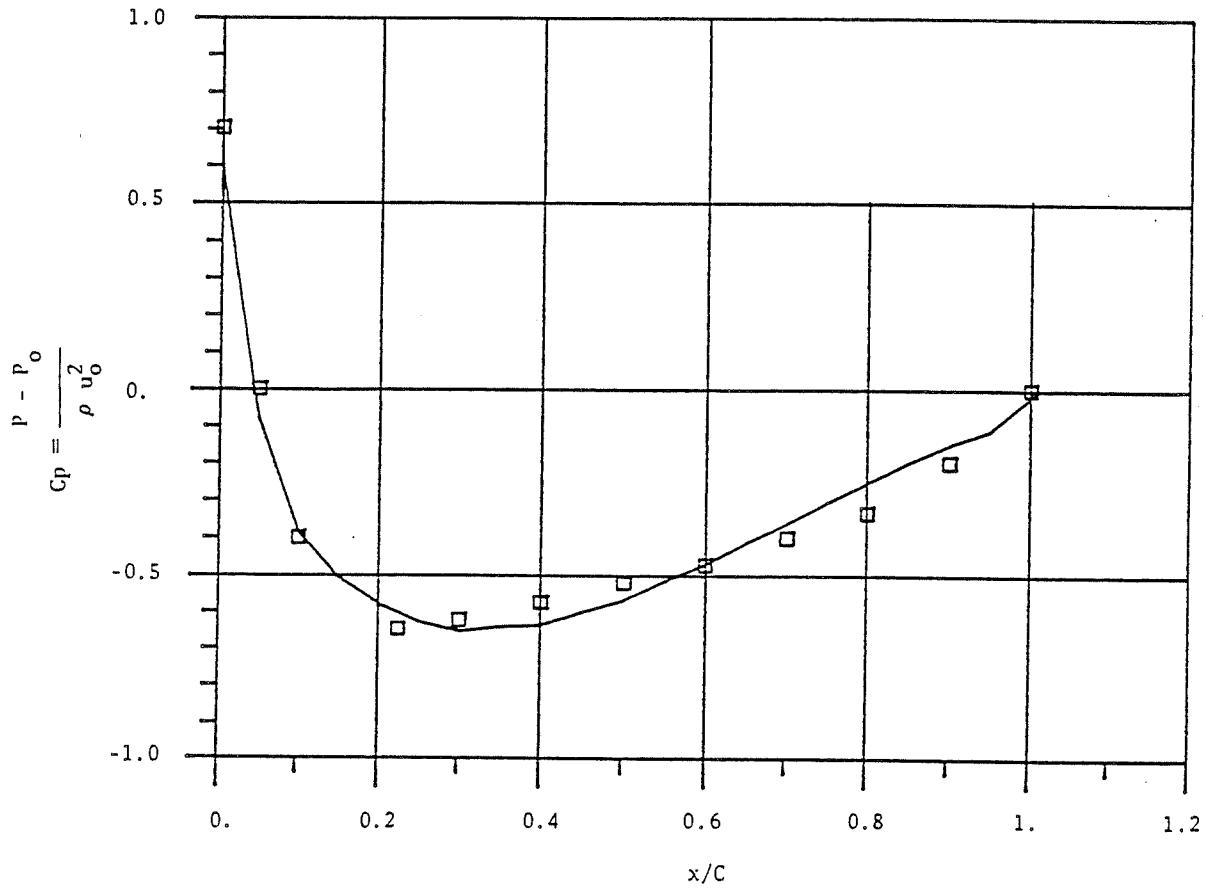


Figure 15: Coefficient de pression (NACA0012), (—) résultats numériques, (□ □ □) mesures de Gregory et O'Reilly (1970)

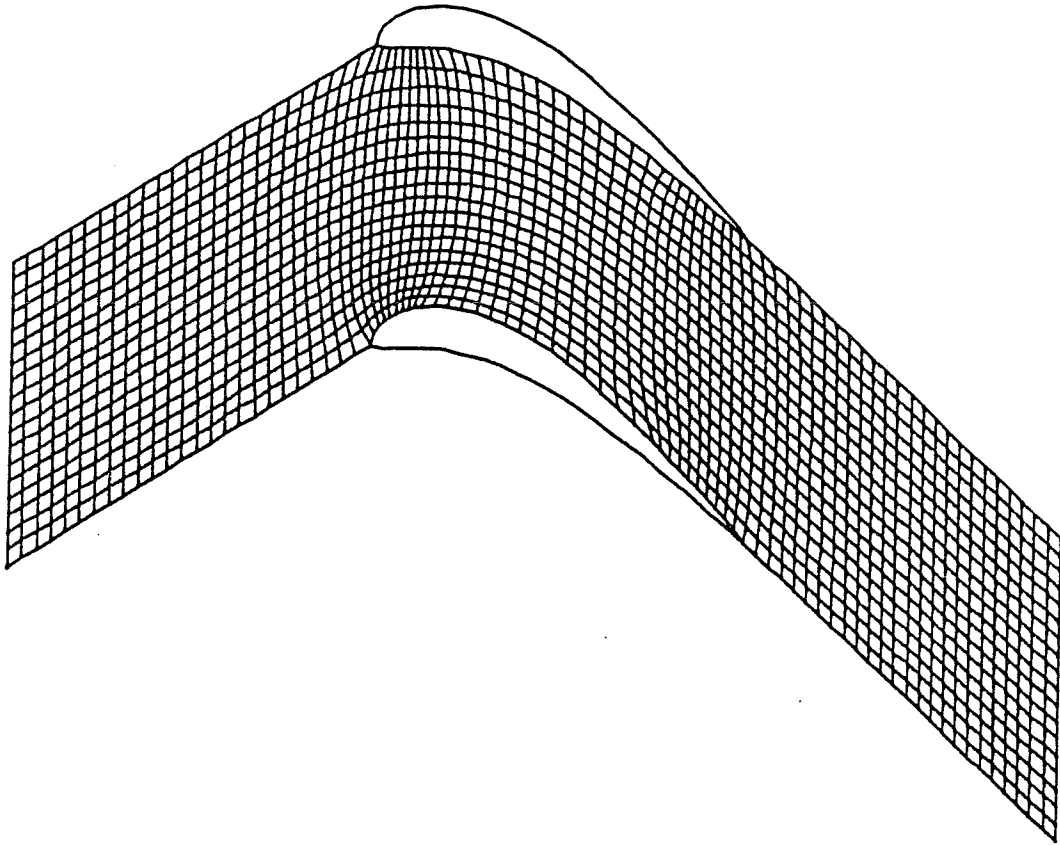


Figure 16: Maillage du passage inter-aube (NACA81)

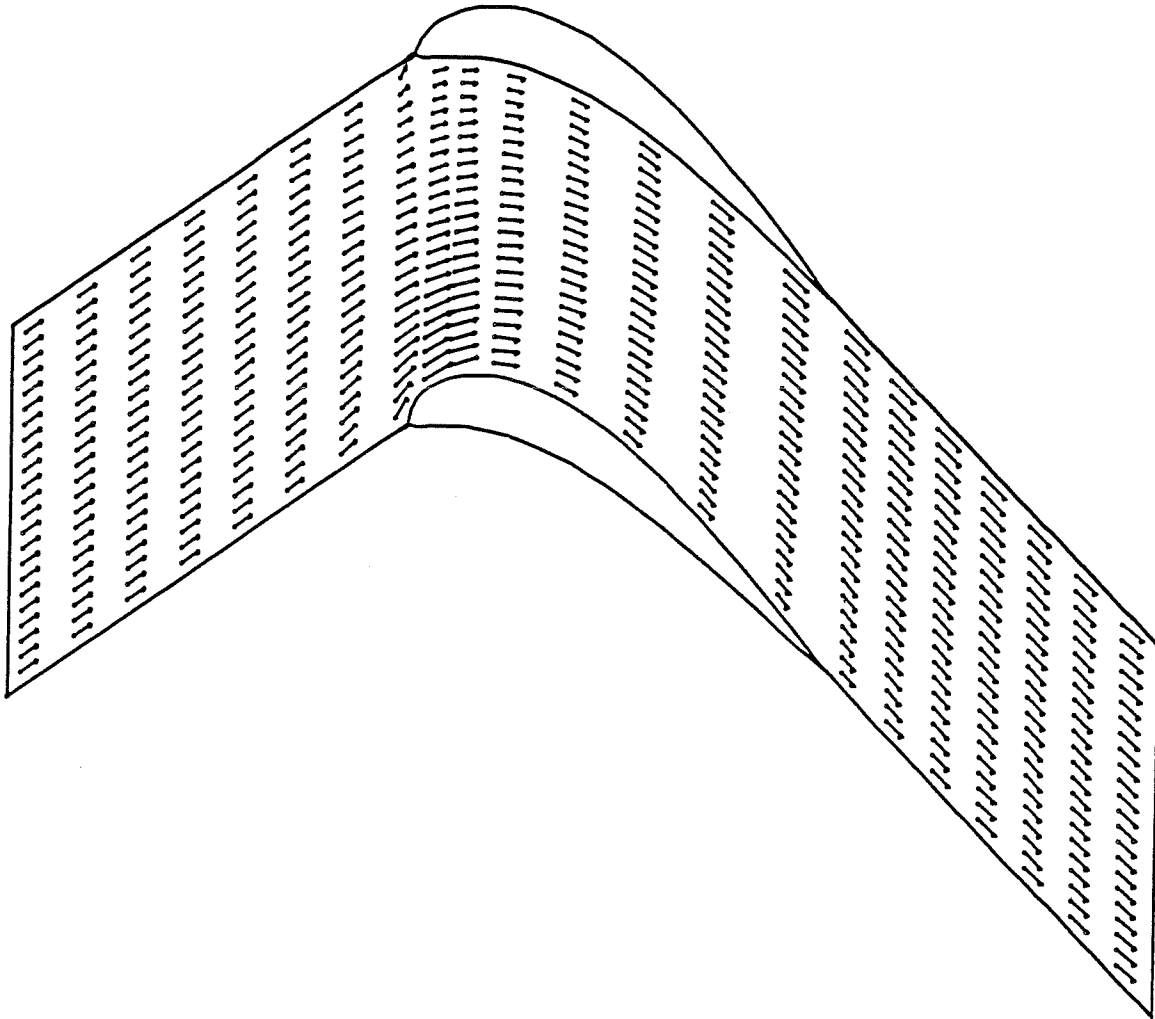


Figure 17: Champ de vitesse (NACA81)

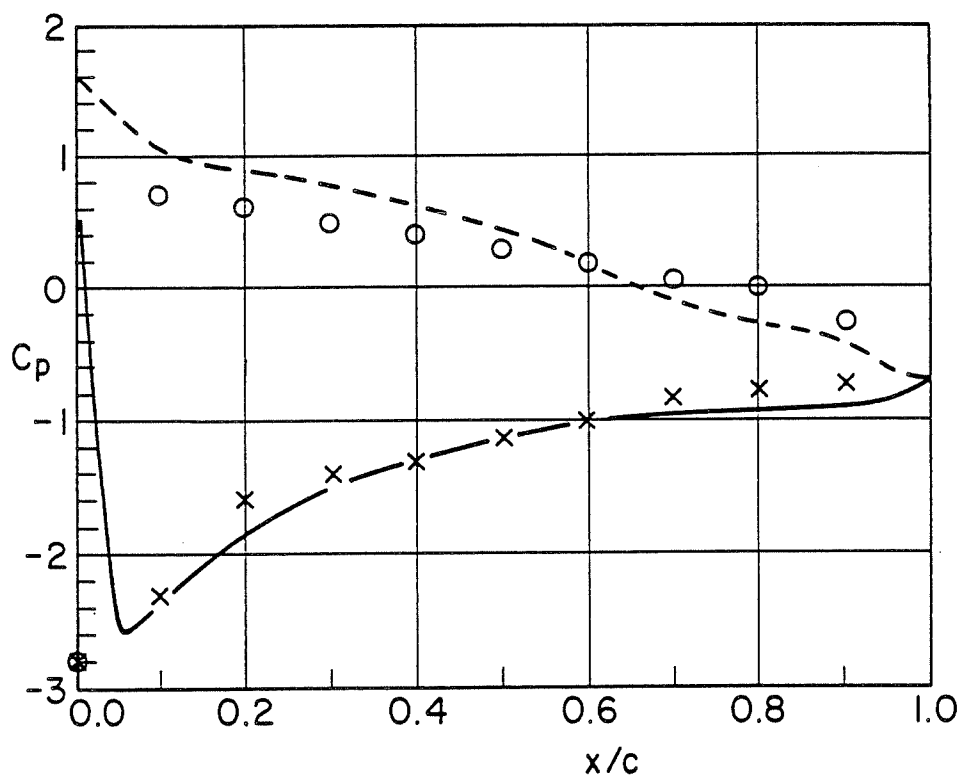


Figure 18: Coefficient de pression le long du profil (NACA81); (—, ---) résultats numériques (extrados, intrados); (x x x, o o o) mesures de Dunavant et Erwin (1956)

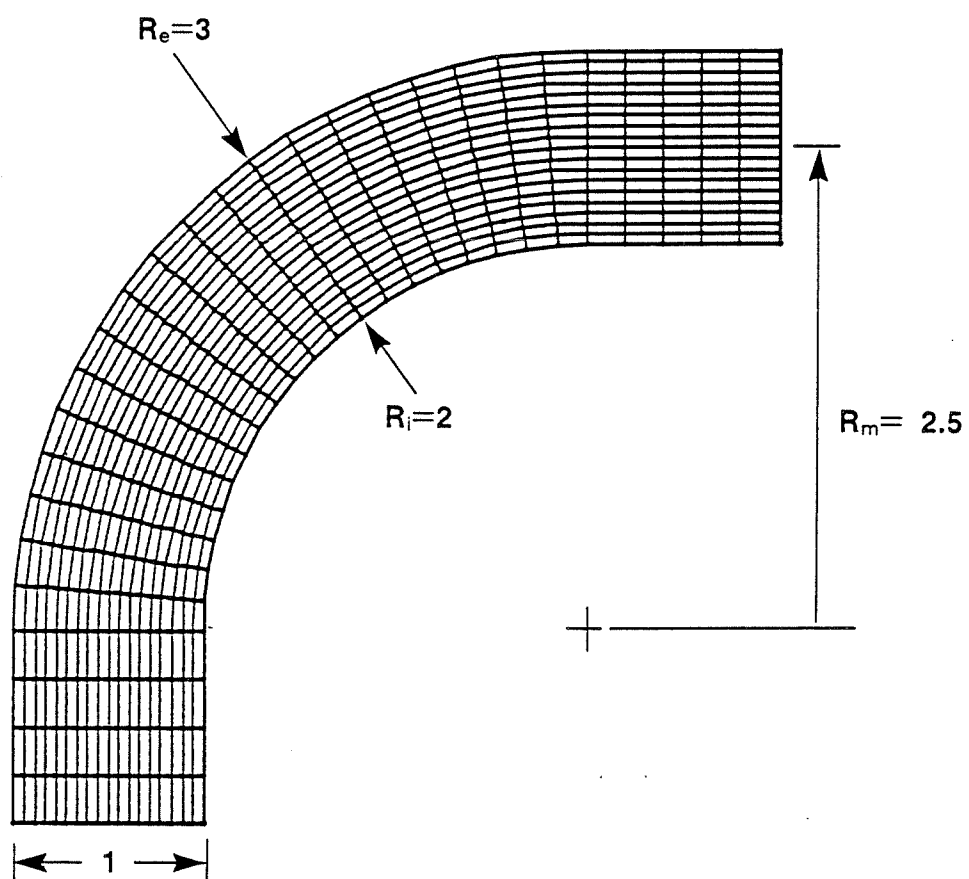


Figure 19: Géométrie du coude à section carrée et Maillage dans le plan longitudinal

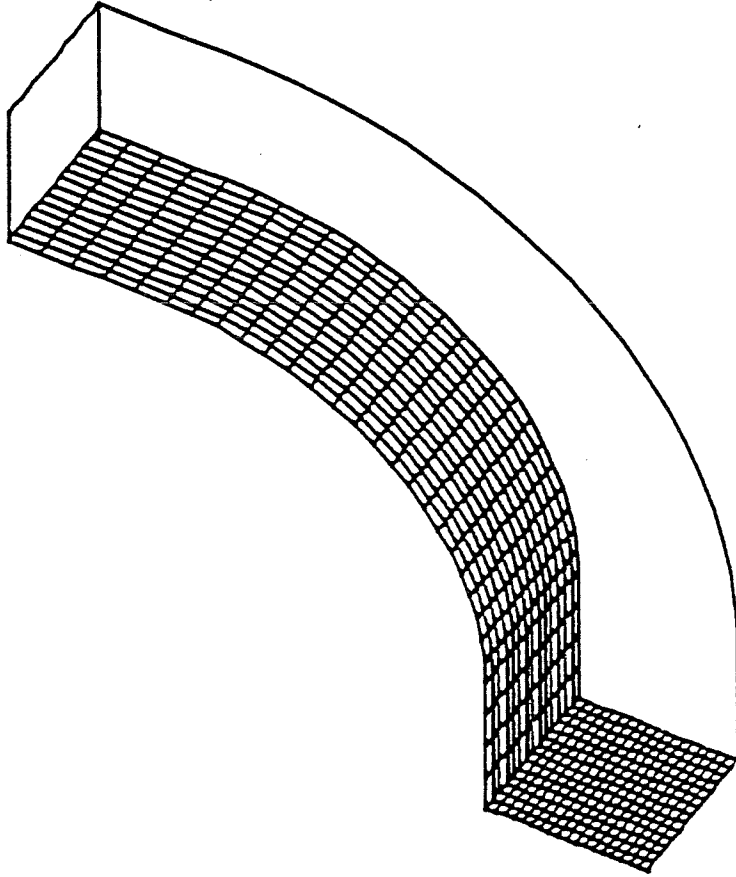


Figure 20: Vue 3D du coude à section carrée



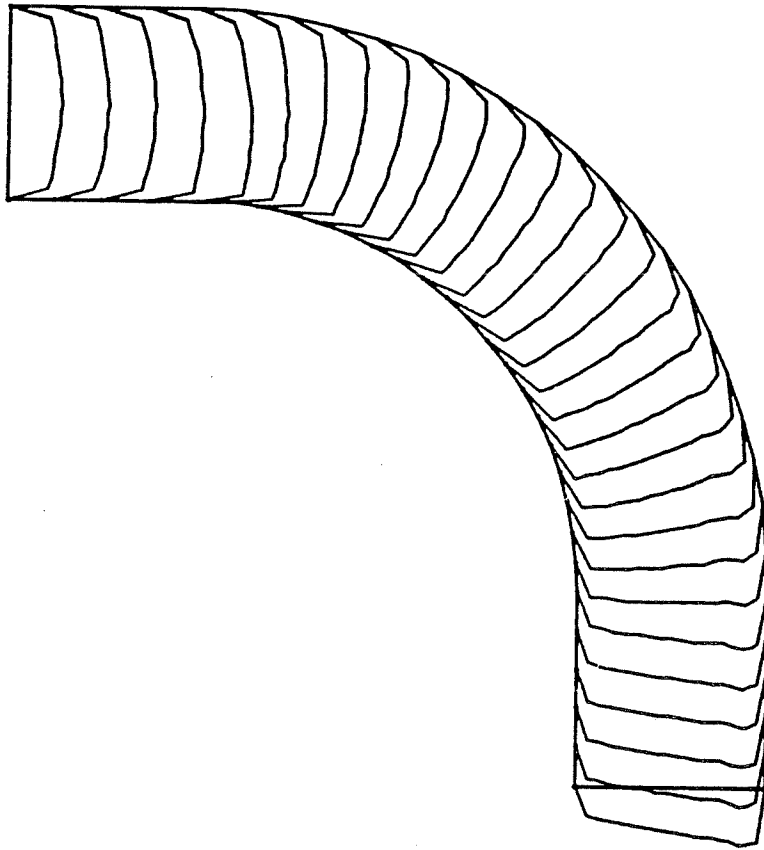


Figure 21: Développement de la vitesse dans le plan de symétrie

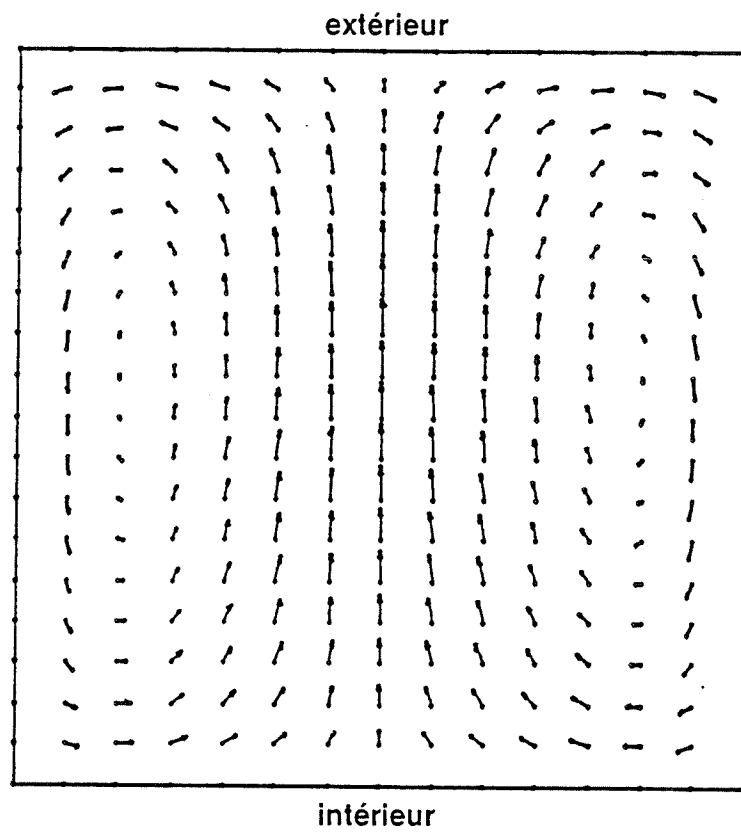


Figure 22: Ecoulement secondaire à  $45^\circ$  (coude à section carrée)

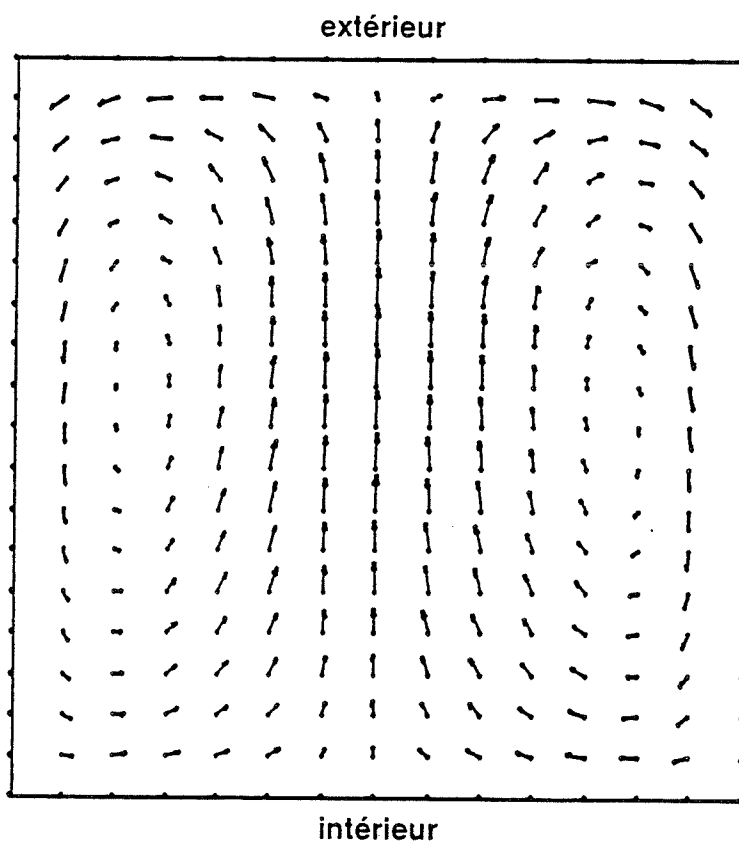


Figure 23: Ecoulement secondaire à  $90^\circ$  (coude à section carrée)

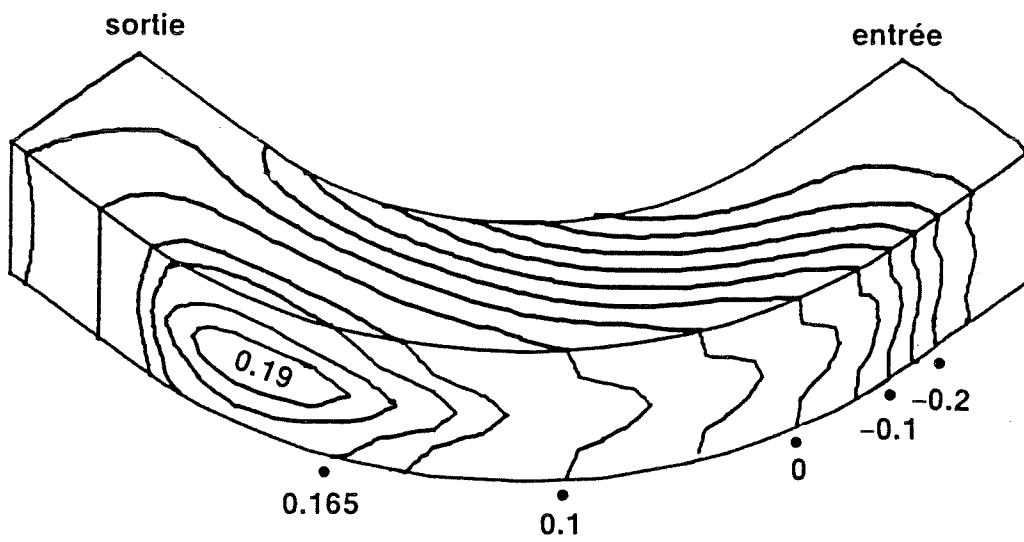


Figure 24: Lignes d'iso-pression vue de la paroi extérieure

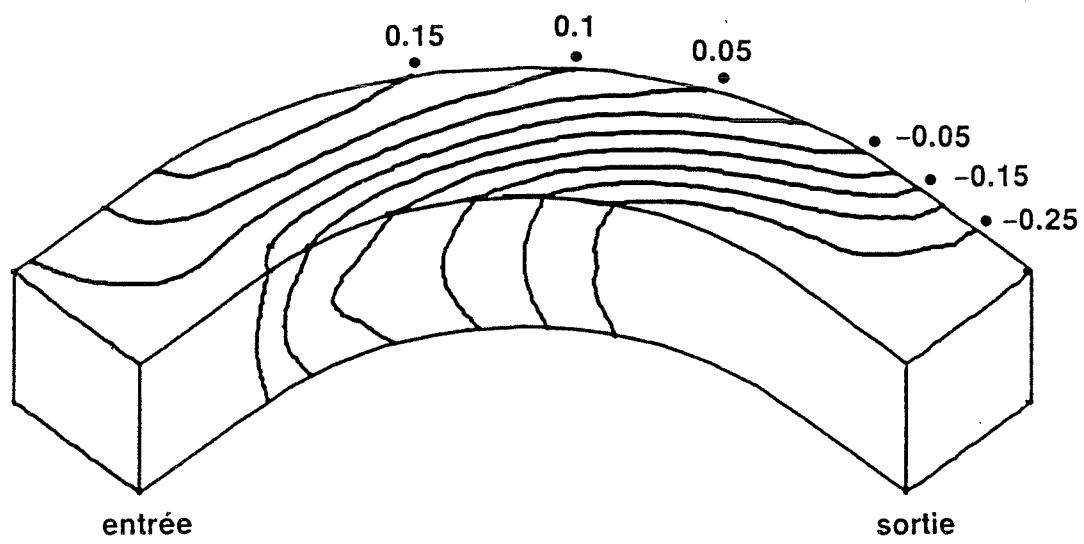


Figure 25: Lignes d'iso-pression vue de la paroi intérieure

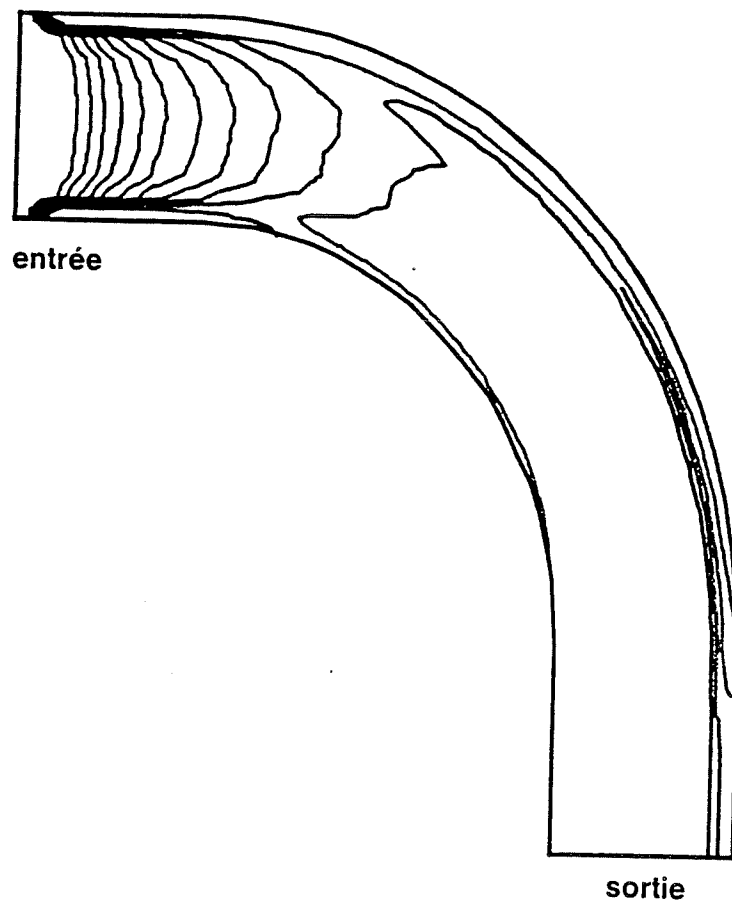


Figure 26: Iso -  $k$  dans le plan de symétrie

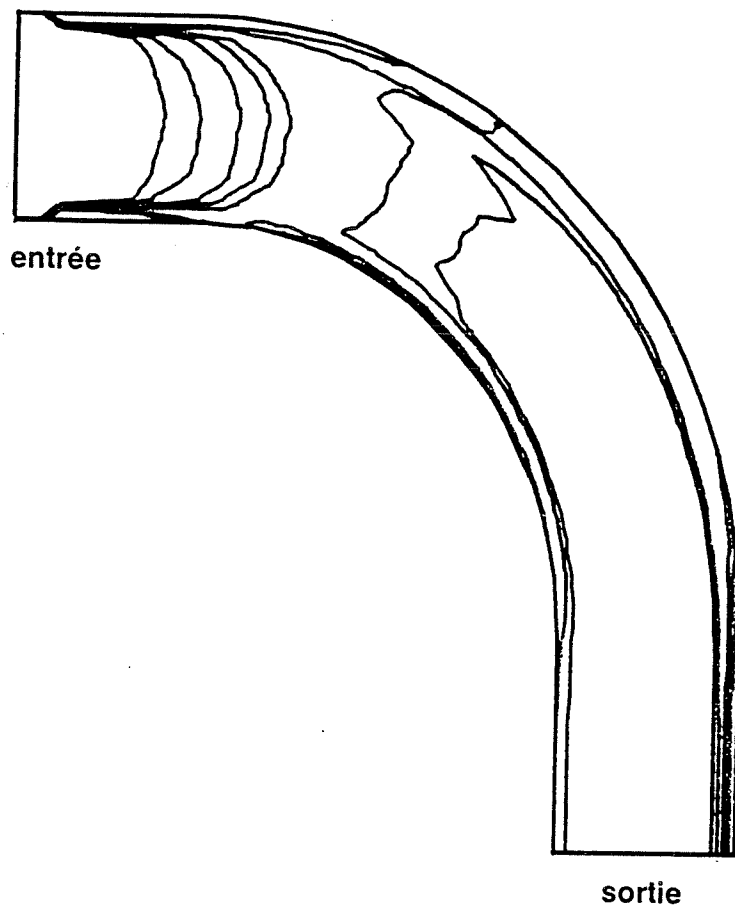


Figure 27: Iso -  $\epsilon$  dans le plan de symétrie

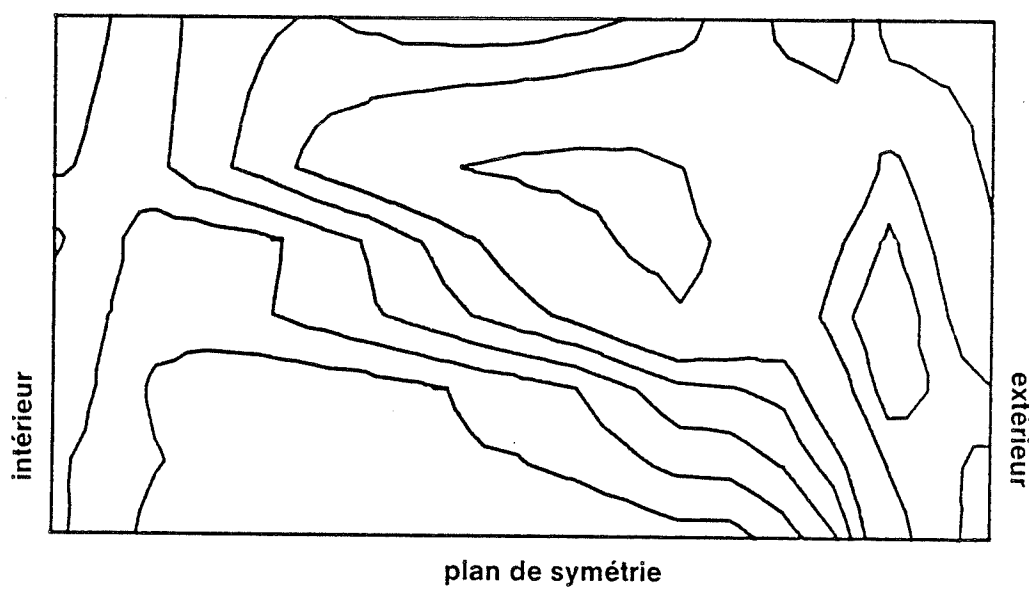


Figure 28: Iso -  $k$  à  $90^\circ$



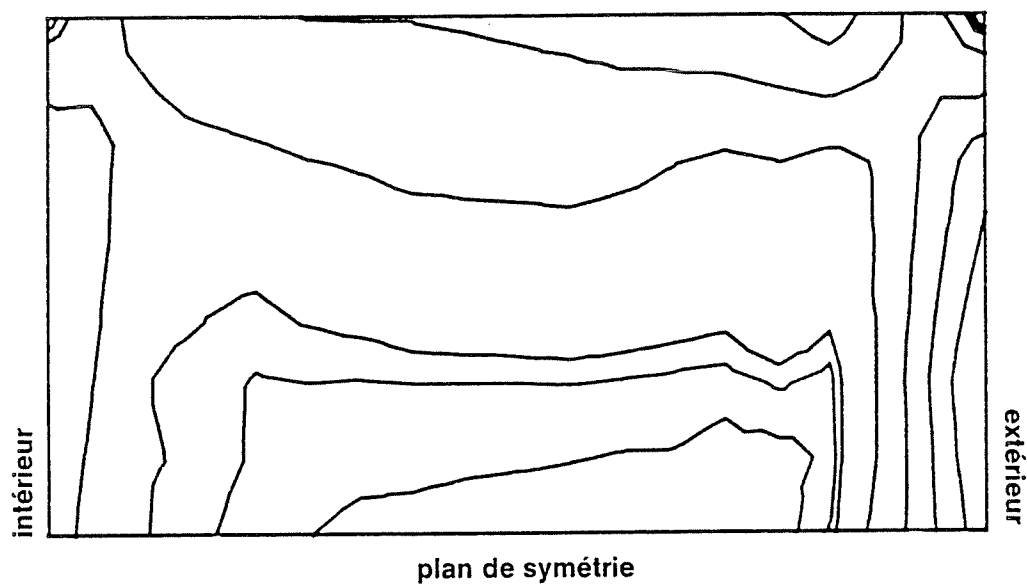


Figure 29: Iso -  $\epsilon$  à  $90^\circ$

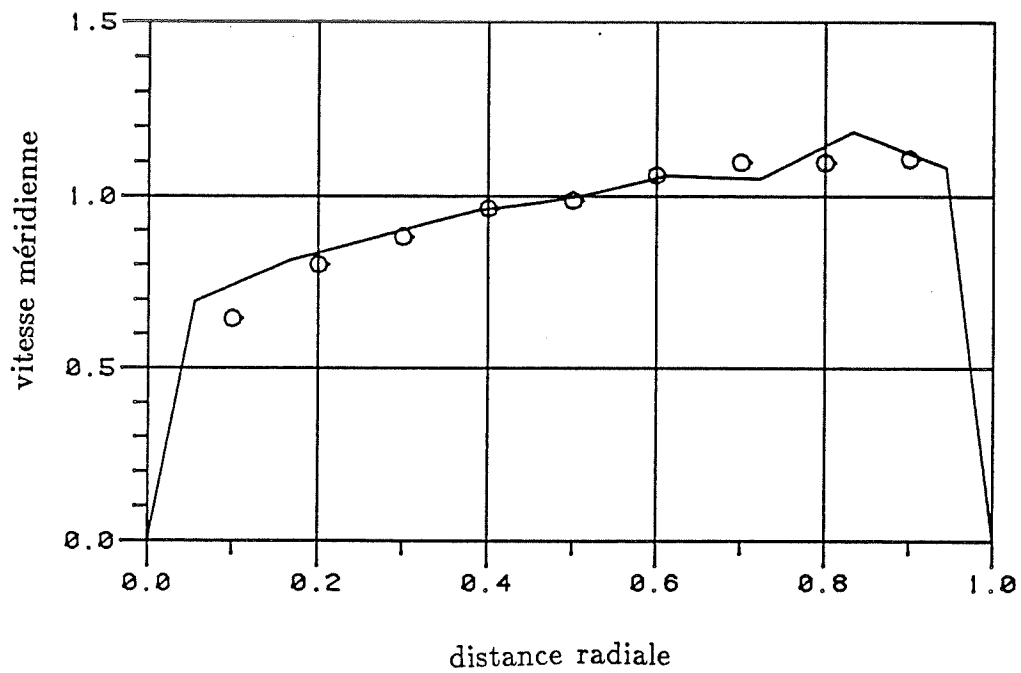


Figure 30: Profil de vitesse à la sortie du coude; (—) résultats numériques; (o o o) résultats expérimentaux, Mori et al.(1971)

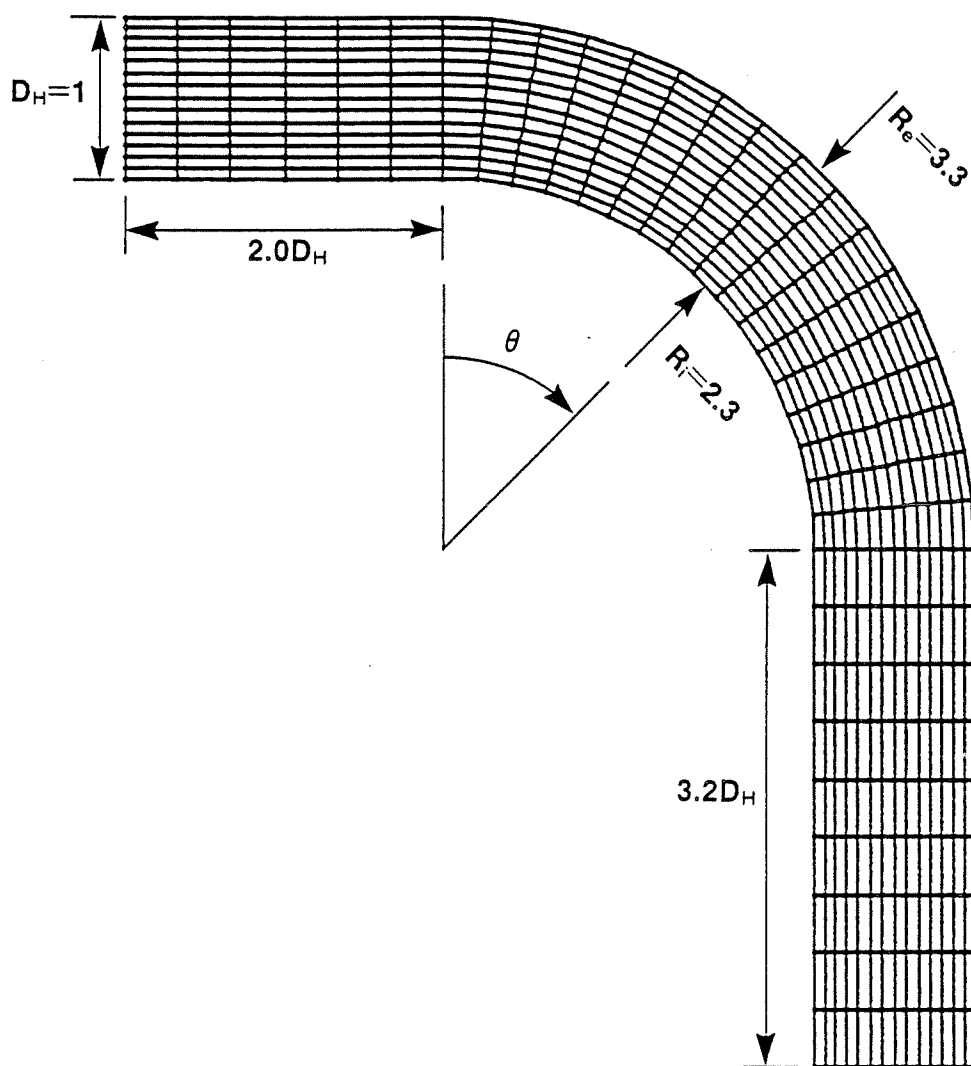


Figure 31: Géométrie du coude à section circulaire et Maillage dans le plan longitudinal ( $\xi^1$ )

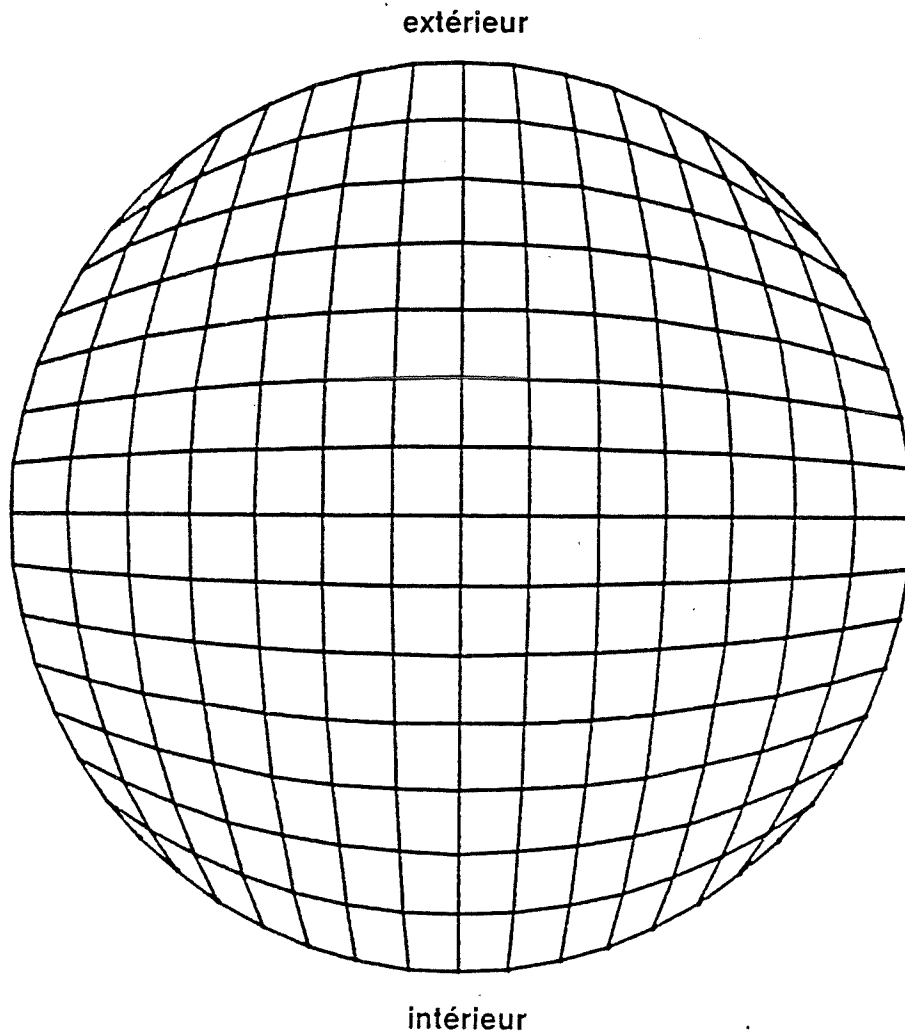


Figure 32: Maillage dans le plan transversal ( $\xi^2, \xi^3$ )

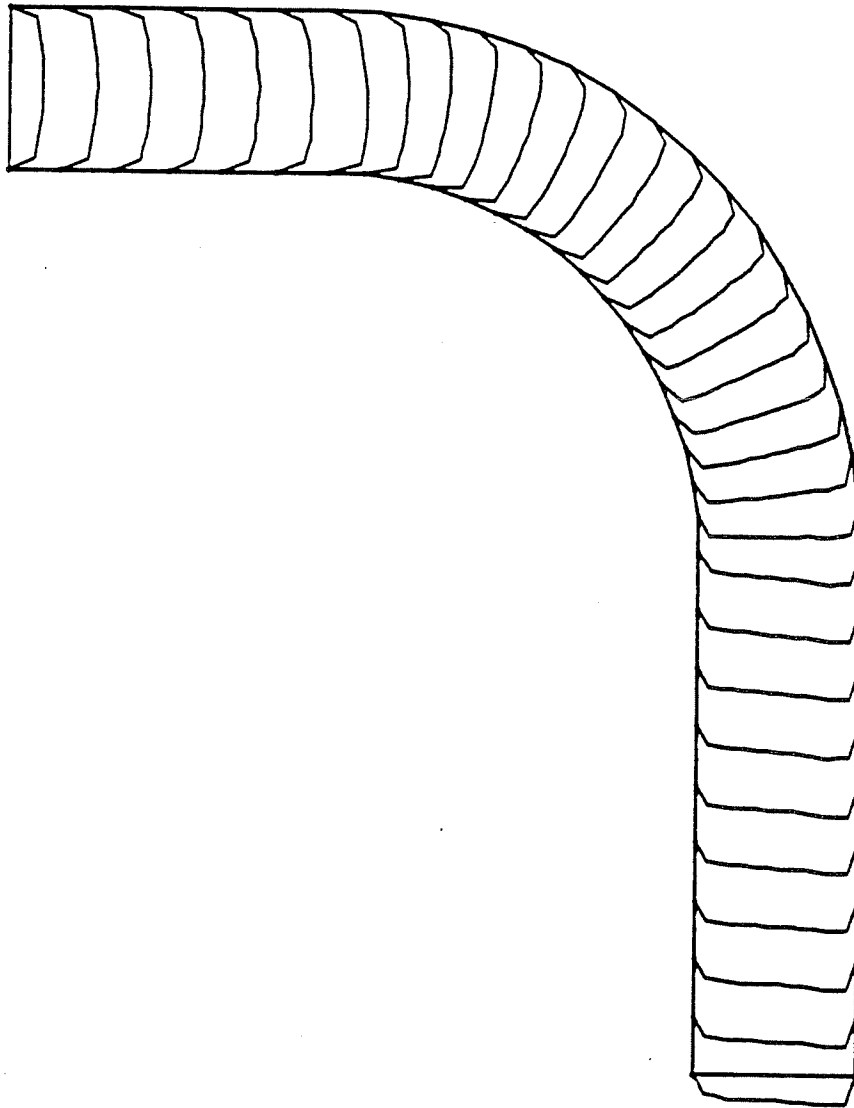


Figure 33: Développement de la vitesse dans le plan de symétrie

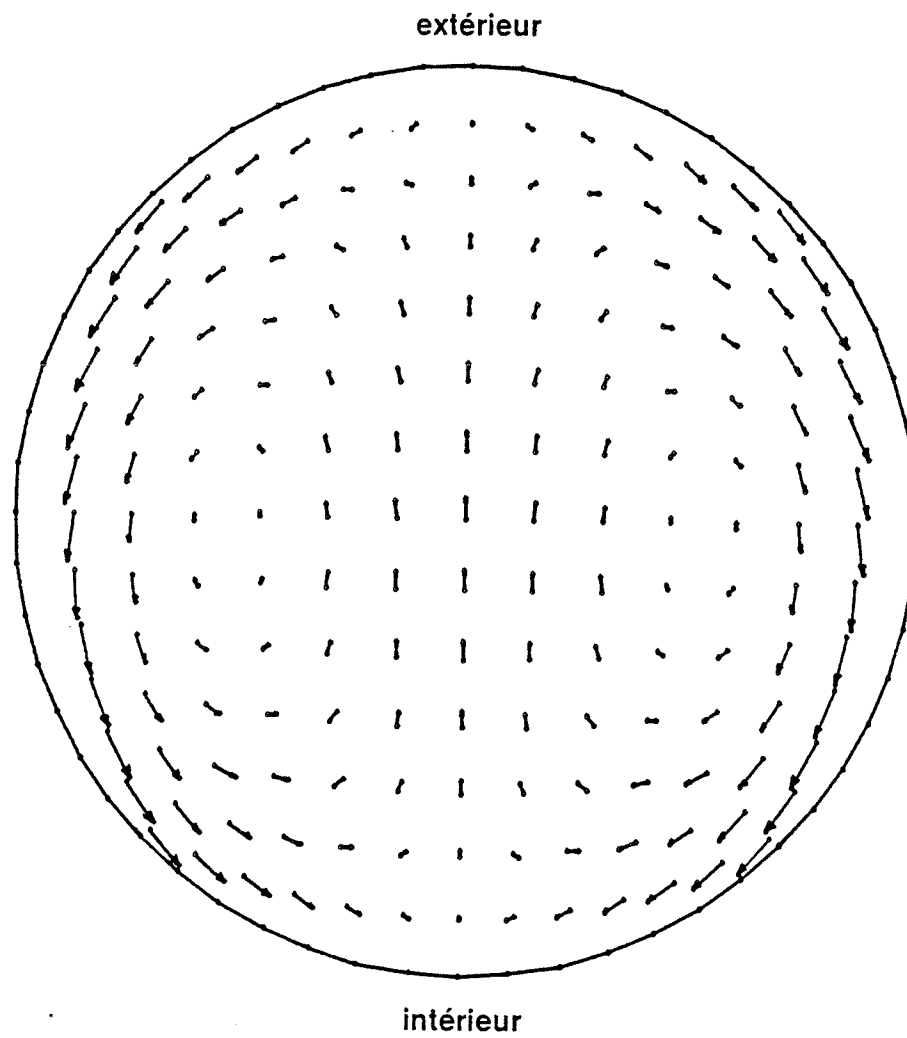


Figure 34: Ecoulement secondaire à  $\theta = 30^\circ$

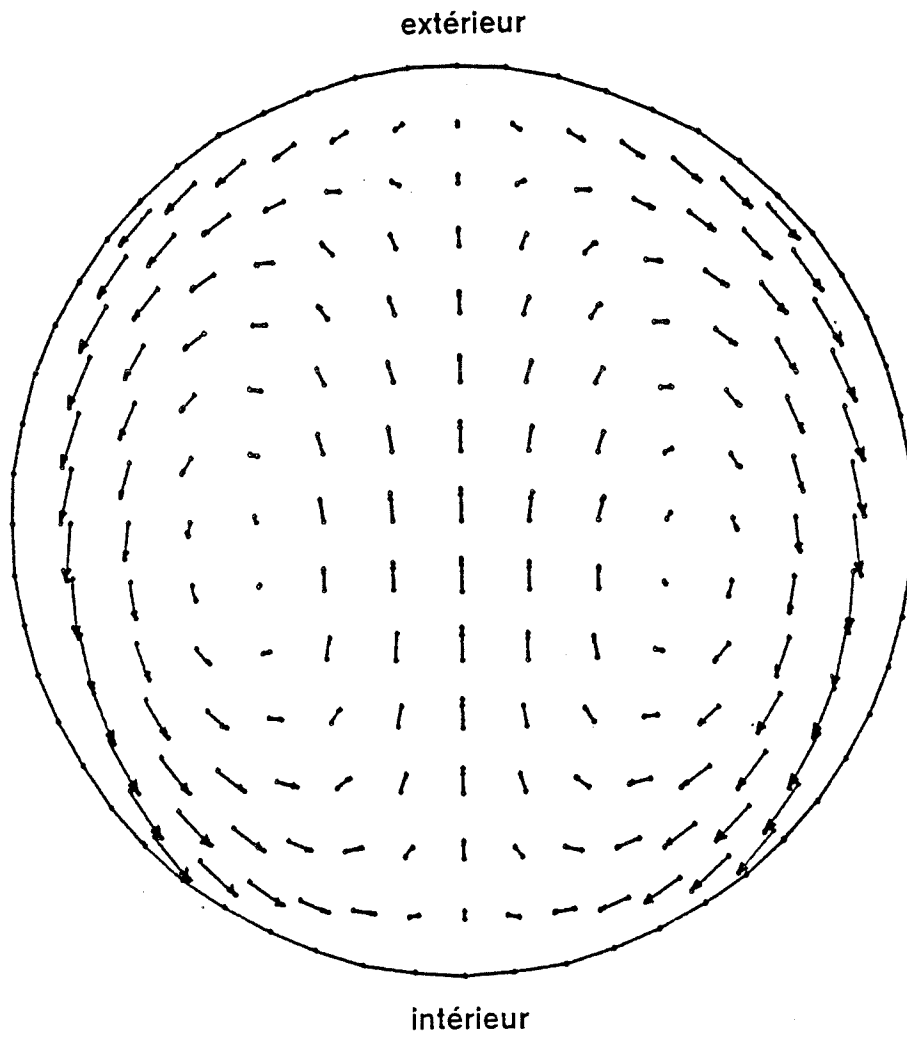


Figure 35: Ecoulement secondaire à  $\theta = 60^\circ$

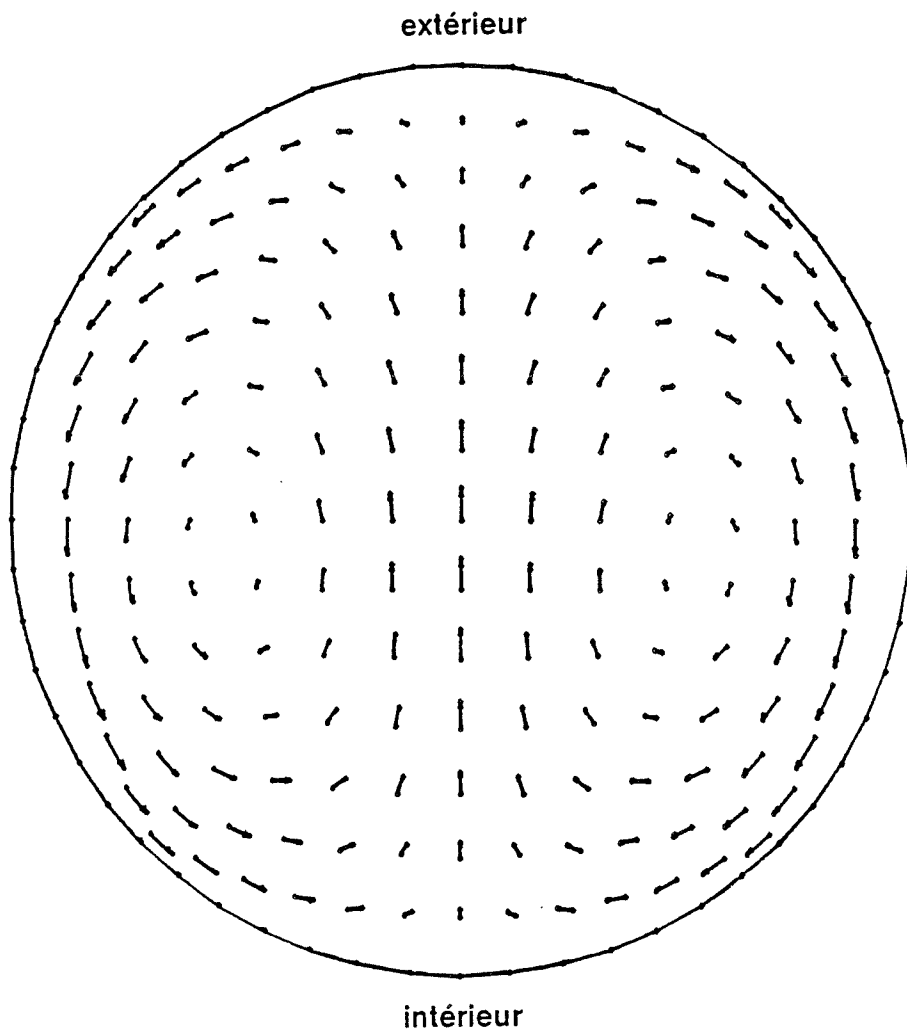


Figure 36: Ecoulement secondaire à  $1d$  après le coude



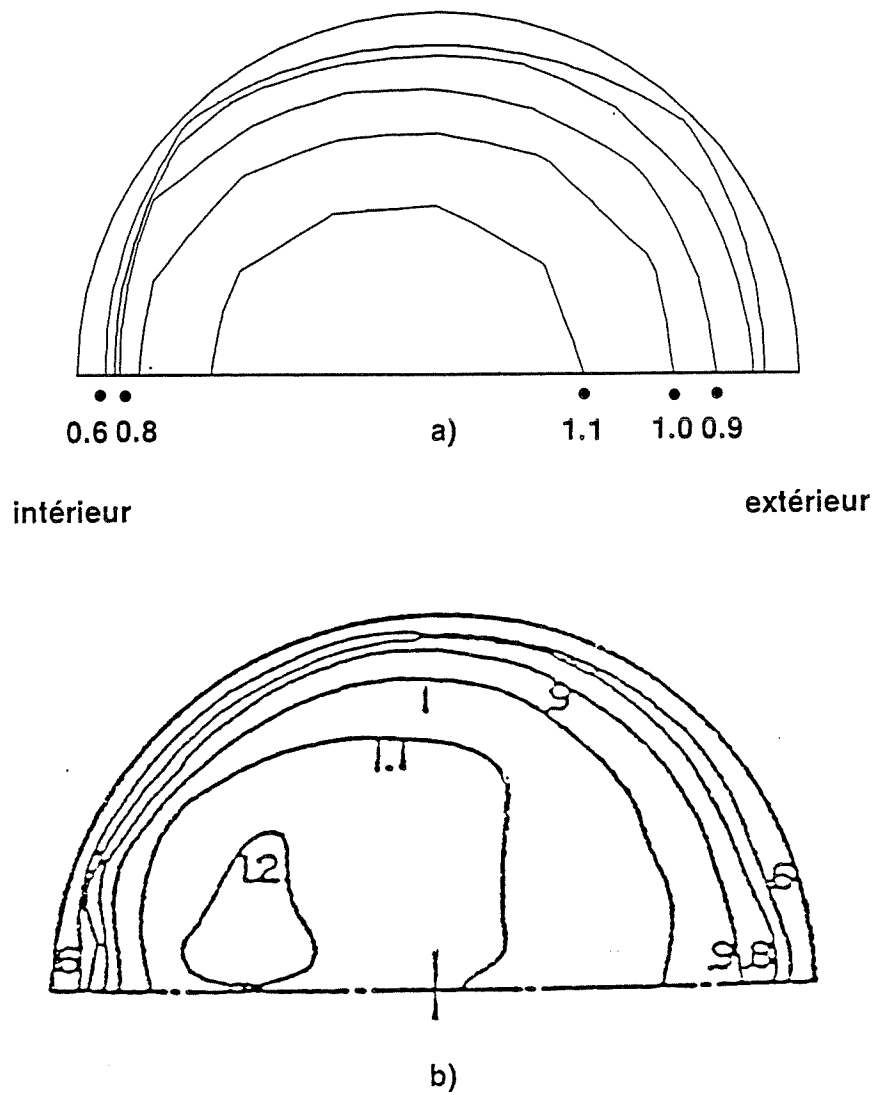


Figure 37: Lignes d'iso-vitesse méridienne à  $\theta = 30^\circ$ ; a) résultats numériques; b) résultats expérimentaux de Enayet et al.(1982)

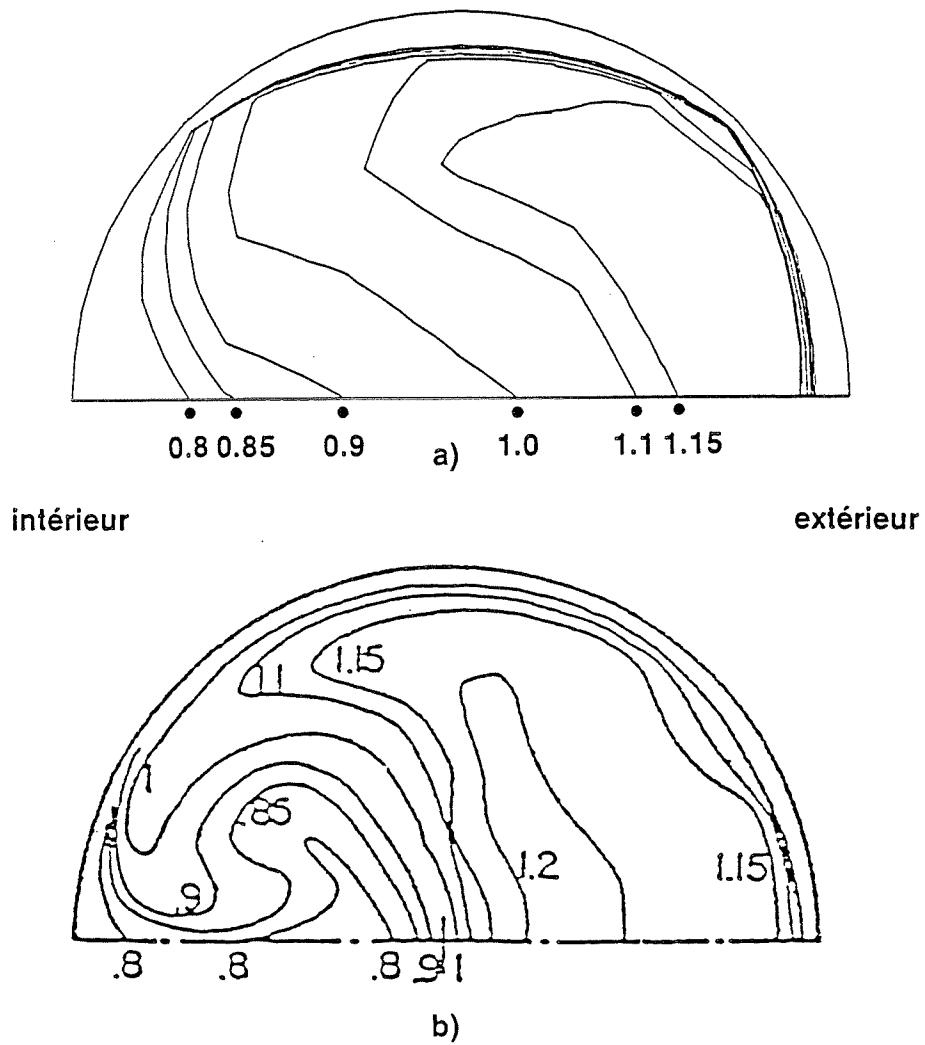


Figure 38: Lignes d'iso-vitesse méridienne à  $1d$  après le coude; a) résultats numériques; b) résultats expérimentaux de Enayet et al.(1982)

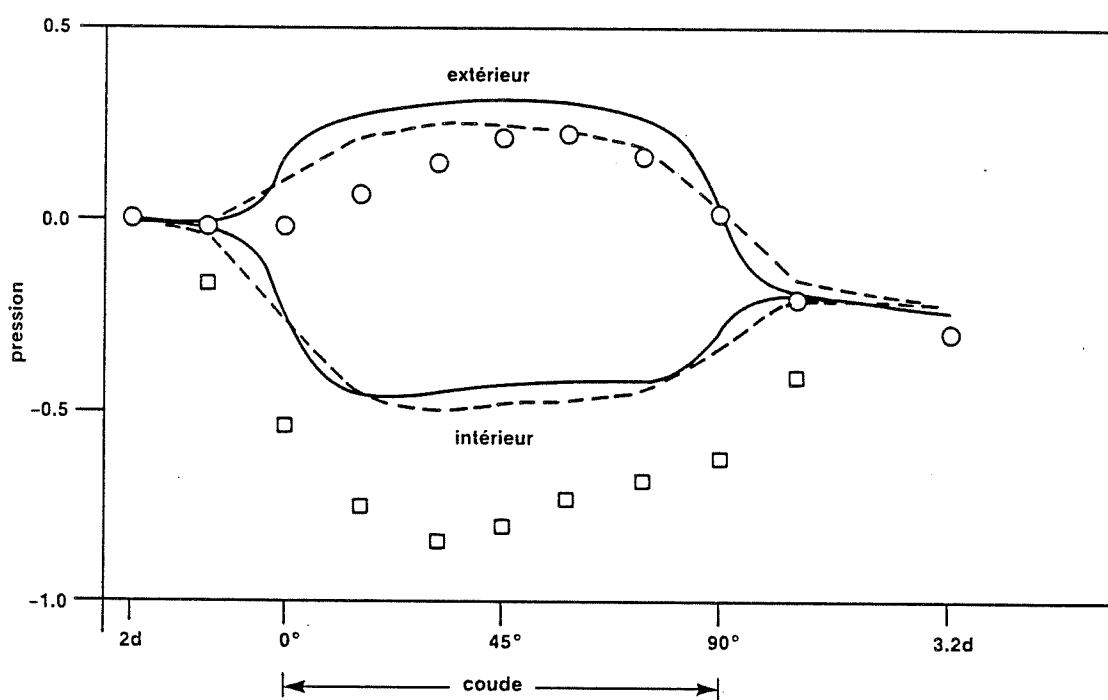


Figure 39: Coefficient de pression sur les parois solides dans le plan de symétrie; (—) résultats numériques; (---) calcul de Briley et al. (1982); (□□□) mesures d'expérience de Enayet et al. (1982)

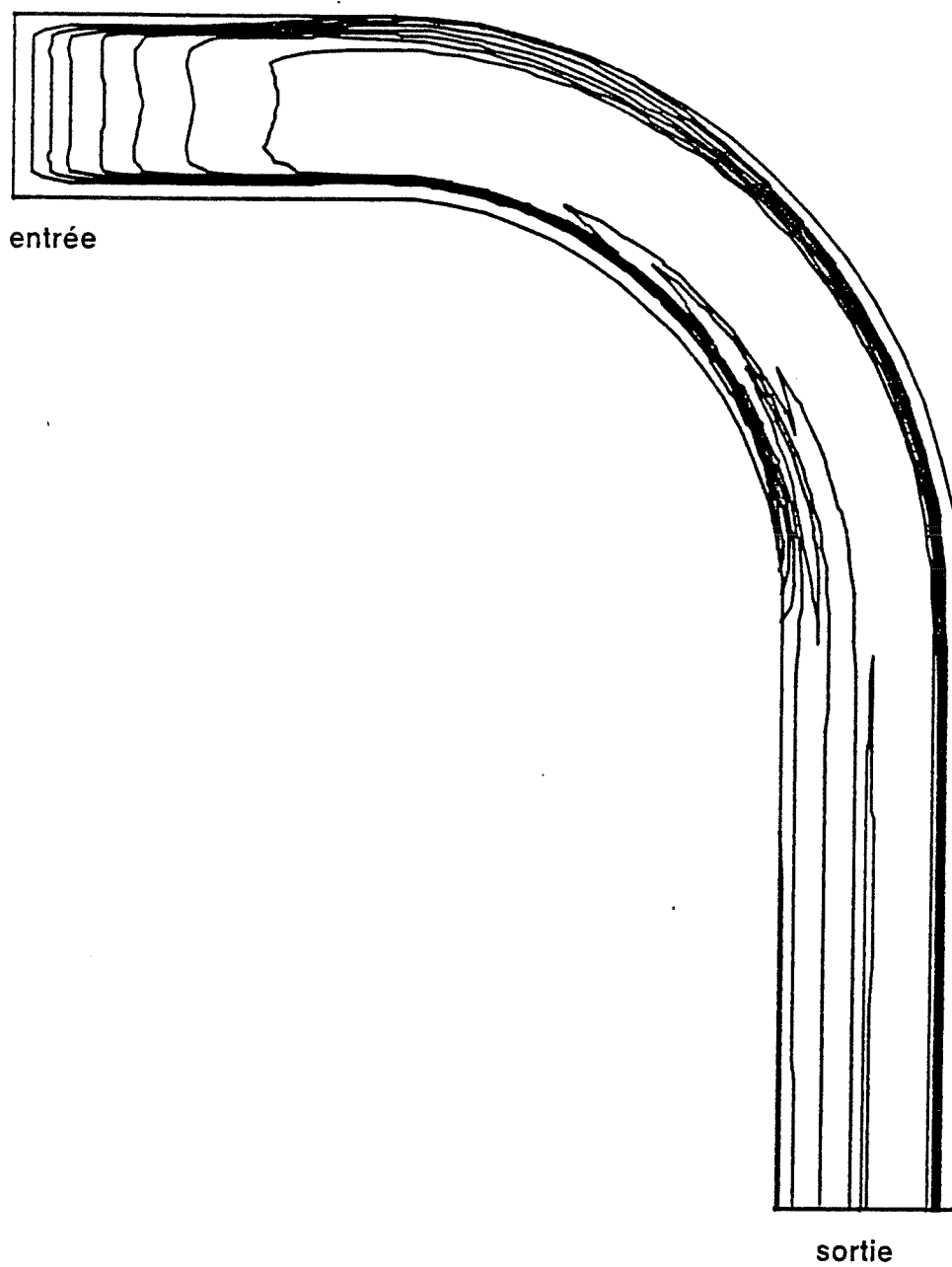


Figure 40: Iso -  $k$  dans le plan de symétrie

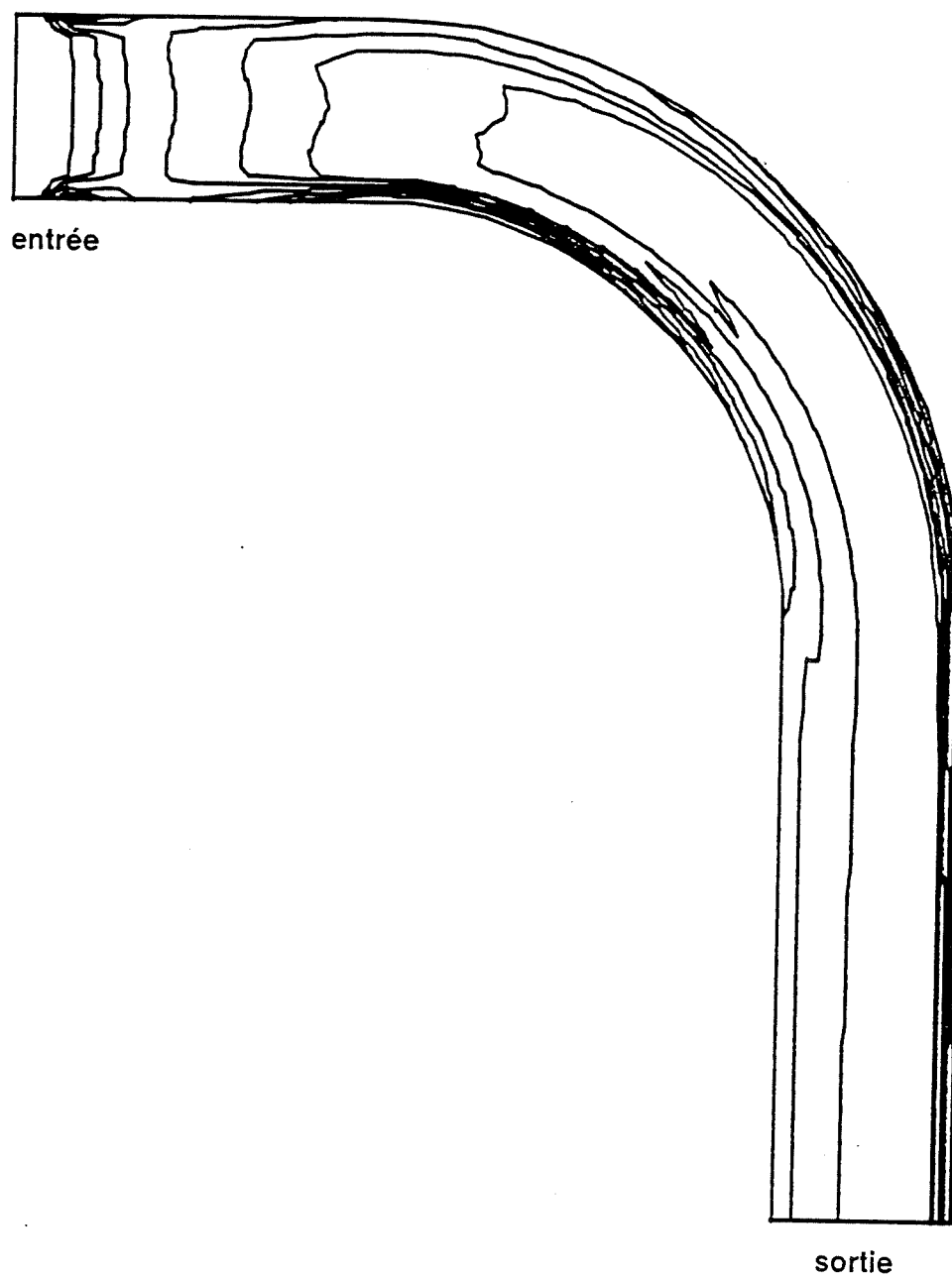


Figure 41: Iso -  $\epsilon$  dans le plan de symétrie

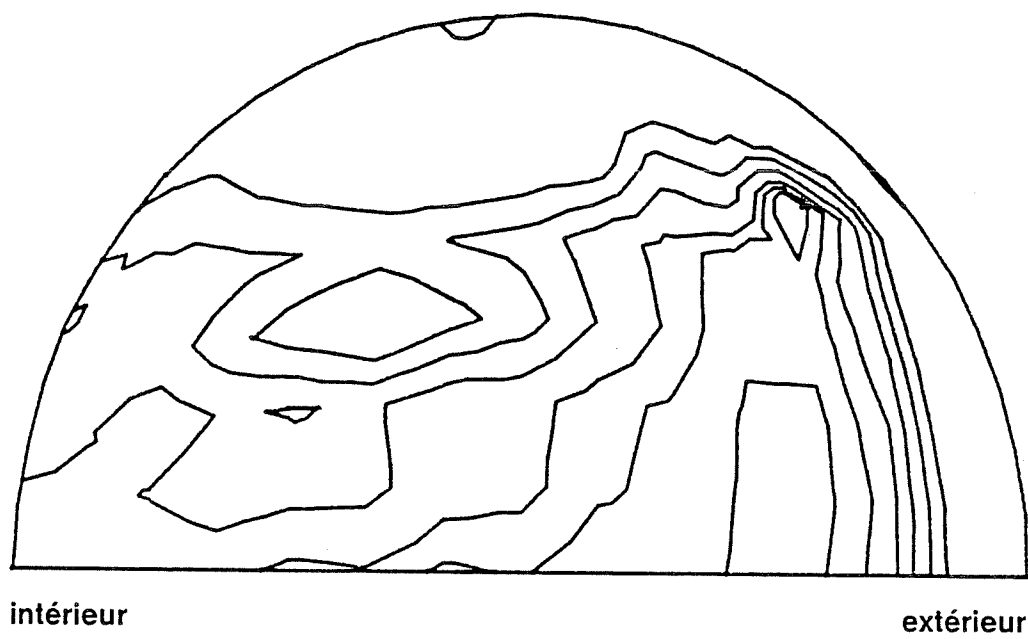


Figure 42: Iso -  $k$  à  $1d$  après le coude

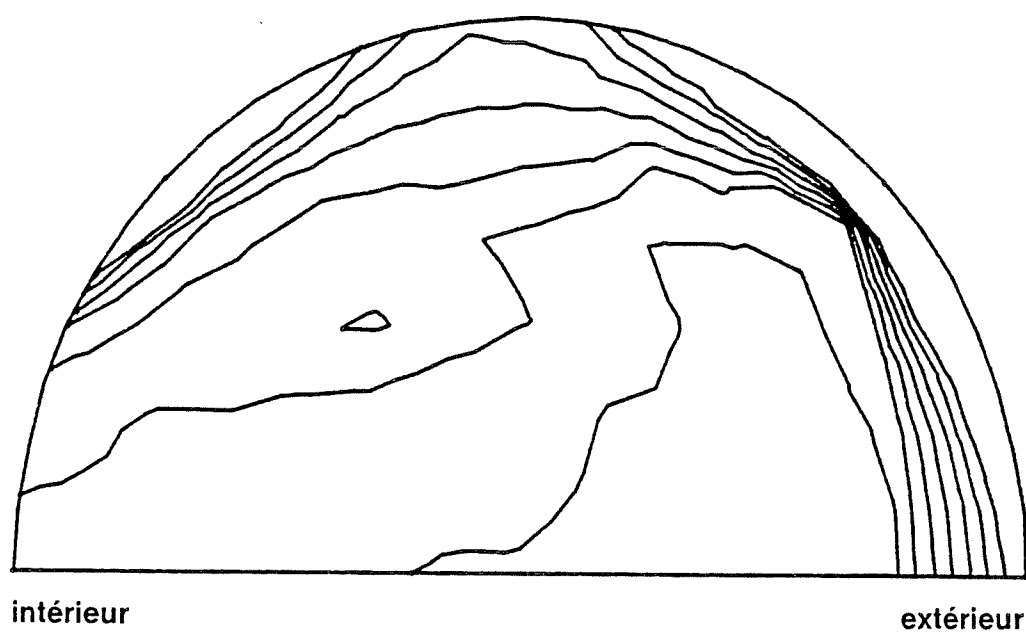


Figure 43: Iso -  $\epsilon$  à  $1d$  après le coude

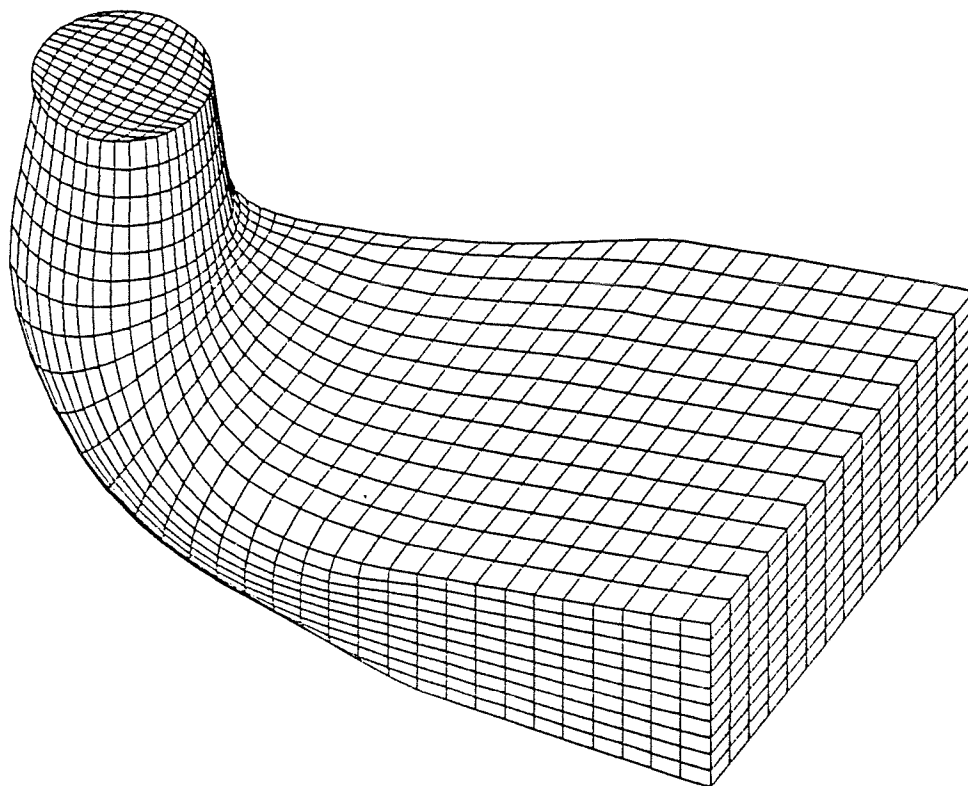


Figure 44: Vue 3D de l'aspirateur



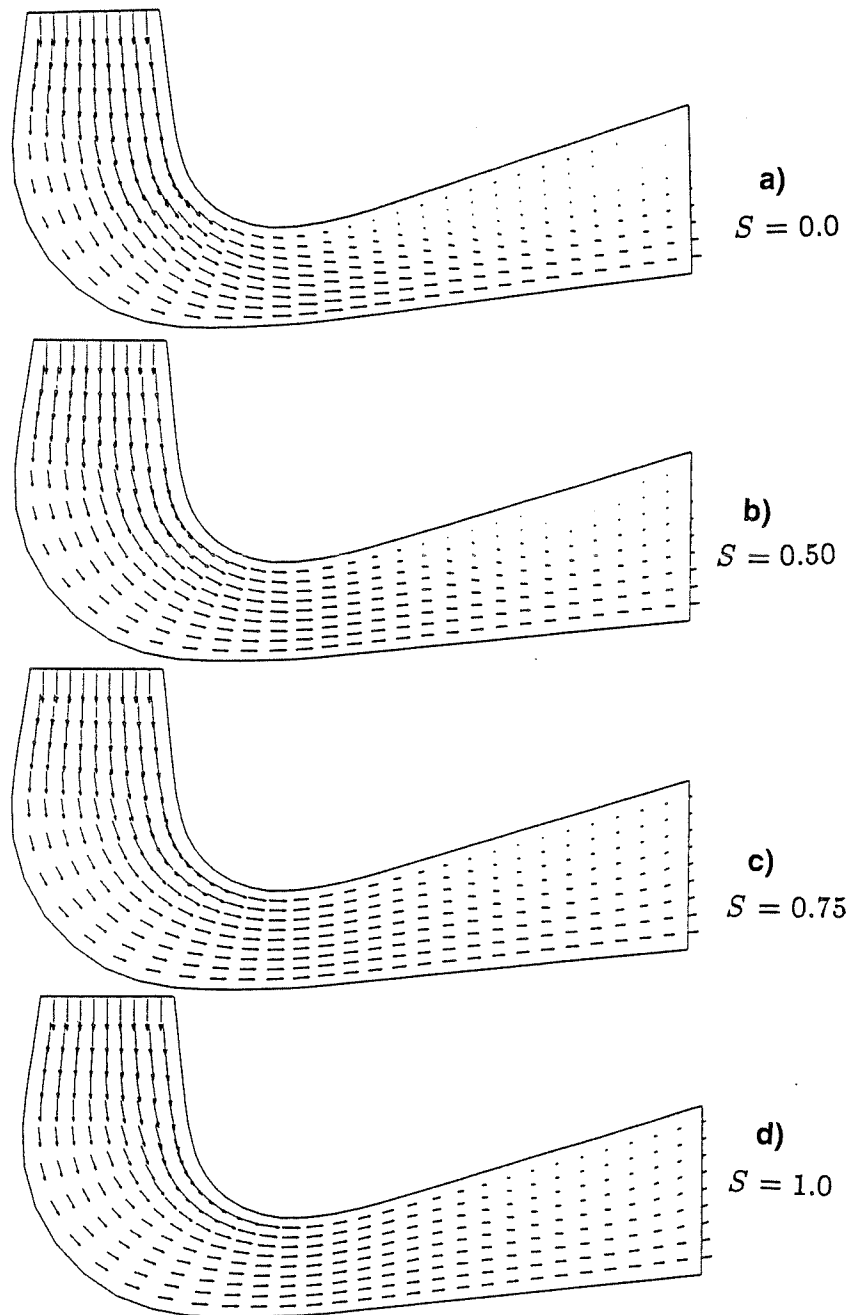


Figure 45: Champ de vitesse dans le plan médian

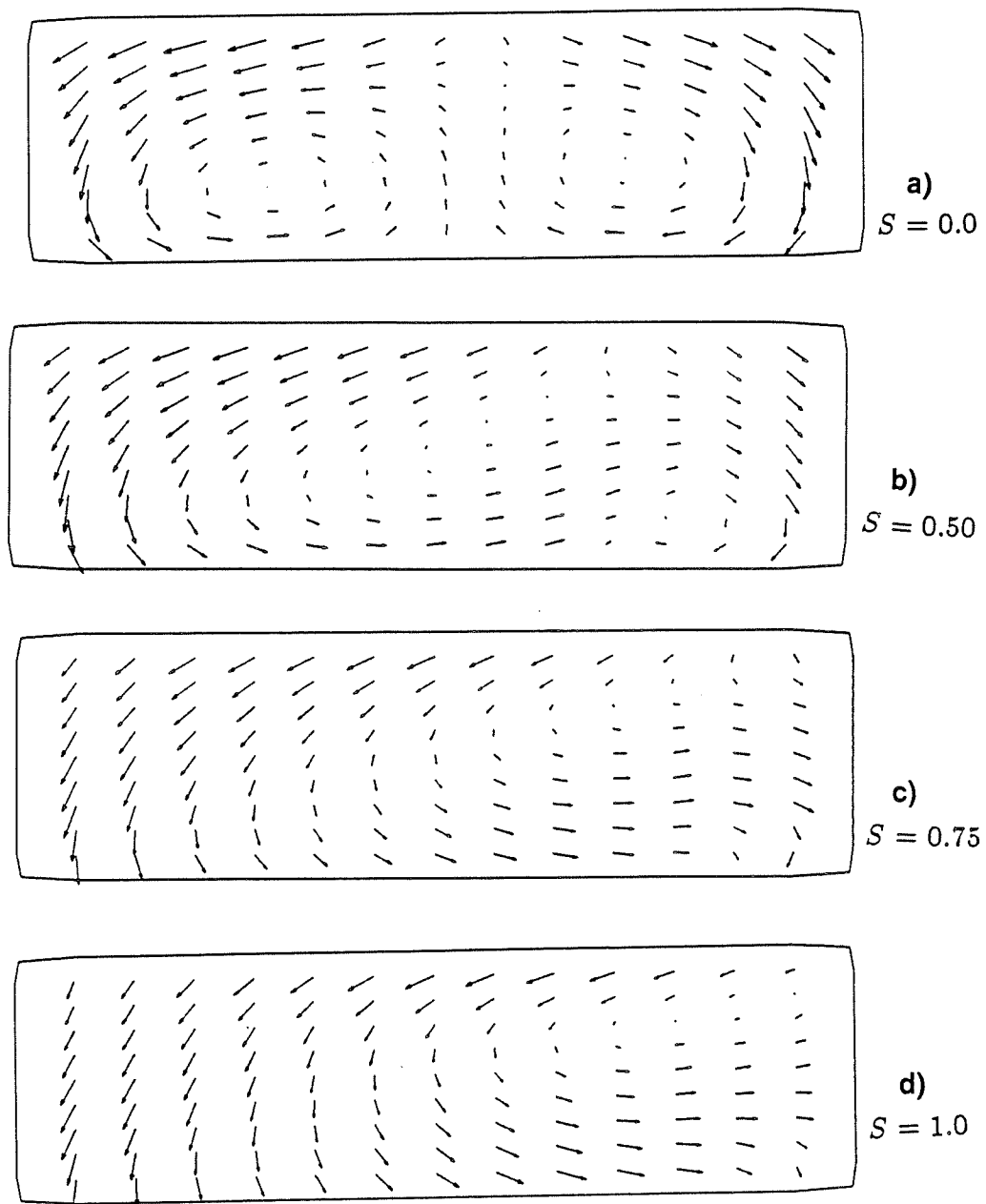


Figure 46: Ecoulement secondaire à la section  $i = 22$  (vers la fin du coude)

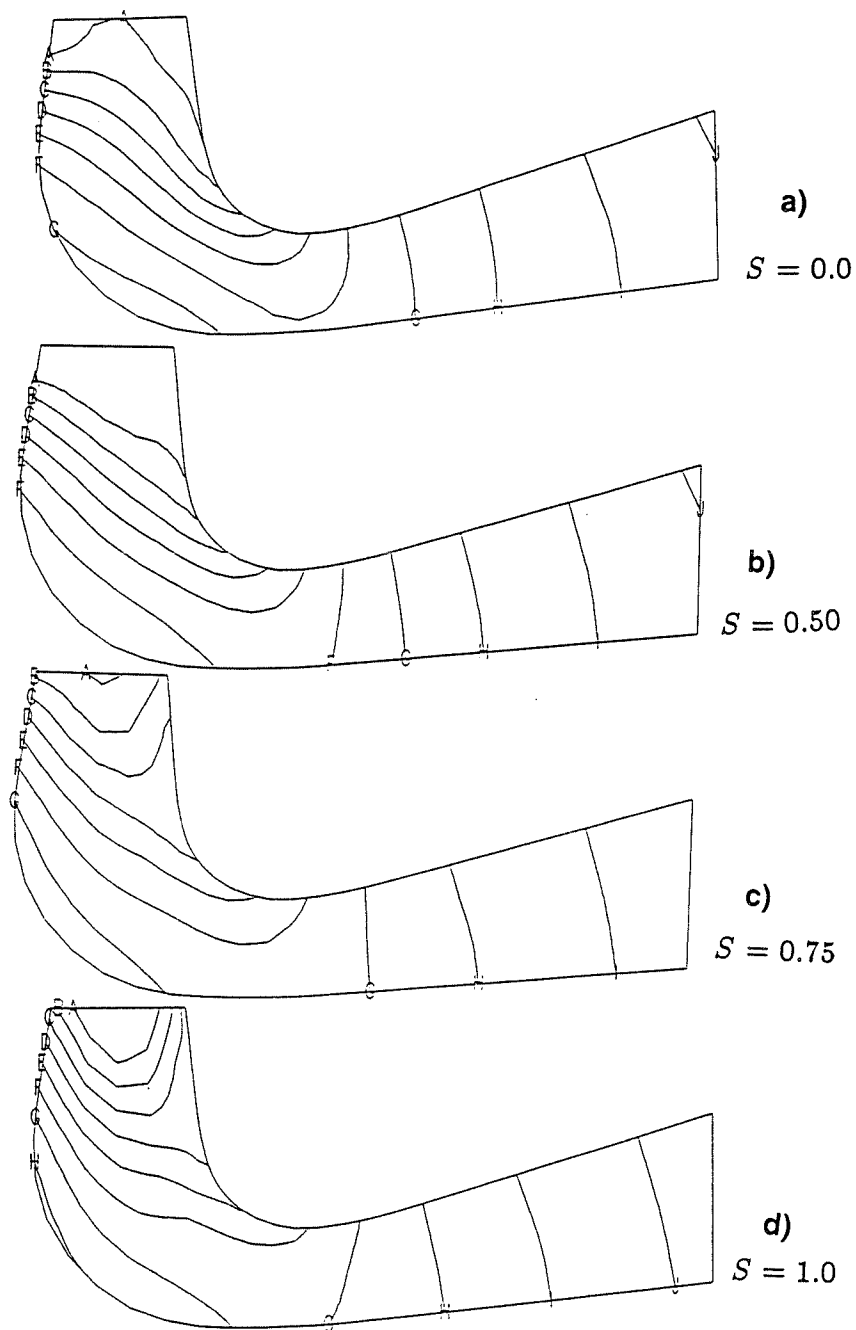


Figure 47: Distribution de la pression dans le plan médian

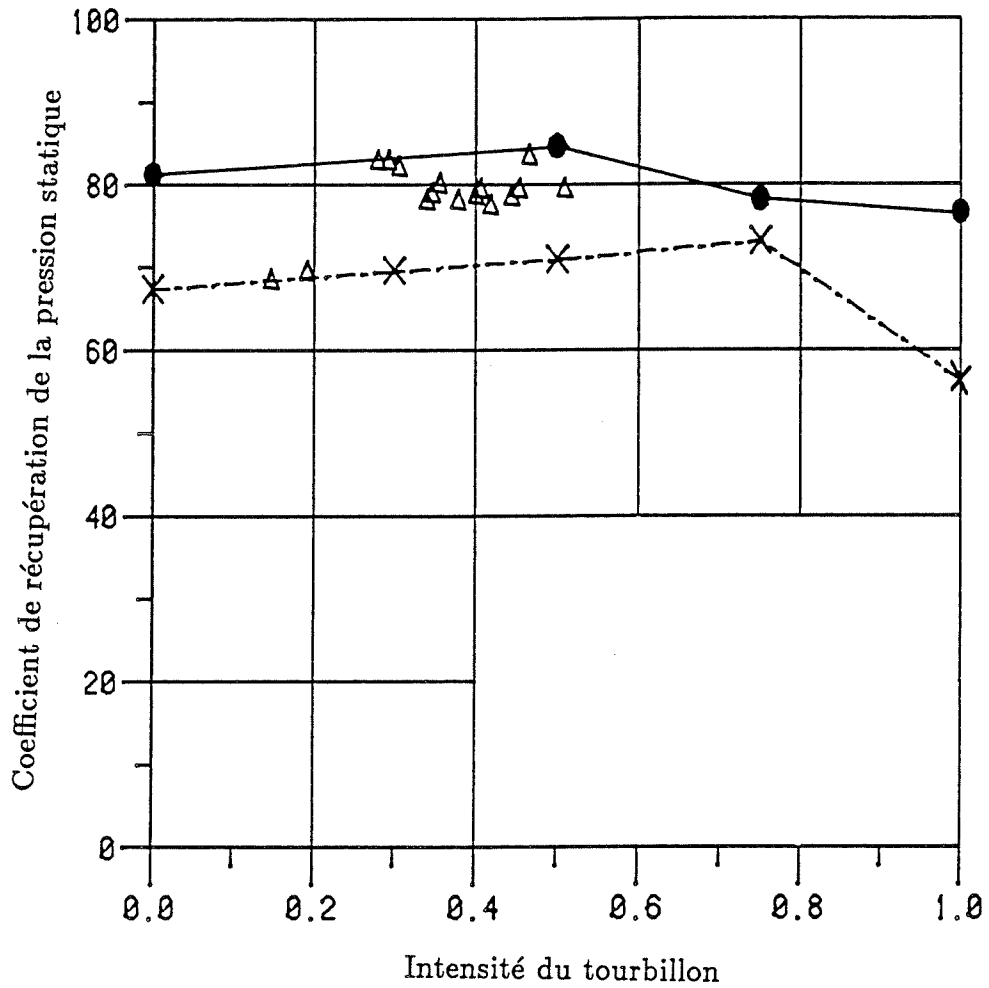


Figure 48: Coefficient de récupération de la pression statique en fonction de l'intensité du tourbillon: (●) résultats numériques; (×) calcul de Shy et al.(1986); (Δ) mesure de Thi (1988)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00289573 6

AGUOLVUL, VAMHILVU, NEUO

ÉCOLEMENTS IRI DIMENSIONNELS IURBOLENTS

CA  
UP  
R8