УДК 519.2

ФОРМИРОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ ТРАЕКТОРИЙ

А.В. ОВСЯННИКОВ, В.М. КОЗЕЛ

Белорусский государственный университет
пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 20 июня 2016

Приведены необходимые теоретические сведения для формирования и моделирования стохастических процессов с заданными свойствами траекторий. Эти свойства включают: прохождение траектории процесса через заданные контрольные точки, формирование статистики процесса с учетом заданной стационарной плотности вероятности, определение параметров процесса исходя из заданной средней длины траектории.

Ключевые слова: стохастический процесс, траектория, формирование, заданные свойства, стационарная плотность вероятности.

Введение

Постоянный интерес к тематике формирования и моделирования стохастических процессов (СП) с заданными характеристиками обусловлен прикладной направленностью работ в этом направлении. В частности, теоретические результаты могут использоваться при разработке алгоритмов функционирования генераторов стохастичности, генерировании помех при тестировании каналов связи, моделировании нестационарных СП систем случайной структуры [1], разработке алгоритмов управления подвижными объектами и моделировании их траекторий и т.д.

В непрерывной форме формирование и моделирование СП осуществляется на основе стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) первого порядка [2–4]. Это позволяет исследовать СП $\xi_t = \xi(t)$ на интервале времени $t \in [0, T]$ с заданными корреляционными функциями (спектральными плотностями) и стационарными плотностями вероятностей $f(\xi)$. Для скалярных и векторных марковских СП снос $a_t(\xi_t) = a(t, \xi_t)$ и диффузия $b_t(\xi_t) = b(t, \xi_t)$ полностью определяют их статистику. В свою очередь, характеристики сноса и диффузии однозначно определяют решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова, т.е. нестационарную плотность $f(t, \xi)$ СП. В случае граничных условий нулевого потока [5], независимости сноса и диффузии от времени стационарная плотность вероятности $f(\xi)$ связана с ними обыкновенным линейным дифференциальным уравнением следующего вида $d\ln f(\xi)/d\xi = -\left[2a(\xi)/b(\xi) + 0{,}5 d\ln b(\xi)/d\xi\right]$. Следовательно, задавая конкретный вид стационарной плотности $f(\xi)$ нетрудно получить семейства функций $a(\xi)$, $b(\xi)$ и, соответственно, найти параметры СДУ [3, 6].

Значительный интерес, с практической точки зрения, представляет исследование управляемых СП [7–9]. Этот интерес обусловлен возможностью получения СП не только с заданными статистическими свойствами, но и с заданными параметрами траектории. Например, к таким параметрам можно отнести прохождение траектории СП через заданные координаты $\{t_j, \xi_{tj}\}$, $j=\overline{1,n}$ (контрольные точки или отрезки) и среднюю длину траектории СП за время *T*. Для решения такой задачи в статье предлагается методика формирования СП на основе управляемых СП, описываемых СДУ с заданными статистическими свойствами. Однако, в отличие от классической задачи нахождения оптимальных функций управления, в статье предполагается, что функции управления являются известными и именно они, вместе со стационарной плотностью $f(\xi)$, определяют заданные свойства траектории СП.

Цель работы – исследование методики формирования СП с заданными свойствами траекторий на основе СДУ с управляемыми параметрами.

Скалярный стохастический процесс с заданными свойствами траектории

Будем рассматривать СП достаточно общего вида

$$\dot{\xi}_t + u_t a_t(\xi_t - v_t) = g n_t,\ \xi(t_0)=\xi_0,\ \dot{\xi}_t = d\xi_t / dt, \tag{1}$$

где $a_t(x_t)$ – функция, такая, для которой при $t \ge 0$ имеем $\int_0^t a_s(x_s)^2 ds < \infty$, причем, $\lim_{\tau\to 0} E\tau^{-1}|\xi_t - \xi_{t-\tau}| = a_t(x_t)$ – коэффициент сноса, $\lim_{\tau\to 0} E\tau^{-1}(\xi_t - \xi_{t-\tau})^2{}_t = b$ – коэффициент диффузии, $g = \mathrm{const} > 0$, $b = g^2/2$, $u_t > 0$ – модулирующая функция, определяющая профиль СП, его прохождение через контрольные точки (или временные отрезки), v_t – функция, задающая значения процесса в контрольных точках $\{t_j, \xi_{tj} = v_{tj}\}$, $j=\overline{1,n}$, $n_t = dw_t/dt$, w_t – винеровский процесс с $Ew_t = 0$, $Ew_t^2 = t$ и $w_0 = 0$.

Остановимся подробнее на функциях u_t и v_t. Это функции управления траекторией СП. Функция управления u_t решает задачу управления траекторией СП на достаточно длинном временном интервале. В случае $u_t = 1$ и $v_t = 0$ траектория СП совпадает с базовой траекторией

$$\dot{\xi}_t + a_t(\xi_t) = g n_t,\ \xi(t_0) = \xi_0. \tag{2}$$

В случае большого численного значения функции u_t, т.е. $u_t >> 1$ или $u_t \to \infty$ уравнение (1) превращается в нелинейное решающее правило

$$a_t(\xi_t - v_t) = 0 \tag{3}$$

и если при этом иметь ввиду условие $a_t(0)=0$, то траектория СП соответствует уравнению

$$\xi_t = v_t, \tag{4}$$

то есть становится детерминированной, идентичной функции управления v_t на протяжении некоторого временного отрезка.

Проанализируем другие возможные значения функций управления. Они должны выбираться с учетом конкретной практической задачи. Кроме того, необходимо учесть тот факт, что случай $u_t \to \infty$ в реальных задачах недостижим, поскольку всегда имеет место ограничение на управление $u_t \le U$. Поэтому уравнения (3), (4) имеют предельный характер.

Определим условия и характеристики точности достижения предельных условий (3), (4). Введем в рассмотрение случайную величину $\varsigma_t = (g n_t - \dot{\xi}_t)/U$. Математическое ожидание и дисперсия этой величины равны

$$M_\varsigma = E a_t(x_t)/U, \tag{5}$$

$$D_\varsigma = \left[E a_t(x_t)^2 + \left[E a_t(x_t)\right]^2 \right] / U^2, \tag{6}$$

где $x_t = \xi_t - v_t$. В формулах (5), (6) учтено, что должно выполняться $E a_t(\xi_t) = 0$. Например, если $a_t(\xi_t - v_t) = \mu(\xi_t - v_t)$, что соответствует линейному СДУ, получим согласно (5), (6):

$$M_\varsigma = \mu v_t / U,\ D_\varsigma = \left[D_\xi + 2 v_t^2 \right] \mu^2 / U^2, \tag{7}$$

где дисперсия СП имеет известный вид [5]: $D_\xi = \sigma^2(1 - e^{-2\mu t})$, $\sigma^2 = b/2\mu$. Математическое ожидание СП определяется уравнением, зависящем от функции управления

$dM_\xi / dt = -\mu(M_\xi - v_t)$, $M_\xi(t=0) = m_0$.

Таким образом, все параметры, определяющие характеристики СП, в этом простейшем случае определены. Анализ полученного результата показывает, что условие (3) выполняется с точностью, определяемой уравнениями (7). Следовательно, в контрольной точке (на контрольном отрезке) необходимо обеспечение условий $M_\varsigma = \mu v_t / U << 1$ и $D_\varsigma = \left[D_\xi + 2v_t^2\right]\mu^2 / U^2 << 1$, которые легко могут быть выполнены заданием соответствующих значений μ, v_t, U. Рассмотренный пример позволяет высказать ряд соображений по поводу выбора этих параметров. Во-первых, величина U должна выбираться так, чтобы заведомо выполнялись условия $M_\varsigma \to 0$ и $D_\varsigma \to 0$. Во-вторых, при наличии набора значений контрольных точек (отрезков) $\{v_{tj}\}$, $j = \overline{1,n}$, функция u_t также будет являться периодической со следующими значениями: $u_t = 1$, $\{u_{tj} = U\}$. В-третьих, если везде кроме контрольных точек (отрезков) имеет место равенство $v_t = 0$ и лишь в моменты времени t_j функция $v_{tj} \neq 0$, то СП (1) будет представлять собой процесс переменной структуры с сосредоточенными переходами. В-четвертых, если установить функциональную связь между контрольными точками (отрезками) $\{v_{tj}\}$ и достижением СП некоторых фиксированных границ $\{\xi_{tj} = \Xi_j\}$, то СП (1) также будет являться процессом переменной структуры с сосредоточенными переходами.

Проведем оценку длины траектории СП (1) до первой контрольной точки. Пусть задан временной интервал до нее $[0,T]$. Длина траектории функции ξ_t определяется известной формулой $S = \int_0^T \sqrt{1+\dot{\xi}_t^2}\,dt$, которую для СП заменим ее оценкой, полученной усреднением квадрата производной СП

$$S_\xi^* = \int_0^T \sqrt{1+E\dot{\xi}_t^2}\,dt = \int_0^T \sqrt{1+u_t^2 E a_t(\xi_t - v_t)^2}\,dt \,. \tag{8}$$

Например, для рассмотренного ранее примера с функцией $a_t(\xi_t - v_t) = \mu(\xi_t - v_t)$ и $u_t = 1$ получим $S_\xi^* = \int_0^T \sqrt{1+\mu^2(D_\xi + v_t^2)}\,dt$, где дисперсия D_ξ для этого случая была определена ранее. Таким образом, установлена связь между длиной траектории и временем достижения первой контрольной точки. Если $v_t = 0$ на всем интервале $[0,T)$, кроме точки $t = T$, в которой $v_t = v_T$ и $D_\xi \approx \sigma^2$, получаем простое выражение $S_\xi^* = TV_\xi^*$, где $V_\xi^* = \sqrt{1+\mu^2\sigma^2}$ – средняя скорость на траектории.

Следовательно, в этом простейшем случае, в явном виде, можно решать различные оптимизационные задачи, связанные с определением требуемых соотношений между параметрами СП (b, μ), временем достижения контрольной точки T и средней длиной траектории S_ξ^*. Кроме того, если $a_t(x_t) = a(x_t)$ и $v_t = 0$ на всем интервале $[0,T)$ кроме момента времени $t = T$, в котором $v_t = v_T$, то справедливо равенство [5]:

$$a(\xi) = -(b/2)d\ln f(\xi)/d\xi, \tag{9}$$

где $f(\xi)$ – стационарная плотность вероятности СП (1). Обозначим $I_f = E\left[d\ln f(\xi)/d\xi\right]^2$, где величина I_f ($0 < I_f < \infty$) определяет информацию Фишера относительно параметра сдвига θ (постоянная скалярная величина) в стационарной плотности $f(\xi - \theta)$: $I_f = I(\theta = 0)$, $I(\theta) = E\left[d\ln f(\xi-\theta)/d\theta\right]^2$. Тогда из (8) получим

$$S_\xi^* = T\sqrt{1+u_t^2 I_f (b/2)^2} \,. \tag{10}$$

Формула (9) указывает на возможность формирования СП не только с выходом траектории в заданную контрольную точку, но и имеющим заданный вид одномерной стационарной плотности $f(\xi)$, т.е. определенную статистику, характеризующую динамические свойства траектории.

На рис. 1 представлен СП (1) с выходом в заданную контрольную точку с параметрами $a_t(x_t)=\mu(\xi_t-v_t)$, $v_t=\{0\le t\le T, v_t=vt;\ t\ge T, v_t=v_T\}$, $u_t=\{0\le t\le T, u_t=1;\ t\ge T, u_t=u_T=U\}$. При этих параметрах математическое ожидание СП $M_\xi(0\le t\le T)=m_0e^{-\mu t}+vt-(v/\mu)(1-e^{-\mu t})$, а на контрольном отрезке при величине $T>>1$: $M_\xi(t\ge T)=vT=v_T$. Участок СП при $t\ge T$ соответствует его нахождению в заданной контрольной точке v_T с точностью, определяемой уравнениями (7). Плотность $f(\xi)$ в данном примере соответствует гауссовской $f(\xi)=(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\left[-\xi^2/2\sigma^2\right]$.

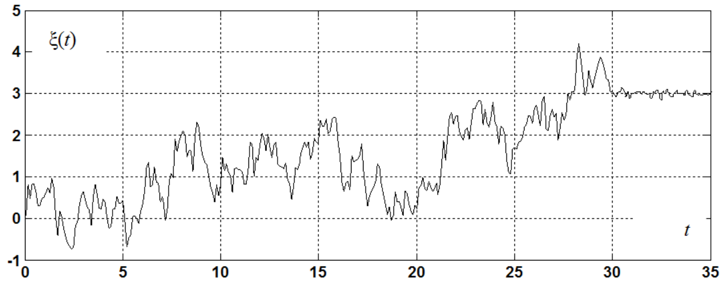

Рис. 1. Стохастический процесс с выходом в заданную контрольную точку:
$T=30$ с; $v_T=3$; $u_T=U=50$; $\mu=1$, $b=2$

Рассмотрим задачу формирования траектории СП с прохождением множества контрольных точек (отрезков). Пусть на интервале $[0,T]$ заданы контрольные точки $\{v_{tj}\}$, $j=\overline{1,n}$ через которые должен пройти СП, заданный СДУ (1). В этом случае, остаются справедливыми полученные ранее выражения (2)–(10), которые теперь будут записываться для множества временных отрезков СП от одной контрольной точки до другой $\Delta T_j=\{T_{j-1},T_j\}$, $j=\overline{1,n}$, $T_0=0$. Математическое ожидание СП будет определяться уравнением, зависящем от функций управления $\{v_{tj}\}$ на временных отрезках $\{T_{j-1},T_j\}$: $dM_{\xi j}/dt=-a_t(M_{\xi j}-v_{tj})$, где $M_{\xi j}(t=T_j)=m_{j-1}$, $j=\overline{1,n}$.

Условия и характеристики точности достижения условий (3) и (4), в этом случае, аналогичны приведенным ранее выражениям (5)–(6). При наличии на траектории СП нескольких контрольных точек для вычисления оценки средней длины траектории (8) следует просуммировать все длины частичных траекторий по $j=\overline{1,n}$: $S^*_\Sigma=\sum_j S^*_{\xi j}$.

В качестве примера на рис. 2 приведен СП с $a_t(x_t)=\mu(\xi_t-v_t)$ и прохождением траекторией контрольных точек: $T=[30;60;90]$ с, $v_T=[15;3;12]$. Функция v_t на участках ΔT_j имеет разные коэффициенты наклона $v_t=\{v_jt, t\notin T_j;\ v_{Tj}, t\in T_j\}$, согласованные с контрольными точками. Функция u_t имеет периодический характер $u_t=\{u_t=1, t\notin T_j;\ u_t=U, t\in T_j\}$. В этом примере стационарная плотность СП $f(\xi)=(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\left[-\xi^2/2\sigma^2\right]$.

На рис. 3 приведен аналогичный рис. 2 (кривая 2) СП с параметрами $a_t(x_t)=\mu(\xi_t-v_t)$ и прохождением траекторией контрольных точек: $T=[30;60;90]$ с, $v_T=[15;3;12]$. Однако в этом случае траектория СП имеет контрольные отрезки, на которых СП фиксирует значения $v_T=[15;3;12]$. Длительность контрольных участков Δ_{Tj} определяется длительностью импульса функции $u_t=\{u_t=1, t\notin\Delta_{Tj};\ u_t=U, t\in\Delta_{Tj}\}$ и функцией $v_t=\{v_jt, t\notin\Delta_{Tj};\ U, t\in\Delta_{Tj}\}$ (кривая 1, рис. 3). Следует отметить, предлагаемый подход, согласно формуле (9), позволяет не только формировать СП с заданной одномерной стационарной плотностью на всем интервале времени T, но и, используя функцию $a_j(\xi) = -(b/2)d\ln f_j(\xi)/d\xi$, формировать комбинированный СП с различными одномерными плотностями $f_j(\xi)$ на участках ΔT_j.

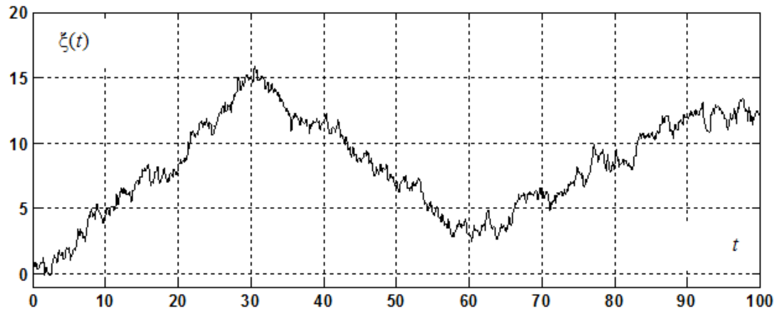

Рис. 2. Стохастический процесс с прохождением заданных контрольных точек: $u_T = U = 1000$; $\mu = 1$, $b = 2$

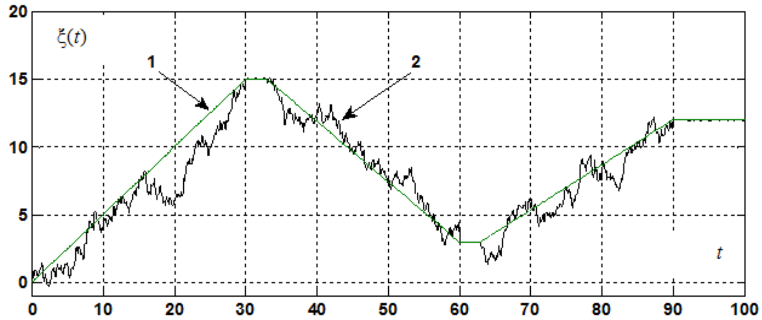

Рис. 3. Стохастический процесс с выходом в заданные контрольные точки: $u_T = U = 400$; $\mu = 0,4$, $b = 2$

Двумерный стохастический процесс с заданными свойствами траектории

Рассмотрим СП, образующийся двумя компонентами $[x_t, y_t]$, следующего вида

$$\begin{cases} \dot{x}_t + u_{tx}a_{tx}(x_t - v_{tx}) = g_x n_{tx}, & x(t_0) = x_0, \\ \dot{y}_t + u_{ty}a_{ty}(y_t - v_{ty}) = g_y n_{ty}, & y(t_0) = y_0, \end{cases} , \tag{11}$$

где входящие в уравнения функции a_t, переменные n_t и постоянные g имеют тот же смысл, что и в (1). Кроме того, как указывалось ранее, функции a_t определяются заданными одномерными плотностями $f(x)$, $f(y)$. Управляющие функции u_t, v_t реализуют заданный профиль траектории СП с проходом заданных контрольных точек. Точность приближения СП к контрольной точке определяется уравнениями (5), (6).

Оценка длины траектории СП с учетом усреднения квадратов производных имеет вид

$$S^* = \int_0^T \sqrt{E\dot{x}_t^2 + E\dot{y}_t^2}\,dt = \int_0^T \sqrt{u_{tx}^2 Ea_{tx}^2 + u_{ty}^2 Ea_{ty}^2}\,dt . \tag{12}$$

При наличии на траектории СП нескольких контрольных точек следует просуммировать все длины траекторий по $j = \overline{1,n}$: $S_\Sigma^* = \sum_j S_j^*$.

На рис. 4 приведен пример СП заданного уравнениями (11). СП имеет следующие параметры компонент $a_{tx} = \mu_x(x_t - v_{tx})$, $a_{ty} = \mu_y(y_t - v_{ty})$, $\mu_x = \mu_y$. Контрольные точки, через которые должна проходить траектория СП $T_j = \{40;80;120;160;200\}$ с, $\Delta T_j = 40$ с. Функции управления v_{tx}, v_{ty}, определяющие профиль траектории двумерного СП, задаются участками ломаных кривых $v_t = \{v_j t, t \notin T_j;\ v_{Tj}, t \in T_j\}$, с соответствующими коэффициентами $v_{xj} = \{0;3/8;0;3/8;0\}$, $v_{yj} = \{3/8;-3/8;3/8;0;-3/8\}$. Модулирующие функции u_{tx}, u_{ty} также задаются для каждого временного интервала $u_{xj}=\{0,t\in[\Delta T_1,\Delta T_2,\Delta T_3,\Delta T_5];U,t\in\Delta T_4\}$, $u_{yj}=\{0,t\in[\Delta T_1,\Delta T_3,\Delta T_5];U,t\in[\Delta T_2,\Delta T_4]\}$. Одномерные плотности вероятности в данном примере одинаковы $f(x)=f(y)=f(\xi)=(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\left[-\xi^2/2\sigma^2\right]$.

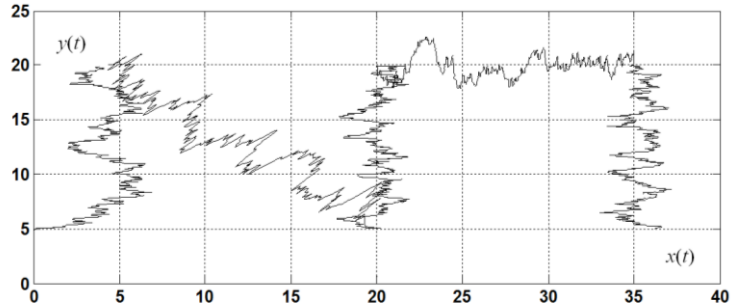

Рис. 4. Двумерный стохастический процесс с заданным профилем траектории:
$u_T=U=500$; $\mu_x=\mu_y=0,4$, $b_x=b_y=2$

Заключение

Рассмотрена методика формирования одномерных и двумерных СП с заданными свойствами траекторий. Эти свойства включают: прохождение траектории через заданные контрольные точки (участки), формирование процесса по заданной стационарной плотности, определение параметров СП исходя из заданной длины траектории и длительности ее прохождения. Результаты моделирования подтверждают применимость предложенной методики при разработке алгоритмов функционирования генераторов СП, формировании законов управления подвижными объектами с заданными свойствами траектории.

FORMING AND SIMULATION OF STOCHASTIC PROCESSES WITH DESIRED PROPERTIES OF TRAJECTORIES

A.V. AUSIANNIKAU, V.M. KOZEL

Abstract

The necessary theoretical knowledge for the creation and simulation of stochastic processes with desired properties of trajectories is shown. These properties include: passage of the trajectory through a set process milestones (areas), the formation of the dynamics of the process in view of a given stationary probability density, determination of process parameters on the basis of a predetermined length and duration of the trajectory.

Keywords: stochastic process, trajectory, formation, specified properties, stationary probability density.

Список литературы

1. *Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.* Анализ систем случайной структуры. М., 1993.
2. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб, 2010.
3. *Кловский Д.Д., Конторович В.Я., Широков С.М.* Модели непрерывных каналов связи на основе стохастических дифференциальных уравнений / Под ред. Д.Д. Кловского. М., 1984.
4. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М., 1974.
5. *Тихонов В.И., Мионов М.А.* Марковские процессы. М., 1977.
6. *Овсянников А.В.* // Труды БГТУ. Сер. физ.-мат. наук и информ. Вып. X. 2002. С. 133–136.
7. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Управляемые случайные процессы. Киев, 1977.
8. *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М., 1977.
9. *Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А.* Управляемые марковские процессы и их приложения. М., 1975.