УДК 519.2

ФОРМИРОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ

А.В. ОВСЯННИКОВ[1], В.М. КОЗЕЛ[2]

[1]*Белорусский государственный университет, Республика Беларусь*

[2]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Республика Беларусь*

Поступила в редакцию 6 мая 2017

Аннотация. В работе рассмотрена методика формирования стохастических траекторий многомерных динамических систем с заданными свойствами, реализуемыми с использованием стохастических дифференциальных уравнений. Методика позволяет решать оптимизационные задачи связывающие параметры стохастичности траектории с параметрами системы. Результаты моделирования подтверждают применимость предложенной методики.

Ключевые слова: многомерная динамическая система, стохастическая траектория, заданные свойства, контрольные точки и области, стационарная плотность вероятности.

Abstract. The paper considers the method of forming the stochastic trajectories of multidimensional dynamical systems with desired properties. Projections phase variables on the coordinate axis of the n-dimensional hyperspace representing systems of stochastic differential equations. The proposed method allows to solve optimization problems binding parameters of stochastic trajectory with its average length and time of its passage.

Keywords: multidimensional dynamical system, stochastic trajectory, given properties, control points and regions, stationary probability density.

Doklady BGUIR. 2017, Vol. 107, No. 5, pp. 70-76
Formation and modeling of stochastic trajectories of multidimensional dynamic systems with assigned properties
A.V. Ausiannikau, V.M. Kozel

Введение

Формирование и моделирование траекторий многомерных динамических систем (МДС) с заданными свойствами является актуальной задачей, имеющей прикладную направленность. В частности, теоретические и прикладные результаты могут использоваться при построении алгоритмов управления подвижными физическими объектами [1, 2], находящимися под воздействием стохастических внешних возмущений, или, напротив, когда цель управления – создание стохастической траектории с требуемыми характеристиками. В производственной, финансово-экономической, социальной, образовательной и др. сферах зачастую возникают задачи, связанные с формированием траекторий заданной направленности, проходящих через некоторые заранее заданные точки (области) фазового пространства.

Математическое представление МДС в непрерывной форме осуществляется в виде систем стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) [3, 4]. Такие системы СДУ описывают многомерный стохастический процесс (МСП) $\xi_t = \{\xi_{ti}\}$, $i = \overline{1,n}$ на интервале времени $t \in [t_0, T]$ с заданными корреляционными функциями (спектральными плотностями) и стационарными плотностями вероятности $f(\xi_i)$. Известно, что для марковских процессов снос $a_t(\xi_{ti})$ и диффузия $b_t(\xi_{ti})$ полностью определяют их статистику, а именно: решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова дает нестационарную плотность $f(t,\xi_i)$. В случае граничных условий нулевого потока [5], независимости сноса и диффузии от времени плотность $f(\xi_i)$ связана с ними дифференциальным уравнением $d\ln f(\xi_i)/d\xi_i = -2a(\xi_i)/b(\xi_i) - d\ln b(\xi_i)/d\xi_i$. Следовательно, задавая конкретный вид стационарной плотности $f(\xi_i)$, нетрудно получать семейства функций $a(\xi_i)$, $b(\xi_i)$ и, соответственно, находить параметры СДУ [3, 6], отвечающего заданным требованиям.

В данной работе предложенная в [7] методика распространена на общий случай формирования траекторий МДС не только с заданными статистическими свойствами, но и с заданными параметрами траектории. К таким параметрам относятся: прохождение траектории через заданные координаты многомерного пространства ξ_j, $j=\overline{1,m}$ (контрольные точки); средняя длина траектории за время *T*. В отличие от одномерного случая для МДС могут возникать дополнительные условия, например, разрешение стохастического движения только в прямом направлении некоторой базовой траектории $\mathbf{V}_t$. Следует подчеркнуть, в отличие от управляемых стохастических процессов в данной работе рассматриваются процессы с заранее заданными свойствами траекторий, которые не изменяются в процессе движения МДС по ним.

Цель работы состоит в исследовании методики формирования МСП с заданными статистическими свойствами и параметрами траекторий на основе СДУ.

Формирование многомерного стохастического процесса с заданными свойствами

Будем рассматривать МСП $\xi_t = \{\xi_{ti}\}$, $i=\overline{1,n}$, заданный векторно-матричным СДУ

$\dot{\xi}_t + \mathbf{A}(\xi_t) = \mathbf{G}\mathbf{N}_t$, $\xi(t_0)=\xi_0$, $\dot{\xi}_t = d\xi_t/dt$, (1)

где $\mathbf{A} = [a_i(\xi_{ti})]$ – вектор-столбец $n\times 1$, содержащий нечетные функции с $a_i(0)=0$, для которых при $t\ge 0$ справедливо $\int_0^t a_i^2 ds < \infty$, причем $\lim\limits_{\tau\to 0} E\tau^{-1}\left|\xi_{t,i} - \xi_{t-\tau,i}\right| = a_i$ – коэффициент сноса; $\mathbf{G}$ – матрица $n\times k$ постоянных положительных коэффициентов; $\mathbf{B}=\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ – матрица коэффициентов диффузии; $\mathbf{N}_t$ – вектор-столбец $n\times 1$, являющийся производной по времени от винеровского процесса и представляющий собой белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $E\mathbf{N}_t\mathbf{N}_{t+\tau} = \mathbf{I}\delta(\tau)$, $\mathbf{I}$ – единичная матрица $n\times n$; $E(.)$ – операция усреднения по множеству реализаций.

Для формирования траекторий МДС с заданными свойствами модифицируем СДУ (1):

$\dot{\xi}_t + \mathbf{U}_t\mathbf{A}(\xi_t - \mathbf{V}_t) = \mathbf{G}\mathbf{N}_t$. (2)

Здесь $\mathbf{U}_t$ и $\mathbf{V}_t$ – векторно-матричные функции управления траекторией МДС. Матрица $\mathbf{U}_t$, размерностью $n\times n$, модулирующих детерминированных неотрицательных функций определяет профиль траектории МДС. Векторная функция $\mathbf{V}_t$ размером $n\times 1$ задает базовую траекторию МДС таким образом, чтобы обеспечить ее прохождение через заданные контрольные координаты $\xi_{tj} = \mathbf{V}_{tj}$, $j=\overline{1,m}$. Функция управления $\mathbf{U}_t$ решает задачу маскирования базовой траектории $\mathbf{V}_t$ стохастическим процессом на достаточно длинном временном интервале и только при приближении к контрольным точкам обеспечивает выполнение равенства $\xi_{tj} = \mathbf{V}_{tj}$. Например, в случае $\mathbf{U}_t = \mathbf{I}$ и нулевого вектора $\mathbf{V}_t$ траектория МДС совпадает с траекторией (1). Если же $\mathbf{U}_t = 0$, то МСП является чисто диффузионным *n*-мерным процессом. Очевидно, функции, входящие в матрицу $\mathbf{U}_t$, и вектор $\mathbf{V}_t$ должны быть «синхронизированы» по времени.

Далее будем рассматривать случай, когда все элементы матриц $\mathbf{U}_t$, $\mathbf{G}$, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, т. е. $\mathbf{U}_t = \mathrm{diag}[u_{ti}]$, $\mathbf{G} = \mathrm{diag}[g_i]$, $g_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Также будем полагать, что имеет место ограничение

$$0 \le \mathbf{U}_t \le \mathbf{U}_{\max}, \ \mathbf{U}_{\max} = \mathrm{diag}[u_{\max i}]. \tag{3}$$

В случае больших численных значений $\mathbf{U}_{\max}$ уравнение (2) преобразуется в нелинейное решающее правило

$$\mathbf{A}(\xi_t - \mathbf{V}_t) = 0, \tag{4}$$

и если при этом иметь в виду условие $\mathbf{A}(0) = 0$, то траектория МДС соответствует уравнению

$$\xi_t = \mathbf{V}_t, \tag{5}$$

т. е. становится детерминированной, идентичной векторной функции управления $\mathbf{V}_t$ на протяжении заданного временного отрезка.

Определим условия и характеристики точности достижения предельных условий (4), (5). Введем в рассмотрение случайный вектор $\varsigma_t = \mathbf{U}_t^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{N}_t - \dot{\xi}_t) = \mathbf{A}$, где обозначено $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_t)$, $\mathbf{x}_t = \xi_t - \mathbf{V}_t$. Математическое ожидание и дисперсия вектора ς_t в силу асимптотической нормальности (следует из того, что каждый элемент вектора $\mathbf{A}$ представляет собой функцию $a(x) = -(b/2)\partial \ln f(x)/\partial x$ равны

$$\mathbf{M}_\varsigma = E\mathbf{A} \to 0, \tag{6}$$

$$\mathbf{D}_\varsigma = E\mathbf{A}\mathbf{A}^T - E\mathbf{A}E\mathbf{A}^T \to (1/4)\mathbf{B}\mathbf{I}_f\mathbf{B}^T, \tag{7}$$

где $\mathbf{I}_f = E(\partial \ln f(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x})(\partial \ln f(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x})^T$ – информационная матрица Фишера. Скорость, с которой достигаются предельные значения в (6) и (7), зависит от постоянной времени уравнения (2). Эта постоянная обратно пропорциональна $\mathbf{U}_t$, т.е. $\tau_{\xi u} \sim \mathbf{U}_t^{-1}$. Следовательно, в силу неравенства (3) имеет место $\tau_{u\max} \le \tau_{ut}$.

Рассмотрим пример. В линейном приближении $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}(0) + \mathbf{A}'(0)(\xi_t - \mathbf{V}_t)$ получаем

$$\mathbf{M}_\varsigma = \mathbf{A}'(0)(E\xi_t - \mathbf{V}_t), \tag{8}$$

$$\mathbf{D}_\varsigma = \mathbf{A}'(0)[E\xi_t\xi_t^T - E\xi_t E\xi_t^T[\mathbf{A}'(0)^T. \tag{9}$$

Математическое ожидание МСП $\mathbf{M}_\xi = E\xi_t$ и дисперсия $\mathbf{D}_\xi = E\xi_t\xi_t^T$ определяются уравнениями, зависящими от векторно-матричных функций управления:

$$\dot{\mathbf{M}}_\xi = -\mathbf{U}_t\mathbf{A}'(0)(\mathbf{M}_\xi - \mathbf{V}_t), \ \mathbf{M}_\xi(t=0) = \mathbf{m}_0,$$

$$\dot{\mathbf{D}}_\xi = -2\mathbf{D}_\xi\mathbf{U}_t\mathbf{A}'(0)\mathbf{V}_t + \mathbf{B}, \ \mathbf{D}_\xi(t=0) = \mathbf{d}_0,$$

где $\mathbf{m}_0$ – вектор столбец $n \times 1$ и $\mathbf{d}_0$ – матрица $n \times n$ начальных условий. Полученные выражения буду точными, если МСП описывается линейным СДУ с вектором $\mathbf{A} = \boldsymbol{\mu}(\xi_t - \mathbf{V}_t)$, $\boldsymbol{\mu} = \mathrm{diag}[\mu_i]$ – матрица постоянных положительных коэффициентов $n \times n$. Таким образом, все параметры, определяющие характеристики МСП, в этом простейшем случае определены.

Задача формирования траектории МДС с прохождением множества контрольных точек (областей n-мерного пространства) решается аналогично. Приведенные ранее выражения (2)–(9) теперь будут записываться для множества временных отрезков: от одной контрольной точки до другой. При этом необходимо обеспечение согласования начальных и конечных условий для каждого участка траектории.

Анализ полученных результатов показывает, что условия (4), (5) выполняются с точностью, определяемой уравнениями (6), (7). Следовательно, в контрольной точке (области) необходимо обеспечение условий $\mathbf{M}_\varsigma \to 0$ и $\mathbf{D}_\varsigma \to (1/4)\mathbf{B}\mathbf{I}_f\mathbf{B}^T$, которые легко могут быть выполнены заданием соответствующих значений параметров векторно-матричных функций $\mathbf{V}_t$, $\mathbf{U}_{\max}$. Рассмотренный выше пример позволяет высказать ряд соображений по поводу их выбора.

Во-первых, как отмечалось ранее, функции, входящие в матрицу $\mathbf{U}_t$, и вектор $\mathbf{V}_t$ должны быть «синхронизированы» по времени. Это означает, что при наличии набора значений контрольных точек (областей) $\{\mathbf{V}_{tj}\}$, $j=\overline{1,m}$, функции, входящие в матрицу $\mathbf{U}_t$, должны подчиняться условию $\mathbf{U}_{tj}=\mathbf{U}_{\max}$, причем для значений $t \neq t_j$ эти функции могут быть произвольными, такими, чтобы выполнялось $0 \le \mathbf{U}_t < \mathbf{U}_{\max}$. Заметим, если на интервале $t \neq t_j$ обеспечивается $\mathbf{U}_t = 0$, то имеем чисто диффузионный МСП ξ_t.

Во-вторых, если везде кроме контрольных точек (областей) имеет место равенство $\mathbf{V}_t = 0$ и лишь в моменты времени t_j обеспечивается $\xi_{tj} = \mathbf{V}_{tj}$, то МСП (2) будет представлять собой процесс переменной структуры с сосредоточенными переходами [8]. То же будет иметь место, если установить функциональную связь между контрольными точками $\mathbf{V}_{tj}$ и достижением МСП некоторых фиксированных границ.

В-третьих, для упрощения формирования сложных траекторий (аналитическая трудность задания необходимых для этого функций v_{ti}, u_{ti}), их можно заменить приближенной кусочно-линейной аппроксимацией: функции v_{ti} могут быть выбраны в виде линейных зависимостей $v_{ti}^j = \alpha_i^j + \beta_i^j t$.

В-четвертых, в качестве требований к траектории МДС о прохождении заданных контрольных точек могут рассматриваться требования ее попадания в заданные области n-мерного пространства, например, такие как $\boldsymbol{\xi}_{j\min} \le \boldsymbol{\xi}_j \le \boldsymbol{\xi}_{j\max}$.

Вычислим среднюю длину траектории МСП. Пусть задан временной интервал до первой контрольной точки $[0,T]$. Длина траектории процесса ξ_t определяется оценкой, полученной усреднением квадрата производной МСП по всем координатам $S_\xi^* = E\int_0^T \sqrt{\dot{\xi}_t^T \dot{\xi}_t}\,dt$.

Верхняя граница средней длины

$$S_\xi^* \le S_{\xi\max}^* = \int_0^T \sqrt{E\dot{\xi}_t^T \dot{\xi}_t}\,dt = \int_0^T \sqrt{E(\mathbf{A}^T \mathbf{U}_t^T \mathbf{U}_t \mathbf{A} + \mathbf{N}^T \mathbf{B} \mathbf{N})}\,dt\,. \tag{10}$$

Нижняя граница длины стохастической траектории, очевидно, совпадает с длиной базовой траектории $S_{\xi\min} = \int_0^T \sqrt{\dot{\mathbf{V}}_t^T \dot{\mathbf{V}}_t}\,dt \le S_\xi^* \le S_{\xi\max}^*$ при $\mathbf{U}_t = \mathbf{U}_{\max} \to \infty$. В отсутствии шума вектор $\xi_t = \mathbf{m}_t$ определяется решением уравнения $\dot{\mathbf{m}}_t + \mathbf{U}_t \mathbf{A}(\mathbf{m}_t - \mathbf{V}_t) = 0$ и, следовательно, длина траектории удовлетворяет неравенству $S_{\xi\min} \le \int_0^T \sqrt{\dot{\mathbf{m}}_t^T \dot{\mathbf{m}}_t}\,dt \le S_\xi^* \le S_{\xi\max}^*$.

Например, для рассмотренного ранее примера с вектором $\mathbf{A} = \boldsymbol{\mu}(\xi_t - \mathbf{V}_t)$ получим следующее выражение: $S_{\xi\max}^* = \int_0^T \sqrt{\sum_{i=1}^n [u_{ti}^2 \mu_i^2 E(\xi_{ti} - v_{ti})^2 + b_i\,]}\,dt$. Дальнейшие вычисления можно проводить, задавая конкретный вид функций u_{ti} и v_{ti}. Нижняя граница длины траектории равна $S_{\xi\min} = T\sqrt{\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta}}$, где вектор $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1,...,\beta_n]^T$.

Таким образом, установлена связь между средней длиной траектории и временем достижения первой контрольной точки. Заметим, формулу (10) можно представить с использованием информационного количества Фишера

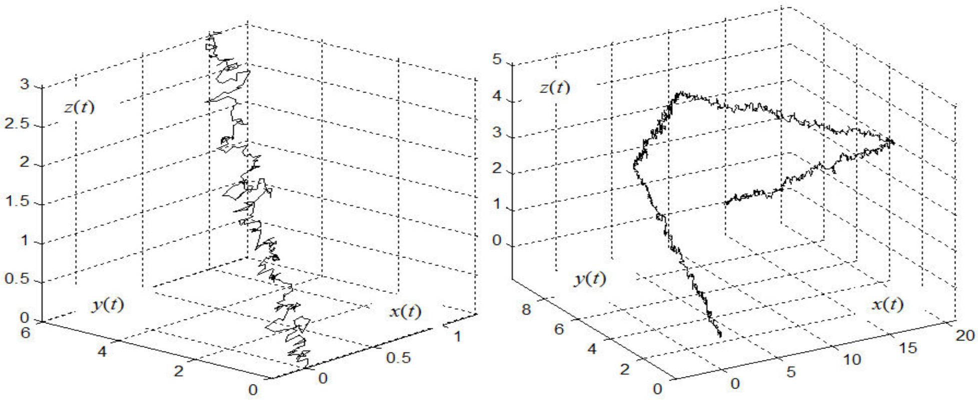
$$S_{\xi\max}^* = \int_0^T \sqrt{\sum_{i=1}^n [u_{ti}^2 b_i^2 I_{fi} / 4 + b_i\,]}\,dt\,. \tag{11}$$

Длина траектории МСП с множеством контрольных точек может быть определена через формулы (10), (11) суммированием по всем участкам траектории: $S_{\xi\max\Sigma}^* = \sum_{j=1}^m S_{\xi\max j}^*$.

Формулы (10), (11) можно использовать для решения различных оптимизационных задач, связанных с определением требуемых соотношений между параметрами траектории, достижением контрольных точек и средней длиной траектории $S^*_{\xi\max}$.

Формула (11) указывает на возможность формирования МСП не только с выходом траектории в заданную контрольную точку, но и имеющим заданный вид одномерных стационарных плотностей $f_i(\xi)$.

На рис. 1 представлены траектории трехкомпонентного стохастического процесса $i=\overline{1,3}$ с одной (рис. 1, *а*) и несколькими контрольными точками (рис. 1, *б*). Моделирование проводилось при следующих условиях: $u_t=\{0\le t\le T, 10(2{,}1+\tanh(10(t-T))-\tanh(10t))\}$. Параметры для рис. 1, *а*: $a_i=\xi_{ti}-v_{ti}$, $v_t=\{0\le t\le T=1c, v_{ti}=v_i t; v_x=1, v_y=6, v_z=3\}$. Для рис. 1, *б* каждый участок траектории формировался с использованием функций $a_i^j=\xi_{ti}^j-v_{ti}^j$, где $v_{ti}^j=\alpha_i^j+\beta_i^j t$ – линейные функции времени. Координаты контрольных точек – $\xi_{t1}=[1,3,6]$, $\xi_{t2}=[8,8,4]$, $\xi_{t3}=[17,1,4]$, $\xi_{t4}=[15,10,0]$. Плотность $f(\xi_i)$ в данном примере соответствует гауссовской $f(\xi)=(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\left[-\xi^2/2\sigma^2\right]$.



а *б*

Рис. 1. Траектория МСП: *а* – с одной контрольной точкой; *б* – с множеством контрольных точек

Рассмотренный способ формирования траектории непосредственно по независимым переменным МСП прост и легко реализуем при компьютерном моделировании. В случае зависимости переменных получение точных аналитических выражений (6)–(11) становится затруднительным, и, следовательно, также затруднена их интерпретация. Еще одна особенность методики состоит в различии длин проекций траектории на оси n-мерного пространства. Это приводит к неравномерности временных отсчетов по координатам $\Delta\xi_{ti}=\xi_{t,i}-\xi_{t-\tau,i}$.

Существенной особенностью рассмотренного способа формирования МСП являются «обратные движения» траектории, т. е. такие, проекции которых на линию нормали траектории в любой ее точке являются отрицательными по отношению к ней (см., например, рис. 1, *а*). Для устранения этой проблемы требуется модификация алгоритма (2). Необходимо, чтобы при любых $t'\ge t$ значения МСП всегда находились в правой части n-мерного пространства, разделенного пространственной плоскостью, перпендикулярной нормали в любой точке траектории.

Формирование пространственной траектории с заданными свойствами и одной зависимой координатой

Один из возможных способов решения указанной выше проблемы «обратных движений» состоит в связывании n–1 независимой переменной детерминированным уравнением, определяющим n-ю. Это уравнение – уравнение плоскости, проходящей через точку траектории. Дальнейшие рассмотрение приведем для трехмерного пространства: $\xi_t=\{x_t,y_t,z_t\}$. Пусть заданы контрольные точки траектории $\{t_j,\xi_{tj}=\mathbf{V}_{tj}\}$ $j=\overline{1,m}$, которые могут быть соединены направляющими прямыми $L_j=\{P_{j-1},P_j\}$, где $P_j=P_j(x_{tj},y_{tj},z_{tj})$, P_0 – начальная точка. В пределах направляющей прямой L_j, соединяющей две контрольные точки в пространстве, формируется двумерный вектор (x_t,y_t), а третья компонента вычисляется из уравнения плоскости, нормальной к базовой траектории в точке $t'\in(t_{j-1},t_j)$,

$$x_t'(t')(x_t-x_{t'})+y_t'(t')(y_t-y_{t'})+z_t'(t')(z_t-z_{t'})=0\,, \tag{12}$$

где $x_t'(t')$, $y_t'(t')$, $z_t'(t')$ – значение производных параметрических функций в точке t'.

Таким образом, уравнения формирования трехмерного стохастического процесса на участке $L_j=\{P_{j-1},P_j\}$ с $t'\in(t_{j-1},t_j)$ имеют вид

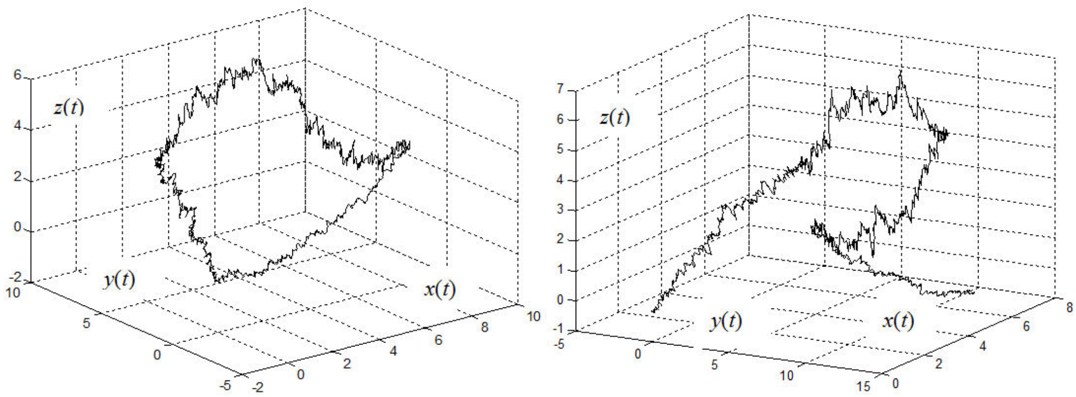
$$\begin{cases}(\dot{x}_t,\dot{y}_t)^T+\mathbf{U}_t\mathbf{A}((x_t-v_{tx},y_t-v_{ty})^T)=\mathbf{GN}_t,\\ z_t=v_{tz}-(\dot{v}_{tx}(x_t-v_{tx})+\dot{v}_{ty}(y_t-v_{ty}))/\dot{v}_{tz},\end{cases} \tag{13}$$

где $\mathbf{U}_t$ и $\mathbf{G}$ – матрицы 2×2 с ненулевыми диагональными элементами; $\mathbf{N}_t$ – вектор-столбец 2×1 былых гауссовских шумов.

Статистика первого уравнения системы (13) определяется уравнениями, приведенными выше. Математическое ожидание переменной z_t, с учетом линейного характера функции v_t, имеет вид $M_z=v_{tz}-(\beta_x(M_x-v_{tx})+\beta_y(M_y-v_{ty}))/\beta_z$.

Длина траектории до первой контрольной точки $t_1=T$: $S^*_{\xi\max}=\int_0^T\sqrt{E\dot{x}_t^2+E\dot{y}_t^2+E\dot{z}_t^2}\,dt$, где $\dot{z}_t=\beta_z-(\beta_x/\beta_z)(\dot{x}_t-\beta_x)-(\beta_y/\beta_z)(\dot{y}_t-\beta_y)$.

На рис. 2 представлен трехкомпонентный стохастический процесс $i=\overline{1,3}$ с замкнутой (рис. 2, *а*) и разомкнутой (рис. 2, *б*) траекторией. Моделирование проводилось при следующих условиях. Каждый участок траектории формировался с использованием функций $a_i^j=\xi_{ti}^j-v_{ti}^j$, где $v_{ti}^j=\alpha_i^j+\beta_i^j t$ – линейные функции времени. Координаты контрольных точек $\xi_{t1}=[1,3,6]$, $\xi_{t2}=[8,8,4]$, $\xi_{t3}=[9,1,3]$, $\xi_{t4}=[0,0,0]$ (для рис. 2, *а*) и $\xi_{t4}=[9,5,0]$ (для рис. 2, *б*). Плотность $f(\xi_i)$ в данном примере соответствует гауссовской $f(\xi)=(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\left[-\xi^2/2\sigma^2\right]$.



а *б*

Рис. 2. Траектория трехкомпонентного стохастического процесса: *а* – замкнутая; *б* – разомкнутая

Заключение

В работе рассмотрена методика формирования стохастических траекторий многомерных динамических систем с заданными свойствами. Проекции фазовых переменных на координатные оси *n*-мерного пространства представляются системой стохастических дифференциальных уравнений. Требования к траектории реализуются через заданную базовую траекторию и векторно-матричные функции, входящие в СДУ. Параметры и функции СДУ обеспечивают желаемую «стохастичность» траектории на участках между контрольными точками (областями). В контрольных точках значения фазовых переменных МСП совпадают с заданными. Точность совпадения зависит от значений маскирующей функции в этих точках. Рассмотрен вариант формирования стохастической траектории без «обратных движений». Предлагаемая методика позволяет решать оптимизационные задачи, связывающие параметры траектории с параметрами системы. Результаты моделирования подтверждают применимость предложенной методики при разработке алгоритмов формирования траекторий МДС с заданными свойствами.

Список литературы

1. Лазарев Ю.Н. Управление траекториями аэрокосмических аппаратов. Самара: Самар. науч. центр РАН, 2007. 274 с.
2. Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Изд-во политехн. ун-та, 2010. 816 с.
3. Кловский Д.Д., Конторович В.Я., Широков С.М. Модели непрерывных каналов связи на основе стохастических дифференциальных уравнений. М.: Радио и связь, 1984. 248 с.
4. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. «Наука», 1974. 695 с.
5. Тихонов В.И., Мионов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.
6. Овсянников А.В. Формирование случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками // Труды БГТУ. Сер. физ.-мат. наук и информ. Вып. X. 2002. С. 133–136.
7. Овсянников А.В., Козел В.М. Формирование и моделирование стохастических процессов с заданными свойствами траекторий // Докл. БГУИР. 2016. № 6 (100). С. 18–23.
8. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. М.: Наука, 1993. 272 с.

References

1. Lazarev Ju.N. Upravlenie traektorijami ajerokosmicheskih apparatov. Samara: Samar. nauch. centr RAN, 2007. 274 s. (in Russ.)
2. Kuznecov D.F. Stohasticheskie differencial'nye uravnenija: teorija i praktika chislennogo reshenija. SPb.: Izd-vo politehn. un-ta, 2010. 816 s. (in Russ.)
3. Klovskij D.D., Kontorovich V.Ja., Shirokov S.M. Modeli nepreryvnyh kanalov svjazi na osnove stohasticheskih differencial'nyh uravnenij. M.: Radio i svjaz', 1984. 248 s. (in Russ.)
4. Lipcer R.Sh., Shirjaev A.N. Statistika sluchajnyh processov (nelinejnaja fil'tracija i smezhnye voprosy). M.: Gl. red. fiz.-mat. lit. «Nauka», 1974. 695 s. (in Russ.)
5. Tihonov V.I., Mionov M.A. Markovskie processy. M.: Sov. radio, 1977. 488 s. (in Russ.)
6. Ovsjannikov A.V. Formirovanie sluchajnyh processov s zadannymi verojatnostnymi harakteristikami // Trudy BGTU. Ser. fiz.-mat. nauk i inform. Vyp. X. 2002. S. 133–136. (in Russ.)
7. Ovsjannikov A.V., Kozel V.M. Formirovanie i modelirovanie stohasticheskih processov s zadannymi svojstvami traektorij // Dokl. BGUIR. 2016. № 6 (100). S. 18–23. (in Russ.)
8. Kazakov I.E., Artem'ev V.M., Buhalev V.A. Analiz sistem sluchajnoj struktury. M.: Nauka, 1993. 272 s. (in Russ.)

Сведения об авторах

Овсянников А.В., к.т.н., доцент кафедры информационных технологий Белорусского государственного университета.

Козел В.М., к.т.н., доцент кафедры информационных радиотехнологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Information about the authors

Ovsiannikov A.V., PhD, associate professor of department of information technology of Belarusian state university.

Kozel V.M., PhD., associate professor of department of information radiotechnologies of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

Адрес для корреспонденции

220030, Республика Беларусь,
г. Минск, пр. Независимости, д. 4,
Белорусский государственный университет
тел. +375-29-905-21-53;
e-mail: andovs@tut.by
Овсянников Андрей Витальевич

Address for correspondence

220030, Republic of Belarus,
Minsk, Nezavisimosti ave., 4,
Belarusian state university
tel. +375-29-905-21-53;
e-mail: andovs@tut.by
Ovsyannikov Andrey Vitalevich