Un Problema de Transmisión para un Sistema Barra-Banda-Barra con Amortiguamientos Locales

Carlos Javier Guerrero Torres

Supervisado por
Dr. Bienvenido Barraza Martínez
Dr. Jairo Hernández Monzón

29 de octubre de 2021

Dedicatoria

Dedicado a mis padres, por su amor, dedicación y sacrificio en todos estos años, gracias a ustedes he podido llegar hasta donde estoy y he logrado convertirme en lo que soy.

Agradecimientos

Agradezco a los profesores Bienvenido Barraza y Jairo Hernández, por haberme brindado la oportunidad de realizar este trabajo bajo su supervisión. Gracias por su tiempo, dedicación, paciencia y amabilidad. A mis padres, amigos y todas aquellas personas que siempre han creído en mí y me han apoyado.

Resumen

Como trabajo de grado para la Maestría en Matemáticas, se considera estudiar el buen planteamiento y estabilidad exponencial de un problema de transmisión en un sistema barra-banda-barra con amortiguamientos locales. Se busca entonces mostrar resultados de existencia y unicidad de soluciones para el problema planteado en el Capítulo 1 y resultados relacionados a su estabilidad exponencial usando teoría de ecuaciones diferenciales parciales, en particular se utiliza el enfoque de semigrupos fuertemente continuos sobre ciertos espacios de Sobolev para el buen planeamiento y el método de la energía para la estabilidad exponencial.

Índice

Introducción

Debido a los avances recientes en el estudio de dinámica de materiales para usos en ingeniería, se han proporcionado nuevas formas de suprimir vibraciones, deformaciones y deflexiones en estructuras acopladas; esto se logra al añadir algún tipo amortiguamiento local o total a las estructuras. Es por lo anterior, que el estudio de estructuras compuestas por barras y bandas es de suma importancia en ingeniería, ya que encuentran su aplicación en áreas como robótica, aeronáutica, diseño de automotores y puentes, entre otros. A continuación, se presentan algunos trabajos que consideran estructuras conformadas por bandas y barras.

K. Liu & Z. Liu [10], estudiaron las vibraciones longitudinales y transversales de una barra elástica con amortiguamiento de tipo Kelvin-Voigt (material viscoelástico) localmente distribuido en un segmento de esta. En dicho estudio, se mostró que el semigrupo asociado con la ecuación de movimiento transversal de la barra es exponencialmente estable, sin embargo el semigrupo asociado a la ecuación de desplazamiento relacionada al movimiento longitudinal no es exponencialmente estable. Un estudios similar fue realizado por Avila, Bastos & Raposo [14], donde analizaron el problema de transmisión para el desplazamiento longitudinal de una barra elástica acoplada a otra viscoelástica.

Hassine [9], consideró una estructura con amortiguamiento de tipo Kelvin-Voigt formada por una barra acoplada con otra barra elástica . Él mostró que la energía del sistema decae polinomialmente a lo largo del tiempo cuando el amortiguamiento, el cual es localmente distribuido, actúa solo sobre una parte de la estructura.

Z. Liu & Q. Zhang [11], estudiaron la estabilidad de una banda elástica con amortiguamiento local de tipo Kelvin-Voigt. Mostraron que si el coeficiente de amortiguamiento presenta una singularidad en las interfaces de los segmentos amortiguados y no amortiguados, entonces el semigrupo correspondiente al sistema es polinomial o exponencialmente estable, dependiendo del comportamiento del amortiguamiento cerca de la interface.

Otros tipo de amortiguamiento aplicado de forma total o local a estructuras es el amortiguamiento por histéresis o amortiguamiento friccional. Bastos & Raposo [5], consideraron una estructura formada por dos bandas elásticas donde una de estas posee un amortiguamiento friccional. Establecieron que la solución decae exponencialmente a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Es pertinente resaltar que esta estructura es equivalente a la de una sola banda con amortiguamiento friccional localizado.

Ambos amortiguamientos expuestos anteriormente, fueron trabajados por Alves, Rivera, Sepúlveda & Vera [2]; estos consideraron una barra conformada por tres componentes; el primero es material de tipo Kelvin-Voigt, el segundo es un material elástico (sin amortiguamiento) y el tercero es un material con un amortiguamiento friccional o por fricción. El resultado principal en este trabajo es que el tipo de decaimiento depende del orden en el que se ubican los componentes. Si el material viscoelástico no se encuentra en el centro de la barra, se presenta una estabilidad exponencial de la solución. Por otro lado, si el material viscoelástico se encuentra en alguno de los extremos, entonces la estabilidad exponencial no se presenta, pero sí existe estabilidad polinomial.

Barraza, Hernández & Vergara [4], consideraron una estructura barra-banda-barra, donde las barras presentan amortiguadas estructural (o pueden no presentar amortiguamientos) y están acopladas por una banda amortiguada por fricción con condiciones de transmisión. Mostraron que para este tipo de estructura, la disipación generada por la parte friccional es suficientemente fuerte para producir un decaimiento exponencial de las soluciones, sin importar el tamaño de esta.

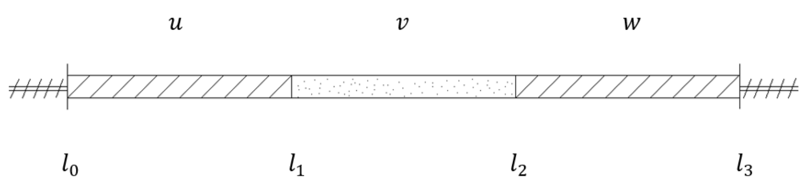
En este trabajo la estructura está conformada por dos barras con amortiguamientos localizados de tipo estructural y una banda con amortiguamiento localizado de tipo friccional. Los objetivos son investigar el buen planteamiento del sistema asociado a la estructura, como también su estabilidad exponencial. Como resultados principales de este trabajo se obtuvieron la existencia y unicidad de la solución para el problema de Cauchy asociado al problema; además se muestra que para este tipo de estructura, la solución del sistema asociado presenta un decaimiento exponencial si los amortiguamientos se aplican de forma total en cada pieza que la conforma.

1. Planteamiento del Problema

Sean l_0, l_1, l_2 y l_3 números reales tales que $l_0 < l_1 < l_2 < l_3$. A continuación consideramos una estructura conformada por tres secciones, donde las secciones en los extremos de esta son barras delgadas y la sección central es una banda elástica, las cuales ocupan las regiones de $\mathbb{R}$ determinadas por los intervalos $[l_0, l_1]$, $[l_1, l_2]$ y $[l_2, l_3]$, respectivamente. Además, para $(a_0, b_0) \subset (l_0, l_1)$, $(a_1, b_1) \subset (l_1, l_2)$, $(a_2, b_2) \subset (l_2, l_3)$, consideramos las funciones coeficientes:

$$\begin{aligned} D_{\rho_1} &= \rho_1(x)\chi_{(a_0,b_0)}, \\ D_\beta &= \beta(x)\chi_{(a_1,b_1)}, \\ D_{\rho_2} &= \rho_2(x)\chi_{(a_2,b_2)}, \end{aligned}$$

donde $\rho_1 \in L^\infty((l_0, l_1))$, $\beta \in L^\infty((l_1, l_2))$ y $\rho_2 \in L^\infty((l_2, l_3))$ son tales que ρ_1, β, $\rho_2 \geq c_0 > 0$ en (a_0, b_0), (a_1, b_1), y (a_2, b_2) respectivamente, y χ_E denota la función característica de un conjunto E. La siguiente gráfica bosqueja la estructura:



Si $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$, $w = w(x, t)$ representan el desplazamiento vertical de la barra de la sección izquierda, banda y barra de la sección derecha, respectivamente, en cada x y en cada instante de tiempo t, entonces el problema anterior puede modelarse mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - (D_{\rho_1} u_{tx})_x = 0 \quad \text{en } (l_0, l_1) \times (0, \infty), \tag{1.1}$$

$$v_{tt} - v_{xx} + D_\beta v_t = 0 \quad \text{en } (l_1, l_2) \times (0, \infty), \tag{1.2}$$

$$w_{tt} + w_{xxxx} - (D_{\rho_2} w_{tx})_x = 0 \quad \text{en } (l_2, l_3) \times (0, \infty). \tag{1.3}$$

Supongamos que las barras están empotradas en los extremos, esto es,

$$u(l_0, t) = u_x(l_0, t) = w(l_3, t) = w_x(l_3, t) = 0, \qquad t \in (0, \infty). \tag{1.4}$$

Se considera el problema anterior con las siguientes condiciones de transmisión y de frontera:

$$u(l_1, t) = v(l_1, t)\,, v(l_2, t) = w(l_2, t), \quad t \in (0, \infty), \tag{1.5}$$

$$u_{xxx}(l_1, t) + v_x(l_1, t) = 0, \quad t \in (0, \infty), \tag{1.6}$$

$$w_{xxx}(l_2, t) + v_x(l_2, t) = 0, \quad t \in (0, \infty), \tag{1.7}$$

$$u_{xx}(l_1, t) = 0, \quad t \in (0, \infty), \tag{1.8}$$

$$w_{xx}(l_2, t) = 0, \quad t \in (0, \infty). \tag{1.9}$$

Además, al problema (1.1)-(1.9) se le asocian las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x) \text{ y } u_t(x, 0) = u_1(x), &\quad x \in (l_0, l_1); \\ v(x, 0) = v_0(x) \text{ y } v_t(x, 0) = v_1(x), &\quad x \in (l_1, l_2); \\ w(x, 0) = w_0(x) \text{ y } w_t(x, 0) = w_1(x), &\quad x \in (l_2, l_3). \end{aligned} \tag{1.10}$$

2. Preliminares

En este capítulo se presentan los conceptos necesarios para el desarrollo y comprensión de este trabajo. Se definirán los distintos espacios, sus productos interiores, sus normas y los resultados necesarios para dar solución al problema de Cauchy asociado a (1.1)-(1.10) mediante la teoría de semigrupos fuertemente continuos. Posteriormente, se hará uso del método de la energía para mostrar la estabilidad exponencial del sistema cuando los amortiguamientos están activos. A menos que se indique lo contrario, las definiciones y los teoremas así como sus demostraciones se han tomado de [6] para la Sección 2.1 y de [7] para la Sección 2.2. En la Sección 2.3 se presentan algunos elementos de la teoría de semigrupos (tomados de [13]), suficientes para dar solución a un problema de Cauchy (ver Capítulo 4 de [13], Teorema 1.4).

2.1. Espacios L^p

Considere un espacio de medida σ-finito $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, esto es:

1. Ω es un conjunto.
2. $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en Ω, es decir,
   - $\emptyset \in \mathcal{M}$.
   - Si $B \in \mathcal{M}$, entonces $B^c \in \mathcal{M}$.
   - $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ con $A_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots$
3. μ es una medida, es decir, $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ cumple con:
   - $\mu(\emptyset) = 0$.
   - $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, con $\{A_n\}$ una familia disjunta de elementos de $\mathcal{M}$.
4. Ω es σ-finito, es decir, existe una familia contable $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ tal que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ y $\mu(\Omega_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se denota con $L^1(\Omega)$ al espacio vectorial de funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrables o simplemente integrables con respecto a la medida μ. Es decir, aquellas funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles para las cuales $\int_\Omega |f| \, d\mu < \infty$. Además se define la norma

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} := \int_\Omega |f| \, d\mu.$$

Sea $1 \leq p < \infty$. Diremos que una función medible f pertenece a $L^p(\Omega)$ si $|f|^p \in L^1(\Omega)$. El espacio vectorial $L^p(\Omega)$ se dota con la norma:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Si $p = 2$, la norma del espacio $L^2(\Omega)$ es inducida por el producto interior:

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f g \, d\mu.$$

Ahora, si $p=\infty$, definimos el espacio $L^\infty(\Omega)$ como el espacio de funciones medibles acotadas en casi todo punto, con el supremo esencial de su valor absoluto como norma. El supremo esencial de f está dado por

$$\|f\|_\infty \equiv \text{ínf}\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ para casi todo } x\}.$$

Proposición 2.1. *Los espacios $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p \leq \infty$, son espacios de Banach.*

Como una observación, se puede mostrar que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Proposición 2.2. *Sean $p, q \in [1,\infty]$ con[1] $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Entonces,*

- ***Desigualdad de Hölder:*** *Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ con:*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

- ***Desigualdad de Cauchy-Schwarz:*** *Como caso particular, de la desigualdad de Hölder con*

  $p=q=2$, se deduce

$$|\langle f,g\rangle|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Lema 2.1. *Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^\infty(\Omega)$. Entonces $fg \in L^p(\Omega)$.*

Proposición 2.3 (Desigualdad de Young:). *Sean $a, b, \varepsilon > 0$. Entonces*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q, \quad C(\varepsilon) = \frac{1}{(\varepsilon p)^{\frac{q}{p}}}\frac{1}{q}.$$

Lema 2.2. ***(Lema de Grönwall).*** *Sea $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable no negativa para la cual existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$\phi'(t) \leq C\phi(t), \text{ para todo } t \in [0,T].$$

Entonces

$$\phi(t) \leq e^{Ct}\phi(0), \text{ para todo } t \in [0,T].$$

Sea X un espacio normado cualquiera, se define su espacio dual X' como:

$$X' := \{f : X \to \mathbb{R} |\ f \text{ es lineal y continua}\},$$

equipado con la norma:

$$\|f\|_{X'} := \sup_{x\in X,\, \|x\|=1} |f(x)|.$$

El siguiente teorema permite caracterizar los espacios duales de espacios de Hilbert.

[1] En el caso $p=\infty$, $q=1$, y si $q=\infty$, $p=1$.

Teorema 2.1. ***(Teorema de representación de Riesz).*** *Todo funcional lineal y continuo $f \in \mathbb{H}'$, donde $\mathbb{H}$ es un espacio de Hilbert, puede representarse por medio de su producto interior. Es decir, para cada $f \in \mathbb{H}'$ existe un único $z \in \mathbb{H}$ tal que:*

$$f(x) = \langle x, z \rangle_{\mathbb{H}}, \text{ para todo } x \in \mathbb{H}.$$

En particular se cumple que $\|f\|_{\mathbb{H}'} = \|z\|_{\mathbb{H}}$.

El teorema anterior permite realizar una identificación entre $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}'$.

Ahora, consideramos el espacio bidual $X'' = (X')'$. En este caso, para cada $x \in X$ es posible construir una función escalar $J(x) : X' \to \mathbb{R}$, donde $J(x)(f) := f(x)$. Dicha función es lineal y continua en X', esto es $J \in X''$. De esta manera se tiene una aplicación:

$$J : X \to X'',$$

la cual es inyectiva de acuerdo al teorema de Hahn-Banach. Si adicionalmente J es sobreyectiva, decimos que X es un **espacio reflexivo**. En el caso de los espacios de Hilbert se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.2. *Todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

En el caso de los espacios $L^p(\Omega)$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *El espacio $L^p(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Definición 2.1. *Se define el espacio $L^2(\{a,b\})$ como el epsacio de funciones $\varphi : \{a,b\} \to \mathbb{C}$ dotado de la norma*

$$\|\varphi\|_{L^2(\{a,b\})} := \left(|\varphi(a)|^2 + |\varphi(b)|^2\right)^{1/2}.$$

Proposición 2.4. $(L^2(\{a,b\}), \|\cdot\|_{L^2(\{a,b\})})$ *es un espacio de Banach.*

Para la demostración de esta proposición ver [3], Proposición 2.2.

2.2. Espacios de Sobolev

En lo que sigue $n \in \mathbb{N}$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío, abierto y acotado. Las integrales se consideran con respecto a la medida de Lebesgue usual en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.2 (**Funciones de prueba**). *Se define el espacio $C_0^\infty(\Omega)$ como el espacio de funciones de prueba, es decir, funciones $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciables con soporte compacto contenido en Ω, donde el soporte de φ se define como $Supp(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$. El espacio de funciones de prueba C_0^∞ equipado con su topología estándar (la introducida por L. Schwartz) se denota por $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Definición 2.3. *Se define el espacio de **funciones localmente integrables** como:*

$$L^1_{Loc}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} | f \text{ es medible y } \int_K |f|\, dx < \infty, \forall K \subset \Omega, \ K \text{ compacto}\}.$$

Como observación de la anterior definición se tiene que, gracias a la desigualdad de Hölder, $L^p(\Omega)$ es un subespacio de $L^1_{Loc}(\Omega)$ para todo $p \geq 1$.

Definición 2.4 (**Derivada débil**). *Sean $f, g \in L^1_{Loc}(\Omega)$ y $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ un multi-índice. Decimos que $g \in L^1_{Loc}(\Omega)$ es una α-ésima derivada débil de f, denotada $g = \partial^\alpha f$, si se cumple:*

$$\int_\Omega f \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\varphi \, dx,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

El espacio de distribuciones sobre Ω, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, es el espacio dual continuo de $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir:

$$\mathcal{D}'(\Omega) := \{u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} | \; u \text{ es lineal y continua}\}.$$

Para $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, es usual escribir:

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} := u(\varphi)$$

Las *distribuciones regulares* son distribuciones inducidas por funciones f localmente integrables, es decir, elementos en $\mathcal{D}'(\Omega)$ denotados por T_f, cuyo valor actuando sobre la función de prueba φ está dado por la integral de Lebesgue:

$$\langle T_f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Definición 2.5 (**Derivada distribucional**). *Sea $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ un multi-índice, se define la α-ésima derivada distribucional de $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ como:*

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A partir de la definición anterior, si identificamos cada función localmente integrable f con su respectiva distribución regular inducida T_f, entonces, su derivada distribucional viene dada por:

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Note que toda derivada débil es también una derivada distribucional.

A continuación se presenta un importante resultado sobre la igualdad entre funciones localmente integrables en un sentido distribucional.

Proposición 2.5. *([8], Seccion E, Capitulo 0). Sean $f, g \in L^1_{Loc}(\Omega)$. Si se tiene una igualdad $f = g$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, en el sentido distribucional, es decir:*

$$\langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} = \langle g, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

entonces $f = g$ en casi toda parte.

Definición 2.6 (Espacios de Sobolev). *Sean $k \in \mathbb{N}_0$ y $1 \leq p < \infty$. Se define el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como el espacio de funciones $u \in L^p(\Omega)$ tales que para cada multi-índice α con $|\alpha| \leq k$, las derivadas débiles $\partial^\alpha u$ existen y están en $L^p(\Omega)$, esto es:*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \leq k\}.$$

Si $u \in W^{k,p}(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$, entonces se define su norma como:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Definición 2.7. *Se define $W_0^{k,p}(\Omega)$ como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$. Es decir, para $u \in W^{k,p}(\Omega)$, se tiene que $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ si y solo si existe una sucesión $u_m \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que:*

$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0, \text{ cuando } m \to \infty.$$

Teorema 2.4. *El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach. En particular $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ y $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$ son espacios de Hilbert.*

Definición 2.8. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Para $s \in \mathbb{R}_+$, $s = [s] + \varepsilon$ con $[s]$ la parte entera de s y $0 < \varepsilon < 1$. Se define el espacio de Sobolev,*

$$H^s(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ y } I_\varepsilon(\partial^\alpha u) < \infty \text{ para cada } |\alpha| \leq [s]\},$$

donde

$$I_\varepsilon(u) := \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\varepsilon}} dx\, dy.$$

La norma en este espacio está dada por:

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)}; = \|u\|^2_{H^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha| \leq [s]} I_\varepsilon(\partial^\alpha u).$$

El siguiente teorema proporciona una generalización de funciones definidas sobre la frontera de Ω, esto es, podemos asignar valores sobre $\partial\Omega$ para cada función $u \in H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$.

Teorema 2.5 (Operador traza). *Suponga $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado con frontera $\partial\Omega$ suficientemente suave. Entonces para $l, m \in \mathbb{N}$ con $l - m > \frac{1}{2}$, existe un operador lineal y continuo:*

$$\gamma_m : W^{l,2}(\Omega) \to \prod_{i=0}^{m} W^{l-i-(1/2),2}(\partial\Omega),$$

con la propiedad

$$\gamma_m = \left(\varphi\Big|_{\partial\Omega}, \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}, \ldots, \frac{\partial^m\varphi}{\partial n^m}\Big|_{\partial\Omega} \right),$$

para todo $\varphi \in W^{l,2}(\Omega) \cap C^{l+m}(\overline{\Omega})$, donde $\frac{\partial^j\varphi}{\partial n^j}$ es la j-ésima derivada normal exterior unitaria φ sobre $\partial\Omega$. A γ_m se le conoce como el operador traza de orden m.

Para una demostración del teorema ver [16], Teorema 8.7

Teorema 2.6 (**Desigualdad de Poincaré**). *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Entonces , existe $C > 0$ tal que para todo $u \in H_0^k(\Omega)$,*

$$\|u\|_{H^k(\Omega)}^2 \leq C \sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^2 \, dx.$$

Para $k = 1$ y $u \in H_0^1(\Omega)$, se cumple:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2.$$

A continuación, se presenta una generalización de la desigualdad de Poincaré, la cual se puede encontrar en [12], Teorema 1.9.

Teorema 2.7 (**Desigualdad de Friedrichs**). *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera Lipschitz y $\Gamma \subset \partial\Omega$ tal que $\mu_{n-1}(\Gamma) \neq 0$, donde μ_{n-1} denota la medida de área o superficie $(n-1)-$dimensional de Lebesgue. Entonces, existe un $C > 0$ tal que para todo $u \in H^1(\Omega)$:*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\int_\Gamma |u|^2 \, dS + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \right).$$

Teorema 2.8 (**Teorema de inmersión de Sobolev**). *Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$ y, para $1 \leq k \leq n$, sean Ω_k la intersección de Ω con un plano de dimensión k en $\mathbb{R}^n$.(Si $k = n$, entonces $\Omega_k = \Omega$.) Sean $j \geq 0$ y $m \geq 1$ enteros y sea $1 \leq p < \infty$.*

PARTE I *Suponga que Ω satisface la condición de cono.*

A. Si $mp > n$ o $m = n$ y $p = 1$, entonces

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C_B^j(\Omega). \tag{2.1}$$

Más aún, si $1 \leq k \leq n$, entonces

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_k), \quad \text{para } p \leq q \leq \infty, \tag{2.2}$$

y, en particular,

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega), \quad \text{para } p \leq q \leq \infty. \tag{2.3}$$

B. Si $1 \leq k \leq n$ y $mp = n$, entonces

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_k), \quad \text{para } p \leq q < \infty, \tag{2.4}$$

y, en particular,

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega), \quad \text{para } p \leq q < \infty. \tag{2.5}$$

C. Si $mp < n$ y ya sea que $n - mp < k \leq n$ o $p = 1$ y $n - m \leq k \leq n$, entonces

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_k), \quad \textit{para } p \leq q \leq p* = kp/(n-mp). \tag{2.6}$$

En particular,

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega), \quad \textit{para } p \leq q \leq p* = np/(n-mp). \tag{2.7}$$

Las constantes de inmersión para las inmersiones descritas anteriormente dependen solo de n, m, p, q, j, k, y las dimensiones del cono C en la condición de cono.

PARTE II *Suponga que Ω satisface la condición local fuerte de Lipschitz. Entonces el espacio objetivo $C_B^j(\Omega)$ de la inmersión (2.1) puede ser reemplazado por el espacio $C^j(\overline{\Omega})$, y la inmersión puede ser más refinada de la siguiente forma:*

Si $mp > n > (m-1)p$, entonces

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}), \quad \textit{para } 0 < 1 \leq m - (n/p), \tag{2.8}$$

y si $n = (n-1)p$, entonces

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}), \quad \textit{para } 0 < \lambda < 1. \tag{2.9}$$

Para la demostración del teorema vea [1], Teorema 4.12 Parte 2

Definición 2.9 (Normas equivalentes). *Sean $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(X, \|\cdot\|_2)$ espacios normados. Decimos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes en X si existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que:*

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x_1\|, \textit{ para todo } x \in X$$

En dicho caso, notamos dicha equivalencia por $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

A continuación se presenta una herramienta eficiente a la hora de resolver ecuaciones diferenciales parciales elípticas.

Teorema 2.9. ***(Teorema de Lax-Milgram.)*** *Considere $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert real. Sea $\mathcal{B} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ un operador bilineal con las siguientes propiedades:*

- ***Continuo:*** *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|\mathcal{B}(Y, \Phi)| \leq C\|Y\|_{\mathbb{H}}\|\Phi\|_{\mathbb{H}}, \textit{ para todo } Y, \Phi \in \mathbb{H}.$$

- ***Coercitivo:*** *Existe una constante $\lambda > 0$ tal que*

$$\mathcal{B}(Y, Y) \geq \lambda\|Y\|_{\mathbb{H}}^2, \textit{ para todo } Y \in \mathbb{H}.$$

Entonces, para cada $\Lambda \in \mathbb{H}'$, existe un único $Y \in \mathbb{H}$ tal que

$$\mathcal{B}(Y, \Phi) = \Lambda(\Phi), \textit{ para todo } \Phi \in \mathbb{H}.$$

2.3. Elementos de la teoría de semigrupos.

En esta sección se estudiará la teoría de semigrupos fuertemente continuos, la cual será fundamental para dar solución al problema (1.1)-(1.10). En lo que sigue, X es un espacio de Banach y $L(X) := \{A : X \to X : \text{ A es lineal y continuo}\}$. Se define la norma en $L(X)$ así:

$$\|A\|_{L(X)} := \sup_{x\in X,\, \|x\|=1} \|Ax\|_X = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X}.$$

Si dotamos a $L(X)$ con esta norma, entonces $(L(X), \|\cdot\|_{L(X)})$ es un espacio completo (Ver Capítulo 4, Teorema 4.1 en [15]).

Definición 2.10. *Considere una familia $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset L(X)$ que satisface:*

- $T(0) = I$, *(operador identidad en X).*
- $T(t+s) = T(t)T(s)$ *para cada* $s, t \geq 0$ *(la propiedad de semigrupos).*

Entonces, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es llamado un ***semigrupo de operadores lineales continuos*** *en X. Si además, se cumple que:*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\|_{L(X)} = 0,$$

Se dice que el semigrupo es ***uniformemente continuo.***

Definición 2.11. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de operadores lineales acotados en X, se dice que el operador $A \in L(X)$ definido por:*

$$D(A) := \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

y

$$Ax := \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \text{para } x \in D(A),$$

es el ***generador infinitesimal del semigrupo*** $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Definición 2.12. *Un semigrupo de operadores lineales continuos $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en X es denominado* ***fuertemente continuo*** *si*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x, \text{ para cada } x \in X.$$

En este caso se dice que el semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es de clase C_0 o simplemente un C_0-semigrupo.

Teorema 2.10. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo. Entonces, existen constantes ω y $M \geq 1$ tales que:*

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Definición 2.13. *Un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es de* ***contracciones****, si*

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq 1, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Definición 2.14 (**Operador disipativo**). *Sean X un espacio de Banach y X' su dual topológico. Se denota el valor de $x^* \in X'$ en $x \in X$ por $\langle x^*, x\rangle$ o $\langle x, x^*\rangle$. Para cada $x \in X$ se define su conjunto de dualidad $F(x) \subseteq X'$ por*

$$F(x) := \{x^* \in X' : \langle x^*, x\rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X'}^2\}.$$

*Se dice que un operador A es **disipativo** si para cada $x \in D(A)$ existe un $x^* \in F(x)$ tal que:*

$$Re\,\langle Ax, x^*\rangle \leq 0.$$

En el caso de espacios de Hilbert, usando el Teorema de representación de Riesz se tiene que un operador $A : D(A) \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es disipativo si

$$Re\,\langle Ax, x\rangle_{\mathbb{H}} \leq 0, \text{ para todo } x \in D(A).$$

A continuación se presenta una caracterización importante de los C_0-semigrupos de contracciones. Para una prueba de este resultado el lector puede consultar [13], Teorema 4.3, Sección 1.4.

Teorema 2.11 (**Lumer-Phillips**). *Sean X un espacio de Banach y $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal con $D(A)$ denso en X.*

(a) Si A es disipativo y existe un $\lambda > 0$ tal que el rango, $R(\lambda I - A) = X$, entonces A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones en X.

(b) Si A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracciones en X entonces $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ y A es disipativo. Más aún, para cada $x \in D(A)$ y para cada $x^* \in F(x)$, $Re\,\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.

Proposición 2.6. *Sea X un espacio de Banach reflexivo. Si $A : D(A) \subset X \to X$ es un operador disipativo con $R(I - A) = X$, entonces $D(A)$ es denso en X.*

Este resultado puede encontrarse en [13], Teorema 4.6, Sección 1.4.

2.4. Problema abstracto de Cauchy

Definición 2.15. *Sean X un espacio de Banach y $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal. Para un $x_0 \in X$ se define el **problema abstracto de Cauchy** asociado a el operador A y el valor inicial x_0 como:*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, \quad t > 0, \\ u(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Se dice que una función $u = u(x_0, \cdot) : [0, \infty) \to X$ es solución clásica del problema abstracto de Cauchy (2.10) si $u \in C^1([0, \infty), X)$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ y u satisface (2.10).

Definición 2.16. *El problema de Cauchy* (2.10) *está bien propuesto, si para cada* $x_0 \in D(A)$ *existe una única solución clásica* $u = u(x_0, \cdot) \in C^1([0,\infty), X)$ *y para cada sucesión* $\{x_0^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ *con* $\lim_{n\to\infty} x_0^{(n)} = x_0$ *en* X *se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} u(x_0^{(n)}, t) = u(x_0, t),$$

uniformemente en intervalos $[0, T]$ *con* $T > 0$.

Teorema 2.12. *El problema abstracto de Cauchy* (2.10) *está bien propuesto si y solo si* A *es el generador de un* C_0*-semigrupo de contracciones sobre* X.

Para una prueba de este teorema ver Capítulo 4 de [13], Teorema 1.4.

3. Existencia y unicidad de la solución

En este capítulo se demostrará la existencia y unicidad de la solución al problema (1.1)-(1.10). Se iniciará con la formulación abstracta del problema, luego se definirán los espacios donde vivirá la solución del problema. Posteriormente, se definirá un operador lineal y se expondrá el problema de Cauchy asociado, para que finalmente, por medio del teorema de Lumer-Phillips, se concluya que dicho operador genera un C_0-semigrupo de contracciones sobre un espacio de Hilbert, lo cual permitirá concluir que el problema (1.1)-(1.10) posee una única solución y la dependencia continua de esta solución respecto al dato inicial.

En lo que sigue

$$I_j := (l_{j-1}, I_j),\ j = 1, 2, 3.$$

3.1. Formulación abstracta del problema

Definamos el operador A actuando sobre la 6-tupla $U = (u, v, w, \phi, \varphi, \psi)$ de la siguiente forma:

$$AU := (\phi, \varphi, \psi, -(u_{xxxx} - (D_{\rho_1}\phi_x)_x), v_{xx} - D_\beta\varphi, -(w_{xxxx} - (D_{\rho_2}\psi_x)_x))\,. \tag{3.1}$$

El dominio de A será precisado más adelante.

Entonces, si $U = (u, v, w, u_t, v_t, w_t)$ y $\frac{dU}{dt} = (u_t, v_t, w_t, u_{tt}.v_{tt}, w_{tt})$, el problema (1.1)-(1.3) puede escribirse como $\frac{dU}{dt} = AU$, y junto con las condiciones iniciales (1.10), se obtiene

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = AU, \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

con $U_0 := (u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1)$.

3.2. Definición de espacios

Definimos los siguientes espacios:

$$H^2_{l_0} := \{u \in H^2(I_1) : u(l_0) = u'(l_0) = 0\},$$
$$H^2_{l_3} := \{w \in H^2(I_3) : w(l_3) = w'(l_3) = 0\},$$

con los siguientes productos interiores:

$$\langle u, \hat{u}\rangle_{H^2_{l_0}} := \langle u'', \hat{u}''\rangle_{L^2(I_1)}\,, \tag{3.3}$$

$$\langle w, \hat{w}\rangle_{H^2_{l_3}} := \langle w'', \hat{w}''\rangle_{L^2(I_3)}\,. \tag{3.4}$$

Es fácil verificar la linealidad y simetría de los productos interiores $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^2_{l_0}}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^2_{l_3}}$ ya que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2(I_1)}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2(I_3)}$ son lineales y simétricos. Además, para $u\in H^2_{l_0}$, la desigualdad de Poincaré generalizada, implica

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^2(I_1)} &= \sum_{|\alpha|\leq 2}\|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(I_1)}\\
&= \|u\|^2_{L^2(I_1)} + \|u'\|^2_{L^2(I_1)} + \|u''\|^2_{L^2(I_1)}\\
&\leq C_1\|u'\|^2_{L^2(I_1)} + \|u'\|^2_{L_2(I_1)} + \|u''\|^2_{L^2(I_1)}\\
&\leq C_1^2\|u''\|^2_{L^2(I_1)} + C_1\|u''\|^2_{L^2(I_1)} + \|u''\|^2_{L^2(I_1)}\\
&= (C_1^2 + C_1 + 1)\|u''\|_{L^2(I_1)}\\
&= C\|u\|_{H^2_{l_0}}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Por lo tanto, si $\|u\|_{H^2_{l_0}}=0$, entonces $u=0$, lo cual muestra que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^2_{l_0}}$ es definido positivo en $H^2_{l_0}$ y por consiguiente $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^2_{l_0}}$ es un producto interior en $H^2_{l_0}$. De igual forma se muestra que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^2_{l_3}}$ es un producto interior en $H^2_{l_3}$.

Proposición 3.1. *Para las normas $\|\cdot\|_{H^2_{l_0}}$ y $\|\cdot\|_{H^2_{l_3}}$ inducidas por (3.3) y (3.4), respectivamente, se tiene:*

i. *La norma $\|\cdot\|_{H^2_{l_0}}$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_{H^2(I_1)}$ en $H^2_{l_0}$.*

ii. *La norma $\|\cdot\|_{H^2_{l_3}}$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_{H^2(I_3)}$ en $H^2_{l_3}$.*

Demostración. i. Por la definición de la norma $\|\cdot\|_{H^2(I_1)}$ se obtiene que $\|u\|_{H^2_{l_0}}\leq\|u\|_{H^2(I_1)}$. Usando esta última desigualdad y (3.5) se sigue la afirmación.

ii. Análogo al punto anterior.

□

Note que los espacios $H^2_{l_0}$ y $H^2_{l_3}$ son espacios de Hilbert. En efecto, si tomamos una sucesión de Cauchy $(u_m)_m$ en $H^2_{l_0}$ y aplicamos dos veces la desigualdad de Poincaré, existen $C_1, C_0>0$, tales que

$$\|u_m-u_n\|_{L^2(I_1)}\leq C_0\|u'_m-u'_n\|_{L^2(I_1)}\leq C_1\|u''_m-u''_n\|_{L^2(I_1)},\quad \forall n,m\in\mathbb{N}.$$

Como $L^2(I_1)$ es completo, existen $w_0,w_1,w_2\in L^2(I_1)$ tales que

$$\begin{aligned}
&\|u''_m-w_2\|_{L^2(I_1)}\to 0,\\
&\|u'_m-w_1\|_{L^2(I_1)}\to 0,\\
&\|u_m-w_0\|_{L^2(I_1)}\to 0.
\end{aligned}$$

Probaremos que $w_0' = w_1$ y $w_0'' = w_2$ en $\mathcal{D}'(I_1)$. Para eso tomemos $v \in C_0^\infty(I_1)$ y note que

$$\begin{aligned}\langle w_0'', v\rangle_{L^2(I_1)} &= \langle w_0'', v\rangle_{\mathcal{D}'(I_1)\times\mathcal{D}(I_1)}\\ &= \langle w_0, v''\rangle_{\mathcal{D}'(I_1)\times\mathcal{D}(I_1)}\\ &= \langle w_0 - u_m, v''\rangle_{\mathcal{D}'(I_1)\times\mathcal{D}(I_1)} + \langle u_m, v''\rangle_{\mathcal{D}'(I_1)\times\mathcal{D}(I_1)}\\ &= \langle w_0 - u_m, v''\rangle_{\mathcal{D}'(I_1)\times\mathcal{D}(I_1)} + \langle u_m'', v\rangle_{\mathcal{D}'(I_1)\times\mathcal{D}(I_1)}\\ &= \int_{l_0}^{l_1} (w_0 - u_m)v''\,dx + \int_{l_0}^{l_1} u_m'' v\,dx.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ahora, al tomar límite y aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que

$$\int_{l_0}^{l_1} (w_0 - u_m)v''\,dx \to 0,$$

y

$$\int_{l_0}^{l_1} (w_2 - u_m'')v\,dx \to 0.$$

Por tanto, (3.6) quedaría de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\langle w_0'', v\rangle_{L^2(I_1)} &= \lim_{m\to\infty} \int_{l_0}^{l_1} u_m'' v\,dx\\ &= \int_{l_0}^{l_1} w_2 v\,dx\\ &= \langle w_2, v\rangle_{L^2(I_1)}, \quad \forall v \in C_0^\infty(I_1).\end{aligned} \tag{3.7}$$

En forma similar se demuestra que $w_0' = w_1$, y por tanto $\|u_m - w_0\|_{H^2(I_1)} \to 0$ cuando $m \to \infty$. Esto implica que $w_0 \in H^2(I_1)$. Ahora verificaremos la condición de frontera en l_0.

Por el Teorema de inmersión de Sobolev tenemos que para todo $w \in H^m(I_1)$ podemos tomar su C^{m-1} representante y entonces, las trazas $w|_{\{l_0,l_1\}}, w'_{\{l_0,l_1\}}, \ldots, w^{(m-1)}|_{\{l_0,l_1\}}$ existen en el sentido clásico. Esto es,

$$\gamma_{m-1} w = (w_{\{l_0,l_1\}}, w'|_{\{l_0,l_1\}}, \ldots, w^{(m-1)}|_{\{l_0,l_1\}}),$$

para todo $w \in H^m(I_1)$.

Ahora, usando el teorema de la traza para $w_0 \in H^2(I_1)$

$$\begin{aligned}0 &\le |w_0(l_0)|^2 + |w_0'(l_0)|^2\\ &\le |w_0(l_0)|^2 + |w_0(l_1)|^2 + |w_0'(l_0)|^2 + |w_0'(l_1)|^2\\ &= \|\gamma_1(w_0 - u_m)|_{\{l_0\}}\|^2_{L^2(\partial I_1)\times L^2(\partial I_1)}\\ &\le C^2 \|w_0 - u_m\|^2_{H^2(I_1)}.\end{aligned}$$

Puesto que $\|w_0 - u_m\|_{H^2(I_1)} \to 0$, se tendría que $|w_0(l_0)|^2 + |w_0'(l_0)|^2 = 0$ y por tanto $w_0(l_0) = w_0'(l_0) = 0$. Lo anterior muestra que $H^2_{l_0}$ es un espacio de Hilbert. Análogamente se muestra que $H^2_{l_3}$ es de Hilbert.

Se definen los espacios

$$\begin{aligned}
&\mathbb{H} := \{(u,v,w) \in H^2_{l_0} \times H^1(I_2) \times H^2_{l_3} : u(l_1) = v(l_1) \text{ y } v(l_2) = w(l_2)\},\\
&\mathbb{L} := L^2(I_1) \times L^2(I_2) \times L^2(I_3),
\end{aligned}$$

equipados con los productos interiores

$$\langle (u,v,w), (\hat{u},\hat{v},\hat{w}) \rangle_{\mathbb{H}} := \langle u, \hat{u} \rangle_{H^2_{l_0}} + \langle v', \hat{v}' \rangle_{L^2(I_2)} + \langle w, \hat{w} \rangle_{H^2_{l_3}}, \tag{3.8}$$

$$\langle (u,v,w), (\hat{u},\hat{v},\hat{w}) \rangle_{\mathbb{L}} := \langle u, \hat{u} \rangle_{L^2(I_1)} + \langle v, \hat{v} \rangle_{L^2(I_1)} + \langle w, \hat{w} \rangle_{L^2(I_1)}. \tag{3.9}$$

Note que (3.9) es un producto interior, debido a que es la suma de productos interiores. Se debe mostrar que (3.8) es definida positiva, debido a que la linealidad y la simetría ya se tienen. Sean $(u,v,w) \in \mathbb{H}$ y $z := \chi_{I_1} u + \chi_{I_2} v + \chi_{I_3} w$, siendo χ_{I_j} la función característica del intervalo I_j. Así, $z(l_0) = u(l_0) = 0$ y $z(l_3) = w(l_3) = 0$, por lo que z se anula en los extremos. Además, si $I := I_1 \cup I_2 \cup I_3$, entonces

$$\begin{aligned}
\|z\|^2_{L^2(I)} &= \langle z, z \rangle_{L^2(I_1)} + \langle z, z \rangle_{L^2(I_2)} + \langle z, z \rangle_{L^2(I_3)}\\
&= \|u\|^2_{L^2(I_1)} + \|v\|^2_{L^2(I_2)} + \|w\|^2_{L^2(I_3)},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\|z'\|^2_{L^2(I)} &= \langle z', z' \rangle_{L^2(I_1)} + \langle z', z' \rangle_{L^2(I_2)} + \langle z', z' \rangle_{L^2(I_3)}\\
&= \|u'\|^2_{L^2(I_1)} + \|v'\|^2_{L^2(I_2)} + \|w'\|^2_{L^2(I_3)}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Tanto (3.10) como (3.11) son expresiones finitas, ya que las normas L^2 de u, v y w, y sus derivadas son finitas en sus respectivos espacios. Por lo anterior, se tiene que $z \in H^1_0(I)$ y se sigue de la desigualdad de Poincaré que

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2(I_1)} + \|v\|^2_{L^2(I_2)} + \|w\|^2_{L^2(I_3)} &= \|z\|^2_{L^2(I)}\\
&\leq C\|z'\|^2_{L^2(I)}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Por lo anterior y (3.12), tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\|(u,v,w)\|^2_{H^2(I_1)\times H^1(I_2)\times H^2(I_3)}\\
&=\|u\|^2_{H^2(I_1)}+\|v\|^2_{H^1(I_2)}+\|w\|^2_{H^2(I_3)}\\
&=(\|u\|^2_{L^2(I_1)}+\|v\|^2_{L^2(I_2)}+\|w\|^2_{L^2(I_3)})\\
&+(\|u'\|^2_{L^2(I_1)}+\|v'\|^2_{L^2(I_2)}+\|w'\|^2_{L^2(I_3)})+\|u''\|^2_{L^2(I_1)}+\|w''\|^2_{L^2(I_3)}\\
&\leq \underbrace{(C_1+1)}_{C^*}(\|u'\|^2_{L^2(I_1)}+\|v'\|^2_{L^2(I_2)}+\|w'\|^2_{L^2(I_3)})+\|u''\|^2_{L^2(I_1)}+\|w''\|^2_{L^2(I_3)}\\
&\leq C^*(C_1(\|u''\|^2_{L^2(I_1)}+\|w''\|^2_{L^2(I_3)})+\|v'\|^2_{L^2(I_2)})+\|u''\|^2_{L^2(I_1)}+\|w''\|^2_{L^2(I_3)}\\
&=(C^*C_1+1)(\|u''\|^2_{L^2(I_1)}+\|w''\|^2_{L^2(I_3)})+C^*\|v'\|^2_{L^2(I_2)}\\
&\leq \hat{C}(\|u''\|^2_{L^2(I_1)}+\|w''\|^2_{L^2(I_3)}+\|v'\|^2_{L^2(I_2)})\\
&=\hat{C}(\|u\|^2_{H^2_{l_0}}+\|v'\|^2_{L^2(I_2)}+\|w\|^2_{H^2_{l_3}})\\
&=\hat{C}\|(u,v,w)\|_{\mathbb{H}}.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Por lo tanto, si $\|(u,v,w)\|_{\mathbb{H}}=0$, se tendría que $\|(u,v,w)\|^2_{H^2_{l_0}\times H^1(I_2)\times H^2_{l_3}}=0$, y en consecuencia $(u,v,w)=(0,0,0)$. Esto muestra que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}}$ es definido positivo, y por lo anteriormente dicho, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}}$ es un producto interior en $\mathbb{H}$.

De la desigualdad (3.13), se sigue la siguiente proposición:

Proposición 3.2. *Para todo $(u,v,w)\in\mathbb{H}$ se cumple*

$$\|(u,v,w)\|_{H^2(I_1)\times H^1(I_2)\times H^2(I_3)}\sim\|(u,v,w)\|_{\mathbb{H}}.$$

Demostración. Observe que

$$
\begin{aligned}
\|(u,v,w)\|^2_{\mathbb{H}}&=\|u''\|^2_{L^2(I_1)}+\|v'\|^2_{L^2(I_2)}+\|w''\|^2_{L^2(I_3)}\\
&\leq\|u\|^2_{H^2(I_1)}+\|v\|^2_{H^1(I_2)}+\|w\|^2_{H^2(I_3)}\\
&=\|(u,v,w)\|^2_{H^2(I_1)\times H^1(I_2)\times H^2(I_3)}.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Ahora, de (3.13) y (3.14) se obtiene el resultado deseado. □

Note que $\mathbb{H}$ es un espacio de Hilbert. Nuevamente, por el Teorema de inmersión de Sobolev tenemos que para $u\in H^2_{l_0}$, $v\in H^1(I_1)$ y $w\in H^2_{l_3}$ existen operadores lineales y continuos $\gamma_0:H^1(I_1)\to L^2(\{l_0,l_1\})$, $\hat{\gamma}_0:H^1(I_2)\to L^2(\{l_1,l_2\})$ y $\bar{\gamma}_0:H^1(I_3)\to L^2(\{l_2,l_3\})$ tales que

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 u|_{\{l_1\}}&=u(l_1),\\
\hat{\gamma}_0 v&=v|_{\{l_1,l_2\}},\\
\bar{\gamma}_0 w|_{\{l_2\}}&=w(l_2).
\end{aligned}
$$

Ahora, considere el mapeo $F : H^2_{l_0} \times H^1(I_2) \times H^2_{l_3} \to \mathbb{C}^2$ definido como

$$\begin{aligned} &F : H^2_{l_0} \times H^1(l_2) \times H^2_{l_3} \to \mathbb{C}^2 \\ &(u, v, w) \mapsto (u(l_1) - v(l_1), v(l_2) - w(l_2)). \end{aligned}$$

Note que F es un mapeo lineal y continuo y por tanto $\mathbb{H} = F^{-1}(\{(0,0)\})$, esto es, $\mathbb{H}$ es el kernel de F. Lo anterior muestra que $\mathbb{H}$ es cerrado y al ser un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert, $\mathbb{H}$ es también de Hilbert.

Definamos ahora el espacio

$$\mathcal{H} := \mathbb{H} \times \mathbb{L},$$

equipado con el producto interior

$$\begin{aligned} \left\langle U, \hat{U} \right\rangle_{\mathcal{H}} &:= \langle (u_1, v_1, w_1), (\hat{u_1}, \hat{v_1}, \hat{w_1}) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle (u_2, v_2, w_2), (\hat{u_2}, \hat{v_2}, \hat{w_2}) \rangle_{\mathbb{L}} \\ &= \langle u_1, \hat{u_1} \rangle_{H^2_{l_0}} + \langle v_1', \hat{v_1}' \rangle_{L^2(I_2)} + \langle w_1, \hat{w_1} \rangle_{H^2_{l_3}} \\ &+ \langle u_2, \hat{u_2} \rangle_{L^2(I_1)} + \langle v_2, \hat{v_2} \rangle_{L^2(I_2)} + \langle w_2, \hat{w_2} \rangle_{L^2(I_3)}, \end{aligned}$$

para todo $U = (u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2)$, $\hat{U} = (\hat{u_1}, \hat{v_1}, \hat{w_1}, \hat{u_2}, \hat{v_2}, \hat{w_2}) \in \mathcal{H}$. Por todo lo mostrado anteriormente, sabemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ es un producto interior en $\mathcal{H}$, y al ser $\mathbb{H}$ y $\mathbb{L}$ espacios de Hilbert, se tiene que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert.

3.3. Condiciones de transmisión en un sentido débil

Puesto que las funciones que viven en los espacios definidos anteriormente no son suficientemente regulares para satisfacer las condiciones de transmisión (1.6)-(1.9) en un sentido clásico, las interpretaremos primero en un sentido débil. Para lo anterior, considere $U = (u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2) \in \mathcal{H}$ y $\hat{U} = (\hat{u_1}, \hat{v_1}, \hat{w_1}, \hat{u_2}, \hat{v_2}, \hat{w_2}) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ suficientemente suaves, de tal forma que los siguientes cálculos tienen sentido. Entonces:

$$\begin{aligned} \left\langle AU, \hat{U} \right\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle u_2, \hat{u_1} \rangle_{H^2_{l_0}} + \langle v_2', \hat{v_1}' \rangle_{L^2(I_2)} + \langle w_2, \hat{w_1} \rangle_{H^2_{l_3}} \\ &- \left\langle u_1^{(4)} - (D_{\rho_1} u_2')', \hat{u_2} \right\rangle_{L^2(I_1)} + \langle v_1'' - D_\beta v_2, \hat{v_2} \rangle_{L^2(I_2)} \\ &- \left\langle w_1^{(4)} - (D_{\rho_2} w_2')', \hat{w_2} \right\rangle_{L^2(I_3)}. \end{aligned}$$

Aplicando integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} &- \left\langle u_1^{(4)} - (D_{\rho_1} u_2')', \hat{u_2} \right\rangle_{L^2(I_1)} \\ &= - \langle u_1'', \hat{u_2}'' \rangle_{L^2(I_1)} - \langle D_{\rho_1} u_2', \hat{u_2}' \rangle_{L^2(I_1)} - u_1^{(3)}(l_1)\hat{u}_2(l_1) + u_1^{(3)}(l_0)\hat{u}_2(l_0) \\ &+ u_1''(l_1)\hat{u_2}'(l_1) - u_1''(l_0)\hat{u_2}'(l_0). \end{aligned}$$

De forma análoga

$$
\begin{aligned}
&-\left\langle w_1^{(4)}-(D_{\rho_2}w_2')',\hat{w}_2\right\rangle_{L^2(I_3)}\\
&\quad=-\left\langle w_1'',\hat{w}_2''\right\rangle_{L^2(I_3)}-\left\langle D_{\rho_2}w_2',\hat{w}_2'\right\rangle_{L^2(I_3)}-w_1^{(3)}(l_3)\hat{w}_2(l_3)+w_1^{(3)}(l_2)\hat{w}_2(l_2)\\
&\quad+w_1''(l_3)\hat{w}_2{}'(l_3)-w_1''(l_2)\hat{w}_2{}'(l_2).
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$
\left\langle v_1''-D_\beta v_2,\hat{v}_2\right\rangle_{L^2(I_2)}=-\left\langle v_1',\hat{v}_2'\right\rangle_{L^2(I_2)}-\left\langle D_\beta v_2,\hat{v}_2\right\rangle_{L^2(I_2)}+v_1'(l_2)\hat{v}_2(l_2)-v_1'(l_1)\hat{v}_2(l_1).
$$

Por lo tanto,

$$
\left\langle AU,\hat{U}\right\rangle=a(U,\hat{U})+b(U,(\hat{u}_2,\hat{v}_2,\hat{w}_2)),
$$

donde

$$
\begin{aligned}
a(U,\hat{U}):=&\left\langle u_2,\hat{u}_1\right\rangle_{H^2_{l_0}}+\left\langle v_2',\hat{v}_1{}'\right\rangle_{L^2(I_2)}+\left\langle w_2,\hat{w}_1\right\rangle_{H^2_{l_3}}\\
&-\left\langle u_1'',\hat{u}_2''\right\rangle_{L^2(I_1)}-\left\langle D_{\rho_1}u_2',\hat{u}_2'\right\rangle_{L^2(I_1)}\\
&-\left\langle w_1'',\hat{w}_2''\right\rangle_{L^2(I_3)}-\left\langle D_{\rho_2}w_2',\hat{w}_2'\right\rangle_{L^2(I_3)}\\
&-\left\langle v_1',\hat{v}_2'\right\rangle_{L^2(I_2)}-\left\langle D_\beta v_2,\hat{v}_2\right\rangle_{L^2(I_2)}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
b(U,(\hat{u}_2,\hat{v}_2,\hat{w}_2)):=&-u_1^{(3)}(l_1)\hat{u}_2(l_1)+u_1^{(3)}(l_0)\hat{u}_2(l_0)+u_1''(l_1)\hat{u}_2{}'(l_1)\\
&-u_1''(l_0)\hat{u}_2{}'(l_0)-w_1^{(3)}(l_3)\hat{w}_2(l_3)+w_1^{(3)}(l_2)\hat{w}_2(l_2)\\
&+w_1''(l_3)\hat{w}_2{}'(l_3)-w_1''(l_2)\hat{w}_2{}'(l_2)+v_1'(l_2)\hat{v}_2(l_2)\\
&-v_1'(l_1)\hat{v}_2(l_1).
\end{aligned}
$$

Como $\hat{U}\in\mathbb{H}\times\mathbb{H}$, se tiene que $\hat{u}_2(l_0)=\hat{u}_2'(l_0)=\hat{w}_2(l_3)=\hat{w}_2'(l_3)=0$, $\hat{v}_2(l_1)=\hat{u}_2(l_1)$ y $\hat{v}_2(l_2)=\hat{w}_2(l_2)$. Se sigue entonces que

$$
\begin{aligned}
&b(U,(\hat{u}_2,\hat{v}_2,\hat{w}_2))\\
&\quad=-\left[u_1^{(3)}(l_1)+v_1'(l_1)\right]\hat{u}_2(l_1)+\left[w_1^{(3)}(l_2)+v_1'(l_2)\right]\hat{w}_2(l_2)+u_1''(l_1)\hat{u}_2'(l_1)\\
&\quad-w_1''(l_2)\hat{w}_2'(l_2)=0,\quad\forall\,\hat{U}\in\mathbb{H}\times\mathbb{H},
\end{aligned}
$$

si y solamente si

$$
\begin{aligned}
u_1^{(3)}(l_1)+v_1'(l_1)=&\;\;0,\\
w_1^{(3)}(l_2)+v_1'(l_2)=&\;\;0,\\
u_1''(l_1)=&\;\;0,\\
w_1''(l_2)=&\;\;0,
\end{aligned}
$$

las cuales son las condiciones de transmisión (1.6)-(1.9) descritas en la Sección 1, si hacemos $u_2=\partial_t u_1$ y $w_2=\partial_t w_1$. Lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 3.1. *$U \in \mathcal{H}$ satisface las condiciones de transmisión (1.6)-(1.9) en un sentido débil, si y solamente si*

$$\left\langle AU, \hat{U} \right\rangle = a(U, \hat{U}), \text{ para todo } \hat{U} \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}. \tag{3.15}$$

Recordemos que para $U = (u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2)$, AU está definido por:

$$AU := \Big(u_2, v_2, w_2, -(u_1^{(4)} - (D_{\rho_1} u_2')'), v_1'' - D_\beta v_2, -(w_1^{(4)} - (D_{\rho_2} w_2')') \Big). \tag{3.16}$$

Como nuestro operador A debe ser un operador en $\mathcal{H}$, asumiremos que nuestros amortiguamientos satisfacen las siguientes condiciones:

Para $(a_0, b_0) \subset I_1$, $(a_1, b_1) \subset I_2$, $(a_2, b_2) \subset I_3$, considere las funciones coeficientes

$$\begin{aligned} D_{\rho_1} &= \rho_1(x)\chi_{(a_0,b_0)}, \\ D_\beta &= \beta(x)\chi_{(a_1,b_1)}, \\ D_{\rho_2} &= \rho_2(x)\chi_{(a_2,b_2)}, \end{aligned}$$

donde $\rho_1 \in L^\infty(I_1)$, $\beta \in L^\infty(I_2)$ y $\rho_2 \in L^\infty(I_3)$ son tales que $\rho_1, \beta, \rho_2 \geq c_0 > 0$ en (a_0, b_0), (a_1, b_1), y (a_2, b_2) respectivamente, con

$$\begin{aligned} (D_{\rho_1} u')' \in L^2(I_1) \quad \forall u \in H^2_{l_0}, \\ (D_{\rho_2} w')' \in L^2(I_3) \quad \forall w \in H^2_{l_3}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Bajo las hipótesis anteriores, definimos

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad U \to \mathcal{A}U := AU, \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) := \{ & U \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} : u_1^{(4)} \in L^2(I_1),\, v_1'' \in L^2(I_2), \\ & w_1^{(4)} \in L^2(I_3),\ U \text{ satisface (1.6)-(1.9) en un sentido débil} \}. \end{aligned}$$

De esta forma, el problema (1.1)-(1.10) puede ser escrito de forma abstracta a través del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \mathcal{A}U \quad (t > 0), \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{3.19}$$

3.4. Problema bien propuesto

Ahora se mostrará que el problema (3.19) está bien propuesto, es decir, para cada $U \in D(\mathcal{A})$, (3.19) posee una única solución clásica la cual depende continuamente de U_0. Para ello, se mostrará que el operador $\mathcal{A}$ es el generador de un C_0-semigrupo de contracciones sobre $\mathcal{H}$.

Proposición 3.3. *Se verifica que*

a) $\mathcal{A}$ *es disipativo.*

b) $Id - \mathcal{A}$ *es sobreyectivo.*

c) $D(\mathcal{A})$ *es denso en* $\mathcal{H}$*.*

Demostración. Sea $U \in D(\mathcal{A})$. Puesto que ρ_1, β, $\rho_2 \geq c_0 > 0$, por (3.15) tenemos

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U \rangle &= - \langle D_{\rho_1} u_2', u_2' \rangle_{L^2(I_1)} - \langle D_{\rho_2} w_2', w_2' \rangle_{L^2(I_3)} - \langle D_\beta v_2, v_2 \rangle_{L^2(I_2)} \\
&= - \left(\int_{I_1} D_{\rho_1} |u_2'|^2 \, dx + \int_{I_3} D_{\rho_2} |w_2'|^2 \, dx + \int_{I_2} D_\beta |v_2|^2 \, dx \right) \\
&\leq -c_0 \left(\int_{a_0}^{b_0} |u_2'|^2 \, dx + \int_{a_2}^{b_2} |w_2'|^2 \, dx + \int_{a_1}^{b_1} |v_2|^2 \, dx \right) \\
&= -c_0 \left(\|u_2'\|^2_{L^2((a_0,b_0))} + \|w_2'\|^2_{L^2((a_2,b_2))} + \|v_2\|^2_{L^2((a_1,b_1))} \right) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

de donde se sigue la disipatividad de $\mathcal{A}$.

Para b) usaremos el teorema de Lax-Milgram. Sea $f = (f_1, g_1 h_1, f_2, g_2, h_2) \in \mathcal{H}$. Debemos mostrar que existe un $U = (u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2) \in D(\mathcal{A})$ tal que $(I - \mathcal{A})U = F$, esto es, encontrar un $U \in D(\mathcal{A})$ que satisfaga

$$\begin{aligned}
u_1 - u_2 &= f_1 \in H^2_{l_0}, && (3.20) \\
v_1 - v_2 &= g_1 \in H^1(I_2), && (3.21) \\
w_1 - w_2 &= h_1 \in H^2_{l_3}, && (3.22) \\
u_1^{(4)} + u_2 - (D_{\rho_1} u_2')' &= f_2 \in L^2(I_1), && (3.23) \\
-v_1'' + (1 + D_\beta) v_2 &= g_2 \in L^2(I_2), && (3.24) \\
w_1^{(4)} + w_2 - (D_{\rho_2} w_2')' &= h_2 \in L^2(I_3). && (3.25)
\end{aligned}$$

Combinando las ecuaciones (3.20)-(3.22) con (3.23)-(3.25), debemos resolver

$$\begin{aligned} u_1^{(4)} + u_1 - (D_{\rho_1} u_1')' &= f_1 + f_2 - (D_{\rho_1} f_1')', & (3.26)\\ -v_1'' + (1 + D_\beta) v_1 &= g_2 + (1 + D_\beta) g_1, & (3.27)\\ w_1^{(4)} + w_1 - (D_{\rho_2} w_1')' &= h_1 + h_2 - (D_{\rho_2} h_1')'. & (3.28) \end{aligned}$$

Se define el operador bilineal $\mathcal{B} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(Y, \Phi) := &\langle y_1, \phi_1 \rangle_{H^2_{l_0}} + \langle y_1, \phi_1 \rangle_{L^2(I_1)} + \langle D_{\rho_1} y_1', \phi_1' \rangle_{L^2(I_1)} + \langle y_2', \phi_2' \rangle_{L^2(I_2)} \\ &+ \langle y_2, \phi_2 \rangle_{L^2(I_2)} + \langle D_\beta y_2, \phi_2 \rangle_{L^2(I_2)} + \langle y_3, \phi_3 \rangle_{H^2_{l_3}} + \langle y_3, \phi_3 \rangle_{L^2(I_3)} \\ &+ \langle D_{\rho_2} y_3', \phi_3' \rangle_{L^2(I_3)}, \end{aligned}$$

con $Y = (y_1, y_2, y_3)$, $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \mathbb{H}$.

Note que,

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(Y, \Phi)| \leq\ &\|y_1''\|_{L^2(I_1)} \|\phi_1''\|_{L^2(I_1)} + \|y_1\|_{L^2(I_1)} \|\phi_1\|_{L^2(I_1)} + \|D_{\rho_1} y_1'\|_{L^2(I_1)} \|\phi_1'\|_{L^2(I_1)} \\ &+ \|y_2'\|_{L^2(I_2)} \|\phi_2'\|_{L^2(I_1)} + \|y_2\|_{L^2(I_2)} \|\phi_2\|_{L^2(I_2)} + \|D_\beta y_2\|_{L^2(I_2)} \|\phi_2\|_{L^2(I_2)} \\ &+ \|y_3''\|_{L^2(I_3)} \|\phi_3''\|_{L^2(I_3)} + \|y_3\|_{L^2(I_3)} \|\phi_3\|_{L^2(I_3)} + \|D_{\rho_2} y_3'\|_{L^2(I_3)} \|\phi_3'\|_{L^2(I_3)} \\ \leq\ &\|y_1''\|_{L^2(I_1)} \|\phi_1''\|_{L^2(I_1)} + \|y_1\|_{L^2(I_1)} \|\phi_1\|_{L^2(I_1)} + k_1 \|y_1'\|_{L^2(I_1)} \|\phi_1'\|_{L^2(I_1)} \\ &+ \|y_2'\|_{L^2(I_2)} \|\phi_2'\|_{L^2(I_1)} + (k_2 + 1) \|y_2\|_{L^2(I_2)} \|\phi_2\|_{L^2(I_2)} + \|y_3''\|_{L^2(I_3)} \|\phi_3''\|_{L^2(I_3)} \\ &+ \|y_3\|_{L^2(I_3)} \|\phi_3\|_{L^2(I_3)} + k_3 \|y_3'\|_{L^2(I_3)} \|\phi_3'\|_{L^2(I_3)} \\ \leq\ &\hat{C}(\|y_1''\|_{L^2(I_1)} \|\phi_1''\|_{L^2(I_1)} + \|y_1\|_{L^2(I_1)} \|\phi_1\|_{L^2(I_1)} + \|y_1'\|_{L^2(I_1)} \|\phi_1'\|_{L^2(I_1)} \\ &+ \|y_2'\|_{L^2(I_2)} \|\phi_2'\|_{L^2(I_1)} + \|y_2\|_{L^2(I_2)} \|\phi_2\|_{L^2(I_2)} + \|y_3''\|_{L^2(I_3)} \|\phi_3''\|_{L^2(I_3)} \\ &+ \|y_3\|_{L^2(I_3)} \|\phi_3\|_{L^2(I_3)} + \|y_3'\|_{L^2(I_3)} \|\phi_3'\|_{L^2(I_3)}) \\ \leq\ &C \|Y\|_{\mathbb{H}} \|\Phi\|_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

Para la coercitividad tenemos

$$\begin{aligned} \|Y\|^2_{\mathbb{H}} &= \|y_1\|^2_{H^2_{l_0}} + \|y_2'\|^2_{L^2(I_2)} + \|y_3\|^2_{H^2_{l_3}} \\ &\leq \|y_1''\|^2_{L^2(I_1)} + \|y_1\|^2_{L^2(I_1)} + \|D_{\rho_1} y_1'\|_{L_2(I_1)} \|y_1'\|_{L^2(I_1)} \\ &+ \|y_2'\|^2_{L^2(I_2)} + \|y_2\|^2_{L^2(I_2)} + \|D_\beta y_2\|_{L_2(I_2)} \|y_2\|_{L^2(I_2)} \\ &+ \|y_3''\|^2_{L^2(I_3)} + \|y_3\|^2_{L^2(I_3)} + \|D_{\rho_2} y_3'\|_{L_2(I_3)} \|y_3'\|_{L^2(I_3)} \\ &= \mathcal{B}(Y, Y). \end{aligned}$$

Se define ahora, para $(f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2) \in \mathcal{H}$, el funcional $\Lambda : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} \Lambda(\Phi) := &\langle f_1 + f_2, \phi_1 \rangle_{L^2(I_1)} + \langle D_{\rho_1} f_1', \phi_1' \rangle_{L^2(I_1)} + \langle g_2 + (1 + D_\beta) g_1, \phi_2 \rangle_{L^2(I_2)} \\ &+ \langle h_1 + h_2, \phi_3 \rangle_{L^2(I_3)} + \langle D_{\rho_2} h_1', \phi_3' \rangle_{L^2(I_3)}, \end{aligned}$$

para todo $\Phi \in \mathbb{H}$.

Por la linealidad de la derivada y la integral, se concluye que Λ es lineal. Para la continuidad:

$$\begin{aligned}|\Lambda(\Phi)| &\leq \|f_1+f_2\|_{L^2(I_1)}\|\phi_1\|_{L^2(I_1)} + \|D_{\rho_1}f_1'\|_{L^2(I_1)}\|\phi_1'\|_{L^2(I_1)} \\ &+ \|g_2+(1+D_\beta)g_1\|_{L^2(I_2)}\|\phi_2\|_{L^2(I_2)} + \|h_1+h_2\|_{L^2(I_3)}\|\phi_3\|_{L^2(I_3)} \\ &+ \|D_{\rho_2}h_1'\|_{L^2(I_3)}\|\phi_3'\|_{L^2(I_3)} \\ &\leq c_1\|\phi_1\|_{L^2(I_1)} + c_2\|\phi_1'\|_{L^2(I_1)} + c_3\|\phi_2\|_{L^2(I_2)} + c_4\|\phi_3\|_{L^2(I_3)} + c_5\|\phi_3'\|_{L^2(I_3)} \\ &\leq C\|\Phi\|_{\mathbb{H}}.\end{aligned}$$

Como las hipótesis del teorema de Lax-Milgram están satisfechas, entonces existe un único $Y := (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{H}$ tal que

$$\mathcal{B}(Y,\Phi) = \Lambda(\Phi), \qquad \text{para todo } \Phi \in \mathbb{H}. \tag{3.29}$$

En particular, si $\phi_1 \in C_0^\infty(I_1)$ y $\phi_2 = \phi_3 = 0$, obtenemos en (3.29)

$$\begin{aligned}&\langle y_1,\phi_1\rangle_{H^2_{l_0}} + \langle y_1,\phi_1\rangle_{L^2(I_1)} + \langle D_{\rho_1}y_1',\phi_1'\rangle_{L^2(I_1)} \\ &\quad = \langle f_1+f_2,\phi_1\rangle_{L^2(I_1)} + \langle D_{\rho_1}f_1',\phi_1'\rangle_{L^2(I_1)}.\end{aligned}$$

La expresión anterior puede ser escrita en un sentido distribucional para $\phi_1 \in C_0^\infty(I_1)$, como

$$\left\langle y_1^{(4)} - (D_{\rho_1}y_1')' + y_1, \phi_1 \right\rangle = \langle f_1+f_2-(D_{\rho_1}f_1')', \phi_1\rangle.$$

De lo anterior se obtiene

$$y_1^{(4)} - (D_{\rho_1}y_1')' + y_1 = f_1+f_2-(D_{\rho_1}f_1')',$$

en sentido distribucional. Como y_1, f_1, $f_2, (D_{\rho_1}y_1')'$ y $(D_{\rho_1}f_1')'$ están todos en $L^2(I_1)$, esto conlleva a que $y_1^{(4)} \in L^2(I_1)$. De forma análoga se muestra que $y_3^{(4)} \in L^2(I_3)$.

Por otro lado, si $\phi_2 \in C_0^\infty(I_2)$ y $\phi_1 = \phi_3 = 0$, obtenemos en (3.29)

$$\langle y_2',\phi_2'\rangle_{L^2(I_2)} + \langle y_2,\phi_2\rangle_{L^2(I_2)} + \langle D_\beta y_2,\phi_2\rangle_{L^2(I_2)} = \langle g_2+(1+D_\beta)g_1,\phi_2\rangle_{L^2(I_2)},$$

expresión que puede ser escrita en un sentido distribucional para $\phi_2 \in C_0^\infty(I_2)$, como

$$\langle -y_2'' + (1+D_\beta)y_2, \phi_2\rangle = \langle g_2+(1+D_\beta)g_1,\phi_2\rangle,$$

lo cual implica que

$$-y_2'' + (1+D_\beta)y_2 = g_2+(1+D_\beta)g_1,$$

en un sentido distribucional. Como y_1, y_2, g_1, g_2, $D_\beta y_2$ y $D_\beta g_1$ están en $L^2(I_2)$, se concluye que $y_2'' \in L^2(I_2)$.

Definamos $(u_1, v_1, w_1) := (y_1, y_2, y_3)$, donde (y_1, y_2, y_3) es la única solución de (3.29) y $(u_2, v_2, w_2) = (u_1 - f_1, v_1 - g_1, w_1 - h_1)$, por lo tanto $U := (u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2) \in \mathbb{H}\times\mathbb{H}$ con $u_1^{(4)} \in L^2(I_1)$, $v_1'' \in L^2(I_2)$ y $w_1^{(4)} \in L^2(I_3)$.

Ahora, de (3.29) obtenemos que para todo $\Phi \in \mathbb{H}$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\langle y_1, \phi_1\rangle_{H^2_{l_0}} + \langle y_1, \phi_1\rangle_{L^2(I_1)} + \langle D_{\rho_1} y_1', \phi_1'\rangle_{L^2(I_1)} + \langle y_2', \phi_2'\rangle_{L^2(I_2)} + \langle y_2, \phi_2\rangle_{L^2(I_2)} \\
&+ \langle D_\beta y_2, \phi_2\rangle_{L^2(I_2)} + \langle y_3, \phi_3\rangle_{H^2_{l_3}} + \langle y_3, \phi_3\rangle_{L^2(I_3)} + \langle D_{\rho_2} y_3', \phi_3'\rangle_{L^2(I_3)} \\
&= \langle f_1 + f_2, \phi_1\rangle_{L^2(I_1)} + \langle D_{\rho_1} f_1', \phi_1'\rangle_{L^2(I_1)} + \langle g_2 + (1 + D_\beta) g_1, \phi_2\rangle_{L^2(I_2)} \\
&+ \langle h_1 + h_2, \phi_3\rangle_{L^2(I_3)} + \langle D_{\rho_2} h_1', \phi_3'\rangle_{L^2(I_3)},
\end{aligned}$$

la cual puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
&\langle y_1 - (f_1 + f_2), \phi_1\rangle_{L^2(I_1)} + \langle y_2 - (g_1 + g_2), \phi_2\rangle_{L^2(I_2)} + \langle y_3 - (h_1 + h_2), \phi_3\rangle_{L^2(I_3)} \\
&= - \langle y_1, \phi_1\rangle_{H^2_{l_0}} - \langle D_{\rho_1}(y_1 - f_1)', \phi_1'\rangle_{L^2(I_1)} - \langle y_2', \phi_2'\rangle_{L^2(I_2)} - \langle D_\beta(y_2 - g_1), \phi_2\rangle_{L^2(I_2)} \\
&- \langle y_3, \phi_3\rangle_{H^2(l_3)} - \langle D_{\rho_2}(y_3 - h_1)', \phi_3'\rangle_{L^2(I_3)}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Sean $U = (u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2)$ definido anteriormente, y $\hat{U} = (\hat{u}_1, \hat{v}_1, \hat{w}_1, \hat{u}_2, \hat{v}_2, \hat{w}_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ cualquiera. Entonces

$$\begin{aligned}
\left\langle AU, \hat{U}\right\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle u_2, \hat{u}_1\rangle_{H^2_{l_0}} + \langle v_2', \hat{v}_1{}'\rangle_{L^2(I_2)} + \langle w_2, \hat{w}_1\rangle_{H^2_{l_3}} \\
&- \left\langle u_1^{(4)} - (D_{\rho_1} u_2')', \hat{u}_2\right\rangle_{L^2(I_1)} + \langle v_1'' - D_\beta v_2, \hat{v}_2\rangle_{L^2(I_2)} \\
&- \left\langle w_1^{(4)} - (D_{\rho_2} w_2')', \hat{w}_2\right\rangle_{L^2(I_3)}.
\end{aligned}$$

De (3.26), (3.27) y (3.28), se obtiene

$$\begin{aligned}
- \left\langle u_1^{(4)} - (D_{\rho_1} u_2')', \hat{u}_2\right\rangle_{L^2(I_1)} &= \langle u_1 - (f_1 + f_2), \hat{u}_2\rangle_{L^2(I_1)}, \\
\langle v_1'' - D_\beta v_2, \hat{v}_2\rangle_{L^2(I_2)} &= \langle v_1 - (g_1 + g_2), \hat{v}_2\rangle_{L^2(I_2)}, \\
- \left\langle w_1^{(4)} - (D_{\rho_2} w_2')', \hat{w}_2\right\rangle_{L^2(I_3)} &= \langle w_1 - (h_1 + h_2), \hat{w}_2\rangle_{L^2(I_3)}.
\end{aligned}$$

Sumando las expresiones anteriores, usando (3.30) y teniendo en cuenta que $(u_2, v_2, w_2) = (u_1 - f_1, v_1 - g_1, w_1 - h_1)$ se concluye que:

$$\begin{aligned}
&- \left\langle u_1^{(4)} - (D_{\rho_1} u_2')', \hat{u}_2\right\rangle_{L^2(I_1)} + \langle v_1'' - D_\beta v_2, \hat{v}_2\rangle_{L^2(I_2)} - \left\langle w_1^{(4)} - (D_{\rho_2} w_2')', \hat{w}_2\right\rangle_{L^2(I_3)} \\
&= \langle u_1 - (f_1 + f_2), \hat{u}_2\rangle_{L^2(I_1)} + \langle v_1 - (g_1 + g_2), \hat{v}_2\rangle_{L^2(I_2)} + \langle w_1 - (h_1 + h_2), \hat{w}_2\rangle_{L^2(I_3)} \\
&= - \langle u_1, \hat{u}_2\rangle_{H^2_{l_0}} - \langle D_{\rho_1}(u_1 - f_1)', \hat{u}_2{}'\rangle_{L^2(I_1)} - \langle v_1', \hat{v}_2{}'\rangle_{L^2(I_2)} - \langle D_\beta(v_1 - g_1), \hat{v}_2\rangle_{L^2(I_2)} \\
&- \langle w_1, \hat{w}_2\rangle_{H^2(l_3)} - \langle D_{\rho_2}(w_1 - h_1)', \hat{w}_2{}'\rangle_{L^2(I_3)} \\
&= - \langle u_1, \hat{u}_2\rangle_{H^2_{l_0}} - \langle D_{\rho_1} u_2', \hat{u}_2{}'\rangle_{L^2(I_1)} - \langle v_1', \hat{v}_2{}'\rangle_{L^2(I_2)} - \langle D_\beta v_2, \hat{v}_2\rangle_{L^2(I_2)} \\
&- \langle w_1, \hat{w}_2\rangle_{H^2(l_3)} - \langle D_{\rho_2} w_2', \hat{w}_2{}'\rangle_{L^2(I_3)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, reemplazando la igualdad anterior en $\left\langle AU, \hat{U} \right\rangle_{\mathcal{H}}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle AU, \hat{U} \right\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle u_2, \hat{u}_1 \rangle_{H^2_{l_0}} + \langle v_2', \hat{v}_1' \rangle_{L^2(I_2)} + \langle w_2, \hat{w}_1 \rangle_{H^2_{l_3}} - \left\langle u_1^{(4)} - (D_{\rho_1} u_2')', \hat{u}_2 \right\rangle_{L^2(I_1)} \\
&\quad + \langle v_1'' - D_\beta v_2, \hat{v}_2 \rangle_{L^2(I_2)} - \left\langle w_1^{(4)} - (D_{\rho_2} w_2')', \hat{w}_2 \right\rangle_{L^2(I_3)} \\
&= \langle u_2, \hat{u}_1 \rangle_{H^2_{l_0}} + \langle v_2', \hat{v}_1' \rangle_{L^2(I_2)} + \langle w_2, \hat{w}_1 \rangle_{H^2_{l_3}} - \langle u_1, \hat{u}_2 \rangle_{H^2_{l_0}} - \langle D_{\rho_1} u_2', \hat{u}_2' \rangle_{L^2(I_1)} \\
&\quad - \langle v_1', \hat{v}_2' \rangle_{L^2(I_2)} - \langle D_\beta v_2, \hat{v}_2 \rangle_{L^2(I_2)} - \langle w_1, \hat{w}_2 \rangle_{H^2(l_3)} - \langle D_{\rho_2} w_2', \hat{w}_2' \rangle_{L^2(I_3)} \\
&= a(U, \hat{U}).
\end{aligned}$$

Es decir, U satisface las condiciones de transmisión (1.6)-(1.9) en un sentido débil, por lo que se concluye que $U \in D(\mathcal{A})$, de donde b) se sigue.

En virtud de los items a) y b) y el hecho de que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, se sigue que $D(\mathcal{A})$ es denso en $\mathcal{H}$. □

Teorema 3.1. *El operador $\mathcal{A}$ es el generador de un C_0-semigrupo de contracciones sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. En consecuencia, para cada $U_0 \in D(\mathcal{A})$ el problema de Cauchy (3.19) posee una única solución clásica $U \in C^1([0,\infty), \mathcal{H})$.*

Demostración. De acuerdo a la Proposición 3.3 y el teorema de Lumer-Phillips, obtenemos que $\mathcal{A}$ es el generador de un C_0-semigrupo de contracciones sobre $\mathcal{H}$. Por lo tanto, para cada $U_0 \in D(\mathcal{A})$, el problema de Cauchy (3.19) tiene una única solución clásica $U \in C^1([0,\infty), \mathcal{H})$ la cual depende de manera continua de la condición inicial U_0, esto es, el problema está bien propuesto (ver Teorema 2.12).

□

4. Estabilidad exponencial

En este capítulo se demostrará que el C_0-semigrupo de contracciones $(S(t))_{t\geq 0}$ generado por el operador $\mathcal{A}$ es exponencialmente estable, si $(a_i, b_i) = I_{i+1}$, $i = 0, 1, 2$. Para lograr este cometido, haremos uso del método de energía, por lo tanto se comienza definiendo la energía total $E(t)$, asociada al sistema de ecuaciones (1.1)-(1.3), y se mostrará que esta es disipativa. Posteriormente, se definirá una función diferenciable no negativa relacionada a la energía $E(t)$, la cual nos servirá para probar, por medio del Lema de Grönwall, que el decaimiento que presenta la energía $E(t)$ es de tipo exponencial, y por lo tanto, la solución al problema de Cauchy (3.19) decae exponencialmente a medida que el tiempo transcurre.

Sea $U(t)$ la solución clásica del problema de Cauchy (3.19). Se. define la energía total del sistema $E(t)$ como

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2}\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|u_1(t)\|_{H^2_{l_0}}^2 + \|v_1'(t)\|_{L^2(I_2)} + \|w_1(t)\|_{H^2_{l_3}}^2 + \|u_2(t)\|_{L^2(I_1)}^2 \\ &\qquad + \|v_2(t)\|_{L^2(I_2)} + \|w_2(t)\|_{L^2(I_3)}\Big). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\langle U(t), U(t)\rangle_{\mathcal{H}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\langle U(t), U'(t)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle U'(t), U(t)\rangle_{\mathcal{H}}\right) \\ &= \langle \mathcal{A}U(t), U(t)\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\leq -c_0\Big(\|u_2'\|^2_{L^2((a_0,b_0))} + \|w_2'\|^2_{L^2((a_2,b_2))} + \|v_2\|^2_{L^2((a_1,b_1))}\Big) \end{aligned}$$

Teorema 4.1. *Si $(a_i, b_i) = I_{i+1}$, $i = 0, 1, 2$, entonces, el semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable, esto es, para cada $U_0 \in D(\mathcal{A})$ y $U(t) := S(t)U_0\,(t \geq 0)$ se cumple:*

$$E(t) \leq Ce^{-\alpha t}E(0)$$

con constantes positivas C y α.

Demostración. Para $U_0 \in D(\mathcal{A})$ y $t \geq 0$, sean

$$U(t) := (u_1(t), v_1(t), w_1(t), u_2(t), v_2(t), w_2(t))^\top := S(t)U_0,$$

y

$$F(t) := \langle u_1(t), u_2(t)\rangle_{L^2(I_1)} + \langle v_1(t), v_2(t)\rangle_{L^2(I_2)} + \langle w_1(t), w_2(t)\rangle_{L^2(I_3)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
|F(t)| &\leq |\langle u_1(t), u_2(t)\rangle_{L^2(I_1)}| + |\langle v_1(t), v_2(t)\rangle_{L^2(I_2)}| + |\langle w_1(t), w_2(t)\rangle_{L^2(I_3)}| \\
&\leq \|u_1(t)\|_{L^2(I_1)}\|u_2(t)\|_{L^2(I_1)} + \|v_1(t)\|_{L^2(I_2)}\|v_2(t)\|_{L^2(I_2)} \\
&\quad + \|w_1(t)\|_{L^2(I_3)}\|w_2(t)\|_{L^2(I_3)} \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(\|u_1(t)\|^2_{L^2(I_1)} + \|u_2(t)\|^2_{L^2(I_1)} + \|v_1(t)\|^2_{L^2(I_2)} + \|v_2(t)\|^2_{L^2(I_2)} \\
&\quad + \|w_1(t)\|^2_{L^2(I_3)} + \|w_2(t)\|^2_{L^2(I_3)}\Big) \\
&\leq \frac{1}{2}\|U(t)\|^2_X,
\end{aligned}$$

con $X = H^2(I_1) \times H^1(I_2) \times H^2(I_3) \times \mathbb{L}$. Debido a la equivalencia entre la norma estándar en X y la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, existe $c_1 > 0$ tal que

$$|F(t)| \leq c_1 E(t). \tag{4.2}$$

Ahora, como $\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t)$, esto es,

$$\begin{aligned}
(\dot{u_1}(t), \dot{v_1}(t), \dot{w_1}(t), \dot{u_2}(t), \dot{v_2}(t), \dot{w_2}(t)) = (u_2(t), v_2(t), w_2(t), -u_1(t)^{(4)} + (D_{\rho_1}u_2'(t))', \\
v_1(t)'' - D_\beta v_2(t), -w_1(t)^{(4)} + (D_{\rho_2}w_2'(t))'),
\end{aligned}$$

con $\dot{z}(t) := \frac{d}{dt}z(t)$. Se sigue de (3.16) con $\hat{U}(t) := (0, 0, 0, u_1(t), v_1(t), w_1(t))$ que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &= \langle \dot{u_1}(t), u_2(t)\rangle_{L^2(I_1)} + \langle u_1(t), \dot{u_2}(t)\rangle_{L^2(I_1)} + \langle \dot{v_1}(t), v_2(t)\rangle_{L^2(I_2)} \\
&\quad + \langle v_1(t), \dot{v_2}(t)\rangle_{L^2(I_2)} + \langle \dot{w_1}(t), w_2(t)\rangle_{L^2(I_3)} + \langle w_1(t), \dot{w_2}(t)\rangle_{L^2(I_3)} \\
&= \|u_2(t)\|^2_{L^2(I_1)} + \|v_2(t)\|^2_{L^2(I_2)} + \|w_2(t)\|^2_{L^2(I_3)} + \Big\langle \hat{U}(t), \mathcal{A}U(t)\Big\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \|u_2(t)\|^2_{L^2(I_1)} + \|v_2(t)\|^2_{L^2(I_2)} + \|w_2(t)\|^2_{L^2(I_3)} - \|u_1(t)\|^2_{H^2_{l_0}} \\
&\quad - \langle D_{\rho_1}u_1'(t), u_2'(t)\rangle_{L^2(I_1)} - \|v_1'(t)\|^2_{L^2(I_2)} - \langle D_\beta v_1(t), v_2(t)\rangle_{L^2(I_2)} \\
&\quad - \|w_1(t)\|^2_{L^2(I_3)} - \langle D_{\rho_2}w_1'(t), w_2'(t)\rangle_{L^2(I_3)} \\
&= \|(u_2(t), v_2(t), w_2(t))\|^2_{\mathbb{L}} - \|(u_1(t), v_1(t), w_1(t))\|^2_{\mathbb{H}} \\
&\quad - \langle (D_{\rho_1}u_1'(t), D_\beta v_1(t), D_{\rho_2}w_1'(t)), (u_2'(t), v_2(t), w_2'(t))\rangle_{\mathbb{L}}\,.
\end{aligned}$$

Sean $\delta > 0$ y $k := \max\{\|D_{\rho_1}\|_\infty, \|D_\beta\|_\infty, \|D_{\rho_2}\|_\infty\}$. Por la desigualdad de Young y la desigualdad de Poincaré, existen constantes $C_\delta > 0$ y $c_2 > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
&- \langle (D_{\rho_1}u_1'(t), D_\beta v_1(t), D_{\rho_2}w_1'(t)), (u_2'(t), v_2(t), w_2'(t))\rangle_{\mathbb{L}} \\
&\leq \left|\langle (D_{\rho_1}u_1'(t), D_\beta v_1(t), D_{\rho_2}w_1'(t)), (u_2'(t), v_2(t), w_2'(t))\rangle_{\mathbb{L}}\right| \\
&\leq \|(D_{\rho_1}u_1'(t), D_\beta v_1(t), D_{\rho_2}w_1'(t))\|_{\mathbb{L}}\ \|(u_2'(t), v_2(t), w_2'(t))\|_{\mathbb{L}} \\
&\leq \delta\, \|(D_{\rho_1}u_1'(t), D_\beta v_1(t), D_{\rho_2}w_1'(t))\|^2_{\mathbb{L}} + C_\delta\, \|(u_2'(t), v_2(t), w_2'(t))\|^2_{\mathbb{L}} \\
&\leq k^2\delta\|(u_1'(t), v_1(t), w_1'(t))\|^2_{\mathbb{L}} + C_\delta\, \|(u_2'(t), v_2(t), w_2'(t))\|^2_{\mathbb{L}} \\
&\leq c_2k^2\delta\|u_1(t), v_1(t), w_1(t)\|^2_{\mathbb{H}} + C_\delta\, \|(u_2'(t), v_2(t), w_2'(t))\|^2_{\mathbb{L}}\,.
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Poincaré generalizada a $u_2(t)$ y $w_2(t)$, y tomando δ suficientemente pequeño tal que $c_2k^2\delta < \frac{1}{2}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t) &\leq \|(u_2(t), v_2(t), w_2(t))\|_{\mathbb{L}}^2 - \frac{1}{2}\|u_1(t), v_1(t), w_1(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\ &\quad + C_\delta \|(u_2'(t), v_2(t), w_2'(t))\|_{\mathbb{L}}^2 \\ &\leq c_3 \|(u_2'(t), v_2(t), w_2'(t))\|_{\mathbb{L}}^2 - \frac{1}{2}\|u_1(t), v_1(t), w_1(t)\|_{\mathbb{H}}^2,\end{aligned} \tag{4.3}$$

para una constante positiva c_3. Ahora, sea $L(t) := c_4E(t)+F(t)$ con c_4 una constante positiva suficientemente grande tal que $2c_1 \leq c_4$ y $-c_4c_0 + c_3 \leq -\frac{1}{2}$. De (4.3) y la desigualdad de Poincaré aplicada a u_2 y w_2, existen constantes c_5 y c_6 tales que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t) &= c_4\frac{d}{dt}E(t) + \frac{d}{dt}F(t) \\ &\leq c_4\left(-c_0\|(u_2'(t), v_2(t), w_2'(t))\|_{\mathbb{L}}^2\right) + c_3\|(u_2'(t), v_2(t), w_2'(t))\|_{\mathbb{L}}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\|u_1(t), v_1(t), w_1(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\ &\leq -\frac{1}{2}\|(u_2'(t), v_2(t), w_2'(t))\|_{\mathbb{L}}^2 - \frac{1}{2}\|u_1(t), v_1(t), w_1(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\ &\leq -\frac{c_5}{2}\|(u_2(t), v_2(t), w_2(t))\|_{\mathbb{L}}^2 - \frac{1}{2}\|u_1(t), v_1(t), w_1(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\ &\leq -\operatorname{mín}\{c_5, 1\}\frac{1}{2}\|U(t)\|_{\mathbb{H}\times\mathbb{L}}^2 \\ &= -c_6E(t).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Como $|F(t)| \leq c_1E(t) \leq \frac{c_4}{2}E(t)$, obtenemos

$$L(t) = c_4E(t) + F(t) \leq c_4E(t) + \frac{c_4}{2}E(t) = \frac{3c_4}{2}E(t),$$

y

$$L(t) = c_4E(t) + F(t) \geq c_4E(t) - \frac{c_4}{2}E(t) = \frac{c_4}{2}E(t),$$

esto es

$$\frac{c_4}{2}E(t) \leq L(t) \leq \frac{3c_4}{2}E(t).$$

Por lo tanto, de (4.4) obtenemos que $\frac{d}{dt}L(t) \leq -\alpha L(t)$, con $\alpha := \frac{2c_6}{3c_4}$. Por el lema de Gronwall, $L(t) \leq e^{-\alpha t}L(0)$, lo cual implica

$$E(t) \leq \frac{2}{c_4}L(t) \leq \frac{2}{c_4}e^{-\alpha t}L(0) \leq 3e^{-\alpha t}E(0).$$

De esta manera, el semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable. □

5. Conclusiones

Se resaltan dos resultados importantes en este trabajo. El primero, trata sobre la existencia y unicidad de la solución y su dependencia continua de las condiciones iniciales, para el sistema de ecuaciones (1.1)-(1.10) el cual modela el movimiento transversal de una estructura barra-banda-barra, donde cada barra presenta un amortiguamiento localizado de tipo estructural y la banda presenta un amortiguamiento friccional local. En un segundo lugar, encontramos que, si los amortiguamientos respectivos a cada pieza de la estructura se aplican de forma total, la energía neta del sistema presenta un decaimiento de tipo exponencial. Por otro lado, si en lugar de aplicar los amortiguamientos de forma total, los consideramos de forma local, esto, es si $(a_i, b_i) \subsetneq I_{i+1}$, $i = 0, 1, 2$, no se tienen aún resultados sobre la estabilidad exponencial de la estructura; sin embargo, este análisis se considerará en futuros trabajos.

6. Deducción de las condiciones de transmisión

En este capítulo se mostrará la deducción de las condiciones de transmisión (1.6)-(1.9) presentes en la descripción del problema. El objetivo es formular en un sentido "débil"nuestro sistema de ecuaciones (1.1)-(1.3), usando la condición de frontera (1.4), para así obtener más información sobre el espacio donde vive la solución de nuestro sistema de ecuaciones.

Considere las ecuaciones (1.1)-(1.3), y las funciones $\phi \in C^\infty(I_1), \varphi \in C^\infty(I_2)$ y $\psi \in C^\infty(I_3)$ con

$$\begin{aligned} \phi(l_0) = \phi'(l_0) = 0, &\quad \psi(l_3) = \psi'(l_3) = 0, \\ \phi(l_1) = \varphi(l_1), &\quad \varphi(l_2) = \psi(l_2). \end{aligned}$$

Multiplicando las ecuaciones (1.1)-(1.3) por las funciones inmediatamente definidas arriba e integrando, obtenemos

$$\begin{aligned} \int\limits_{I_1} \left[\ddot{u}\phi + u^{(4)} - (D_{\rho_1}\dot{u}')'\phi\right] dx + \int\limits_{I_2} \left[\ddot{v}\varphi - v''\varphi + D_\beta \dot{v}\varphi\right] dx \\ + \int\limits_{I_3} \left[\ddot{w}\psi + w^{(4)} - (D_{\rho_2}\dot{w}')'\psi\right] dx = 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde $\dot{z} := \frac{d}{dt}z(t)$ y $\ddot{z} := \frac{d^2}{dt^2}z(t)$.

Por un lado, integrando por partes, obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \int\limits_{I_1} u^{(4)}\phi\, dx &= u^{(3)}\phi|_{l_0}^{l_1} - \int\limits_{I_1} u^{(3)}\phi'\, dx = u^{(3)}\phi|_{l_0}^{l_1} - \left(u''\phi'|_{l_0}^{l_1} - \int\limits_{I_1} u''\phi''\, dx \right), \\ \int\limits_{I_3} w^{(4)}\psi\, dx &= w^{(3)}\psi|_{l_2}^{l_3} - \int\limits_{I_3} w^{(3)}\psi'\, dx = w^{(3)}\psi|_{l_2}^{l_3} - \left(u''\psi'|_{l_2}^{l_3} - \int\limits_{I_3} w''\psi''\, dx \right), \\ \int\limits_{I_1} (D_{\rho_1}\dot{u}')'\phi\, dx &= -\int\limits_{I_1} D_{\rho_1}\dot{u}'\phi'\, dx, \\ \int\limits_{I_3} (D_{\rho_2}\dot{w}')'\psi\, dx &= -\int\limits_{I_3} D_{\rho_2}\dot{w}'\psi'\, dx, \\ \int\limits_{I_2} v''\varphi\, dx &= v'\varphi|_{l_1}^{l_2} - \int\limits_{I_2} v'\varphi'\, dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto (6.1) quedaría de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{I_1} \left[\ddot{u}\phi + u^{(4)} - (D_{\rho_1}\dot{u}')'\phi\right] dx + \int\limits_{I_2} \left[\ddot{v}\varphi - v''\varphi + D_\beta \dot{v}\varphi\right] dx \\
+ \quad &\int\limits_{I_3} \left[\ddot{w}\psi + w^{(4)} - (D_{\rho_2}\dot{w}')'\psi\right] dx \\
= \quad &\int_{I_1} \ddot{u}\phi\, dx + \int_{I_1} u''\phi''\, dx + \int_{I_1} D_{\rho_1}\dot{u}'\phi'\, dx + \int_{I_2} \ddot{v}\varphi\, dx + \int_{I_2} v'\varphi'\, dx + \int_{I_2} D_\beta \dot{v}\varphi\, dx \\
+ \quad &\int_{I_3} \ddot{w}\psi\, dx + \int_{I_3} w''\psi'', dx + \int_{I_3} D_{\rho_2}\dot{w}'\psi'\, dx \\
+ \quad & u^{(3)}(l_1)\phi(l_1) - u^{(3)}(l_0)\underbrace{\phi(l_0)}_{=0} - u''(l_1)\phi'(l_1) + u''(l_0)\underbrace{\phi'(l_0)}_{=0} - v'(l_2)\underbrace{\varphi(l_2)}_{=\psi(l_2)} + v'(l_1)\underbrace{\varphi(l_1)}_{=\phi(l_1)} \\
+ \quad & w^{(3)}(l_3)\underbrace{\psi(l_3)}_{=0} - w^{(3)}(l_2)\psi(l_2) - w''(l_3)\underbrace{\psi'(l_3)}_{=0} + w''(l_2)\psi'(l_2) = 0.
\end{aligned}
$$

Lo anterior puede reescribirse como

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{I_1} \left[\ddot{u}\phi + u^{(4)} - (D_{\rho_1}\dot{u}')'\phi\right] dx + \int\limits_{I_2} \left[\ddot{v}\varphi - v''\varphi + D_\beta \dot{v}\varphi\right] dx \\
+ \quad &\int\limits_{I_3} \left[\ddot{w}\psi + w^{(4)} - (D_{\rho_2}\dot{w}')'\psi\right] dx \\
= \quad &\int_{I_1} \ddot{u}\phi\, dx + \int_{I_1} u''\phi''\, dx + \int_{I_1} D_{\rho_1}\dot{u}'\phi'\, dx + \int_{I_2} \ddot{v}\varphi\, dx + \int_{I_2} v'\varphi'\, dx + \int_{I_2} D_\beta \dot{v}\varphi\, dx \\
+ \quad &\int_{I_3} \ddot{w}\psi\, dx + \int_{I_3} w''\psi'', dx + \int_{I_3} D_{\rho_2}\dot{w}'\psi'\, dx \\
+ \quad & (u^{(3)}(l_1) + v'(l_1))\phi(l_1) - (w^{(3)}(l_2) + v'(l_2))\psi(l_2) - u''(l_1)\phi'(l_1) + w''(l_2)\psi'(l_2) = 0,
\end{aligned}
$$

donde la suma de las integrales corresponde a la formulación débil de nuestro problema. Es por tanto que la suma de las integrales es igualada a cero. Lo anterior nos lleva a considerar que

$$
\begin{aligned}
&(u^{(3)}(l_1) + v'(l_1))\phi(l_1) - (w^{(3)}(l_2) + v'(l_2))\psi(l_2) \\
&- u''(l_1)\phi'(l_1) + w''(l_2)\psi'(l_2) = 0.
\end{aligned} \tag{6.2}
$$

Puesto que (6.2) vale para cualquier ϕ, φ y ψ, podemos considerar los casos:

- $\psi(l_2) = \phi_x(l_1) = \psi'(l_2) = 0$, lo que implica

$$u^{(3)}(l_1) + v'(l_1) = 0.$$

- $\phi(l_1) = \phi'(l_1) = \psi'(l_2) = 0$, y por tanto
$$w^{(3)}(l_2) + v'(l_2) = 0.$$
- $\phi(l_1) = \psi'(l_2) = \psi(l_2) = 0$, lo que implica
$$u''(l_1) = 0.$$
- $\phi(l_1) = \phi'(l_1) = \psi(l_2) = 0$, con lo que obtenemos
$$w''(l_2) = 0.$$

De lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned} u^{(3)}(l_1,t) + v'(l_1,t) &= 0, \quad t \in (0,\infty), \\ w^{(3)}(l_2,t) + v'(l_2,t) &= 0, \quad t \in (0,\infty), \\ u''(l_1,t) &= 0, \quad t \in (0,\infty), \\ w''(l_2,t) &= 0, \quad t \in (0,\infty), \end{aligned}$$

las cuales son las condiciones de transmisión (1.6)-(1.9) del problema.

7. Motivación de la definición del operador $\mathcal{B}$ y el funcional Λ

En este capítulo se muestra la deducción del operador bilineal $\mathcal{B}$ y el funcional lineal Λ que aparecen en la Sección 3.4. El objetivo es definir una forma bilineal sobre $\mathbb{H}$ que sea continua, coercitiva y equivalente a un funcional lineal sobre su dual $\mathbb{H}'$, para así, poder usar el teorema de Lax-Milgram en el espacio de Hilbert $\mathbb{H}$.

Considere las ecuaciones (3.26)-(3.28) de la proposición 3.3 y $\Phi = (\phi, \varphi, \psi) \in \mathbb{H}$. Multiplicando (3.26), (3.27) y (3.28) por ϕ, φ y ψ respectivamente e integrado sobre los espacios correspondientes y sumando miembro a miembro, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{I_1} u_1^{(4)}\phi\,dx + \int_{I_1} u_1\phi\,dx - \int_{I_1} (D_{\rho_1}u_1')'\phi\,dx - \int_{I_2} v_1''\varphi\,dx + \int_{I_2} v_1\varphi\,dx \\
&+ \int_{I_2} D_\beta v_1\varphi\,dx + \int_{I_3} w_1^{(4)}\psi\,dx + \int_{I_3} w_1\psi\,dx - \int_{I_3} (D_{\rho_2}w_1')'\psi\,dx \\
&= \int_{I_1} (f_1+f_2)\phi\,dx - \int_{I_1} (D_{\rho_1}f_1')'\phi\,dx + \int_{I_2} (g_2 + (1+D_\beta)g_1)\varphi \\
&+ \int_{I_3} (h_1+h_2)\psi\,dx - \int_{I_3} (D_{\rho_2}h_1')'\psi\,dx.
\end{aligned}$$

Si integramos por partes la anterior expresión, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{I_1} u_1''\phi''\,dx + \int_{I_1} u_1\phi\,dx + \int_{I_1} D_{\rho_1}u_1'\phi'\,dx + \int_{I_2} v_1'\varphi'\,dx + \int_{I_2} v_1\varphi\,dx \\
&+ \int_{I_2} D_\beta v_1\varphi\,dx + \int_{I_3} w_1''\psi''\,dx + \int_{I_3} w_1\psi\,dx + \int_{I_3} D_{\rho_2}w_1'\psi'\,dx \\
&= \int_{I_1} (f_1+f_2)\phi\,dx + \int_{I_1} D_{\rho_1}f_1'\phi'\,dx + \int_{I_2} (g_2 + (1+D_\beta)g_1)\varphi \\
&+ \int_{I_3} (h_1+h_2)\psi\,dx + \int_{I_3} D_{\rho_2}h_1'\psi'\,dx + T,
\end{aligned}$$

donde T son los términos de frontera similares a los de (6.2). Por tanto, definimos el operador bilineal

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(U,\Phi) := &\int_{I_1} u_1''\phi''\,dx + \int_{I_1} u_1\phi\,dx + \int_{I_1} D_{\rho_1}u_1'\phi'\,dx + \int_{I_2} v_1'\varphi'\,dx + \int_{I_2} v_1\varphi\,dx \\
&+ \int_{I_2} D_\beta v_1\varphi\,dx + \int_{I_3} w_1''\psi''\,dx + \int_{I_3} w_1\psi\,dx + \int_{I_3} D_{\rho_2}w_1'\psi'\,dx,
\end{aligned}$$

y el funcional lineal

$$\begin{aligned}
\Lambda(\Phi) := &\int_{I_1} (f_1+f_2)\phi\,dx + \int_{I_1} D_{\rho_1}f_1'\phi'\,dx + \int_{I_2} (g_2 + (1+D_\beta)g_1)\varphi \\
&+ \int_{I_3} (h_1+h_2)\psi\,dx + \int_{I_3} D_{\rho_2}h_1'\psi'\,dx.
\end{aligned}$$

Referencias

[1] R. Adams and J. Fournier. *Sobolev spaces*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 2 edition, 2003.

[2] M. Alves, J. Rivera, M. Sepúlveda, and O. Vera Villagran. The lack of exponential stability in certain transmission problems with localized kelvin–voigt dissipation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 74, 03 2014.

[3] B. Barraza Martínez, J. González Ospino, and J. Hernández Monzón. on trace theorems and poincare inequality in one dimension. *Departamento de Matemáticas y Estadísticas, Barranquilla, colombia. Working paper*, 2021.

[4] B. Barraza Martínez, J. Hernández Monzón, and G. Vergara Rolong. Exponential stability of a damped beam-string-beam transmission problem. arXiv 2108.06749, 2021.

[5] W. Bastos and C. Raposo. Transmission problem for waves with frictional damping april 22, 2007. *Electronic Journal of Differential Equations*, pages 1–10, 2007.

[6] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.

[7] L. Evans. *Partial Differential Equation*. American Mathematical Society, 2010.

[8] G. B. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton University Press, 2nd ed edition, 1995.

[9] F. Hassine. Energy decay estimates of elastic transmission wave/beam systems with a local kelvin–voigt damping. *International Journal of Control*, 89(10):1933–1950, 2016.

[10] K. Liu and Z. Liu. Exponential decay of energy of the euler–bernoulli beam with locally distributed kelvin–voigt damping. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 36:1086–1098, 05 1998.

[11] Z. Liu and Q. Zhang. Stability of a string with local kelvin–voigt damping and nonsmooth coefficient at interface. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 54:1859–1871, 01 2016.

[12] J. Nečas. *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2012.

[13] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied mathematical sciences. Springer, 1983.

[14] C. Raposo, W. Bastos, and J. Avila. A transmission problem for euler-bernoulli beam with kelvin-voigt damping. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 5:17–28, 01 2011.

[15] W. Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill, 2° edition, 1991.

[16] J. T. Wloka. *Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, digital reprint from the 1987 ed edition, 1987.