

**TEOREMA DEL MINIMAX Y EL JUEGO DE LOS PENALES EN EL FÚTBOL
PROFESIONAL DE AMÉRICA**

Aquiles Antonio Arrieta Barcasnegras

2016

Resumen

Este trabajo busca aportar evidencia empírica en favor del teorema del minimax a partir de los datos procedentes de los cobros de penales en los partidos de varias ligas de fútbol profesional de América. En línea con la mayor parte de la literatura sobre el tema, los resultados obtenidos indican que las implicaciones de equilibrio del teorema no se cumplen a cabalidad. Particularmente, los jugadores parecen conectar sus elecciones actuales con las realizadas previamente por su rival. Estos hechos ponen de manifiesto que no solo la experiencia cuenta para jugar minimax en el plano real. El contexto y las habilidades cognitivas también son relevantes.

Palabras Clave: Minimax, Equilibrio de Nash, Estrategias mixtas
Clasificación JEL: *C72, C79, C93*

Abstract

This paper seeks to provide empirical evidence for the minimax theorem from data set of penalty kicks in matches in several leagues of professional soccer in South America. In line with most of the literature on the topic, the results indicate that the implications of equilibrium are not fully met. Particularly, some players seem to display significant dependence on the past choices of their opponents. These facts show that the experience is not the only key factor to play a minimax strategy in the real ground. The context and cognitive skills are also relevant.

Keywords: Minimax, Nash equilibrium, Mixed-estategy
JEL Classification: *C72, C79, C93*

1. Introducción

La teoría de juegos constituye una importante rama de la matemática aplicada para explicar el comportamiento de los agentes en distintos ámbitos de las ciencias sociales, las ciencias biológicas y la ciencia política. En especial, los enfoques y conceptos de los modelos de juegos no cooperativos resultan trascendentales a la hora de comprender diferentes situaciones estratégicas que surgen en la economía.

Sin embargo, dentro de la literatura ha resultado difícil respaldar las contribuciones teóricas a través del análisis empírico. En entornos naturales, los juegos son demasiado complejos, no resulta sencillo establecer la forma exacta de la función de utilidad de los jugadores, a lo que se suma la complejidad de delimitar el conjunto de estrategias disponibles, la medición de las elecciones individuales, la determinación de los incentivos de los jugadores y la fijación de los pagos. Como consecuencia, las implicaciones fundamentales de los modelos teóricos de juegos no han sido comprobadas con regularidad en el plano real.

Entretanto, a pesar de la estructura controlada que ofrecen los experimentos, sus resultados también se inclinan mayoritariamente a rechazar la hipótesis que los individuos actúan conforme a los postulados de equilibrio de los juegos. Tradicionalmente, en el laboratorio los individuos son expuestos a diseños de juegos y situaciones a las cuales nunca se habían enfrentado, por lo que resulta probable que su desempeño, en un espacio de tiempo restringido por el propio esquema experimental, sea afectado por la falta de experiencia. Es decir, no basta con que los sujetos entiendan cómo jugar, sino cómo jugar bien.

De manera particular, la teoría de las estrategias mixtas, incluyendo el teorema del minimax de Von Neumann, no escapa de esta situación. Trabajos como los de Brown y Rosenthal (1990), Rapoport y Boebel, (1992) y Ochs (1995) reportan un comportamiento inconsistente con la teoría en experimentos para juegos de suma cero para dos personas.

Ante la poca validez empírica derivada de los experimentos adelantados, la literatura reciente ha utilizado los datos de juegos estratégicos en el deporte profesional para brindar un test empírico a las hipótesis del minimax.

El deporte profesional aporta individuos expertos en las situaciones de la disciplina que practican, lo que establece una ventaja sobre muchos experimentos. Así mismo, las

prácticas deportivas profesionales cuentan con individuos altamente motivados por la influencia de sus decisiones y acciones en el resultado final de la competencia. Adicionalmente, la forma en que se modelan las interacciones estratégicas de determinados deportes permite superar gran parte de los obstáculos citados en condiciones con datos naturales.

La situación de juego en la que se ha encontrado mayor evidencia a favor del cumplimiento del teorema del minimax es la de cobro de penales en los partidos de fútbol profesional. Palacios-Huerta (2003) y en menor medida Chiappori, Levitt y Groseclose (2002) reportan resultados que, por primera vez por fuera de experimentos controlados, son consistentes con la propuesta original de Von Neumann. Los cobros de penales otorgan una serie de ventajas que los hacen candidatos ideales para el análisis del teorema del minimax. En primer lugar, se asemejan en estructura al juego de *matching pennies* por lo que tienen un único equilibrio en estrategias mixtas. A esto se suma la ventaja que ofrecen en la disponibilidad inmediata de los resultados (anotar o no anotar) a partir de un conjunto de estrategias fácilmente identificables para los jugadores, quienes presentan limitada vaguedad en cuanto a sus preferencias, en la medida que se asume que el pateador busca maximizar la probabilidad de anotar, mientras el arquero desea minimizarla. Por último, los participantes del juego cuentan con altos incentivos a maximizar sus pagos, conducidos por las sumas de dinero que están en juego tanto para ellos como para los equipos a los que pertenecen.

A pesar de esto, y a la evidencia encontrada, existe la posibilidad que surjan diferencias en el comportamiento estratégico de los jugadores según el ambiente competitivo en el que se ejecute el penal. Al momento de participar en un juego de este tipo, no sólo la experticia adquirida por la repetición de la acción incide sobre las secuencias y la conducta de aleatorización seguida por los jugadores. Las habilidades innatas, la información disponible, los esquemas curriculares de formación y entrenamiento, el desarrollo de capacidades cognitivas funcionales y la convivencia con otros jugadores de igual o mayores capacidades también resultan determinantes.

Indudablemente estas condiciones y características son diferentes entre el fútbol europeo de élite, de donde se tomaron las muestras en los trabajos que validan las implicaciones del teorema del minimax, y el fútbol del resto del mundo, por lo que cabe la

opción que la evidencia empírica no esté en línea con la postura teórica si se evalúan datos procedentes de ligas o campeonatos profesionales que difieren, en términos de calidad y competitividad, de las ligas top del viejo continente.

Sobre este punto indaga el trabajo propuesto. A partir de una base de datos de penales construida para el periodo 2009-2016 para los campeonatos profesionales de México, Brasil, Colombia y Argentina, se pretende corroborar si las implicaciones del teorema del minimax también se cumplen en las ligas de América. Capacidades como la aleatorización en competencia, procesamiento de información y toma de decisiones en corto plazo conforman el conjunto de habilidades estratégicas exigidas por el minimax, las cuales resultan especiales y son extrañamente desarrolladas plenamente si el contexto en el que se desenvuelve el juego, y las condiciones asociadas a éste, no las provee. En la medida que factores como el nivel formativo y competitivo de los campeonatos no es el más alto o se encuentre por debajo del nivel de las ligas top, existe una mayor posibilidad que las decisiones estratégicas de los jugadores que caracterizan dichos torneos se desvíen del comportamiento de equilibrio exigido por el teorema del minimax, invalidando la aplicabilidad de éste.

Evidencia a favor de las predicciones del teorema dará cuenta de su cumplimiento en el plano real, más allá del entorno específico, lo que indicaría que los futbolistas profesionales constituyen un pool de sujetos capaz de apropiarse de diversas condiciones naturales para desarrollar una conducta estratégica en línea con los postulados de los juegos no cooperativos en aquellas situaciones que enfrentan en campo. Por su parte, resultados en contrario señalarían que los profesionales no siempre juegan minimax y que factores distintos a la experiencia también revisten relevancia a la hora de tomar sus decisiones.

2. Revisión de literatura

El resultado demostrado por Von Neumann en 1928 establece que en los juegos bipersonales de suma cero, donde cada jugador conoce de antemano la estrategia de su oponente y sus consecuencias, existe una única estrategia mixta de equilibrio que permite a ambos jugadores minimizar la pérdida máxima esperada (Hoff, 2001). Tal estrategia de equilibrio tiene dos implicaciones fundamentales: (1) las probabilidades de ganar deben ser estadísticamente idénticas entre las estrategias puras de cada jugador, y (2) las elecciones de cada jugador deben ser serialmente independientes trazadas desde un proceso aleatorio.

La literatura sobre el análisis empírico de las implicaciones derivadas de la formulación del teorema del minimax tuvo un punto de ruptura con el trabajo de O'Neill (1987) quien diseñó un juego experimental, de dimensiones 4x4, de suma cero con dos niveles de pago cuya solución no dependía de los supuestos cuantitativos sobre la función de utilidad de los jugadores, al tiempo que era de fácil y rápida comprensión. Los resultados de la aplicación del juego dan cuenta de una evidencia positiva de la teoría en cuanto a la correcta proporción de estrategias escogidas por los participantes, al tiempo que presentan una evidencia negativa en torno a la presencia de dependencia entre las elecciones sucesivas de cada individuo.

Brown y Rosenthal (1990) reexaminan el juego de O'Neill y encuentran menor evidencia a favor del teorema, en la medida que sus resultados reflejan la existencia de correlación serial en las elecciones de los jugadores, con una dependencia significativa sobre las movidas pasadas de sus oponentes. Rapoport y Boebel, (1992) tampoco hallan resultados capaces de validar las implicaciones del postulado de Von Neumann.

En una dirección similar, Ochs (1995) obtuvo resultados que se alejan de las predicciones del equilibrio de Nash en estrategias mixtas a partir de un experimento que analiza las elecciones de individuos jugando extensiones de tres variantes del tradicional juego de *matching pennies* en forma 2x2. En oposición, McCabe, Mukherji y Runkle (2000) en una modalidad para tres jugadores del mismo juego con información completa sobre los pagos y pleno monitoreo, soportan el cumplimiento de las condiciones del equilibrio de Nash.

Recientemente, Okano (2013) volvió a experimentar con el juego de O'Neill, pero en lugar de observar exclusivamente juegos bipersonales, estudió las respuestas de equipos de parejas que repetidamente participan en el juego señalado. De forma sorprendente, los resultados muestran que cuando un equipo enfrenta a otro, las frecuencias de elección de estrategias son consistentes con el equilibrio del juego, lo que no sucede cuando se enfrentan individuos.

En general, los experimentos sobre juegos con un único equilibrio estratégico mixto han encontrado inconsistencia con la teoría del minimax. Los principales hallazgos de esta literatura se pueden resumir en: 1) a nivel agregado, los datos derivados de los experimentos son cercanos a alguna de las implicaciones de la solución de minimax; 2) la

frecuencia de elección de estrategias entre los jugadores muestra mayor variación que la predicha por la teoría; 3) existe correlación serial en las decisiones de los individuos a través del tiempo.

La apuesta por probar la validez del teorema del minimax a través del análisis de situaciones estratégicas que surgen de forma natural en el deporte profesional nace con el trabajo de Walker y Wooders (2001), quienes modelan cada punto en un partido de tenis como un juego en forma normal 2×2 entre dos jugadores. En tal modelo el jugador que sirve tiene dos opciones, mandar la pelota a la derecha o a la izquierda del receptor, quien se asume adivina si la pelota va a su derecha o a su izquierda. Los autores validan su propuesta con datos de los partidos top del calendario internacional masculino, encontrando que aún los mejores jugadores tienden a conectar sus acciones presentes con las del pasado muy frecuentemente. Hsu, Huang y Tang (2007) amplían la base de datos del trabajo anterior incluyendo registros sobre partidos femeninos y juveniles; los test aplicados sobre esta información pasan todas las exigencias y son consistentes con las hipótesis implicadas por el equilibrio resultante de la teoría.

En el caso del fútbol, Chiappori et al. (2002) y Palacios-Huerta (2003) plantean usar modelos de juegos con los penales en los partidos de fútbol profesional de varias ligas europeas. En el primer caso, los autores construyen un modelo teórico que describe los cobros de penales como un juego simultáneo de la forma 3×3 entre el pateador y el arquero, pudiendo cada uno elegir entre izquierda, centro y derecha. El modelo asume varios supuestos¹ en relación a la estructura de pagos del juego, estableciendo predicciones sobre qué estrategias o conjunto de estrategias deben presentarse con mayor frecuencia si los jugadores siguen un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

A pesar que las predicciones hechas son soportadas por los datos recogidos, los autores sólo logran probar la hipótesis de comportamiento aleatorio en relación al teorema del minimax. Dado los problemas de agregación que surgen ante las pocas observaciones a nivel de individuos y la dificultad de conducir test bajo estas condiciones, no aportan evidencia sobre la igualdad de las probabilidades de éxito entre las estrategias disponibles para cada jugador.

¹ Así por ejemplo, si el pateador y el arquero eligen el mismo lado-derecha o izquierda, pero no centro- el gol es anotado con una determinada probabilidad, mientras que si el arquero elige el lado contrario al del pateador el gol es anotado con una probabilidad superior a la del caso anterior.

Palacios-Huerta (2003) ofrece el primer trabajo que de manera certera valida el teorema del minimax con datos naturales. Usando un análisis sobre un juego simplificado de dimensiones 2x2 con registros procedentes de los mejores jugadores en las ligas de Italia, España e Inglaterra, el autor encuentra que las probabilidades de éxito de cada estrategia de cada jugador son estadísticamente idénticas y que los jugadores aleatorizan la escogencia de sus elecciones.

No obstante, Palacios Huerta (2015) anota que la evidencia reportada sobre el cumplimiento del teorema del minimax en el campo no necesariamente indica que todos los futbolistas en el mundo jueguen bajo sus implicaciones de equilibrio. Al menos tres razones soportan este argumento. En primera instancia, los datos para evaluar la propuesta de Von Neumann en los trabajos referenciados, provienen de las ligas de fútbol profesional de élite en Europa, las cuales tienen una tradición de más de un siglo y un amplio nivel competitivo y profesional, ausente en la mayoría de ligas del mundo. En segundo lugar, la adquisición de habilidades para desarrollar el juego exige importantes inversiones, en términos de tiempo y recursos financieros, por lo que aquellas ligas menos establecidas que las europeas carecen de los incentivos suficientes para fomentarlas. Finalmente, la capacidad estratégica de este juego se caracteriza porque el comportamiento óptimo propio depende también del comportamiento del oponente. Las habilidades a desarrollar para elegir de acuerdo a las implicaciones del teorema en aquellas situaciones de suma cero en el campo de juego exigen que todos los sujetos jueguen, o esperen que los demás jueguen, según el comportamiento de equilibrio. Si las expectativas propias señalan que los otros jugadores se desviarán sistemáticamente de éste, jugar una estrategia minimax ya no resulta óptimo. Por tanto, el teorema deja de cumplirse en aquellos entornos en los que los jugadores no han desarrollado las competencias apropiadas.

Una postura que apunta en una vía similar, formulada en criterios psicológicos, deriva de la teoría funcional de cognición, que muestra que la experiencia per se no logra explicar la superioridad de los más ejercitados en una actividad frente a los novatos. Más bien el dominio de un conocimiento específico, y el uso de ese conocimiento para percibir y estructurar la información disponible que ofrece la actividad en un contexto dado son las razones de las diferencias (Ericsson y Lehmann, 1996). En este sentido, para el caso puntual del fútbol Helsen y Starkes (1999) encuentran que los únicos determinantes del

desempeño en cualquier acción de juego corresponden a habilidades cognitivas (por ejemplo, la velocidad y precisión en la toma de decisiones complejas) de dominio específico. Por tanto, la resolución de un deportista sobre qué hacer en una situación concreta se asocia a un esquema en función de varias piezas de información que le da el entorno y su nivel de conocimiento específico (Rulence-Pâques et al., 2005).

Otro juego de suma cero bipersonal tomado del fútbol para probar los conceptos de solución de la teoría de juegos fue usado por Moschini (2004). El autor se concentra en proponer un modelo secuencial que permita validar la evidencia a favor de la existencia del equilibrio de Nash en estrategias mixtas para los remates al arco desde posiciones distintas al centro. La visión tradicional establece que los arqueros deben defender el poste más cercano, mientras que los pateadores intentan patear al poste más lejano. La implicación de equilibrio que menos goles son conseguidos al rematar al poste más cercano en relación a disparar al poste más lejano, es estadísticamente soportada por los datos.

Siguiendo la línea de un juego 3x3, Azar y Bar-Eli (2011) usan una amplia base de datos de penales de distintos campeonatos para evaluar si la distribución conjunta de disparos de pateadores y lanzamientos de los arqueros es mejor predicha desde el equilibrio de Nash en estrategias mixtas o desde otras conjeturas² razonables sobre cómo los individuos llevan a cabo este juego. Aunque no se prueba directamente las implicaciones del teorema del minimax, se demuestra que la mejor predicción proviene del concepto solución propuesto por el equilibrio de Nash.

A pesar de la evidencia a favor del cumplimiento del teorema del minimax y la solución en estrategias mixtas en el deporte profesional, otros trabajos también presentan resultados contrarios. Kovash y Levitt (2009) encuentran que en el juego que plantea el duelo entre el lanzador y el bateador, alrededor de las estrategias de lanzamiento rápido y lanzamiento no-rápido; y en el juego que se da en el fútbol americano con las estrategias pasar el balón o correr, no se cumple el teorema del minimax porque en ambos casos los jugadores actúan bajo una correlación serial negativa en las elecciones de sus opciones.

La combinación de estas dos líneas de literatura ha generado un amplio interrogante: ¿Por qué los experimentos en laboratorio para comprobar las implicaciones

² Por ejemplo, que los arqueros y pateadores jueguen acorde a una probabilidad de emparejamiento, es decir que cuando tengan varias posibles acciones para elegir, escojan cada acción con una probabilidad que iguale a la probabilidad que esa opción sea la mejor respuesta.

del minimax registran resultados que se alejan de las predicciones de equilibrio, mientras que la evidencia recogida en contextos menos controlados se aproximan a confirmar la teoría? Palacios-Huerta y Volij (2008) sostienen que el subconjunto de individuos conformado por los deportistas envueltos en situaciones estratégicas permanentes se diferencia del conjunto de sujetos que tradicionalmente participa en experimentos controlados, en la medida que han desarrollado un set de habilidades que puede ser transferido desde el entorno donde se desarrolla su capacidad (campo de juego) hacia ambientes experimentales. Para probar su hipótesis usan jugadores profesionales del fútbol de segunda división de España y estudiantes de colegio para estudiar su conducta estratégica en dos juegos diseñados en el laboratorio. En el primero, los profesionales adelantan un juego 2x2 que resulta idéntico a la interacción estratégica que enfrentan en su ambiente natural. En segunda instancia, el tradicional juego propuesto por O'Neill, que no había sido jugado con anterioridad por ninguno de los dos grupos de individuos, fue aplicado. Contrario a los resultados de los colegiales, los profesionales se acercaron a las hipótesis del minimax en ambos experimentos, en cuanto igualaron sus probabilidades de éxito entre estrategias y generaron secuencias serialmente independientes.

Van Essen y Wooders (2014) se unen a este argumento reconociendo y comprobando que la experiencia adquirida por los jugadores de póker online en su ambiente natural contribuye al comportamiento de equilibrio en el laboratorio.

Sin embargo, Wooders (2010) rechaza, con los mismos datos recogidos por Palacios-Huerta y Volij (2008), que los jugadores profesionales logren replicar comportamientos similares en el laboratorio a los alcanzados en campo. Fraccionando los datos del experimento en mitades, el autor encuentra que la distribución de frecuencias de acciones entre futbolistas profesionales está negativamente correlacionada entre la primera y segunda mitad, por tanto siguen una estrategia mixta no estacionaria. Levitt, List y Reiley (2010), apoyan esta postura con resultados de laboratorio con jugadores de la Major League Soccer.

3. Estructura del juego

La base teórica de partida para analizar los cobros de penales en una estructura de juego de suma cero bipersonal sigue la descripción propuesta por Walker y Wooders (2001) y adoptada por Palacios-Huerta (2003). Inicialmente, como en todo escenario de

experimento se define un juego alrededor de un conjunto de reglas, jugadores, estrategias, resultados y pagos.

Las reglas se establecen en torno a la posición del balón y los jugadores en los cobros de penales, según las disposiciones reglamentarias de la FIFA para 2015-2016:

El balón debe ser correctamente colocado en el punto penal.

El arquero debe encontrarse sobre la línea de meta entre los dos postes y encarar al ejecutor del tiro.

El jugador que cobrará el disparo debe ser plenamente identificado.

Los compañeros del ejecutor deben hallarse fuera del área penal, fuera del semicírculo penal y detrás del balón.

El pateador debe patear el balón hacia adelante y no volver a tocarlo hasta que no haya sido tocado por otro jugador.

Cada penal involucra un arquero y un pateador claramente reconocidos, los cuales cuentan con algunas estrategias disponibles. Hay dos resultados posibles, anotar o no anotar un gol, y se decide inmediatamente después que cada jugador ha escogido su estrategia.

Dada la velocidad³ que se estima para que el balón llegue desde el punto de ejecución hasta el arco, se asume que, de manera óptima, el arquero y el pateador se mueven de forma simultánea.

Una representación formal de la situación planteada, incluyendo los pagos a los individuos participantes, se presenta en la figura 1 a través de un juego en forma normal 2x2.

Figura 1. Juego de cobro de penales

ARQ \ PAT	DERECHA (D)	IZQUIERDA (I)
DERECHA (D)	π_{DD}	π_{DI}
IZQUIERDA (I)	π_{ID}	π_{II}

Se asume que los pagos de los jugadores vienen dados por las probabilidades de éxito (anotar para el pateador y no anotar para el arquero) condicional sobre las elecciones que cada uno hace. Las probabilidades de éxito del pateador vienen dadas por π_{pa} , donde p es la escogencia del pateador (*Izquierda* o *Derecha*) y a es la del arquero (*Izquierda* o

³ Miller (1998) reporta que el balón toma alrededor de 0.3 segundos en viajar desde el punto penal hasta el arco en un disparo típico de penal.

Derecha). Como un jugador u otro debe salir exitoso en el juego, las probabilidades del arquero son los números $1 - \pi_{pa}$.

Este juego tiene un único equilibrio de Nash en estrategias mixtas si se cumple que $\pi_{II} < \pi_{DI}$ y $\pi_{DD} < \pi_{ID}$, esto para garantizar que el pateador tiene mayor probabilidad de anotar si patea en la dirección opuesta a la que se lanza el arquero. Asimismo, debe cumplirse que $\pi_{II} < \pi_{ID}$ y $\pi_{DD} < \pi_{DI}$, es decir el pateador tiene menor probabilidad de anotar si el arquero exagera en la dirección que el pateador escoge.

La no inclusión de la opción centro (*C*) dentro del conjunto de estrategias disponibles para ambos jugadores se basa en los aportes de Chiappori et al. (2002), quienes argumentan que un cobro de penal puede ser descrito como un juego de dos acciones, en la medida que la disponibilidad de jugar al centro no resulta relevante en el análisis empírico de datos agregados entre jugadores⁴.

Si el simple modelo anterior representa la situación que enfrenta el pateador y el arquero, los resultados de equilibrio ofrecen dos predicciones o implicaciones a probar sobre el comportamiento de los jugadores:

- 1) La probabilidad de éxito debe ser la misma entre estrategias para cada jugador.

De manera formal, siendo ARQ_D la probabilidad del arquero de lanzarse a la derecha, debe ser elegida de tal manera que permita la igualdad de las probabilidades de éxito del pateador entre sus estrategias disponibles. Luego entonces, ARQ_D debe permitir $P_D^p = P_I^p$

Donde:

$$\begin{aligned} P_D^p &= ARQ_D \pi_{DD} + (1 - ARQ_D) \pi_{DI} \\ P_I^p &= ARQ_D \pi_{ID} + (1 - ARQ_D) \pi_{II} \end{aligned} \tag{1}$$

De manera análoga debe suceder para la probabilidad de tirar a la derecha del pateador. Siendo PAT_D dicha probabilidad, debe ser elegida de tal forma que las probabilidades de éxito del arquero sean idénticas entre estrategias, esto es $P_D^a = P_I^a$.

⁴ Adicionalmente, dado que la mayoría de jugadores no escogen la opción centro en la muestra, o es escogida muy pocas veces, no existe la posibilidad de adelantar test con el suficiente poder para rechazar las hipótesis del minimax. Por ello no se modela un juego de tres acciones.

Donde:

$$\begin{aligned} P_D^a &= PAT_D(1 - \pi_{DD}) + (1 - PAT_D)(1 - \pi_{ID}) \\ P_I^a &= PAT_D(1 - \pi_{DI}) + (1 - PAT_D)(1 - \pi_{II}) \end{aligned} \tag{2}$$

- 2) Las elecciones de cada jugador deben ser serialmente independientes. Es decir, no debe existir vínculos intertemporales entre las elecciones de cada jugador, garantizando que son trazadas desde un proceso aleatorio.

Es necesario anotar una consideración, previo a la descripción de los datos y la implementación de las pruebas empíricas. Esto es que, en función de la pierna de ejecución, hay dos tipos de pateadores: derechos e izquierdos. Éstos, tienen predilección de ejecutar sus cobros según sus fortalezas, de manera que los primeros patean con mayor frecuencia al lado derecho del arquero, mientras que los segundos lo hacen al lado izquierdo. Bajo esta perspectiva, los roles estarían reversados para distintos pateadores, por lo que resulta equivocado tratar sus juegos como idénticos. Por ello, siguiendo a Palacios-Huerta (2003) se “normalizan” las elecciones de todos los jugadores a partir de sus “lados naturales”. De esta forma, en adelante las elecciones de los jugadores se renombran de acuerdo a este criterio. Cualquiera sea la pierna del pateador, N denota la escogencia del lado natural en su cobro y AN la selección del lado antinatural o no natural.

Si el pateador lanza con la pierna derecha, el lado natural N corresponde a la mano derecha del arquero, mientras que si lo hace con su pierna izquierda el lado natural viene dado por la mano izquierda del arquero. Con esta notación se garantiza que este se enfrente al mismo juego cuando compite con un pateador izquierdo o con uno derecho. Así por ejemplo, un pateador zurdo eligiendo la derecha del arquero es equivalente a un pateador derecho escogiendo la izquierda. Lo relevante es si tanto el pateador como el arquero eligen el lado natural N del pateador, o el lado no natural AN .

La figura 2 presenta el juego en forma normal con la normalización de las estrategias.

Figura 2. Juego de cobro de penales con estrategias normalizadas

ARQ \ PAT	NATURAL (N)	ANTI NATURAL (AN)
NATURAL (N)	π_{NN}	π_{NAN}
ANTI NATURAL (AN)	π_{ANN}	π_{ANAN}

4. Datos

Se recopiló información sobre 1.055 penales cobrados en los partidos de las ligas de fútbol profesional de Colombia, México, Argentina y Brasil entre Enero de 2.009 y Mayo de 2.016. El número indicado corresponde a aquellos cobros donde estuvieron los jugadores que participaron en la mayor cantidad de penales en el periodo señalado. En ese orden de ideas, 13 pateadores y 36 arqueros con intervención en 15 o más penales fueron escogidos, esto con el fin de garantizar la realización de las pruebas empíricas. Al respecto, Palacios-Huerta (2003) señala que test a nivel individual no pueden ser adelantados con un número limitado de penales por jugador, por ejemplo cinco o menos. También se incluyen registros de penales cobrados en partidos de competencias internacionales Para cada jugador, las observaciones en la base de datos están registradas en el orden cronológico en que tuvieron lugar. La identidad de cada jugador se da en el anexo 1.

Los datos fueron recopilados a partir de un ejercicio de seguimiento de los reportes de cada partido en las plataformas virtuales de Entertainment and Sports Programming Network (ESPN) y worldfootball.net. Estos portales registran las incidencias de todos los partidos disputados en los campeonatos de fútbol profesional en el mundo. Adicionalmente, se revisó cada uno de los penales que tuvieron lugar en cada partido en los contenidos digitales de diferentes cadenas de televisión como Win Sports Tv, Fox Sports, y Tv Azteca, y distintos portales del sitio web YouTube.

Los datos contienen los nombres de los clubes que jugaron cada partido y la fecha del mismo, los nombres del arquero y pateador involucrados en cada penal y las elecciones que éstos tomaron (izquierda, centro, derecha), la pierna de ejecución del pateador, la condición de campo del pateador (local o visitante), el minuto de juego en que el penal es cobrado y el marcador existente en ese momento, el marcador final del partido y el resultado del cobro (gol o fallo).

La escogencia de estos campeonatos tiene en cuenta varios factores que definen diferencias con las ligas de élite de Europa, en relación a la competitividad y profesionalismo. Como primera medida, las ligas europeas cuentan, entre las distintas categorías, con más equipos profesionales. Así por ejemplo, Inglaterra tiene un sistema de ligas interconectadas con más de 100 clubes profesionales en cinco divisiones, mientras que Colombia tiene 36 equipos profesionales en dos divisiones. A esto se suma que varios de los clubes que participan en los torneos escogidos no cuentan con la infraestructura administrativa ni deportiva para favorecer procesos de formación, entrenamiento e investigación que fomenten la aparición permanente de habilidades estratégicas y cognitivas en la toma de decisiones en el campo de juego. Esto, a diferencia de los campeonatos europeos, en los que los clubes poseen academias de formación y distintos equipos *amateur*.

En segundo lugar, muchos de los jugadores que conforman las ligas analizadas, incluso varios de los considerados figuras en sus respectivos campeonatos, no alcanzan el nivel para jugar en las ligas top del viejo continente, por lo que su nivel de competencia y el de sus rivales no es el más alto. La evidencia muestra que los mejores jugadores de los torneos latinoamericanos terminan alimentando las nóminas de los equipos europeos, hecho que se corrobora con la conformación de las selecciones nacionales de los países de América. Éstas en su mayoría están integradas por jugadores que se desenvuelven en el fútbol de Europa.

Una aproximación a las diferencias en términos de “calidad” y competitividad entre ambos contextos procede del análisis del valor de mercado de las ligas, determinado por el valor de transferencia que se asigna a los diferentes jugadores que las conforman. El portal transfermarkt.es, especialista en valoración de jugadores, revela que para 2016 la liga colombiana tiene un valor de 192,75 millones de euros, la liga mexicana un valor de 591,20 millones de euros y el campeonato brasilero un valor de 894,08 millones de euros. Por su parte, la liga inglesa vale 4.570 millones de euros, la liga española registra un valor de 3.220 millones de euros y la liga de Italia un valor de 2.620 millones de euros.

Finalmente, el espacio de tiempo considerado asegura que los pateadores y arqueros seleccionados en la muestra final han permanecido en el mismo contexto (ligas de fútbol de América) durante todo el periodo, por tanto es posible recoger su experiencia y

conocimiento específico. Estos aspectos garantizan que se evalúa elecciones sobre una dimensión de la distribución de calidad distinta a la analizada en trabajos anteriores donde se confirma el cumplimiento del teorema del minimax.

Los datos muestrales revelan algunos hechos importantes. Como se esperaba, el porcentaje de penales en los que los arqueros eligen la opción centro es reducido (3,79% de todos los cobros). Sin embargo, no deja de sorprender que para 14,98% de las ejecuciones los pateadores hayan seleccionado esta opción. Los lanzamientos a la derecha del arquero corresponden al 48,39% del total de penales considerados, mientras que el porcentaje de cobros a la izquierda es de 36,62%. Por último, el 80,95% de los penales son ejecutados con la pierna derecha, mientras que el restante 19,05% con la pierna izquierda.

La tabla 1 ofrece una descripción de la distribución de las elecciones hechas por los jugadores. La primera columna de la tabla registra la diferencia existente en el marcador al momento de patear el penal. Esta diferencia se entiende como el número de goles conseguidos por el equipo del pateador menos los goles anotados por el equipo del arquero en el minuto en que el penal es sancionado. Así, “-2” indica que el equipo del pateador pierde por dos goles antes de lanzar el penal.

Tabla 1. Distribución de estrategias y scoring rates en porcentajes

Diferencia en marcador	Obs	II	IC	ID	CI	CC	CD	DI	DC	DD	Penales Anotados	Penales Errados	Scoring Rate
0	484	18,39	0,62	16,74	5,79	1,03	7,23	19,42	1,24	29,55	390	94	80,58
1	195	20,51	2,05	18,46	7,69	1,03	4,62	18,46	1,54	25,64	144	51	73,85
-1	208	18,75	0,96	16,35	3,85	1,92	9,62	16,83	2,40	29,33	168	40	80,77
2	59	11,86	0	16,95	8,47	1,69	10,17	33,9	0	16,95	50	9	84,75
-2	70	24,29	1,43	17,14	8,57	1,43	8,57	27,14	0	11,43	59	11	84,29
Otros	39	17,95	0	10,26	10,26	2,56	7,69	33,33	2,56	15,38	31	8	79,49
Total	1055	198 (18,8)	11 (0,95)	177 (16,78)	66 (6,26)	14 (1,33)	79 (7,49)	217 (20,57)	15 (1,42)	278 (26,35)	842	213	79,81
Scoring Rate		63,32	100	93,79	89,39	50	86,08	95,85	100	65,83			

En función de estas diferencias, se presentan las proporciones relativas de las distintas elecciones realizadas por pateadores y arqueros (izquierda (I), centro (C) o derecha (D)). La primera letra denota la elección del pateador y la segunda la elección del arquero, ambas registradas desde la perspectiva de este último. Por ejemplo, “DI” revela que el pateador seleccionó patear al lado derecho del arquero, al tiempo que éste se lanzó a su izquierda. La columna final muestra la tasa de acierto (anotar un gol) para cada diferencia

señalada en el marcador. Entretanto, las últimas dos filas recogen las proporciones relativas de las distintas elecciones⁵, independientemente de la diferencia en el marcador, y su correspondiente scoring rate.

En menos de la mitad de los penales las estrategias de arqueros y pateadores son idénticas. El mayor porcentaje se da cuando ambos eligen el lado derecho del arquero (26,35%). Por su parte, cuando las elecciones corresponden a DI e ID suponen los casos con mayor porcentaje entre las combinaciones de estrategias que no coinciden.

Un gol es anotado en 79,81% de todos los penales pateados. De manera particular, un gol es logrado en promedio, 59,71% de las veces que un penal es cobrado y concuerdan las elecciones de pateador y arquero. El porcentaje promedio de scoring rate cuando no existe tal coincidencia es de 94,18%. A pesar que el promedio de goles por partido en la muestra es de 3,37, la mayoría de penales ocurren cuando la diferencia en el marcador es de 0,-1 y 1. Sin embargo, la mayor tasa de acierto acontece cuando la diferencia en el marcador es de 2 y -2, siendo ligeramente superior para el primer caso.

La tabla 2 muestra la misma información anterior, una vez se han normalizado y renombrado las estrategias disponibles. En este punto vale señalar que la opción centro se consideró dentro de las elecciones naturales. Al respecto, Palacios-Huerta (2003) señala que esta sutileza tecnológica constituye un acierto porque los jugadores profesionales consideran la estrategia *C* y la estrategia de jugar su lado natural como equivalente, toda vez que en la búsqueda de mayor control en el remate, patean con el lado interior de su pie, lo que hace que elegir centro o su lado natural tenga una dificultad similar.

Tabla 2. Distribución de estrategias y scoring rates en porcentajes (estrategias normalizadas)

Diferencia en marcador	Obs	NN	NAN	ANN	ANAN	Penales Anotados	Penales Errados	Scoring Rate
0	484	39,75	24,22	18,63	17,39	390	94	80,58
1	195	38,97	22,56	21,03	17,44	144	51	73,85
-1	208	42,31	20,19	19,71	17,79	168	40	80,77
2	59	28,81	38,98	20,34	11,86	50	9	84,75
-2	70	27,14	37,14	17,14	18,57	59	11	84,29
Otros	39	33,33	41,03	10,26	15,38	31	8	79,49
Total	1055	405	268	200	182	842	213	79,81
Scoring Rate		(38,38)	(25,40)	(18,95)	(17,25)			69,63
		69,63	95,52	94,50	63,19			

⁵ Entre paréntesis, las proporciones relativas.

De la tabla se extrae que la tasa de anotación es mayor cuando no existe coincidencia en las escogencias de pateador y arquero. También es posible establecer que los jugadores recurren mayoritariamente a su estrategia natural cuando las distancias en el marcador entre equipos son cortas (-1, 0,1), quizás en la búsqueda de mayor seguridad para alcanzar el éxito (anotar para el pateador y no anotar para el arquero) y conseguir un beneficio sustancial y relevante para su equipo.

5. Resultados

Antes de pasar al análisis por medio de pruebas formales, se presenta una primera aproximación de la medida en que el comportamiento observado se acerca a las predicciones del equilibrio de Nash. Para el total de jugadores analizados, las probabilidades empíricas de anotar se registran en la figura 3.

Figura 3. Juego de cobro de penales incluyendo pagos

PAT \ ARQ	NATURAL (N)	ANTI NATURAL (AN)
	NATURAL (N)	69,63
ANTI NATURAL (AN)	94,50	63,19

A partir de esta matriz es posible computar para pateador y arquero las frecuencias predichas por el equilibrio de Nash en estrategias mixtas y compararlas con las frecuencias observadas en la muestra. La tabla 3 revela este contraste. El equilibrio de Nash en estrategias mixtas sugiere que un pateador debe elegir su lado natural en el 55,02% de los cobros de penal a los que se enfrenta y su lado antinatural en el 44,97%. Para el caso del arquero, los porcentajes correspondientes son 56,52% y 43,47%, respectivamente. De manera destacable se nota cómo el comportamiento agregado observado para los arqueros es prácticamente idéntico al predicho teóricamente. Sin embargo, difiere para los pateadores.

Este resultado está parcialmente en línea con el encontrado por Palacios-Huerta (2003) para las ligas de fútbol de élite en Europa, donde tanto pateadores y arqueros registran frecuencias de escogencia muy próximas a las predichas.

Tabla 3. Frecuencias de elección predichas y observadas para arqueros y pateadores

	Pateador		Arquero	
	Lado natural (N)	Lado Antinatural (AN)	Lado natural (N)	Lado Antinatural (AN)
Frecuencias predichas equilibrio de Nash	55,02	44,97	56,52	43,47
Frecuencias observadas	63,79	36,21	57,35	42,65

5.1. Prueba de igualdad de probabilidades de éxito

La hipótesis que las probabilidades de éxito son idénticas entre estrategias para ambos jugadores es examinada a través de un test de Pearson de bondad de ajuste de igualdad de dos distribuciones. Para cada uno de los i jugadores se establece la hipótesis nula que $P_N^i = P_{AN}^i$, es decir que existe una probabilidad P^i tal que $P_N^i = P^i$ y $P_{AN}^i = P^i$. Siguiendo a Mood, Graybill y Boes (1974) el estadístico de Pearson para el jugador i viene dado por:

$$Q^i = \sum_{j \in \{N, AN\}} \left[\frac{(M_{jE}^i - m_j^i P^i)^2}{m_j^i P^i} + \frac{(M_{jF}^i - m_j^i (1 - P^i))^2}{m_j^i (1 - P^i)} \right] \quad (3)$$

Siendo P^i la probabilidad que el jugador i resulte exitoso cuando escoge la estrategia $j \in \{N, AN\}$; m_j^i el número de veces que el jugador i elige j y M_{jE}^i y M_{jF}^i el número de veces que el pateador (arquero) es exitoso (E) o fracasa (F) en anotar (no anotar) un penal, respectivamente, cuando elige la estrategia j .

Si la hipótesis nula es cierta, el estadístico del test de Pearson sigue una distribución χ^2 con un grado de libertad. La tabla 4 presenta los resultados obtenidos a partir del test. En solo dos de los 49 “experimentos” (dos arqueros) la hipótesis nula es rechazada a un nivel de significancia de 5%, y en tres casos (un pateador y dos arqueros) a un nivel de significancia de 10%. Con 49 jugadores, el número de rechazos individuales esperados cuando la hipótesis nula es cierta es de 2,45 al nivel de 5%, mientras que para un nivel de significancia de 10% se esperan 4,9 rechazos. Tomando en cuenta exclusivamente el número de rechazos obtenidos, los datos sobre los penales cobrados en las ligas consideradas resultan consistentes con la teoría.

Tabla 4. Test individual de igualdad de probabilidades de éxito

Jugador	Obs	Mezcla		Tasa de éxito		Estadístico de Pearson	p-value
		N	AN	N	AN		
Pateador 1	33	0,76	0,24	0,96	0,88	0,769	0,380
Pateador 2	17	0,65	0,35	0,72	0,83	0,243	0,622
Pateador 3	22	0,59	0,41	0,77	0,77	0,002	0,962
Pateador 4	23	0,48	0,52	0,82	0,91	0,491	0,484
Pateador 5	15	0,66	0,34	0,90	1	0,536	0,464
Pateador 6	17	0,65	0,35	1	1	0,000	1,000
Pateador 7	24	0,66	0,34	0,75	0,88	0,505	0,477
Pateador 8	16	0,63	0,37	0,90	0,83	0,152	0,696
Pateador 9	27	0,59	0,41	1	0,82	3,142	0,076*
Pateador 10	30	0,80	0,20	0,79	0,66	0,419	0,517
Pateador 11	26	0,50	0,50	0,85	0,85	0,000	0,971
Pateador 12	17	0,53	0,47	0,77	1	20,148	0,156
Pateador 13	21	0,48	0,52	0,80	0,72	0,153	0,696
Todos	288	0,62	0,38	0,85	0,85		
Arquero 1	20	0,70	0,30	0,14	0,50	2,857	0,091*
Arquero 2	28	0,75	0,25	0,43	0,29	0,449	0,503
Arquero 3	32	0,56	0,44	0,11	0,14	0,073	0,788
Arquero 4	30	0,57	0,43	0,18	0,08	0,632	0,427
Arquero 5	34	0,47	0,53	0,13	0,33	2,043	0,153
Arquero 6	36	0,53	0,47	0,21	0,11	0,557	0,455
Arquero 7	33	0,45	0,55	0,26	0,16	0,490	0,484
Arquero 8	16	0,69	0,31	0,36	0,80	2,618	0,106
Arquero 9	16	0,25	0,75	0,25	0,16	0,137	0,712
Arquero 10	20	0,40	0,60	0,50	0,08	4,444	0,035**
Arquero 11	34	0,56	0,44	0,26	0,26	0,001	0,982
Arquero 12	23	0,48	0,52	0,18	0,16	0,009	0,924
Arquero 13	18	0,61	0,39	0,54	0,14	2,918	0,088*
Arquero 14	29	0,55	0,45	0,13	0,15	0,050	0,823
Arquero 15	18	0,55	0,45	0	0	0,000	1,000
Arquero 16	29	0,62	0,38	0,33	0,27	0,117	0,732
Arquero 17	24	0,75	0,25	0,22	0,16	0,084	0,772
Arquero 18	23	0,52	0,48	0,16	0,18	0,009	0,924
Arquero 19	23	0,78	0,22	0,16	0	0,958	0,328
Arquero 20	20	0,80	0,20	0,38	0	2,143	0,143
Arquero 21	28	0,68	0,32	0,11	0,11	0,002	0,963
Arquero 22	19	0,58	0,42	0,18	0,13	0,113	0,737
Arquero 23	33	0,66	0,34	0,22	0,18	0,091	0,763
Arquero 24	21	0,76	0,24	0,13	0	0,691	0,406
Arquero 25	17	0,47	0,53	0,38	0,22	0,476	0,490
Arquero 26	19	0,53	0,47	0,60	0,11	4,866	0,027**
Arquero 27	23	0,70	0,30	0,25	0	2,118	0,146
Arquero 28	34	0,35	0,65	0,16	0,18	0,012	0,912
Arquero 29	20	0,45	0,55	0,33	0,18	0,606	0,436
Arquero 30	18	0,44	0,56	0,25	0,30	0,055	0,814
Arquero 31	28	0,61	0,39	0,12	0,09	0,050	0,823
Arquero 32	19	0,58	0,42	0,36	0,25	0,277	0,599
Arquero 33	27	0,70	0,30	0,21	0,25	0,051	0,822
Arquero 34	16	0,56	0,44	0,33	0,14	0,762	0,383
Arquero 35	17	0,59	0,41	0,3	0,43	0,298	0,585
Arquero 36	17	0,47	0,53	0,25	0,22	0,018	0,893
Todos	862	0,58	0,42	0,24	0,19		

Significancia: ** 5%; *10%

A partir de los resultados individuales se sugiere evaluar si el comportamiento a nivel agregado es generado desde el equilibrio. Para ello, se aplica un test de Pearson para

la hipótesis conjunta que $P_N^i = P_{AN}^i$ para cada uno de los 49 jugadores. El estadístico del test propuesto resulta de la suma de los estadísticos Q^i de cada uno de los test individuales presentados anteriormente. Bajo la hipótesis nula este test se distribuye como una χ^2 con 49 grados de libertad. La tabla 5 revela que el valor del estadístico de este test es 57,635 con un p -value asociado de 0,813, por lo que no es posible rechazar la hipótesis conjunta a ningún nivel de significancia razonable.

Tabla 5. Test de igualdad de probabilidades de éxito para distribuciones agregadas

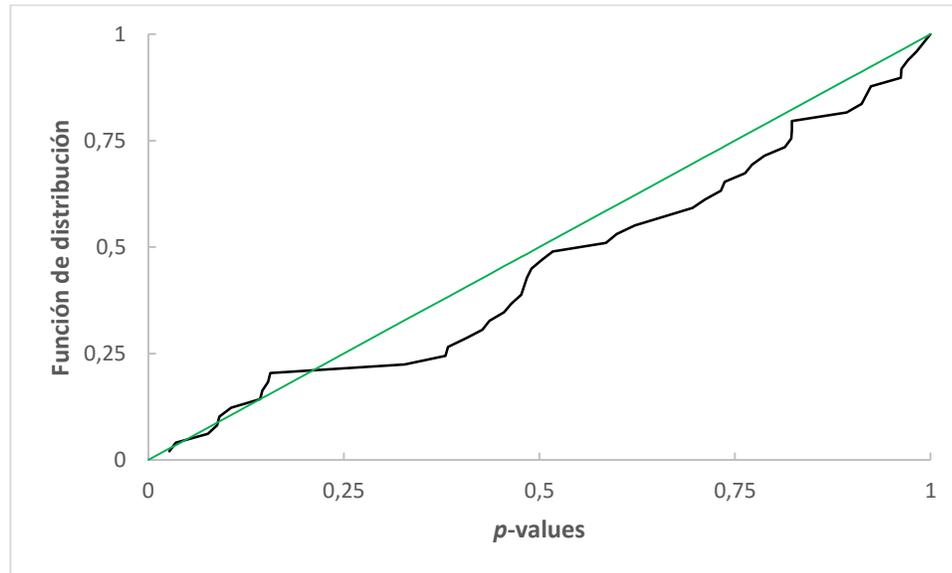
	Estadístico de Pearson	Grados de libertad	p -value
Todos los jugadores	57,635	49	0,813
Todos los pateadores	26,560	13	0,985
Todos los arqueros	31,075	36	0,298

Si los pateadores y arqueros son considerados como grupos separados, la hipótesis de igualdad en las probabilidades de éxito tampoco puede ser rechazada.

Con el fin de obtener una evaluación más informativa de la congruencia de los datos con la teoría, se compara la distribución de los valores de los 49 estadísticos con la distribución predicha por la teoría. Bajo la hipótesis nula, el estadístico Q^i se distribuye asintóticamente como una χ^2 con un grado de libertad para cada i . De forma equivalente, los p -values asociados con la realización de cada uno de los valores Q^i deben ser trazos desde una distribución uniforme. La gráfica 1 compara la función empírica de distribución acumulada de los p -values observados con la función de distribución acumulada teórica, es decir la distribución que debieron seguir los datos si hubieran sido generados según la teoría. A partir de la observación no se puede afirmar que los p -values sean totalmente cercanos a una distribución uniforme, dado que una porción considerable tiende a alejarse de la línea de 45° , por tanto no se puede asegurar que los datos son distribuidos uniformemente.

Esta comparación se formaliza a través del test Kolmogorov-Smirnov (KS), que prueba la hipótesis que una distribución empírica de datos observados es generada desde una distribución hipotética. El test propuesto resulta más poderoso que el test de Pearson conjunto frente a muchas hipótesis alternativas acerca de la forma en que las observaciones fueron generadas.

Gráfica 1. Distribución p -values test de Pearson de igualdad de probabilidades de éxito



El valor del estadístico KS para el conjunto de todos los jugadores es 0,8913, con un p -value de 0,000. Fraccionando la muestra entre pateadores y arqueros se encuentra que para el primer caso el estadístico KS toma un valor de 0,8689 asociado a un p -value de 0,000; mientras que para el segundo el estadístico es igual a 0,9262 con un p -value de 0,000. Los resultados de esta prueba indican de manera más concreta que el test conjunto de Pearson que los datos en la muestra no han sido generados por una conducta tipo minimax.

5.1.1. Poder del test

Centrando la atención en el test de Pearson conjunto para la igualdad en la probabilidad de éxito entre estrategias se evalúa el poder del test aplicado. Tomando como referencia a Walker y Wooders (2001), se formula una clase paramétrica de hipótesis alternativas para determinar la capacidad del test para identificar desviaciones desde el juego de minimax.

En concreto, la hipótesis nula de la prueba conjunta de Pearson se sostiene sobre el supuesto que cada jugador está jugando su estrategia mixta. Pero existe la posibilidad que algunos se comporten de tal forma que mezclen sus elecciones bajo otras proporciones. Siendo Ω la proporción de penales en los que el arquero elige el lado natural, la hipótesis

nula es por tanto que $\Omega = 56,52$, y valores distintos de Ω conforman las hipótesis alternativas. Así, para el pateador las probabilidades de ganar, p_N^p y p_{AN}^p corresponden a:

$$p_N^p(\Omega) = 69,63\Omega + 95,52(1 - \Omega) \quad (4)$$

$$p_{AN}^p(\Omega) = 94,50\Omega + 63,19(1 - \Omega)$$

De forma análoga, siendo λ la proporción de penales en los que el pateador elige el lado natural, la hipótesis nula es que $\lambda = 55,02$, y valores distintos conforman las hipótesis alternativas. Así, para el arquero las probabilidades de ganar, p_N^a y p_{AN}^a vienen dadas por:

$$p_N^a(\lambda) = 30,37\lambda + 5,50(1 - \lambda) \quad (5)$$

$$p_{AN}^a(\lambda) = 4,48\lambda + 36,81(1 - \lambda)$$

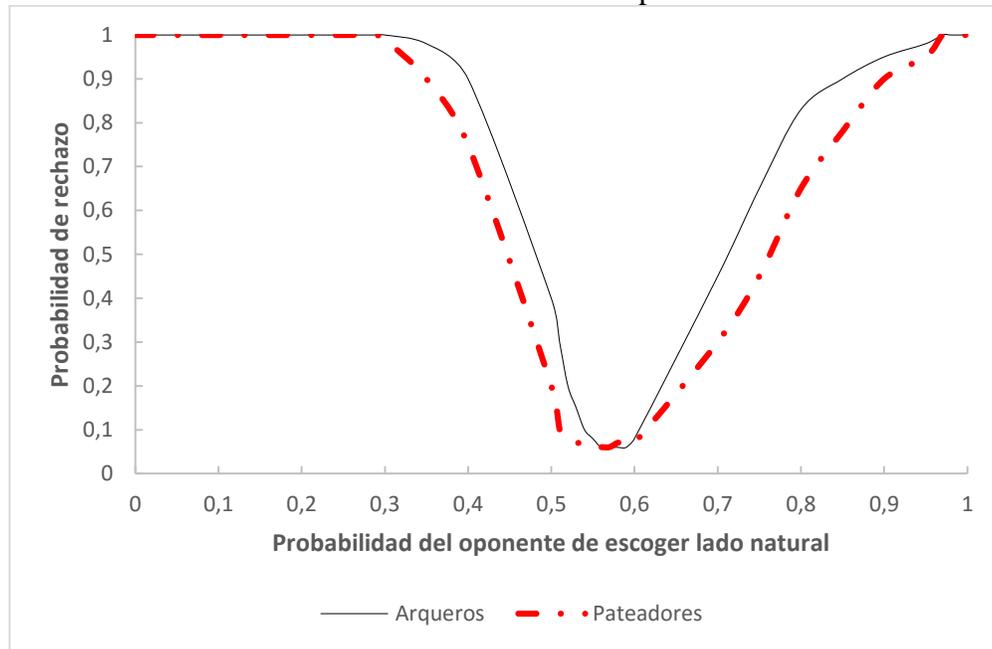
Bajo la hipótesis nula que en cada caso el jugador oponente sigue su estrategia mixta, el estadístico de Pearson $Q^n = \sum_{i=1}^n Q^i$ se distribuye asintóticamente como un χ^2 con n grados de libertad ($n=13$ para los pateadores y $n=36$ para los arqueros).

El poder del test contra valores alternativos de Ω y λ se define como la probabilidad de rechazo cuando el valor alternativo es el valor verdadero. Sin embargo, para valores de Ω y λ distintos de $\Omega = 56,52$ y $\lambda = 55,02$, se tiene que $p_N^p \neq p_{AN}^p$ y $p_N^a \neq p_{AN}^a$, respectivamente, por lo que la distribución del estadístico de Pearson es desconocida. Mediante métodos de Montecarlo se estima el poder del test contra valores alternativos de Ω y λ . Para distintos valores de estos parámetros se generaron datos aleatorios para cada uno de los 49 experimentos (separando por arqueros y pateadores). Posteriormente, el test de Pearson conjunto fue estimado y comparado con el valor crítico correspondiente y la hipótesis nula rechazada o no. A un nivel de significancia del 5%, la hipótesis nula se rechaza para los pateadores si $\sum_{i=1}^{13} Q^i$ excede el valor crítico de 22,3620. Para los arqueros la hipótesis nula se rechaza si $\sum_{i=1}^{36} Q^i$ excede el valor crítico de 50,9985. El proceso fue adelantado 10.000 veces, sirviendo las frecuencias empíricas de rechazo como el estimado del poder del test bajo Ω y λ , a través de la probabilidad de rechazo cuando Ω y λ son ciertas. Las funciones de poder son provistas en la gráfica 2.

Los resultados obtenidos de la simulación muestran que el test conjunto de Pearson tiene significativo poder para rechazar la hipótesis nula tanto para arqueros y pateadores, cuando se consideran valores alternativos lejanos para Ω y λ . Así por ejemplo, si ambos

jugadores eligieran su estrategia de lado natural con valores de $\Omega=0,4$ y $\lambda=0,4$, la probabilidad de rechazo sería 0,9 para arqueros y 0,75 para pateadores. Sin embargo, para valores cercanos, el poder del test decrece drásticamente, lo que se comprueba si se asume que ambos jugadores seleccionan sus estrategias con igual probabilidad, llevando la probabilidad de rechazo a 0,42 y 0,23 para arqueros y pateadores, respectivamente.

Gráfica 2. Funciones de poder



5.2. Prueba de independencia serial

La segunda implicación del teorema del minimax plantea que las estrategias de los jugadores son serialmente independientes, es decir son aleatorias y por ello consistentes con el equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Para probar si este comportamiento ocurre en los cobros de penales seleccionados se recurre al análisis provisto por el *run test*. Sea $S_i = \{s_1^i, s_2^i, \dots, s_{m^i}^i\}$ la secuencia de estrategias escogidas por el jugador i en el orden en que se registraron, donde $s_x^i \in \{N, AN\}$; $x \in [1, m^i]$; $m^i = m_N^i + m_{AN}^i$, y m_N^i y m_{AN}^i corresponden al número de veces que el jugador i elige el lado natural y el lado antinatural, respectivamente. La prueba propuesta se basa en el número de runs (r^i) presentes en la secuencia S_i . Un run es definido como la cadena o secuencia máxima de símbolos idénticos, que es precedido o seguido por un símbolo diferente o ningún símbolo. La hipótesis de independencia serial se rechaza si

hay demasiados o pocos runs. En la primera situación se sugiere la existencia de correlación negativa, en la medida que los runs son demasiado cortos y por tanto el pateador o el arquero cambian con demasiada frecuencia sus elecciones como para afirmar que son generadas aleatoriamente. Por su parte, pocos runs señalan la posible presencia de correlación positiva, dado que las elecciones no son modificadas con la suficiente frecuencia para ser consistentes con un proceso de aleatorización.

Bajo la hipótesis nula, la probabilidad que haya exactamente r^i runs en la secuencia S^i viene dada por $g(r^i, S^i)$, mientras que $G(r^i, S^i) = \sum_{k=1}^r g(r^i, S^i)$ denota la probabilidad de obtener r o menos runs, constituyendo la función de distribución acumulada.

De acuerdo a Gibbons y Chakraborti (1992), la aproximación a la distribución normal del estadístico a estimar toma la forma:

$$\hat{Z} = \frac{r^i - 1/2 - 2\left(\frac{m_N^i m_{AN}^i}{m^i}\right)}{\sqrt{2m_N^i m_{AN}^i \left(\frac{2m_N^i m_{AN}^i - m^i}{m^{i^2} (m^i - 1)}\right)}} \quad (6)$$

La hipótesis nula se rechaza a un nivel de significancia del 5% si la probabilidad de r^i o menos runs es inferior a 0,025 o si la probabilidad de r^i o más runs es menor a 0,025. Formalmente, si $G(r^i, S^i) < 0,025$ o si $1 - G(r^i - 1, S^i) < 0,025$. La tabla 6 muestra los resultados de este test. La evidencia derivada establece que la hipótesis de independencia serial no puede ser rechazada para ninguno de los 49 jugadores, lo que insinúa que los futbolistas considerados son capaces de producir secuencias aleatorias y que no tienden a conectar acciones a través del tiempo frecuentemente.

Para examinar la hipótesis conjunta que los penales son serialmente independientes en cada uno de los 49 jugadores se usa el test KS. Para esta prueba se necesita que la secuencia de las variables aleatorias sea i.i.d. con una función de distribución acumulada uniforme. Siguiendo a Walker y Wooders (2001), el test KS no puede ser aplicado ni sobre los valores de $G(r^i, S^i)$ ni sobre los de $G(r^i - 1, S^i)$ dado que no se distribuyen idénticamente – porque la distribución de r^i depende de m_N^i y m_{AN}^i –. Además, tampoco se distribuyen continuamente.

Para superar este inconveniente, los autores recomiendan la construcción, para cada uno de los 49 experimentos, de un estadístico aleatorio h^i dado por un trazo desde la

distribución uniforme $U[(G(r^i - 1, S^i), G(r^i, S^i))]$. Para cada uno de los jugadores, la última columna de la tabla 6 contiene una realización del estadístico señalado. Bajo la hipótesis nula, h^i es distribuido como $U(0,1)$.

Tabla 6. Test de independencia serial de elecciones

Jugador	Obs	Mezcla		Runs	$G(r^i - 1, S^i)$	$G(r^i, S^i)$	$U(G(r^i - 1), G(r^i))$
		N	AN	r^i			
Pateador 1	33	25	8	13	0,63	0,95	0,87
Pateador 2	17	11	6	6	0,02	0,13	0,09
Pateador 3	22	13	9	10	0,30	0,46	0,41
Pateador 4	23	11	12	12	0,69	0,84	0,76
Pateador 5	15	10	5	7	0,38	0,68	0,54
Pateador 6	17	11	6	9	0,94	0,95	0,94
Pateador 7	24	16	8	11	0,38	0,75	0,57
Pateador 8	16	10	6	10	0,41	0,42	0,41
Pateador 9	27	16	11	14	0,58	0,99	0,87
Pateador 10	30	24	6	13	0,15	0,38	0,26
Pateador 11	26	13	13	10	0,07	0,11	0,10
Pateador 12	17	9	8	7	0,13	0,21	0,19
Pateador 13	21	10	11	15	0,11	0,17	0,13
Arquero 1	20	14	6	9	0,81	0,82	0,81
Arquero 2	28	21	7	9	0,05	0,19	0,08
Arquero 3	32	18	14	18	0,65	0,97	0,92
Arquero 4	30	17	13	17	0,63	0,72	0,67
Arquero 5	34	16	18	23	0,08	0,11	0,08
Arquero 6	36	19	17	14	0,06	0,09	0,09
Arquero 7	33	15	18	15	0,16	0,40	0,30
Arquero 8	16	11	5	8	0,93	0,94	0,94
Arquero 9	16	4	12	8	0,29	0,48	0,38
Arquero 10	20	8	12	20	0,85	0,90	0,87
Arquero 11	34	19	15	13	0,06	0,09	0,06
Arquero 12	23	11	12	12	0,69	0,84	0,83
Arquero 13	18	11	7	12	0,21	0,22	0,22
Arquero 14	29	16	13	13	0,26	0,37	0,29
Arquero 15	18	10	8	11	0,58	0,69	0,69
Arquero 16	29	18	11	13	0,43	0,51	0,47
Arquero 17	24	18	6	12	0,16	0,26	0,18
Arquero 18	23	12	11	14	0,52	0,63	0,56
Arquero 19	23	18	5	7	0,05	0,24	0,11
Arquero 20	20	16	4	9	0,24	0,62	0,30
Arquero 21	28	19	9	11	0,12	0,33	0,26
Arquero 22	19	11	8	12	0,40	0,82	0,71
Arquero 23	33	22	11	12	0,08	0,14	0,13
Arquero 24	21	16	5	7	0,12	0,31	0,31
Arquero 25	17	8	9	10	0,60	0,79	0,64
Arquero 26	19	10	9	11	0,80	0,96	0,92
Arquero 27	23	16	7	12	0,48	0,52	0,51
Arquero 28	34	12	22	15	0,38	0,56	0,48
Arquero 29	20	9	11	8	0,03	0,18	0,05
Arquero 30	18	8	10	10	0,81	0,96	0,88
Arquero 31	28	17	11	16	0,51	0,86	0,83
Arquero 32	19	11	8	11	0,72	0,96	0,81
Arquero 33	27	19	8	11	0,33	0,55	0,42
Arquero 34	16	9	7	9	0,80	0,95	0,80
Arquero 35	17	10	7	11	0,36	0,41	0,36
Arquero 36	17	8	9	11	0,26	0,44	0,41

Significancia: ** 5%; *10%

Se obtuvo un valor promedio del estadístico KS de 0,8929, con un p -value de 0,0000, lo que conduce a rechazar la hipótesis que en cada experimento las elecciones son serialmente independientes.

A pesar de lo intuitivo y simple que resultan las pruebas alrededor de los runs, carecen de suficiente poder para determinar la existencia o no de aleatorización. Varias fuentes de dependencia dinámica como las elecciones propias pasadas o las elecciones anteriores de los rivales pueden explicar, al menos parcialmente, las decisiones actuales de cada jugador, por ello se suele indagar sobre el rol que cumple el comportamiento previo sobre la conducta de elección subsiguiente. Tradicionalmente, se ha seguido el enfoque propuesto por Brown y Rosenthal (1990) de estimar una ecuación logit estándar donde la variable dependiente corresponde a una dummy de la elección actual de la estrategia y las variables independientes al primer y segundo rezago de las elecciones anteriores de ambos jugadores, y la elección contemporánea del rival. Formalmente:

$$elepropia_i = G(\beta_0 + \beta_1 l_1 \cdot elepropia_i + \beta_2 l_2 \cdot elepropia_i + \beta_3 elerival_j + \beta_4 l_1 \cdot elerival_j + \beta_5 l_2 \cdot elerival_j) \quad (7)$$

Donde la función $G[x]$ denota la función $\exp(x)/(1 + \exp(x))$; *elepropia* es una variable dicótoma con valor de 1 si el jugador escogió su lado natural; *elerival* es una variable dicótoma con valor de 1 si el oponente eligió su lado natural, y los términos l_1 y l_2 se refieren al primer y segundo rezago en cada una de las variables mencionadas.

No obstante, la estimación de esta especificación resulta problemática en la medida que normalmente produce estimadores sesgados e inconsistentes. La elección de una estrategia en un cobro de penal no solo se ve influenciada por características observadas de los jugadores y posiblemente por la secuencia de elecciones de éstos, sino también por características no observadas, tradicionalmente efectos fijos, lo que conduce a la presencia de heterogeneidad inobservada. Un modelo de elección binaria no permite separar la estimación de los coeficientes de las variables explicativas observadas de los coeficientes de efectos fijos individuales no observados, por tanto la inconsistencia en la estimación de éstos se transmite a aquellos (Andersen, 1973 y Chamberlain, 1980).

Una alternativa es estimar un modelo logit con efectos fijos, el cual permite un control implícito de la heterogeneidad inobservada usando a cada individuo como su propio control, reduciendo sustancialmente el problema del sesgo por variable omitida. Sin

embargo, este método supone un trade-off entre sesgo y eficiencia, dado que produce errores estándar más amplios.

Por los motivos expuestos, aquí se estima un modelo logit con efectos fijos⁶. La tabla 7 contiene los resultados.

Tabla 7. Estimaciones de modelos logit para independencia serial
(Errores estándar entre paréntesis)

Logit (Efectos fijos)						
Variable dependiente: elepropia						
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Variable	Arqueros	Pateadores	Todos	Arqueros	Pateadores	Todos
1.elepropia	-0.1368 (0.1557)	-0.0740 (0.2703)	-0.1024 (0.1337)	-0.1390 (0.1561)	0.0245 (0.2773)	-0.0975 (0.1341)
12.elepropia	-0.1191 (0.1558)	0.0374 (0.2716)	-0.0876 (0.1338)	-0.1007 (0.1563)	0.1001 (0.2770)	-0.0783 (0.1340)
elerival	0.5248*** (0.1555)	-0.1762 (0.2688)	0.3530*** (0.1338)	0.5159 *** (0.1562)	-0.2113 (0.2740)	0.3459*** (0.1340)
1.elerival	0.3696 ** (0.1566)	-0.2030 (0.2686)	0.2248* (0.1342)	0.3599 ** (0.1573)	-0.2004 (0.2717)	0.2244 (0.1345)
12.elerival	0.2160 (0.1567)	0.1218 (0.2697)	0.1908 (0.1343)	0.2186 (0.1572)	0.1565 (0.2749)	0.1940 (0.1346)
Local				-0.1339 (0.1548)	0.3089 (0.2731)	-0.0466 (0.1337)
Minuto				-0.0025 (0.0030)	0.0110 (0.0054)	0.0003 (0.0026)
Score				-0.0610 (0.0685)	-0.0398 (0.1210)	-0.0581 (0.05891)
n	790	262	1052	790	262	1052

Significancia: *** 1%, **5%; *10%

La columna (3) presenta la estimación para el conjunto de los 49 jugadores, mientras que las columnas (1) y (2) para los arqueros y pateadores por separado, respectivamente. Las estimaciones mostradas en las columnas desde la (4)-(6) incluyen algunas variables que constituyen controles para las situaciones particulares del partido en el momento del penal. *Local* es una variable dummy con valor de 1 si el equipo del

⁶ Las estimaciones fueron hechas para el agregado de jugadores, considerando la dificultad de aplicarlas a nivel individual en algunos casos por la cantidad de observaciones disponibles.

pateador o arquero jugaba en casa, *minuto* indica el tiempo transcurrido hasta el momento de lanzarse el penal y *score* controla por el marcador del juego inmediatamente antes de patearse el penal.

Los resultados en la columna (3) revelan que la escogencia actual de jugar al lado natural no se encuentra correlacionada con las propias elecciones pasadas para el total de jugadores⁷. Sin embargo, la hipótesis de independencia serial no se sostiene. Si los jugadores pretenden jugar bajo una estrategia minimax y piensan que sus rivales están jugando minimax, los términos que involucran acciones pasadas de los oponentes, es decir *l. elerival* y *l2. elerival*, no deben influenciar sus elecciones actuales. Exclusivamente cuando los jugadores creen que su contrincante no está jugando minimax, las escogencias previas del rival deben afectar sus decisiones presentes. La tabla 7 muestra que el primer rezago de la elección rival (*l. elerival*) es significativo para explicar la selección contemporánea del lado natural, tanto para el total de jugadores como para los arqueros considerados como grupo. Este resultado sirve como evidencia contra el cumplimiento del modelo minimax en los cobros de penales en las ligas de América.

De forma interesante, el coeficiente vinculado con la elección actual del rival (*elerival*) resulta significativo para todos los jugadores, incluso después de controlar por la influencia de las elecciones pasadas. Específicamente, este coeficiente mide la correlación contemporánea entre la elección del pateador y el arquero, condicional sobre la configuración observada de elecciones pasadas. Cuando se fracciona entre pateadores y arqueros, éstos son los únicos que registran un coeficiente significativo para la elección contemporánea del rival.

Los resultados derivados de las estimaciones del logit con efectos fijos incluyendo controles son similares. Aunque en este caso, la elección pasada del rival para el conjunto de todos los jugadores no es significativa. Ninguna de las tres variables adicionales parece incidir sobre la escogencia del lado natural.

En definitiva, la evidencia para los test de aleatorización no es plenamente consistente con la hipótesis que las estrategias seguidas por los futbolistas profesionales de las ligas de América en los cobros de penales son serialmente independientes. Las pruebas

⁷ A pesar de ello, la dirección de los signos es la esperada, debido a que mayoritariamente los sujetos solicitados a generar secuencias aleatorias exhiben un sesgo en repetir la misma elección (Palacios-Huerta, 2015).

individuales, alrededor del run test, dan validez a la teoría. No obstante, la prueba conjunta, con mayor poder que la anterior, a través de estimaciones econométricas rechaza que todos los jugadores logren independencia en sus elecciones.

6. Análisis y discusión

Los resultados expuestos dejan ver que la evidencia empírica provista desde el comportamiento de los futbolistas de varias ligas profesionales de América en los cobros de penales apoya parcialmente las implicaciones derivadas de la hipótesis que los jugadores se comportan según el equilibrio de Nash en estrategias mixtas que exige el teorema del minimax.

Un primer soporte para esta afirmación se deduce de la frecuencia de elección de estrategias entre los jugadores, la cual muestra mayor variación que la predicha por la teoría para los pateadores de penales, indicando que, para los jugadores con este rol, no existe beneficio de jugar bajo las frecuencias minimax y que desviarse de ellas resulta ventajoso.

En cuanto a la hipótesis de igualdad en las probabilidades de éxito entre estrategias para los jugadores, los datos a nivel individual proveen evidencia a favor de un comportamiento minimax. Sin embargo, pruebas más robustas a nivel agregado no soportan el cumplimiento del teorema. Dado que el número de penales para cualquier jugador es mucho menor que el total de penales para todos los jugadores combinados, los test basados en datos individuales suelen ser menos precisos y tienen menor probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando alguna otra hipótesis es cierta.

A esto se suma la posibilidad que los jugadores estén siguiendo mezclas no estacionarias. Si un jugador actúa bajo las frecuencias de elección del minimax, cuando se realiza una partición de la muestra sus frecuencias empíricas deben exhibir una conformidad similar en cada una de las partes en que son particionados los datos. Sin embargo, muchas veces existe una correlación negativa entre estas partes, de tal forma que en algunas etapas se juegue por debajo de las predicciones de la teoría y en otras por encima, a fin que en el total el jugador logre un resultado deseado. Este fenómeno provoca que cuando se analice un determinado jugador, los test no rechacen la hipótesis nula.

En relación a la hipótesis de independencia serial en las elecciones, pese a que se corrobora a nivel individual, no encuentra pleno asidero en las pruebas conjuntas de mayor poder. En general, a excepción del trabajo de Palacios-Huerta (2003), esta hipótesis no ha

encontrado respaldo dentro de la literatura sobre pruebas empíricas del teorema del minimax. La conducta de aleatorización no resulta sencilla de conseguir ni en entornos experimentales ni en contextos reales. Una amplia evidencia revela que cuando los agentes intentan generar secuencias aleatorias, generalmente conectan con demasiada frecuencia sus opciones como para ser coherentes con un proceso aleatorio (Wagenaar, 1972). Al respecto, Martín et al. (2013) sentencian a través de la hipótesis del trade-off cognitivo que parte de la habilidad de los humanos para ajustar sus elecciones estratégicas en entornos competitivos que exigen comportamientos impredecibles fue desplazada por el crecimiento neural necesario para desarrollar la capacidad del lenguaje.

La evidencia sobre correlación entre las elecciones contemporáneas de arquero y pateador advierte la posible presencia de elementos de secuencialidad en algunas escogencias de los jugadores, en oposición a la simultaneidad supuesta por la corta distancia entre el punto de penal y la línea de meta y la alta velocidad del balón presentes en los penales. Así mismo habla de la posible ocurrencia de “*face reading*” entre los jugadores. El hecho que cuando la muestra se divide entre pateadores y arqueros, éstos sean los únicos para los que haya significancia estadística en la variable *elerival*, da pie a señalar que los arqueros esperan lo máximo posible hasta que su rival patee el balón, con el objetivo de lanzarse según la estrategia de su oponente, lo que resulta congruente con que en la mayoría de penales analizados las estrategias seguidas por cada jugador concordaran⁸.

Por su parte, los resultados de dependencia de los arqueros sobre las elecciones pasadas de sus oponentes son consistentes con las desviaciones de las frecuencias de elección minimax que caracteriza a los pateadores. Desde la perspectiva teórica, las condiciones de equilibrio dictaminan que en un juego repetido de suma cero en cada etapa los jugadores eligen acorde a la estrategia de equilibrio correspondiente a esa fase del juego. Una vez los arqueros reconocen que sus oponentes en los cobros de penales no siguen la conducta de equilibrio minimax entienden que seguir esta estrategia no siempre resulta óptima en cada etapa (cubro) y prefieren condicionar algunas de sus elecciones sobre lo que hicieron sus rivales u otros pateadores a los que enfrentaron previamente.

Esta observación concuerda con la realizada en la introducción del documento y con lo afirmado por Palacios-Huerta (2015) en cuanto a que si el contexto competitivo en el que

⁸ 55,6% de los penales se repartieron entre la estrategia NN y ANAN.

se dan los experimentos provoca que las expectativas propias sobre lo que otros jugadores harán se desvían sistemáticamente del equilibrio, jugar una estrategia minimax ya no resulta la opción más conveniente. Por tanto, el teorema deja de cumplirse en aquellos entornos en los que los jugadores no desarrollan enteramente habilidades como el procesamiento de información.

La presencia de jugadores con capacidades de aleatorización que no están plenamente desarrolladas en campeonatos a lo sumo de nivel intermedio como los de América no permite validar completamente las implicaciones del teorema del minimax. La experiencia⁹ adquirida por los futbolistas presentes en estas ligas en circunstancias que requieren impredecibilidad no parece ser suficiente para garantizar comportamientos de elección ligados con las implicaciones de equilibrio de la propuesta de Von Neumann. La forma en que actúan las habilidades cognitivas de dominio específico para procesar la información del contexto de competencia también juega un rol destacado.

Conclusiones

El presente trabajo buscó probar las implicaciones del teorema del minimax en el juego de suma cero que representa los cobros de penales en el contexto de varias de las ligas de fútbol profesional de América, con el objetivo de aportar evidencia empírica a partir de datos procedentes de una dimensión de la distribución de calidad de los jugadores implicados distinta a la europea, donde se ha encontrado resultados en línea con la propuesta de Von Neumann.

Los test realizados muestran que a nivel individual, las hipótesis de igualdad en las probabilidades de éxito entre estrategias e independencia serial en las elecciones se cumplen. A pesar de ello, las pruebas a nivel agregado, con mayor poder, rechazan su cumplimiento. De especial interés, resulta la presencia de correlación entre las elecciones pasadas del rival y la elección actual para todos los jugadores y los arqueros considerados como grupo.

Estos hechos suponen que en un contexto donde el nivel competitivo, de experiencia y formación no es el más alto, no aparecen ni son demandadas por parte de algunos jugadores ciertas habilidades estratégicas que son necesarias para jugar bajo los postulados

⁹ Tanto en acciones repetidas infrecuentemente como los penales, así como en situaciones de repetición frecuente como los tiros de esquina o los pases.

de equilibrio del minimax. Particularmente, factores como la aleatorización parecen no materializarse en varios de los cobros de penales por parte de los futbolistas profesionales en América.

Esta investigación debe ser extendida en varias direcciones. En particular, debe profundizarse el estudio sobre los mecanismos cognitivos que actúan en los procesos de decisión entre los deportistas profesionales en diferentes contextos, a fin de identificar de mejor manera el origen de las falencias y aciertos en relación a los postulados teóricos derivados de la teoría de juegos que soportan la modelación de varias situaciones presentes en el terreno de juego. Así mismo, merece la atención explorar las implicaciones del teorema del minimax en ambientes aún menos competitivos como campeonatos juveniles o torneos profesionales de corta edad como los desarrollados en continentes con menor tradición deportiva.

Referencias

- Andersen, E. B. (1973). *Conditional inference and models for measuring* (Vol. 5). Mentalhygiejnisk forlag.
- Azar, O. & Bar-Eli, M. (2011). Do soccer players play the mixed-strategy Nash equilibrium? *Applied Economics*, 43, 3591-3601.
- Brown, J. & Rosenthal, R. (1990). Testing the Minimax Hypothesis: A Re-examination of O'Neill's Experiment. *Econometrica*, 58, 1065-1081.
- Chamberlain, G. (1980). Analysis of Covariance with Qualitative Data. *Review of Economic Studies*, 47, 225-38.
- Chiappori, P.-A., Levitt, S. & Groseclose, T. (2002). Testing Mixed-Strategy Equilibria When Players Are Heterogeneous: The Case of Penalty Kicks in Soccer. *The American Economic Review*, 92(4), 1138-1151.
- Ericsson, K. & Lehmann, A. (1996). Expert and exceptional performance: Evidence of maximal adaptation to task constraints. *Annual Review Psychology*, 47, 273-305.

- Gibbons, J. & Chakraborti, S. (1992). *Nonparametric statistical inference*. New York: Marcel Dekker.
- Helsen, W. & Starkes, J. (1999). Multidimensional approach to skilled perception and performance in sport. *Applied Cognitive Psychology*, *13*, 1–27.
- Hoff, T. (2001). John von Neumann's Conception of the Minimax Theorem: A Journey Through Different Mathematical Contexts. *Archive for History of Exact Sciences*, *56*, 39-68.
- Hsu, S., Huang, C. & Tang, Ch. (2007). Minimax Play at Wimbledon: Comment. *American Economic Review*, *97*(1), 517-523.
- Kovash, K. & Levitt, S. (2009). Professionals do not play minimax: evidence from major league baseball and the national football league. NBER Working paper series. Working Paper 15347.
- Levitt, S., List, J. & Reiley, D. (2010). What happens in the field stays in the field: exploring whether professionals play minimax in laboratory experiments. *Econometrica*, *78*(4), 1413-1434.
- Martin, C., Bhui, R., Bossaerts, P., Matsuzawa, T., & Camerer, C. (2013). *Experienced chimpanzees behave more game-theoretically than humans in simple competitive interactions*. Caltech, Mimeo: Pasadena.
- McCabe, K., Mukherji, A. & Runkle, D. (2000). An experimental study of information and mixed strategy play in the three person matching pennies game. *Economic Theory*, *15*, 421–462.
- Miller, C. (1998). *He Always Puts It to the Right. A Concise History Of the Penalty Kick* (London: Víctor Gollanez, St Edmundsbury Press Ltd).
- Mood, A., Graybill, F. & Boes, D. (1974). *Introduction to the theory of statistics*. New York: McGraw-Hill.

- Moschini, G. (2004). Nash equilibrium in strictly competitive games: live play in soccer. *Economics Letters*, 85, 365-371.
- Ochs, J. (1995). Games with unique, mixed strategy equilibria: an experimental study. *Games and Economic Behavior*, 10, 202–217.
- Okano, Y. (2013). Minimax play by teams. *Games and Economic Behavior*, 77, 168–180.
- O'Neill, B. (1987). Nonmetric Test of the Minimax Theory of Two-Person Zerosum Games. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 84(7), 2106-2109.
- Palacios-Huerta, I. & Volij, O. (2008). Experientia Docet: Professionals Play Minimax in Laboratory Experiments. *Econometrica*, 76(1), 71-115.
- Palacios-Huerta, I. (2003). Professionals Play Minimax. *Review of Economic Studies*, 70, 395-415.
- Palacios-Huerta, I. (2015). *Beautiful Game Theory*. Princeton University Press.
- Rapoport, A. & Boebel, R. B. (1992). Mixed strategies in strictly competitive games: A further test of the minimax hypothesis. *Games and Economic Behavior*, 4, 261-283.
- Rulence-Pâques, P., Fruchart, E., Dru, V., & Mullet, E. (2005). Decision-making in soccer game: a developmental perspective. *Revue européenne de psychologie appliquée*, 55, 131–136.
- Van Essen, M. & Wooders, J. (2014). Blind stealing: Experience and expertise in a mixed-strategy poker experiment. *Games and Economic Behavior*, 91, 186-286.
- Wagenaar, W. A. (1972). Generation of random sequences by human subjects: A critical survey of literature. *Psychological Bulletin*, 77(2), 65-72.

Walker, M. & Wooders, J. (2001). Minimax Play at Wimbledon. *The American Economic Review*, 91(5), 1521-1538.

Wooders, J. (2010). Does experience teach? professionals and minimax play in the lab. *Econometrica*, 78(3), 1143-1154.

Anexo 1

Identificación de pateadores y arqueros

En corchetes el número de identificación en las tablas presentadas a lo largo del documento y entre paréntesis el(los) equipo(s) para el (los) que jugó y la nacionalidad de éste(os).

Pateadores

[1] Juan Rodríguez (Santos Laguna, Monarcas Morelia – México), [2] Andrés D'Allesandro (Internacional Porto Alegre – Brasil, River Plate – Argentina), [3] Christian Giménez (Cruz Azul, Pachuca – México), [4] Fred (Fluminense – Brasil), [5] Lucas Pratto (Vélez Sarsfield – Argentina, Atlético Mineiro - Brasil), [6] Luis Rey (Monarcas Morelia, Jaguares Chiapas, América, Puebla – México), [7] Mauro Boselli (Estudiantes – Argentina, León – México), [8] Néider Morantes (Envigado – Colombia), [9] Néstor Ortigoza (Argentinos Juniors, San Lorenzo – Argentina), [10] Omar Pérez (Santa Fe - Colombia), [11] Rogerio Ceni (Sao Paulo – Brasil), [12] Wellington Paulista (Cruzeiro, Criciúma – Brasil), [13] Santiago Silva (Vélez Sarsfield, Boca Juniors, Arsenal, Banfield - Argentina).

Arqueros

[1] Agustín Marchesín (Lanús – Argentina, Santos Laguna – México), [2] Agustín Orión (Estudiantes, San Lorenzo, Boca Juniors – Argentina), [3] Alfredo Talavera (Tigres, Toluca – México), [4] Bréiner Castillo (Deportes Tolima, Deportivo Independiente Medellín, Real Cartagena, Boyacá Chicó, Envigado – Colombia), [5] Camilo Vargas (Santa Fe – Colombia, Argentinos Juniors – Argentina), [6] Cirilo Saucedo (Tigres, Xolos Tijuana, Monarcas Morelia – México), [7] Cristian Campestrini (Arsenal – Argentina, Puebla – México), [8] Édgar Hernández (León, Tiburones

Rojos Veracruz – México), [9] Ernesto Hernández (Atlético Huila, Deportivo Cali – Colombia) [10] Fábio (Cruzeiro, Brasil), [11] Federico Vilar (Atlante, Monarcas Morelia, Atlas, Xolos Tijuana – México), [12] Felipe (Corinthians, Flamengo – Brasil), [13] Guillermo Sara (Atlético Rafaela, Boca Juniors - Argentina), [14] Jonathan Orozco (Monterrey – México), [15] Jorge Villalpando (Puebla, Jaguares Chiapas – México), [16] José Corona (Cruz Azul - México), [17] José Cuadrado (Millonarios, Deportivo Pasto, Once Caldas – Colombia), [18] Juan Olave (Belgrano – Argentina), [19] Luis Estacio (Junior, Atlético Huila, Cúcuta Deportivo, Águilas Doradas, Deportes Tolima, Boyacá Chicó, Deportivo Pasto – Colombia), [20] Luis Michel (Club Deportivo Guadalajara – México), [21] marcelo Barovero (Vélez Sarsfield, River Plate – Argentina), [22] Marcelo Lomba (Flamengo, Bahía, Asociación Atlética Ponte Preta – Brasil) , [23] Moisés Muñoz (Monarcas Morelia, Atlante, América – México), [24] Muriel (Internacional Porto Alegre – Brasil), [25] Nahuel Guzmán (Newell's Old Boys – Argentina, Tigres – México), [26] Nicolás Vikonis (Millonarios – Colombia), [27] Óscar Pérez (Tigres, Jaguares Chiapas, Necaxa, San Luis, Pachuca – México), [28] Oswaldo Sánchez (Santos Laguna – México), [29] Ricardo Jerez (Alianza Petrolera – Colombia), [30] Rodolfo Cota (Pachuca, Puebla, Club Deportivo Guadalajara – México), [31] Rogerio Ceni (Sao Paulo – Brasil), [32] Sebastián Saja (Racing – Argentina), [33] Sebastián Viera (Junior – Colombia), [34] Tiago Volpi (Figueirense – Brasil, Querétaro – México), [35] Vanderlei (Coritiba, Santos – Brasil), [36] Weverton (Atlético Paranaense – Brasil).