Universidad Tecnológica de Pereira

# APLICACIÓN DEL MÉTODO DE DARBOUX EN EL ANÁLISIS DE INTEGRABILIDAD DE UN SISTEMA DIFERENCIAL DE TIPO LOTKA-VOLTERRA.

José Fabian Valencia Parra

Maestría en Matemática
Facultad de Ciencias Básicas
Pereira, Risaralda
2021

# *Universidad Tecnológica de Pereira*

# Aplicación del método de Darboux en el análisis de integrabilidad de un sistema diferencial de tipo Lotka-Volterra

*Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Magister en Matemática*

José Fabian Valencia Parra

Director:
Dr. Pedro Pablo Cárdenas Alzate

Maestría en Matemática
Facultad de Ciencias Básicas
Pereira, Risaralda
2021

# Nota de Aceptación

Jurado

Jurado

Jurado

Pereira, 06 de Diciembre de 2021.

# AGRADECIMIENTOS

*Doy gracias a mi padre Celestial por permitirme recorrer este camino y alcanzar este logro. Dedico este trabajo a mi madre por el ánimo y el respaldo que me brindó durante este proceso.*

*Quiero dar las gracias a mi director Pedro Pablo Cárdenas Alzate por su paciencia y comentarios que me ayudaron a culminar mis estudios y de igual forma al docente y compañero de maestría Fabian Toledo Sánchez por sus consejos y aportes en el uso del programa Matlab.*

*A la maestría en Matemática por la formación brindada a través de sus calificados docentes, los cuales me brindaron un excelente conocimiento matemático y formación integral; y en especial a su director José Rodrigo Gonzalez Granada por su apoyo y asesoría en este largo proceso.*

# RESUMEN

En este trabajo se estudia el problema de existencia de la primera integral para sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) \\ \dot{z} = f_3(x, y, z), \end{cases}$$

donde $f_1, f_2, f_3$ son funciones polinomiales. Se aplica un método que permite encontrar condiciones de integrabilidad en el origen; dicho método se conoce como el método de integrabilidad de Darboux, el cual usa curvas algebraicas invariantes en la construcción de una primera integral.

Como aplicación de este método se considera un sistema diferencial tipo Lotka-Volterra cuyas ecuaciones están dadas por:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(x + \alpha y + \beta z) = P(x, y, z) \\ \dot{y} = -y(\beta x + y + \alpha z) = Q(x, y, z) \\ \dot{z} = -z(\alpha x + \beta y + z) = R(x, y, z), \end{cases}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x, y, z$ representa la interacción de las especies.

# ABSTRACT

In this work we study the existence problem of the first integral for systems of differential equations of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) \\ \dot{z} = f_3(x, y, z), \end{cases}$$

where $f_1, f_2, f_3$ are polynomial functions. A method is applied to find integrability conditions at the origin; this method is known as the Darboux integrability method, which uses invariant algebraic curves in the construction of a first integral.

As an application of this method we consider a Lotka-Volterra type differential system whose equations are given by:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(x + \alpha y + \beta z) = P(x, y, z) \\ \dot{y} = -y(\beta x + y + \alpha z) = Q(x, y, z) \\ \dot{z} = -z(\alpha x + \beta y + z) = R(x, y, z), \end{cases}$$

where $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ and $x, y, z$ represents the species interaction.

# ÍNDICE GENERAL

# ÍNDICE DE FIGURAS

# CAPÍTULO 1

# GENERALIDADES

## Introducción

A inicios del siglo XX, los matemáticos Alfred Lotka y Vittora Volterra impulsaron ciertas ecuaciones matemáticas que describen la relación entre dos especies que comparten un mismo ecosistema. El modelo de Lotka-Volterra o ecuaciones predador-presa, es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales y autónomas que se emplean para describir dinámicas de sistemas biológicos en el que interactúan dos especies.

La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales utiliza nuevas estrategias para analizar la solución del sistema asociado, una de estas estrategias es la existencia de la primera integral, que para un campo vectorial bidimensional representa su retrato de fase; los campos vectoriales más simples son los Hamiltonianos, pero en general encontrar la primera integral es una tarea muy complicada.

Algunos métodos se han utilizado para estudiar la existencia de las primeras integrales para los sistemas no Hamiltonianos basados en las simetrías de Lie y Noether, la teoría de integrabilidad de Darboux, el método directo, etc. Por lo tanto, en esta propuesta se aplica el método de integrabilidad de Darboux para encontrar condiciones en el origen de un sistema diferencial tipo Lotka-Volterra de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(x + \alpha y + \beta z) \\ \dot{y} = -y(\beta x + y + \alpha z) \\ \dot{z} = -z(\alpha x + \beta y + z), \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $x, y, z$ representa el número de individuos de cada especie y $\alpha, \beta$ son coeficientes de competencia que describen el efecto que produce cada especie sobre las de más.

## Justificación

Una de las principales aplicaciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales se observa en la biología matemática, cuyo principal objeto de estudio es la dinámica poblacional que se ocupa de los cambios que sufren las poblaciones biológicas en cuanto a tamaño, sexo y otros parámetros que la definen.

El sistema de ecuaciones diferenciales Lotka-Volterra describe la interacción entre dos especies en un ecosistema: una población que consiste de presas y una población conformada por depredadores y se resumen en el siguiente modelo.

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = \gamma xy - \delta y, \end{cases} \tag{1.2}$$

donde $x$ e $y$ son respectivamente el número de depredadores y presas y $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son parámetros reales positivos que describen la interacción de las dos especies. En la figura 1.1 se observa las trayectorias cerca del punto de equilibrio $\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ para $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 1$. Un análisis completo sobre la estabilidad del sistema 1.2 usando los polinomios de Hurwitz se encuentra en [23].

*Observación:* En 1936, Kolmogorov estudió estos sistemas y los extendió a una dimensión arbitraria, y por esta razón este tipo de sistemas también se llaman sistemas Kolmogorov.

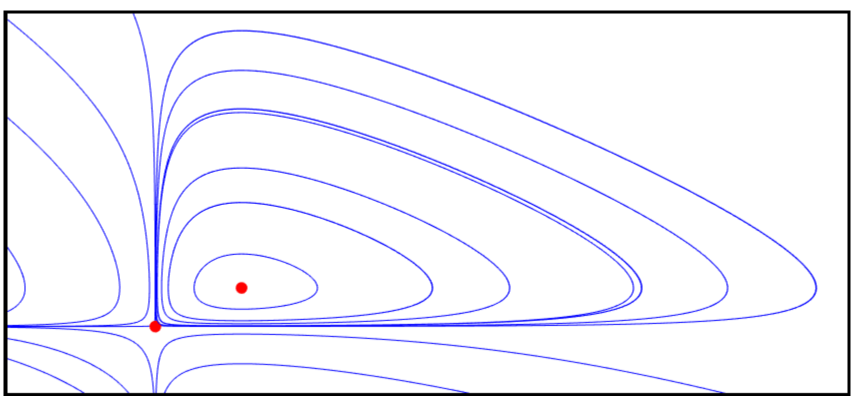

Figura 1.1: Modelo presa depredador de Lotka-Volterra para 2 especies.

De la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales sabemos que una primera integral de un sistema de ecuaciones diferenciales es una función no constante $f$ que satisface la siguiente ecuación.

$$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

dónde $P, Q, R$ son funciones reales continuamente diferenciables en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Uno de los problemas que presentan los sistemas de ecuaciones diferenciales es la búsqueda de las primeras integrales, la cual es una herramienta clásica en la clasificación de todas las trayectorias de un sistema dinámico. Para sistemas diferenciales tipo Lotka-Volterra una herramienta útil es la teoría de integrabilidad de Darboux que permite expresar la primera integral como un producto de curvas algebraicas invariantes con factores exponenciales.

Por lo anterior, en esta propuesta surge la siguiente pregunta. ¿Qué condiciones de integrabilidad se deben cumplir para un sistema diferencial tipo Lotka-Volterra de la forma 1.1?

## Objetivos

### Objetivo General

Aplicar el método de integrabilidad de Darboux para encontrar condiciones de integrabilidad en el origen de un sistema diferencial de tipo Lotka-Volterra.

### Objetivos Específicos

- Describir el método de integrabilidad de Darboux y aplicarlo a sistemas de ecuaciones diferenciales del tipo Lotka-Volterra.
- Encontrar condiciones de integrabilidad para un sistema Lotka-Volterra de la forma 1.1.
- Demostrar que el sistema diferencial de la forma 1.1 admite dos primeras integrales.

## Metodología

La primera fase es realizar consultas bibliográficas de diferentes artículos científicos relacionados con el tema de integrabilidad de sistemas dinámicos, teoría de integrabilidad de Darboux y existencia de primeras integrales para sistemas Lotka-Volterra.

Con esta información se avanzará en el estudio de la existencia de las primeras integrales para sistemas del tipo Lotka-Volterra.

Luego se estudiará el modelo de integrabilidad de Darboux, se realizan algunos ejemplos aplicados a sistemas diferenciales bidimensionales y tridimensionales y por último se consideran las modificaciones para el caso de un sistema Lotka-Volterra.

Finalmente se aplica el método de Integrabilidad de Darboux para encontrar las dos primeras integrales del sistema 1.1 y las condiciones de integrabilidad.

# CAPÍTULO 2

# PRELIMINARES

En este capítulo se presentan algunas definiciones básicas de la geometría algebraica, algunos conceptos y teoremas fundamentales de la teoría de integrabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales que son el soporte para las temáticas utilizadas en los siguientes capítulos; iniciando por algunas propiedades de las primeras integrales, independencia lineal, el teorema de cuadro de flujo y finalizando con algunos conceptos básicos de curvas algebraicas invariantes.

## 2.1. Existencia y propiedades de las primeras integrales

Consideremos un sistema diferencial autónomo en un espacio $n$ dimensional

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto, y $f(x) = (f_1(x), ...f_n(x))$ es una función $n$ dimensional con valores vectoriales definida en $\Omega$. El sistema diferencial 2.1 es suave si $f \in C^1(\Omega)$; $C^k$ $k \in \mathbb{N}$, denota el conjunto de funciones cuya derivada hasta el $k$-ésimo orden son continuas en $\Omega$; $C^\infty(\Omega)$ es el conjunto de funciones infinitamente diferenciables en $\Omega$; y $C^w(\Omega)$ es el conjunto de funciones analíticas en $\Omega$. Una función es analítica en $\Omega$ si se puede expandir como una serie convergente de Taylor en alguna vecindad de cualquier punto de $\Omega$.

Para cualquier $x_0 \in \Omega$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, el sistema diferencial suave 2.1 tiene una solución única $x = \varphi(t), t \in J$ satisfaciendo $\varphi(t_0) = x_0$ y $\varphi \in C^1(J)$, donde $t_0 \in J$ y $J$ es el intervalo máximo en el que se define la solución. Entonces el conjunto $\Gamma := \{\varphi(t) \mid t \in J\} \subset \Omega$ se llama una órbita o trayectoria del sistema 2.1 en $\Omega$ y $x_0$ es el punto inicial de la órbita $\Gamma$. El espacio $\mathbb{R}^n$ se llama el espacio de fase si $n > 2$ o el plano fase si $n = 2$. El espacio $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, teniendo en cuenta el tiempo, se llama el espacio de fase extendida (o el plano de fase extendida) si $n \geq 2$. El conjunto $\{(\varphi(t), t) \mid t \in J\}$ en el espacio de fase extendida se llama curva integral del sistema 2.1.

Sea $\xi$ el campo vectorial asociado al sistema 2.1, es decir.

$$\xi = f_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Una función $H(x)$ es una primera integral del sistema 2.1 en $\Omega$ si,

• $H(x)$ se define en un subconjunto completo de medidas de Lebesgue $D$ de $\Omega$.
• $H(x)$ no es una constante en ningún subconjunto de medidas positivas de Lebesgue de $D$ (o equivalente $H(x)$ no es una constante local).
• $H(x) \in C(D)$, y es una constante a lo largo de cada órbita del sistema 2.1 situada en $D$, con $C(D)$ el conjunto de funciones continuas definidas en $D$.

**Ejemplo 2.1.1.** El sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x, \end{cases} \tag{2.2}$$

tiene la solución general

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \qquad y = C_1 \sin t - C_2 \cos t,$$

dónde $C_1$ y $C_2$ son constantes integrales, que contienen todas las soluciones del sistema. Se puede comprobar fácilmente que $H = x^2 + y^2$ es una de las primeras integrales del sistema y está definida completamente en el plano. En la figura 2.1 se observa que hay un punto de equilibrio en espiral en $(0,0)$ .

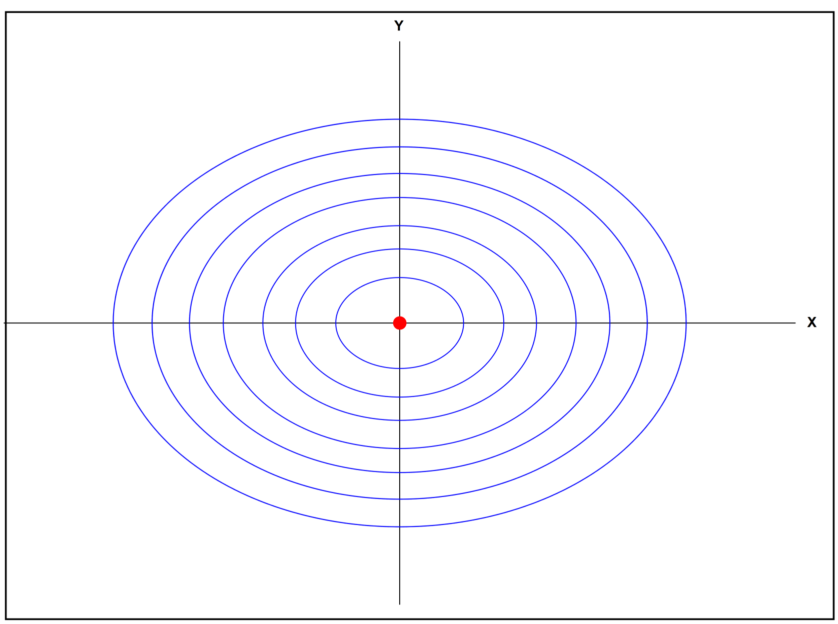


Figura 2.1: Primera Integral $H = x^2 + y^2$ del sistema 2.2.

*Observación:* Aunque el sistema diferencial 2.2 está definido en $\Omega$, sus primeras integrales pueden no estar definidas en la totalidad de $\Omega$. Por ejemplo, el sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \tag{2.3}$$

se define en $\mathbb{R}^2$ y es analítica, pero su primera integral $H(x,y) = \dfrac{y}{x}$ sólo puede definirse en el subconjunto completo de medidas de Lebesgue: $\mathbb{R}^2 \setminus \{x \neq 0\}$ .

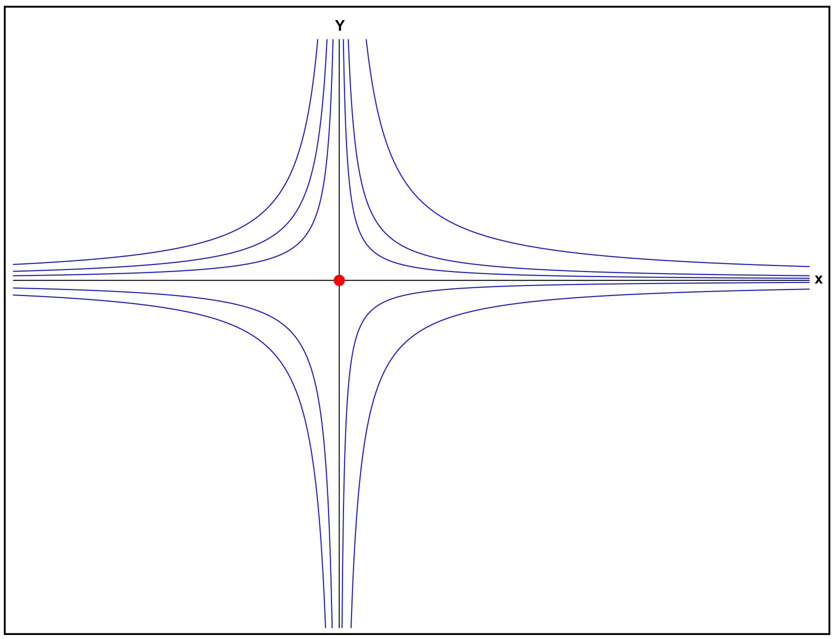


Figura 2.2: Primera Integral para el sistema 2.3.

Supongamos que $H$ es una primera integral del sistema 2.1, luego para $c \in \mathbb{R}$ en términos generales $\{x \in \Omega \mid H(x) = c\}$ es una hipersuperficie $n$–1 dimensional del espacio $n$ dimensional, que también se denota por $H = c$. Así el espacio $n$-dimensional es foliado por las $n-1$ hipersuperficies de nivel dimensional.

En particular, si $n = 3$ llamamos a $H$ una superficie de nivel. Si $n = 2$ llamamos a $H$ una curva de nivel.

## 2.2. Caracterización y propiedades de las primeras integrales

**Proposición 2.2.1.** *Supongamos que $H(x)$ es una función continuamente diferenciable definida en un subconjunto completo de medidas de Lebesgue $D$ de $\Omega$ y no es localmente constante en $D$. Entonces $H$ es una primera integral del sistema 2.1 en $\Omega$ si y sólo si $\xi(H) \equiv 0, x \in D$, es decir*

$$\langle f(x), \nabla_x H(x) \rangle \equiv 0, \qquad x \in D, \tag{2.4}$$

*dónde* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *denota el producto interno de dos vectores,* $\nabla_x H(x) = (\partial_{x_1} H(x), ..., \partial_{x_n} H(x))$ *es el gradiente de* $H$ *y* $\partial_{x_i} H(x) = \dfrac{\partial H(x)}{\partial_{x_i}}, i = 1, ..., n$ *es la derivada parcial de* $H(x)$ *con respecto a* $x_i$*.*

*Observación:* En este trabajo se estudia principalmente las órbitas del sistema diferencial 2.1 en el espacio de fase y por lo tanto en la definición de las primeras integrales no se tiene en cuenta el tiempo $t$. La primera integral en función del tiempo $t$, por ejemplo $H(t, x)$ se define de manera similar, por lo tanto, una función continuamente diferenciable $H(t, x), (t, x) \in J \times D \subset \mathbb{R} \times \Omega$, es invariante del sistema 2.1 si y sólo si

$$\partial_t H(t, x) + \langle f(x), \nabla_x H(t, x) \rangle \equiv 0, \qquad (t, x) \in \mathbb{R} \times D.$$

Similarmente, para un sistema diferencial no autónomo

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad (t, x) \in J \times \Omega, \tag{2.5}$$

en términos generales, una función continua $H(t, x)$ es una primera integral del sistema si $H(t, x)$ es constante a lo largo de cada curva integral $\{(t, \psi(t)) \mid t \in J\}$, donde $\psi(t)$ es una solución de 2.5.

Sea $H_1(x), \ldots, H_k(x)$ las primeras integrales del sistema 2.1.

- Si sus gradientes,

$$\nabla_x H_1, \ldots, \nabla_x H_k,$$

son linealmente independientes en un subconjunto de medidas de Lebesgue de $\varOmega$, entonces $H_1(x), \ldots, H_k(x)$ se llaman primeras integrales funcionalmente independientes de $\varOmega$.

- Las constantes vectoriales $(c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ son valores regulares de $H_1(x), \ldots, H_k(x)$ si las $k$ funciones vectoriales $\nabla_x H_1, \ldots, \nabla_x H_k$ tienen rango completo, es decir, el rango $k$, de todos los puntos de $\bigcap_{k=1}^{k} \{x \in \Omega \mid H_i(x) = c_i\}$. En este caso, los puntos en $\bigcap_{k=1}^{k} \{x \in \Omega \mid H_i(x) = c_i\}$ son llamados puntos regulares de $H_1(x), \ldots, H_k(x)$.

Un punto $x_0 \in \Omega$ se llama un punto regular del sistema 2.1 si $f(x_0) \neq 0$. De lo contrario $x_0$ es llamado punto singular del sistema. En lo que sigue, un punto singular es también llamado una singularidad, punto crítico o un equilibrio.

**Teorema 2.2.2.** *Asuma que* $f(x) \in C^k(\varOmega), k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ *y* $x_0$ *es un punto regular del sistema 2.1. Entonces existe una vecindad* $V \subset \varOmega$ *de* $x_0$ *de tal manera que el sistema 2.1 tiene* $n-1$ *primeras integrales* $C^k$ *funcionalmente independientes en* $V$*.*

Nota: Ver referencia [25].

Sea $\varphi_t(x), t \in J_x$ la solución del sistema autonómo 2.1 en $\varOmega$ satisfaciendo la condición inicial $\varphi_t(x) = x \in \varOmega$, donde $J_x$ es el intervalo máximo que contiene 0 donde se define la solución, entonces $\varphi_t(x)$ es un flujo, es decir, por definición satisface $\varphi_t(x) = x$ para todo $x \in \varOmega$ y

$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$ para todo $x \in \Omega$ y $t, s \in J_x$ con $t + s \in J_x$.

El sistema diferencial 2.1 y

$$\dot{y} = g(y), \qquad y \in \Gamma \subset \mathbb{R}^n \quad \text{un subconjunto abierto,} \tag{2.6}$$

son $C^k$ topológicamente equivalente, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, si existe un $C^k$ difeomorfismo (u homeomorfismo) $h : \Omega \to \Gamma$ tal que $h$ conjuga los flujos de los dos sistemas diferenciales, es decir

$$h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h, \tag{2.7}$$

donde $\varphi_t$ y $\psi_t$ son respectivamente los flujos de los sistemas 2.1 y 2.6. Llamamos $h$ una conjugación entre los flujos de los dos sistemas diferenciales o simplemente entre los dos sistemas diferenciales.

Los sistemas diferenciales 2.1 y 2.6 son ($C^k$) orbitalmente equivalente si existe un ($C^k$ difeomorfismo) homeomorfismo que envía las órbitas de un sistema a las órbitas del otro.

**Teorema 2.2.3.** *(Teorema del cuadro de flujo). Asuma que $f(x) \in C^k(\Omega)$, $K \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ y $x_0$ es un punto regular del sistema 2.1, entonces existe una vecindad $V \subset \Omega$ de $x_0$ en el cual el sistema 2.1 es $C^k$ equivalente al sistema diferencial*

$$\dot{y_1} = 1, \qquad \dot{z} = 0, \quad \textit{donde} \quad z = (y_2, \cdots, y_n). \tag{2.8}$$

La demostración del teorema 2.2.3 puede ser consultada [25].

## 2.3. Independencia de las primeras Integrales

La siguiente definición es de vital importancia para el desarrollo de este trabajo ya que permite determinar la independencia de dos o más primeras integrales asociadas a un sistema, la idea principal consiste en la independencia de los gradientes asociados a las primeras integrales.

**Definición 2.3.1.** *Sea $H_1, \ldots, H_k$ las $k$ primeras integrales de $\xi$ definida en los subconjuntos $U_1, \ldots, U_k$ donde $U_k \subset \mathbb{R}^n$ con $k : 1 \ldots, n$ y sea $W = \bigcap_{i=1}^{k} U_i$ un conjunto no vacío. Las primeras integrales forman un conjunto de primeras integrales funcionalmente independientes (o primeras integrales independientes) si existe un $x_0 \in W$ tal que*

$$\mathit{Rango}\left(\partial x H_1\left(x_0\right), \partial x H_2\left(x_0\right), \ldots \partial x H_k\left(x_0\right)\right) = k$$

*Observación:* Dos primeras integrales son independientes si existe un punto $x_0$ en el que sus gradientes son linealmente independientes; en la figura 2.3 se muestra que para un $x = x_0 \in U$, los gradientes de $H_1$ y $H_2$ son linealmente independientes; para el caso que el sistema tenga $k$ primeras integrales se usa la definición 2.3.1.

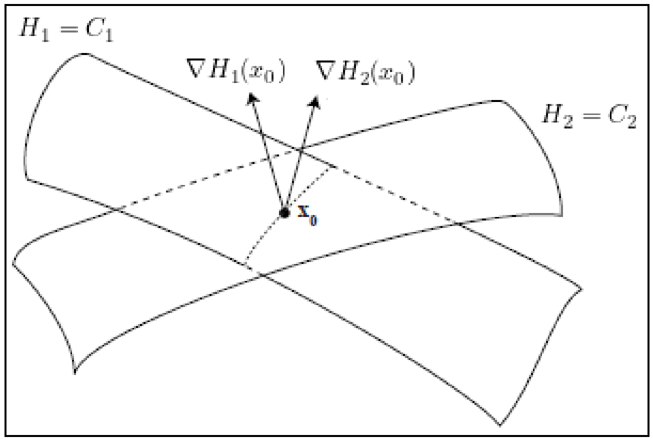


Figura 2.3: Independencia lineal de las primeras integrales $H_1$ y $H_2$.

El siguiente ejemplo ilustra la independencia de dos primeras integrales.

**Ejemplo 2.3.2.** El sistema Rabinovich [9] describe el comportamiento de ondas cuasincrónicas en un plasma con no linealidades cuadráticas, se expresa mediante las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y^2 + \gamma x + z - \delta^2 \\ \dot{y} = 2xy + \gamma y - \delta x \\ \dot{z} = -2xz - 2z, \end{cases} \tag{2.9}$$

donde $x, y, z, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. La integrabilidad de este sistema ha sido analizada en [1]. Para $\delta = 0$ y $\gamma = -1$, existen dos primeras integrales dependientes del tiempo.

$$H_1 = \left(x^2 + y^2 + z\right) e^{2t}, \qquad H_2 = yze^{3t}. \tag{2.10}$$

Para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ se tiene que los gradientes de $H_1$ y $H_2$ son linealmente independientes. Sabemos que los gradientes de $H_1$ y $H_2$ son respectivamente

$$\nabla H_1 = \left\langle 2e^{2t}x, 2e^{2t}y, e^{2t} \right\rangle, \quad \nabla H_2 = \left\langle 0, e^{3t}z, e^{3t}y \right\rangle.$$

Luego se puede verificar que $\nabla H_1$ y $\nabla H_2$ son linealmente independientes; por lo tanto, $H_1$ y $H_2$ son L.I.

En la gráfica 2.4 cuando $t \to \infty$ todas las trayectorias van al origen (un atractor global) acercándose al nivel asintótico del conjunto $H_1 = 0$.

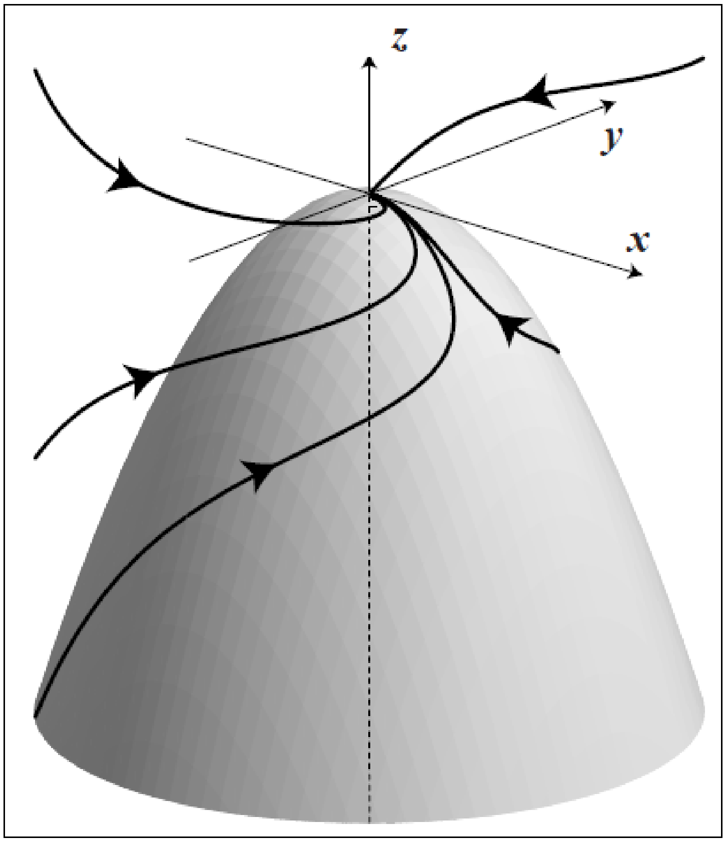


Figura 2.4: Dinámica del sistema Rabinovich.

El siguiente resultado, obtenido por [12] revela una propiedad esencial de la independencia funcional.

**Teorema 2.3.3.** *Asuma que $M \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad suave, $g_1, \ldots, g_k$ son funciones realmente suaves sobre $M$. Entonces $g_1, \ldots, g_k$ son funcionalmente dependientes de $M$ si y sólo si, para cada $x \in M$ existe una vecindad $U$ de $x$ y una función real suave $F(z_1, \ldots, z_k)$ de $k$ variables tal que*

$$F(g_1(x), \ldots, g_k(x)) \equiv 0 \qquad x \in U.$$

En términos generales, una variedad suave $n$ dimensional se asemeja localmente a un espacio euclideo $n$ dimensional. Más precisamente, una variedad suave $M$ es un espacio tal que para cada $p \in M$, existe una vecindad $U_p \subset M$ de $p$ y un difeomorfismo $\chi_p : U_p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que si $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ para algún $p, q \in M$, entonces $\chi_p \circ \chi_q^{-1} : \chi_p(U_p \cap U_q) \to \chi_q(U_p \cap U_q)$ es un difeomorfismo.

Ahora estudiamos el número máximo de primeras integrales funcionalmente independientes que puede tener el sistema 2.1 y la relación entre las primeras integrales de este sistema.

**Proposición 2.3.4.** *Suponga que la función de valor vectorial $n$ dimensional $f(x)$ en 2.1 es continuamente diferenciable en $\Omega$ y no desaparece de manera idéntica, las siguientes* *afirmaciones son válidas.*

*(a) El sistema 2.1 tiene como máximo $n-1$ primeras integrales funcionalmente independientes y continuamente diferenciables en $\Omega$.*
*(b) Si $H_1(x), \ldots, H_{n-1}(x)$ son primeras integrales funcionalmente independientes y continuamente diferenciables del sistema 2.1 en $\Omega$, entonces cualquier primera integral continuamente diferenciable $I(x)$ del sistema 2.1 puede representarse localmente como una función continuamente diferenciable en términos de $H_1, \ldots, H_{n-1}$.*

Teniendo en cuenta la proposición anterior, tenemos la siguiente definición.

**Definición 2.3.5.** *El sistema 2.1) es*

- *Completamente integrable (o simplemente integrable) en $\Omega$ si tiene $n-1$ primeras integrales funcionalmente independiente en $\Omega$.*
- *$C^k$ completamente integrable (o simplemente $C^k$ integrable) en $\Omega, k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty, \omega\}$ , si tiene $n-1$ integrales $C^k$ funcionalmente independientes en $\Omega$ donde $\mathbb{Z}_+$ es el conjunto de enteros no negativos.*
- *Localmente $C^k$ completamente integrable (o simplemente localmente $C^k$ integrable ) en $x_0 \in \Omega$ si tiene $n-1$ primeras integrales $C^k$funcionalmente independientes en una vecindad de $x_0$.*

*Observación:* Las hipersuperficies de nivel de las $k<n$ primeras integrales funcionalmente independientes se intersecan transversalmente en puntos regulares. Los vectores normales de las hipersuperficies en cada uno de los puntos de intersección abarcan un espacio lineal de dimensión $k$. Entonces el conjunto de puntos de intersección de las hipersuperficies de nivel es un conjunto invariante ($n$–$k$) dimensional en un subconjunto completo de medidas de Lebesgue de $\Omega$. Si $k = (n-1)$, la intersección de las hipersuperficies de nivel de estas primeras integrales es en general un conjunto invariante unidimensional, por lo que está formado por las órbitas del sistema 2.1. Por lo tanto, si un sistema diferencial $n$ dimensional tiene $n-1$ primeras integrales funcionalmente independientes, entonces todas las órbitas del sistema serán determinadas por las primeras integrales excepto quizás en un subconjunto de medida de Lebesgue cero de $\Omega$ donde las primeras integrales no están bien definidas o no son funcionalmente independientes. Ésta es una propiedad esencial de la completa integrabilidad.

## 2.4. Integrabilidad local

El estudio de la integrabilidad local de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales está garantizado ya que el problema del valor inicial nos proporciona la primera integral local tomando como base la solución local del sistema. Por lo tanto el estudio de la integrabilidad se extiende a encontrar primeras integrales globales. Las siguientes proposiciones garantizan la integrabilidad local.

**Proposición 2.4.1.** *Sea $\boldsymbol{A} = (H_1, \ldots, H_n)$ las $n$ primeras integrales dependiendo del tiempo de $\xi$ de clase $C^1$ sobre un subconjunto abierto $V \subset (U \times \mathbb{R})$ dónde la matriz Jacobiana*

*$D\boldsymbol{A} = (\partial \mathrm{x} H_1, \partial \mathrm{x} H_2, \dots, \partial \mathrm{x} H_n)$ es invertible. Sea $(\mathrm{x}_0, t_0) \in V$ y $J_i = H_i(\mathrm{x}_0, t)$. Sea $\mathrm{x} = \mathrm{x}(t, \boldsymbol{A})$ la función inversa de $\boldsymbol{A}$ para $(\mathrm{x}, t)$ cerca a $(\mathrm{x}_0, t_0)$. Entonces, $\mathrm{x} = \mathrm{x}(t, \boldsymbol{A})$ es una solución de $\dot{\mathrm{x}} = f(\mathrm{x})$ para cualquier valor constante de $\mathrm{A}$. Además, una función de clase $C^1, u = u(\mathrm{x}, t)$ definida en $V$ cerca a $(\mathrm{x}_0, t_0)$ es una primera integral de $\xi$ si y sólo si existe una función de clase $C^1, v = v(\boldsymbol{A})$ tal que $u(\mathrm{x}, t) = v(\boldsymbol{A}(\mathrm{x}, t))$ en una vecindad de $(\mathrm{x}_0, t_0)$.*

**Proposición 2.4.2.** *Sea $f$ de $C^0$ un subconjunto abierto de $V \subset (U \times \mathbb{R})$. Si el problema del valor inicial $\dot{\mathrm{x}} = f(\mathrm{x})$ con $\mathrm{x}(t_0)$ tiene una solución $C^1$, entonces el campo vectorial $\xi$ tiene $n$ primeras integrales independientes de clase $C^1$ en una vecindad de un punto $(\mathrm{x}_0, t_0) \in V$.*

Las demostraciones se pueden consultar en [9].

## 2.5. Clases de funciones

Las primeras integrales se pueden clasificar teniendo en cuenta los diferentes tipos de funciones, es decir, polinomial, racional, logarítmica, analítica, etc y esta clasificación permite estudiar la existencia de las primeras integrales asociadas a un sistema.

**Definición 2.5.1.** *Una primera integral $H$ es una integral formal alrededor de $x = x_0$, si puede expandirse localmente en una serie de potencias de la forma*

$$H = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} c_{m1,\dots,m_n} \prod_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^{m_j}.$$

*Además, $H$ es analítica alrededor de $x = x_0$ si es convergente en un disco cerrado centrado en $x_0$.*

Para estudiar la existencia de las primeras integrales de un sistema dado es necesario demostrar que algunas propiedades analíticas de las soluciones son incompatibles con la existencia de un invariante en una determinada clase de funciones (polinomial, algebraica, racional, etc).

**Definición 2.5.2.** *Una primera integral $H$ es polinomial y racional si $H \in K[\mathrm{x}]$. Una función $f(\mathrm{x})$ es algebraica sobre $K$ si existe un $q_0, \dots, q_s \in K[\mathrm{x}], s > 0$ tal que*

$$q_0 + q_1 f + \cdots + q_s f^s = 0. \tag{2.11}$$

Si $s$ es el entero positivo mas pequeño tal que se cumpla 2.11, la relación 2.11 se denomina polinomio mínimo de $f$. Una primera integral $H(\mathrm{x}) = C$ es algebraica si $H(x)$ es algebraica, esto es, existe un $q_0, \dots, q_s \in K[\mathrm{x}], s > 0$ tal que

$$q_0 + q_1 C + \cdots + q_s C^s = 0. \tag{2.12}$$

Si $s = 1$ y $q_1 \in K$ en 2.12 la primera integral es polinomial, si $s = 1$ y $q_1 \notin K$, es racional. Cuando $s = 2$ la primera integral está dada por las raices de la ecuación cuadrática para $C$.

**Definición 2.5.3.** *Una primera integral $H$ es logarítmica si existe $J_0, \dots, J_s$ con $s \geq 1$ funciones algebraicas sobre $K$ y $c_0, \dots, c_s \in K$, tal que*

$$H = J_0 + \sum_{i=1}^{s} c_i log\ J_i.$$

El siguiente ejemplo relacionado con un sistema de tipo Lotka-Volterra aclara los conceptos antes mencionados.

**Ejemplo 2.5.4.** *El sistema ABC de Lotka-Volterra.* Dependiendo de los valores de los parámetros, es posible determinar la integrabilidad del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(Cy + z) \\ \dot{y} = y(x + Az) \\ \dot{z} = z(Bx + y), \end{cases} \tag{2.13}$$

donde $A$,$B$,$C$ son parámetros libres. La integrabilidad de este sistema fue estudiada por [14]. Para los diferentes valores de los parámetros $A, B, C$ se tienen las siguientes primeras integrales.

$$(A, B, C) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), \qquad H = x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} - 2xy + yz + xz \tag{2.14a}$$

$$(A, B, C) = (1, 1, 1), \qquad H = \frac{(x - y)(y - z)}{y} \tag{2.14b}$$

$$(A, B, C) = (1, 1, 0), \qquad H = \frac{y}{x} + log\left(1 - \frac{y}{z}\right) \tag{2.14c}$$

$$(A, B, C) = \left(1, \sqrt{2}, 1\right), \qquad H = \left(\frac{z\,(y - x)^{\sqrt{2}+1}}{xy^{\sqrt{2}}}\right) \tag{2.14d}$$

Todas estas integrales son funciones polinomiales, racionales, logarítmicas y trascendentales respectivamente.

## 2.6. Curvas algebraicas y campos diferenciales

El concepto de curva algebraica invariante es la base para comprender la teoría de integrabilidad de Darboux, este concepto se define para $\mathbb{R}^2$, en el presente trabajo se extenderá esta definición para $\mathbb{R}^3$.

**Definición 2.6.1.** *Sea $\mathbb{R}[x, y]$ el anillo de polinomios sobre $\mathbb{R}$ en dos variables. Tomando $P \in \mathbb{R}[x, y]$, se denota su conjunto de ceros por*

$$V(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}.$$

*Si $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$; tal que $P_i \in \mathbb{R}[x, y]$ para $1 \leq i \leq n$, entonces $V(S)$ es el conjunto de ceros comunes*

$$V(S) = \bigcap_{i=1}^{n} V(P_i).$$

El conjunto $V(P)$ es conocido como una curva algebraica, y el conjunto $\bigcap_{i=1}^{n} V(P_i)$ como conjunto algebraico.

Un tipo de sistemas para los cuales es más sencillo calcular una primera integral, son los sistemas Hamiltonianos. Cabe aclarar que los campos que admiten una primera integral y no son Hamiltonianos, en general, no son fáciles de hallar.

**Definición 2.6.2.** *Una función polinomial definida por $v : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una curva algebraica invariante por el campo asociado al sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y), \end{cases} \tag{2.15}$$

si $v$ no es constante y satisface

$$f_1 \frac{\partial v}{\partial x} + f_2 \frac{\partial v}{\partial y} = Kv, \tag{2.16}$$

para algún $\mathbb{R} \in C^r(U, \mathbb{R})$.

El lado izquierdo de la ecuación 2.16 es precisamente el producto del campo $F$ con el gradiente de $v$, se puede concluir que $F$ es tangente a la curva $V(v)$, en otras palabras, $V(v)$ es una curva algebraica invariante por el flujo asociado al campo vectorial asociado $F$. De esta manera, se dice que la función $K(x, y)$ es un cofactor de la curva algebraica invariante.

Una curva algebraica $f(x, y)$ es irreducible cuando $f(x, y)$ sea un polinomio irreducible en el anillo $\mathbb{C}[x, y]$. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $f(x, y)$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{C}[x, y]$, ya que si $f(x, y)$ es reducible, entonces todos sus factores propios dan lugar a curvas algebraicas invariantes.

Dada una curva algebraica $f(x, y) = 0$, siempre es posible asumir que el polinomio $f(x, y)$ no tiene múltiples factores, así su descomposición en el anillo $\mathbb{C}[x, y]$ es de la forma:

$$f(x, y) = f_1(x, y) f_2(x, y) \cdots f_l(x, y),$$

dónde $f_i(x, y)$ son polinomios irreducibles diferentes entre sí y además $f_i(x, y) \neq c f_j(x, y)$ con $i \neq j$ para cualquier $c \in \mathbb{C}$. La suposición de que, dada una curva algebraica $f(x, y) = 0$, el polinomio $f(x, y)$ no tiene múltiples factores, se utiliza principalmente para asegurar que no se consideren puntos singulares falsos.

**Definición 2.6.3.** *Sea $R$ un anillo. Una derivación $D$ es un mapa $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $D(r + s) = D(r) + D(s)$ y $D(rs) = rD(r) + D(r)s$ para todo $r, s \in \mathbb{R}$.*

**Definición 2.6.4.** *Un campo diferencial es un campo $k$ junto con una colección de derivadas de $k$ : $\Delta = \{D_i\}_{i \in \mathbb{R}}$ dónde $I = \{1, \ldots, n\}$ y se nota $\{k, \Delta\}$. Una extensión de $\{k, \Delta\}$ es una extensión de campo $K$ de $k$ junto con la derivación $\Delta' = \{D_i'\}_{i \in I}$ tal que la restricción de $\Delta'$ en $k$ es $\Delta$.*

El conjunto de constantes de un campo diferencial es la unión de $C(k, D_i)$ para $i \in I$; se define entonces monomios elementales sobre $k$.

**Definición 2.6.5.** *Sea $\{K, \Delta'\}$ una extensión de campo diferencial de $\{k, \Delta\}$ el elemento $y \in K$ es un monomio elemental sobre $k$ si $y$ es trascendental sobre $k$ y existe un $x \in k \backslash \{0\}$ tal que para todo $D_i' \in \Delta$ ya sea.*

*1.* $D_i^{'}y = \frac{D_i x}{x}$*, esto es y es logarítmica sobre k y escribimos* $y = log(x)$ *o,*

*2.* $D_i^{'}y = (D_i x)y$ *esto es, y es exponencial sobre k y escribimos* $y = exp(x)$

Hay dos formas de extender un campo diferencial para crear una extensión elemental.

**Definición 2.6.6.** *La extensión* $\{K, \Delta^{'}\}$ *de* $\{k, \Delta\}$ *es una extensión elemental, si existe* $y_1, \ldots, y_m$ *en* $K$ *tal que* $K = k(y_1, \ldots, y_m)$ *con cualesquiera*

*1.* $y_i$ *algebraica sobre* $k(y_1, \ldots, y_{i-1})$ *o,*

*2.* $y_i$ *elemental sobre* $k(y_1, \ldots, y_{i-1})$.

# CAPÍTULO 3

# TEORÍA CLÁSICA DE INTEGRABILIDAD DE DARBOUX

La teoría de integrabilidad de Darboux plantea como se puede construir la primera integral asociada a un sistema diferencial polinomial usando un número suficiente de superficies algebraicas invariantes. Este método fue expuesto por Jean-Gaston Darboux en el año 1878.

Considere el sistema diferencial polinomial

$$\dot{x} = P(x), \qquad x \in \mathbb{K}^n, \tag{3.1}$$

donde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y $P(x) = (P_1(x), \ldots, P_n(x))$ es una función polinomial con valores vectoriales. Sea $m := max\,\{gradP_1, \ldots, gradP_n\}$ el grado del sistema diferencial polinomial 3.1. En este capítulo usaremos $m$ para indicar el grado del sistema 3.1.

Sea $\mathbb{K}\,[x]$ el anillo de polinomios en $x$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Un polinomio $f(x) \in \mathbb{C}\,[x]$ es un polinomio de Darboux del sistema diferencial polinomial 3.1 si existe un $k(x) \in \mathbb{C}\,[x]$ tal que

$$\xi_P(f) = kf. \tag{3.2}$$

con $\xi_P$ el campo vectorial polinomial asociado al sistema 3.1, denotado por

$$\xi_P = P_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + P_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

El polinomio $k(x)$ se llama cofactor del polinomio de Darboux $f(x)$. Claramente, si $f(x)$ es un polinomio de Darboux del sistema 3.1, el conjunto $V(f) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) = 0\}$ es invariante bajo el flujo del sistema 3.1, es decir, cualquier orbita del sistema 3.1 con punto inicial en $V(f)$ siempre permanecerá en $V(f)$. El conjunto $V(f)$ es llamado la variedad de $f$.

*Observación:* Para un campo vectorial polinomial real $\xi_P$, sus polinomios y cofactores de Darboux (si existen) pueden ser complejos. Por supuesto, si aparecen, estarán en pares conjugados.

Si $f$ es un polinomio de Darboux del sistema 3.1, digamos que $f=0$ es una curva algebraica invariante del sistema 3.1 para $n=2$, o una superficie algebraica invariante para $n=3$, o una hipersuperficie algebraica invariante para $n>3$.

Las siguientes proposiciones presentan algunas propiedades de los polinomios de Darboux y sus cofactores.

**Proposición 3.0.1.** *Asuma que $f\in\mathbb{C}[x]$ tiene una descomposición irreducible, digamos $f=f_1^{m_1},\ldots f_r^{m_r}$ en $\mathbb{C}[x]$. Las siguientes afirmaciones son válidas.*

*(a) $f$ es un polinomio de Darboux del sistema 3.1 si y sólo si cada $f_j, j=1,\ldots,r$ es un polinomio del sistema.*

*(b) Si $k(x),k_1(x),\ldots,k_r(x)$ son los cofactores de $f(x),f_1(x),\ldots,f_r(x)$ respectivamente, entonces*

$$k(x)=m_1k_1(x)+\cdots+m_rk_r(x).$$

**Proposición 3.0.2.** *Por irreducible $f\in\mathbb{C}[x], x\in\mathbb{C}^n$, Las siguientes afirmaciones son válidas.*

*(a) Si $f=0$ es un conjunto invariante del sistema 3.1, es decir $\xi_P(f)\mid_{f=0}=0$, entonces existe un $k(x)\in\mathbb{C}[x]$ tal que la igualdad 3.2 sea válida.*

*(b) Si $k(x)$ es un cofactor de $f(x)$, entonces grad $k\leq m-1$, dónde $m$ es el grado del sistema 3.1.*

La demostración de la proposición 3.0.1 y el enunciado **(a)** de la proposición 3.0.2 se encuentra en [25]. La demostración del enunciado **(b)** de la proposición 3.0.2 se encuentra en [8].

Asuma que $f,g\in\mathbb{C}[x]$. Si existe un $L(x)\in\mathbb{C}_{m-1}[x]$ de grado no mayor que $m-1$ tal que

$$\xi_P(exp(g/f))=L\, exp(g/f),$$

entonces llamamos $exp(g/f)$ un factor exponencial del sistema 3.1, y $L$ es el cofactor asociado a $exp(g/f)$. Recordemos que $m$ es el grado del campo vectorial $\xi_P$. Para un factor exponencial $exp(g/f)$ requerimos que $f$ y $g$ sean primos relativos, es decir, $mcd(f,g)=1$.

**Proposición 3.0.3.** *Una función $exp(g/f)$ es un factor exponencial del sistema diferencial 3.1 si y sólo si $f$ es un factor exponencial del sistema 3.1 y*

$$\xi_P(g)=fL+gK,$$

*dónde $L$ y $k$ son cofactores de $exp(g/f)$ y $f$, respectivamente.*

Para $g,f,f_1,\ldots,f_r\in\mathbb{C}[x], s_1,\ldots,s_r\in\mathbb{C}$, una función de la forma

$$H:=f_1^{s_1}\ldots f_r^{s_r}exp\left(\frac{g}{f}\right)$$

es llamada una función de Darboux.

Si una primera integral del sistema diferencial polinomial 3.1 es una función de Darboux, se denomina primera integral de Darboux. Si una primera integral es una función polinomial (o una función racional), se denomina primera integral polinomial o primera integral racional.

## 3.1. Teorema de Integrabilidad de Darboux

El siguiente teorema resume la teoría clásica de Darboux.

**Teorema 3.1.1.** *Sea $f \in \mathbb{C}[x]^n$ un campo polinomial vectorial de grado $d$ y asuma que $\xi$ admite $p$ polinomios de Darboux $(J_i, \ldots, J_p)$. Sea*

$$N = \binom{n+d-1}{n}.$$

*(a) Si $p > N$, el sistema 3.1 tiene una primera integral de la forma*

$$I = \prod_{i=1}^{p} J_i^{\lambda_i},$$

*donde $\lambda_i \in \mathbb{C}\ \forall i$.*

*(b) El sistema 3.1 tiene una primera integral racional si y sólo si $p \geq N + n$.*

*Nota:* La demostración del enunciado **(a)** del teorema 3.1.1 se debe [7] y el enunciado **(b)** se encuentra en [13]. La demostración del teorema 3.1.1 para $n \geq 2$ puede ser consultada en [17].

# CAPÍTULO 4

# MÉTODO DE DARBOUX

En este capítulo estudiamos la existencia de primeras integrales para campos vectoriales polinomiales en $\mathbb{R}^3$ a través de la teoría de integrabilidad clásica de Darboux. Este tipo de integrabilidad proporciona un vínculo entre la integrabilidad de los campos vectoriales polinomiales y el número de superficies algebraicas invariantes del sistema.

## 4.1. Teoría de integrabilidad de Darboux

La teoría de la integrabilidad de Darboux recibió su nombre de Jean-Gaston Darboux (1842-1917). En 1878 facilitó un método para construir primeras integrales de sistemas diferenciales polinomiales a través de un número suficiente de curvas algebraicas invariantes, superficies o hipersuperficies.

Sea el sistema diferencial polinomial

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y, z) \\ \dot{y} = Q(x, y, z) \\ \dot{z} = R(x, y, z), \end{cases} \tag{4.1}$$

con $P, Q, R$ polinomios en las variables $x, y$, y $z$ con coeficientes complejos. Asociamos al sistema diferencial polinomial 4.1 el campo vectorial polinomial.

$$\xi = P(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4.2}$$

Las superficies algebraicas invariantes son el punto de partida del método de Darboux.

**Definición 4.1.1.** *Una superficie algebraica irreducible $F(x, y, z) = 0$ en $\mathbb{C}^3$ con $F \in \mathbb{C}(x, y, z)$ es una superficie algebraica invariante de un sistema polinomial si*

$$\xi F = P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} + R\frac{\partial F}{\partial z} = KF. \tag{4.3}$$

El polinomio $K(x, y, z)$ es llamado el cofactor de $F(x, y, z)$.

**Definición 4.1.2.** *Una integral primera del sistema 4.1 sobre un subconjunto abierto $\Omega \in \mathbb{C}^3$ es una función analítica no constante $H : \Omega \to \mathbb{C}$ la cual es constante sobre toda la curva solución $(x(t), y(t), z(t))$ de 4.1 sobre $\Omega$. Esto significa que $H(x(t), y(t), z(t)) = c$ donde $c \in \mathbb{C}$ para todo tiempo $t$ para el cual la solución $(x(t), y(t), z(t))$ está definida sobre $\Omega$. Claramente $H$ es una primera integral del sistema 4.1 en $\Omega$ si y sólo si*

$$\xi H = P\frac{\partial H}{\partial x} + Q\frac{\partial H}{\partial y} + R\frac{\partial H}{\partial z} = 0. \tag{4.4}$$

El método de Darboux permite construir una primera integral de un campo vectorial polinomial de la forma 4.1. Supóngase que el campo vectorial polinomial $\xi$ tiene $m$ superficies algebraicas invariantes de la forma

$$F_1(x, y, z) = 0 \ldots F_m(x, y, z) = 0,$$

con $F_i(x, y, z) = 0$ irreducible, para $i = 1, 2, \ldots m$. Cada una de estas superficies algebraicas invariantes tiene su respectivo cofactor $K_1(x, y, z), \ldots K_m(x, y, z)$, tenemos que

$$\xi F_i = K_i(x, y, z)F_i(x, y, z).$$

Supóngase que existen constantes $\lambda_1, \ldots \lambda_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i K_i(x, y, z) = 0. \tag{4.5}$$

La siguiente proposición es fundamental en el estudio de la integrabilidad del sistema 4.1 y se usará en el capítulo 5.

**Proposición 4.1.3.** *Considérese un sistema de la forma 4.1, con superficies algebraicas invariantes $F_i(x, y, z) = 0$ dónde $F_i(x, y, z) = 0$ es un polinomio irreducible, con $i = 1 \ldots m$ tales que 4.5 se satisface para constantes $\lambda_i$, no todos nulos. Entonces la función*

$$H(x, y, z) = \prod_{i=1}^{m} F_i^{\lambda_i}, \tag{4.6}$$

es una primera integral para el sistema 4.1.

**Demostración:** Sea $H = F_1^{\alpha_1} \ldots F_m^{\alpha_m}$. Se puede entonces escribir:

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \alpha_1 F_1^{\alpha_1 - 1}\left(F_2^{\alpha_2} \ldots F_m^{\alpha_m}\right) F_1^{'} + \ldots + \alpha_m F_m^{\alpha_{m} - 1}\left(F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} \ldots F_{m-1}^{\alpha_{m-1}}\right) F_m^{'} \\
&= K_1 \alpha_1 F_1^{\alpha_1 - 1}\left(F_2^{\alpha_2} \ldots F_m^{\alpha_m}\right) + \ldots + K_m \alpha_m F_m^{\alpha_m}\left(F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} \ldots F_{m-1}^{\alpha_{m-1}}\right) \\
&= \left(\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \cdots \alpha_m K_m\right) H \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde $H$ es una primera integral.

Los siguientes dos ejemplos nos permitirán aplicar el método de Darboux, el ejemplo 4.1.4 fue tomado de [4] y el ejemplo 4.1.5 se encuentra en [15].

**Ejemplo 4.1.4.** El sistema de ecuaciones diferenciales adjunto tiene tres rectas invariantes y se deduce una integral primera del mismo.

Supóngase el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1+x-y) \\ \dot{y} = y(-1+x-y), \end{cases} \tag{4.7}$$

con $x = 0$ y $y = 0$ dos rectas invariantes las cuales pueden ser escritas como $F_1 = x = 0$ y $F_2 = y = 0$. En efecto, para verificar que son invariantes $F_1$ y $F_2$ satisfacen la ecuación 3.2.

$$\xi F_1 = x^{'} = x\,(1+x-y) = (1+x-y)\,x = K_1 F_1,$$

con $K_1\,(x,y) = 1 + x - y$. Ahora, para $F_2$ tenemos que

$$\xi F_2 = y^{'} = y\,(-1+x-y) = (-1+x-y)\,y = K_2 F_2,$$

con $K_2\,(x,y) = -1 + x - y$. Para encontrar la tercera recta invariante, se realiza el siguiente análisis: $x^{'} = 0$ y $y^{'} = 0$ si $x = y = 0$. $x^{'} = 0$ cuando $y = 0$ y $x = -1$ con $(x \neq 0)$. Finalmente, $y^{'} = 0$ para $x = 0$ y $y = -1$ con $(y \neq 0)$.

Por consiguiente, la recta invariante $F_3 = y + x + 1 = 0$ satisface:

$$\begin{aligned} \xi F_3 \;\; &= y^{'} + x^{'} = -y + xy - y^2 + x + x^2 - xy \\ &= x^2 - y^2 + x - y \\ &= (x-y)\,(x+y)\,(x-y) \\ &= (x-y)\,(x+y+1) \\ &= K_3 F_3, \end{aligned}$$

con $K\,(x,y) = x - y$.

Ahora bien, para encontrar una integral primera con la ayuda del método de Darboux, deben encontrarse constantes $\lambda_1, \lambda_2$ y $\lambda_3$ que cumplan $\sum_{k=1}^{3} \lambda_i K_i\,(x,y) = 0$. Por lo tanto:

$$\begin{gathered} \lambda_1\,(1+x+y) + \lambda_2\,(-1+x-y) + \lambda_3\,(x-y) = 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\,x + (-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)\,y = 0, \end{gathered}$$

por lo que $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ implica que $\lambda_1 = \lambda_2$. Ahora, si $\lambda_1 + \lambda 2 + \lambda_3 = 0$, se tiene que $\lambda_3 = -2\lambda_2$. Si por ejemplo, $\lambda_2 = 1$, entonces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_3 = -2$. Luego

$$
\begin{aligned}
H(x,y) &= \prod_{i=1}^{3} F_i^{\lambda i} = F_1^{\lambda_1} F_2^{\lambda_2} F_3^{\lambda_3} \\
&= (x)^1 (y)^1 (y+x+1)^{-2} \\
&= \frac{xy}{(y+x+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Vale la pena notar que $H(x,y)$ es constante a lo largo de las trayectorias, en efecto,

$$
\begin{aligned}
\xi H &= \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} \\
&= \frac{y^2+y-xy}{(x+y+1)^3}x' + \frac{x^2-xy+x}{(x+y+1)^3}y' \\
&= \frac{1}{(x+y+1)^3}\left[\left(y^2+y-xy\right)\left(x+x^2-xy\right)+\left(x^2-xy+x\right)\left(-y+xy-y^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{(x+y+1)^3}\left[\left(y^2+y-xy\right)\left(x+x^2-xy\right)-\left(x^2-xy+x\right)\left(y-xy+y^2\right)\right] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

En la figura 4.1, la dinámica del sistema 4.7 presenta un sumidero nodal en el punto de equilibrio $(-1,0)$ y un punto de silla en $(0,0)$.

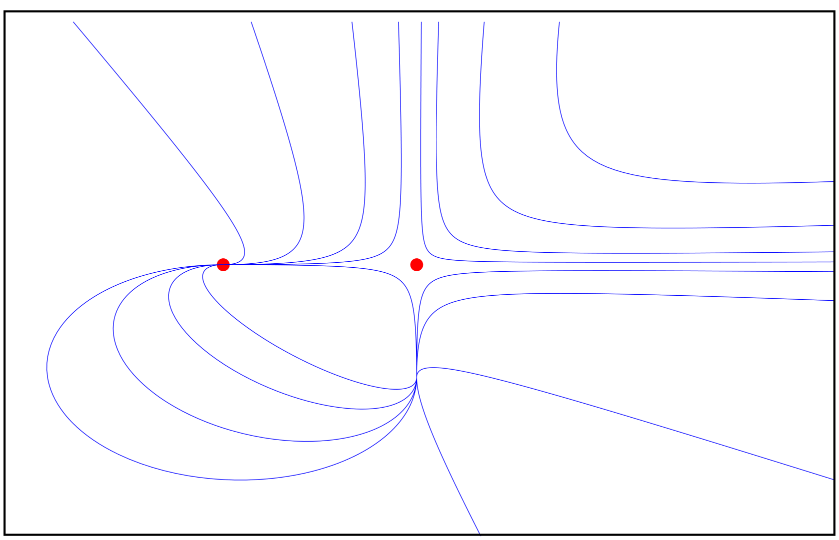

Figura 4.1: Primera Integral del sistema 4.7

**Ejemplo 4.1.5.** El siguiente ejemplo modela la interacción entre dos especies que interactúan en diversos ecosistemas, una especie se denomina depredador y la otra presa, el modelo está dado mediante la expresión

$$\begin{cases} \dot{x} = x(ax + c) \\ \dot{y} = y(2ax + by + c), \end{cases} \tag{4.8}$$

con $a, b, c \neq 0$. En la figura 4.2 se observa la dinámica del sistema para $a = b = c = 1$; en el punto de equilibrio $(0, 0)$ tenemos un nodo inestable, para el punto $(0, -1)$ se presenta un punto silla y para el punto $(-1, 0)$ existe un nodo estable.

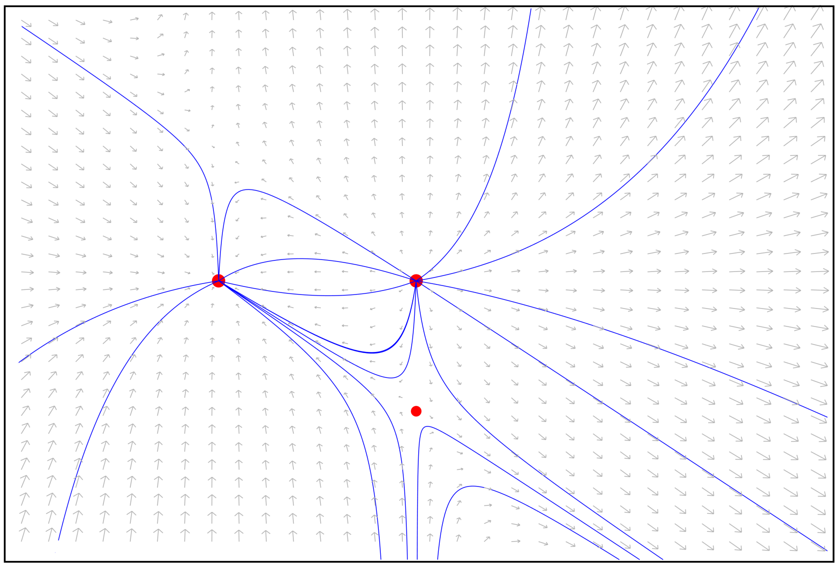

Figura 4.2: Dinámica del sistema 4.8

Ahora encontraremos la primera integral asociada al sistema 4.8 usando el método de Darboux.

Las rectas invariantes son las siguientes:

$F_1 = x = 0, F_2 = ax + c = 0, F_3 = y = 0, F_4 = ax + by = 0, F_5 = ax + by + c$. Verifiquemos que son curvas invariantes, es decir, para cada $F_i$ con $i = 1, \ldots 5$ se debe satisfacer la ecuación 3.2.

$$\begin{aligned} \xi F_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial x} x\,(ax + c) + \frac{\partial F_1}{\partial y} y\,(2ax + by + c) \\ &= x\,(ax + c) \\ &= \; K_1 F_1, \end{aligned}$$

con $K_1(x, y) = ax + c$.

Para $F_2 = ax + c$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\xi F_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial x} x\,(ax+c) + \frac{\partial F_2}{\partial y} y\,(2ax+by+c) \\
&= ax\,(ax+c) \\
&= K_2 F_2,
\end{aligned}$$

con $K_2(x,y) = ax$. Para $F_3 = y$ y $F_4 = ax+by$ tenemos respectivamente

$$\begin{aligned}
\xi F_3 &= \frac{\partial F_3}{\partial x} x\,(ax+c) + \frac{\partial F_3}{\partial y} y\,(2ax+by+c) \\
&= y\,(2ax+by+c) \\
&= K_3 F_3,
\end{aligned}$$

con $K_3(x,y) = 2ax+by+c$.

$$\begin{aligned}
\xi F_4 &= \frac{\partial F_4}{\partial x} x\,(ax+c) + \frac{\partial F_4}{\partial y} y\,(2ax+by+c) \\
&= (2ax+by+c)\,(ax+by) \\
&= K_4 F_4,
\end{aligned}$$

con $K_4(x,y) = ax+by+c$. Por último, la recta $F_5 = ax+by+c$ satisface

$$\begin{aligned}
\xi F_5 &= \frac{\partial F_5}{\partial x} x\,(ax+c) + \frac{\partial F_5}{\partial y} y\,(2ax+by+c) \\
&= (ax+by)\,(ax+by+c) \\
&= K_5 F_5,
\end{aligned}$$

con $K_5(x,y) = ax+by$.

Ahora bien, para encontrar una primera integral usando el método de Darboux se buscan constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sabiendo que

$$\sum_{i=1}^{5} \lambda_i K_i(x,y) = 0.$$

Así pues, tenemos que

$$\lambda_1\,(ax+c) + \lambda_2\,(ax) + \lambda_3\,(2ax+by+c) + \lambda_4\,(ax+by+c) + \lambda_5\,(ax+by) = 0,$$

resolviendo tenemos que $\lambda_1 = \lambda_5 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_4 = 1$ y $\lambda_3 = 0$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
H(x,y) &= \prod_{i=1}^{5} F_i^{\lambda i} = F_1^{\lambda_1} F_2^{\lambda_2} F_3^{\lambda_3} F_4^{\lambda_4} F_5^{\lambda_5} \\
&= (x)^{-1}(ax+c)^{1}(ax+by)^{1}(ax+by+c)^{-1} \\
&= \frac{(ax+c)\,(ax+by)}{x\,(ax+by+c)}.
\end{aligned}
$$

Verifiquemos que $H(x,y)$ es una primera integral del sistema 4.8.

$$
\begin{aligned}
\xi H &= \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} \\
&= x\,(ax+c)\left(\frac{-2abcxy - b^2c^2y^2 - bc^2y}{x^2\,(ax+by+c)^2}\right) + y\,(2ax+by+c)\left(\frac{bc\,(ax+c)}{x\,(ax+by+c)^2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

CAPÍTULO 5

# APLICACIÓN AL MODELO LOTKA-VOLTERRA

La integrabilidad de los sistemas Lotka-Volterra ha sido objeto de estudio de muchos autores tales como [[2], [3], [5], [6], [11], [16], [18], [19], [20][22], [24]] En este capítulo presentamos un análisis de integrabilidad del modelo Lotka-Volterra el cual corresponde a un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, para este análisis utilizaremos el método de integrabilidad de Darboux y los polinomios de Darboux (superficies algebraicas invariantes) asociadas al sistema.

## 5.1. Sistema Lotka-volterra

Una introducción del modelo Lotka-Volterra cuando interactúan mas de 2 especies puede ser consultada en [10], para el caso particular de 3 especies, May y Leonard [21] descubrieron un fenómeno llamado competición cíclica. Este fenómeno consiste en que al pasar el tiempo la especie 1 es la especie dominante, luego, la especie 2 toma su lugar y domina el ecosistema, despues de algún tiempo aparece la especie 3 como la especie dominante, luego aparece nuevamente la especie 1 para dominar y así el ciclo empieza a repetirse.

Las ecuaciones de este modelo están dadas por:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(x + \alpha y + \beta z) \\ \dot{y} = -y(\beta x + y + \alpha z) \\ \dot{z} = -z(\alpha x + \beta y + z), \end{cases} \tag{5.1}$$

donde $x, y, z$ representa el número de individuos de cada especie y $\alpha, \beta$ son coeficientes de competencia que describen el efecto que produce cada especie sobre las de más.

Para el análisis de integrabilidad del sistema 5.1, haremos uso de la siguiente proposición la cual caracteriza todos los polinomios de Darboux del sistema.

**Proposición 5.1.1.** *Los únicos polinomios irreducibles de Darboux de grado 1 con cofactor distinto de cero del sistema 5.1 son los siguientes:*

*(a)* $x, y, z$ *con cofactores* $-(x+\alpha y+\beta z), -(\beta x+y+\alpha z),$ *y* $-(\alpha x+\beta y+z)$ *respectivamente, para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
*(b)* $x+y+z$ *con cofactor* $-(x+y+z)$ *si* $\alpha+\beta=2$.
*(c)* $x-z, y-z$ *y* $z-x$ *con cofactores* $-(x+\alpha y+z), -(\alpha x+y+z)$, *y* $-(x+y+\alpha z)$, *respectivamente, si* $b=a\neq 1$.

*Demostración.* **(a) Caso $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.**

Sea $F_1 = x$, $F_2 = y$ y $F_3 = z$, por definición de polinomio de Darboux 3.2 tenemos que:

$$\begin{aligned}
\xi_P(F_1) &= -x(x+\alpha y+\beta z)\frac{\partial x}{\partial x} - y(\beta x+y+\alpha z)\frac{\partial x}{\partial y} - z(\alpha x+\beta y+z)\frac{\partial x}{\partial z} \\
&= -x(x+\alpha y+\beta z) \\
&= K_1 F_1,
\end{aligned}$$

con $K_1 = -(x+\alpha y+\beta z)$.

Ahora para $F_2 = y$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\xi_P(F_2) &= -x(x+\alpha y+\beta z)\frac{\partial y}{\partial x} - y(\beta x+y+\alpha z)\frac{\partial y}{\partial y} - z(\alpha x+\beta y+z)\frac{\partial y}{\partial z} \\
&= -y(\beta x+y+\alpha z) \\
&= K_2 F_2,
\end{aligned}$$

con $K_2 = -(\beta x+y+\alpha z)$.

Por último para $F_3 = z$ se tiene

$$\begin{aligned}
\xi_P(F_3) &= -x(x+\alpha y+\beta z)\frac{\partial z}{\partial x} - y(\beta x+y+\alpha z)\frac{\partial z}{\partial y} - z(\alpha x+\beta y+z)\frac{\partial z}{\partial z} \\
&= -z(\alpha x+\beta y+z) \\
&= K_3 F_3,
\end{aligned}$$

con $K_3 = -(\alpha x+\beta y+z)$. Así pues, $F_1 = x, F_2 = y, F_3 = z$ son polinomios de Darboux.

**(b) Caso $\alpha+\beta=2$.**

Sea $F_4 = x+y+z$, por definición de polinomio de Darboux 3.2 tenemos que:

$$\begin{aligned}
\xi_P(F_4) &= -x(x+\alpha y+\beta z)\frac{\partial(x+y+z)}{\partial x} - y(\beta x+y+\alpha z)\frac{\partial(x+y+z)}{\partial y} - z(\alpha x+\beta y+z)\frac{\partial(x+y+z)}{\partial z} \\
&= -(x+y+z)(x+y+z) \\
&= K_4 F_4,
\end{aligned}$$

con $K_4 = (x + y + z)$. Así pues, $F_4 = x + y + z$ es un polinomios de Darboux.

**(c) Caso** $b = a \neq 1$

Su demostración es análoga a los casos **(a)** y **(b)**. $\square$

### 5.1.1. Análisis de integrabilidad

Para el análisis de integrabilidad del sistema 5.1, se estudiarán los siguientes casos:

**Caso 1:** $\alpha + \beta = 2$ y $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$.
**Caso 2:** $\alpha = \beta = 1$,

se utilizará el teorema 3.1.1 y la proposición 5.1.1.

**Caso 1.** $\alpha + \beta = 2$ **y** $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$.

Sabemos por la proposición 5.1.1 que el sistema 5.1 tiene $p = 7$ polinomios de Darboux; de acuerdo al teorema 3.1.1, si $p > N$ con

$$\begin{aligned} N &= \binom{n+d-1}{n} \\ &= \binom{4}{3} \\ &= 4, \end{aligned}$$

el sistema 5.1 tiene una primera integral de la forma

$$H = \prod_{i=1}^{p} F_i^{\lambda_i}.$$

Para aplicar el método de Darboux, es necesario encontrar las constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, satisfaciendo

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i K_i(x, y, z) = 0. \tag{5.2}$$

Asi pues, una solución para 5.2 es $\lambda_1 = 3\lambda_3$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Por lo tanto una primera integral para el sistema 5.1 está dada por

$$\begin{aligned} H(x,y,z) &= \prod_{i=1}^{4} F_i^{\lambda i} = F_1^{\lambda_1} F_2^{\lambda_2} F_3^{\lambda_3} F_4^{\lambda_4} \\ &= (x)^1 (y)^1 (z)^1 (x+y+z)^{-3} \\ &= \frac{xyz}{(x+y+z)^3}. \end{aligned}$$

Ahora verifiquemos que $H(x,y,z)$ es una primera integral del sistema 5.1.

$$\begin{aligned} \xi H &= \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial H}{\partial z}\dot{z} \\ &= \frac{-xyz\left[(-2x+y+z)(x+3y-z) - (-x+y+3z)(-2y+x+z) - (3x-y+z)(x+y-2z)\right]}{(x+y+z)^4} \\ &= \frac{-xyz\,(0)}{(x+y+z)^4} = 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior y por la definción 2.5.2, el sistema 5.1 tiene una primera integral racional.

### Caso 2. $\alpha = \beta = 1$

Para construir la primera integral del sistema 5.1 usando el método de Darboux, usaremos los polinomios de Darboux $F_1 = x$ y $F_2 = y$ con sus respectivos cofactores. Sabemos que, para $p > N$, por el teorema 3.1.1 se debe cumplir:

$$H_1 = \prod_{i=1}^{2} F_i^{\lambda_i}.$$

Por lo tanto es necesario encontrar las constantes $\lambda_1, \lambda_2$, que satisfagan

$$\sum_{i=1}^{2} \lambda_i K_i(x,y,z) = 0. \tag{5.3}$$

Resolviendo 5.3 se tiene que $\lambda_1 = -\lambda_2$; si $\lambda_1 = 1$ entonces

$$\begin{aligned} H_1(x,y,z) &= \prod_{i=1}^{2} F_i^{\lambda i} = F_1^{\lambda_1} F_2^{\lambda_2} \\ &= (x)^1 (y)^{-1} \\ &= \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Verifiquemos que $H_1(x,y,z)$ es una primera integral.

$$\begin{aligned}\xi H_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H_1}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial H_1}{\partial z}\dot{z} \\ &= \frac{-x\,(x+y+z)}{y} + \frac{x\,(x+y+z)}{y} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ahora tomemos los polinomios de Darboux del sistema 5.1, tal que $F_1 = x$ y $F_2 = z$ con cofactores $-(x + \alpha y + \beta z)$ y $-(\alpha x + \beta y + z)$ respectivamente. Aplicando el teorema 3.1.1 con $p > N$, se tiene:

$$H_2 = \prod_{i=1}^{2} F_i^{\lambda_i}.$$

Por lo tanto, para poder construir la primera integral $H(x, y, z)$ debemos encontrar los valores de $\lambda_1$ y $\lambda_2$ que satisfagan 5.3, resolviendo tenemos que $\lambda_1 = -\lambda_2$; supongamos que $\lambda_1 = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}H_2(x, y, z) &= \prod_{i=1}^{2} F_i^{\lambda i} = F_1^{\lambda_1} F_2^{\lambda_2} \\ &= (x)^1 (z)^{-1} \\ &= \frac{x}{z}.\end{aligned}$$

Comprobemos que $H(x, y, z)$ es una primera integral.

$$\begin{aligned}\xi H_2 &= \frac{\partial H_2}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H_2}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial H_2}{\partial z}\dot{z} \\ &= \frac{-x\,(x+y+z)}{z} + \frac{x\,(x+y+z)}{z} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por último, verifiquemos si $H_1$ y $H_2$ son linealmente independientes. El gradiente de $H_1$ y $H_2$ son respectivamente

$$\nabla H_1 = \left\langle \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}, 0 \right\rangle, \qquad \nabla H_2 = \left\langle \frac{1}{z}, 0, -\frac{x}{z^2} \right\rangle$$

Por definición de independencia lineal existen constantes $C_1$ y $C_2$ que satisfacen

$$C_1 \left( \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}, 0 \right) + C_2 \left( \frac{1}{z}, 0, -\frac{x}{z^2} \right) = (0, 0, 0)\,, \tag{5.4}$$

resolviendo 5.4 se tiene que $C_1 = C_2 = 0$, por lo tanto $H_1$ y $H_2$ son linealmente independientes.

### 5.1.2. Dinámica del sistema para el Caso 1. $\alpha + \beta = 2$ y $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$.

La fígura 5.1 representa el espacio tridimensional de la población para $\alpha = 0{,}8$ y $\beta = 1{,}2$ tal que $\alpha + \beta = 2$, y muestra el ciclo límite (curva sólida). La línea discontinua indica la forma en que el sistema tiende asintóticamente a este ciclo límite desde el punto inicial A.

Para un análisis completo sobre la estabilidad del sistema 5.1 May y Leonard [21] estudiaron casos mas generales de $\alpha$ y $\beta$.

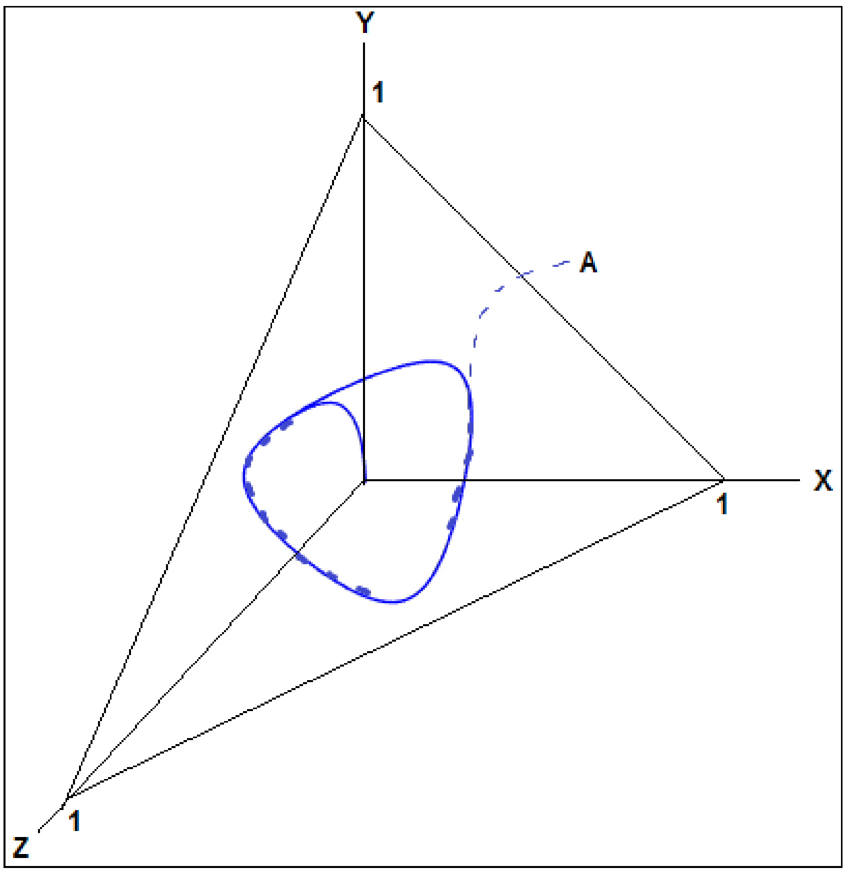


Figura 5.1: Sistema Lotka-Volterra con competición cíclica.

# CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

## Conclusiones

- El método de Darboux es una herramienta útil para encontrar condiciones de integrabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales. Así, en este trabajo se encontró utilizando dicho método que el sistema Lotka-Volterra 5.1 posee 3 primeras integrales de tipo racional.
- En el análisis de integrabilidad del sistema Lotka-Volterra 5.1 para el caso que $\alpha + \beta = 2$ y $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$ se encontraron dos primeras integrales linealmente independientes, para el caso particular $\alpha = \beta = 1$ se encontró una primera integral.
- Con el método de integrabilidad de Darboux se encontró que el sistema Lotka-Volterra 5.1 es completamente integrable ya que posee $n-1$ primeras integrales linealmente independientes.
- Para el sistema Lotka-Volterra 5.1 al aplicar el método de Integrabilidad de Darboux se encontraron condiciones suficientes para hallar primeras integrales.

## Recomendaciones y Trabajos Futuros

- El método de Darboux permitió estudiar la integrabilidad del sistema 5.1 usando valores de $\alpha$ y $\beta \in \mathbb{Q}$, se recomienda aplicar este método para valores de $\alpha$ y $\beta$ diferentes a los expuestos en este trabajo.
- En este trabajo se estudió la integrabilidad de un sistema Lotka-Volterra de 3 especies; un posible trabajo a futuro sería aplicar este método al estudio de integrabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales tales como el sistema Lienard, ecuación de Blaisus, sistema Lorenz etc.
- Para estudiar el problema de integrabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales existen algunos métodos tales como el método directo, las simetrías de Lie, un trabajo a futuro será analizar el problema de integrabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales de tipo Lotka-Volterra con competición cíclica utilizando las simetrías de Lie.

# BIBLIOGRAFÍA


[1] BOUNTIS, T., RAMANI A., GRAMMATICOS B., DORIZZI B, *On the complete and partial integrability of non-Hamiltonian systems.*,Physica A, 128, pp 268-288, 1984.

[2] CÁRDENAS ALZATE, PEDRO PABLO ET AL, *A note on the stability of a modified Lotka Volterra using Hurwitz polynomials*, WSEAS Transactions on Mathematics, vol 20, pp 431-441, 2021.

[3] CÁRDENAS ALZATE, PEDRO PABLO ET AL, *A special case of a mathematical model for ecological community: A predator system*, Modern Applied Science, vol 13, pp 75-79, 2019.

[4] CASTAÑEDA VANEGAS, *Caracterización de puntos monodrómicos utilizando el método de Darboux*, Tesis de Maestría en matemáticas, UTP, Colombia, 2018.

[5] CHAVARRIGA, J., GIACOMINI H., GINE J., LLIBRE J, *Darboux integrability and the inverse integrating factor*, Journal Differentials Equations, vol 194 pp 116-139, 2003.

[6] CHRISTOPHER C, *Invariant algebraic curves and conditions for a centre*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 124, 1209-1229. 1994

[7] DARBOUX G, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Melanges)*, Bull. Sci. Math. 32, 60-96; 123-144; 151-200.1878.

[8] FULTON W, *Algebraic curves: An introduction to algebraic geometric*, Addison Wesley P, 1989.

[9] GORIELY, A, *Integrability and Nonintegrability of Dynamical Sistems*, World Scientific, 2001.

[10] HOFBAUER, J AND SIGMUND K., *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University, 2002.

[11] H.J. GIACOMINI, C.E. REPETTO AND O.P. ZANDRON., *Integrals of motion of three-dimensional non-Hamiltonian dynamical systems*, J. Phys. A 24, 4567-4574. 1991

[12] ILYASHENKO, YUS, YAKOVENKO, S., *Lectures on Analytic Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence. 2008.

[13] Jouanolou, J.P, *Equations de Plaff algébriques*, Lectures Notes in Mathematics, vol 708, Springer-Verlag, New York/ Berlin. 1979.

[14] J.M. Strelcyn and S. Wojciechowski., *A method of finding integrals for three-dimensional dynamical systems*, Phys. Lett. A 133, 207-212. 1988.

[15] Llibre, J, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer Berlin Heidelberg., 2006.

[16] Llibre, J, *Integrability of polynomial differential systems*, Handbook of Differential Equations, Eds. A. Canada, P. Drabek and A. Fonda, Elsevier, 1, pp. 437-533. 2004.

[17] Llibre, J and Zhang, X, *Rational first integrals in the Darboux theory of integrability in* $\mathbb{C}^n$, Bull. Sci. Math 134, 189-195. 2010.

[18] Llibre, J, Ramirez R and Ramirez, V, *Integrability of a class of* $N-$ *dimensional Lotka-Volterra and Kolmogorov systems*, Journal of Differential Equations, Volume 269, pages 2503-2531. 2020.

[19] Llibre, J and Vàlls, C, *Proper rational and analytic first integrals for asymmetric 3 dimensional Lotka Volterra systems*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, Volume 24, 2017.

[20] M.A. Almeida, M.E. Magalhaes and I.C. Moreira., *Lie symmetries and invariants of the Lotka Volterra system*, J. Math Phys, 1854-1867. 1995

[21] May M. Robert and Leonard Warren Jay., *Nonlinear aspects of competition between three species*, Journal on Aplied Mathematics, Volume 29, 1975.

[22] Santos Edileno de Almeida and Rodrigues,S., *Darboux Jouanolou integrability over arbitrary field*, Journal on Pure and Applied Algebra, Volume 224, 2020.

[23] Toledo Fabian, *Análisis de estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales utilizando polinomios de Hurwitz*, Tesis de maestría en matemática, Universidad Tecnológica de pereira, 2020.

[24] Waleed, Aziz, *Integrability and Linearizability Problems of Three Dimensional Lotka Volterra Equations of Rank-2*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2019.

[25] Xiang Zhang, *Integrability of Dynamical Systems: Algebra and Analisysis*, Springer-Developments in Mathematics, Volume 47. 2017.