BÚSQUEDA DE ARQUETIPOS EN LA RELACIÓN DIDÁCTICA DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL CON OTROS CONTENIDOS MATEMÁTICOS

ISMAEL CABERO FAYOS
Universitat Jaume I

AITOR ALFONSO CASTELLÓ
Universitat Oberta de Catalunya

BALTASAR ORTEGA BORT
Universidad Internacional de la Rioja

1. INTRODUCCIÓN

La proporcionalidad es uno de los conceptos matemáticos con mayor número de aplicaciones en la vida diaria. La National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en su Currículum y Estándares de Evaluación señala que "la habilidad de razonar proporcionalmente se desarrolla en los estudiantes entre los grados 5-8 (9-13 años). Es tal su importancia que se merece todo el esfuerzo y el tiempo necesario para asegurar su correcto desarrollo" (NCTM, 1989).

Asimismo, es muy amplio el consenso, dentro de la comunidad matemática, a la hora de establecer como esencial la adquisición del razonamiento proporcional para cimentar el pensamiento algebraico (Riley, 2010). Esta relevancia o trascendencia dentro del recorrido del aprendizaje en la época escolar no se ha llegado a manifestar en el número de investigaciones que la circunscriben, que debería ser mucho mayor, y más aún, las que se centran en el conocimiento del profesorado (Arican, 2018), que realmente forman el eslabón de unión entre el conocimiento y el alumnado. Algunos de los estudios que se han realizado (e.g. Izsák y Jacobson, 2013; Akar, 2010; Ben-Chaim et al., 2012; Simon y Blume, 1994; Harel y Behr, 1995; Orrill et al., 2010; Post et al., 1991; Riley, 2010) muestran serias dificultades de los docentes con el razonamiento proporcional, tanto en el tipo de razonamiento a utilizar como en reconocer qué escenarios requieren de su utilización. Estas tribulaciones en el conocimiento se transformarán en obstáculos didácticos a la hora de transferir la comprensión de las razones, proporciones y razonamiento proporcional (Lobato et al., 2010), que ya de por sí son complejos de asimilar.

Sowder et al. (1998) afirman que muchos docentes (tanto en su etapa de formación como en activo) les falta conocimiento pedagógico para enseñar proporcionalidad. A esta falta de profundización en la enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad, se le debe añadir otro escollo a superar, que es la sintetización excesiva de las diferentes estrategias resolutorias de problemas (Izsák y Jacobson, 2013). La regla de tres podría ser un ejemplo paradigmático de una de estas estrategias, que tal como indica Stemn (2008) su versatilidad facilita los desafíos de los problemas, pero puede esconder el entendimiento de la relación multiplicativa.

También, nos indican Sallán y Vizcarra (2009) que "la enseñanza se preocupa más de simplificar la formulación del concepto de magnitudes directa o inversamente proporcional que de explicitar las auténticas dimensiones del concepto", porque falta trabajar más en profundidad la variación, según el contexto, de las relaciones globales de todas las magnitudes, que profiere un valor relativo a las diferentes categorizaciones de las magnitudes. De hecho, en numerosas ocasiones, se presenta a las distintas magnitudes proporcionales con el uso de frases estandarizadas como "al aumentar una magnitud la otra también aumenta, y si disminuye una, la otra también lo hace" o "cuando una aumenta, la otra disminuye" (Becerra et al., 1997) recuperado de Sallán y Vizcarra (2009), que podrían fomentar el uso de estrategias aditivas (Sallán y Vizcarra, 2009).

Tal como indica Riley (2010) es imperativo que los futuros maestros tengan un vasto y profundo conocimiento del razonamiento proporcional que vaya mucho más allá de la aplicación de una regla de tres, con el objeto de consolidar en el alumnado, mediante el razonamiento proporcional, los cimientos matemáticos que necesitarán en el futuro para otros contenidos como el álgebra.

1.1. Nexo de la proporcionalidad con otras materias

Hay investigaciones como Hoffer y Hoffer (1988, p.303), que además de indicar la importancia del razonamiento proporcional, como uno de los componentes fundamentales del pensamiento formal adquirido en la adolescencia.... , indican que una baja adquisición del mismo en los primeros cursos de secundaria, dificulta el estudio en una variedad de disciplinas que requieren pensamiento y comprensión cuantitativa, como lo son muchas de las diferentes secciones en la que se divide el currículum matemático.

Las diferentes temáticas matemáticas tienen su propia idiosincrasia y ámbito de incidencia, pero es indudable que sus límites están difuminados y ofrecen conexiones que estructuran todas las matemáticas. De hecho, los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares de la NCTM advierten sobre la fragmentación del currículo y piden la integración del currículo y la enseñanza de las matemáticas en los grados intermedios (NCTM 2000). Laniues y Willliams (2003) proponen, atendiendo a esta sentencia, la proporcionalidad como "un concepto global con el potencial de unir, relacionar y clarificar cualquier tema importante y complejo de los grados intermedios". De la misma forma, la propia NCTM (2000) expresa que la proporcionalidad no es una matemática "superficial", es lo suficientemente amplia, profunda y significativa como para unificar muchos conceptos en un tema principal de las matemáticas de grado medio.

La dilatada versatilidad de la proporcionalidad facilita que sea uno de los conceptos matemáticos con mayor aplicación en la vida real, motivo por el cual, a nivel pedagógico, el profesorado tiene un amplio abanico de ejemplos en los que mostrar su funcionabilidad en la vida real y muestra un gran potencial para que el alumnado se sienta capaz de aplicar aquello estudiado.

Tal como exponen Laniues y Willliams (2003):

> "La proporcionalidad proporciona un marco para el estudio de temas de álgebra, geometría, medición y probabilidad y estadística, todos ellos temas importantes en los grados intermedios. El alcance de la proporcionalidad es tan amplio que tiene conexiones con la mayoría, si no con

todos, los demás temas fundamentales de los grados intermedios y puede proporcionar un contexto para su estudio".

1.2. Enseñanza más práctica vs teórica o memorística

En este estudio también analizaremos si se ha utilizado un modelo más práctico o teórico a la hora de realizar la enseñanza-aprendizaje de las diferentes temáticas abordadas. Aunque el tópico tiene una importancia trascendental pues Brouwer (1989) descubrió que la transferencia de la formación del profesorado a la práctica dependía en gran medida en el grado en que el plan de estudios de formación del profesorado tenía un diseño integrador, es decir, el grado en que había una alternancia e integración de la teoría y la práctica dentro del programa. Nuestra pretensión no es hacer un estudio pormenorizado de las distintas tipologías de enseñanza o de las virtudes o defectos de una enseñanza más práctica o teórica, de hecho, tal como indican Korthage y Kessels (1999), la cuestión más importante es "cómo integrar ambas de forma que se produzca una integración en el profesor", sino que intentaremos vislumbrar si la utilización de estrategias poco memorísticas o mecanicistas en la resolución de problemas de proporcionalidad está correlacionado con una predilección hacia temáticas matemáticas trabajadas con una tendencia práctica o teórica.

1.3. Investigación de referencia

En Cabero-Fayos et al. (2020) se investigó, entre otros factores, la relación entre la proporcionalidad inversa y genérica y se encontró una conexión entre la utilización de estrategias más reflexivas y menos mecánicas y la facilidad para resolver problemas proporcionales genéricos. También quedó reflejado que el uso de un algoritmo como la regla de tres facilitó la falta de adquisición del razonamiento proporcional y en muchos casos una comprensión del enunciado reducida. Estas tendencias también se han encontrado en otras investigaciones como Ben-Chaim et al. (2012) y Riley (2010), las cuales evidencian que las dificultades en la comprensión de la proporcionalidad inversa y el razonamiento proporcional general, por parte de los profesores en formación, potencian la resolución de problemas mediante fórmulas proporcionales que pueden utilizarse sin interpretar correctamente el enunciado o las respuestas a los problemas.

2. OBJETIVOS

En los grados de maestro, tanto de Educación Infantil como de Educación Primaria, de ciertas universidades españolas se programa una asignatura de contenido matemático no didáctico con el objetivo de proporcionar un nivel de cultura matemática básica y de competencias en matemáticas para los futuros docentes que les posibilita analizar, entender y aplicar los contenidos de las matemáticas que se enseñan en las escuelas y poder actuar de una manera reflexiva, fundamentada y crítica ante el reto que supone su enseñanza y aprendizaje. Las distintas partes temáticas de una de estas asignaturas de la que disponemos los datos fueron:

- Número Naturales. Sistemas de numeración
- Divisibilidad
- Números Racionales
- Álgebra
- Geometría (plano y espacio)
- Magnitudes y Medida
- Estadística y probabilidad

Nuestra pretensión es cotejar los datos de la investigación de Cabero-Fayos et al. (2020) sobre proporcionalidad con los resultados obtenidos por los mismos alumnos durante esta asignatura de un curso anterior donde se repasaba globalmente todo el contenido matemático necesario para el grado de maestro/a. El propósito final es explorar la relación entre las diferentes partes del currículum matemático (no didáctico), dentro del grado de maestro, y la comprensión del razonamiento proporcional en los futuros docentes. Queremos comprobar si la correlación entre la capacidad proporcional que han demostrado los alumnos está ligada a la forma de trabajar, más experimental, práctica, … o más teórica y mecánica de las otras temáticas matemáticas.

Es evidente que los diferentes contenidos matemáticos se pueden trabajar desde enfoques muy variados y utilizando modelos educativos dispares, pero simplificando en un modelo predominantemente práctico o teórico, y entendemos práctico también la utilización de ejercicios menos pautados o estandarizados y dentro de un modelo teórico el uso de estrategias memorísticas reiterativas y mecánicas, las diferentes temáticas de la asignatura de matemáticas, a las que nos referimos, que se dieron de forma práctica o que requerían estrategias no memorísticas fueron Geometría y Divisibilidad, mientras que los Sistemas de Numeración y estadística y Probabilidad tuvieron un enfoque más teórico y/o con la utilización de ejercicios estandarizados. Las otras temáticas tuvieron una distribución más equitativa respecto a las diferentes formas de plantearlas.

3. PARTICIPANTES Y METODOLOGÍA GENERAL

En el artículo Cabero-Fayos et al. (2020) se trabajó con 71 alumnos que estaban acabando el tercer curso del Grado de Maestro en Educación Primaria de una universidad pública española. Hemos podido recuperar las notas, de la asignatura que trabaja contenidos matemáticos no didácticos de segundo curso, de 70 de esos alumnos. Los resultados empíricos se obtienen de una muestra de conveniencia no aleatoria.

Analizaremos diez variables:

- Las notas de cada una de las siete temáticas en las que se dividía el curso de preparación-recordatorio matemático, Número Naturales-Sistemas de numeración (*Natural*), Divisibilidad (*Divisib*), Números Racionales (*Fraccio*), Álgebra (*Algebra*), Geometría plana y espacial (*Geomet*), Magnitudes y Medida (*Medida*) y Estadística y probabilidad (*Estadis*).
- La nota global de ese curso (*Notatotal*).
- La media de las puntuaciones en la resolución de problemas de Proporcionalidad genérica (*Generica*).
- La media de las puntuaciones en la resolución de problemas de valor ausente de Proporcionalidad inversa (*Inversa*).

3.1 HIPÓTESIS

Nuestra hipótesis planteaba la existencia de una correlación entre una alta capacidad de resolución de problemas de proporcionalidad genéricos con un mejor rendimiento en las temáticas abordadas de forma más práctica mientras que aquel alumnado que utilizaba mayoritariamente estrategias memorísticas, y por lo tanto tenía una nota inferior en la proporcionalidad genérica, tendría reforzadas las materias más teóricas.

La tabla de correlaciones de Pearson (Tabla 1) entre la media de resultados de problemas de proporcionalidad y las diferentes temáticas matemáticas muestra una interrelación entre las temáticas que se dieron de forma más práctica, divisibilidad y geometría con la variable *Genérica*, y por otro lado, la variable *Inversa* está más correlacionada con la estadística y los Sistemas de Numeración.

TABLA 1. *Correlaciones de Pearson*

	Algebra	Divisible	Estadística	Fraccion	Geometría	Medida	Natural	Notatotal
Genérica	0.34	0.54	0.40	0.05	0.62	0.15	0.24	0.37
Inversa	0.30	0.44	0.59	0.20	0.55	0.32	0.53	0.46

Fuente: elaboración propia

Pero los resultados, aunque muestran cierta orientación, no son concluyentes. ¿La disparidad de competencias y déficits cognitivos y metodológicos mostrados podrían utilizarse en beneficio del alumnado?, ¿y si quisiéramos dividir el alumnado en grupos para reforzar ciertos contenidos, o mejor aún, tendencias metodológicas de aprendizaje?, ¿de qué forma se podría dividir al alumnado para incidir en las necesidades de cada uno de los estudiantes? Tal como mostraban Cabero y Epifanio (2020), una de las técnicas de análisis estadístico no supervisado más eficientes e intuitivas que se podría aplicar es el análisis de arquetipos. Podríamos elegir cuatro representantes, cuatro arquetipos nos mostraran, mediante aquellos alumnos que se acercaran más ellos, como dividir al alumnado en diferentes grupos con necesidades similares. Es decir, el objetivo será encontrar esos alumnos “arquetipos” que permitan explicar, como una combinación convexa de ellos, los resultados de los demás alumnos.

3.2 Análisis de Arquetipos y Análisis de Arquetipoides

En los últimos años, la minería de datos ha visto muy ampliada su relevancia gracias al inmenso abanico de posibilidades que le abren las nuevas tecnologías. Una de sus funciones es la búsqueda de patrones dentro de bases de datos utilizando diferentes algoritmos y análisis estadísticos. Según Mørup y Hansen (2010), las herramientas estadísticas de descomposición se han convertido en una herramienta clave para una amplia variedad de análisis de datos masiva, y una de estas herramientas es el Análisis de Arquetipos (AA) presentado por Cutler y Breiman (1994), que encuentra unos individuos extremos llamados Arquetipos que están restringidos a ser una combinación convexa de los elementos de la base de datos. Así mismo, estos Arquetipos representarán cada individuo de nuestra base de datos como una combinación convexa, en la cual evidentemente, cada elemento tendrá diferentes pesos de esos Arquetipos, este hecho diferencia el perfil de cada uno de los elementos y permite clasificarlos para saber cuál es la mejor estrategia que se puede implementar para ayudarnos en nuestro problema.

Tal como nos indica Bauckhage (2014), el AA es una técnica de descomposición matricial de reconocimiento de patrones o clasificación, puesto que proporciona resultados fácilmente interpretables en el análisis de componentes latentes, reducción de dimensionalidad y agrupación. Y aunque todavía no está ampliamente utilizada, tal como nos muestran Davis y Love (2010) los humanos interpretamos con más facilidad los datos más extremos por el principio del opuestos (Thurau et al., 2012), que son justamente los que nos devuelve el AA.

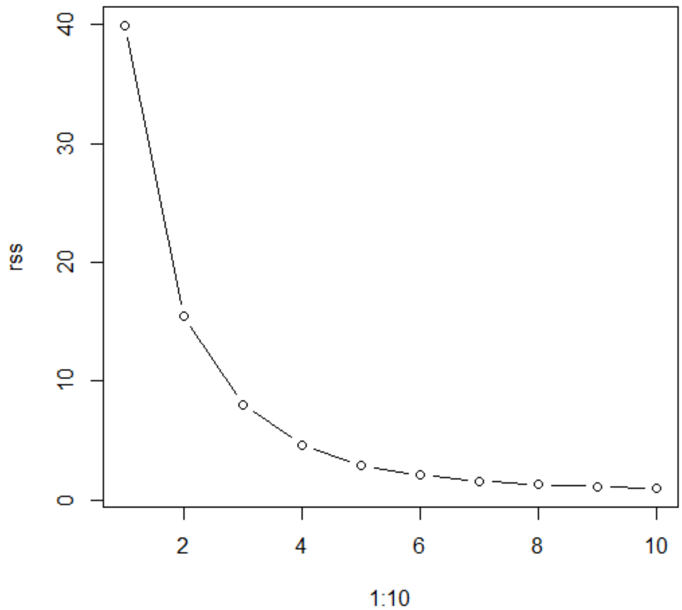
Aun así, la restricción que obliga la AA a que los Arquetipos sean una combinación convexa de los elementos de la base de datos, no son una condición necesaria para que estos formen parte de ella. En nuestro caso, como los elementos de la muestra son personas, no tenemos garantizado que haya alumnos reales que se acercan a las características de los arquetipos que nos devuelva el análisis (Cabero y Epifanio, 2020), motivo por el cual podríamos perder la facilidad intuitiva que nos aporta AA. Para solucionar esta cuestión Vinué et al. (2015) presentaron el Análisis de Arquetipoides (ADA), en la que los elementos extremos, denominados Arquetipoides, que forman la base de una combinación convexa para los otros elementos, son individuos reales de la base de datos. Motivo por el cual se facilita la comprensión del conjunto de datos al mantener el hecho de ser elementos extremos e individuos reales de la muestra.

Hemos utilizado la biblioteca de R “archetypes” que implementa estos algoritmos, tal como se utiliza en Cabero y Epifanio (2020).

4. RESULTADOS

A la hora de aplicar el algoritmo de AA o ADA el primer paso es elegir el número de representantes (arquetipos o arquetipoides) que utilizaremos para explicar nuestro modelo. Para ello utilizaremos el criterio del codo, un efectivo heurístico (Cutler and Breiman, 1994; Eugster and Leisch, 2009; Vinue et al., 2015; Seth and Eugster, 2016) que muestra la Suma Residual de Cuadrados (RSS) para diferente número de representantes (Figura 1). El codo muestra el punto donde se ralentiza la mejoría del modelo por el número de arquetipos o arquetipoide que cojamos. Cuanto menor sea el número de representantes, más intuitivas serán las conclusiones que podamos sacar, este es el motivo por el que hemos decidido utilizar 4 representantes.

FIGURA 1. RSS según el número de arquetipoides.



Fuente: elaboración propia

Aplicando en una primera instancia AA a nuestros datos (Tabla 2), los tres primeros arquetipos nos han aparecido muy dispares y el cuarto similar al tercero respecto a las variables proporcionales pero muy desigual respecto a las diferentes temáticas matemáticas.

***TABLA 2**. Valores de las variables para los cuatro arquetipos.*

	Natural	Divisibil	Fraccio	Algebra	Geomet	Medida	Estadíst	Generic	Inversa
[1,]	8.41	8.95	7.96	8.50	9.18	8.35	9.03	9.99	9.10
[2,]	3.57	3.96	5.76	4.75	4.26	5.29	4.47	0.00	2.29
[3,]	3.59	3.08	3.27	2.79	4.61	4.83	5.38	2.95	8.46
[4,]	9.26	7.89	9.20	8.14	7.97	9.54	9.61	0.46	8.29

Fuente: elaboración propia

El primer arquetipo representaría un alumno con valores altos en todas las variables, por lo tanto, un buen estudiante con los conceptos adquiridos y capacidad de razonamiento, el segundo por el contrario tiene calificaciones muy bajas, con lagunas cognitivas y capacidad de razonamiento proporcional muy limitada. El tercero y cuarto tienen una calificación alta en la resolución de problemas de valor ausente Inverso, pero baja en la de proporcionalidad Genérica, la diferencia entre ambos radica en que las notas en las diferentes temáticas matemáticas, en el arquetipo número tres son muy bajas, pero muy altas en el arquetipo número cuatro. El tercero tiene notas bajas pero la mayor es estadística, una de las temáticas trabajadas de forma más mecánica, asimismo el último arquetipo muestra que, aun con notas buenas, las más bajas justamente son las que se trabajaron de forma práctica y poco memorística que concuerda con una nota baja en la variable *Genérica*.

Nos gustaría resaltar ciertos aspectos de los arquetipos que coinciden con las tendencias que nos habían mostrado las correlaciones, por ejemplo, el primer arquetipo con casi la nota máxima en la variable *Genérica* tiene la máxima puntuación de las temáticas en geometría que fue una de las temáticas trabajadas de forma más práctica. También podemos ver que los arquetipos tres y cuatro, con una inversa elevada y una genérica reducida tienen como temática con más valor la estadística, trabajada de forma más teórica o con algoritmos memorísticos o el cuarto arquetipo que tiene las calificaciones más reducidas en Divisibilidad o Geometría que justamente coincide con el valor reducido de la variable *Genérica*.

Tal como hemos explicado en el apartado 3.2, la elección de los arquetipos es teórica y no tiene por qué haber ningún alumno que asemeje sus notas a los mismos. Es por ello por lo que encontramos interesante aplicar ADA con el objetivo de encontrar arquetipoides, elementos reales de la muestra que puedan representar las diferentes tendencias que encontramos en nuestros dados.

Una vez implementado el análisis (Tabla 3), tuvimos la dicha de comprobar que los arquetipoides que nos devuelve ADA son casi idénticos a los arquetipos.

TABLA 3. *Valores de las variables para los cuatro arquetipoides.43*

Alumno arqueti-poide	Natural	Divisibil	Fraccio	Algebra	Geomet	Medida	Estadíst	Generic	Inversa
36	3.1	2.4	2.9	2.5	3.2	4.6	4.8	0.0	8.3
33	9.7	8.5	9.3	9.7	9.1	9.3	9.8	3.3	8.3
68	3.4	3.8	5.6	4.5	4.1	4.9	4.2	0.0	2.5
10	7.5	8.1	6.8	7.6	8.7	7.6	8.4	10.0	9.2

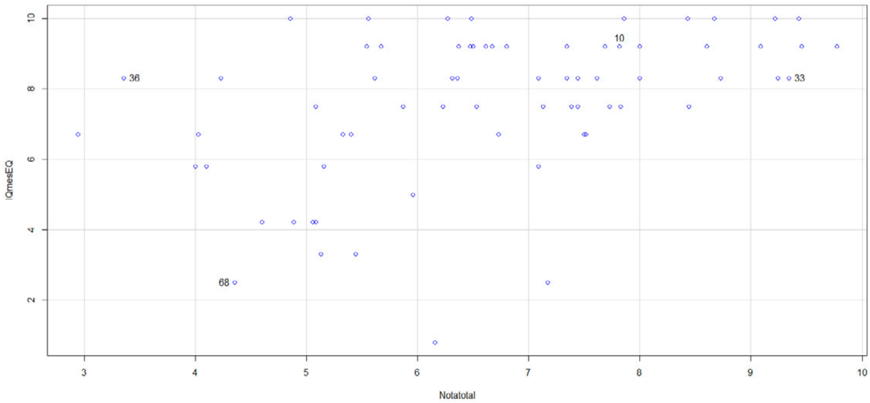
Fuente: elaboración propia

Tenemos un alumno con valores muy elevados en casi todas las variables (el alumno número 10), otro alumno con calificaciones reducidas (alumno 68) y otros dos alumnos con una nota elevada en la variable *Inversa*, pero reducida en *Genérica* (alumnos 36 y 33), uno tiene calificaciones bajas en las diversas materias matemáticas (alumno 36) y el otro muy elevadas (alumno 33), por lo tanto, en este caso la convergencia entre AA y ADA ha sido casi absoluta.

Si nos fijamos en los diagramas de dispersión (Figuras 2 y 3) de las variables *Genérica* e *Inversa*, respectivamente, con la variable *Notatotal* (que es la media aritmética de las diferentes partes del currículum de nuestra asignatura), comprobaremos que los arquetipoides son valores extremos que permiten englobar (como combinación convexa) a los demás elementos.

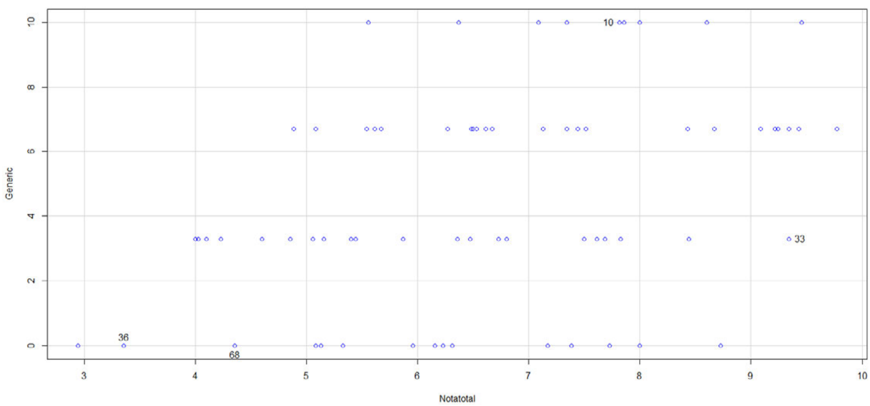
[43] Hemos coloreado cada arquetipoide para que concuerde con los colores que aparecen en la Figura 4.

FIGURA 2. *Diagrama de dispersión de la variable Inversa con la variable Nota Total.*



Fuente: elaboración propia

FIGURA 3. *Diagrama de dispersión de la variable Genérica con la variable Nota Total.*



Fuente: elaboración propia

El hecho que los arquetipoides sean elementos extremos y tengan perfiles clarificados simplifica la interpretación posterior, ya que cada uno de los elementos de la muestra se podrá representar como una combinación convexa de los mismos.

Una vez conseguidos los arquetipos o arquetipoides, podemos sacar exactamente el peso que tiene cada uno de estos representantes en nuestros 70 alumnos (Tabla 4) y por lo tanto discernir cuáles son sus características y necesidades y así forma diferentes grupos que se adapten para focalizar las diferentes ayudas o ampliaciones.

TABLA 4. *Peso de cada arquetipoide que devuelve el análisis en el ajuste de cada alumno.*

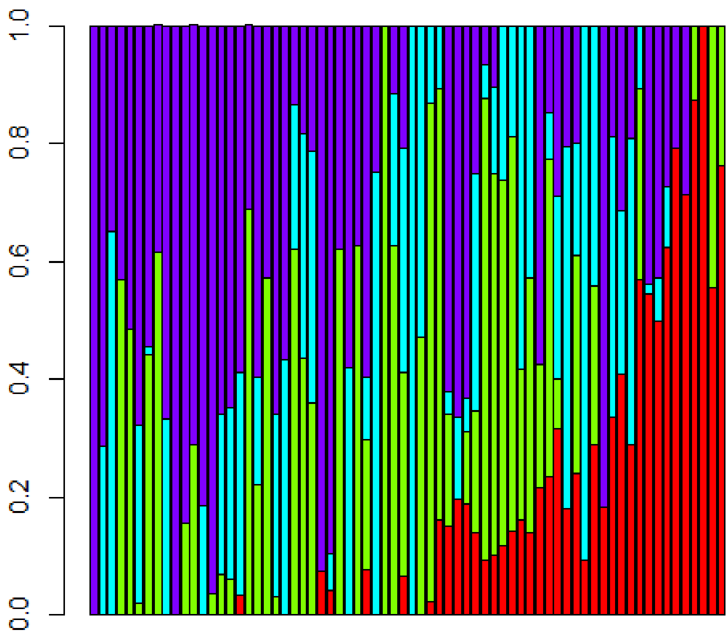
Arquetipoide	Alumno1	Alumno2	Alumno3	Alumno4	Alumno5	Alumno6	Alumno7	Alumno8	Alumno9	Alumno10	…
[1,]	0,00	0,29	0,65	0,00	0,00	0,30	0,02	0,00	0,33	0,00	…
[2,]	0,00	0,00	0,00	0,57	0,49	0,02	0,44	0,62	0,00	0,00	…
[3,]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	…
[4,]	1,00	0,71	0,35	0,43	0,52	0,68	0,54	0,38	0,67	1,00	…
Arquetipoide con más peso	[4,]	[4,]	[1,]	[2,]	[4,]	[4,]	[4,]	[2,]	[4,]	[4,]	…

Fuente: elaboración propia

La representación de esos pesos para los 70 alumnos en el siguiente diagrama de barras, en el que cada arquetipoide tiene asignado un color,[44] muestra la distribución de los diferentes conjuntos, bastante equilibrados, aunque el conjunto mayoritario es el conjunto de alumnos con buenas notas en todas las temáticas.

[44] Que corresponde con los colores utilizados en las tablas de arquetipoides.

FIGURA 4. *Diagrama de barras con el peso de cada arquetipoide para cada alumno.*



Fuente: elaboración propia

Numéricamente el conjunto de alumnos distribuidos por afinidad con cada arquetipoide quedaría tal como muestra la tabla 5, que realmente sería la distribución que haríamos para poder intervenir con los alumnos. De forma positiva comprobamos que el conjunto más numeroso corresponde al cuarto arquetipoide (alumno 10), que tiene muy buenas notas y por lo tanto a ese grupo, en el caso de querer hacerles una intervención pedagógica, se les podría asignar una ampliación de contenidos.

TABLA 5. *Número de alumnos distribuidos por el arquetipo más influyente.*

Arquetipoide	Número de elementos con mayor peso en el arquetipoide
[1,]	13
[2,]	19
[3,]	12
[4,]	26

Fuente: elaboración propia

5. CONCLUSIONES

Ya hemos hablado de la importancia de la proporcionalidad, Hoffer y Hoffer (1988) sostienen: "No sólo no sólo estas habilidades emergen más lentamente de lo que se sugirió originalmente, sino que hay pruebas de que un gran segmento de nuestra sociedad nunca las adquiere" (p. 303). Además, Post, Behr y Lesh (1988) manifiestan que las razones y las proporciones representan un punto de inflexión en el que se requieren muchos tipos de conocimientos matemáticos y también representan un estadio más allá del cual la comprensión matemática de los estudiantes se verá muy obstaculizada si no alcanzan la comprensión conceptual.

Como indican Lanius y Williams (2003), "la proporcionalidad tiene un alcance tan amplio que se relaciona con la mayoría, si no con todos, los demás temas fundamentales de los grados intermedios".

El objetivo principal de este estudio era comprobar si el alumnado con un razonamiento proporcional elevado tenía cierta afinidad a trabajar las restantes materias matemáticas de forma práctica y poco memorística. Para ello se han cotejado, en un mismo alumnado, dos variables que mostraban la capacidad proporcional (*Genérica* e *Inversa*) con las notas de diferentes temáticas, algunas de ellas trabajadas explícitamente de forma práctica o teórica. Los resultados muestran ciertas tendencias, pero no son concluyentes, por ello, y añadiendo el objetivo de poder ayudar al alumnado a resolver carencias o metodologías infructuosas, hemos implementado a nuestros datos dos análisis estadísticos no supervisados que nos permitan encontrar características, relaciones y estructuras escondidas dentro de los mismos. Estas relaciones deberían posibilitar elegir distintas tipologías del alumnado (en este caso cuatro) y así distribuir la ayuda de manera más individualizada y focalizada haciendo incidencia en sus necesidades reales. Los resultados dispensados por ambos análisis, el de Arquetipos y Arquetipoides han sido casi idénticos, motivo que afianza su bondad y han reforzado la hipótesis inicial, al mostrar representantes en los que se aprecia la propensión de una capacidad de razonamiento proporcional genérico hacia temáticas trabajadas de forma más práctica. Los perfiles de los representantes son diferenciados, hecho que facilita su comprensión:

- un grupo de alumnos con notas bajas en todas las temáticas matemáticas, proporcionalidad genérica baja y alta en la resolución de problemas de proporcionalidad inverso, que asociamos a alumnos que tienden a utilizar estrategias memorísticas con un grado de comprensión bajo.

- un grupo de alumnos con notas altas en todas las temáticas matemáticas, proporcionalidad genérica baja y alta en la resolución de problemas de proporcionalidad inverso, que vinculamos a alumnos que también tienden a utilizar estrategias memorísticas, pero han sabido superar el currículum matemático.

- otro grupo de alumnos con un déficit en todos los aspectos trabajados, tanto cognitivo como procedimental.

- el último grupo, muestra un alto nivel de comprensión y razonamiento, asimismo unos resultados positivos en todas las facetas trabajadas.

Empleando esta clasificación se podrían hacer intervenciones más ajustadas a las distintas tipologías de alumnos.

En resumen, los análisis han corroborado que el alumnado con un razonamiento proporcional más interiorizado tiene mayor facilidad para trabajar de forma práctica las diferentes temáticas matemáticas, que realmente permiten alcanzar las auténticas dimensiones de los conceptos matemáticos.

Asimismo, hemos utilizado unos análisis estadísticos que nos muestran una radiografía detallada de los puntos fuertes y débiles de nuestro alumnado, que se puede utilizar para aplicar, de manera más eficiente, técnicas que incidan en su progreso.

6. REFERENCIAS

Akar, G. (2010). Different levels of reasoning in within state ratio conception and the conceptualization of rate: A possible example. In *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 711-719).

Arican, M. (2018). Preservice middle and high school mathematics teachers' strategies when solving proportion problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(2), 315-335.

Bauckhage, C. (2014). A note on archetypal analysis and the approximation of convex hulls. *arXiv preprint arXiv*:1410.0642.

Becerra, M. V., Pancorbo, L., Martínez, R. y Rodríguez, R. (1997). *Matemáticas 2º eso*. McGraw-Hill.

Ben-Chaim, D., Keret, Y. y Ilany, B. S. (2012). Ratio and proportion. Springer Science & Business Media. Berlin/Heidelberg, Germany,

Brouwer, C. N. (1989). *Gei'ntegreerdelerarenopleiding, principes en effecten [Integrated teacher education, principles and effects].* Amsterdam: Brouwer.

Cabero, I. y Epifanio, I. (2020). Finding archetypal patterns for binary questionnaires. *SORT-Statistics and Operations Research Transactions*, 44 (1), 39-66. Retrieved from https://www.raco.cat/index.php/SORT/article/view/371167 doi: 10.2436/20.8080.02.94

Cabero-Fayos, I., Santágueda-Villanueva, M., Villalobos-Antúnez, J. V. y Roig-Albiol, A. I. (2020). Understanding of inverse proportional reasoning in pre-service teachers. *Education Sciences*, 10 (11).

Cutler, A., y Breiman, L. (1994). Archetypal analysis. *Technometrics*, 36(4), 338-347.

Davis, T. y Love, B. (2010). Memory for category information is idealized through contrast with competing options. *Psychological Science*, 21 (2), 234-242.

Eugster, M. y Leisch, F. (2009). From spider-man to hero-archetypal analysis in R.. *Journal of Statistical Software*, 30(8):1–23.

Harel, G. y Behr, M. (1995). Teachers' solutions for multiplicative problems. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 3 , 31–51.

Hoffer, A. y Hoffer, S. (1988). *Ratios and proportional thinking. Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods*, 285-313. Boston, Mass.: Allyn y Bacon.

Izsák, A. y Jacobson, E. (2013). Understanding teachers' inferences of proportionality between quantities that form a constant difference or constant product. *National Council of Teachers of Mathematics Research Presession*, Denver, CO.

Korthagen, F. A. y Kessels, J. P. (1999). Linking theory and practice: Changing the pedagogy of teacher education. *Educational researcher*, 28(4), 4-17.

Lanius, C. S. y Williams, S. E. (2003). Proportionality: A unifying theme for the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(8), 392-396.

Lobato, J., Ellis, A., & Zbiek, R. M. (2010). Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions, and Proportional Reasoning for Teaching Mathematics: Grades 6-8. *National Council of Teachers of Mathematics*. 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1502.

Mørup, M., & Hansen, L. K. (2010, August). Archetypal analysis for machine learning. In *2010 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing* (pp. 172-177). IEEE.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: *National Council of Teachers of Mathematic*s.

NCTM (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. *Commission on Standards for School Mathematics of the National Council of Teachers of Mathematics*.

Orrill, C. H., Izsák, A., Cohen, A., Templin, J. y Lobato, J. (2010). Preliminary observations of teachers' multiplicative reasoning: Insights from does it work and diagnosing teachers' multiplicative reasoning projects. Dartmouth, MA: *Kaput Center for Research and Innovation in STEM Education, University of Massachusetts*.

Post, T. R., Harel, G., Behr, M. y Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. *Integrating research on teaching and learning mathematics*, 177–198.

Riley, K. (2010). Teachers understanding of proportional reasoning. *In Proceedings of the 32nd annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 6, pp. 1055–1061).

Sallán, J. M. G. y Vizcarra, R. E. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 62 , 35–48.

Seth, S. y Eugster, M. J. (2016). Probabilistic archetypal analysis. *Machine learning*, 102(1), 85-113.

Simon, M. A. y Blume, G. W. (1994). Mathematical modeling as a component of understanding ratio-as-measure: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 13 (2), 183–197.

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L. y Thompson, A. (1998). *Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. Journal of Mathematics Teacher Education*, 1 (2), 127–155.

Stemn, B. S. (2008). Building middle school students' understanding of proportional reasoning through mathematical investigation. *Education* 3–13, 36 (4), 383–392.

Thurau, C., Kersting, K., Wahabzada, M. y Bauckhage, C. (2012). Descriptive matrix factorization for sustainability: Adopting the principle of opposites. *Data Mining and Knowledge Discovery*, 24 (2), 325-354.

Vinué, G., Epifanio, I. y Alemany, S. (2015). Archetypoids: A new approach to define representative archetypal data. *Computational Statistics and Data Analysis*, 87 , 102–115.