INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LOGARITMOS:
UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-PEDAGÓGICA

ANDRÉ MARQUES DOS SANTOS

Foz do Iguaçu
2022

Universidade Federal da Integração Latino-Americana

INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LOGARITMOS:
UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-PEDAGÓGICA

ANDRÉ MARQUES DOS SANTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elmha Coelho Martins Moura.

Foz do Iguaçu
2022

LOGARITMOS:
UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-PEDAGÓGICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Orientadora: Profa. Dra. Elmha Coelho Martins Moura.
UNILA

____
Profa. Dra. Maria Elizabete Rambo Kochhann
UNILA

____
Prof. Dr. Zaqueu Vieira Oliveira
UNILA

Foz do Iguaçu, 28 de março de 2022.

TERMO DE SUBMISSÃO DE TRABALHOS ACADÊMICOS

Nome completo do autor(a):____

____

Curso: ____

	Tipo de Documento
(x) graduação	(…..) artigo
(…..) especialização	(x) trabalho de conclusão de curso
(…..) mestrado	(…..) monografia
(…..) doutorado	(…..) dissertação
	(…..) tese
	(…..) CD/DVD – obras audiovisuais
	(…..) ____

Título do trabalho acadêmico: ____

____

____

Nome do orientador(a): ____

Data da Defesa: _____/_____/______

Licença não-exclusiva de Distribuição

O referido autor(a):

a) Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que o detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade.

b) Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à UNILA – Universidade Federal da Integração Latino-Americana os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Se o documento entregue é baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não a Universidade Federal da Integração Latino-Americana, declara que cumpriu quaisquer obrigações exigidas pelo respectivo contrato ou acordo.

Na qualidade de titular dos direitos do conteúdo supracitado, o autor autoriza a Biblioteca Latino-Americana – BIUNILA a disponibilizar a obra, gratuitamente e de acordo com a licença pública *Creative Commons* **Licença 3.0 Unported.**

Foz do Iguaçu, _____ de _________________________ de __________.

____

Assinatura do Responsável

Dedico este trabalho a todos que me acompanharam nessa longa jornada.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a professora orientadora Elmha, pela confiança e por não ter me deixado desanimar e desistir, em inúmeras vezes nesses últimos anos. Não só pela constante orientação, mas sobretudo pela sua amizade.

Aos professores Zaqueu e Maria Elizabete, membros da banca, pelas orientações e por terem sido responsáveis pela possibilidade de estar apresentando este trabalho. Sem o esforço de vocês seria impossível tal realização. Também agradeço aos demais professores que me acompanharam em minha trajetória acadêmica, sendo os mais presentes Newton, Patrícia, Guilherme, Adriana, Priscila, Victor, Cleilton, Fábio e Rodrigo.

Aos colegas de curso, em especial ao Junior, Eduardo, Midiã, Micaelli, Hassan, Everton, Jessica, Silvana, Larissa e Bianca. Por terem me acompanhado nos últimos anos de minha vida, na qual todos vocês foram de extrema importância, para me motivar mesmo nos momentos mais difíceis da minha vida acadêmica.

Aos meus amigos, em especial a Lourdes, quem mais tenho respeito e admiração depois de minha família. Romel, pelo companheirismo durante os anos que estive na universidade. E claro, ao Paulo que no último ano se tornou como um irmão para mim.

Por último e mais importante, agradeço a minha família, não apenas por este trabalho, mas por tudo que eu sou, e por tudo que eu conquistei. Aos meus pais Carlos e Teresa, meus irmãos Maynara, Raffaela e Adrian, meu sobrinho Caleb, meus cunhados Leonardo e Renato, meus tios e primos.

Quem afirma que
a hora de dedicar-se à filosofia ainda não chegou,
ou que ela já passou, é como se dissesse que
ainda não chegou ou que já passou
a hora de ser feliz.

Epicuro

RESUMO

Este trabalho é parte de uma investigação realizada junto ao Grupo de Pesquisa História, Filosofia e Educação Matemática (HIFEM) e tem como objetivo apresentar uma discussão sobre logaritmos levando em consideração seus aspectos histórico e pedagógico. Para tanto, foi realizada uma atividade de logaritmos, com cinco itens de exercícios sob uma perspectiva histórica e para compor a discussão utilizamos um conjunto de literaturas selecionadas referentes ao tema, bem como o uso da Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (BNCC). Como parte dos resultados, temos que a resolução/discussão da atividade pode possibilitar uma compreensão mais clara e ampliada a respeito dos conceitos de logaritmos, por permitir fazer correlações entre conceitos e propriedades com progressões aritméticas (pa) e progressões geométricas (pg), que até então nos pareciam desconexos. Consideramos a história da matemática mais que um complemento ou motivador para as aulas matemática, trata-se de um potencial pedagógicos para o uso em sala de aula.

Palavras-chave: História da Matemática; Educação Matemática; Atividade de Logaritmos; BNCC.

RESUMEN

Este artículo forma parte de una investigación realizada con el Grupo de Investigación en Historia, Filosofía y Educación Matemática (HIFEM) y tiene como objetivo presentar una discusión sobre los logaritmos teniendo en cuenta sus aspectos históricos y pedagógicos. Para ello, se realizó una actividad de logaritmos, con cinco ítems de ejercicios bajo una perspectiva histórica y para componer la discusión se utilizó un conjunto de literaturas seleccionadas referentes al tema, así como el uso de la Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (BNCC). Como parte de los resultados, tenemos que la resolución/discusión de la actividad puede permitir una comprensión más clara y ampliada sobre los conceptos de logaritmos, ya que permite hacer correlaciones entre los conceptos y propiedades con las progresiones aritméticas (pa) y geométricas (pg), que hasta entonces parecían desconectadas. Consideramos la historia de las matemáticas más que un complemento o un motivador para las clases de matemáticas, es un potencial pedagógico para utilizar en el aula.

Palabras clave: Historia de las Matemáticas; Educación Matemática; Actividad de Logaritmos; BNCC.

ABSTRACT

This paper is part of an investigation carried out with the History, Philosophy and Mathematics Education Research Group (HIFEM) and aims to present a discussion about logarithms taking into account its historical and pedagogical aspects. For this, it was performed an activity of logarithms, with five items of exercises under a historical perspective and to compose the discussion we used a set of selected literatures referring to the theme, as well as the use of the Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (BNCC). As part of the results, we have that the resolution/discussion of the activity can enable a clearer and expanded understanding about the concepts of logarithms, because it allows making correlations between concepts and properties with arithmetic progressions (pa) and geometric progressions (pg), which until then seemed disconnected. We consider the history of mathematics more than a complement or motivator for mathematical classes, it is a pedagogical potential for use in the classroom.

Key words: History of Mathematics; Mathematics Education; Logarithms Activity; BNCC.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ILACVN	Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza
UNILA	Universidade Federal da Integração Latino-Americana
HIFEM	História, Filosofia e Educação Matemática
BNCC	Banco Nacional Comum Curricular

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho de conclusão de curso (TCC) é parte de uma investigação realizada juntamente com Grupo de Pesquisa História, Filosofia e Educação Matemática (HIFEM), no primeiro semestre de 2018, no curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA). No período, para a realização de tal investigação, foi proposto uma coletânea de atividades, dais quais optei pelas atividades de tangente e de logaritmos. A resolução dessas atividades, em uma sequência didática, objetivava analisar as contribuições da história da matemática e da Educação matemática para a formação inicial dos professores. Os resultados foram publicados em um periódico científicos e a experiência discente foi apresentada em um evento.

Para este trabalho de conclusão de curso, optamos por realizar uma discussão sobre umas das atividades, tangente ou logaritmos, de maneira a registrar e pormenorizar o processo investigativo desenvolvido pelo discente na época, 2018. A escolha por logaritmos se deu pelo fato de não ter aprendido o conteúdo na escola e, não ter visto com tal estrutura de ensino: da história da matemática. Assim, esta investigação tem como objetivo apresentar uma discussão sobre logaritmos levando em consideração seus aspectos histórico e pedagógico. Para tanto, utilizamos literaturas referentes ao tema e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Nos dois capítulos posteriores, apresentamos no capítulo 2, sobre as potencialidades da história da matemática como recurso pedagógico com base no trabalho de Miguel (1997). No capítulo 3, descrevemos o procedimento metodológico da investigação em uma abordagem de nosso trabalho com nossas referências bibliográficas, devido à proximidade temática sobre logaritmos.

É no quarto capítulo deste trabalho, denominado *Atividades De Logaritmos: Uma Abordagem Histórico-Pedagógica*, que apresentamos a atividade de logaritmos, onde discutimos em cada item, as definições aritméticas, algébricas-funcionais, as propriedades de logaritmos por trás de cada passo, quais os objetivos de cada subitem, sua contextualização histórica, e suas correlações com a BNCC.

Consideramos que a resolução/discussão da atividade de logaritmos pode possibilitar uma compreensão mais clara e ampliada a respeito de seus conceitos, bem como os de progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG), por permitir fazer correlações entre esses conceitos e suas propriedades. Assim, a história da matemática é vista por nós como um potencial pedagógico, indo além de seu uso como complemento ou fonte de motivação para as aulas matemática.

2 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E SUAS POTENCIALIDADES PEDAGÓGICAS

O uso da história da matemática em sala é discutido por diversos autores. Oliveira (2005) em seus estudos sobre logaritmos afirma que, uma série de inquietações e dificuldades surgem ao estudarmos ou ensinarmos logaritmos, tais como: a matemática é uma ciência estática; feita por e para pessoas inteligentes; um conteúdo apresentado de forma descontextualizada e sem sentido algum para os alunos. Faz-se necessário uma mudança na prática pedagógica referente ao estudo de logaritmos, diferenciando-os dos atuais livros didáticos e técnicas de memorização das propriedades de logaritmos. Nesta busca por uma alternativa para o ensino de logaritmos, surgiu a seguinte questão: qual o potencial de uma sequência didática que utilize a história do logaritmo no processo de ensino aprendizagem neste conteúdo? De acordo com Michalovicz e Pacheco (2013):

> A História da Matemática configura-se como campo de investigação metodológica na busca da compreensão da aprendizagem, pois com abordagens etnográficas e históricas engloba diversas dimensões da matemática, e possibilita aos alunos a motivação para construir o saber matemático dentro da sua realidade, valorizando os conhecimentos produzidos pelo homem no decorrer da história (MICHALOVICZ, PACHECO, 2013, p.4).

Neste sentido, a História da Matemática é um recurso com possibilidades pedagógicas para a sala de aula, pois proporciona ao aluno não apenas compreender o processo histórico do conceito, mas reconhecer que a matemática não é estática, que os conceitos sofrem alterações com o passar dos anos e compreender e valorizar o conhecimento matemático produzido ao longo da história.

Miguel (1997) analisa argumentos que buscam reforçar as potencialidades pedagógicas da história matemática e seus respectivos teóricos defensores. Alguns desses argumentos em suma são:

1. A História é uma fonte de motivação para o ensino aprendizagem da matemática;
2. A História constitui-se em uma fonte de objetivos para ensino de matemática:
   a. A matemática como uma criação humana;
   b. As razões pelas quais as pessoas fazem matemática;
   c. As conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica etc.
   d. A curiosidade estritamente intelectual que pode levar as generalizações e

extensão de ideias e teorias;

e. As percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo.

3. A História constitui-se numa fonte de métodos adequados de ensino de matemática;
4. A História é uma fonte para seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos a serem incorporados nas aulas de matemática:
   a. Possibilitam o esclarecimento e o reforço de muitos conceitos que estão sendo ensinados;
   b. Constituem-se em veículos de informação cultural e sociológica, refletem as preocupações práticas ou teóricas das diferentes culturas em diferentes momentos históricos;
   c. Permitem mostrar a existência de uma analogia ou continuidade entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente;
5. A História é um instrumento que possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação de seu ensino;
6. A História constitui-se num instrumento de formalização de conceitos matemáticos;
7. A História é um instrumento de promoção do pensamento independente e crítico.

É importante destacar que tais argumentos, do uso da história nas aulas de matemática, contemplam diversos aspectos mencionados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que traz como primeira competência específica de matemática para ensino fundamental:

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BRASIL, 2017 p. 267)

Na Base Nacional Comum Curricular do ensino médio consta:

> Um dos desafios para a aprendizagem matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes que a matemática não é um conjunto de regras técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história (BRASIL, 2018 p. 522).

Segundo Matos (2020), a integração da História nas aulas de Matemática colabora para que o professor ultrapasse:

> Uma visão que imagina a escola do passado como dos “bons velhos tempos” (ou a dos “maus velhos tempos”, conforme a perspectiva), como também compreender que muito do que se imagina inovador tem, na verdade, raízes profundas no passado (MATOS, 2020, p. 27).

No entanto, proporcionar condições de aprendizagem da Matemática que esclareçam sua História encontra diversos desafios, entre eles o material didático sobre História da Matemática disponível para o uso em sala de aula. Em artigo publicado por Moura e Brito (2019), consta que o uso da História da Matemática ocorre, na maior parte das vezes, por intermédio do livro didático, “em que pequenos fatos históricos são contados no início e no fim de uma unidade, sem qualquer conexão com a construção dos conceitos” (MOURA; BRITO, 2019, p. 9).

Através das informações contidas em Oliveira (2005), pode-se concluir que, ao propor a atividade sobre logaritmos em sala de aula, seus alunos puderam perceber que a matemática é composta por uma série de conceitos que passaram por diversas mudanças ao longo do tempo, que diversas pessoas se debruçaram sobre problemas de natureza matemática e não apenas pessoas vistas como gênios e que proporcionou um conhecimento mais amplo e satisfatório sobre o tema estudado.

É nessa perspectiva teórica, o das potencialidades pedagógicas do uso história da matemática em sala de aula, que se apresenta a atividade de logaritmos desenvolvida nesta investigação.

3 PROCEDIMENTOS METODOLOGICOS DA PESQUISA

O tema deste trabalho de conclusão de curso (TCC) é parte de uma investigação realizada juntamente com o Grupo de Pesquisa História, Filosofia e Educação Matemática (HIFEM), no primeiro semestre de 2018, no curso de Licenciatura em Matemática da UNILA, na disciplina de Prática de Ensino de Matemática IV, na qual eu estava matriculado. Tal investigação foi desenvolvida pela professora Elmha Coelho M. Moura, docente da disciplina e membro do HIFEM, como também pela professora Arlete de Jesus Brito, no período membro/presidente do HIFEM.

O supracitado Grupo de Pesquisa tinha por objetivo analisar as contribuições da história da matemática e a da educação matemática para a formação inicial de professores. Os resultados estão publicados nos artigos ´A história da matemática, em sequências didáticas, na formação inicial de professores', na revista Educação: Teoria e Prática[1].

O tema Logaritmo é parte de uma coletânea de atividades do HIFEM sobre história da matemática, que abordam os seguintes pontos de ensino: logaritmos, história da geometria, sistemas de numeração, tangente, seno e cônicas. Nas quais em 2018, optei por estudar os temas de tangente e logaritmos. Sendo que, a atividade sobre logaritmos foi escolhida, pelo fato de não ter aprendido este conceito na escola e nem ter visto com tal estrutura de ensino. Como resultado desta investigação realizada na disciplina de prática de ensino podemos citar a apresentação na III Semana Acadêmica de Licenciatura em Matemática da UNILA (III SALIMAT), no ano de 2019. Participei também, de uma roda de discussão do curso 'Base Nacional Comum Curricular: abordagem multidisciplinar[2]', no formato de *live,* do projeto de extensão 'Rede de diálogo: a educação em debate' da UNILA, em 2021.

Para este TCC, a atividade de logaritmos foi resolvida novamente com uma atenção mais apurada, a fim de deixar as resoluções/explicações mais compreensíveis a/ao leitora/leitor. Nesse processo, foram realizadas novas leituras, aplicadas pequenas modificações na estrutura da atividade, acrescentados comentários históricos em cada item

---

[1] Educação: Teoria e Prática/ Rio Claro, SP/ v. 29, n.62/ p. 609-625/ SETEMBRO-DEZEMBRO. 2019. eISSN 1981-8106. Disponível em: Vista do THE HISTORY OF THE MATHEMATICS INTO DIDACTIC SEQUENCES IN THE TEACHERS' INITIAL FORMATION (unesp.br) ou Vista do THE HISTORY OF THE MATHEMATICS INTO DIDACTIC SEQUENCES IN THE TEACHERS' INITIAL FORMATION (unesp.br)

[2] O curso foi ministrado pela prof.ª Drª Elmha Coelho M. Moura, sob a perspectiva da História da Matemática/BNCC.

e subitem, contextualizados cada passo e estabelecidos correlações com a BNCC, citando as competências e habilidades presentes em cada item.

A abordagem histórica está presente na própria atividade, uma vez que nossa intenção foi a de focalizar os logaritmos enquanto objeto histórico, visto que, a atividade se inicia com a definição de progressões algébricas e geométricas (PA e PG), encontrada em um livro didático do início do século XX de José Adelino Serrasqueiro (1835-19??). Na sequência é apresentada uma tabela que deve ser preenchida a partir do modo como John Napier (1550-1617) teria desenvolvido sua ideia inicial de logaritmos e é proposta uma construção de uma tábua de logaritmos na base 10.

Em um segundo olhar investigativo sobre a atividade de logaritmos, para elaboração deste TCC, foi possível averiguar um caminho a qual ela percorreu:

1. A atividade é parte da obra ‘Os logaritmos na cultura escolar brasileira’, de Miguel e Miorim (2002), que foca na discussão sobre o uso dos logaritmos como objeto da cultura escolar desde o século XIX até os dias de hoje. Os autores analisam diversos livros didáticos de matemática e os programas oficiais de matemática para o ensino brasileiro, buscando compreender como o contexto escolar brasileiro se apropriou do conceito de logaritmos e como ele se transformou até chegar aos dias atuais. Miguel e Miorim (2002) apresentam uma contextualização histórica mais detalhada sobre como Napier e Henry Briggs (1561-1630) criaram suas definições e tábuas de logaritmos, assim como, uma análise sobre a utilização do conceito de progressões aritméticas e progressões geométricas para se trabalhar logaritmos e suas propriedades;
2. Inspirado no trabalho de Miguel e Miorim (2002) foi realizada a dissertação intitulada ‘O ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica’, defendida por Oliveira (2005) sob a orientação da prof.ª Arlete de Jesus Brito. Neste trabalho, encontramos a lista de atividades sobre logaritmos, sobre a qual esta pesquisa aborda. Essa dissertação tem como objetivo apresentar uma sequência didática de atividades para o trabalho pedagógico, tendo a história da matemática como fonte metodológica, buscando compreender a origem do conceito de logaritmos, bem como entender qual o potencial de uma atividade sob uma perspectiva histórica, no que diz respeito ao processo de ensino aprendizagem;
3. Posteriormente, Soares (2011), em sua dissertação ‘Uma investigação

histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula', sob a orientação do prof. Iran Abreu Mendes, faz uso da obra de Miguel e Miorim (2002), com também de Oliveira (2005). O trabalho visa identificar a abordagem conceitual e didática dos logaritmos em determinados livros didáticos utilizados nas escolas de Natal/RN. Tendo como intuito conduzir o professor a uma compreensão mais profunda sobre logaritmos, visando a superação das dificuldades enfrentadas em sala de aula, o autor propõe uma sequência de atividades que podem auxiliar na compreensão do professor em relação aos logaritmos.

4. Na pesquisa de Moura e Brito (2019) sobre ´A história da matemática, em sequências didáticas, na formação inicial de professores', as autoras têm como intuito analisar as contribuições da história da matemática e da educação matemática na formação inicial de professores. Em um estudo de caso, fazem uso de diversas atividades dentre elas a de logaritmos, presente no trabalho de Oliveira (2005);
5. Por fim, este TCC, como parte da pesquisa de Moura e Brito (2019), apresenta uma visão histórico-pedagógica da atividade sobre logaritmo. Para tanto, fizemos uso das pesquisas de Miguel (1997), Miguel e Miorim (2002), Oliveira (2005), Soares (2011) e Moura e Brito (2019).

A proximidade temática sobre logaritmos com abordagens distintas se deve ao fato dos autores, em sua maioria, serem membros do Grupo HIFEM. Além da atividade de logaritmo ser desenvolvida e utilizada por esses pesquisadores, a abordagem pedagógica segue os preceitos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que anuncia:

> Um dos desafios para a aprendizagem matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes que a matemática não é um conjunto de regras técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história (BRASIL, 2018, p. 522).

Compreender que a matemática é bem mais que um conjunto de regras técnicas pode ser possível com ações pedagógicas que fazem uso da história da matemática. Segundo Miguel (1997), a história da matemática pode ser utilizada, pelos professores de matemática, como instrumento **de resgate cultural**: a história pode servir para a superação dos conhecimentos matemáticos dos colonizados que foram submersos pela cultura imposta pelos colonizadores. Nessa perspectiva, em cada item resolvido consta comentários e as habilidades e competências presentes na BNCC.

4 ATIVIDADES DE LOGARITMOS: UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-PEDAGÓGICA

A atividade de logaritmos (em anexo) proposta por Oliveira (2005), se trata de uma sequência didática que se utiliza da história da matemática como recurso metodológico. Dividida em cinco itens, cada um deles correspondem as seguintes propostas: **item 1- Logaritmos e Progressão Aritmética (PA)/ Progressão Geométrica (PG)**, que trata das correlações entre as propriedades de logaritmos com as relações que podemos fazer se utilizando da noção posicional dos termos das progressões aritméticas e geométricas; **Item 2- Logaritmos em uma perspectiva de John Napier (1550-1619)**, trata da compreensão de logaritmos neperianos através da análise por trás da concepção de logaritmos de Napier proposta por um fenômeno cinemático, fazendo correções com as propriedades de PA e PG feitas no item 1; **Item 3- Logaritmos uma modificação no sistema de logaritmos de Napier**, que trata da modificação do sistema de logaritmos neperianos a fim de criarmos um sistema de logaritmos que contenha base; **Item 4- Construção de uma tabua de logaritmos de base 10**, trata de uma proposta, para a criação de nossa própria tabua de logaritmos de base 10; **Item 5- Solução de um produto através da tabua de logaritmos de base 10**, o último item nos propõe resolver um produto de dois fatores, utilizando a tabela de logaritmos de base 10, criado no item 4, através do uso das propriedades de logaritmos estudados no item 1.

ITEM 1- LOGARITMOS E PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)/ PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG).

Este item trata do estudo de Logaritmos através dos conceitos de Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG). Consiste em compreender a definição de logaritmo dada e posteriormente analisar sequências de PA e PG, e responder às questões de cada subitem fazendo relações entre a posição dos termos das progressões com as propriedades de logaritmos, tais como: logaritmo de produto; logaritmo do quociente; logaritmo da potência e logaritmo da radiciação.

RESOLUÇÃO DO ITEM 1

José Adelino Serrasqueiro (1835-19??), no século XIX, foi professor de matemática no Lyceu Central de Coimbra e socio efetivo do Instituto de Coimbra, sendo ele formado em Bacharel em Filosofia pela Universidade de Coimbra. Segundo Miguel e Miorim (2002), em seu livro *Tratado de Álgebra Elementar*, Serrasqueiro dividiu o capítulo *Theoria dos Logarithmos* em três partes, sendo que a segunda parte aborda os princípios gerais relativos aos logaritmos e apresenta a definição aritmética de logaritmo, esta utilizada na atividade, a fim de comparar com a definição algébrica-funcional, ou seja, logaritmo como o expoente de uma potência, dada na parte três do capítulo de Serrasqueiro.

Comentário: o livro didático *Tratado de Álgebra Elementar* de Serrasqueiro é do século XIX, não localizamos o original da obra. As informações obtidas a respeito do autor são referentes a Miguel e Miorim (2002). Não foi possível, até o momento, localizar a data exata em Serrasqueiro faleceu.

a) Qual seria, na sequência I, o logaritmo de 8? E na II?

Para iniciarmos a resolução, precisamos primeiro entendermos o que são uma PA e uma PG. Assim, definimos uma Progressão Aritmética (PA) como sendo qualquer sequência de números onde a diferença entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é constante. Ou seja, se pegar a diferença entre o segundo e o primeiro termo de uma PA e compararmos com a diferença entre o terceiro e o segundo termo (ou qualquer outro par de termos consecutivos) da mesma PA, vamos notar que as diferenças serão iguais. Uma Progressão Geométrica (PG) é qualquer sequência de números onde o quociente entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é constante. Ou seja, se pegar o quociente entre o segundo e o primeiro termo de uma PG e compararmos com o quociente entre o terceiro e o segundo termo (ou qualquer outro par de termos consecutivos) da mesma PG, vamos notar que os quocientes serão iguais.

Perceba que pela definição, logaritmos são os termos da PA, correspondentes aos termos da PG. Se pegarmos a_{PA2} como sendo o segundo termo da PA e a_{PG2} como sendo o segundo termo da PG, então, o logaritmo de a_{PG2} é igual a a_{PA2}, ou seja, $\text{Log } a_{PG2} = a_{PA2}$.

Assim, na sequência I, o termo da PA correspondente ao 8 da PG, é o 3, pois o 8 é o quarto termo da PG, então seu termo correspondente na PA deve ser o 3, que é o quarto termo da PA. Podemos afirmar que $\text{Log}_{b1}\ 8 = 3$, onde b1 é a base (conceito que será discutido no subitem b)) desse logaritmo, o 8 é o logaritmando e o 3 o logaritmo de 8 na base b1.

Na sequência II, o termo da PA correspondente ao 8 da PG, é o 6, pois o 8, é o quarto termo da PG, então seu termo correspondente na PA deve ser o 6, que é o quarto termo da PA. Podemos afirmar que Log_{b2} 8 = 6, onde b2 é a base desse logaritmo, o 8 é o logaritmando e o 3 o logaritmo de 8 na base b1.

Comentários: o subitem a) tinha como objetivos: apresentar uma definição aritmética de logaritmos a partir do conceito de progressões aritméticas e progressões geométricas; estabelecer uma correspondência através da posição de cada termo das progressões aritméticas e geométricas, ou seja, o primeiro termo da PA se corresponde ao primeiro termo da PG, o segundo com o segundo e assim sucessivamente; compreender que, os termos da progressão aritmética são os logaritmos e, os da progressão geométrica, são os logaritmandos, ou seja, trazendo para uma notação algébrico-funcional (atualmente encontrado na maioria dos livros didáticos que trabalham este tema) de logaritmos $\log_b a = x$, onde b é a base, a o logaritmando e x o logaritmo (OLIVEIRA, 2005).

b) O que está fazendo com que as duas correspondências de sequencias sejam diferentes?

Ao observar a PA de cada sequência, verificamos que na sequência I, sua PA tem razão igual a 1, pois, se pegarmos arbitrariamente o terceiro ($a_3 = 2$) e o segundo ($a_2 = 1$) termo e fizermos a diferença entre eles, teremos como resultado que $a_3 - a_2 = 2 - 1 = 1$. Já na sequência II, utilizando a diferença entre dois termos consecutivos, temos que a razão da PA é 2. Logo as razões das duas PA's são diferentes, porém o motivo pelo qual as correspondências são distintas vem do fato de que as bases dos logaritmos das duas sequências serem distintas, pois se fossem iguais, mesmo com sequências distintas devido às razões das PA's, as correspondências se manteriam iguais, ou seja, se pegarmos o logaritmo de 4 (terceiro termo da PG) que na sequência I é igual a 2 (terceiro termo da PA), então na sequência II, o termo da PA que corresponde ao 4 (terceiro termo da PG), deveria ser 2 também, mas é 4 (terceiro termo da PA).

Para esclarecer melhor, vamos definir o logaritmo de a na base b, como sendo o expoente em b deve ser elevado para que a potência resulte em a:

$$Log_b a = x \leftrightarrow b^x = a$$

Assim, se a sequência I e a sequência II tivessem de fato a mesma base, então sendo b essa base, teríamos que $b^2 = b^6 = 4$, o que obviamente é um absurdo.

Comentário: Este subitem busca estabelecer uma correspondência (através da posição dos termos) entre as progressões aritméticas e geométricas; calcular as razões das progressões aritméticas e geométricas; perceber as diferentes bases nas duas sequências apresentadas (OLIVEIRA, 2005).

c) Qual a base está sendo utilizada na sequência I? e na II?

Do item anterior, temos a base como sendo o número que elevado ao termo da PA (logaritmo) é igual ao termo da PG (logaritmando) correspondente.

- Sequência I: seja b base da sequência, e escolhendo de forma arbitrária o segundo termo da PA e da PG que são iguais a 3 e 8, respectivamente, temos que:

$$b^3 = 8 \leftrightarrow b = \sqrt[3]{8} \leftrightarrow b = 2$$

Logo, a base da sequência I é igual a 2, rescrevendo na tabela temos:

Quadro 1 – Primeira sequência de Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas, com os termos da PG em forma de potencias

PA:	0	1	2	3	4	5	6	...
PG:	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	...

Fonte: o autor, 2022.

- Sequência II: seja b base da sequência, escolhendo de forma arbitrária o terceiro termo da PA e da PG que são iguais a 2 e 2, respectivamente, temos que:

$$b^2 = 2 \leftrightarrow b = \sqrt[2]{2}$$

Logo, a base da sequência I é igual a $\sqrt{2}$, rescrevendo na tabela temos:

Quadro 2 – Segunda sequência de Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas, com os termos da PG em forma de potencias

PA:	0	2	4	6	8	10	12	...
PG:	$(\sqrt{2})^0$	$(\sqrt{2})^2$	$(\sqrt{2})^4$	$(\sqrt{2})^6$	$(\sqrt{2})^8$	$(\sqrt{2})^{10}$	$(\sqrt{2})^{12}$	...

Fonte: o autor, 2022.

Comentário: este subitem busca determinar a base de cada uma das sequências; compreender que a base deve permanecer a mesma para todos os pares correspondentes das progressões aritméticas e geométricas; perceber que, somente quando a razão da progressão aritmética for igual a 1, a base dos logaritmos coincide com a razão da progressão geométrica; verificar a relação existente entre a base de um sistema qualquer de logaritmos e a razão das progressões aritméticas e geométricas, sendo a base igual a própria razão da PG (OLIVEIRA 2005).

d) Descreva, em linguagem matemática, a definição acima, determinando as condições de existência dos logaritmos para os números reais.

Seja x o logaritmo de a na base b, temos a seguinte notação: $\mathrm{Log}_{\mathrm{b}}\mathrm{a} = \mathrm{x}$, para que Log $_{\mathrm{b}}$ a corresponda a um número real temos que $\mathrm{a} > 0$, $\mathrm{b} > 0$ e $\mathrm{b} \neq 1$. Deste modo podemos notar que os logaritmos não estão definidos para números reais não positivos. Pois, sendo b positivo, b^x, para qualquer x real, $b^x > 0$. Podemos ainda observar, que se $\mathrm{x} = 0$, $b^x = b^0 = 1$, e se $x = 1$, $b^x = b^1 = b$.

Comentário: este item busca determinar as condições de existência, através da linguagem matemática; compreender as condições de existência nos conjuntos dos reais, para que o logaritmo das progressões exista; utilizar a definição e aplicar as propriedades de potenciação dos logaritmos (OLIVEIRA 2005).

e) Determine, na primeira sequência, a média aritmética entre o segundo e o sexto termo da PA. Determine a média geométrica entre os termos correspondentes – segundo e sexto – na PG. O que você observa? Este fato é generalizável para os demais termos da sequência I? E para a sequência II?

A média aritmética é obtida ao somar os valores e dividir o resultado pela quantidade de termos que compõem a situação problema. Assim, a média aritmética entre o segundo e o sexto termo da PA é:

$$\overline{x} = \frac{a_2 + a_6}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$$

A média geométrica de dois números é dada pela raiz quadrada do produto desses dois números. Assim, a média geométrica entre o segundo e o sexto termo da PG é:

$$\overline{x_G} = \sqrt[2]{2 * 32} = \sqrt{64} = 8$$

Podemos observar, que o resultado da média aritmética resultou em 3 e o da média geométrica em 8, que são, respectivamente, o quarto termo da PA e o quarto termo da PG. Podemos generalizar para todos os termos da sequência I, pois, temos duas propriedades de logaritmos sendo utilizadas neste processo: o logaritmo do produto que diz que o logaritmo de um produto de fatores a e b, na base c é a soma dos logaritmos de mesma base de cada um dos fatores do produto ($Log_c\,(a * b) = Log_c\, a + \ Log_c\, a$); e logaritmo da raiz, que é um caso da propriedade Logaritmo da potência, que diz que o logaritmo na base c, de uma potência, é igual ao produto entre o expoente da potência e o logaritmo de mesma base, cujo logaritmando é a base da potência ($Log_c \sqrt[n]{b} = Log_c\, b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} Log_c\, b$).

Assim, na sequência I, pela propriedade do logaritmo do produto:

$$Log_2\,(64) = Log_2\,(2 * 32) = Log_2\, 2 + \ Log_2\, 32 = 1 + 5 = 6.$$

Logo, o logaritmo de 64 na base 2 é igual 6, sabendo desses resultados e pela propriedade do logaritmo da raiz temos:

$$Log_2 \sqrt[2]{64} = Log_2\, 64^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} Log_2\, 64 = \frac{6}{2} = 3$$

Perceba que $\sqrt{64} = 8$, logo $Log_2 \sqrt[2]{64} = Log_2\, 8 = 3$.

Com respeito a sequência II, temos que a média aritmética entre o segundo e o sexto termo da PA é:

$$\overline{x} = \frac{a_2 + a_6}{2} = \frac{2 + 10}{2} = 6$$

A média geométrica entre o segundo e o sexto termo da PG é:

$$\overline{x_G} = \sqrt[2]{2 * 32} = \sqrt{64} = 8$$

Podemos observar que o resultado da média aritmética resultou em 6 e o da média geométrica em 8, que são, respectivamente, o quarto termo da PA e o quarto termo da PG. Podendo ser generalizado para todos os termos da sequência II, pelo mesmo argumento utilizado para a sequência I.

Comentário: O subitem e) tinha como objetivos: verificar a correspondências entre as progressões aritméticas e geométricas, através da média geométrica e média aritmética; reconhecer as propriedades, quando exploradas em diferentes conceitos; perceber que o logaritmo transforma uma operação em outra. Por exemplo, multiplicação em adição, potenciação em multiplicação (OLIVEIRA, 2005).

f) Na sequência II, some os terceiros e quarto termos da PA. Qual o termo correspondente, na PG, a esta soma? Como conseguiríamos este termo da PG utilizando apenas os termos da progressão geométrica?

A soma do terceiro e do quarto termo da PA é: $4 + 6 = 10$ e o termo correspondente a 10, na PG, é 32. Podemos obter, este termo multiplicando o terceiro e o quarto termo da PG, sendo eles 4 e 8, respectivamente, assim, $4 * 8 = 32$. Do subitem anterior, temos que esse procedimento se dá pela propriedade do logaritmo do produto. Ou seja, $Log_{\sqrt{2}}(32) = Log_{\sqrt{2}}\ (4 * 8) = Log_{\sqrt{2}} 4 + Log_{\sqrt{2}}\ 8 = 4 + 6 = 10.$

Comentário: O subitem f) tinha como objetivos: fazer uma correlação entre os termos da PA e da PG, através da posição dos termos; compreender que a soma das progressões aritméticas corresponde à multiplicação na progressão geométrica e perceber que isso corresponde a propriedade do logaritmo do produto (OLIVEIRA, 2005).

g) Sabemos que $\sqrt{64} = 8$. O que teríamos que fazer, na sequência I, com o termo da PA correspondente ao termo da PG, 64, para determinarmos, na PA, o termo correspondente ao termo da PG, 8? E na sequência II?

Se observarmos bem, podemos perceber que o termo na PA que corresponde a 8, é metade do termo na PA que corresponde a 64, ou seja, $\frac{6}{2} = 3$, que é o termo que queríamos. Do subitem e), temos que esse procedimento se dá pela propriedade do logaritmo da potência. Ou seja $Log_2 8 = Log_2 \sqrt[2]{64} = Log_2 64^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} Log_2 64 = \frac{6}{2} = 3.$

Na sequência II, o mesmo ocorre, se dividirmos 12, que é o termo na PA, que corresponde a 64, da PG, por 2, encontramos o termo da PA, que corresponde a 8, da PG. Assim, $\frac{12}{2} = 6$, que é termo que queríamos. Pela propriedade do logaritmo da potência. Ou seja $Log_{\sqrt{2}}\ 8 = Log_{\sqrt{2}} \sqrt[2]{64} = Log_{\sqrt{2}}\ 64^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} Log_{\sqrt{2}}\ 64 = \frac{12}{2} = 6.$

Comentário: O subitem g) tinha como objetivos: fazer uma correlação entre os termos da PA e da PG, através da posição dos termos; perceber que raízes de termos da progressão geométrica são obtidas mediante divisões de termos a eles correspondentes na progressão aritmética pela razão da progressão geométrica e perceber que isso corresponde a propriedade do logaritmo da potência (OLIVEIRA, 2005).

h) A partir das observações anteriores, como determinaríamos, utilizando a PA, sequência I, o logaritmo de $\sqrt{8}$? E na sequência II?

Da atividade anterior, podemos encontrar o logaritmo de uma raiz quadrada, dividindo por 2 o termo da PA que corresponde ao radicando (número dentro da raiz), na PG. Sendo 8, o radicando dessa raiz, temos que o termo na PA correspondente a 8 é 3. Logo o logaritmo de $\sqrt{8}$ é $\frac{3}{2}$.

Na sequência II, o termo da PA, que corresponde a 8, da PG é 6, assim o logaritmo de $\sqrt{8}$ é $\frac{6}{2} = 3$.

Comentário: O subitem h) tinha como objetivos: utilizar as conclusões anteriores e calcular o logaritmo de raiz quadrada de 8 (OLIVEIRA, 2005).

i) Em qualquer uma das sequências, a subtração de dois termos da PA corresponde a que operação com os termos correspondentes da PG?

Corresponde a operação de divisão, ou seja, se escolhemos arbitrariamente na primeira sequência o sexto e o quarto termo da PA, e subtrairmos teremos: $5 - 3 = 2$, e ao pegarmos os termos correspondentes na PG de 5 e 3 da PA, e dividirmos: $\frac{32}{8} = 4$. Assim, 4 é o número na PG que corresponde a 2 da PA, ou seja, o logaritmo de 4 na base 2 é 2.

Isso se dá pela propriedade do logaritmo do quociente, que diz que: o logaritmo de dois fatores a e b, na base c qualquer, é igual a diferença entre os logaritmos na mesma base, dos fatores do quociente, ou seja, temos que esse procedimento se dá pela propriedade do logaritmo do quociente, ou seja, $Log_c\left(\frac{a}{b}\right) = Log_c\, a - Log_c\, b$. Logo, se pegarmos o mesmo exemplo teremos: $Log_2\,(4) = Log_2\left(\frac{32}{8}\right) = Log_2\, 32 - Log_2\, 8 = 5 - 3 = 2$, assim $Log_2\,(4) = 2$.

Comentário: O subitem i) tinha como objetivos: reconhecer que subtrações, na progressão aritmética, correspondem a quociente na progressão geométricas e perceber que isso corresponde a propriedade do logaritmo do quociente (OLIVEIRA, 2005).

j) Em qualquer uma das sequências, a duplicação de um termo da PA corresponde a que operação ao termo correspondente da PG?

Corresponde à potenciação onde o expoente é 2, ou seja, se escolhermos na segunda sequência 4 que é o terceiro termo da PA, e duplicarmos teremos: $2 * 4 = 8$, e ao pegarmos 4 o terceiro termo da PG, ou seja, o termo correspondente ao 4 da PA, e elevarmos a 2 temos: $4^2 = 16$. Assim, 16 é o número na PG que corresponde a 8 da PA, ou seja, o logaritmo de 16 na base $\sqrt{2}$ é igual a 8. Isso se deve a propriedade do logaritmo da potência, pois:

$$Log_{\sqrt{2}}\ 16 = Log_{\sqrt{2}}\ 4^2 = \ 2 * Log_{\sqrt{2}} 4 = 2 * Log_{\sqrt{2}}\ 4 = \ 2 * 4\ = 8.$$

Comentário: O subitem j) tinha como objetivos: Revisar as propriedades dos logaritmos a partir do conceito de progressões aritméticas e progressões geométricas; estabelecer uma correspondência entre as progressões aritméticas e geométricas; compreender que as potências de termos da PG são obtidas mediante multiplicação dos termos a eles correspondentes na PA pela razão da PG e perceber que isso corresponde a propriedade do logaritmo da potência (OLIVEIRA, 2005).

Base Nacional Comum Curricular (BNCC): O processo de resolução das atividades sobre Logaritmos e Progressão Aritmética/Progressão Geométrica pode, de acordo com a BNCC, estimular e provocar o processo de reflexão e de abstração, sustentados no modo de pensar criativo, analítico, indutivo, dedutivo e sistêmico. Estas atividades compreendem as seguintes competências específicas e suas habilidades específicas da BNCC:

Competência 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- **Habilidade** (EM13MAT314): Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

Competência 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Competência 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

ITEM 2- LOGARITMOS EM UMA PERSPECTIVA DE JOHN NAPIER (1550 - 1619)

Este item traz uma descrição histórica de como Napier concebeu os logaritmos. Neste sentido é dado um texto de forma que, através da análise e da compreensão deste, é possível completar a tabela proposta e com ela responder os subitens posteriores analisando as progressões aritméticas e geométricas contidas na tabela, identificando a razão em cada uma das progressões.

RESOLUÇÃO DO ITEM 2

a) A partir destas informações, complete a tabela abaixo, fazendo corresponder a cada instante, distâncias Pi B e A’P’i dos pontos P E P’.

Quadro 3 – Logaritmos de Napier com relação a variação do espaço A’P’i e a velocidade do ponto P.

Tempo	A’P’$_i$	P$_i$B
$T_0 = 0$	0	$10^7 = 10000000$
$T_1 = 10^{-7}$	$10^7 * 10^{-7} = 1$	$10^7(1 - 10^{-7}) = 9999999$
$T_2 = 2 * 10^{-7}$	$2 * 10^7 * 10^{-7} = 2$	$10^7(1 - 10^{-7})^2 \cong 9999998$
$\mathrm{T}_3 = 3 * 10^{-7}$	$3 * 10^7 * 10^{-7} = 3$	$10^7(1 - 10^{-7})^3 \cong 9999997$

Fonte: Elaborado pelo o autor, 2022, com base em Oliveira (2005).

Resolução: Perceba que $A'P'_i$ é a variação do espaço, ou seja, quanto o ponto P' se afastou do ponto A' em cada instante de tempo. Já P_iB é a velocidade com que o ponto P está se aproximando do ponto B em cada instante de tempo. Assim, em tempo igual a zero, $A'P'_0 = 0$, pois o ponto P' não se deslocou. Como a velocidade de P é variável e numericamente igual a sua distância ao ponto B, no instante t=0 temos que $P_iB = 10^7$, já que neste instante coincide com o ponto A.

Comentário: Napier, um nobre escocês, dedicou sua vida, entre outros estudos, a simplificar os grandes cálculos presentes tanto em astronomia quanto navegação. Segundo Miguel e Miorim (2002), foi graças ao método de prostaférese e às fórmulas de Johannes Werner (1468-1528), que Napier constatou que era possível transformar produtos em soma usando métodos trigonométricos. Assim, para facilitar os cálculos trigonométricos era conveniente que o primeiro termo da PG fosse o raio do círculo trigonométrico e, para se evitar o uso de frações, o comprimento desse raio era um número elevado, em sua grande maioria em potências de 10. Devido a isso, Napier escolheu 10^7como primeiro termo da PG.

> o sistema neperiano de logaritmos foi construído para fornecer os logaritmos dos senos de todos os ângulos compreendidos entre 0º e 90º e que pudessem ser expressos por números inteiros. Isso porque, como Napier tomou como raio do círculo trigonométrico o número 10^7, o seno de qualquer ângulo compreendido entre 0º e 90º deveria ser maior que ou igual a zero e menor que ou igual a 10^7. Desse modo, os termos de sua PA eram então vistos como os logaritmos dos senos de ângulos compreendidos entre 0º e 90º, ao passo que os termos de sua PG decrescente como os senos desses mesmos ângulos cujo valor máximo seria 10^7 (o primeiro termo da PG), e cujo valor mínimo seria 0 (o último termo da PG). (MIGUEL, MIORIM, 2002, p. 42)

b) Que tipo de progressões formam as sequências $A'P'_i$ e P_i B?

Perceba que $A'P'_i$ é uma sequência de termos que se diferenciam um do outro por um valor constante, ou seja, se pegarmos arbitrariamente a diferença entre o segundo e o primeiro termo e a diferença entre o terceiro e o segundo termo e compararmos, iremos constatar que as diferenças são iguais. termo assim podemos concluir que é uma progressão aritmética. Faremos isso, no próximo subitem.

P_iB é uma progressão geométrica, pois se pegarmos arbitrariamente o quociente entre o segundo e o primeiro termo e o quociente entre quarto e o terceiro termo e compararmos, iremos constatar que os quocientes são iguais. Faremos isso, no próximo subitem.

Comentário: Segundo Miguel e Miorim (2002), com a definição de logaritmos de Napier é possível deduzir que ele se utilizou de um contexto cinemático, apenas para traduzir de forma concreta uma situação puramente aritmética e que o mesmo já conhecia algumas propriedades sobre as correspondências de termos entre PA's e PG's.

c) Qual a razão de cada uma delas?

A'P'$_i$ é uma PA de razão 1, pois $(a_2 - a_1) = 1 - 0 = 1 = 2 - 1 = (a_3 - a_2)$ e P$_i$B é a PG de razão $\frac{a_3}{a_2} = \frac{10^7(1-10^{-7})^2}{10^7(1-10^{-7})} = (1 - 10^{-7}) = \frac{10^7(1-10^{-7})^3}{10^7(1-10^{-7})^2} = \frac{a_4}{a_3}$.

Comentário: Segundo Miguel e Miorim (2002), P$_i$B corresponde ao seno dos ângulos compreendidos entre 0º a 90º, onde o raio da circunferência utilizada por Napier é de 10^7. A'P'$_i$ é o logaritmo dos senos compreendidos entre 0º e 90º, e assim 0 que é o primeiro termo da PA (A'P'$_i$), corresponde a $10000000 = 10^7$, na PG (P$_i$B). Sendo assim, o logaritmo neperiano que denotaremos por Nlog, de 10000000 é igual a zero, ou Nlog 10000000 = 0.

d) Qual a base deste sistema de logaritmos criado por Napier?

O conceito de base não se aplica ao sistema de logaritmos criado por Napier. Miguel e Miorim, supõe por absurdo que b é a base dos logaritmos neperianos.

Assim, para P$_i$B = 0, temos $Nlog_b\, 10000000 = 0 \rightarrow b^0 = 10000000$. O que obviamente é um absurdo, pois qualquer número elevado a 0 é igual a 1.

Agora, para o próximo termo da PA, P$_i$B = 1, temos $Nlog_b\, 10^7(1 - 10^{-7}) = 1 \rightarrow b^1 = b = 10^7(1 - 10^{-7})$.

Para o próximo termo da PA, P$_i$B = 2, temos $Nlog_b\, 10^7(1 - 10^{-7})^2 = 2 \rightarrow b^2 = 10^7(1 - 10^{-7})^2 \rightarrow b = 10^{\frac{7}{2}}(1 - 10^{-7})$, e assim sucessivamente.

Perceba que para P$_i$B = 1 a base $b = 10^7(1 - 10^{-7})$ e para P$_i$B = 2 a base $b = 10^{\frac{7}{2}}(1 - 10^{-7})$. Logo para cada par de termos correlativos da PA e PG leva a uma base diferente.

Comentário: Segundo Miguel e Miorim (2002), devido a sua definição, Napier não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos, já que base tem correlação com a função exponencial que neste período ainda não estava à sua disposição. Para demonstrar isso Miguel e Miorim, supõe por absurdo que exista uma base b, para esse sistema de logaritmos. O primeiro resultado é que a se b fosse base, o primeiro termo da PG seria 1, o que não aconteceu, pois pela definição de Napier é 10^7. Ao continuar analisando alguns pares de termos, os autores constaram que a cada par de termos correlativos da PA e PG leva a uma base diferente.

Base Nacional Comum Curricular (BNCC): O processo de resolução das atividades sobre Logaritmos em uma perspectiva de John Napier pode, de acordo com a BNCC, estimular e provocar o processo de reflexão e de abstração, sustentados no modo de pensar criativo, analítico, indutivo, dedutivo e sistêmicos. Estas atividades compreendem as seguintes competências específicas e suas habilidades específicas da BNCC:

Competência 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- **Habilidade** (EM13MAT314): Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

Competência 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Competência 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

ITEM 3- LOGARITMOS UMA MODIFICAÇÃO NO SISTEMA DE LOGARITMOS DE NAPIER

Propõe-se uma alteração no sistema de logaritmos desenvolvido por Napier, a fim de contornar o subitem c, do item 2. Ou seja, modificar o sistema de logaritmos de Napier de forma que agora esse sistema possua base. Por fim, se pede para completar uma tabela agora em relação às alterações, e com ela solucionando subitens posteriores.

RESOLUÇÃO DO ITEM 3

a) Complete a tabela abaixo:

Quadro 4 – Logaritmos Modificado de Napier com relação a variação do espaço A’P’i e a velocidade do ponto P – Tabela preenchida.

Tempo	$\frac{A'P'_I}{10^7}$	$\frac{P_I B}{10^7}$	Arc sen $\frac{P_I B}{10^7}$
$T_0 = 0$	$0 * 10^{-7} = 0$	$\frac{10^7}{10^7} = 1$	90º
$T_1 = 10^{-7}$	$1 * 10^{-7}$	$\frac{10^7(1-10^{-7})}{10^7} = 0{,}9999999$	89,974376º
$T_2 = 2 * 10^{-7}$	$2 * 10^{-7}$	$\frac{10^7(1-10^{-7})^2}{10^7} = 0{,}9999998$	89,963763º
$T_3 = 3 * 10^{-7}$	$3 * 10^{-7}$	$\frac{10^7(1-10^{-7})^3}{10^7} = 0{,}9999997$	89,955618º

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022, com base em Oliveira (2005).

Comentário: Perceba que, 10^{-7} foi escolhido justamente para que quando o instante T for igual a 0, o termo da PA será 0 e o da PG será 1. Assim, o logaritmo de 1 é 0, como queríamos.

b) As sequências da segunda e da terceira coluna ainda são progressões? Em caso positivo, quais as razões destas progressões?

Sim, ambas ainda são progressões, onde a segunda coluna corresponde a uma PA de razão $a_3 - a_2 = 2 * 10^{-7} - 10^{7} = 10^{7}$ e a terceira coluna a uma PG de razão $\frac{(1-10^{-7})^2}{(1-10^{-7})} = (1 - 10^{-7})$.

Comentário: Perceba que, através da modificação, podemos encontrar uma base para esse logaritmo de Napier. Assim, para descobrirmos a base, basta escolhermos b como possível base, e fazermos o mesmo procedimento que fizemos no subitem c do item 2.
Para $T_0,\ log_b\, 1 = 0 \to b^0 = 1$.
Para T_1: $log_b\, (1 - 10^{-7}) = 10^{-7} \to b^{0,0000001} = (1 - 10^{-7}) \to b\ = (1 - 10^{-7})^{1/0,0000001}$
Para T_2: $log_b\, (1 - 10^{-7})^2 = 10^{-7} \to b^{0,0000002} = (1 - 10^{-7})^2 \to b\ = (1 - 10^{-7})^{2/0,0000002}$
e assim sucessivamente. Perceba, que a base b é a mesma para todos os pares correlatos de PA e PG, sendo $b\ = (1 - 10^{-7})^{1/0,0000001}$ ou $b\ = (1 - 10^{-7})^{10000000}$.

Base Nacional Comum Curricular (BNCC): O processo de resolução das atividades sobre Logaritmos uma modificação no sistema de logaritmos de Napier pode, de acordo com a BNCC, estimular e provocar o processo de reflexão e de abstração, sustentados no modo de pensar criativo, analítico, indutivo, dedutivo e sistêmicos. Estas atividades compreendem as seguintes competências específicas e suas habilidades específicas da BNCC:

Competência 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- **Habilidade** (EM13MAT314): Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

Competência 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Competência 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

ITEM 4- CONSTRUÇÃO DE UMA TABUA DE LOGARITMOS DE BASE 10.

Neste item, há uma descrição de como encontrar os valores aproximados dos logaritmos na base 10 e base 9. Com isso propõe a criação da tábua de valores aproximados dos logaritmos na base 10, dos números de 1 a 9.

RESOLUÇÃO DO ITEM 4

Quadro 5 – Tabua de logaritmos de base 10, conhecidos por logaritmos comuns ou Briggsianos.

$\text{Log}_{10}a$	**≈ x**
$\text{Log}_{10}1$	0
$\text{Log}_{10}2$	0,3
$\text{Log}_{10}3$	0,48
$\text{Log}_{10}4$	0,6

$Log_{10}5$	0,7
$Log_{10}6$	0,78
$Log_{10}7$	0,85
$Log_{10}8$	0,9
$Log_{10}9$	0,96
$Log_{10}10$	1

Fonte: autor, 2022.

Comentário: Com o sucesso do trabalho de Napier com relação aos logaritmos. Um de seus admiradores Henry Briggs (1617), o primeiro professor de geometria de Oxford, em sua visita a Napier, em 1615, propôs o uso de logaritmos através de potências de 10, ou seja, logaritmos na base. Napier, que já havia pensado nisso concordou e ficou estabelecido que log 1 = 0 e $\log 10^{10} = 10$, evitando deste modo frações. Isso implicou que o logaritmo de 10 fosse 1. Com a morte de Napier, em 1617, Briggs estabeleceu em 1619, uma tábua de logaritmos compreendidos entre 1 e 1000. Tais logaritmos se tornaram reconhecidos tanto quanto o de Napier, ficando conhecido como logaritmos comuns ou Briggsianos.

Base Nacional Comum Curricular (BNCC): O processo de resolução das atividades sobre Construção de uma tabua de logaritmos de base 10 pode, de acordo com a BNCC, estimular e provocar o processo de reflexão e de abstração, sustentados no modo de pensar criativo, analítico, indutivo, dedutivo e sistêmicos. Estas atividades compreendem as seguintes competências específicas e suas habilidades específicas da BNCC:

Competência 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Competência 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

- **Habilidade** (EM13MAT403): Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

Competência 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

ITEM 5- SOLUÇÃO DE UM PRODUTO ATRAVÉS DA TABUA DE LOGARITMOS DE BASE 10.

Neste item, utilizando a tabela anterior e das propriedades de logaritmos estudadas no item 1, propõe a solução de um produto.

RESOLUÇÃO DO ITEM 5

5) Com sua tabela de logaritmos na base 10, sem usar a calculadora, como faríamos para calcular $48 * 125$?

Para fazer o cálculo desse produto faremos o logaritmo da multiplicação de 48 por 125.

$$\mathrm{Log}_{10}(48 * 125)$$

Do item 1, temos que logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos de cada termo, logo:

$$\mathrm{Log}_{10}(48 * 125) = \log_{10}48 + \log_{10}125$$

Perceba que 48 é o produto de 8 por 6 e 125 o produto de 5 por 5 por 5, assim:

$$\log_{10}48 + \log_{10}125 = \log_{10}(8 * 6) + \log_{10}(5 * 5 * 5)$$

Novamente, podemos substituir os logaritmos de cada produto pelas somas de cada um dos termos:

$$\mathrm{Log}_{10} 8 + \mathrm{Log}_{10}6 + \mathrm{Log}_{10}5 + \mathrm{Log}_{10}5 + \mathrm{Log}_{10}5$$

Agora utilizando se da tabela, podemos somar cada parcela encontrando o logaritmo do produto de 48 por 125.

$$0{,}9 + 0{,}78 + \ 0{,}7 + 0{,}7 + 0{,}7 \cong 3{,}78 \cong \frac{378}{100}$$

Sabendo que estamos trabalhando com logaritmo de base 10, em notação atual de logaritmos temos que $\log_{10} a = \frac{378}{100}$. Por tanto, o produto que desejamos pode ser obtido através da seguinte potência $a = 10^{\frac{378}{100}} \cong 6025{,}59$, que de fato é próximo do valor exato de $48 * 125 = 6000$.

Base Nacional Comum Curricular (BNCC): O processo de resolução das atividades sobre a solução de um produto através da tabua de logaritmos de base 10 pode, de acordo com a BNCC, estimular e provocar o processo de reflexão e de abstração, sustentados no modo de pensar criativo, analítico, indutivo, dedutivo e sistêmicos. Estas atividades compreendem as seguintes competências específicas e suas habilidades específicas da BNCC:

Competência 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- **Habilidade** (EM13MAT305): Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

Competência 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

- **Habilidade** (EM13MAT403): Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

Competência 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na resolução/discussão da atividade de logaritmos organizada em sequencias didáticas contextualizadas através da história da matemática é possível perceber conceitos e propriedades logarítmicas de maneira mais ampla. Em cada item resolvido e analisado foi discutido suas propriedades, aplicações e correlações entre conceitos que para mim a princípio pareciam ser desconexos uns dos outros, como por exemplo, a relação entre as propriedades dos logaritmos e as operações com pares correlatos de uma PA e PG. Nessa perspectiva, de conceitos, propriedades, formalizações e conteúdos “distintos” relacionados, percebemos as seguintes potencialidades pedagógicas, de Miguel (1997), evidenciadas na atividade:

a. **Possibilitam o esclarecimento e o reforço de muitos conceitos que estão sendo ensinados;**

c. **Permitem mostrar a existência de uma analogia ou continuidade entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente;**

6. **A História constitui-se num instrumento de formalização de conceitos matemáticos**.

Para resolver as questões era necessário saber mais do que as regras atuais de logaritmos, presentes nos livros didáticos do século XXI, por exemplo, transcrever a definição de um livro antigo, de posse de um conhecimento sobre a linguagem matemática atual, foi um grande desafio, que permitiu refletir sobre as dificuldades encontradas ao migrar de uma forma de representação para outra, sobre o mesmo tema: logaritmos. Mas, também sobre como migrar da língua materna para a algébrica e essa para a geométrica.

Percebemos nesta pesquisa, que **a matemática é uma criação humana** sob a perspectiva da potencialidade pedagógica e da BNCC, que **ela é feita pela necessidade e preocupações de uma sociedade e contexto histórico**. Napier e Briggs, na busca por métodos para facilitar ou deixar mais prático as operações matemáticas com números grandes, criaram seus sistemas de logaritmos, auxiliando tanto na astronomia quanto na navegação, que eram importantes áreas para a época. Observamos assim, as razões pelas quais eles fizeram matemática, uma das potencialidades pedagógicas de Miguel (1997), e que há conexões entre a matemática e astronomia, matemática e as navegações. Trata-se sobre ‘**as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo**’, visto que astronomia e navegação nos séculos XVI e XVII, eram preocupações da cultura europeia, período em que Napier e Briggs viveram. Com a resolução da atividade, a contextualização histórica me permitiu fazer uma analogia entre o conceito de logaritmos criado por Napier, os conceitos e as propriedades utilizado no livro de Serrasquiero (1900) e os que estudei em minha vida acadêmica. Desta forma, a história desempenhou o seu potencial pedagógico, Miguel (1997), como '**fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos e informativos a serem incorporados nas aulas de matemática**', que também, '**Permitem mostrar a existência de uma analogia ou continuidade entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente**'.

Na condição de aprendiz, ao resolver a atividade, me senti estimulado durante os dois momentos da pesquisa, Prática IV e TCC, com perguntas e questionamentos quanto as dúvidas e afirmativas apresentadas. Na busca por respostas e esclarecimentos, foi necessário investigar sites e diversas literaturas, discutir as dúvidas, considerar as informações pertinentes e saber descartar as não pertinentes. Nesse sentido, acreditamos que a história da matemática por si só, não é uma fonte de motivação, consideramos necessário que o professor crie uma "atmosfera" didática, para contemplar o quesito motivacional a ela atribuída. Este, visto como umas das potencialidades pedagógicas do uso da história da matemática em sala de aula, '**A História é uma fonte de motivação para o ensino aprendizagem da matemática**' de Miguel (1997).

Ao analisar todos os itens da atividade sob a perspectiva da BNCC, percebemos que estes contemplam vários aspectos solicitados pela Base para o ensino de matemática. Porém, o uso da história em sala de aula se apresenta em uma discussão breve e reduzida:

> Essa percepção da unidade da Matemática, além da diversidade de suas práticas, serve também para mostrar que o desenvolvimento da disciplina é fruto da experiência humana ao longo da **história** [grifo nosso]. Assim, ela não é um edifício perfeito que surgiu pronto da mente de poucos seres privilegiados, a fim de ser estudada para puro deleite intelectual. O desenvolvimento gradual desse campo do saber, por seres humanos inseridos em culturas e sociedades específicas, confere a ela valores estéticos e culturais, e fornece uma linguagem com a qual pessoas de diferentes realidades podem se comunicar, com precisão e concisão, em várias áreas do conhecimento.
>
> Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa **história** [grifo nosso]. (BRASIL, 2017, p. 522)

Em nenhum outro momento o documento discute a respeito da história no ensino de matemática, o termo história da matemática não é mencionado na BNCC. Assim, afirmamos, nesta investigação, que processo de resolução das atividades sobre Logaritmos pode, de acordo com a BNCC, estimular e provocar o processo de reflexão e de abstração, sustentados no modo de pensar criativo, analítico, indutivo, dedutivo e sistêmico. De maneira, a compreender as seguintes competências específicas:

Competência 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Competência 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Competência 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Enfim, como “defensores” da história da matemática em sala de aula, consideramos que a BNCC não contempla de forma expressiva, em suas páginas, o potencial pedagógico da história para o ensino de matemática.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Curricular Comum: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2018.

MATOS, J. M. Apresentação. In: SILVA, M. C. L.; PINTO, T. P. **História da educação matemática e formação de professores: aproximações possíveis**. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p. 19-52.

MICHALOVICZ, S; PACHECO, E. R. **Matemáticos na história: uma proposta pedagógica para o ensino de matemática**. Curitiba: Secretaria de Estado da Educação, 2011. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/699-4.pdf. Acesso em: 21 mar. 2022.

MIGUEL, António. As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zeíeíiké**, Campinas, CEMPEM, v. 5, n. 8, p. 73-105, jul./dez., 1997.

MIORIM, M. Â.; MIGUEL, A. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira**. Natal: SBHMat, 2002.

MOURA, E. C. M.; BRITO, A. J. The history of mathematics in didactic sequences in teacher’s initial formation. **Educação: teoria e prática**, v. 29, n. 62, p. 609-625, 2019. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/educacao/article/view/14103. Acesso em: 31 mar. 2022.

OLIVEIRA, A. J. de. **O Ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica**. Orientadora: BRITO, A. J. 123 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Centro de Ciências Exatas e da Terra – Universidade Federal do Rio Grande do Norte UFRN Natal, RN, 2005.

SOARES, E. C. **Uma investigação sobre logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. Orientador: MENDES, I. A. 141 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Centro de Ciências Exatas e da Terra – Universidade Federal do Rio Grande do Norte UFRN Natal, RN, 2011.

ANEXO I

Logaritmos II

Definição: "Logaritmos são os termos de uma Progressão Aritmética começando por zero, correspondentes aos termos de uma Progressão Geométrica começando pela unidade" (SERRASQUIERO, 1900, p. 320).

1 – Observe a definição anterior. Dadas as sequências:

I) PA: 0 , 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
PG: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

II) PA: 0 , 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
PG: 1 , 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

a) Qual seria, na sequência I, o logaritmo de 8? E na II?
b) O que está fazendo com que as duas correspondências de sequencias sejam diferentes?
c) Qual a base está sendo utilizada na sequência I? e na II?
d) Descreva, em linguagem matemática, a definição acima, determinando as condições de existência dos logaritmos para R.
e) Determine, na primeira sequência, a média aritmética entre o segundo e o sexto termo da PA. Determine a média geométrica entre os termos correspondentes – segundo e sexto – na PG. O que você observa? Este fato é generalizável para os demais termos da sequência I? E para a sequência II?
f) Na sequência II, some os terceiros e quarto termos da PA. Qual o termo correspondente, na PG, a esta soma? Como conseguiríamos este termo da PG utilizando apenas os termos da progressão geométrica?
g) Sabemos que $\sqrt{64} = 8$. O que teríamos que fazer, na sequência I, com o termo da PA correspondente ao termo da PG, 64, para determinarmos, na PA, o termo correspondente ao termo da PG, 8? E na sequência II?
h) A partir das observações anteriores, como determinaríamos, utilizando a PA, sequência I, o logaritmo de $\sqrt{8}$? E na sequência II?
i) Em qualquer uma das sequências, a subtração de dois termos da PA corresponde a

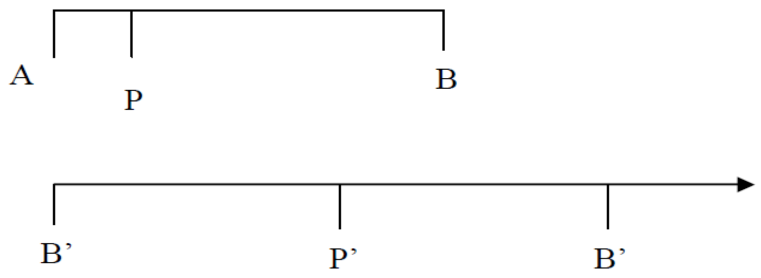
*As atividades desta lista foram elaboradas a partir das informações contidas no livro Os logaritmos na cultura escolar brasileira de MIORIM, M.A e MIGUEL, A. Natal, SBHMat. 2002

que operação com os termos correspondentes da PG?

j) Em qualquer uma das sequências, a duplicação de um termo da PA corresponde a que operação ao termo correspondente da PG?

2 –

Napier em sua obra, publicada em 1619, concebeu os logaritmos a partir de aspectos, simultaneamente, geométrico, cinemático, aritmético, funcional e trigonométrico. Para tal, imaginou uma situação cinemática na qual dois pontos móveis P e P', a partir dos pontos A e A', iniciavam simultaneamente seus movimentos ao longo de duas trajetórias retilíneas AB e A'B', respectivamente. Considerou que AB possuía comprimento fixo de 10^7. A'B' era considerada uma semirreta ao longo da qual eram fornecidos os logaritmos.



Os pontos P e P', porém, não se deslocavam com velocidades iguais: P se deslocava com velocidade variável e, em cada momento, numericamente igual à sua distância ao ponto B. A variação de velocidade de P se dava por um coeficiente constante igual a $(1\text{-}10^{-7})$ em cada intervalo de tempo Δt, escolhido convenientemente. P' se deslocava com velocidade constante e numericamente igual à distância AB, isto é, a 10^7. Napier definia, para cada instante desse movimento coordenado, o logaritmo de cada um dos segmentos P_i B como sendo, respectivamente cada uma das distâncias A' P'_i.

a) A partir destas informações, complete a tabela abaixo, fazendo corresponder a cada instante, distâncias Pi B e A'P'i dos pontos P E P'.

Tempo	$A'P'_i$	PiB
$T_0 = 0$		10^7
$T_1 = 10^{-7}$		
$T_2 = 2.10^{-7}$		

*As atividades desta lista foram elaboradas a partir das informações contidas no livro Os logaritmos na cultura escolar brasileira de MIORIM, M.A e MIGUEL, A. Natal, SBHMat. 2002

b) Que tipo de progressões formam as sequências $A'P'_i$ e $P_i B$?

c) Qual a razão de cada uma delas?

d) Qual a base deste sistema de logaritmos criado por Napier?

3) Vamos realizar uma alteração no sistema de logaritmos de Napier.

a) Complete a tabela abaixo:

TEMPO	$\frac{AP_I}{10^7}$	$\frac{p_I B}{10^7}$	Arc sen $\frac{p_I B}{10^7}$
$T_0 = 0$			
$T_1 = 10^{-7}$			
$T_2 = 2.10^{-7}$			
$T_3 = 3.10^{-7}$			

b) As sequências da segunda e da terceira coluna ainda são progressões? Em caso positivo, quais as razões destas progressões?

4) Vamos construir uma tábua de valores aproximados dos logaritmos, na base 10, dos primeiros nove números inteiros positivos.

Consideremos $2^{10} = 1024$. Onde 1024, difere de 1000 por um erro de 2,4%. Este será o erro de nossos cálculos do log 2.

$2^{10} = 1000$ aproximadamente

$2^{10} = 10^3$ aproximadamente

$2 = 10^{0,3}$ aproximadamente

Portanto, log 2 é 0,3 aproximadamente.

Analogamente, $3^9 = 19683$. Onde 19683 difere de 20000 por um erro de 1,6%.

$3^9 = 20000$ aproximadamente

$3^9 = 10^{0,3} * 10^4$ aproximadamente

$3^9 = 2 * 10000$ aproximadamente

*As atividades desta lista foram elaboradas a partir das informações contidas no livro Os logaritmos na cultura escolar brasileira de MIORIM, M.A e MIGUEL, A. Natal, SBHMat. 2002

$3 = 10^{\frac{4,3}{9}}$ aproximadamente

log3 = 0,48 aproximadamente

Agora, utilizando as propriedades estudadas no 1º exercício desta sequência, calcule os logaritmos dos demais números inteiros positivos de 1 a 9. (Dica: para sete, considere que sete ao quadrado é aproximadamente 50).

5) Com sua tabela de logaritmos na base 10, sem usar a calculadora, como faríamos para calcular $48 * 125$?

*As atividades desta lista foram elaboradas a partir das informações contidas no livro Os logaritmos na cultura escolar brasileira de MIORIM, M.A e MIGUEL, A. Natal, SBHMat. 2002