



UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO-AMERICANA
INSTITUTO LATINO AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA
NATUREZA PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Foz do Iguaçu – Paraná

2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO-AMERICANA
INSTITUTO LATINO AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA
NATUREZA PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

DINÂMICA DE BOLHAS DE AR EM H₂O E GLICERINA

Débora Cristine Menon

Orientador: Prof. Dr. Eduardo do Carmo

Co-orientador: Prof. Dr. Marcelo G. Hönnicke

Foz do Iguaçu-Paraná

2022

DINÂMICA DE BOLHAS DE AR EM H₂O E GLICERINA

Débora Cristine Menon

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada da Universidade Federal da Integração Latino-Americana (PPGFISA-UNILA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em (Física). Orientador: Prof. Dr. Eduardo do Carmo e Coorientador: Prof. Dr. Marcelo G. Hönnicke.

Banca Examinadora

Prof.Dr. Eduardo do Carmo

Prof. Dr. Abraao Jesse Capistrano de Souza

Prof. Dr. Edson Massayuki Kakuno

Foz do Iguaçu-Paraná

2022

M547d

Menon, Débora Cristine.

Dinâmica de bolhas de ar em H₂O e glicerina / Débora Cristine Menon. - Foz do Iguaçu, 2022.
93 fls.: il.

Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada.

Orientador: Eduardo do Carmo.

Coorientador: Marcelo G. Hönnicke.

1. Bolhas (Física). 2. Movimento. I. Carmo, Eduardo do. II. Hönnicke, Marcelo G. III. Título.

CDU 531

Resumo

DINÂMICA DE BOLHAS DE AR EM H₂O E GLICERINA

Débora Cristine Menon

Orientador: Prof. Dr. Eduardo do Carmo

Co-orientador: Prof. Dr. Marcelo G. Hönnicke

Bolhas de ar em água apresentam movimentos ascendentes retilíneos somente quando forem suficientemente pequenas (diâmetro menor que ~ 2 mm). Bolhas maiores seguem trajetórias planares oscilatórias ou espiraladas. Desde Leonardo da Vinci no século XV, as observações científicas desses movimentos tipo zigue-zague desafiam e encantam os cientistas. Atualmente, para o movimento de bolhas com diâmetro maiores que 2 mm, o entendimento é que existe uma transição de um regime unidirecional para um regime espiralado devido a instabilidade do “rastros” deixado pela bolha, que pode causar uma força de deslocamento lateral. Neste trabalho, apresenta-se uma investigação da dinâmica de bolhas de ar em água através de um aparato experimental muito simples: uma coluna de água montada utilizando um tubo de PVC transparente. Na base do tubo é instalada uma agulha pela qual se introduz pequenas porções de ar, formando-se bolhas de diferentes tamanhos. Os movimentos destas bolhas de ar são filmados em câmera lenta (120 frames por segundo) por um *smartphone*. Os vídeos são analisados através de um software de análise gráfica (Tracker). Dessa forma, tem-se acesso direto às amplitudes e períodos da trajetória oscilante das bolhas, bem como de suas velocidades de ascensão e de oscilação. Com tais dados, obtém-se a magnitude da força de deslocamento lateral e um coeficiente de arrasto médio quadrático. Ainda, realiza-se a mesma investigação para várias temperaturas dos líquidos envolvidos buscando-se encontrar relações entre as velocidades limites das bolhas e a temperatura dos líquidos.

Palavras-chave: Dinâmica de bolhas, movimento oscilatório, coeficiente de arrasto.

Foz do Iguaçu-Paraná

2022

*Abstract***BUBBLE DYNAMICS IN WATER AND GLYCERIN**

Débora Cristine Menon

Orientador: Prof. Dr. Eduardo do Carmo

Co-orientador: Prof. Dr. Marcelo G. Hönnicke

Air bubbles in water show linear upward motion only for sufficiently small bubbles (diameter smaller than ~ 2 mm). Larger bubbles follow planar oscillatory or spiral trajectories. The first scientific observations of these “zig-zag” motions were made by Leonardo da Vinci (Leonardo’s paradox) and have, for a long time, challenged scientists by presenting inconsistencies between theoretical predicted results and experimental observation. Currently, for the motion of larger bubbles, the transition from a unidirectional to a spiral regime is explained by the wake instability that produces a lift force. Herein, it is presented a simple investigation of the motion of air bubbles in water and vegetable glycerin: A liquid column was mounted using a transparent PVC tube, by using a syringe needle (at the base of the tube) to introduce the air in the air bubbles of different sizes. The movements of these air bubbles were recorded with a cellular phone video camera in slow motion mode (120 frames per second - fps) and then analyzed using the software Tracker. By the software Tracker we were able to extract the terminal air bubbles velocities, and the amplitudes and periods of the oscillating trajectories. These data allow us to evaluate the lift forces on the bubbles, accountable for the oscillatory movements, as well as the root mean square drag coefficients. The same investigation is also carried out for various liquid temperatures seeking to highlight the contribution of this parameter in the air bubble terminal velocities.

Keywords: bubble dynamics, oscillatory motion, drag coefficient.

Foz do Iguaçu-Paraná

2022

“Não existem sonhos impossíveis para aqueles que realmente acreditam que o poder realizador reside no interior de cada ser humano, sempre que alguém descobre esse poder algo antes considerado impossível se torna realidade”.
ALBERT EINSTEIN.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por ter me dado força necessária para superar obstáculos e a mim mesma proporcionado este momento mágico. Ele, que durante toda a minha vida acadêmica, sempre me ofereceu oportunidades para aperfeiçoar meus conhecimentos.

À minha família, que me apoiou nos momentos de maior dificuldade, quando o cansaço e a tristeza me abalaram. Em especial, ao meu amor que, em todos os momentos, me ajudou. Nos dias mais difíceis em que eu queria desistir, e ele não deixava. Mas, também, nos dias felizes ele estava lá. De forma especial, eu ainda o agradeço por ter me ajudado a montar meu experimento (sempre a parte da engenharia ficava por conta dele).

Também, agradeço aos meus amigos: Diego Galeano, Matheus Santos, Monica Cristina Kalb e Sandy Gonzalez Hernandez, do Curso de Pós-Graduação em Física Aplicada que me ajudaram nos momentos difíceis. Sempre estiveram do meu lado me dando força e me ensinando os conhecimentos de Física Aplicada.

À Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), pela oportunidade de fazer este curso. E, também, aos professores da UNILA: Professor Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza, Professor Dr. Daniel Luiz Nedel, Professor Dr. Eduardo do Carmo, Professor Dr. Marcelo G. Hönnicke, Professor Dr. Luciano Calheiros Lapas e Professor Dr. Márcio de Sousa Góes que me motivaram a buscar novas experiências para me tornar uma profissional com melhores aptidões e me ensinaram coisas maravilhosas em minha concretização profissional.

Aos meus orientadores Professor Dr. Eduardo do Carmo e Professor Dr. Marcelo G. Hönnicke, pela orientação e por serem compreensivos, durante todo este processo de pesquisa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) pela bolsa de estudos.

Sumário

INTRODUÇÃO	17
CAPÍTULO 1: A FÍSICA BÁSICA DOS FLUIDOS	22
1.1. FLUIDOS	22
1.1.1 Grandezas Importantes.....	23
1.1.2 Estática dos Fluidos	24
1.1.3 Noções de Dinâmica dos Fluidos.....	25
CAPÍTULO 2: MODELAGEM MATEMÁTICA E FÍSICA	29
2.1 UM MODELO PARA O MOVIMENTO DE CORPOS ESFÉRICOS ATRAVÉS DE FLUIDOS	29
2.2 MOVIMENTO DE UMA ESFERA EM UM FLUIDO EM REPOUSO	30
2.3 MOVIMENTO DA UMA BOLHA DE AR ESFÉRICA EM ÁGUA À BAIXAS VELOCIDADES	31
2.4 MOVIMENTO DA UMA BOLHA DE AR EM ÁGUA A “ALTAS VELOCIDADES”	35
2.5 MOVIMENTO OSCILATÓRIO DE UMA ESFERA EM UM FLUIDO EM REPOUSO	36
2.5.1 O coeficiente de arrasto médio quadrático para esferas oscilantes	37
2.6 FORÇAS SOBRE UMA ESFERA OSCILANTE	41
2.7 MOVIMENTO DE BOLHAS DE AR EM ZIGUE-ZAGUE	47
CAPÍTULO 3: MATERIAIS E MÉTODOS	52
3.1 ARRANJO EXPERIMENTAL	52
3.1.1 As bolhas de ar em água	54
CAPÍTULO 4: RESULTADOS E DISCUSSÕES	67
4.1 RESULTADOS	67
4.2 DISCUSSÕES	77
CAPÍTULO 5: CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS	80
APÊNDICE A: MASSA ADICIONAL	82
APÊNDICE B: TEORIA DOS ERROS	88
REFERÊNCIAS	92

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1: Esboço de Leonardo da Vinci do movimento de uma bolha ascendente oscilatória. Fonte: PROSPERETTIA A., 2004 [1]..... 17
- Figura 2: Diagrama de fase para a forma de uma bolha. As diferentes regiões são: axissimétrica (círculo), assimétrica (triângulos sólidos) e separação (quadrado). O regime axissimétrico é denominado região I. As duas cores dentro do regime assimétrico representam a região não oscilatória II (mostrada em azul) e a dinâmica da região oscilatória III (verde). As duas cores dentro do regime de separação representam a região de separação periférica IV (amarelo claro) e a região de separação central V (amarelo mais escuro). A linha tracejada-pontilhada vermelha é a linha $Mo = 10 - 3$, acima da qual o movimento oscilatório não é observado em experimentos. São mostradas as formas de bolha típicas em cada região. As formas de bolhas foram transformadas em translúcidas para permitir que o leitor tenha uma visão da forma interna, onde (Ga) é o número de Galilei e (Eo) é o número de Eötvös [2]. Fonte: TRIPATHI *et al.*, 2015 [2]. 20
- Figura 3: Esquema representativo da ação da viscosidade. Fonte: <https://www2.ufjf.br/engsanitariaambiental/files/2012/09/Apostila-de-Mec%C3%A2nica-dos-Fluido>. Acessado em: 14 de janeiro de 2022. 24
- Figura 4: Diferença de pressão hidrostática entre dois pontos abaixo da superfície de um fluido de densidade ρ . Fonte: A autora..... 24
- Figura 5: Empuxo experimentado por um corpo esférico em um fluido. Fonte: A autora. 25
- Figura 6: Demonstra o fluxo laminar e turbulento, calculado através do número de Reynolds. Fonte: <https://pt.lambdageeks.com/reynolds-number/>. Acessado em: 14 de janeiro de 2022. 27
- Figura 7: A primeira figura representa o movimento laminar por onde uma bolha está passando e a segunda figura as linhas pretas representam as paredes de um tubo e as linhas verdes representam o movimento laminar. Fonte: figura 1, <https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=1557654>, acessado em: 14 de janeiro de 2022, figura 2, <https://www.gratispng.com/png-6lbsrf/>. Acessado em: 14 de janeiro de 2022. 28
- Figura 8: A primeira figura representa o movimento turbulento de uma bolha em alto números de Reynolds. E a segunda figura as linhas pretas representam as paredes de um tubo e as linhas verdes representam o movimento turbulento. Fonte: figura 1, <https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=1557654>, acessado em: 14 de janeiro de 2022 figura 2, <https://www.gratispng.com/png-6lbsrf/>. Acessado em: 14 de janeiro de 2022. 28
- Figura 9: Principais forças que atuam em um corpo que se move em um fluido em repouso: Empuxo (E), peso (P) e a força viscosa (D). Aqui h é o eixo que indica a profundidade em que a esfera se encontra. Fonte: A autora. 30
- Figura 10: Forças que causam no movimento de uma bolha pequena: E é o empuxo, P é o peso e D é a força viscosa que é oposto ao movimento, h é o eixo que indica a profundidade. Fonte: A autora. 31
- Figura 11: O gráfico ilustra o movimento da bolha de ar subindo em glicerina. Essa bolha se movia ao longo de uma linha reta, com velocidade constante. Fonte: A autora. 34
- Figura 12: O gráfico ilustra o movimento de uma bolha de ar subindo no óleo com a superfície mantida a uma pressão desprezível. A inclinação da linha contínua está de acordo com o previsto a partir do modelo que pressupõe

escoamento laminar e a manutenção do equilíbrio durante a expansão. Essa bolha se movia ao longo de uma linha reta, mas as bolhas que atingem velocidades mais altas oscilam de um lado para outro com uma frequência bem definida. Fonte: Adaptado do VERMILLION, 1974 [30].	34
Figura 13: Representa a altura onde se encontra a bolha em relação ao tempo. Fonte: A autora.	36
Figura 14: Trajetória oscilante de uma bolha de ar que se movimenta através de uma coluna de água. A imagem foi obtida através nos experimentos do presente trabalho. Fonte: A autora.	36
Figura 15: Representação de um trecho da trajetória oscilante de uma esfera. A figura evidencia o passo dessa trajetória, sua amplitude bem como a força de arrasto que sempre se opõe ao movimento. Fonte: A autora.	37
Figura 16: Trajetória de uma esfera com movimento oscilatório. Fonte: A autora.	37
Figura 17: O gráfico acima foi construído com dados experimentais do trabalho. Esse padrão se repetia sempre e justifica a premissa 2. Fonte: A autora.	38
Figura 18: Representa a diferença entre o empuxo e o peso. Fonte: A autora.	38
Figura 19: Representa as componentes da velocidade nas direções z, y , formando um ângulo α . Essa velocidade é para uma trajetória oscilante definida pelo modelo e não a velocidade experimental. Fonte: A autora.	40
Figura 20: Peso aparente da esfera decomposto em duas componentes, uma paralela ao movimento instantânea da esfera e outra perpendicular. Fonte: A autora.	42
Figura 21: Representa a direção vertical, com o sentido da velocidade, onde u velocidade total de subida e u é a velocidade medida. Fonte: A autora.	42
Figura 22: Representa as direções u e v que são responsáveis pelo movimento oscilatório. Fonte: A autora.	43
Figura 23: Forças na direção da velocidade da esfera, D é a força viscosa que tem sentido oposto à velocidade u . Fonte: A autora.	44
Figura 24: Representação geométrica das forças que atuam na esfera. Fonte: A autora.	45
Figura 25: Componentes da força hidrodinâmica nas direções u e v . Fonte: A autora.	46
Figura 26: A figura representa onde a bolha se encontra dentro do fluido água, onde H é a profundidade inicial, h é altura onde a bolha se encontra e z é a direção. Fonte: A autora.	48
Figura 27: Representação da velocidade da bolha. Fonte: A autora.	49
Figura 28: À direita temos o aparato experimental e à esquerda deiversas bolhas de ar fluindo através de glicerina. Fonte: A autora.	52
Figura 29: Observação do movimento oscilatório de uma bolha extraído do software Tracker. Fonte: A autora.	53
Figura 30: Raio médio de uma bolha obtido através do software Tracker. Fonte: A autora.	53
Figura 31: Materiais usados na montagem do aparato experimental. Fonte: A autora.	54
Figura 32: Representa a divisão das 4 regiões e o tamanho de cada uma das regiões. Fonte: A autora.	55
Figura 33: Observação do movimento oscilatório extraído do Sistema Computacional Tracker. Fonte: A autora.	60
Figura 34: Coeficiente de arrasto médio quadrático pelo raio da bolha da região 1, com temperatura de 70°C , com a análise de 5 bolhas diferentes. Fonte: A autora.	62
Figura 35: Coeficiente de arrasto médio quadrático pelo raio da bolha da região 2, com temperatura de 70°C , com a análise de 5 bolhas diferentes. Fonte: A autora.	63

Figura 36: Coeficiente de arrasto médio quadrático pelo raio da bolha da região 3, com temperatura de 62°C, com a análise de 5 bolhas diferentes. Fonte: A autora.	63
Figura 37: Coeficiente de arrasto médio quadrático pelo raio da bolha da região 4, com temperatura de 55°C, com a análise de 5 bolhas diferentes. Fonte: A autora.	63
Figura 38: Cálculo do coeficiente de arrasto com base no resultado experimental, para uma bolha com raio de 2-3 mm, o coeficiente de arrasto é calculado entre 1,3-1,7. Fonte: Adaptado do M.Y. Shi, <i>et al.</i> ,(2017) [34].....	64
Figura 39: Velocidade constante da bolha na região 1. Fonte: A autora.	68
Figura 40: Velocidade constante da bolha na região 2. Fonte: A autora.	68
Figura 41: Velocidade constante da bolha na região 3. Fonte: A autora.	68
Figura 42: Velocidade constante da bolha na região 4. Fonte: A autora.	69
Figura 43: Movimento oscilatório da bolha na direção y e z e com a melhor curva que passa pelos pontos onde a bolha está oscilando, região 1, com temperatura de 70°C. Fonte: A autora.	69
Figura 44: Movimento oscilatório da bolha na direção y e z e com a melhor curva que passa pelos pontos onde a bolha está oscilando, região 2, com temperatura de 70°C. Fonte: A autora.	70
Figura 45: Movimento oscilatório da bolha na direção y e z e com a melhor curva que passa pelos pontos onde a bolha está oscilando, região 3, com temperatura de 62°C. Fonte: A autora.	70
Figura 46: Movimento oscilatório da bolha na direção y e z e com a melhor curva que passa pelos pontos onde a bolha está oscilando, região 4, com temperatura de 55°C. Fonte: A autora.	70
Figura 47: Representação do coeficiente de arrasto instantâneo segundo a posição da bolha utilizando a velocidade experimental e o ajuste da melhor curva, região 1, os pontos pretos são as velocidades retiradas do software Tracker sem nenhum ajuste. Fonte: A autora.	71
Figura 48: Representação do coeficiente de arrasto instantâneo segundo a posição da bolha utilizando a velocidade experimental e o ajuste da melhor curva, região 2, os pontos pretos são as velocidades retiradas do software Tracker sem nenhum ajuste. Fonte: A autora.	71
Figura 49: Representação do coeficiente de arrasto instantâneo segundo a posição da bolha utilizando a velocidade experimental e o ajuste da melhor curva, região 3, os pontos pretos são as velocidades retiradas do software Tracker sem nenhum ajuste. Fonte: A autora.	72
Figura 50: Representação do coeficiente de arrasto instantâneo segundo a posição da bolha utilizando a velocidade experimental e o ajuste da melhor curva, região 4, os pontos pretos são as velocidades retiradas do software Tracker sem nenhum ajuste. Fonte: A autora.	72
Figura 51: Representa a força total f na direção z, na região 1. Fonte: A autora.	75
Figura 52: Representa a força total f na direção z, na região 2. Fonte: A autora.	75
Figura 53: Representa a força total f na direção z, na região 3. Fonte: A autora.	76
Figura 54: Representa a força total f na direção z, na região 4. Fonte: A autora.	76
Figura 55: Caracterização do movimento oscilatório da bolha segundo a montagem proposta. Fonte: A autora.	77
Figura 56: Representação do comportamento da bolha em relação à suas direções y e z. Fonte: A autora.	77
Figura 57: Representa o modelo de uma bolha, com a força atuando nessa bolha e as dimensões. Fonte: A autora. ...	82

Figura 58: Obtenção da secção reta de um elemento de anel constituído da bolha oposto à direção do fluxo. Fonte: A autora.....83

Figura 59: Representa a largura de um anel que compõem a bolha. Ainda R é o raio, largura do anel (ds) e o ângulo ($d\theta$). Fonte: A autora.....83

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: As principais equações de esferas e bolhas. Fonte: A autora.....	51
Tabela 2: Cálculo da viscosidade e densidade para cada temperatura de análise. Fonte: A autora.	56
Tabela 3: Análise do tamanho da bolha e altura onde a bolha se encontra em relação à base do tubo, 22°C. Fonte: A autora.....	57
Tabela 4: Análise do tamanho da bolha e altura onde a bolha se encontra em relação à base do tubo, 77°C. Fonte: A autora.....	57
Tabela 5: Análise do tamanho da bolha e altura onde a bolha se encontra em relação à base do tubo, com 26°C. Fonte: A autora.....	57
Tabela 6: Análise do tamanho da bolha e altura onde a bolha se encontra em relação à base do tubo, com 61°C. Fonte: A autora.....	57
Tabela 7: Análise do tamanho da bolha e altura do tubo com variação de temperatura 55°C, 62°C e 70°C. Fonte: A autora.....	58
Tabela 8: Análise médio do número de Reynolds com temperatura de 55°C a 70°C, com movimento oscilatório. Fonte: A autora.....	58
Tabela 9: Análise médio do número de Reynolds com temperatura de 22°C, movimento linear. Fonte: A autora.....	59
Tabela 10: Análise médio do número de Reynolds com temperatura de 77°C, movimento linear. Fonte: A autora.....	59
Tabela 11: Análise médio do número de Reynolds com temperatura de 26°C, movimento linear. Fonte: A autora.....	59
Tabela 12: Análise médio do número de Reynolds com temperatura de 61°C, movimento linear. Fonte: A autora.....	59
Tabela 13: Valores do coeficiente de arrasto médio quadrático em relação a velocidade de subida e seu raio. Lembrem os que $\alpha_{máx} = \text{ArcTan } 2\pi\lambda$. Fonte: A autora.	61
Tabela 14: Valores do coeficiente de arrasto médio quadrático em relação a velocidade de subida e seu raio. Lembrem os que $\alpha_{máx} = \text{ArcTan } 2\pi\lambda$. Fonte: A autora.	61
Tabela 15: Valores do coeficiente de arrasto médio quadrático em relação a velocidade de subida e seu raio. Lembrem os que $\alpha_{máx} = \text{ArcTan } 2\pi\lambda$. Fonte: A autora.	62
Tabela 16: Valores do coeficiente de arrasto médio quadrático em relação a velocidade de subida e seu raio. Lembrem os que $\alpha_{máx} = \text{ArcTan } 2\pi\lambda$. Fonte: A autora.	62
Tabela 17: Cálculo do Número de Reynolds de acordo com o raio e a velocidade da bolha. Fonte: A autora.	65
Tabela 18: Cálculo do Número de Reynolds de acordo com o raio e a velocidade da bolha. Fonte: A autora.	65
Tabela 19: Cálculo do coeficiente de arrasto. Fonte: A autora.	66
Tabela 20: Cálculo do coeficiente de arrasto. Fonte: A autora.	66
Tabela 21: Valores das análises experimentais em cada região de observação. Fonte: A autora.	74
Tabela 22: Os seis primeiros polinômios de Legendre. Fonte: NETO, FRANKLIN PEDRO DA SILVA. Polinômios de Legendre e Quadratura Gaussiana, Brasil, 2018.....	85

LISTA DE SÍMBOLOS

A_A = Unidade de Área

a = Aceleração

A = Amplitude

B_0 = Peso Aparente da Esfera/bolha

C_D = Coeficiente de Arrasto

$C_{D,u_{RMS}}$ = Coeficiente de Arrasto Médio Quadrático

$C_{D,u}$ = Coeficiente de Arrasto Real

D = Diâmetro do Tubo

\vec{D} = Força de Arrasto

d = Diâmetro da Esfera/bolha

E = Empuxo

EDP = Equação diferencial Parcial

F = Força

\vec{F}_R = Força Resultante

\vec{F}_D = Força de Arrasto

g = gravidade

H = Profundidade Inicial

h_1 = Altura

h = Profundidade

h_0 = Profundidade Máxima

k = Frequência

k_w = Fator de Correção

l = Comprimento característico do corpo (diâmetro da bolha)

m = Massa

M = Massa Total da bolha

M_e = Massa da Esfera

M_f = Massa do Fluido deslocado

P = Pressão

P_u = Força Hidrodinâmica

P_H = Pressão Hidrostática
 P_l = Polinômio de Legendre
 Re = Número de Reynolds
 R = Raio
 r_1 = Raio da bolha esférica
 r_b = Raio da bolha
SI = Sistema Internacional de Unidades
 T = Temperatura
 t_T = Tempo Total
 t = Tempo
 u_L = Velocidade Terminal
 u_0 = Velocidade de Subida da Esfera/bolha
 u_z = Componente Vertical da Velocidade (medida) da Esfera/bolha
 u = Velocidade Instantânea
 u_{RMS} = Velocidade Terminal média quadrática
 V = Volume
 ΔV = Diferença de Velocidade
 \hat{v} = Versor Velocidade
 y = Espessura
 z = Indica a direção
 ρ_w = Densidade da água
 ρ_e = Densidade da Esfera
 ρ_b = Densidade da Bolha
 ρ_g = Densidade da Glicerina
 ρ = Densidade do Fluido
 μ = Viscosidade Dinâmica
 τ = Tensão de Cisalhamento
 γ = Taxa de Deformação
 η = Viscosidade Cinemática
 λ = Passo

INTRODUÇÃO

A presente dissertação toca em um fenômeno que há muito encanta os físicos: O movimento de bolhas de ar em água. O próprio Leonardo da Vinci (1452 – 1519) documentou este movimento espiralado de uma bolha de ar em água (figura 1) [1] e desde então um grande esforço da comunidade científica vem sendo feito para compreender suas causas [2-3]. Nosso objetivo, ao voltar a esse problema é estudá-lo segundo técnicas de análises modernas, simples e com grande apelo didático-pedagógico.



Figura 1: Esboço de Leonardo da Vinci do movimento de uma bolha ascendente oscilatória. Fonte: PROSPERETTIA A., 2004 [1].

O movimento de bolhas gasosas em fluidos é fato corriqueiro em nosso dia a dia: basta abrir uma cerveja num dia quente ou tomar uma taça de espumante em uma noite agradável para observá-lo. O estudo da dinâmica de bolhas, para a indústria cervejeira e de espumantes, é importante, pois quando os tonéis são abertos após a fermentação destas bebidas acontece um intenso fervilhamento [4-5] e a quantidade de bolhas que chega no copo do consumidor final, afeta o paladar da bebida. Na indústria química o estudo da dinâmica de bolhas é importante, pois é uma eficiente maneira de acelerar reações do tipo gás-líquido por meio da maximização da área de contato [6]. Na indústria do petróleo, o craqueamento catalítico por leito fluidizado opera com uma fase sólida (o catalisador), uma fase líquida de hidrocarbonetos de maior densidade e uma fase gasosa resultante do processo de craqueamento [7-8]. (O craqueamento pode ser definido como um processo químico que transforma frações de cadeia de carbono maiores em frações de cadeia de carbono menores). Além disso, a compreensão da dinâmica de bolhas é muito importante para a indústria farmacêutica tendo em vista a fabricação de medicamentos efervescentes [9], que definem a evolução das bolhas de gás provenientes dos líquidos, sendo o resultado de uma reação química, assim, os reagentes são substâncias não gasosas e o gás

produzido na reação é pouco solúvel e menos denso do que a solução líquida. Quando acontece a efervescência é o indício que aconteceu a transformação química.

Segundo a classificação canônica, a matéria se apresenta em três estados fundamentais: sólido, líquido e gasoso. Os dois últimos são denominados estados fluidos: substâncias que possuem a capacidade de fluir. Do ponto de vista microscópico, um fluido é uma substância formada por moléculas que apresentam coesão intermolecular, mas não ao ponto de conferir-lhe uma forma característica, sendo esta determinada pelo recipiente que o contém [10]. As forças de coesão das moléculas de um gás são pequenas quando comparadas às forças de coesão de um líquido. Isso faz com que um gás ocupe todo o volume do recipiente que o encerra enquanto que um líquido não. Explica-se assim, por exemplo, a razão da densidade dos gases ser menor que a densidade dos líquidos.

Enquanto a peça-chave para a compreensão do movimento das partículas sólidas é a segunda Lei de Newton, para os fluidos, as equações que governam seu fluxo são as equações de Euler e de Navier-Stokes. De fato, a equação de Navier-Stokes é a segunda Lei de Newton aplicada para um elemento de volume do fluido sujeito a forças externas e a forças internas devidas à pressão e ao atrito. Mesmo parecendo ser mais do mesmo, ou seja, mais uma aplicação da segunda Lei de Newton, o problema é muito mais robusto, pois a correlação entre as partículas que compõem o fluido faz surgir efeitos inimagináveis no contexto dos sólidos. Soma-se a esta percepção da complexidade do problema da dinâmica dos fluidos o fato de que a prova de que exista solução aceitável para a equação de Navier-Stokes vale um milhão de dólares [11].

A rigor, nossa investigação trata do movimento de um fluido através de outro, pelo fato da diferença de densidade entre eles. Este movimento é, para fins práticos, intratável do ponto de vista analítico. A equação de Navier-Stokes uma equação diferencial parcial (EDP) não-linear, não pode ser resolvida de forma analítica completa, devido ao fato de que pode haver uma turbulência no movimento da partícula, nem mesmo para um fluxo através de uma esfera e muito menos para um fluxo através de um corpo que se deforma à medida que se move.

Pelo exposto, justifica-se um comentário do ganhador do prêmio Nobel de Física de 1991, Pierre de Gennes, *“pode-se dizer que a dinâmica dos sólidos é difícil, mas a dinâmica dos fluidos é ainda pior. Mesmo modelos muito simples não apresentam solução exata demandando tratamento computacional”* [12]. Por isso, uma investigação científica que também tenha valor do ponto de vista didático deve ser feita no plano de aspectos macroscópicos através de modelos

simplificados que capturem a essência do movimento da bolha.

O método aqui empregado segue, por exemplo, os passos da investigação do papel das forças de arrasto na física do lançamento de projéteis. Sabe-se que se esse problema fosse estudado em toda a sua extensão seria necessário um grande esforço teórico e computacional e então não possuiria qualquer relevância do ponto de vista do ensino ou de ganho de intuição física. Por isso, é que se utilizam modelos simplificados para as forças hidrodinâmicas, que mesmo realizando um recorte mais radical da realidade, ainda são capazes de explicar vários tipos de desvios para as trajetórias parabólicas previstas nos modelos básicos para o lançamento de projéteis [13].

As forças resistivas impostas por um meio fluido ao deslocamento de outro corpo através dele (o arrasto) podem ser de natureza inercial, pelo necessário deslocamento da massa de fluido para a passagem do projétil e de natureza viscosa, pela dissipação energética devido ao movimento relativo entre diversas camadas de fluido. Matematicamente isso é captado por uma força de arrasto proporcional ao quadrado da velocidade no primeiro caso, e proporcional ao módulo da velocidade no segundo [14-15].

Ainda se sabe que o arrasto do tipo viscoso é adequado para modelar movimentos de corpos com baixas velocidades. Enquanto que o arrasto do tipo inercial é adequado para corpos movendo-se a altas velocidades. O parâmetro que permite dizer se a velocidade de um corpo em relação ao meio fluido é grande ou pequena é o número de Reynolds. O número de Reynolds (R_e) é uma grandeza adimensional usada na mecânica dos fluidos para calcular o regime de escoamento de um fluido sobre uma superfície. Ele é obtido através da seguinte equação:

$$R_e = \frac{\rho l u}{\mu} \quad (1)$$

onde ρ é a densidade do fluido, l é um comprimento característico do corpo (diâmetro da bolha), u é a velocidade média e μ é a viscosidade dinâmica [16].

As investigações do movimento oscilatório de bolhas em líquidos em repouso ainda desfrutam de grande interesse na comunidade científica. Especialmente destaca-se o conjunto de trabalhos de Tripathi *et al.*, 2015 [2] e Sharaf *et al.*, 2017 [17] que apresenta um diagrama de fase relacionando o tipo de dinâmica apresentada pela bolha com o seu formato, definindo o número de Galilei (G_a), que é a razão entre a força gravitacional e a força viscosa; o número de Eötvös (E_o), que é a razão entre a força gravitacional e a força de tensão superficial; o Número de

Morton (M_o), que é um número adimensional utilizado na conjuntura do número de Eötvös que caracteriza a forma de uma bolha (figura 2) e também o trabalho de V. Mathai *et al.*, 2017 [18] que apresenta o mecanismo responsável pela oscilação de um cilindro que se movimenta através de um fluido, mecanismo este dependente da massa e do momento de inércia relativos do cilindro.

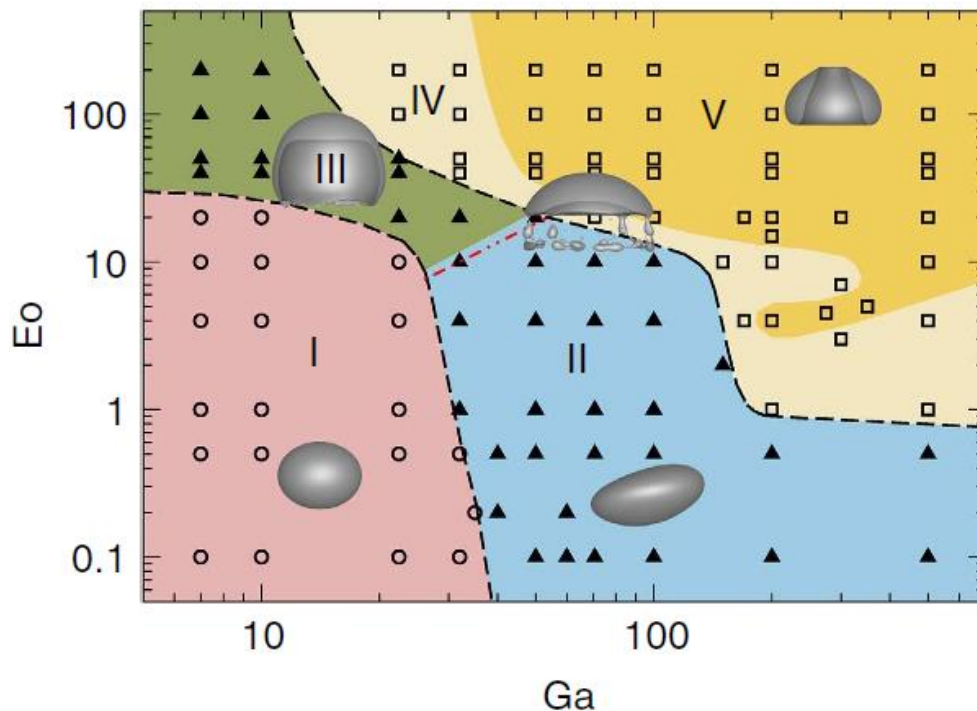


Figura 2: Diagrama de fase para a forma de uma bolha. As diferentes regiões são: axissimétrica (círculo), assimétrica (triângulos sólidos) e separação (quadrado). O regime axissimétrico é denominado região I. As duas cores dentro do regime assimétrico representam a região não oscilatória II (mostrada em azul) e a dinâmica da região oscilatória III (verde). As duas cores dentro do regime de separação representam a região de separação periférica IV (amarelo claro) e a região de separação central V (amarelo mais escuro). A linha tracejada-pontilhada vermelha é a linha $M_o = 10^{-3}$, acima da qual o movimento oscilatório não é observado em experimentos. São mostradas as formas de bolha típicas em cada região. As formas de bolhas foram transformadas em translúcidas para permitir que o leitor tenha uma visão da forma interna, onde (G_a) é o número de Galilei e (E_o) é o número de Eötvös [2]. Fonte: TRIPATHI *et al.*, 2015 [2].

Em síntese, a presente dissertação apresenta uma investigação do movimento ascendente de uma bolha de ar em água, focando principalmente no movimento oscilatório observado em algumas situações. Faz-se isso com a preocupação de tornar tal estudo útil do ponto de vista didático-pedagógico. Tal investigação não toca nos grandes problemas teóricos referentes à hidrodinâmica, mas contempla o tripé investigativo da física atual: uma montagem experimental, uma análise computacional, tudo isso aliado a uma formulação teórica.

A montagem experimental é bastante simples, mas ainda sim permite o uso de métodos

computacionais para se obter as amplitudes, período, raio médio, velocidades e acelerações das bolhas oscilantes, enfim, uma completa caracterização do movimento. Com isso, por exemplo, somos capazes de determinar as intensidades das forças que atuam sobre as bolhas, bem como seu coeficiente de arrasto [19-20]. Para tornar a investigação mais abrangente, investiga-se também o papel da temperatura na dinâmica das bolhas, buscando-se estabelecer relações entre velocidades limites da água e para a glicerina com suas respectivas temperaturas.

O arranjo experimental consiste de um tubo de PVC transparente de 1,5 polegada (38,1 mm) de diâmetro interno, que é preso à uma estrutura de madeira graduada; na parte inferior desse tubo é acoplada, por meio de uma rolha, uma agulha com 0,35 mm de diâmetro interno à qual estava ligada à uma seringa, por meio de um tubo elástico. Neste tubo de PVC coloca-se água ou glicerina e através da agulha injetam-se bolhas de ar. O movimento dessas bolhas é filmado através da câmera de um *smartphone*. Então os vídeos são estudados através do uso do *software* de análise de vídeos *Tracker* [21]. Este *software* permite mapear as trajetórias e obter os parâmetros físicos que caracterizam o movimento. Contudo, os dados obtidos são exportados para o *software Mathematica* [22] que fornece análises numéricas mais robustas além de gráficos de melhor qualidade.

Em síntese os objetivos da presente dissertação são:

- Propor e montar um experimento simples para a visualização do movimento de bolhas em um fluido utilizando uma câmera de celular de alta velocidade.
- Correlacionar os resultados experimentais das imagens com os cálculos teóricos para a dinâmica do movimento das bolhas.
- Determinar as intensidades das grandezas de interesse físico.

Em termos de estrutura, esta dissertação, além desta introdução, o primeiro capítulo apresenta uma discussão sobre a física básica dos fluidos. O segundo capítulo propõe um modelo físico para análise dos dados experimentais obtidos. O terceiro capítulo descreve a montagem experimental e apresenta os dados, os gráficos e imagens obtidas. No quarto capítulo encontra-se uma discussão sobre os resultados obtidos e em seguida as considerações finais, apêndices e referências.

CAPÍTULO 1: A FÍSICA BÁSICA DOS FLUIDOS

Este capítulo traz uma breve discussão sobre os conceitos de física básica dos fluidos e uma introdução à dinâmica de bolhas de ar em água, na qual faremos uma breve introdução sobre as grandezas mais importante da física básica e da física avançada. E dos principais cálculos encontrados na literatura para o desenvolvimento dos modelos que serão abordados no decorrer do trabalho.

1.1. FLUIDOS

A dinâmica dos fluidos corresponde à área da física que estuda o movimento dos fluidos (líquidos e gases). Por se tratar de fenômeno em escala macroscópica, um fluido é reconhecidamente um meio contínuo. Isso significa que um pequeno elemento de volume do fluido contém uma grande quantidade de moléculas [23].

O problema que nos toca consiste no deslocamento de um fluido através de outro: uma bolha de ar em água ou em glicerina. A investigação do comportamento da bolha continua sendo um campo importante da dinâmica dos fluidos [19]. Sua compreensão é de importância crescente em vários processos industriais, como por exemplo, nas indústrias petrolífera e farmacêutica, pois existem inúmeros processos industriais que requerem a adição de gases em líquidos, resultando no surgimento de bolhas tanto individualmente quanto em uma nuvem de interação [24-25].

A rigor a formulação da dinâmica dos fluidos é realizada através de funções que fornecem a distribuição de velocidades $u = u(x, y, z, t)$ de um elemento de volume e de um par de quantidades termodinâmicas, como por exemplo a pressão $p(x, y, z, t)$ e a densidade $\rho(x, y, z, t)$, para um modo geral, mas nos capítulos seguintes a velocidade será analisada somente na direção x de forma constante. Dessa forma o estado do fluido em movimento está completamente determinado [23].

A hipótese de continuidade aqui assumida implica que os fluidos são sistemas clássicos. Explicando melhor, esta hipótese é suportada por três premissas [26]:

1. Os fluidos são meios isotrópicos. Em outras palavras, não existe direção privilegiada em um fluido.
2. O fluido é Newtoniano. Isso quer dizer que existe uma relação linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação local. Isto foi primeiramente postulado por Isaac

Newton. Ainda se postula que existe uma relação também linear entre a densidade de fluxo de calor local e o gradiente de temperatura.

- Os fluidos são sistemas clássicos. Em outras palavras, o movimento macroscópico de fluidos ordinários é bem descrito pela dinâmica newtoniana, sendo que os efeitos quânticos e relativísticos podem ser ignorados.

Podemos notar que as hipóteses anteriores não são válidas para todos os tipos de fluidos, por exemplo, certos polímeros líquidos, que não são isotrópicos, fluidos como geleia ou tinta, que não são newtonianos e fluidos quânticos, como o hélio líquido, que exibem efeitos não clássicos em escalas de comprimento macroscópicas. Assim, várias aplicações práticas da mecânica dos fluidos envolve o equilíbrio e o movimento de corpos em água ou ar. Tais corpos são muito bem descritos como fluidos isotrópicos, newtonianos e clássicos [26].

De modo geral, passa-se a destacar as principais grandezas e equações da física para os fluidos [23].

1.1.1 Grandezas Importantes

Para um fluido as grandezas de maior interesse físico são:

- A densidade (ρ): razão da massa (m) do fluido pelo respectivo volume (V) (no SI ($\rho = \frac{kg}{m^3}$) [27].

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.1)$$

- A pressão (P): razão da força (F) exercida em uma unidade de área pela correspondente unidade de área (A_A), (no SI ($P = Pa = \frac{N}{m^2}$) [27].

$$P = \frac{F}{A_A} \quad (1.2)$$

- A viscosidade dinâmica (μ) do fluido: A viscosidade mede o quanto um fluido resiste a um escoamento. Ela é medida através do coeficiente de viscosidade do fluido (μ) obtida através da relação,

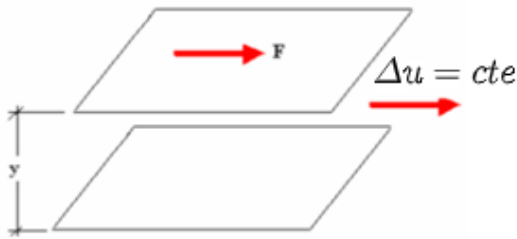


Figura 3: Esquema representativo da ação da viscosidade. Fonte: <https://www2.ufjf.br/engsanitariaambiental/files/2012/09/Apostila-de-Mec%C3%A2nica-dos-Fluidos>. Acessado em: 14 de janeiro de 2022.

$$F = \mu \cdot A_A \cdot \frac{\Delta u}{y} \quad (1.3)$$

onde, F é a força tangencial aplicada a uma área A_A de uma camada do fluido com espessura y e Δu é a diferença de velocidade entre as faces opostas dessa camada (figura 3). No presente caso μ é o coeficiente de viscosidade dinâmica ou absoluta do fluido. (Nota-se que μ apresenta grande dependência com a temperatura).

1.1.2 Estática dos Fluidos

A hidrostática estuda a relação da pressão exercida por um fluido como função de sua densidade e da profundidade do ponto em análise.

Dado um fluido em repouso de densidade ρ em um meio sujeito a uma gravidade g , temos que a diferença de pressão hidrostática (P_H) entre dois pontos com uma diferença de profundidade $y_1 - y_2$, que é representada pela figura 4 e equação (1.4):

$$P_H = \rho g(y_1 - y_2) \rightarrow [P_H] = Pa \quad (1.4)$$

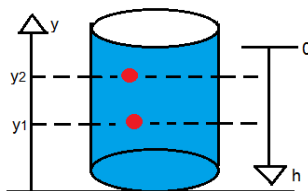


Figura 4: Diferença de pressão hidrostática entre dois pontos abaixo da superfície de um fluido de densidade ρ . Fonte: A autora.

Como a pressão aumenta com a profundidade ocorre que corpos imersos em fluidos experimentam uma força ascendente, o empuxo (\vec{E}), que é dada por [27] e é representada na

figura 5:

$$\vec{E} = \rho V g \hat{y} \rightarrow [\vec{E}] = N \quad (1.5)$$

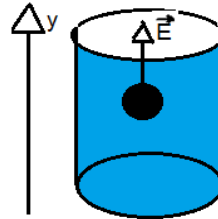


Figura 5: Empuxo experimentado por um corpo esférico em um fluido. Fonte: A autora.

A descoberta da força de empuxo se deve a Arquimedes que percebeu que tal força é igual ao peso do fluido deslocado.

1.1.3 Noções de Dinâmica dos Fluidos

A dinâmica dos fluidos é um assunto complicado, o que justifica a imensa quantidade de trabalhos de caráter computacional com modelos complicados e em contextos bem específicos. Assim destacam-se aqui somente as principais equações [23].

Equação da continuidade. Esta equação oferece a conservação da massa do fluido em fluxo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0. \quad (1.6)$$

onde $\rho \equiv \rho(x, y, z, t)$ é a densidade do fluido e $u \equiv u(x, y, z, t)$ é a sua velocidade. Esta equação implica que a variação temporal local da densidade do fluido corresponde a um deslocamento do fluido para os arredores da posição inicial, isto tudo para um modo geral para a equação (1.6).

Equação de Euler. Equação mais simples para o movimento de um fluido – desconsidera-se o campo gravitacional

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1.7)$$

onde p é a pressão. O oposto do gradiente da pressão, no lado direito, fornece a força sobre o elemento de volume e os termos do lado esquerdo fornecem a aceleração deste elemento de volume. Fica claro então que esta relação nada mais é que a aplicação da segunda Lei de Newton para um elemento de volume do fluido.

Esta equação não leva em conta a dissipação de energia (devido ao atrito interno do fluido) a viscosidade e qualquer troca de calor entre as partes dos fluidos. Fluidos em que os efeitos de condutividade térmica e de viscosidade podem ser desprezados são denominados de fluidos ideais. Nesse contexto, aparece a equação de Bernoulli que corresponde ao princípio de conservação de energia para um elemento de volume. Porém os fenômenos hidrodinâmicos são irreversíveis que implica em dissipação de energia entre as diversas camadas do próprio fluido à medida que este se movimenta, a este atrito interno, como já mencionado, chama-se viscosidade (η) do fluido.

Equação de Navier- Stokes. A fim de incluir os efeitos da viscosidade dos fluidos na descrição matemática do movimento dos fluidos, deve-se modificar a equação de Stokes

$$F_r = 6\pi\eta r u , \quad (1.8)$$

dando origem à equação de Navier-Stokes para um fluido incompressível,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 u . \quad (1.9)$$

Resolver a equação (1.9) não é uma tarefa trivial, porque não é comum de ser resolvida por ter vários parâmetros que podem ser derivadas de outras equações e por isso que diversos modelos foram introduzidos para captar os efeitos mais evidentes, sobretudo no que se refere ao movimento de corpos através de meios fluídos viscosos.

Força de arrasto. Consiste da força de resistência ao movimento de um objeto em um meio fluído (líquido ou gás), sua força é sempre oposta ao movimento do objeto no meio. E é dada pela seguinte equação:

$$D = \frac{1}{2} C_d A_A \rho u^2 , \quad (1.10)$$

onde C_d é o coeficiente de arrasto sofrido pelo fluido, A_A é a área da secção reta (πr^2), u é a velocidade do objeto em relação ao fluido.

A força de arrasto não é uma equação fundamental da dinâmica dos fluidos, mas possui a qualidade de concatenar vários efeitos que em conjunto são muito importantes para o lançamento de projéteis e a aerodinâmica, por exemplo. Por isso será de fundamental importância para o que segue do presente trabalho.

A título didático, neste ponto é adequado indicar que costumasse classificar a força de arrasto em arrasto de atrito/viscoso e arrasto de pressão, nomes esses dados em termos de suas

causas. No presente estudo foca-se nos efeitos do arrasto de atrito que, em última instância, se deve à força de atrito/viscoso sobre a camada de fronteira do fluido.

Número de Reynolds. Este número adimensional é um critério para se determinar se um fluido apresenta fluxo completamente estável/simples, também conhecido como laminar, onde as camadas de fluido se deslocam paralelamente umas às outras; ou turbulento, onde as camadas do fluido se deslocam de maneira aleatória, umas em relação às outras, que são representadas na figura 6.

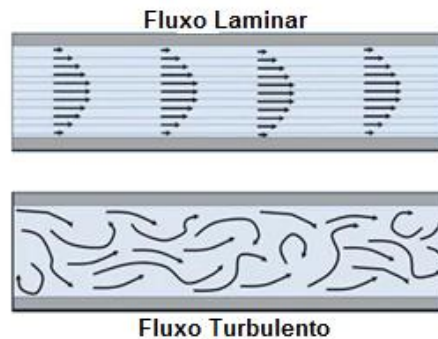


Figura 6: Demonstra o fluxo laminar e turbulento, calculado através do número de Reynolds. Fonte: <https://pt.lambdageeks.com/reynolds-number/>. Acessado em: 14 de janeiro de 2022.

Se o número de Reynolds de um fluido fluindo em um tubo é menor que 2000, seu fluxo em geral é laminar, se é maior que esse valor, em geral ele é turbulento. De fato, a transição entre um fluxo laminar e um fluxo turbulento não ocorre em um valor definido, mas geralmente em um intervalo entre 1000 e 2000 [28].

Em 1883 o físico Osborne Reynolds [28] demonstrou que a velocidade média do fluido (u), vezes o diâmetro do tubo (d) multiplicado pela densidade de massa do fluido (ρ), tudo isso dividido pela viscosidade do fluido (μ) gerava um número adimensional que passou a ser utilizado em vários contextos para se classificar o tipo de fluxo:

$$Re = \frac{u d \rho}{\mu} . \quad (1.11)$$

Do ponto de vista matemático, a equação de Navier-Stokes por mais minuciosa que seja para analisar o fluxo de um fluido, é muito difícil de ser aplicada para fluxos arbitrários. Assim, o número de Reynolds pode determinar o tipo de fluxo onde a equação de Navier-Stokes pode ser útil, ou seja, ser resolvida.

No contexto de uma bolha movendo-se através de um fluido u , o número de Reynolds é obtido considerando-se u como a velocidade da bolha em relação ao fluido, e d como sendo o

diâmetro médio da bolha em questão (obtido computacionalmente). Para uma visualização mais ilustrativa as duas figuras abaixo mostram os movimentos de duas bolhas através de um fluido. A figura 7 apresenta uma bolha movendo-se através de um fluido com uma velocidade pequena. Isso implica em fluxo laminar e número de Reynolds pequeno. Por outro lado, a figura 8 apresenta uma bolha movendo-se através de um fluido em “altas” velocidades, o que implica em fluxo turbulento caracterizado por um número de Reynolds grande.



Figura 7: A primeira figura representa o movimento laminar por onde uma bolha está passando e a segunda figura as linhas pretas representam as paredes de um tubo e as linhas verdes representam o movimento laminar. Fonte: figura 1, <https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=1557654>, acessado em: 14 de janeiro de 2022, figura 2, <https://www.gratispng.com/png-6lbsrf/>. Acessado em: 14 de janeiro de 2022.

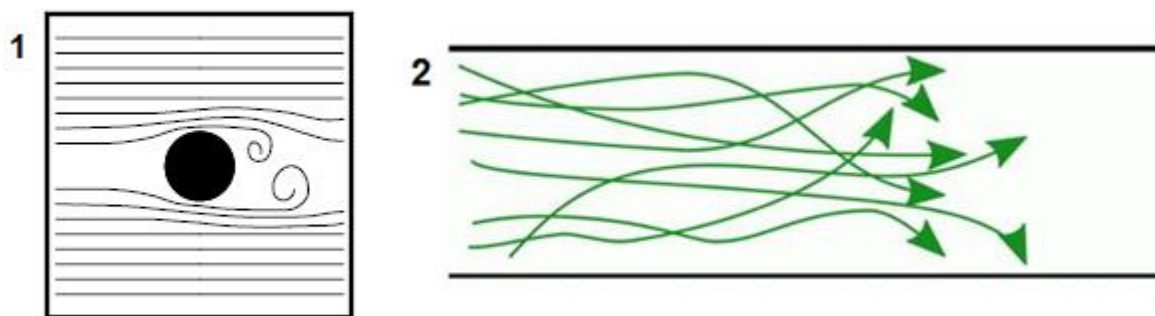


Figura 8: A primeira figura representa o movimento turbulento de uma bolha em alto números de Reynolds. E a segunda figura as linhas pretas representam as paredes de um tubo e as linhas verdes representam o movimento turbulento. Fonte: figura 1, <https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=1557654>, acessado em: 14 de janeiro de 2022 figura 2, <https://www.gratispng.com/png-6lbsrf/>. Acessado em: 14 de janeiro de 2022.

CAPÍTULO 2: MODELAGEM MATEMÁTICA E FÍSICA

Este capítulo contém as ferramentas teóricas que permitirão analisar os dados experimentais coletados. O leitor encontrará resultados clássicos da literatura para o movimento de esferas e bolhas de ar em líquidos, mais alguns outros desenvolvimentos adaptados ao problema de interesse.

2.1 UM MODELO PARA O MOVIMENTO DE CORPOS ESFÉRICOS ATRAVÉS DE FLUIDOS

Passamos a considerar o movimento de corpos esféricos através de fluidos estáticos e viscosos. Todo corpo ao se mover através de um fluido sofre a ação de uma força que se opõe ao seu movimento. Desde muito tempo várias investigações experimentais sugerem dois regimes de forças resistivas para o movimento de corpos sólidos esféricos através de fluidos [14]:

1. Quando o corpo se movimenta a baixas velocidades, a força resistiva é modelada através da Lei de Stokes.

$$\vec{D} = -6\pi\eta r\vec{u} \quad (2.1)$$

onde \vec{D} é força de arrasto, η é a viscosidade cinemática ($\frac{Ns}{m^2}$), r é o raio do corpo e \vec{u} é a sua velocidade em relação ao fluido.

2. Quando o corpo se movimenta à velocidades mais elevadas classicamente utiliza-se um outro modelo com a força de arrasto \vec{D} sendo proporcional ao quadrado da velocidade do corpo [13]:

$$\vec{D} = -\frac{1}{2}\rho_w A_A C_D u\vec{u} \quad (2.2)$$

onde ρ_w é a densidade da água (caso este seja o meio fluido através do qual a esfera se move), C_D é o coeficiente de arrasto é um número adimensional, $A_A (= \pi r^2)$ é a área da secção reta e \vec{u} é a velocidade.

O coeficiente de arrasto (C_D) pode ser determinado experimentalmente e é usual apresentar seus valores graficamente em função de outro parâmetro adimensional, o número de Reynolds, que representa as condições de escoamento do fluido [29]. O coeficiente de arrasto é um parâmetro de grande relevância pois condensa parâmetros complexos como força, inclinação

do eixo de simetria do corpo em relação à direção do fluxo e condições de fluxo.

2.2 MOVIMENTO DE UMA ESFERA EM UM FLUIDO EM REPOUSO

As principais forças que atuam em uma esfera maciça de massa m e volume V , que se move através de um fluido de densidade ρ e à temperatura T são seu peso para baixo, o empuxo para cima e uma força viscosa no sentido oposto ao movimento. No caso de a densidade da esfera ser menor que a do fluido tem-se que as forças são dispostas como indicado na figura 9.

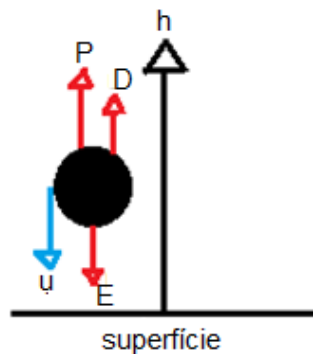


Figura 9: Principais forças que atuam em um corpo que se move em um fluido em repouso: Empuxo (E), peso (P) e a força viscosa (D). Aqui h é o eixo que indica a profundidade em que a esfera se encontra. Fonte: A autora.

A equação de Newton para esse movimento é:

$$\vec{F}_R = \vec{P} + \vec{F}_D + \vec{E} = m\vec{a} \quad (2.3)$$

$$mg + F_D - \rho_w Vg = -ma \quad (2.4)$$

onde g é a gravidade, ρ_w é a densidade da água, e m , a e V são respectivamente, a massa, a aceleração e o volume do corpo esférico ($= \frac{4}{3}\pi r^3$). A notação vetorial foi abandonada pelo fato de inicialmente considerar-se apenas um movimento unidimensional.

- Regime de baixas velocidades:

$$mg - \rho_w Vg + 6\pi\eta r u_L = -m \frac{du}{dt} \quad (2.5)$$

Percebe-se que após algum tempo, com o aumento de velocidade da esfera, essas forças se equilibram e uma velocidade terminal u_L é alcançada:

$$mg - \rho_w Vg + 6\pi\eta r u_L = 0 \quad (2.6)$$

Fazendo as manipulações necessárias, temos que:

$$u_L = \frac{2}{9} \left(\frac{-\rho_e + \rho_w}{\eta} \right) g r^2 \quad (2.7)$$

onde ρ_e densidade da esfera.

- Regime de altas velocidades:

$$mg - \rho_w V g + \frac{1}{2} \rho_w \pi r^2 C_D u_L^2 = 0 \quad (2.8)$$

onde u_L é a velocidade limite que é diretamente proporcional ao raio (r), a gravidade (g).

Agora a velocidade limite é dada por

$$u_L = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{r g}{\rho_w C_D} (-\rho_e + \rho_w)} \quad (2.9)$$

2.3 MOVIMENTO DA UMA BOLHA DE AR ESFÉRICA EM ÁGUA À BAIXAS VELOCIDADES

Considera-se o movimento de uma pequena bolha de ar em água ou em glicerina enquanto sobe lentamente em direção à superfície. Neste caso, o fluxo da água ao redor da bolha é laminar e irrotacional. Por isso observa-se um movimento ascendente em linha reta. As bolhas maiores podem subir mais rápido apresentando movimentos mais complicados podendo ser, por exemplo, oscilatórios planares ou helicoidais e serão estudadas mais adiante [30].

Considere uma situação ideal onde somente as forças indicadas na figura 10 atuam em uma bolha que se move através de uma amostra de água. Especificamente cada força é dada por,

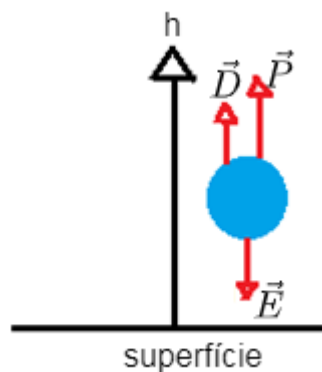


Figura 10: Forças que causam no movimento de uma bolha pequena: E é o empuxo, P é o peso e D é a força viscosa que é oposto ao movimento, h é o eixo que indica a profundidade. Fonte: A autora.

- Empuxo. Segundo a orientação indicada na figura 10, o empuxo é dado por

$$-\vec{E} = \rho_w \vec{g} V . \quad (2.10)$$

- Peso.

$$\vec{P} = m \vec{g} . \quad (2.11)$$

- Força viscosa.

$$\vec{D} = D(-\hat{v}) . \quad (2.12)$$

onde D é o módulo da força de arrasto viscoso e \hat{v} é um versor que indica a direção do movimento.

Como anteriormente, a equação de Newton para esse movimento é:

$$\vec{F}_R = \vec{P} + \vec{D} + \vec{E} = m \vec{a} , \quad (2.13)$$

Fazendo as substituições necessárias temos que:

$$mg + D - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_w g = ma . \quad (2.14)$$

Apesar da semelhança com a equação (2.4) que é para uma esfera sólida, a equação (2.14) que é para uma bolha de ar, guarda sutilezas bem mais profundas. Isso porque à medida que esta bolha sobe ela experimenta uma pressão cada vez menor, considerando uma temperatura constante durante a subida, e isso faz com que o seu volume aumente. Se por um lado um aumento do volume provoca um aumento do empuxo, por outro, há também um aumento da área de secção reta da bolha, o que aumenta a força de arrasto. Assim fica evidente que este problema é muito mais interessante que o problema da esfera sólida se movimentando pelo fluido.

Devido à pequena massa das bolhas de ar, pode-se aproximar o lado direito da equação (2.14) a zero, como indicado na referência [30]. Nota-se que agora não se está exigindo que o lado direito seja nulo pelo fato da bolha ter atingido uma velocidade limite, ou seja, sem aceleração, mas sim por se tratar de uma porção muito pequena de ar que possui uma massa desprezível (a densidade do ar é cerca de mil vezes menor que a da água). Reescrevendo a equação (2.14), temos:

$$mg + D - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_w g = 0 . \quad (2.15)$$

Utilizamos a equação (2.1) para a força viscosa,

$$mg - 6\pi\eta r \frac{dh}{dt} - \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_w\right)g = 0 . \quad (2.16)$$

Após algumas manipulações feitas na equação (2.16), temos,

$$\frac{2}{3}r^2g(\rho_b - \rho_w) - 3\eta \frac{dh}{dt} = 0. \quad (2.17)$$

Considera-se, como já mencionado, que a variação de volume sofrida pela bolha esférica se deve à variação da pressão. Assume-se aqui que tal pressão é a mesma experimentada por uma bolha na mesma profundidade, mas em repouso, ou seja, uma pressão hidrostática, a aproximação hidrostática incorre em um erro de pressão de 0,1 %. Considerando que a subida da bolha se dá à temperatura constante, e utilizando a aproximação dos gases ideais, temos que,

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2, \quad (2.18)$$

onde P e V são respectivamente a pressão e o volume.

Utilizando a equação (1.4) para a pressão hidrostática pode-se escrever:

$$\rho_w g h_1 \frac{4}{3} \pi r_1^3 = \rho_w g h_2 \frac{4}{3} \pi r_2^3. \quad (2.19)$$

Fazendo as simplificações necessárias temos,

$$r_2^3 = \frac{h_1 r_1^3}{h_2} \Rightarrow r_2 = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{\frac{1}{3}} r_1, \quad (2.20)$$

onde r_1 é o raio da bolha esférica em uma dada profundidade h_1 .

Assim, finalmente temos a seguinte equação diferencial para o movimento ascendente da bolha

$$dh = -\frac{2}{9} \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h^{\frac{3}{3}}} r_1^2 g \frac{\rho_w}{\eta} dt, \quad (2.21)$$

sendo h_1 uma altura em que se conhece o raio r_1 da bolha e η é a viscosidade cinemática da água. Integrando a equação (2.21), temos,

$$h^{\frac{5}{3}} = -\frac{10}{27} \frac{h_1^{\frac{2}{3}} r_1^2 g \rho_w}{\eta} t + h_0^{\frac{5}{3}}, \quad (2.22)$$

onde h_0 é a profundidade máxima da bolha, aquela de onde ela inicia seu movimento ascendente.

Quando a bolha chegar na superfície, $h = 0$,

$$0 = -\frac{10}{27} \frac{h_1^{\frac{2}{3}} r_1^2 g \rho_w}{\eta} t_T + h_0^{\frac{5}{3}}, \quad (2.23)$$

onde t_T é o tempo total de movimento da bolha. Este é dado por

$$t_T = \frac{27}{10} \frac{h_0^{\frac{5}{3}} \eta}{h_1^{\frac{2}{3}} r_1^2 g \rho_w} . \quad (2.24)$$

Os dados experimentais podem ser comparados com a equação (2.22) verificando sua validade e determinando grandezas de interesse físico do fluido. Que podemos representar na figura 11, na qual temos altura $(h^{\frac{5}{3}})$ pelo tempo (t) .

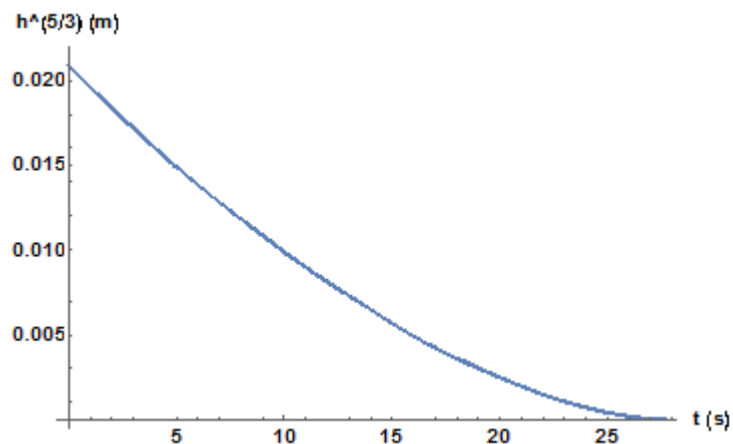


Figura 11: O gráfico ilustra o movimento da bolha de ar subindo em glicerina. Essa bolha se movia ao longo de uma linha reta, com velocidade constante. Fonte: A autora.

Destaca-se nesse ponto o trabalho de Vermillion [30], onde uma investigação experimental foi realizada para confrontar tais resultados teóricos com uma bolha de ar movendo-se em um meio fluido. Veja a figura 12.

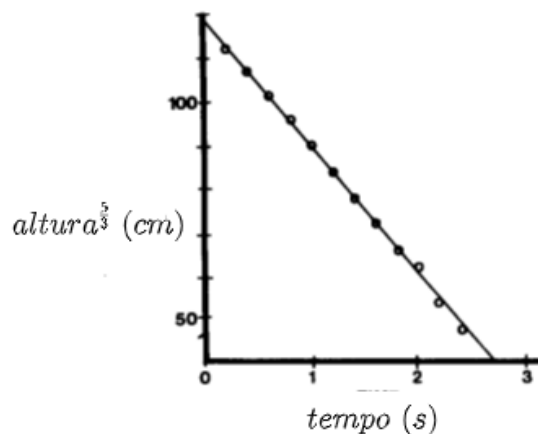


Figura 12: O gráfico ilustra o movimento de uma bolha de ar subindo no óleo com a superfície mantida a uma pressão desprezível. A inclinação da linha contínua está de acordo com o previsto a partir do modelo que pressupõe escoamento laminar e a manutenção do equilíbrio durante a expansão. Essa bolha se movia ao longo de uma linha reta, mas as bolhas que atingem velocidades mais altas oscilam de um lado para outro com uma frequência bem definida. Fonte: Adaptado do VERMILLION, 1974 [30].

2.4 MOVIMENTO DA UMA BOLHA DE AR EM ÁGUA A “ALTAS VELOCIDADES”

Passamos a investigar o movimento de bolhas que se movem com velocidades maiores. Contudo, em um estágio inicial, consideremos somente trajetórias retilíneas. A equação de movimento passa a ser:

$$m \cdot g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_w g + \frac{1}{2} \rho_w \pi r^2 C_D u^2 = m \cdot a \quad (2.25)$$

Seguindo a mesma estratégia da seção 2.3, como a massa da bolha é muito pequena, pode-se fazer,

$$-\frac{4}{3} r g + \frac{1}{2} C_D u^2 = 0 \quad (2.26)$$

de onde temos,

$$\frac{C_D u^2}{r} = \frac{8g}{3} \quad (2.27)$$

Considerando a pressão hidrostática exercida na bolha pode-se escrever a equação (2.27) e substituindo no raio da equação (2.20), temos:

$$C_D h^{\frac{1}{3}} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 = \frac{8}{3} g r_1 h_1^{\frac{1}{3}}, \quad (2.28)$$

onde h_1 é uma altura em particular onde conhecemos o raio da bolha (r_1).

Com a equação (2.28), havendo acesso à velocidade da bolha pode-se determinar o coeficiente de arrasto da bolha em função da velocidade e da posição. Ainda, integrando-se a equação diferencial (2.28) deixando-se o parâmetro C_D livre obtêm-se

$$h^{\frac{7}{6}} = -\frac{7}{6} \sqrt{\frac{8gr_1 h_1^{\frac{1}{3}}}{3C_D}} t + h_0^{\frac{7}{6}}. \quad (2.29)$$

Assim a equação (2.29) é a altura onde a bolha se encontra e h_0 é a profundidade do início do movimento da bolha.

Esse resultado pode ser comparado com os resultados obtidos no experimento, como podemos observar na figura 13.

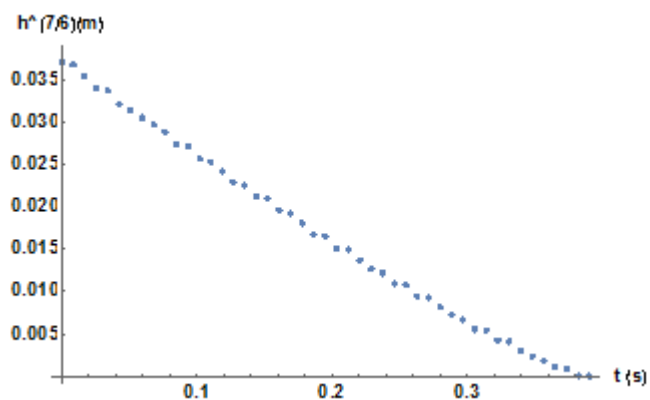


Figura 13: Representa a altura onde se encontra a bolha em relação ao tempo. Fonte: A autora.

2.5 MOVIMENTO OSCILATÓRIO DE UMA ESFERA EM UM FLUIDO EM REPOUSO

Passamos ao caso de maior interesse físico, o de corpos com simetria esférica que se movimentam em meio fluido apresentando movimento oscilatório. Antes de lidar com o movimento de bolhas oscilantes apresentaremos um tipo de modelagem para o movimento de esferas em meio aquoso. Neste caso, observa-se o movimento oscilatório, mas não é necessário se preocupar com a variação do volume do corpo à medida que ele se desloca. Esferas e bolhas que se movimentam através de fluidos com movimento oscilatório intrigam os estudiosos da área desde Leonardo da Vinci (figura 14).

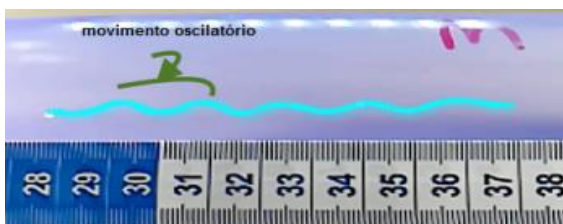


Figura 14: Trajetória oscilante de uma bolha de ar que se movimenta através de uma coluna de água. A imagem foi obtida através nos experimentos do presente trabalho. Fonte: A autora.

A literatura indica que as esferas e bolhas pequenas não apresentam movimento oscilatório quando imersas em líquidos mais densos, mas que as maiores sim. No caso das bolhas, ainda há a complicação de que a deformação também é um fator determinante no tipo de movimento observado [30-19]. Para esferas com raio inferior a 9,208 mm o movimento

observado é retilíneo e as maiores apresentam movimento oscilatório ou helicoidal [31]. No que se refere às bolhas temos que, as com raio menor que 1,5 mm, apresentam movimento retilíneo e, as com raio maiores que 1,5 mm, apresentam movimento oscilatório [30].

2.5.1 O coeficiente de arrasto médio quadrático para esferas oscilantes

O modelo dinâmico utilizado para descrever o movimento de esferas oscilantes consiste em considerar a ação das forças peso, empuxo, força de arrasto e uma força hidrodinâmica lateral responsável pela mudança de direção no movimento da esfera que se deseja determinar a intensidade (figura 15). Essa força hidrodinâmica deve conjugar várias causas para esse movimento oscilatório é um dos objetivos é determinar sua magnitude.

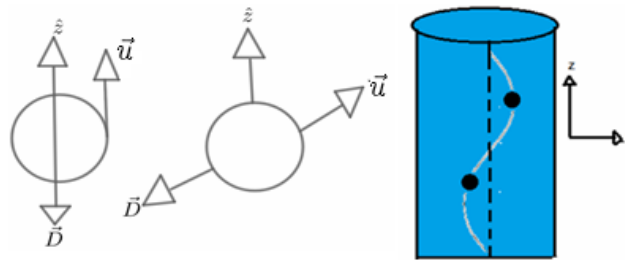


Figura 15: Representação de um trecho da trajetória oscilante de uma esfera. A figura evidencia o passo dessa trajetória, sua amplitude bem como a força de arrasto que sempre se opõe ao movimento. Fonte: A autora.

A equação que exprime a força de arrasto é:

$$\vec{D} = \frac{1}{2} AC_D \rho_w u^2 (-\hat{v}) \quad (2.30)$$

Nesta seção seguiremos a referência [31], para a modelagem do movimento da esfera.

Premissas do Modelo:

1^o) Trajetória senoidal da esfera (figura 16):

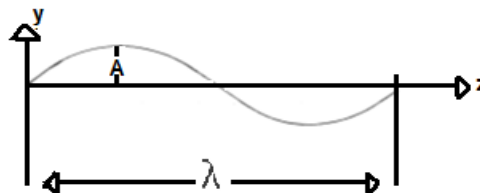


Figura 16: Trajetória de uma esfera com movimento oscilatório. Fonte: A autora.

A equação que rege a trajetória da esfera é dada por

$$y = A \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} z, \quad (2.31)$$

2^o) Componente vertical da velocidade constante.

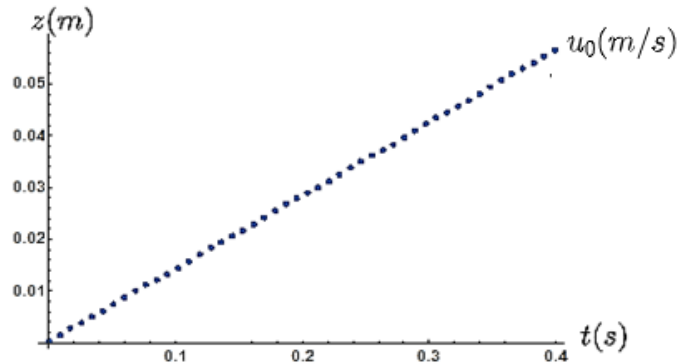


Figura 17: O gráfico acima foi construído com dados experimentais do trabalho. Esse padrão se repetia sempre e justifica a premissa 2. Fonte: A autora.

Nossos dados experimentais corroboram essas duas primeiras premissas para o caso de uma bolha oscilante (u_0) (figura 17), assim temos que,

$$z = u_0 t, \quad (2.32)$$

com $u_0 =$ constante.

3^o) Relação entre o arrasto e o empuxo

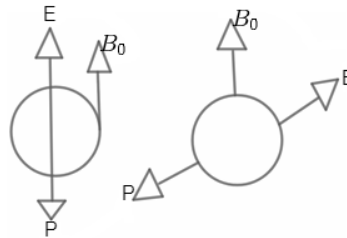


Figura 18: Representa a diferença entre o empuxo e o peso. Fonte: A autora.

Considere a figura 18 que indica a força vertical resultante e o arrasto em um dado instante do movimento da esfera oscilante. Designa-se por B_0 o peso aparente da esfera (diferença entre o empuxo e o peso),

$$-P + E = B_0, \quad (2.33)$$

com

$$B_0 = \frac{4}{3} \pi r^3 g \rho_w \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w} \right). \quad (2.34)$$

Como a força de arrasto sempre se opõe à velocidade do corpo, no instante indicado ela forma um ângulo α com a vertical. Então assume-se a hipótese de um movimento estável ao longo da trajetória oscilatória indicado por

$$D = B_0 \cos \alpha. \quad (2.35)$$

Quando lidarmos com as bolhas, a interrelação da modelagem apresentada com os experimentos é fornecida pelos dados obtidos através de filmagens analisadas com o sistema computacional Tracker (z por t).

Por exemplo, o ângulo α instantâneo é obtido através dos dados experimentais para a velocidade u (figura 19), tal que:

$$\cos \alpha = \frac{u_z}{u} \rightarrow u = \frac{u_z}{\cos \alpha} \quad (2.36)$$

onde u_z é a componente vertical da velocidade da esfera e u a sua velocidade instantânea – ambas podem ser obtidas experimentalmente.

Com o modelo definido, através da premissa 3 e da definição da força de arrasto temos,

$$\frac{1}{2} \pi r^2 C_D \rho_w u^2 = \frac{4}{3} \pi r^3 g \rho_w \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w}\right) \cos \alpha. \quad (2.37)$$

Para que possamos encontrar o coeficiente de arrasto, manipulando a equação (2.37) e substituindo em u^2 a equação (2.36) obtemos a relação

$$C_D = \frac{8 r g \cos^3 \alpha}{3 u_z^2} \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w}\right). \quad (2.38)$$

Para que os dados do coeficiente de arrasto sejam precisos, precisamos levar em consideração “o atrito” que é a influência das paredes do tubo que tem diâmetro finito. Tal correção é oferecida pelas referências [14 e 31] que apresentam um coeficiente de correção (k_w) dado por

$$k_w = 1 - 0,23 \frac{d}{D}, \quad (2.39)$$

onde d é o diâmetro da esfera e D é o diâmetro do tubo [31]. Esse fator de correção deve multiplicar a velocidade medida conforme a referência [14]. Assim finalmente temos,

$$C_D = \frac{8 r g}{3 u_z^2} \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w}\right) k_w^2 \cos^3 \alpha. \quad (2.40)$$

A fim de obter um coeficiente de arrasto médio para o movimento da esfera, dado seu movimento oscilatório, deve-se considerar sua velocidade (figura 19),

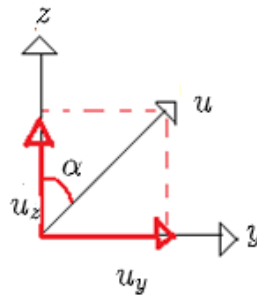


Figura 19: Representa as componentes da velocidade nas direções z, y , formando um ângulo α . Essa velocidade é para uma trajetória oscilante definida pelo modelo e não a velocidade experimental. Fonte: A autora.

A velocidade da esfera inscrita em termos de suas componentes é,

$$\vec{u} = u_y \hat{y} + u_z \hat{z} \quad (2.41)$$

como,

$$u_y = \operatorname{tg} \alpha \cdot u_z \quad (2.42)$$

temos,

$$\vec{u} = u_z (\operatorname{tg} \alpha \hat{y} + \hat{z}). \quad (2.43)$$

O módulo de \vec{u} é dado pelo produto escalar,

$$u^2 = u_z^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1). \quad (2.44)$$

Derivando a equação da trajetória (premissa 1) da equação (2.31) com respeito ao tempo, temos

$$u_y = -A \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{\lambda} z \right) \frac{dz}{dt} \quad (2.45)$$

Da premissa 2, temos

$$\frac{dz}{dt} = u_z, \quad (2.46)$$

Fazendo a divisão das equações (2.46) e (2.45) temos,

$$\frac{u_y}{u_z} = -A \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{\lambda} z \right) \quad (2.47)$$

Então,

$$\operatorname{tg} \alpha = -A \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{\lambda} z \right), \quad (2.48)$$

A equação (2.48) oferece a relação entre o ângulo correspondente ao máximo valor da componente horizontal que a velocidade da esfera faz com a direção vertical e a posição ascendente da esfera. Definindo-se

$$tg \alpha_{max} = A \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.49)$$

temos,

$$tg \alpha = -tg \alpha_{max} \cdot sen \left(\frac{2\pi}{\lambda} z \right). \quad (2.50)$$

Assim pode-se obter uma relação para o módulo da velocidade da esfera com a posição. Relacionando-se a equação (2.50) com a equação (2.44), temos

$$u^2 = u_0^2 \left[1 + tg^2 \alpha_{max} \cdot sen^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} z \right) \right]. \quad (2.51)$$

Pode-se tomar a média da equação (2.51) no intervalo de uma oscilação obtendo-se assim uma velocidade média quadrática u_{RMS} [32] o que nos oferece.

$$u_{RMS} = \left[\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda u_0^2 \left[1 + tg^2 \alpha_{max} sen^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} z \right) \right] dz \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.52)$$

temos,

$$u_{RMS} = u_0 \left[1 + \frac{1}{2} tg^2 \alpha_{max} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.53)$$

Com tal resultado pode-se definir um coeficiente de arrasto médio quadrático ($C_{D,u_{RMS}}$) dado por:

$$C_{D,u_{RMS}} = \frac{8}{3} \frac{rg}{u_0^2 \left[1 + \frac{1}{2} tg^2 \alpha_{max} \right]} \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w} \right) k_w^2. \quad (2.54)$$

2.6 FORÇAS SOBRE UMA ESFERA OSCILANTE

Nesta seção estudaremos as forças que atuam em uma esfera em movimento oscilatório. Novamente, seguindo-se a referência [31], inicia-se estabelecendo as premissas fundamentais da análise que possuem justificativa nos dados experimentais.

Premissas:

1º) Força de arrasto viscoso (D),

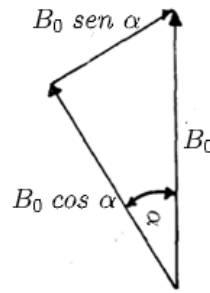


Figura 20: Peso aparente da esfera decomposto em duas componentes, uma paralela ao movimento instantânea da esfera e outra perpendicular. Fonte: A autora.

Por hipótese, temos a força de arrasto (D) que é igual à componente do peso aparente (B_0) na direção do movimento (figura 20),

$$D = B_0 \cos \alpha \quad (2.55)$$

com,

$$B_0 = g\rho_w \frac{4}{3} \pi r^3 \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w}\right). \quad (2.56)$$

2º) Trajetórias da esfera oscilante dada por

$$y = A \cos \frac{2\pi z}{\lambda}, \quad (2.57)$$

onde A é a amplitude e λ é o passo em uma oscilação total.

3º) Velocidade de ascensão constante

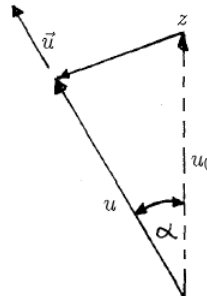


Figura 21: Representa a direção vertical, com o sentido da velocidade, onde \vec{u} velocidade total de subida e u é a velocidade medida. Fonte: A autora.

$$z = u_0 t, \quad (2.58)$$

onde z indica a direção vertical, u_0 velocidade vertical constante – confirmada pelos experimentos com as bolhas (figura 21).

De acordo com a premissa 1 e fazendo uso das equações (2.2), (2.55) e (2.56), temos

$$\frac{1}{2} C_D \rho_w \pi r^2 u^2 = g \rho_w \frac{4}{3} \pi r^3 \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w}\right) \cos \alpha . \quad (2.59)$$

Define-se então a velocidade instantânea segundo o modelo por

$$u = \sqrt{\frac{8 r g}{3 C_D} \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w}\right) \cos \alpha} , \quad (2.60)$$

$$u = u_0 \sqrt{\cos \alpha} , \quad (2.61)$$

onde $\sqrt{\frac{8 r g}{3 C_D} \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w}\right)} = u_0$ que é a velocidade da esfera na direção vertical considerada constante pela premissa 3.

Por outro lado, seguindo as observações experimentais, temos que a componente vertical da velocidade de uma esfera relaciona-se com seu módulo por

$$u_z = \cos \alpha u \Rightarrow u = \frac{u_z}{\cos \alpha} . \quad (2.62)$$

Comparando-se a equação (2.61) com a equação (2.62), verifica-se que

$$u_0 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} u_z , \quad (2.63)$$

onde $u_0 > u_z$.

Com isso, podemos escrever a segunda Lei de Newton para as direções \hat{u} e \hat{v} buscando-se obter as forças hidrodinâmicas em cada direção que são responsáveis pelos movimentos oscilatórios (figura 22)

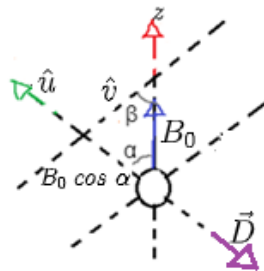


Figura 22: Representa as direções \hat{u} e \hat{v} que são responsáveis pelo movimento oscilatório. Fonte: A autora.

De acordo com a figura 22 podemos representar as componentes na direção \hat{u} e \hat{v} :

- Para a direção \hat{u} (figura 23):

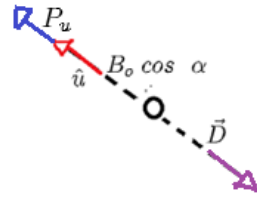


Figura 23: Forças na direção da velocidade da esfera, \vec{D} é a força viscosa que tem sentido oposto à velocidade \hat{u} .
Fonte: A autora.

A segunda Lei de Newton para a direção do movimento é

$$B_0 \cos \alpha - D + P_u = M \frac{du}{dt}. \quad (2.64)$$

Aqui, é necessário enfatizar um fato comum no movimento de corpos se movimentando em meios viscosos, a massa M do lado esquerdo da equação (2.64) não se trata somente da massa inercial da esfera, mas também de fluido que se move solidariamente à esfera,

$$M = M_e + M_f, \quad (2.65)$$

onde M_e é a massa da esfera e M_f é a massa do fluido se deslocando junto a ela. Essa massa recebe o nome de massa adicional e para uma esfera pode ser deduzida (veja o apêndice A).

Fazendo uso da primeira premissa temos que a equação (2.64) fica:

$$P_u = M \frac{du}{dt} \quad (2.66)$$

$\frac{du}{dt}$ pode se obtido derivando a equação (2.61) em relação ao tempo

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} (u_0 \sqrt{\cos \alpha}) = -\frac{u_0}{2} \frac{\text{sen } \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}} \frac{d\alpha}{dt}, \quad (2.67)$$

Sabemos que,

$$\text{tg } \alpha = -\frac{A \cdot 2\pi}{\lambda} \text{sen} \left(\frac{2\pi z}{\lambda} \right). \quad (2.68)$$

Derivando ambos os lados da equação (2.68) em relação ao tempo temos,

$$\frac{d}{dt} \text{tg } \alpha = -\frac{d}{dt} \frac{A \cdot 2\pi}{\lambda} \text{sen} \left(\frac{2\pi z}{\lambda} \right) \quad (2.69)$$

Com,

$$\frac{d\alpha}{dt} = -u_0 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 A \cos \left(\frac{2\pi z}{\lambda} \right) \cos^2 \alpha. \quad (2.70)$$

Das equações (2.67) e (2.70) temos,

$$\frac{du}{dt} = \frac{u_0^2}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \cos^3 \alpha \operatorname{sen} \alpha, \quad (2.71)$$

Assim, P_u é dado por,

$$P_u = M \cdot \left(\frac{u_0^2}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \cos^3 \alpha \operatorname{sen} \alpha \right) \quad (2.72)$$

Ressalta-se que P_u é a força hidrodinâmica na direção da velocidade u da esfera que contribui para o surgimento do movimento oscilatório de uma esfera em água. Note que P_u pode ser dividida em duas partes:

1^o) Que não depende de α e podemos chamar de f_0 :

$$f_0 = \frac{u_0^2}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right). \quad (2.73)$$

2^o) e uma que depende de α indicada por $h_1(\alpha)$:

$$h_1(\alpha) = \cos^3 \alpha \operatorname{sen} \alpha, \quad (2.74)$$

então,

$$P_u = M \cdot f_0 \cdot h_1(\alpha). \quad (2.75)$$

- Para a direção \hat{v} :

A fim de dar mais clareza ao tratamento geométrico consideremos a figura 24 para as forças e velocidade envolvidas. Para a direção \hat{v} para a segunda Lei de Newton é,

$$B_0 \operatorname{sen} \alpha + P_v = M \frac{dv}{dt} \equiv F_v, \quad (2.76)$$

onde F_v é a força resultante na direção de \hat{v} ,

$$F_v = m \cdot a_v \Rightarrow F_v = m \frac{dv}{dt}. \quad (2.77)$$

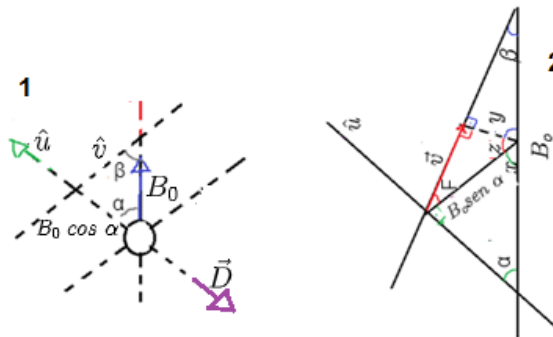


Figura 24: Representação geométrica das forças que atuam na esfera. Fonte: A autora.

A fim de se determinar a componente \hat{v} da velocidade da partícula considere a figura 24, com $u = u_0 \sqrt{\cos \alpha}$ pode-se aplicar a lei dos cossenos e obter, $v = u_0 \sqrt{1 + \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha^{\frac{3}{2}}}$.

Então, a segunda Lei de Newton para a direção \hat{v} fica,

$$B_0 \operatorname{sen} \alpha + P_v = M \cdot \frac{d}{dt} \left(u_0 \sqrt{\cos \alpha + 1 - 2 \cos^2 \alpha^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2.78)$$

Logo, a componente da força hidrodinâmica na direção \hat{v} , P_v que contribui para o movimento oscilatório é dada por,

$$P_v = M \cdot \left(-\frac{u_0^2}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot A \cdot \cos \left(\frac{2\pi u_0 t}{\lambda} \right) \right) \left(\frac{-\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 3 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sqrt{\cos \alpha}}{\sqrt{\cos \alpha + 1 - 2 \cos^2 \alpha^{\frac{3}{2}}}} \right) \quad (2.79)$$

$$+ B_0 \operatorname{sen} \alpha .$$

Enfatiza-se que M é a massa da esfera mais a massa adicional dada no apêndice A.

Em síntese, encontrou-se as componentes da força hidrodinâmica responsável pelo movimento oscilatório nas direções \hat{u} e \hat{v} . Para se obter o módulo desta força pode-se escrever cada uma delas em termos de suas componentes z e y e realizar a soma, representada na figura 25.

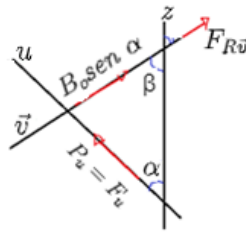


Figura 25: Componentes da força hidrodinâmica nas direções \hat{u} e \hat{v} . Fonte: A autora.

As decomposições de F_v e F_u , na direção z e y , são:

$$F_v = F_v (\operatorname{sen} \beta \hat{y} + \cos \beta \hat{z}), \quad (2.80)$$

$$F_u = F_u (-\operatorname{sen} \alpha \hat{y} + \cos \alpha \hat{z}). \quad (2.81)$$

O peso aparente que está na direção \hat{v} ($B = B_0 \operatorname{sen} \alpha$) possui componentes z e y dadas por

$$B = B (\cos \alpha \hat{y} + \operatorname{sen} \alpha \hat{z}). \quad (2.82)$$

Então, podemos encontrar a força resultante total:

$$F_T = F_v + F_u \quad (2.83)$$

Com,

$$F_T = (F_v \text{sen } \beta - F_u \text{sen } \alpha)\hat{y} + (F_v \text{cos } \beta - F_u \text{cos } \alpha)\hat{z}. \quad (2.84)$$

Chamamos de:

$$F_1 = (F_v \text{sen } \beta - F_u \text{sen } \alpha), \quad (2.85)$$

$$F_2 = (F_v \text{cos } \beta - F_u \text{cos } \alpha). \quad (2.86)$$

Podemos calcular o módulo desta força:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 \quad (2.87)$$

Após alguma álgebra, temos que a força hidrodinâmica responsável pelo movimento oscilatório é dada por

$$\vec{F}_R = (F_v \text{sen } \beta - F_u \text{sen } \alpha + B \text{cos } \alpha)\hat{y} + (F_v \text{cos } \beta + F_u \text{cos } \alpha + B \text{sen } \alpha)\hat{z} \quad (2.88)$$

Com módulo dado por

$$F_R = \left(\left(\frac{1}{2} C_D \rho_w \pi r^2 u_0^2 \text{sen } \alpha \right)^2 + f_0^2 (h_1^2(\alpha) + h_2^2(\alpha) - 2h_1 h_2 \text{cos}(\alpha + \beta)) - (C_D \rho_w \pi r^2 u_0^2 \text{sen } \alpha f h_2 \text{sen}(\alpha + \beta)) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.89)$$

onde demonstremos os termos

$$f_0 = -M \cdot \frac{u_0^2}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot A \cdot \text{cos} \left(\frac{2\pi z}{\lambda} \right), \quad (2.90)$$

e também

$$h_1(\alpha) = \frac{(3\sqrt{\text{cos } \alpha} - 1) \cdot \text{cos}^2 \alpha}{\sqrt{\sqrt{\text{cos } \alpha + 1 - 2 \cdot \text{cos}^{\frac{3}{2}} \alpha}}}. \text{sen } \alpha. \quad (2.91)$$

2.7 MOVIMENTO DE BOLHAS DE AR EM ZIGUE-ZAGUE

Até o momento, estamos estudando uma esfera se movimentando através de um fluido. Para uma esfera a transição entre o movimento retilíneo e um oscilatório depende do seu tamanho, que não muda, e de sua velocidade [31].

Um tratamento rigoroso do problema do movimento de uma bolha em meio fluido deveria ser feito através da equação de Navier-Stokes, mas isso, como já visto, não é viável. Vamos então

utilizar uma modelagem baseada no que foi apresentado nas seções 2.3, 2.4 e 2.5, buscando dar conta da variação do volume da bolha, à medida que sobe, pela consideração da pressão hidrostática.

Premissas do modelo:

1^a) A bolha é perfeitamente esférica à medida que se movimenta.

2^a) Relação entre o arrasto e o empuxo:

$$D = E \cos \alpha , \quad (2.92)$$

note que, aqui aparece o empuxo e não o peso aparente. Isso se deve ao fato do peso da bolha ser desprezível frente ao empuxo que ela experimenta.

3^a) Trajetória perfeitamente oscilatória.

$$y = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} z \quad (2.93)$$

4^a) Velocidade é ascendente constante, $z = \text{constante}$.

Dada pela equação,

$$z = u_0 t \quad (2.94)$$

Com u_0 constante.

5^a) Variação do raio da bolha dado pela relação

$$r = \left(\frac{h_1}{h} \right)^{\frac{1}{3}} r_1 , \quad (2.95)$$

ou seja, há uma transformação isotérmica no gás que constitui a bolha, gás este considerado como ideal e que está sujeito a uma pressão dada pela relação clássica da hidrostática (ver equação 2.20).

Depois de ter elencado as premissas acima da seção 2.7, vamos analisar a figura 26, para desenvolver as equações para o caso em estudo.

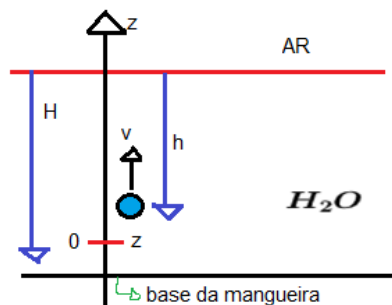


Figura 26: A figura representa onde a bolha se encontra dentro do fluido água, onde H é a profundidade inicial, h é altura onde a bolha se encontra e z é a direção. Fonte: A autora.

Observando a figura 26, podemos tirar algumas informações sobre o comportamento da bolha de ar dentro do fluido (água).

$$H = z + h \quad (2.96)$$

Então, podemos dizer que se z aumenta, h diminui, até que H chega a zero, podemos aplicar a derivada dos dois lados da equação (2.96),

$$0 = dz + dh \Rightarrow dz = -dh. \quad (2.97)$$

Aplicando a premissa 2,

$$C_D = \frac{8 r_z g}{3 u^2} \cos \alpha \quad (2.98)$$

A fim de obter um coeficiente de arrasto através dos dados experimentais, pode-se escrever a velocidade da bolha em termos da componente z de sua velocidade experimental representada na figura 27.

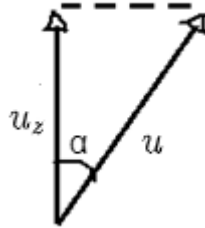


Figura 27: Representação da velocidade da bolha. Fonte: A autora.

$$u = \frac{u_z}{\cos \alpha} \quad (2.99)$$

Assim, podemos substituir a equação (2.99) na equação (2.98):

$$C_D = \frac{8 r_z g}{3 u_z^2} \cos^3 \alpha, \quad (2.100)$$

onde C_D é o coeficiente de arrasto instantâneo, r_z é o raio que é diferente para cada altura que a bolha se encontra. Podemos definir um C_{Dz} , uma espécie de componente z para o coeficiente de arrasto dado em termos da componente z da velocidade da bolha obtida experimentalmente, por

$$C_D = C_{Dz} \cos^3 \alpha. \quad (2.101)$$

Podemos substituir a equação (2.95) da premissa 5 e obter,

$$C_{Dz} = \frac{8 g}{3 u_z^2} \left(\frac{h_1}{h} \right)^{\frac{1}{3}} r_1. \quad (2.102)$$

Na equação (2.102), podemos concluir que $\frac{8 g}{3 u_z^2} (h_1)^{\frac{1}{3}} r_1$ é constante, então a equação

(2.102) fica da seguinte maneira,

$$C_{Dz} = \text{constante} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} \quad (2.103)$$

Ao incluir o fator de correção viscosa devido às paredes do recipiente, a equação (2.100) fica,

$$C_{Dz} = \frac{8g r_z}{3u_z^2} \cdot k_w^2 \cdot \cos^3 \alpha, \quad (2.104)$$

onde:

$$r_z = \left(\frac{h_1}{h}\right)^{\frac{1}{3}} r_1. \quad (2.105)$$

Agora, fazendo o uso do trabalho algébrico realizado nas seções 2.6 e 2.6 temos,

$$u^2 = u_0^2 \left[1 + \frac{4\pi^2 \cdot A^2}{\lambda^2} \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} z \right) \right], \quad (2.106)$$

onde temos que $\frac{4\pi^2}{\lambda^2}$ oferece o valor máximo para a tangente do ângulo de inclinação da trajetória $(tg\alpha_{max})^2$. Note que agora a velocidade é escrita totalmente em termos das variáveis do modelo proposto.

Dessa forma, o valor médio quadrático da velocidade será,

$$u_{RMS} = u_0 \left[1 + \frac{1}{2} tg^2 \alpha_{max} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.107)$$

E o C_{DRMS} é

$$C_{DRMS} = \frac{8 r_z g k_w^2}{3u_{RMS}^2}. \quad (2.108)$$

Substituindo a equação (2.107) e (2.108) no termo u_{RMS} , temos,

$$C_{DRMS} = \frac{8 r_z g k_w^2}{3 \cdot u_0^2 \left[1 + \frac{1}{2} tg^2 \alpha_{max} \right]} \quad (2.109)$$

sendo r_z uma função da profundidade, assim como o fator de correção k_w .

Fazendo a divisão entre as equações (2.104) e (2.109), obtemos a seguinte equação,

$$\frac{C_{DRMS}}{C_{Dz}} = \frac{u_z^2}{u_0^2 \left[1 + \frac{1}{2} tg^2 \alpha_{max} \right]} \quad (2.110)$$

Como

$$u = \frac{u_z}{\cos \alpha} \quad (2.111)$$

e

$$u = u_0 \sqrt{\cos \alpha}. \quad (2.112)$$

Podemos escrever

$$\frac{C_{DRMS}}{\cos^3 \alpha C_{Dz}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{2}tg^2\alpha_{max}\right]} \quad (2.113)$$

com,

$$\frac{C_{DRMS}}{C_D} = \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{2}tg^2\alpha_{max}\right]}. \quad (2.114)$$

Assim, após o cálculo do C_{DRMS} pode-se obter C_D do movimento global da bolha.

Na qual temos a tabela 1 com resumo das principais equações usadas para esferas oscilantes e bolhas em zigue-zague.

	Esfera oscilante	Bolha zigue-zague
Arrasto	$\vec{D} = \frac{1}{2}AC_D\rho_w u^2(-\hat{v})$	$\vec{D} = \frac{1}{2}AC_D\rho_w u^2(-\hat{v})$
Força de Arrasto	$D = B_0 \cos \alpha$	$D = E \cos \alpha$
Coefficiente de Arrasto	$C_D = \frac{8rg}{3u_z^2} \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w}\right) k_w^2 \cos^3 \alpha$	$C_{Dz} = \frac{8g r_z}{3u_z^2} \cdot k_w^2 \cdot \cos^3 \alpha$
Coefficiente de arrasto médio quadrático	$C_{D,u_{RMS}} = \frac{8}{3} \frac{rg}{u_0^2 \left[1 + \frac{1}{2}tg^2\alpha_{max}\right]} \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w}\right) k_w^2$	$C_{DRMS} = \frac{8 r_z g k_w^2}{3 \cdot u_0^2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot tg^2 \alpha_{max}\right]}$
Trajectoria	$y = A \cos \frac{2\pi z}{\lambda}$	$y = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} z$
Velocidade	$z = u_0 t$	$z = u_0 t$
Velocidade média quadrática	$u_{RMS} = u_0 \left[1 + \frac{1}{2}tg^2\alpha_{max}\right]^{\frac{1}{2}}$	$u_{RMS} = u_0 \left[1 + \frac{1}{2}tg^2\alpha_{max}\right]^{\frac{1}{2}}$

Tabela 1: As principais equações de esferas e bolhas. Fonte: A autora.

CAPÍTULO 3: MATERIAIS E MÉTODOS

Neste capítulo descreveremos o estudo experimental realizado do movimento das bolhas de ar em água e em glicerina, com base no que já foi apresentado nos capítulos 1 e 2. Na qual terá uma demonstração do experimento, e ainda, tabelas com os valores do raio, da velocidade extraído do *software* Tracker, com os cálculos do coeficiente de arrasto e número de Reynolds.

3.1 ARRANJO EXPERIMENTAL

Para observar o movimento das bolhas de ar em água e em glicerina foi montado um aparato composto de um tubo de PVC transparente (comercializada com o nome de mangueira cristal) com diâmetro interno de 1,5 polegadas (38,1 mm), presa à uma estrutura de madeira graduada, que na base possuía uma rolha com um orifício pelo qual foi introduzida uma agulha com 0,35 mm de diâmetro interno ligada, através de um tubo de Latex cirúrgico, à uma estrutura de madeira com uma manivela na qual estava uma seringa que introduzia pequenas porções de ar de maneira aproximadamente controlada. No tubo de PVC foram colocadas colunas de aproximadamente 90 cm de comprimento de água ou glicerina – meio fluido pelo qual as bolhas de ar se movimentavam. As bolhas geradas nesse aparato tinham movimento captado pela câmera de um celular com câmera de alta velocidade (marca do celular: Huawei P10 Selfie – velocidade de 120 fps), que é apresentado na figura 28.

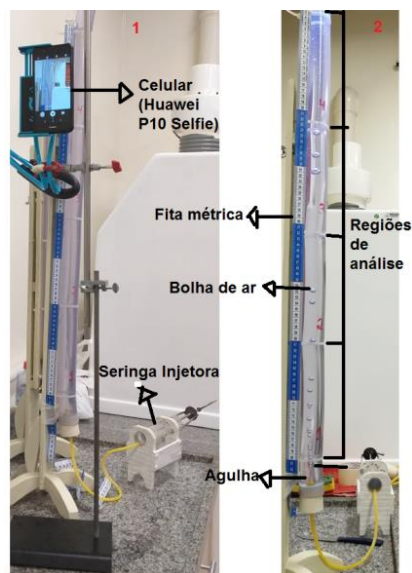


Figura 28: À direita temos o aparato experimental e à esquerda deiversas bolhas de ar fluindo através de glicerina.
Fonte: A autora.

Atualmente, existem alguns *softwares* de análise de imagens como por exemplo o *software Tracker* [21], que permitem o estudo da dinâmica dos corpos através da filmagem de seus movimentos.

Com o *software Tracker* (software livre), consegue-se fazer um rastreamento das partículas, registrando suas posições em diferentes intervalos de tempo e regiões do tubo oferecendo, por exemplo, as componentes vertical e horizontal da velocidade, a posição no tempo, um tamanho aproximado para o diâmetro da bolha e uma visão clara do tipo de movimento executado pela bolha (figura 29 e 30).

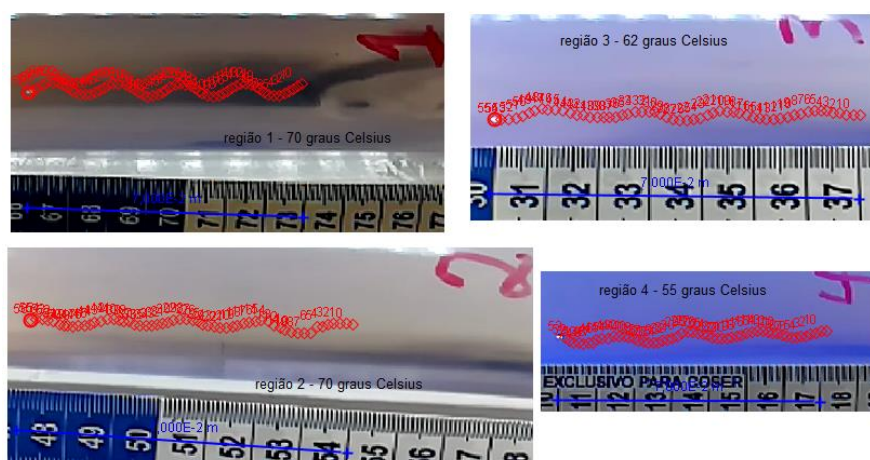


Figura 29: Observação do movimento oscilatório de uma bolha extraído do software Tracker. Fonte: A autora.



Figura 30: Raio médio de uma bolha obtido através do software Tracker. Fonte: A autora.

A fim de investigar se a visualização do aparato experimental era capaz de discernir o papel da temperatura do meio fluido no movimento da bolha, as análises foram feitas num intervalo de temperaturas que variaram de 22°C e 77°C . Não foi possível investigar a influência de temperaturas baixas. Isso porque o tubo fica translúcido pela condensação da água do ambiente nas paredes externas do tubo impedindo a aquisição das imagens com o movimento da bolha.

Em acréscimo, a fim de verificar a influência do diâmetro da agulha nos resultados obtidos, de maneira idêntica, fizemos testes com o mesmo arranjo, mas trocamos o tamanho da agulha de diâmetro interno de 0,95 mm e no intervalo de temperatura de 26°C e 61°C . De fato, com esse tamanho de agulha, além de se ter bolhas de tamanho diferente (maiores), consegue-se controlar melhor à saída da bolha através do êmbolo, fazendo sair uma bolha de cada vez de tamanhos homogêneos.

No que se refere à investigação com a glicerina, foram os intervalos de temperaturas que variaram de 6°C e 66°C . Adianta-se que no caso da glicerina não se observou movimento oscilatório, mas se conseguiu observar o movimento e a deformação das bolhas segundo o seu tamanho ficam completamente evidente, gerando imagens belíssimas.

Note que a montagem descrita acima, é realizada por meio de objetos simples (figura 31). Uma das motivações do trabalho é justamente um apelo pedagógico e como através de uma montagem tão simples se pode contemplar o tripé de estudo da física contemporânea: enfoques experimental, teórico e computacional.

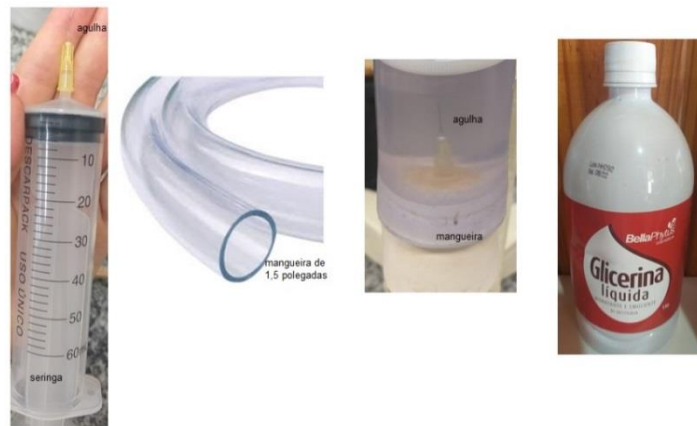


Figura 31: Materiais usados na montagem do aparato experimental. Fonte: A autora.

3.1.1 As bolhas de ar em água

Os estudos para as bolhas de ar em água foram realizadas utilizando temperaturas que variam de 22°C e 77°C . Uma das principais dificuldades envolvidas nos experimentos era encontrar uma iluminação adequada para que a câmera do celular captasse as bolhas. Outra, é que qualquer defeito, condensação de umidade ou ranhura no tubo de PVC dificulta a detecção da bolha pelo *software*. Por esses motivos é que não foi possível fazer medidas com temperaturas mais baixas, inclusive com temperaturas abaixo de zero, através de uma mistura de água e sal,

pelo fato da umidade do ar se condensar nas paredes externas do tubo.

Para acompanhar o movimento de uma bolha por toda a extensão do tubo (o que implica em uma grande quantidade de erro, minimizar os erros de paralaxe, devido às distorções contidas nas imagens da bolha durante o movimento, uma vez que a imagem é focalizada no meio da trajetória) a coleta de dados se deu dividindo-se o movimento em 4 regiões distintas do tubo de PVC com aproximadamente 19,5 cm de comprimento cada região, que é representada na figura 32. Contudo, não se pode ter a mesma bolha nas 4 regiões e assim se acompanhar uma possível variação do seu diâmetro desde a base do tubo até a superfície, mas apenas do começo ao final de cada região. Já aqui ressalta-se que não se observou qualquer variação apreciável, segundo a observação feita através do experimento para o raio da bolha de ar em água.

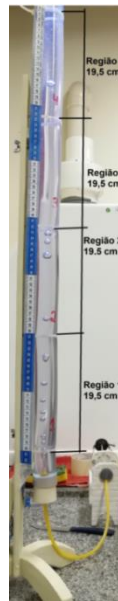


Figura 32: Representa a divisão das 4 regiões e o tamanho de cada uma das regiões. Fonte: A autora.

Ainda, uma variação empregada foi a utilização de dois tamanhos de agulhas uma com diâmetro interno de 0,35 mm e outro diâmetro interno de 0,95 mm.

3.1.1.1 Cálculo da viscosidade do meio

Com o início das investigações, buscou-se verificar o papel da temperatura nos valores de grandezas físicas como a densidade e a viscosidade da água. Para tanto se fez o uso do aparato contido na referência [32], onde se observa que, a viscosidade dinâmica (μ), para temperaturas entre 20°C e 100°C, e para a densidade (ρ) podem ser dadas pelas seguintes relações:

$$\mu = 1,002 \times 10^{-3} + \frac{1,3272(20-T) - 0,001053(-20+T)^2}{105+T}, \quad (3.1)$$

$$\rho_w = \frac{A + B}{1 + 0,0168799T}. \quad (3.2)$$

onde o termo $A = 999,84 + 16,9452T - 0,00798704T^2$ e o termo $B = -0,0000461705T^3 + 1,05563 \cdot 10^{-7}T^4 - 2,80543 \cdot 10^{-10}T^5$.

Em nossos cálculos às vezes se utiliza a viscosidade cinética e em outros a viscosidade dinâmica que se relacionam por,

$$\eta = \frac{\mu}{\rho_w}. \quad (3.3)$$

Então, com as equações (3.1), (3.2) e (3.3) podemos descobrir a densidade e a viscosidade com as temperaturas analisadas na observação do aparato experimental para bolhas de ar em água com dois tamanhos de agulha 0,35 mm e 0,95 mm, conforme apresentado na tabela 2.

	$T = 22^\circ\text{C}$	$T = 26^\circ\text{C}$	$T = 55^\circ\text{C}$	$T = 61^\circ\text{C}$	$T = 62^\circ\text{C}$	$T = 70^\circ\text{C}$	$T = 77^\circ\text{C}$
ρ_w	998 kg/m ³	997 kg/m ³	986 kg/m ³	983 kg/m ³	982 kg/m ³	978 kg/m ³	974 kg/m ³
μ	$9,55 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$8,71 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$5,04 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$4,60 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$4,53 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$4,04 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$3,68 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²
η	$9,57 \cdot 10^{-7}$ m ² /s	$8,73 \cdot 10^{-7}$ m ² /s	$5,11 \cdot 10^{-7}$ m ² /s	$4,68 \cdot 10^{-7}$ m ² /s	$4,61 \cdot 10^{-7}$ m ² /s	$4,13 \cdot 10^{-7}$ m ² /s	$3,78 \cdot 10^{-7}$ m ² /s

Tabela 2: Cálculo da viscosidade e densidade para cada temperatura de análise. Fonte: A autora.

Com os cálculos apresentados na tabela 2, e com os dados fornecidos pelo *software Tracker* pode-se calcular o coeficiente de arrasto da bolha de cada bolha. Como o tubo foi dividido em regiões, busca-se calcular um coeficiente de arrasto médio em cada região verificando se seus valores mudam.

Os resultados da primeira análise (movimento de bolhas em água nas temperaturas de 22°C e 77°C) são apresentados nas tabelas 3 e 4. Neste primeiro estudo observou-se o movimento de uma única bolha por toda a extensão do tubo buscando verificar a evolução de seu diâmetro à medida que ela subia. A agulha utilizada foi a de 0,35 mm de diâmetro interno. Para essa análise foi observado o movimento de 5 bolhas diferentes, tomando uma média de seus diâmetros em cada uma das 4 regiões do tubo (dados provenientes do *software Tracker*).

Medidas	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4
Média do diâmetro (m)	$(6,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(5,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(4,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(4,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$
Média do raio (m)	$(3,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(2,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(2,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(2,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$
Altura do tubo (h [m])	0,70 m	0,51 m	0,26 m	0,16 m

Tabela 3: Análise do tamanho da bolha e altura onde a bolha se encontra em relação à base do tubo, 22°C. Fonte: A autora.

Medidas	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4
Média do diâmetro (m)	$(6,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(6,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(5,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(6,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$
Média do raio (m)	$(3,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(3,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(2,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(3,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$
Altura do tubo (h [m])	0,70 m	0,50m	0,30 m	0,17 m

Tabela 4: Análise do tamanho da bolha e altura onde a bolha se encontra em relação à base do tubo, 77°C. Fonte: A autora.

Os resultados da segunda análise (movimento de bolhas em água nas temperaturas de 26°C e 61°C) são apresentados nas tabelas 5 e 6. Neste primeiro estudo observou-se o movimento de uma única bolha por toda a extensão do tubo buscando verificar a evolução de seu diâmetro à medida que ela subia. A agulha utilizada foi a de 0,95 mm de diâmetro interno. Para essa análise foi observado o movimento de 5 bolhas diferentes, tomando uma média de seus diâmetros em cada uma das 4 regiões do tubo (dados provenientes do *software Tracker*). Durante a observação notamos que precisava descontar 0,02 m da altura do tubo, porque a água estava abaixo do nível de observação das medidas das tabelas 3 e 4.

Medidas	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4
Média do diâmetro (m)	$(6,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(7,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(6,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(6,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$
Média do raio (m)	$(3,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(3,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(3,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(3,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$
Altura do tubo – 0,02 m	0,62 m	0,45 m	0,25 m	0,12 m

Tabela 5: Análise do tamanho da bolha e altura onde a bolha se encontra em relação à base do tubo, com 26°C. Fonte: A autora.

Medidas	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4
Média do diâmetro (m)	$(5,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(5,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(5,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(5,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$
Média do raio (m)	$(2,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(2,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(2,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$(2,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$
Altura do tubo – 0,02 m	0,62 m	0,45 m	0,25 m	0,12 m

Tabela 6: Análise do tamanho da bolha e altura onde a bolha se encontra em relação à base do tubo, com 61°C. Fonte: A autora.

Os resultados da terceira análise realizada em cada região distinta do tubo de PVC, afim de melhorar a qualidade das filmagens, porque quando filmavamos o tubo por um todo tínhamos

dificuldade de observar o movimento da bolha, então filmamos cada região de forma separada, são apresentadas na tabela 7. Nessa análise, as temperaturas variaram durante o experimento e diferentes bolhas foram consideradas. Para determinar o tamanho das bolhas foi realizado o mapeamento de 5 bolhas diferentes em cada região e feito uma média do tamanho da bolha, na tabela 7 está as médias das bolhas analisadas por região.

Medidas	Região 1 (70°C)	Região 2 (70°C)	Região 3 (62°C)	Região 4 (55°C)
Média do diâmetro	$(2,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$(1,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$(1,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$(2,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Média do raio	$(1,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$(0,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$(0,9 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$(1,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Altura do tubo	0,66 m	0,47 m	0,30 m	0,10 m

Tabela 7: Análise do tamanho da bolha e altura do tubo com variação de temperatura 55°C, 62°C e 70°C. Fonte: A autora.

Como discutido no capítulo 1 seção 1.1.2, o número de Reynolds é uma grandeza adimensional que pode indicar se o tipo de fluxo é laminar ou turbulento. Isso ainda vai indicar se uma análise teórica deve utilizar uma força de arrasto linear ou quadrática na velocidade.

Para calcular o número de Reynolds utilizamos a seguinte equação:

$$Re = \frac{\rho u l}{\mu} \quad (3.4)$$

A fim de dar mais solidez a análise, calcula-se a incerteza nos valores do número de Reynolds obtidos. Usando a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \sigma_{Re}^2 &= \left(\frac{\partial Re}{\partial l} \right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{\partial Re}{\partial u} \right)^2 \sigma_u^2 \\ \sigma_{Re}^2 &= \left(\frac{\rho u}{\mu} \right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{\rho l}{\mu} \right)^2 \sigma_u^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

A primeira análise para bolhas diferentes observadas em cada região de acordo com a média de 5 bolhas é apresentada na tabela 8:

Agulha 0,35 mm	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4
Temperatura	70°C	70°C	62°C	55°C
Diâmetro médio	$(2,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$(1,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$(1,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$(2,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m}$
ρ_w	978 kg/m ³	978 kg/m ³	983 kg/m ³	986 kg/m ³
μ	$4,01 \cdot 10^{-4} \text{ N.s/ m}^2$	$4,01 \cdot 10^{-4} \text{ N.s/ m}^2$	$4,64 \cdot 10^{-4} \text{ N.s/ m}^2$	$5,02 \cdot 10^{-4} \text{ N.s/ m}^2$
u (m/s)	$(1,42 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(1,48 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(1,47 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(1,55 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$
Re	761 ± 35	541 ± 36	529 ± 31	731 ± 31

Tabela 8: Análise médio do número de Reynolds com temperatura de 55°C a 70°C, com movimento oscilatório. Fonte: A autora.

A segunda análise para a mesma bolha em todas as regiões de observação de acordo com a média de 5 bolhas e, em duas temperaturas 22°C e 77°C é apresentada nas tabelas 9 e 10:

Agulha 0,35 mm	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4
Temperatura	22°C	22°C	22°C	22°C
Diâmetro médio	$(6,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m	$(5,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m	$(4,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m	$(4,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m
ρ_w	998 kg/m ³	998 kg/m ³	998 kg/m ³	998 kg/m ³
μ	$9,55 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$9,55 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$9,55 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$9,55 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²
u (m/s)	$(1,5 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(1,40 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(1,54 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(1,47 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$
Re	956 ± 17	761 ± 16	724 ± 17	722 ± 16

Tabela 9: Análise médio do número de Reynolds com temperatura de 22°C, movimento linear. Fonte: A autora.

Agulha 0,35 mm	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4
Temperatura	77°C	77°C	77°C	77°C
Diâmetro médio	$(6,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m	$(6,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m	$(5,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m	$(6,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m
ρ_w	974 kg/m ³	974 kg/m ³	974 kg/m ³	974 kg/m ³
μ	$3,68 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$3,68 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$3,68 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$3,68 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²
u (m/s)	$(1,58 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(1,67 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(1,64 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(1,57 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$
Re	2844 ± 46	2829 ± 47	2214 ± 45	2493 ± 45

Tabela 10: Análise médio do número de Reynolds com temperatura de 77°C, movimento linear. Fonte: A autora.

A terceira análise para a mesma bolha em todas as regiões de observação de acordo com a média de 5 bolhas e, em duas temperaturas 26°C e 61°C é apresentada nas tabelas 11 e 12:

Agulha 0,95 mm	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4
Temperatura	26°C	26°C	26°C	26°C
Diâmetro médio	$(6,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m	$(7,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m	$(6,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m	$(6,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m
ρ_w	997 kg/m ³	997 kg/m ³	997 kg/m ³	997 kg/m ³
μ	$8,71 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$8,71 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$8,71 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$8,71 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²
u (m/s)	$(2,13 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(2,04 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(2,05 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(1,99 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$
Re	1658 ± 26	1658 ± 25	1549 ± 25	1526 ± 24

Tabela 11: Análise médio do número de Reynolds com temperatura de 26°C, movimento linear. Fonte: A autora.

Agulha 0,95 mm	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4
Temperatura	61°C	61°C	61°C	61°C
Diâmetro médio	$(5,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m	$(5,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m	$(5,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m	$(5,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m
ρ_w	983 kg/m ³	983 kg/m ³	983 kg/m ³	983 kg/m ³
μ	$4,60 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$4,60 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$4,60 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²	$4,60 \cdot 10^{-4}$ N.s/m ²
u (m/s)	$(1,82 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(1,81 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(1,75 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$	$(1,78 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$
Re	2139 ± 41	2166 ± 41	2020 ± 39	1940 ± 40

Tabela 12: Análise médio do número de Reynolds com temperatura de 61°C, movimento linear. Fonte: A autora.

Os valores para o número de Reynolds obtido sugerem que existem movimentos aproximadamente laminares ($Re < 1000$) sem movimento oscilatório das bolhas. Movimentos em uma região de transição laminar-turbulento e movimentos com $Re > 2000$ de caráter turbulento. Para os valores com $Re > 1000$ observam movimentos oscilatórios para as bolhas, na qual o regime passa de transitório para turbulento, devido ao movimento desordenado das bolhas pelo tubo.

A figura 33 apresenta o tipo de informação fornecida pelo *software Tracker*. Nela vemos uma bolha que apresenta movimento oscilatório. Os dados experimentais para a bolha da figura 33 estão na tabela 8. Neste caso o número de Reynolds indica que o movimento está num intervalo de transição entre o laminar e o turbulento. Isso indica que a rigor um modelo para a força de arrasto não deve ser linear nem quadrático na velocidade [33].

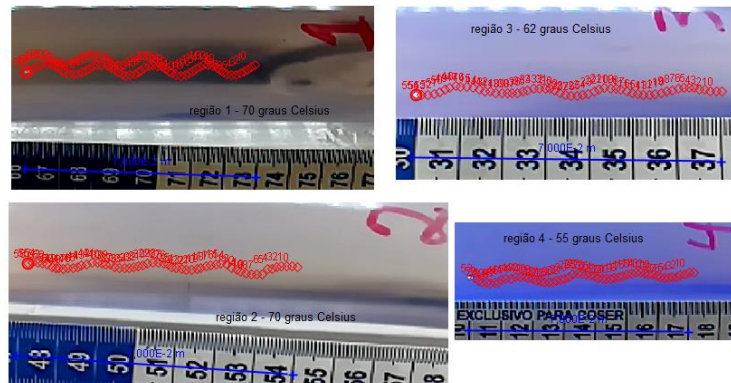


Figura 33: Observação do movimento oscilatório extraído do Sistema Computacional Tracker. Fonte: A autora.

Ainda na literatura existem alguns trabalhos que oferecem o coeficiente de arrasto através do número de Reynolds para esferas sólidas. Segundo a referência [33] temos,

$$C_D(Re) \approx \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0,4. \quad (3.6)$$

O primeiro termo do lado direito desta equação (3.6) corresponde à clássica relação entre o número de Reynolds e o coeficiente de arrasto para fluxos laminares que fornece uma relação linear entre C_D e a velocidade. Já a segunda e a terceira parte da equação (3.6) fornecem a correção para o número de Reynolds maiores. É imediato se mostrar que para o número de Reynolds entre $1000 < Re < 200\,000$ o coeficiente de arrasto é quadrático na velocidade. No caso das bolhas de ar em água (que aproximamos por esferas), o número de Reynolds está fora deste intervalo indicando que a relação do coeficiente de arrasto com a velocidade é mais complicada [33].

Visto a diferença de comportamento entre o movimento de uma esfera e de uma bolha se faz uso das relações deduzidas no capítulo 2 para determinar o coeficiente de arrasto médio quadrático de uma bolha com movimento ascendente oscilatório. A equação utilizada para tanto é

$$Cd_{RMS} = \frac{8}{3} \frac{g \cdot r \cdot k_w^2}{u_0^2 \sqrt{1 + \frac{tg^2 \alpha_{m\acute{a}x}}{2}}} \rightarrow Cd_{RMS} = \frac{8}{3} \frac{g \cdot r \cdot k_w^2}{u_0^2 \sqrt{1 + \frac{(k \cdot A)^2}{2}}} \quad (3.7)$$

Os valores de r , k e A , são respectivamente o raio, frequência e amplitude são obtidos através da melhor senoide que interpola os dados experimentais para o movimento da bolha, onde $tg \alpha_{m\acute{a}x} = k \cdot A$. Esses dados são obtidos pelo *software Tracker*, onde conseguimos extrair o raio da bolha, o ângulo formando em cada oscilação e a velocidade da bolha e analisados no *software Mathematica*, na qual foi usado para fazer análises mais detalhadas dos gráficos com os dados do *Tracker*.

Dessa maneira, podemos representar os valores encontrados em cada região através das tabelas 13 a 16, mostrando os valores utilizados e encontrados para cada parâmetro da equação (3.7).

Região 1, temperatura de 70°C

	Bolha 1	Bolha 2	Bolha 3	Bolha 4	Bolha 5	Média
$r_b(m)$	$1,049 \cdot 10^{-3}$	$1,115 \cdot 10^{-3}$	$1,069 \cdot 10^{-3}$	$1,057 \cdot 10^{-3}$	$1,092 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$
$g(m/s^2)$	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²
$u_0(m/s)$	$1,404 \cdot 10^{-1}$	$1,434 \cdot 10^{-1}$	$1,423 \cdot 10^{-1}$	$1,423 \cdot 10^{-1}$	$1,423 \cdot 10^{-1}$	$(1,42 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$
k_w	0,987	0,987	0,987	0,987	0,987	0,987
$\alpha_{m\acute{a}x}$	31,12°	33,52°	33,90°	31,64°	31,76°	32,39°
Cd_{RMS}	1,24	1,25	1,21	1,22	1,27	1,27

Tabela 13: Valores do coeficiente de arrasto médio quadrático em relação a velocidade de subida e seu raio. Lembrem os que $\alpha_{m\acute{a}x} = \text{ArcTan}(2\pi A/\lambda)$. Fonte: A autora.

Região 2, temperatura de 70°C

	Bolha 1	Bolha 2	Bolha 3	Bolha 4	Bolha 5	Média
$r_b(m)$	$7,557 \cdot 10^{-4}$	$7,139 \cdot 10^{-4}$	$7,809 \cdot 10^{-4}$	$7,638 \cdot 10^{-4}$	$7,514 \cdot 10^{-4}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$
$g(m/s^2)$	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²
$u_0(m/s)$	$1,449 \cdot 10^{-1}$	$1,433 \cdot 10^{-1}$	$1,514 \cdot 10^{-1}$	$1,484 \cdot 10^{-1}$	$1,497 \cdot 10^{-1}$	$(1,48 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$
k_w	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991
$\alpha_{m\acute{a}x}$	17,20°	6,91°	18,55°	3,27°	7,01°	10,59°
Cd_{RMS}	0,901	0,888	0,850	0,889	0,856	0,870

Tabela 14: Valores do coeficiente de arrasto médio quadrático em relação a velocidade de subida e seu raio. Lembrem os que $\alpha_{m\acute{a}x} = \text{ArcTan}(2\pi A/\lambda)$. Fonte: A autora.

Região 3, temperatura de 62°C

	Bolha 1	Bolha 2	Bolha 3	Bolha 4	Bolha 5	Média
$r_b(m)$	$8,475 \cdot 10^{-4}$	$9,261 \cdot 10^{-4}$	$7,941 \cdot 10^{-4}$	$9,091 \cdot 10^{-4}$	$7,797 \cdot 10^{-4}$	$8,5 \cdot 10^{-4}$
$g(m/s^2)$	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²
$u_0(m/s)$	$1,437 \cdot 10^{-1}$	$1,478 \cdot 10^{-1}$	$1,496 \cdot 10^{-1}$	$1,456 \cdot 10^{-1}$	$1,488 \cdot 10^{-1}$	$(1,47 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$
k_w	0,990	0,989	0,990	0,989	0,990	0,990
$\alpha_{m\acute{a}x}$	14,13°	17,17°	18,22°	20,43°	15,86°	17,16°
Cd_{RMS}	1,03	1,06	0,884	1,06	0,883	0,983

Tabela 15: Valores do coeficiente de arrasto médio quadrático em relação a velocidade de subida e seu raio. Lembrem os que $\alpha_{m\acute{a}x} = \text{ArcTan}(2\pi A/\lambda)$. Fonte: A autora.

Região 4, temperatura de 55°C

	Bolha 1	Bolha 2	Bolha 3	Bolha 4	Bolha 5	Média
$r_b(m)$	$1,197 \cdot 10^{-3}$	$1,199 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,182 \cdot 10^{-3}$	$1,172 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$
$g(m/s^2)$	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²	9,79 m/s ²
$u_0(m/s)$	$1,566 \cdot 10^{-1}$	$1,537 \cdot 10^{-1}$	$1,531 \cdot 10^{-1}$	$1,552 \cdot 10^{-1}$	$1,553 \cdot 10^{-1}$	$(1,55 \pm 0,01) \cdot 10^{-1}$
k_w	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986
$\alpha_{m\acute{a}x}$	16,84°	16,86°	14,17°	17,38°	13,64°	15,78°
Cd_{RMS}	1,21	1,26	1,28	1,22	1,22	1,24

Tabela 16: Valores do coeficiente de arrasto médio quadrático em relação a velocidade de subida e seu raio. Lembrem os que $\alpha_{m\acute{a}x} = \text{ArcTan}(2\pi A/\lambda)$. Fonte: A autora.

Os dados experimentais foram concatenados no gráfico do coeficiente de arrasto pelo raio médio das bolhas por região do tubo, são apresentados nas figuras 34 a 37.

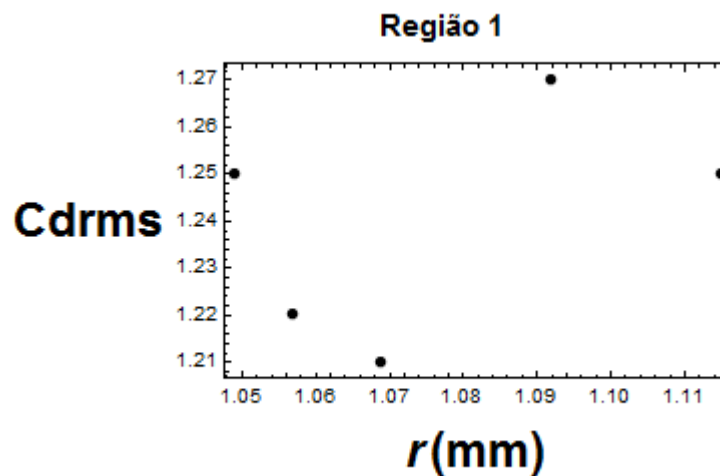


Figura 34: Coeficiente de arrasto médio quadrático pelo raio da bolha da região 1, com temperatura de 70°C, com a análise de 5 bolhas diferentes. Fonte: A autora.

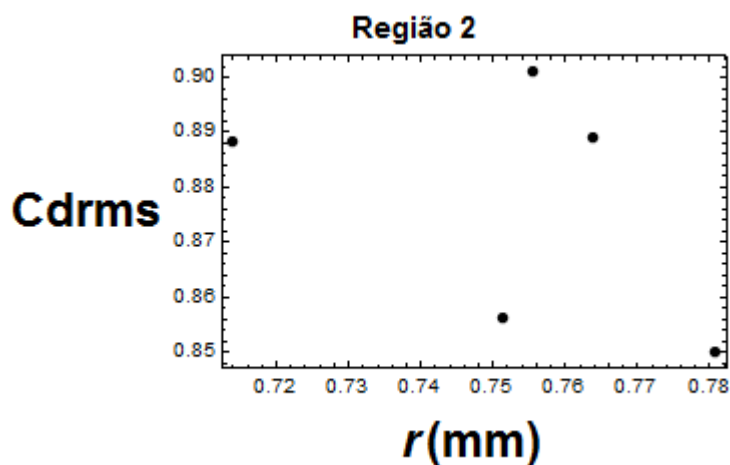


Figura 35: Coeficiente de arrasto médio quadrático pelo raio da bolha da região 2, com temperatura de 70°C, com a análise de 5 bolhas diferentes. Fonte: A autora.

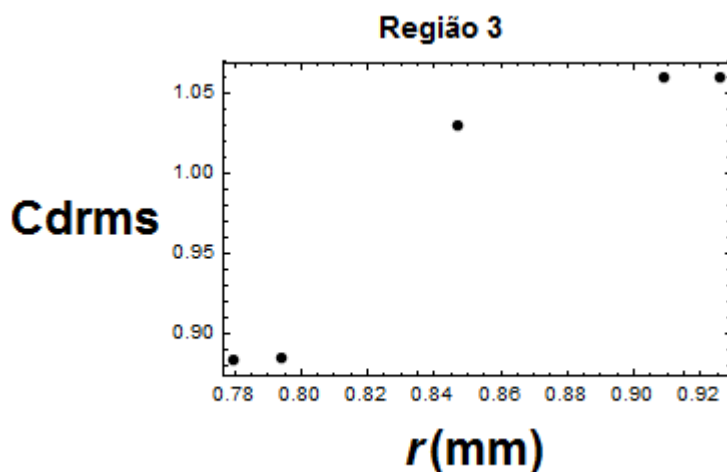


Figura 36: Coeficiente de arrasto médio quadrático pelo raio da bolha da região 3, com temperatura de 62°C, com a análise de 5 bolhas diferentes. Fonte: A autora.

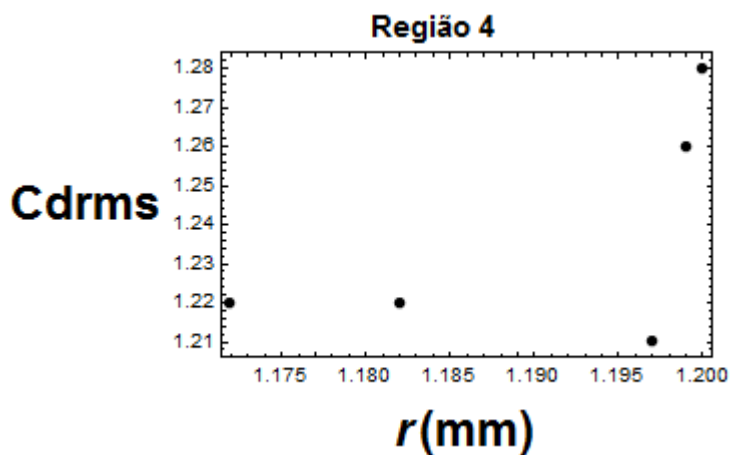


Figura 37: Coeficiente de arrasto médio quadrático pelo raio da bolha da região 4, com temperatura de 55°C, com a análise de 5 bolhas diferentes. Fonte: A autora.

Para fim de completeza, compara-se os dados obtidos no experimento com os presentes na referência [34], que são apresentados na figura 38, ao analisar a velocidade final de subida da bolha e o resultado experimental do cálculo de C_D , o valor médio de C_D é 1,48, usando este valor fixo de C_D , o cálculo da velocidade final de subida da bolha tende a ser próximo ao valor real, cujo erro poderia ser controlado basicamente em 5%.

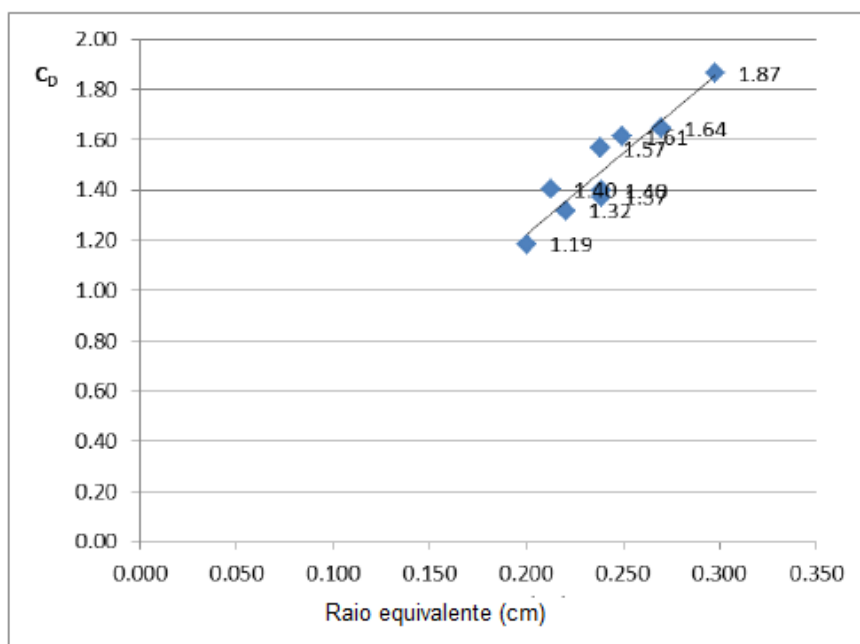


Figura 38: Cálculo do coeficiente de arrasto com base no resultado experimental, para uma bolha com raio de 2-3 mm, o coeficiente de arrasto é calculado entre 1,3-1,7. Fonte: Adaptado do M.Y. Shi, *et al.*,(2017) [34].

3.1.2 Bolhas de ar em glicerina

O segundo meio onde se observou o movimento de bolhas de ar foi na glicerina. Por ser um líquido mais viscoso os movimentos são mais lentos, sem oscilação, mas permitindo um acompanhamento mais preciso.

A montagem é idêntica à anterior, simplesmente substituindo-se a água pela glicerina. De modo geral observou-se bolhas muito grandes que escapam aos propósitos deste estudo por quase tomarem o diâmetro total do tubo e bolhas bem pequenas (aproximadamente 2 mm de diâmetro) com movimento retilíneo e bem comportado.

Para a glicerina foram realizadas três análises diferentes: A primeira foi com glicerina à temperatura de 6°C, onde observou-se somente bolhas com movimento retilíneo. A dificuldade neste caso foi, novamente, o embaçamento do tubo de PVC que implicou na observação do movimento de bolhas com diâmetro maior ou igual a 3,6 mm.

A segunda foi com temperatura de 24°C, onde observou-se somente bolhas com movimento retilíneo. A observação nesta temperatura foi tranquila, conseguiu-se observar com clareza o movimento da bolha. Neste caso, foi possível observar bolhas com diâmetro a partir de 2,8 mm.

A terceira foi com a temperatura de 66°C. O interessante neste caso é a perda da viscosidade da glicerina e assim as bolhas passam a subir com grande velocidade. Agora foi possível observar bolhas com diâmetro a partir de 2 mm. Não calculamos o número de Reynolds para essa temperatura, pois não conseguimos encontrar na literatura sua viscosidade dinâmica e sua densidade ρ_g .

Dado os dados experimentais extraídos por meio do *Tracker* se obteve o número Reynolds, que estão apresentados nas tabelas 17 e 18.

	Região 1 (6°C)	Região 2 (6°C)	Região 3 (6°C)	Região 4 (6°C)	Média
r (m)	$2,037 \cdot 10^{-3}$ m	$2,052 \cdot 10^{-3}$ m	$1,871 \cdot 10^{-3}$ m	$1,218 \cdot 10^{-3}$ m	$(1,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m
ρ_g (kg/m ³)	1273 kg/m ³	1273 kg/m ³	1273 kg/m ³	1273 kg/m ³	1273 kg/m ³
μ (N.s/m ²)	6,730 N.s/m ²	6,730 N.s/m ²	6,730 N.s/m ²	6,730 N.s/m ²	6,730 N.s/m ²
u_0 (m/s)	$1,692 \cdot 10^{-3}$ m/s	$1,835 \cdot 10^{-3}$ m/s	$2,498 \cdot 10^{-3}$ m/s	$2,680 \cdot 10^{-3}$ m/s	$(2,2 \pm 0,01) \cdot 10^{-3}$ m/s
Re	0,0013± 0,0003	0,0014± 0,0003	0,0018± 0,0005	0,0012± 0,0005	0,0015±0,0004

Tabela 17: Cálculo do Número de Reynolds de acordo com o raio e a velocidade da bolha. Fonte: A autora.

	Região 1 (24°C)	Região 2 (24°C)	Região 3 (24°C)	Região 4 (24°C)	Média
r (m)	$1,101 \cdot 10^{-3}$ m	$1,219 \cdot 10^{-3}$ m	$1,309 \cdot 10^{-3}$ m	$1,72 \cdot 10^{-3}$ m	$(1,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ m
ρ_g (kg/m ³)	1261 kg/m ³	1261 kg/m ³	1261 kg/m ³	1261 kg/m ³	1261 kg/m ³
μ (N.s/m ²)	0,9934 N.s/m ²	0,9934 N.s/m ²	0,9934 N.s/m ²	0,9934 N.s/m ²	0,9934 N.s/m ²
u_0 (m/s)	$3,631 \cdot 10^{-3}$ m/s	$3,710 \cdot 10^{-3}$ m/s	$3,793 \cdot 10^{-3}$ m/s	$3,605 \cdot 10^{-3}$ m/s	$(3,7 \pm 0,01) \cdot 10^{-3}$ m/s
Re	0,010± 0,005	0,012± 0,005	0,013± 0,005	0,016± 0,005	0,013±0,005

Tabela 18: Cálculo do Número de Reynolds de acordo com o raio e a velocidade da bolha. Fonte: A autora.

Para o cálculo do coeficiente de arrasto para uma bolha com movimento retilíneo, podemos utilizar a equação de Stokes, pois $Re < 1$, [33-35]:

$$C_d = \frac{24}{R_e} \quad 3.8$$

Observe as tabelas 19 e 20 que representam o coeficiente de arrasto.

	Região 1 (6°C)	Região 2 (6°C)	Região 3 (6°C)	Região 4 (6°C)	Média
R_e	0,0013±0,0003	0,0014±0,0003	0,0018±0,0005	0,0012±0,0005	0,0015±0,0004
C_d	18 461,54	17 142,86	13 333,33	20 000	16 000

Tabela 19: Cálculo do coeficiente de arrasto. Fonte: A autora.

	Região 1 (24°C)	Região 2 (24°C)	Região 3 (24°C)	Região 4 (24°C)	Média
R_e	0,010±0,005	0,012±0,005	0,013±0,005	0,016±0,005	0,013±0,005
C_d	2 400	2 000	1 846,15	1 500	1 846,15

Tabela 20: Cálculo do coeficiente de arrasto. Fonte: A autora.

CAPÍTULO 4: RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 RESULTADOS

Das observações que foram feitas através do experimento conseguem-se notar como as bolhas de ar tem seu comportamento na água em temperaturas em torno de 22°C a 77°C. Observou-se que em geral as bolhas de ar possuem um formato encurvado, como um cogumelo, e que à medida que sobem tendem a se aproximar das paredes do tubo. Como já previsto na literatura, bolhas com pequenas velocidades apresentam movimento linear e bolhas com maiores velocidades apresentam movimento oscilatório. Se nota, que bolhas menores possuem movimento linear e as maiores apresentam movimento oscilatório.

No que tange às dificuldades encontradas com a montagem tão simples, pode-se destacar alguns pontos:

- A dificuldade em se produzir somente uma bolha por vez. Quanto mais pressão era colocada no êmbolo da seringa mais bolhas saíram ao mesmo tempo e com mais rapidez. Por outro lado, tinha-se que atingir um mínimo de pressão que possibilitasse a saída das bolhas. Ocorria de fato uma espécie de efeito cascata. Foram então necessárias muitas tentativas para se conseguir fazer com que saísse uma bolha de cada vez para observamos o movimento de cada uma de forma isolada.

- A presença de uma grande quantidade de incertezas. O principal empecilho enfrentado quando afastamos a máquina foi o de focalizar as bolhas durante seu movimento, juntamente com as distorções contidas nas imagens. Junte-se a isso o fato de não se ter controle total sobre a quantidade de bolhas que eram liberadas juntamente com seu diâmetro. Daí o fato das análises envolverem médias.

Apesar dos problemas que se acaba de citar, vários aspectos do movimento das bolhas oscilantes em água, tópico de maior interesse do trabalho, ficam muito evidentes com a montagem. As grandes incertezas presentes, dado a inspiração pedagógica e formativa do trabalho foram uma boa ocasião para se realizar um aprofundamento na teoria dos erros (apêndice B) compreendendo-se os limites de uma investigação científica.

Para isso podemos relatar as grandezas obtidas com as estimativas: velocidade de subida (u_z) constante das bolhas oscilantes, onde z indica a direção. Nota-se que a velocidade de subida das bolhas oscilantes é praticamente constante durante seu deslocamento pelo tubo, cerca de 14

cm/s (figuras 39 a 42).

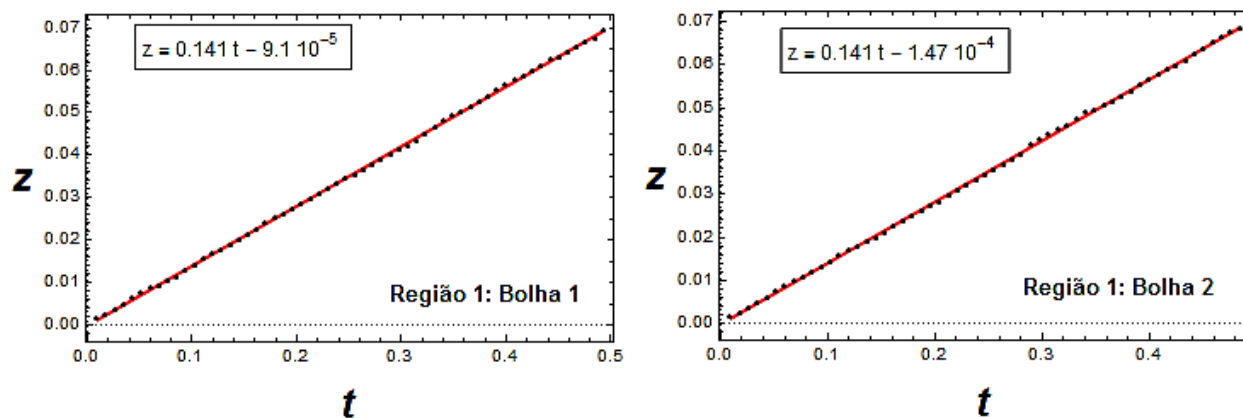


Figura 39: Velocidade constante da bolha na região 1. Fonte: A autora.

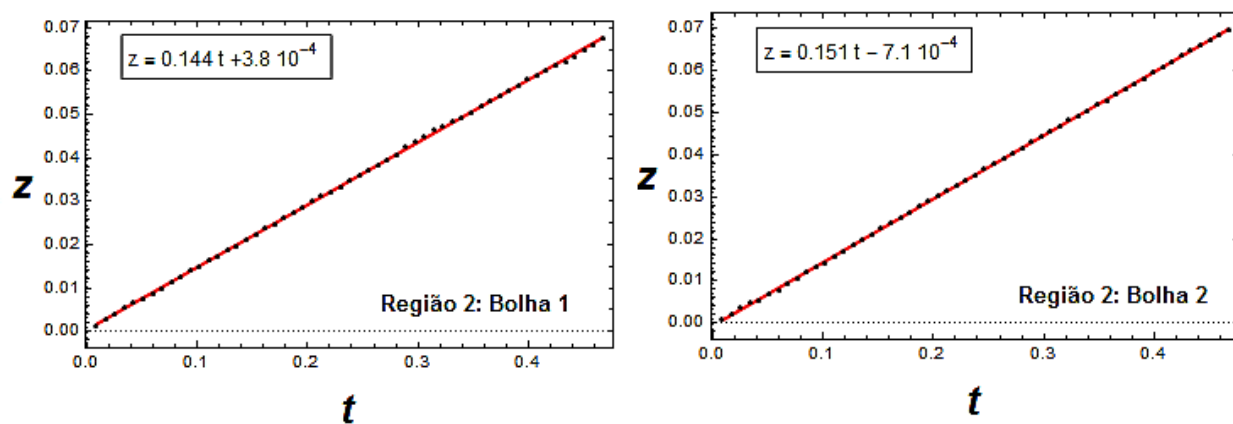


Figura 40: Velocidade constante da bolha na região 2. Fonte: A autora.

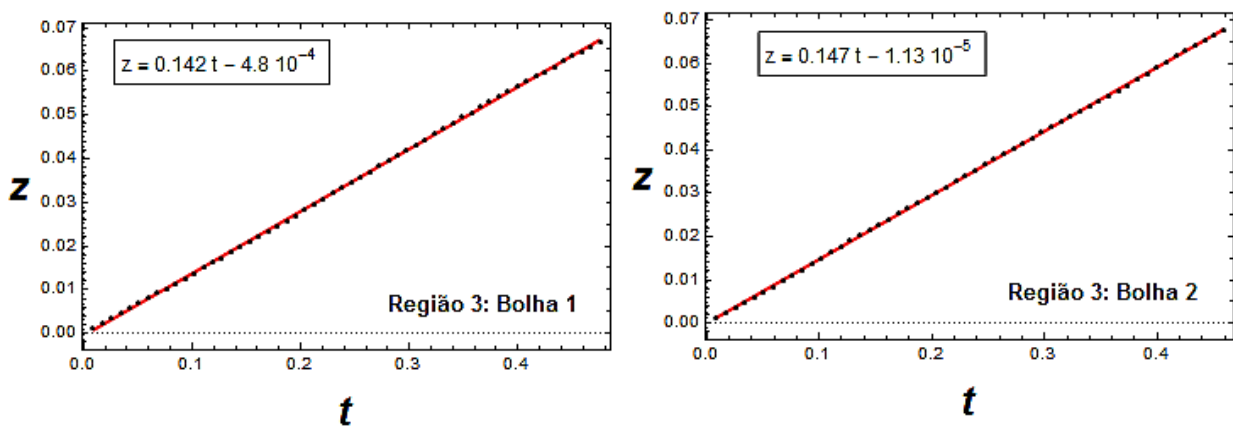


Figura 41: Velocidade constante da bolha na região 3. Fonte: A autora.

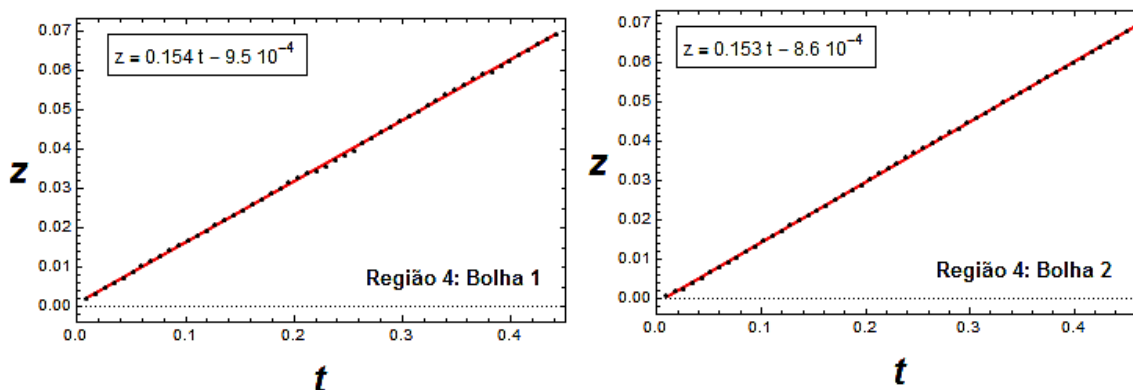


Figura 42: Velocidade constante da bolha na região 4. Fonte: A autora.

As figuras 39 a 42 foram obtidos exportando-se os dados obtidos no *software Tracker* para o *software Mathematica*, um software mais robusto do ponto de vista dos cálculos numéricos. Neles se encontram a posição vertical da bolha em um dado instante, em uma das quatro regiões do tubo (pontos azuis) e a reta média que oferece o melhor ajuste linear (reta vermelha).

Enfatiza-se que os resultados apresentados nas figuras 39 a 42 corroboram a escolha da premissa 4 do modelo proposta no capítulo 2, que assume uma velocidade de subida constante. Ainda, as observações do movimento de bolhas em água com uma variação de temperatura de 55°C a 70°C mostraram movimento oscilatório que pode ser verificado nas figuras 43 a 46. Isto também corrobora a escolha do modelo supracitado para o cálculo do coeficiente de arrasto que possui como uma de suas premissas o fato da bolha ter uma trajetória senoidal.

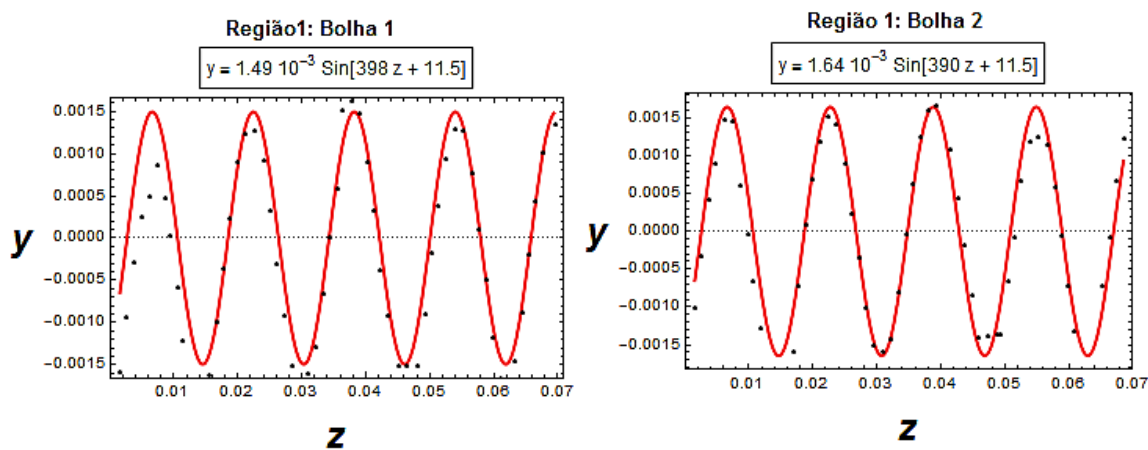


Figura 43: Movimento oscilatório da bolha na direção y e z e com a melhor curva que passa pelos pontos onde a bolha está oscilando, região 1, com temperatura de 70°C. Fonte: A autora.

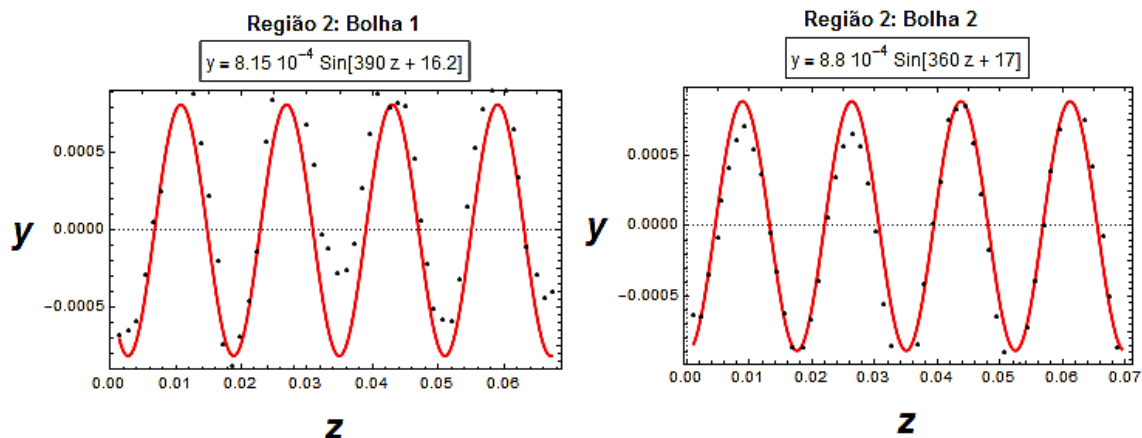


Figura 44: Movimento oscilatório da bolha na direção y e z e com a melhor curva que passa pelos pontos onde a bolha está oscilando, região 2, com temperatura de 70°C . Fonte: A autora.

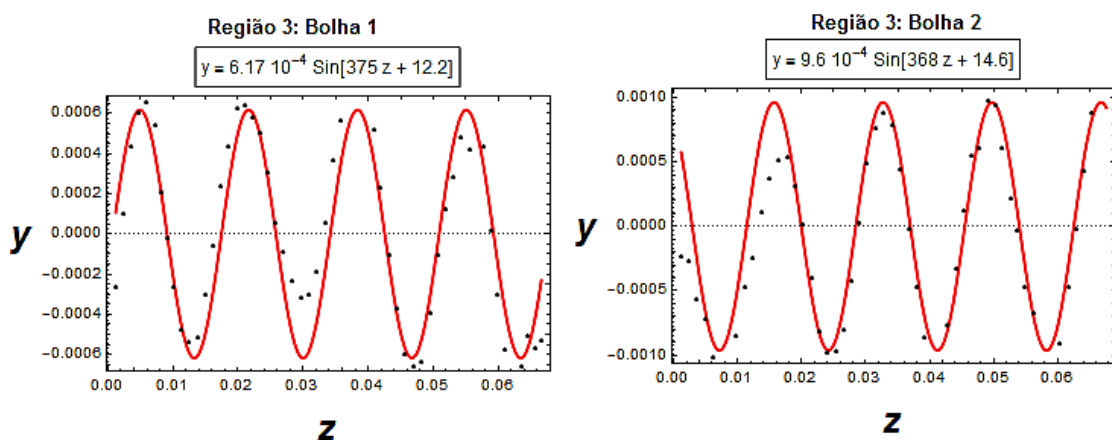


Figura 45: Movimento oscilatório da bolha na direção y e z e com a melhor curva que passa pelos pontos onde a bolha está oscilando, região 3, com temperatura de 62°C . Fonte: A autora.

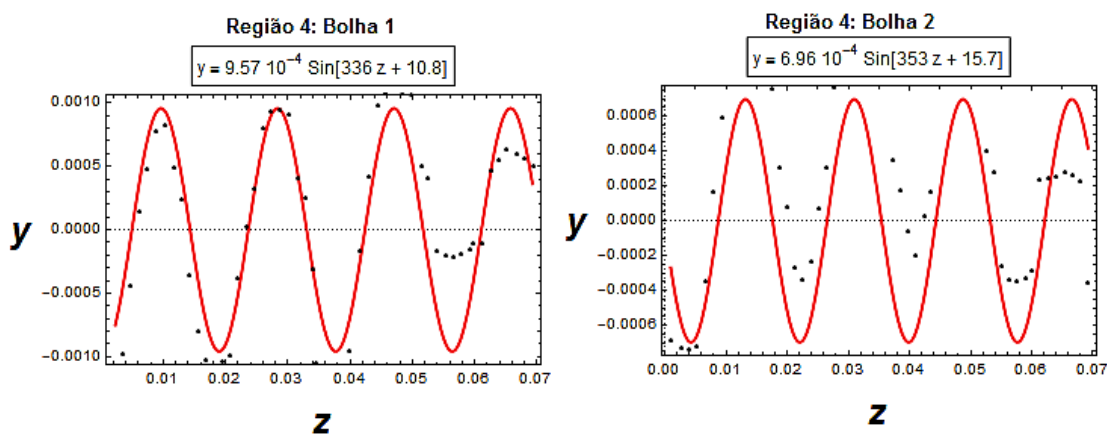


Figura 46: Movimento oscilatório da bolha na direção y e z e com a melhor curva que passa pelos pontos onde a bolha está oscilando, região 4, com temperatura de 55°C . Fonte: A autora.

Nas figuras 43 a 46, temos a posição horizontal da bolha em relação a sua posição vertical

(pontos pretos) e a melhor senoide que se ajusta a eles. Deste gráfico temos a amplitude de oscilação e o passo da oscilação.

Dadas as diversas medidas em diversas temperaturas realizadas, efetivamente busca-se determinar duas coisas, o coeficiente de arrasto para uma bolha de água com movimento oscilatório e a intensidade da força lateral responsável pela oscilação. Segundo as equações do capítulo 2, percebe-se que o coeficiente de arrasto dependerá da intensidade da componente vertical da velocidade da bolha e o ângulo que ela faz com a horizontal, ver a equação (2.104). Efetivamente temos duas possibilidades para o cálculo de C_d , a primeira é utilizar diretamente o valor experimental para as velocidades e para o ângulo, dado que a tangente do ângulo é o quociente de u_y por u_z , ou utilizar os parâmetros fornecidos pelos modelos obtidos através dos ajustes. As figuras 47 a 50 apresentam os dois métodos. Nota-se uma diferença de fase entre eles, contudo os valores médios apresentam grande concordância.

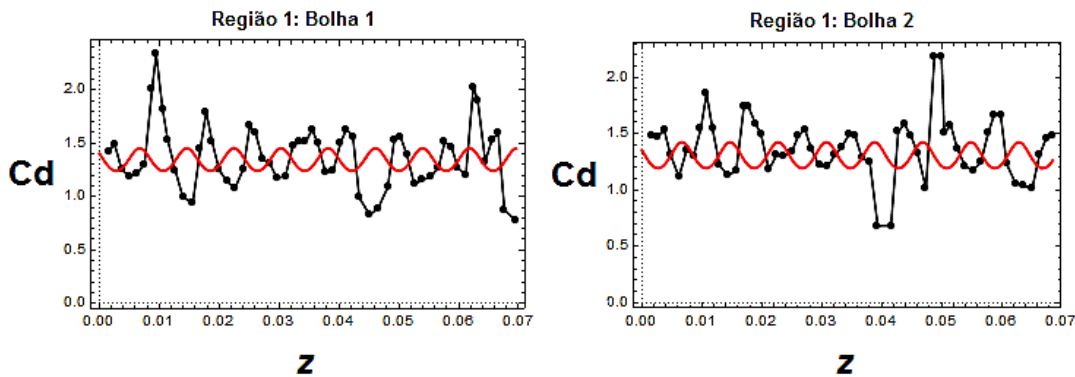


Figura 47: Representação do coeficiente de arrasto instantâneo segundo a posição da bolha utilizando a velocidade experimental e o ajuste da melhor curva, região 1, os pontos pretos são as velocidades retiradas do software Tracker sem nenhum ajuste. Fonte: A autora.

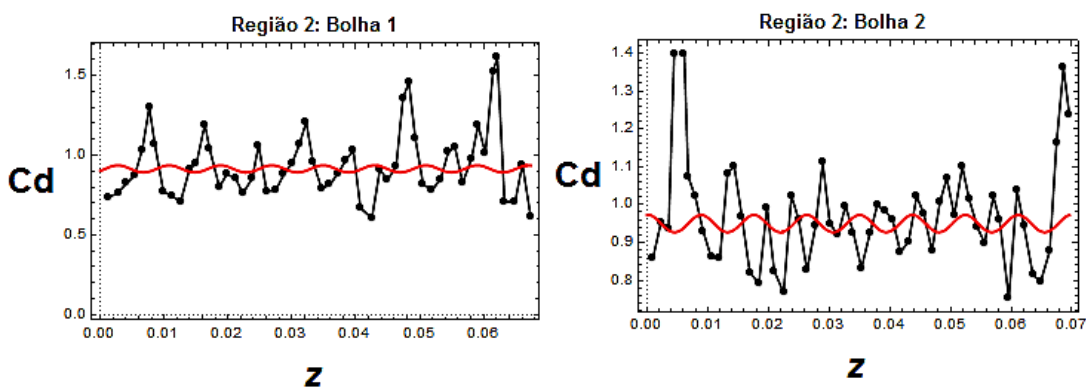


Figura 48: Representação do coeficiente de arrasto instantâneo segundo a posição da bolha utilizando a velocidade experimental e o ajuste da melhor curva, região 2, os pontos pretos são as velocidades retiradas do software Tracker sem nenhum ajuste. Fonte: A autora.

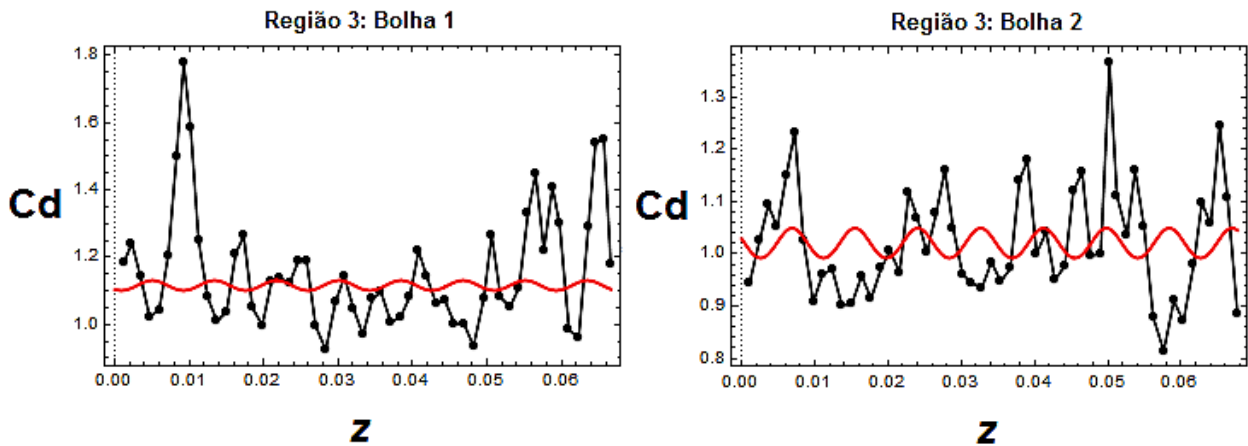


Figura 49: Representação do coeficiente de arrasto instantâneo segundo a posição da bolha utilizando a velocidade experimental e o ajuste da melhor curva, região 3, os pontos pretos são as velocidades retiradas do software Tracker sem nenhum ajuste. Fonte: A autora.

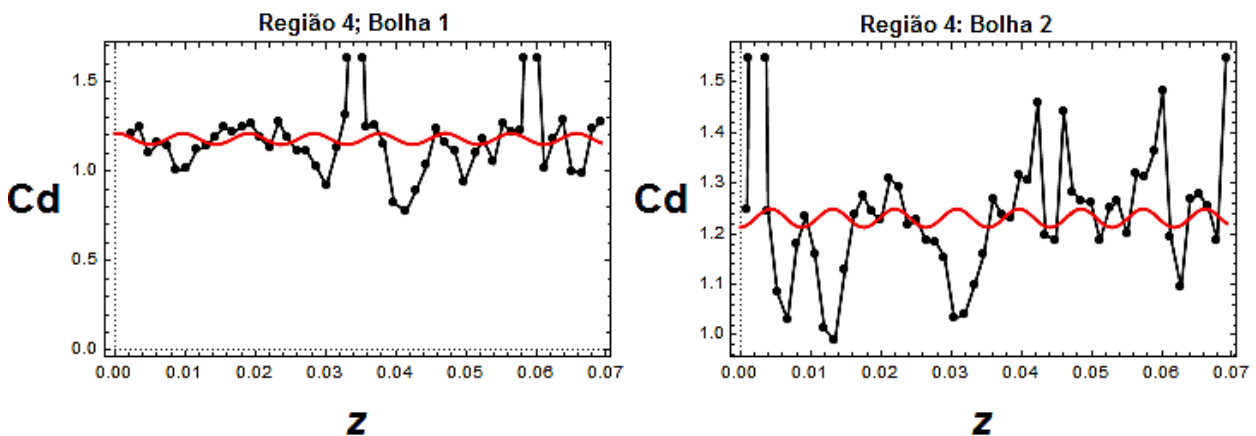


Figura 50: Representação do coeficiente de arrasto instantâneo segundo a posição da bolha utilizando a velocidade experimental e o ajuste da melhor curva, região 4, os pontos pretos são as velocidades retiradas do software Tracker sem nenhum ajuste. Fonte: A autora.

A influência do arrasto nas figuras 47 a 50, também conhecida como resistência do fluido, em hidrodinâmica, para corpos que se deslocam em meios gasosos ou líquidos. O que faz com que um corpo mude de posição é a força de arrasto que é proporcional ao quadrado da velocidade, e também, o formato do corpo é capaz de alterar o modo de como a força de arrasto atua sobre a bolha, tudo isso depende de como é o fluxo ao redor da bolha.

A fim de sintetizar os métodos utilizados para os cálculos das grandezas supracitados, destacam-se as equações utilizadas buscando-se poupar o tempo do leitor e indicar o que foi obtido.

- Para a análise experimental:

- ✓ Coeficiente de arrasto C_d :

$$C_d = \frac{8 g r k_w^2}{3 u_z u_t} \quad (4.1)$$

onde u_t é a velocidade total de subida da bolha, proveniente da soma vetorial das componentes das velocidades u_z e u_y , dada por

$$u_t = \sqrt{u_z^2 + u_y^2} \quad (4.2)$$

- ✓ Fator de correção k_w :

$$k_w = 1 - 0,23 \frac{r}{R} \quad (4.3)$$

- ✓ Variância:

$$var = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (C_{d_i} - \bar{C}_d)^2 \quad (4.4)$$

- ✓ Desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{var} \quad (4.5)$$

- Para o modelo:

- ✓ Coeficiente de arrasto médio quadrático $C_{d_{RMS}}$:

$$C_{d_{RMS}} = \frac{8 g r k_w^2}{3 u_0^2 \sqrt{1 + \frac{(k A)^2}{2}}} \quad (4.6)$$

- ✓ A incerteza do $\sigma_{C_{d_{RMS}}}$:

$$\sigma_{C_{d_{RMS}}} = \sqrt{C + D + E + F} \quad (4.7)$$

onde os termos $C = \frac{16A^2 g^2 k^4 r^2 k_w^4 \sigma A^2}{9(1+\frac{A^2 k^2}{2})^3 u_0^4}$, $D = \frac{16A^4 g^2 k^2 r^2 k_w^4 \sigma k^2}{9(1+\frac{A^2 k^2}{2})^3 u_0^4}$, $E = \frac{64g^2 k_w^4 \sigma r^2}{9(1+\frac{A^2 k^2}{2}) u_0^4}$ e $F = \frac{256g^2 r^2 k_w^4 \sigma u_0^2}{9(1+\frac{A^2 k^2}{2}) u_0^6}$.

- A intensidade da força lateral (*root mean square*) responsável pelo movimento oscilatório:

- ✓ Força Total:

$$f = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_w g k A \cos(k z + \phi) - \frac{2}{3} \pi r^3 \rho_w u_0^2 k^2 A \sin(k z + \phi) \quad (4.8)$$

- ✓ Força f_{RMS} :

$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{k}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{k}} (G - H)^2}$$

onde os termos $G = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_w g k A \cos(kz + \phi)$ e $H = \frac{2}{3}\pi r^3 \rho_w u_0^2 k^2 A \sin(kz + \phi)$

$$f_{RMS} = \frac{1}{3}\sqrt{2} \pi^2 \sqrt{A^2 k^2 r^6 (4g^2 + k^2 u_0^4) \rho_w^2} . \quad (4.9)$$

- Cálculo do Número de Reynolds:

$$R_e = \frac{\rho d u}{\mu} \quad (4.10)$$

Com este aparato teórico, obtivemos os valores do coeficiente de arrasto e da força lateral em cada região do tubo de análise. Considerou-se duas bolhas por região tomando-se a média das grandezas obtidas na água. Considere a tabela 21.

	Região 1 - 70°C		Região 2 - 70°C		Região 3 - 62°C		Região 4 - 55°C	
Bolhas	bolha 1	bolha 2	bolha 1	bolha 2	bolha 1	bolha 2	bolha 1	bolha2
Fator de correção	0,986	0,986	0,991	0,990	0,990	0,990	0,986	0,986
Média do CD	1,38	1,36	0,942	0,984	1,162	1,025	1,228	1,29
Variância do CD	0,093	0,114	0,047	0,030	0,032	0,011	0,131	0,115
Desvio padrão do CD	0,305	0,338	0,217	0,175	0,18	0,11	0,361	0,339
CDrms	1,34	1,29	0,914	0,949	1,116	1,019	1,18	1,23
Incerteza do CDrms	0,23	0,23	0,18	0,17	0,20	0,18	0,19	0,19
Força RMS (N)	$2,63 \cdot 10^{-5}$	$2,85 \cdot 10^{-5}$	$0,430 \cdot 10^{-5}$	$0,640 \cdot 10^{-5}$	$0,510 \cdot 10^{-5}$	$0,765 \cdot 10^{-5}$	$1,52 \cdot 10^{-5}$	$1,16 \cdot 10^{-5}$
R_e	718,40	779,92	534,12	449,01	516,02	579,96	736,36	723,93

Tabela 21: Valores das análises experimentais em cada região de observação. Fonte: A autora.

A tabela 21 apresenta uma média para o coeficiente de arrasto de uma bolha durante algumas oscilações e o coeficiente de arrasto médio quadrático proveniente do modelo. Dado que o desvio padrão da média no primeiro caso é de cerca de $\pm 0,17$ e a propagação dos erros

provenientes dos dados do modelo é cerca de $\pm 0,36$, conclui-se que é uma boa concordância entre os resultados, de fato se analisarmos o desvio padrão e a propagação de erros, os valores do coeficiente de arrasto médio estará no mesmo intervalo do coeficiente de arrasto médio quadrático.

No que tange à força hidrodinâmica a tabela 21 apresenta o valor médio quadrático para esta força. Mas é possível, seguindo o ferramental do capítulo 2 e os dados obtidos através dos experimentos, escrever um gráfico indicando a intensidade da força e seu sentido à medida que a bolha sobe. Abaixo estão as figuras 51 a 54 para diversas bolhas estudadas em diversas regiões do tubo.

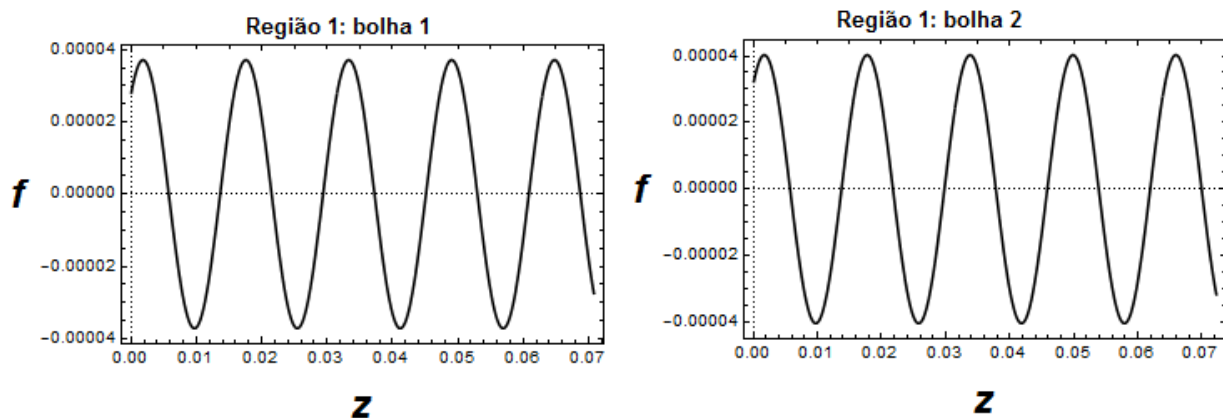


Figura 51: Representa a força total f na direção z , na região 1. Fonte: A autora.

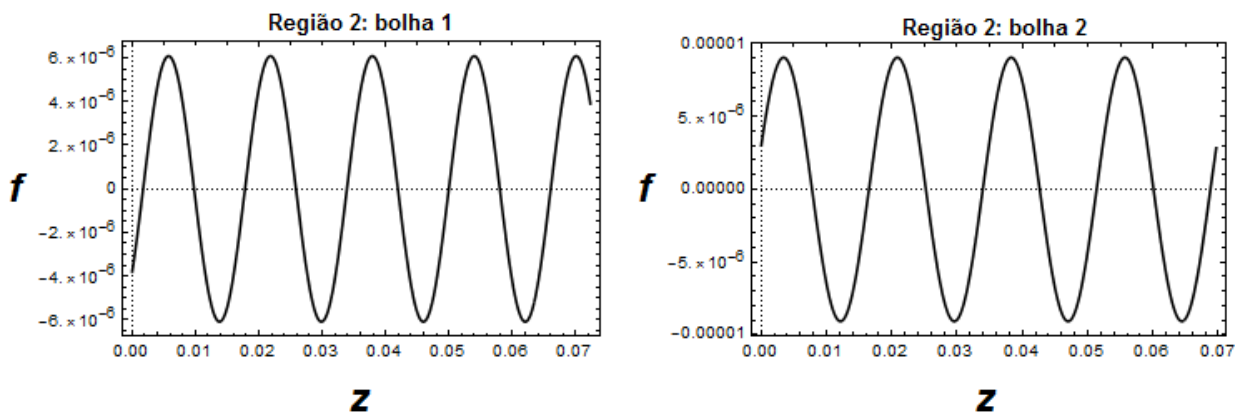


Figura 52: Representa a força total f na direção z , na região 2. Fonte: A autora.

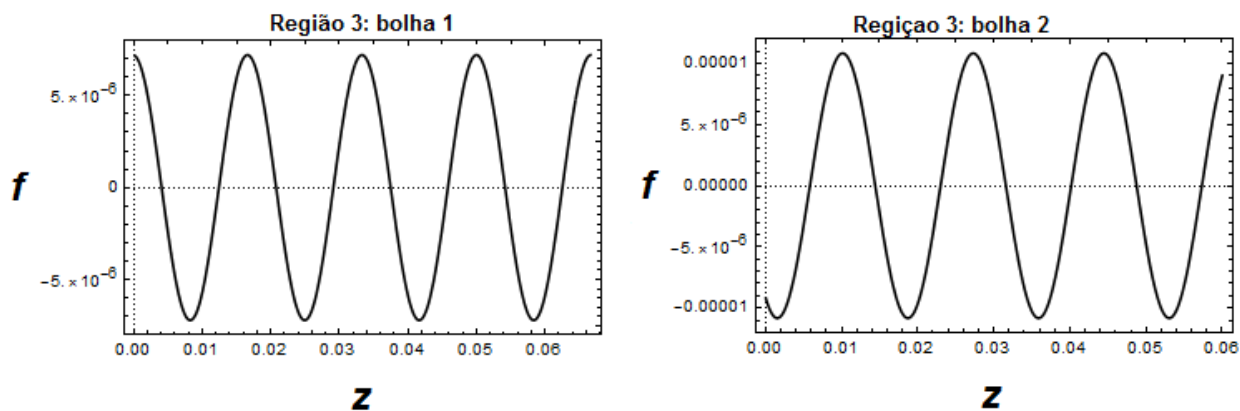


Figura 53: Representa a força total f na direção z , na região 3. Fonte: A autora.

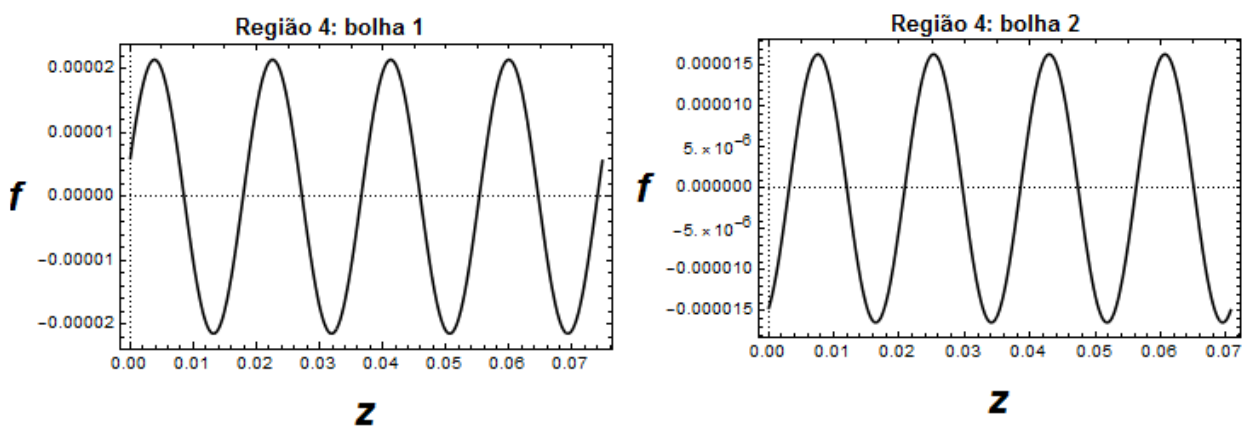


Figura 54: Representa a força total f na direção z , na região 4. Fonte: A autora.

Não foi possível, segundo as possibilidades da montagem, identificar mudanças efetivas no raio e no comportamento das bolhas à medida que estas sobem.

Em forma de síntese, apresentam-se todas as possíveis informações disponíveis pela montagem, que são representadas nas figuras 55 e 56. Ressata-se o fato de uma montagem tão simples poder fornecer informações tão diversas sobre um movimento tão intrigante.

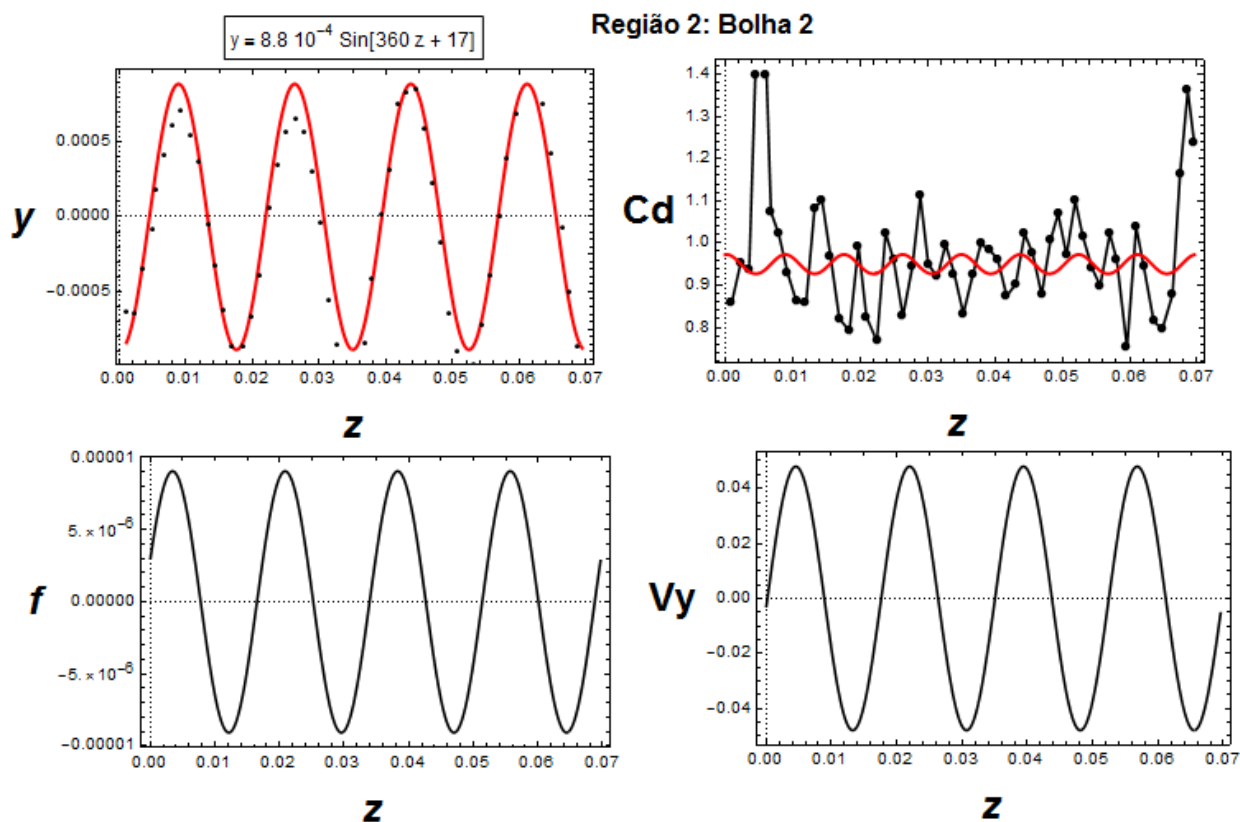


Figura 55: Caracterização do movimento oscilatório da bolha segundo a montagem proposta. Fonte: A autora.

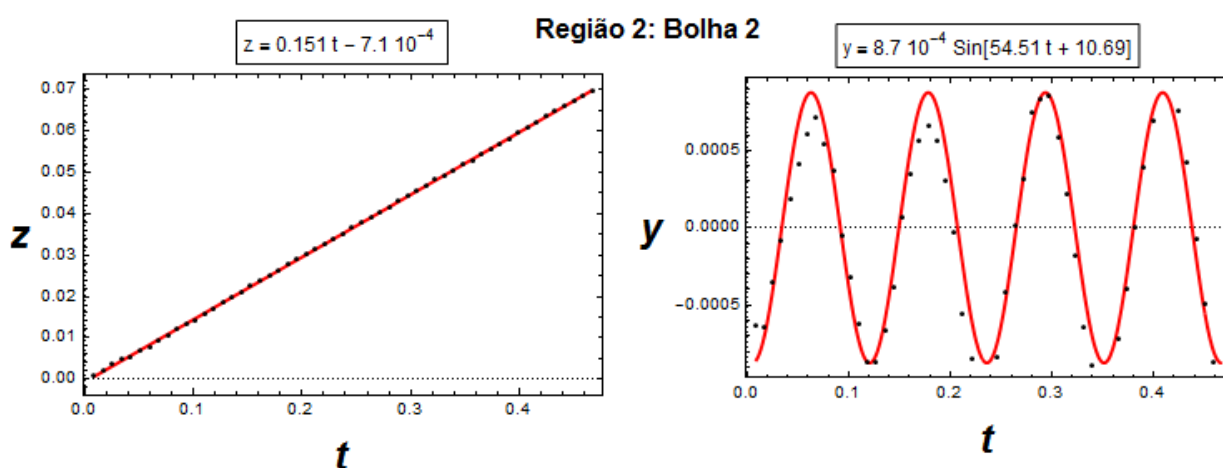


Figura 56: Representação do comportamento da bolha em relação às suas direções y e z . Fonte: A autora.

4.2 DISCUSSÕES

Do ponto de vista prático, investigações sobre o movimento de bolhas através de líquidos

possui bastante relevância para o estágio atual da indústria, por exemplos líquidos em ebulição, refrigerante em uma garrafa, como indicado na introdução. Contudo, essas investigações se mostram como um grande laboratório didático para o Ensino Médio com também para a Graduação, permitindo tocar em vários tópicos de física básica e física avançada. Ainda dado a complexidade do problema, esta investigação estabelece circunstâncias adequadas para se desenvolver as habilidades teóricas, experimentais e computacionais; o tripé sobre o qual a física atual se sustenta.

Contudo, dada a simplicidade da montagem, enormes limitações existem. As principais são a impossibilidade de se verificar a variação do tamanho da bolha à medida que ela subia e também, não ficou evidente a relação entre o coeficiente de arrasto e a temperatura do meio líquido. Observou-se que o movimento oscilatório ocorreu somente para temperaturas de 55°C, 62°C e 70°C, mas sem se estabelecer um claro contraste entre o tipo de movimento e o coeficiente de arrasto com a temperatura. Destaca-se ainda a impossibilidade de realizar estudos a temperaturas abaixo de 10°C.

No que tange às forças atuantes na bolha, destaca-se o papel da força de arrasto. Vários problemas clássicos em física envolvem forças resistivas, tais como o movimento de projéteis e o experimento de Millikan. Nestes casos as forças de arrasto são modeladas de duas maneiras, uma sendo proporcional ao módulo da velocidade, adequada para descrever o movimento de corpos com pequenas velocidades e outra sendo proporcional ao quadrado do módulo da velocidade adequada para velocidades maiores. Estes regimes em geral estão relativamente bem classificados segundo alguns intervalos do número de Reynolds [28-33]. No presente caso observou-se que os valores de número de Reynolds encontrados estão numa região de transição entre o movimento laminar e um movimento turbulento. Por isso que, utilizando-se o modelo de força de arrasto proporcional ao quadrado da velocidade, se deve ter o coeficiente de arrasto com alguma dependência da velocidade [31] indicando uma situação física mais interessante.

Quanto ao movimento de bolhas de ar em glicerina, a pesar de oferecerem peças gráficas mais bonitas e de melhor qualidade, não se observou bolhas com movimento oscilatório. Nota-se sim, uma drástica mudança na velocidade terminal devido à variação da viscosidade implicada pela alteração da temperatura. Talvez uma investigação com um intervalo maior de temperaturas possa fornecer melhores resultados. Para os valores considerados, os números de Reynolds sempre foram menores que um. Isso se deve aos cálculos do número de Reynolds, que definiu um

escoamento laminar para bolhas em glicerina, pelo fato, da glicerina ser mais viscosa, as bolhas se movimentavam em um caminho retilíneo.

CAPÍTULO 5: CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi feito um estudo sobre a mecânica de fluidos de um sistema que está presente em nosso dia a dia e que possui muitos desdobramentos pertinentes à física. O trabalho trás um estudo experimental sobre a dinâmica de uma bolha isolada no interior de um tubo (mangueira de PVC transparente), preenchido com água ou glicerina. O objetivo principal é avaliar o coeficiente de arrasto, C_D , da bolha e seu movimento ascendente. Com a utilização de ferramentas gráficas e numéricas foram obtidas informações sobre o número de Reynolds, velocidade, raio, entre outras. Assim foi possível propor um modelo para o cálculo do coeficiente de arrasto de uma bolha dentro de um tubo.

Utilizando uma câmera de celular acoplada ao um pedestal foi possível adquirir imagens das bolhas. A partir da realização de um processamento das imagens fomos capazes de avaliar o diâmetro, a velocidade e a posição das bolhas em muitos pontos de sua trajetória ao longo de todo o tubo. Foram feitas diversas análises numéricas para o movimento de uma bolha de ar. Para cada uma das análises numéricas foram obtidos diversos parâmetros para o movimento da bolha como: a velocidade de subida, o coeficiente de arrasto, o número de Reynolds, a força, entre outros.

Conclui-se que, a pesquisa nos trouxe diversos resultados, para o coeficiente de arrasto médio quadrático e o número de Reynolds, que tivemos que relacionar a prática experimental de um aparato simples com as teorias, que já vinham sendo estudadas para o movimento ascendente de bolhas oscilantes que possuem um caminho retilíneo ou oscilatório. Buscamos ainda ser cuidadosos no que tange as incertezas para que os dados chegassem mais próximo possível da realidade incluindo as respectivas incertezas.

Nota-se que a velocidade da bolha, trajetória e coeficiente de arrasto produziram resultados aceitáveis e comparáveis com alguns estudos disponíveis na literatura [36] para o estudo do movimento de bolhas. Os experimentos mostraram que bolhas pequenas apresentam movimento retilíneo em água e em glicerina. Enquanto bolhas maiores seguiram um movimento oscilatório para a água.

Ressalta-se, ainda a dependência explícita de C_d com a velocidade evidenciada nas figuras do capítulo 4 para o movimento oscilatório da bolha. Ainda, dado o movimento oscilatório, fica claro que a informação física mais relevante está a obtenção de um coeficiente de arrasto médio quadrático.

Como trabalhos futuros, sugere-se: aprimorar técnica de filmagem das bolhas, testar e desenvolver novas técnicas de medições de bolhas, desenvolver um trabalho que pode ser aplicado com alunos de Ensino Médio e Graduação trabalhando com a área de termodinâmica.

APÊNDICE A: MASSA ADICIONAL

Neste apêndice estudaremos o conceito de massa adicional. Tal conceito surge do fato de que um corpo se deslocando através de um fluido arrasta consigo uma porção deste fluido junto de si. Desta forma para se acelerar um corpo através de um fluido é necessária uma força maior que no caso de acelerar da mesma magnitude caso este esteja no vácuo.

Quando uma bolha se move através de um líquido, uma parte do líquido é transportada pela bolha implicando em uma área de seção reta maior e consequentemente implicando em maior impacto com as partículas do meio. A nova massa efetiva do corpo em movimento é denominada de massa virtual [36].

A fim de calcularmos a massa adicional de uma esfera inicia-se por considerar a pressão sobre um corpo (P),

$$P = \frac{F}{A_A} \Rightarrow F = P \cdot A_A \quad (\text{A.1})$$

onde, A_A é a área e F é a força exercida sobre essa área.

Podemos formular um modelo físico que fornecerá a massa adicional considerando-se uma bolha esférica, que se move através do fluido com velocidade \vec{u} , e que está sujeita a uma força viscosa de intensidade F_x devido à “colisão” do corpo com o fluido (observe a figura 57)

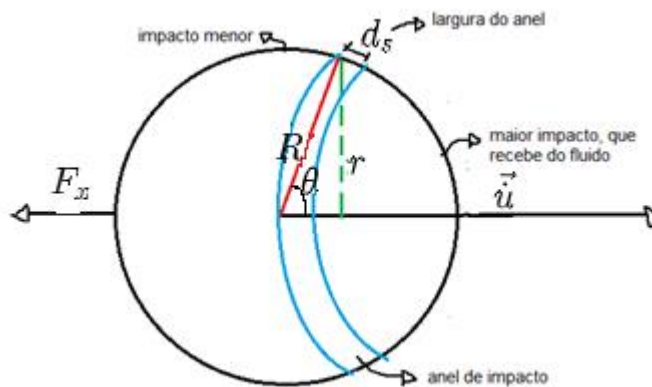


Figura 57: Representa o modelo de uma bolha, com a força atuando nessa bolha e as dimensões. Fonte: A autora.

Dado o anel constituinte da bolha apresentado na figura 57, percebe-se que somente a sua seção reta, oposta ao fluxo, é que efetivamente sofre colisão com as partículas que compõem o fluido, que é apresentada na figura 58.

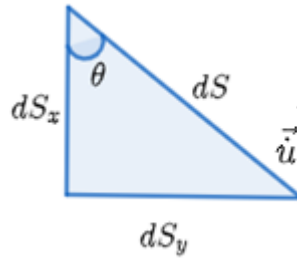


Figura 58: Obtenção da secção reta de um elemento de anel constituído da bolha oposto à direção do fluxo. Fonte: A autora.

Da figura 58, temos

$$\cos \theta = \frac{ds_x}{ds} \Rightarrow ds_x = \cos \theta ds \quad (\text{A.2})$$

A área desse anel é

$$dA_A = 2\pi r ds \quad (\text{A.3})$$

Ainda da figura 57, temos que

$$\text{sen } \theta = \frac{r}{R} \Rightarrow r = \text{sen} \theta \cdot R . \quad (\text{A.4})$$

Agora observe a figura 59. Dela temos que $ds = R d\theta$.

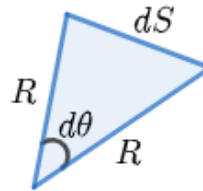


Figura 59: Representa a largura de um anel que compõem a bolha. Ainda R é o raio, largura do anel (ds) e o ângulo ($d\theta$). Fonte: A autora.

Então a área deste anel é dada por:

$$dA_A = 2\pi R^2 \text{sen } \theta d\theta \quad (\text{A.5})$$

E sua projeção perpendicular ao fluxo é:

$$dA_x = 2\pi R^2 \text{sen } \theta \cos \theta d\theta \quad (\text{A.6})$$

Após essas considerações, pode-se obter a força hidrostática sofrida pela bolha em seu deslocamento ao longo da direção x ,

$$F_x = \int_0^\pi P \cdot 2\pi R^2 \text{sen } \theta \cos \theta d\theta . \quad (\text{A.7})$$

Essa relação é a integração da força atuante em cada um dos anéis infinitesimais que

compõem a bolha esférica considerada.

Nesse ponto então deve-se obter a pressão exercida pelo fluido sobre a bolha esférica. Isso pode ser feito fazendo uso da teoria do potencial hidrodinâmico (ϕ) presente na referência [23].

Classicamente para um fluido que apresenta um fluxo contínuo de velocidade relativa u a pressão hidrodinâmica é fornecida pela equação de Bernoulli

$$P + \rho gh + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{constante} . \quad (\text{A.8})$$

onde h é uma altura.

A equação de Bernoulli de um fluxo contínuo implica se o fluido estiver escoando em estado de fluxo contínuo, que depende da pressão e da velocidade do fluido. Quanto mais rápido for o movimento do fluido, menor é a pressão à mesma altura do fluido.

Mas, no nosso caso, vamos utilizar a Equação de Bernoulli para um fluxo não contínuo,

$$P = -\rho \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2 \right], \quad (\text{A.9})$$

Com:

$$u^2 = |\nabla \phi|^2 \quad (\text{A.10})$$

sendo ϕ é o potencial hidrodinâmico do fluido dado por:

$$\vec{u} = \nabla \phi \quad (\text{A.11})$$

Para seguir com a forma mais simples possível de cálculo considere-se um fluxo irrotacional, isto é,

$$\nabla \times \vec{u} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Substituindo a equação (A.11) em (A.12) temos,

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad (\text{A.13})$$

ou seja,

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{A.14})$$

Nosso objetivo então é resolver a equação de Laplace para as condições de contorno de problema, que são:

- Simetria esférica

$$\phi = \phi(r \rightarrow \infty, \theta, t) \quad (\text{A.15})$$

isto é, não há fluxo no infinito.

- E também que a velocidade do fluido será igual à velocidade da bolha na superfície desta:

$$\vec{u}_f \cdot \hat{r}|_{r=R} = \vec{u}_b \cdot \hat{r}|_{r=R} \quad (\text{A.16})$$

onde \vec{u}_f é a velocidade do fluido e \vec{u}_b é a velocidade da bolha .

- Em coordenadas esféricas temos,

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = u_r , \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}|_{r=R} = -u_x \cos \theta = u_r . \quad (\text{A.18})$$

A solução da Equação de Laplace em coordenadas esféricas é bem conhecida [37]:

$$\phi \equiv \phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (\text{A.19})$$

Como, $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$, deve-se fazer $A_l = 0$. Assim a equação (A.19) fica da seguinte maneira,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) = \phi(r, \theta) \quad (\text{A.20})$$

Com a Equação de Laplace e a derivada em função do potencial hidrodinâmico desse fluxo temos que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1) \left(\frac{B_l(l+1)}{r^{l+2}} \right) P_l(\cos \theta) , \quad (\text{A.21})$$

onde B_l é determinado a partir da condição de contorno, na qual a velocidade da bolha na superfície é u_x de acordo com a equação (A.18) e utilizando os Polinômios de Legendre (P_l), temos,

$$\sum_{l=0}^{\infty} (-1) \left(\frac{B_l(l+1)}{r^{l+2}} \right) P_l(\cos \theta) = -u_x \cos \theta , \quad (\text{A.22})$$

Podemos escrever:

$$\left(-\frac{B_0}{r^2} P_0 \cos \theta \right) - \left(\frac{2B_1}{r^3} P_1 \cos \theta \right) - \left(\frac{3B_2}{r^4} P_2 \cos \theta \right) + \dots = -u_x \cos \theta \quad (\text{A.23})$$

Podemos utilizar a tabela 22 para os valores dos Polinômios de Legendre (P_l) [38]:

$P_0(x) = 1$	$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$P_1(x) = x$	$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

Tabela 22: Os seis primeiros polinômios de Legendre. Fonte: NETO, FRANKLIN PEDRO DA SILVA. Polinômios de Legendre e Quadratura Gaussiana, Brasil, 2018.

De acordo com a tabela 22,

$$\left(-\frac{B_0}{r^2}\right) - \left(\frac{2B_1}{r^3} \cos \theta\right) - \left(\frac{3B_2}{r^4} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)\right) + \dots = -u_x \cos \theta \quad (\text{A.24})$$

Por consistência, o único coeficiente B_l que não deve-se considerar zero é B_1 , assim,

$$B_1 = \frac{u_x R^3}{2} \quad (\text{A.25})$$

onde u_x é a velocidade da bolha que se move pelo fluido e R^3 é volume da bolha.

Então, da equação (A.19), temos

$$\phi = \frac{u_x R^3}{2r^2} \cos \theta \quad (\text{A.26})$$

onde r^2 é a distância do centro da bolha. Pelo teorema da unicidade [39], esta é a solução geral para o nosso problema.

Para encontrar a velocidade do fluido, precisamos usar a fórmula geral do gradiente em coordenadas esféricas, que é:

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (\text{A.27})$$

Da parte radial temos,

$$\frac{\partial}{\partial r} \phi = \frac{u_x R^3 \cos \theta}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{u_x R^3 \cos \theta}{r^3} \quad (\text{A.28})$$

Para a parte angular, temos,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \phi = \frac{u_x R^3}{2r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta = -\frac{u_x R^3 \sin \theta}{2r^2} \quad (\text{A.29})$$

Assim a velocidade do fluido será,

$$\vec{u} = \nabla \phi = \hat{r} \left[-\frac{u_x R^3 \cos \theta}{r^3} \right] + \hat{\theta} \left[-\frac{u_x R^3 \sin \theta}{2r^3} \right] \quad (\text{A.30})$$

De onde obtemos u^2 ,

$$u^2 = \frac{u_x^2 R^6}{r^6} \left(\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{4} \right) \quad (\text{A.31})$$

Na superfície da bolha ($r = R$), temos

$$u^2 = u_x^2 \left(\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{4} \right) \quad (\text{A.32})$$

Para determinação da pressão ainda é necessário calcular $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ (na superfície da bolha,

$r = R$),

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{r=R} = \dot{u}_x \frac{R}{2} \cos \theta \quad (\text{A.33})$$

Com as equações (A.33), (A.32), temos que a pressão exercida pelo fluido em uma esfera que se move através de uma velocidade u_x não uniforme,

$$P = -\rho \left[\dot{u}_x \frac{R}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\dot{u}_x^2 \left(\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{4} \right) \right) \right] \quad (\text{A.34})$$

Finalmente estamos em posição de fazer a integração da equação que nos fornece F_x ,

$$F_x = \int_0^\pi \left\{ -\rho \left[\dot{u}_x \frac{R}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\dot{u}_x^2 \left(\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{4} \right) \right) \right] \right\} \cdot 2\pi R^2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta \quad (\text{A.35})$$

Fazendo as devidas manipulações temos,

$$F_x = -\frac{2}{3} \rho \pi R^3 \dot{u}_x \quad (\text{A.36})$$

onde \dot{u}_x é a aceleração da bolha em relação ao fluido.

A equação (A.36) pode ser reescrita e comparada com a segunda Lei de Newton de onde identificamos uma massa superior à massa do corpo presente na equação. Esta massa adicional corresponde à massa do fluido que se desloca junto com a bolha à medida que essa atravessa o fluido e é dada por:

$$M_a = 2\rho \frac{V}{4} = \frac{1}{2} \rho V \quad (\text{A.37})$$

APÊNDICE B: TEORIA DOS ERROS

Uma afirmação inicial que fundamenta a teoria dos erros é que nada é exato em uma ciência experimental. Assim, o ato de se medir ou de se comparar, pode ter interferência de alguma maneira no fenômeno que está sendo observado, por exemplo, o movimento de uma bolha de ar em tubo. Essa comparação envolve erros de diversas origens (como tempo, comprimento, velocidade, etc.). Essas medidas possuem uma incerteza intrínseca devido às limitações dos próprios equipamentos utilizados na determinação da medida e também um termo estatístico referente ao processo de medição [40].

Quando estamos medindo uma grandeza física encontramos vários valores que caracterizam o que estamos procurando, todos verdadeiros, mas diferentes. De acordo com [40] deve-se, então, poder expressar a incerteza de uma medida de forma que outras pessoas possam entendê-las e para isso utiliza-se de uma linguagem universal. Também deve-se utilizar métodos adequados para combinar as incertezas dos diversos fatores que influenciam no resultado.

A incerteza é um parâmetro associado ao resultado de uma medida. Para a incerteza utilizamos o sinal de \pm que oferece a amplitude de incertezas utilizada pelo experimentador, de sua segurança, da facilidade de leitura da escala e do próprio instrumento de medida [40].

Para fazermos as medidas o experimentador pode utilizar alguns tipos de instrumentos de medida de comprimento como:

- Analógico (régua comum);
- Digital (celular).

Nos dispositivos analógicos:

- Ver o menor mínimo de 1 mm da régua padrão;
- A incerteza é a metade do menor intervalo mínimo $\frac{1}{2} = \pm 0,5$.

Nos dispositivos digitais:

- A incerteza é o menor intervalo do último número apresentado no dispositivo, como são números inteiros a incerteza está no (± 1) , caso o instrumento não forneça nenhum intervalo sobre o erro de medida.

Quando realizamos uma medida experimental, assumimos que o instrumento não tem erros, considerando a flutuação estatística para obter uma série de valores que em geral não são idênticos. Para se saber o valor mais provável da grandeza medida. Com a finalidade de

representar matematicamente estes efeitos que se define quantidades demonstradas pela estatística [6]. Para qualquer medida (m), temos que:

$$m = M \pm \delta \quad (\text{B.1})$$

onde M é o valor encontrado na medida e δ é a incerteza.

Para qualquer grandeza física f , temos a seguinte equação,

$$f = f(m) \rightarrow f = F \pm \delta_F \quad (\text{B.2})$$

Temos o caso geral, em que tomemos a grandeza g :

$$g = g(a, b, c) \quad (\text{B.3})$$

Com:

$$a = A \pm \delta_a , \quad (\text{B.4})$$

$$b = B \pm \delta_b , \quad (\text{B.5})$$

$$c = C \pm \delta_c . \quad (\text{B.6})$$

A equação final de g , deve ficar na seguinte forma:

$$g = G \pm \delta_g \quad (\text{B.7})$$

com G sendo o melhor valor medido:

$$G = g(A, B, C) \quad (\text{B.8})$$

e a incerteza de g é dada por:

$$\delta_g^2 = \left[\left(\frac{\partial g}{\partial a} \right) \Big|_A \right]^2 \delta_a^2 + \left[\left(\frac{\partial g}{\partial b} \right) \Big|_B \right]^2 \delta_b^2 + \left[\left(\frac{\partial g}{\partial c} \right) \Big|_C \right]^2 \delta_c^2 \quad (\text{B.9})$$

Vamos ver alguns exemplos para calcular a incerteza:

- Velocidade:

$$u \equiv u(x, t) \quad (\text{B.10})$$

$$velocidade = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{x}{t} \quad (\text{B.11})$$

Temos que calcular as derivadas parciais da equação B.11,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{T} , \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{T} \right) = -xT^{-2} = -\frac{X}{T^2} . \quad (\text{B.13})$$

Com:

$$x = X \pm \delta_x , \quad (\text{B.14})$$

$$t = T \pm \delta_t . \quad (\text{B.15})$$

A incerteza esta em u :

$$\delta_u^2 = \frac{\delta_x^2}{T^2} + \frac{X^2}{T^4} \delta_t^2 \quad (\text{B.16})$$

- Outro exemplo:

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \pi r^2 \rho_w u^2 \quad (\text{B.17})$$

Para cada fator da força de arrasto (F_D), terá a incerteza embutida.

$$C_D = \overline{C_D} \pm \delta_{C_D} \quad (\text{B.18})$$

$$\rho_w = \overline{\rho_w} \pm \delta_\rho \quad (\text{B.19})$$

$$r = \overline{r} \pm \delta_r \quad (\text{B.20})$$

$$u = \overline{u} \pm \delta_u \quad (\text{B.21})$$

Então:

$$\overline{F_D} = \frac{1}{2} \pi \overline{C_D} (\overline{r})^2 \overline{\rho_w} (\overline{u})^2 \quad (\text{B.22})$$

Podemos então encontrar a incerteza ou erro para a força de arrasto,

$$\begin{aligned} \delta_{F_D}^2 = & \left[\frac{1}{4} \pi^2 (\overline{r})^4 (\overline{\rho_w})^2 (\overline{u})^4 \right] \delta_{C_D}^2 + \left[\frac{1}{4} \pi^2 (\overline{r})^4 (\overline{C_D})^2 (\overline{u})^4 \right] \delta_{\rho_w}^2 \\ & + [(\overline{r})^2 \pi^2 (\overline{\rho_w})^2 (\overline{u})^4 (\overline{C_D})^2] \delta_r^2 + [(\overline{u})^2 \pi^2 (\overline{\rho_w})^2 (\overline{r})^4 (\overline{C_D})^2] \delta_u^2 \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Esses são alguns exemplos de cálculos de incerteza que podemos utilizar no experimento que estamos investigando sobre as bolhas de ar em ascensão.

Em uma incerteza mais geral para os alunos do Ensino Médio, podemos explicar a incerteza do coeficiente de arrasto da seguinte maneira:

$$C_D = \frac{8 g r}{3 (u)^2} \quad (\text{B.24})$$

Na qual podemos ter a incerteza em C_D , r e u , que são respectivamente o coeficiente de arrasto, o raio e a velocidade com seus valores máximo e mínimo. Assim temos:

$$C_D^+ = \frac{8 g r^+}{3 (u^-)^2}, \quad (\text{B.25})$$

$$C_D^- = \frac{8 g r^-}{3 (u^+)^2}. \quad (\text{B.26})$$

Por fim temos que:

$$C_D^{\mp} = \frac{8 g r^{\mp}}{3 (u^{\mp})^2}. \quad (\text{B.27})$$

REFERÊNCIAS

- [1] PROSPERETTIA ANDREA. Bubbles. *Physics of fluids* volume 16, number 6, june 2004.
- [2] TRIPATHI, SAHU E GOVINDARAJAN. Manoj Kumar, Kirti Chandra e Rama. Dynamics of an initially spherical bubble rising in quiescent liquid. Received 23 Sep 2014 | Accepted 12 Jan 2015 | Published 17 Feb 2015, Revista: *Nature Communications*.
- [3] MEEHAN et al. R. O'Reilly. Visualization of the Wake behind a sliding bubble. *Phys. Rev. Fluids*, 2017. et al. *Phys. Rev. Fluids*, 2017.
- [4] BELAIR, GÉRARD LIGER, Period-adding route in sparkling bubbles, *physical review* e 72, 037204 2005.
- [5] BELAIR, MARCHAL. Gerard Liber, Richard, et al. Study of Effervescence in a Glass of Champagne: Frequencies of Bubble Formation, Growth Rates, and Velocities of Rising Bubbles. *Am. J. Enol. Vitic., Vol. 50, No. 3, 1999*.
- [6] MISHRA, K.K. AND KAPOOR, M.L., 1978. Kinetics of liquid--gas reactions through bubbles. *Hydrometallurgy*, 3: 75-83.
- [7] COSTA, E.; DE LUCAS, A.; GARCIA, P. Fluid dynamics of gas-liquid-solid fluidized beds. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, vol. 25, 849-854, 1986.
- [8] REZA, S. *Fluid catalytic cracking handbook*. 3ª ed. Elsevier, 2012.
- [9] CLIFT, R. *Bubbles, Drops and Particles*. ACADEMIC PRESS New York San Francisco London 1978.
- [10] ANDRADE, ALAN SULATO DE. *Maquinas Hidráulicas*. Universidade Federal do Paraná, Curso de Engenharia Industrial Madeireira. Disponível em: <<http://www.madeira.ufpr.br/disciplinasalan/AT087-Aula03.pdf>>. Acesso em: 2 de julho.
- [11] Equação de Navier-Stokes. Disponível em: < <https://www.claymath.org/millennium-problems/navier%E2%80%93stokes-equation> >. Acesso em: 12 de setembro de 2021.
- [12] GENNES, P. G. E PROST, J. (1983). *The physics of liquid crystals* (second ed.). Oxford.
- [13] HALLIDAY, David. *Fundamentals of physics* / David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker. — 4th ed.
- [14] R. G. LUNNON: Fluid Resistance to Moving Spheres, *Proc. Roy. Soc. London (A)* 118, 680 (1928).
- [15] JUNIOR VILELA. Prof. Dr. Guanís, de Barros. *Dinâmica dos fluidos*. Disponível em: < <http://www.cpaqv.org/biomecanica/mecanicafluidos01.pdf> >. Acesso em: 12 de setembro de

2021.

[16] MUNSON, YOUNG e OKIISHI, Bruce R., Donald F., Theodore H. Fundamentos da Mecânica dos Fluidos. Tradução da 4^a edição americana: Euryale de Jesus Zerbini. São Paulo: Blucher, 2004.

[17] D. M. SHARAF, A. R. PREMLATA, MANOJ KUMAR TRIPATHI, BADARINATH KARRI, and KIRTI CHANDRA SAHU. Shapes and paths of an air bubble rising in quiescent liquids. Citation: Physics of Fluids 29, 122104 (2017). Published by the American Institute of Physics.

[18] VARGHESE MATHAI, XIAOJUE ZHU, CHAO SUN and DETLEF LOHSE. Mass and Moment of Inertia Govern the Transition in the Dynamics and Wakes of Freely Rising and Falling Cylinders. PhysRevLett.119.054501 - published 31 July 2017.

[19] KJETIL ELLINGSENY e FREDERIC RISSO. On the rise of an ellipsoidal bubble in water: oscillatory paths and liquid-induced velocity. J. Fluid Mech. (2001), vol. 440, pp. 235-268. Received 18 May 2000 and in revised form 2 February 2001.

[20] MICHAEL MIKSYS, JEAN-MARC VANDEN-BROECK and JOSEPH B. KELLER. Axisymmetric bubble or drop in a uniform flow. J. Fluid Me&. (1981), vol. 108, pp. 89-100.

[21] Software Tracker. Disponível em: <<https://physlets.org/tracker/>>. Acesso em: 12 de setembro de 2021.

[22] Software Mathematica. Disponível em: <<https://www.wolfram.com/mathematica/>>. Acesso em: 12 de setembro de 2021.

[23] L. D. LANDAU and E. M. LIFSHITZ. FLUID MECHANICS. Institute of Physical Problems, U.S.S.R. Academy of Sciences Volume 6 of Course of Theoretical Physics Second English Edition, Revised Translated from the Russian by J. B. SYKES and W. H. REID.

[24] MINGMING WU and MORTEZA GHARIB. Experimental studies on the shape and path of small air bubbles rising in clean water. Received 21, August 2001; accepted 24 April 2002; published 23, May 2002. Physics of Fluids, volume 14, number 7, July 2002.

[25] T. MAXWORTHY, C. GNANN, M. KURTEN AND F. DURST. Experiments on the rise of air bubbles in clean viscous liquids. J. Fluid! Mach (.1 996), col. 321, p p. 421-441.

[26] RICHARD FITZPATRICK. Mecânica dos Fluidos. Professor de Física da Universidade do Texas em Austin. Disponível em: <<https://farside.ph.utexas.edu/teaching/336L/Fluidhtml/Fluidhtml.html>>. Acesso em 17 de dezembro de 2021.

[27] GOMES, MARIA HELENA RODRIGUES. Apostila de Mecânica dos Fluidos. Disponível em: <<https://www.ufjf.br/engsanitariaeambiental/files/2012/09/Apostila-de-Mec%c3%a2nica-dos-Fluidos.pdf>>. Acesso em: 21 de abril de 2021.

- [28] Britannica, The Editors of Encyclopaedia. "Reynolds number". Encyclopedia Britannica, 18 Oct. 2019. Disponível em: <<https://www.britannica.com/science/Reynolds-number>>. Acesso em 21 de janeiro de 2022.
- [29] Escoamento ao redor de um cilindro em túnel de vento - USP. Disponível em: <http://sites.poli.usp.br/d/pme2237/Lab/PME2237-RL-Escoamento_Externo-site.pdf>. Acesso em: 05 de maio de 2021.
- [30] VERMILLION, Robert E. A look at some rising bubbles. Received 11 February 1974, resived 28 May 1974.
- [31] PREUKSCHAT, A. WERNER. Measurements of Drag Coefficients for Falling and Rising Spheres in Free Motion. California Institute of Technology, 1962.
- [32] R. C. WEAST, 1983, CRC Handbook of Chemistry and Physics, 64th edition, CRC Press, Boca Raton, FL.
- [33] PETER TIMMERMAN and JACOBUS P. VAN DER WEELE. On the rise and fall of a ball with linear or quadratic drag. Centre for Theoretical Physics, University of Twente, P.O. Box 217, 7500 AE Enschede, The Netherlands. Received 29 June 1998; accepted 16 October 1998.
- [34] M.Y. Shi, Mei Qi, C.G. Yi, D. Y. Liu, K.X. Zhang. Study on drag coefficient of rising bubble in still water. Materials Science and Engineering **231** (2017) 012093 doi:10.1088/1757-899X/231/1/012093.
- [35] SILVA, RICARDO GALDINO da. Estudo numérico de movimentação de partículas em escoamento. – Ed. Rev. – São Paulo, 2006. 238 p. Disponível em: <<https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3132/tde-08032007-181139/publico/DISSERTACAORicardoGaldinodaSilva.pdf>>. Acesso em: 6 de fevereiro de 2022.
- [36] PALADINO E MALISKA. EMILIO E. E CLOVIS R. Virtual mass in accelerated bubbly flows. SINMEC - Computational Fluid Dynamics Laboratory, Federal University of Santa Catarina, Florianopolis/SC – Brazil
- [37] JACKSON, JOHN DAVID, 1925, Classical Electrodynamics. 3rd ed.
- [38] NETO, FRANKLIN PEDRO DA SILVA. Polinômios de Legendre e Quadratura Gaussiana, Brasil, 2018.
- [39] MEDEIROS E OLIVEIRA, ADRIANO A. E MILTON DE L. Equações Diferenciais Ordinárias. Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/milton/disciplinas/edo/livro_edo.pdf>. Acesso em: 6 de julho de 2021.
- [40] 3 Teoria dos Erros, 1. Introdução as Grandezas Física, Unesp. Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/~malvezzi/downloads/Ensino/Disciplinas/LabFisI_Eng/ApostilaTeoriaDosErros.pdf>. Acesso em: 26 de fevereiro de 2021.