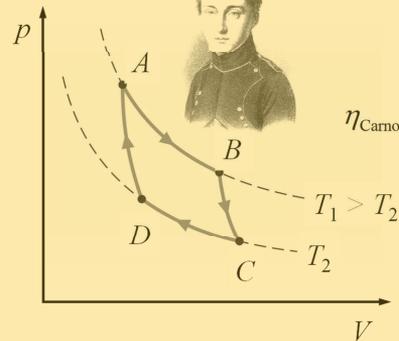
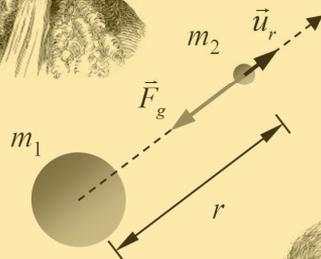


FÍSICA

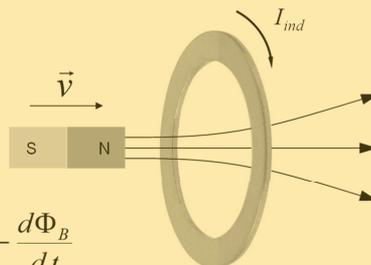
UMA INTRODUÇÃO



$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$



$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$



$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

FÍSICA

UMA INTRODUÇÃO

**ANTÓNIO JORGE SILVESTRE
PAULO IVO CORTEZ TEIXEIRA**

FÍSICA

UMA INTRODUÇÃO

TÍTULO

Física – Uma Introdução

AUTORES

António Jorge Silvestre
Paulo Ivo Cortez Teixeira

EDITOR

Instituto Politécnico de Lisboa

DESIGN DA CAPA

Pedro Antunes

EXECUÇÃO GRÁFICA

Gráfica 99

© Instituto Politécnico de Lisboa, 2022



**POLITÉCNICO
DE LISBOA**

Todos os direitos reservados

Março de 2022

ISBN 978-989-53068-4-8

DEP. LEGAL N.º 493 918/22

ÍNDICE

Prefácio	13
Agradecimentos	15
Símbolos e abreviaturas	17
1. GRANDEZAS E UNIDADES: O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES. CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE CÁLCULO VECTORIAL	25
1.1. Noção de grandeza	25
1.2. Unidades	26
1.3. Sistemas de unidades. O Sistema Internacional de unidades (SI)	27
1.4. Conversões de unidades.....	35
1.5. Dimensões das grandezas.....	36
1.6. Grandezas escalares e grandezas vectoriais	38
1.7. Noção de vector	38
1.8. Sistema de coordenadas. Noção de base. Componentes de um vector.....	39
1.9. Representação de um vector no espaço cartesiano	40
1.9.1. Norma e versor de um vector.....	41
1.9.2. Vector definido por dois pontos do espaço.....	41
1.9.3. Decomposição de vectores nas suas componentes cartesianas	42
1.9.3.1. Caso bidimensional	42
1.9.3.2. Caso tridimensional	43
1.10. Operações com vectores	44
1.10.1. Adição e subtracção de vectores	44
1.10.2. Produto de um escalar por um vector	45
1.10.3. Produto interno ou escalar de vectores	47
1.10.4. Produto externo ou vectorial de vectores	49
1.10.5. Derivadas e integrais de vectores	52
Problemas	54
2. CINEMÁTICA DO PONTO MATERIAL	57
2.1. Posição, trajectória e deslocamento	57
2.1.1. Equações paramétricas. Determinação da trajectória da partícula ...	58
2.2. Vector velocidade	59
2.3. Vector aceleração	60

2.4.	Movimento rectilíneo no espaço unidimensional	60
2.4.1.	<i>Movimento rectilíneo e uniforme</i>	61
2.4.2.	<i>Movimento rectilíneo uniformemente variado</i>	62
2.5.	Movimento rectilíneo nos espaços bi- e tridimensional	67
2.5.1.	<i>Movimento rectilíneo uniforme</i>	67
2.5.2.	<i>Movimento rectilíneo uniformemente variado</i>	67
2.6.	Movimento curvilíneo	68
2.7.	Movimento de projecteis	71
2.7.1.	<i>Movimento de um projectil lançado na horizontal</i>	74
2.7.2.	<i>Movimento de um projectil lançado obliquamente da origem</i>	76
2.7.3.	<i>Movimento de um projectil lançado obliquamente de uma altura y_0</i>	78
2.7.4.	<i>* Movimento de um projectil lançado por um ser humano</i>	80
2.8.	Movimento circular	81
2.8.1.	<i>Movimento circular uniforme</i>	85
2.8.2.	<i>Movimento circular uniformemente variado</i>	86
2.8.3.	<i>Semelhanças formais entre o m.r.u.v. e o m.c.u.v.</i>	88
2.9.	Movimento harmónico simples	88
2.9.1.	<i>Relação entre o m.h.s. e o movimento circular uniforme</i>	92
2.9.2.	<i>Representação gráfica de um m.h.s.</i>	93
	Problemas	95
3.	DINÂMICA	107
3.1.	As leis de Newton	107
3.1.1.	<i>Primeira lei de Newton ou lei da inércia</i>	107
3.1.2.	<i>Segunda lei de Newton ou lei fundamental da dinâmica</i>	108
3.1.3.	<i>Terceira lei de Newton ou lei da acção-reacção</i>	110
3.2.	Algumas forças	111
3.2.1.	<i>Peso ou força gravítica. A lei da gravitação universal de Newton</i> ...	111
3.2.2.	<i>Tensão</i>	113
3.2.2.1.	<i>Roldanas fixas e roldanas móveis</i>	113
3.2.2.2.	<i>Forças de tensão em sistemas fora do equilíbrio</i>	115
3.2.3.	<i>Força de reacção normal</i>	116
3.2.4.	<i>Força elástica</i>	116
3.2.5.	<i>Força de atrito</i>	118
3.2.5.1.	<i>Força de atrito entre superfícies sólidas</i>	118
3.2.5.2.	<i>Atrito em fluidos</i>	120
3.3.	Técnicas para aplicação das leis de Newton	123
3.4.	Forças no movimento circular	125
3.4.1.	<i>Pêndulo cónico</i>	126
3.4.2.	<i>* Automóvel que descreve uma curva, sem atrito ou com atrito...</i>	127

3.4.3. <i>Pêndulo simples</i>	129
Problemas	134
4. TRABALHO E ENERGIA	139
4.1. Trabalho e energia cinética	139
4.1.1. <i>Trabalho de uma força constante no espaço unidimensional</i>	140
4.1.2. <i>Trabalho de uma força constante no espaço tridimensional</i>	141
4.1.3. <i>Trabalho de uma força variável</i>	144
4.2. Forças conservativas e forças não conservativas	147
4.2.1. <i>Trabalho da força gravítica</i>	147
4.2.2. <i>Trabalho da força elástica</i>	148
4.2.3. <i>Trabalho da força de atrito</i>	149
4.3. Energia potencial	151
4.3.1. <i>Energia potencial gravítica</i>	151
4.3.2. <i>Energia potencial elástica</i>	152
4.3.3. <i>Energia potencial; caso geral</i>	153
4.4. Energia mecânica	155
4.4.1. <i>Corpo em queda livre por acção da força gravítica</i>	156
4.4.2. <i>Corpo em movimento ascensional sob acção da força gravítica ...</i>	157
4.4.3. <i>Energia no movimento harmónico simples</i>	157
4.5. * A energia potencial gravítica revisitada	159
4.5.1. <i>Velocidade de escape</i>	162
4.6. Energia térmica. O princípio de conservação da energia total	163
4.7. Potência	164
4.8. Rendimento	165
Problemas	167
5. MOMENTO LINEAR E SUAS APLICAÇÕES	171
5.1. Momento linear de uma partícula e sua conservação	171
5.1.1. $\vec{F}_R = m\vec{a}$ versus $\vec{F}_R = d\vec{p}/dt$	172
5.2. Impulso de uma força	173
5.3. Momento linear de um sistema de partículas e sua conservação	175
5.4. Choques ou colisões	177
5.4.1. <i>Choques unidimensionais</i>	178
5.4.2. <i>Choques bidimensionais</i>	181
5.4.3. * <i>Porque é legítimo desprezar a força da gravidade no estudo das colisões?</i>	184
5.5. * Movimento de sistemas de massa variável	185
5.5.1. <i>Movimento de sistemas com admissão de massa</i>	186
5.5.2. <i>Movimento de sistemas com ejeção de massa</i>	188
5.5.2.1. <i>Movimento de um foguete sob acção da gravidade</i>	189
5.5.3. <i>Movimento de sistemas com admissão e ejeção de massa</i>	192

5.6.	Centro de massa de um sistema de partículas materiais	193
5.7.	Movimento em relação ao centro de massa	196
5.8.	Energia cinética translacional de um sistema de partículas materiais	197
	Problemas	199
6.	CAMPO ELECTROSTÁTICO	207
6.1.	Natureza da interacção entre cargas eléctricas	207
6.2.	Lei de Coulomb da interacção entre duas cargas pontuais	207
6.3.	Campo eléctrico gerado por uma carga pontual	210
6.4.	Potencial eléctrico gerado por uma carga pontual.....	211
	6.4.1. <i>Trabalho realizado pelo agente exterior</i>	213
	6.4.2. <i>Relações entre o campo eléctrico de uma carga pontual e as superfícies equipotenciais</i>	215
6.5.	Sistemas de cargas eléctricas pontuais.....	216
	6.5.1. <i>Lei de Coulomb para distribuições discretas de cargas pontuais...</i>	216
	6.5.2. <i>Campo e potencial eléctricos gerados por distribuições discretas de cargas pontuais.....</i>	216
	6.5.3. <i>Energia potencial electrostática de uma distribuição discreta de cargas pontuais.....</i>	218
6.6.	Materiais condutores, dieléctricos e semi-condutores. Características de um material dieléctrico.....	222
6.7.	Condensadores	224
	6.7.1. <i>Noção de capacidade eléctrica</i>	224
	6.7.2. <i>Energia potencial electrostática armazenada num condensador carregado...</i>	225
	6.7.3. <i>Condensador de placas paralelas.....</i>	225
	6.7.4. <i>Leis de associação de condensadores</i>	227
	6.7.4.1. <i>Associação em série.....</i>	227
	6.7.4.2. <i>Associação em paralelo</i>	228
	Problemas	232
7.	CORRENTE ELÉCTRICA ESTACIONÁRIA	237
7.1.	Intensidade de corrente eléctrica	237
7.2.	Resistência eléctrica e resistividade. Lei de Ohm	238
7.3.	Análise de circuitos resistivos.....	241
	7.3.1. <i>Leis de Kirchhoff</i>	242
	7.3.2. <i>Leis de associação de resistências</i>	245
	7.3.2.1. <i>Associação em série.....</i>	245
	7.3.2.2. <i>Associação em paralelo</i>	246
7.4.	Potência eléctrica	248
	7.4.1. <i>Potência posta em jogo num circuito.....</i>	248
	7.4.2. <i>Potência posta em jogo numa resistência: lei de Joule.....</i>	249

7.5.	Geradores de energia eléctrica	250
7.5.1.	<i>Força electromotriz e resistência interna de um gerador.....</i>	250
7.5.2.	<i>Medição da diferença de potencial aos terminais de um gerador... .</i>	252
7.5.3.	<i>Rendimento de um gerador.....</i>	253
7.6.	Receptores de energia eléctrica	255
7.6.1.	<i>Força contra-electromotriz e resistência interna de um receptor ...</i>	256
7.6.2.	<i>Rendimento de um receptor.</i>	257
	Problemas	259
8.	CAMPO ELECTROMAGNÉTICO	265
8.1.	Campo magnético dos ímanes	265
8.2.	Campo de indução magnética e campo magnético.	267
8.2.1.	<i>Linhas de campo magnético.....</i>	268
8.2.2.	<i>Campos magnéticos uniformes e não uniformes.....</i>	268
8.2.3.	<i>Ordem de grandeza dos campos magnéticos.</i>	269
8.3.	Experiência de Oersted.....	270
8.4.	Lei de Biot-Savart	271
8.5.	Interação de uma carga eléctrica em movimento com um campo magnético	271
8.6.	Campo magnético gerado por correntes eléctricas	275
8.6.1.	<i>Condutor rectilíneo infinito</i>	276
8.6.2.	<i>Espira circular.</i>	277
8.6.3.	<i>Solenóide.</i>	278
8.7.	Indução electromagnética	279
8.7.1.	<i>Fluxo de indução magnética</i>	281
8.7.2.	<i>Lei de Faraday e lei de Lenz</i>	282
8.7.3.	<i>Auto-indução de uma bobina.....</i>	285
8.7.4.	<i>Leis de associação de auto-induções</i>	287
8.7.4.1.	<i>Associação em série.....</i>	288
8.7.4.2.	<i>Associação em paralelo</i>	288
8.7.5.	<i>Energia armazenada numa bobina de auto-indução.....</i>	289
8.8.	Campo magnético em meios materiais	291
8.8.1.	<i>Tipos de materiais magnéticas.....</i>	291
8.8.2.	<i>Relação entre campo de indução magnética e campo magnético em meios materiais</i>	293
8.8.3.	<i>Aplicação: fogões de indução</i>	294
	Problemas	296
9.	TEMPERATURA E CALOR.....	299
9.1.	Sistemas termodinâmicos. Sistemas fechados, abertos e isolados.....	299
9.2.	Propriedades de um sistema.....	300

9.3.	Estados termodinâmicos. Estados de equilíbrio	300
9.4.	Temperatura e equilíbrio térmico: lei zero da Termodinâmica	301
9.5.	Termômetros e escalas de temperatura	302
9.6.	Termômetros de gás e a escala de Kelvin	303
9.7.	Dilatação térmica	305
9.8.	Mecanismos de transferência de calor.....	306
9.8.1.	<i>Condução</i>	307
9.8.2.	<i>Convecção</i>	308
9.8.3.	<i>Irradiação</i>	309
Problemas	311
10.	EQUAÇÕES DE ESTADO E PROPRIEDADES TÉRMICAS DA MATÉRIA.....	313
10.1.	Variáveis de estado e equações de estado	313
10.1.1.	<i>Equação de estado dos gases ideais</i>	315
10.1.2.	<i>Equação de estado de Van der Waals</i>	316
10.2.	Propriedades moleculares da matéria.....	318
10.3.	Modelo cinético-molecular de um gás ideal	319
10.4.	Calor específico	322
10.5.	* Distribuição de Maxwell-Boltzmann	324
Problemas	326
11.	PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA.....	329
11.1.	Processos termodinâmicos	329
11.2.	Trabalho realizado em processos termodinâmicos	330
11.3.	Primeira lei da Termodinâmica	332
11.4.	Principais tipos de processos termodinâmicos.....	335
11.4.1.	<i>Aplicação da primeira lei da Termodinâmica a gases ideais</i>	336
11.4.2.	<i>Processo adiabático num gás ideal</i>	337
Problemas	339
12.	SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA.....	343
12.1.	Segunda lei da Termodinâmica	343
12.2.	Ciclo de Carnot	345
12.3.	Outros ciclos	349
12.3.1.	<i>Ciclo de Otto</i>	349
12.3.2.	<i>Ciclo de Diesel</i>	351
12.3.3.	<i>Ciclo de Brayton-Joule</i>	354
12.3.4.	<i>Ciclo de Stirling</i>	355
12.3.5.	<i>Ciclo de Ericsson</i>	357
12.4.	Entropia	359
Problemas	362

APÊNDICE 1. CONSTANTES FÍSICAS FUNDAMENTAIS	365
APÊNDICE 2. ALGUNS DADOS ASTRONÓMICOS	367
APÊNDICE 3. CONVERSÃO DE UNIDADES	369
A3.1. O sistema CGS	369
A3.2. Outros factores de conversão	369
APÊNDICE 4. ALFABETO GREGO	373
APÊNDICE 5. RELAÇÕES MATEMÁTICAS	375
A5.1. Geometria	375
A5.2. Trigonometria	375
A.5.2.1. Funções trigonométricas	375
A.5.2.2. Identidades trigonométricas	375
A.5.2.3. Lei dos senos e lei dos co-senos	376
A5.3. Desenvolvimentos em série de Taylor	376
A5.4. Derivadas e primitivas	377
A.5.4.1. Derivadas e primitivas de funções elementares	377
A.5.4.2. Outras primitivas	377
A.5.4.3. Integração por partes	378
A5.5. Coordenadas polares, esféricas e cilíndricas	378
A.5.5.1. Coordenadas polares, (r, θ)	378
A.5.5.2. Coordenadas esféricas, (r, θ, φ)	379
A.5.5.3. Coordenadas cilíndricas, (r, φ, z)	379
BIBLIOGRAFIA	381
SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS PROPOSTOS	383

PREFÁCIO

O presente livro destina-se ao ensino de uma primeira disciplina de Física de cursos de ciências ou de engenharia, compreendendo o cânone da Física Clássica: Mecânica, Electromagnetismo e Termodinâmica. Tem a sua génese na unidade curricular de “Física” que temos vindo a leccionar há vários anos no segundo semestre do primeiro ano da Licenciatura em Matemática Aplicada à Tecnologia e à Empresa do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa – ISEL. É, portanto, um livro marcadamente pedagógico, em que procurámos que a exposição teórica fosse sempre acompanhada de exemplos que permitam uma mais fácil assimilação das diferentes matérias.

Sem prejuízo do rigor, procurámos concentrar-nos no que pensamos ser o essencial da Física Clássica que um futuro cientista ou engenheiro deve dominar e que poderá, eventualmente, aprofundar em disciplinas mais avançadas. O texto segue a ordem tradicional de apresentação das matérias. Depois de um capítulo introdutório sobre grandezas e unidades, bem como de revisão de conceitos fundamentais de cálculo vectorial (capítulo 1), iniciamos o estudo da Mecânica com a cinemática do ponto material (capítulo 2). Seguem-se as leis de Newton da dinâmica e o modo de as aplicar, acompanhadas de uma discussão dos principais tipos de forças que ocorrem em problemas de Mecânica (capítulo 3). Introduzimos então as grandezas trabalho e energia, assim como as relações entre elas, que permitem simplificar muito a resolução de problemas de dinâmica (capítulo 4). Terminamos a Mecânica com o estudo da dinâmica de sistemas de partículas materiais, introduzindo o conceito de momento linear e respectiva lei de conservação, que nos permitem tratar os choques entre partículas e nos conduzem ao conceito de centro de massa (capítulo 5). Iniciamos o estudo do Electromagnetismo com o campo electrostático no vácuo e na matéria (capítulo 6), seguido dos circuitos de corrente eléctrica estacionária, de inegável relevância prática (capítulo 7), e das relações entre a electricidade e o magnetismo, com particular ênfase no fenómeno da indução electromagnética (capítulo 8). A parte final do livro é dedicada à Termodinâmica: principiamos com uma discussão geral dos conceitos de temperatura e calor, incluindo escalas de temperatura e mecanismos de transferência de calor (capítulo 9). Aborda-se em seguida as propriedades térmicas da matéria e como são descritas por variáveis de estado e equações de estado, utilizando como ilustração os modelos do gás ideal e do gás de Van der Waals (capítulo 10). Avança-se depois para o estudo da primeira lei da Termodinâmica e dos principais processos termodinâmicos (capítulo 11). Concluimos com uma breve discussão sobre a segunda lei da Termodinâmica, com especial ênfase no conceito de entropia e sua interpretação microscópica, bem como a análise do rendimento de vários ciclos termo-

dinâmicos (capítulo 12). Os tópicos assinalados com * podem ser omitidos sem qualquer perda de continuidade – embora sugerimos que, neste caso, se aconselhe a sua leitura. Deixamos ao docente a decisão quanto ao nível de pormenor a que é apropriado descer em cada circunstância.

Como acima referido, o texto contém um número razoável de problemas resolvidos (“Exemplos”), que se destinam a clarificar conceitos e ilustrar as principais técnicas de resolução de exercícios. Além disso, no fim de cada capítulo pode ser encontrado um conjunto variado de problemas propostos que permitem testar a compreensão dos conteúdos teóricos e que aconselhamos vivamente os alunos a tentar resolver por si. A sua resolução permitirá sedimentar a teoria e ganhar a necessária confiança para a aplicar correctamente nas mais variadas situações.

O livro termina com um conjunto de apêndices contendo informação útil, como sejam – entre outros – os valores das principais constantes físicas, factores de conversão entre unidades e uma súmula de resultados matemáticos que inclui relações trigonométricas, tabelas de derivadas e primitivas, e as relações entre o sistema de coordenadas cartesianas e os principais sistemas de coordenadas curvilíneas). Incluímos igualmente no fim do livro um conjunto de referências bibliográficas razoavelmente extenso que permitirá, a quem o desejar, aprofundar ou alargar o conhecimento das diferentes matérias tratadas.

Os capítulos 1 a 5 resultam da reprodução ou adaptação de matérias tratadas com maior profundidade do nosso livro *Mecânica – uma Introdução*, publicado na editora Gradiva e a quem agradecemos a autorização para a sua reprodução no presente livro.

Este livro foi redigido seguindo as regras ortográficas pré-acordo ortográfico. A razão desta opção é simples: é a ortografia que os autores dominam.

Os Autores,
Lisboa, Maio de 2021.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos colegas Professores Augusto Barroso, João Paulo Casquilho, José Maria Tavares e Pedro Patrício a leitura atenta do manuscrito do presente livro e os seus muitos comentários, sugestões e correcções. Todos os erros e imprecisões que porventura nele subsistam são, evidentemente da nossa responsabilidade, e manifestamos desde já o nosso interesse em receber comentários, críticas e sugestões de leitores. Só assim o poderemos melhorar.

Ao Pró-Presidente do IPL Professor José Cavaleiro Rodrigues e a toda a equipa da imprensa do IPL agradecemos todo o cuidado colocado no processo editorial que conduziu à publicação deste livro.

Estamos igualmente gratos às unidades de investigação a que pertencemos – CeFEMA e CFTC –, através dos seus Projectos Estratégicos UID/CTM/04540/2019, UIDB/00618/2020 e UIDP/00618/2020.

A.J.S. dedica o livro à Teresa e à Margarida. P.I.C.T. dedica-o aos seus Pais.

SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

SÍMBOLOS

\bar{a}, a	Aceleração, norma ou valor da aceleração
\bar{a}_{CM}, a_{CM}	Aceleração do centro de massa, norma ou valor da aceleração do centro de massa
\bar{a}_{ij}, a_{ij}	Aceleração da partícula i em relação à partícula j , norma ou valor da aceleração da partícula i em relação à partícula j
\bar{a}_{max}, a_{max}	Aceleração máxima, norma ou valor da aceleração máxima
\bar{a}_n, a_n	Aceleração normal, norma ou valor da aceleração normal
\bar{a}_t, a_t	Aceleração tangencial, norma ou valor da aceleração tangencial
a_x	Componente x da aceleração
a_y	Componente y da aceleração
a_z	Componente z da aceleração
a, b	Constantes da equação de estado de Van der Waals
A	Área de uma superfície
A	Amplitude
A	Coefficiente da lei de Stokes
\vec{B}, B	Campo de indução magnética, valor do campo de indução magnética
\vec{B}_P, B_P	Campo de indução magnética no ponto P , valor do campo de indução magnética no ponto P
c	Velocidade da luz no vácuo
c	Calor específico por massa
c_V, c_P	Calor específico por massa a volume constante ou a pressão constante
C	Capacidade eléctrica de um condensador
C	Calor específico molar
C_c	Coefficiente de convecção
C_{eq}	Capacidade eléctrica equivalente de uma associação de condensadores
C_R	Coefficiente de restituição
C_V, C_P	Calor específico molar a volume constante ou a pressão constante
d	Distância entre as placas de um condensador de placas paralelas
e	Emissividade
E	Energia mecânica

\vec{E}, E	Campo eléctrico, valor do campo eléctrico
E_f	Energia mecânica final
E_i	Energia mecânica inicial
\vec{E}_P, E_P	Campo eléctrico no ponto P , valor do campo eléctrico no ponto P
ΔE	Variação da energia mecânica
f	Frequência
$f(v)$	Função de distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann
\vec{F}, F	Força, norma ou valor da força
\vec{F}_c, F_c	Força conservativa, norma ou valor da força conservativa
\vec{F}_{def}, F_{def}	Força deformadora realizada pelo agente exterior, norma ou valor da força deformadora realizada pelo agente exterior
\vec{F}_e, F_e	Força elástica, norma ou valor da força elástica
\vec{F}_{ext}, F_{ext}	Força resultante exterior, norma ou valor da força resultante exterior
\vec{F}_f^a, F_f^a	Força de atrito num fluido, norma ou valor da força de atrito num fluido
\vec{F}_g, F_g	Força gravítica ou peso, norma ou valor da força gravítica ou peso
\vec{F}_{gn}, F_{gn}	Componente normal da força gravítica, norma ou valor da componente normal da força gravítica
\vec{F}_{gt}, F_{gt}	Componente tangencial da força gravítica, norma ou valor da componente tangencial da força gravítica
\vec{F}_i, F_i	Força resultante que actua a partícula i , norma ou valor da força resultante que actua a partícula i
$\vec{F}_i^{ext}, F_i^{ext}$	Resultante das forças exteriores que actuam a partícula i , norma ou valor da resultante das forças exteriores que actuam a partícula i
\vec{F}_I, F_I	Força de impulsão, norma ou valor da força de impulsão
\vec{F}_{ij}, F_{ij}	Força interior exercida sobre a partícula i pela partícula j , norma ou valor da força interior exercida sobre a partícula i pela partícula j
\vec{F}_k^a, F_k^a	Força de atrito cinético, norma ou valor da força de atrito cinético
\vec{F}_{med}, F_{med}	Força média, norma ou valor da força média
\vec{F}_n, F_n	Componente normal da força \vec{F} , norma ou valor da componente normal da força \vec{F}
\vec{F}_{pot}, F_{pot}	Força potente, norma ou valor da força potente
\vec{F}_R, F_R	Força resultante, norma ou valor da força resultante
$\vec{F}_R^{ext}, F_R^{ext}$	Resultante das forças exteriores, norma ou valor da resultante das forças exteriores
$\vec{F}_{reac}^a, F_{reac}^a$	Força de reacção de admissão, norma ou valor da força de reacção de admissão
$\vec{F}_{reac}^e, F_{reac}^e$	Força de reacção de ejeção, norma ou valor da força de reacção de ejeção
\vec{F}_{res}, F_{res}	Força resistente, norma ou valor da força resistente
\vec{F}_s^a, F_s^a	Força de atrito estático, norma ou valor da força de atrito estático
\vec{F}_t, F_t	Componente tangencial da força \vec{F} , norma ou valor da componente tangencial da força \vec{F}
\vec{g}, g	Aceleração gravítica, norma ou valor da aceleração gravítica
G	Constante de gravitação universal

$[G]$	Dimensões da grandeza G
h	Altura
H	Fluxo de calor
\vec{H}, H	Campo magnético, valor do campo magnético
\vec{H}_P, H_P	Campo magnético no ponto P , valor do campo magnético no ponto P
$i(t)$	Intensidade de corrente eléctrica (caso geral)
I	Intensidade de corrente eléctrica estacionária
\vec{i}	Versor do eixo Ox
\vec{j}	Versor do eixo Oy
\vec{J}, J	Impulso de uma força, norma ou valor do impulso de uma força
J_g	Norma ou valor do impulso da força gravítica
\vec{k}	Versor do eixo Oz
k	Constante elástica de uma mola
k	Condutividade térmica
k_B	Constante de Boltzmann
K	Energia cinética
K'	Energia cinética no referencial do centro de massa
K_{CM}	Energia cinética do centro de massa
K_f	Energia cinética final
K_i	Energia cinética inicial
K_i	Energia cinética da partícula i
K_{trans}	Energia cinética de translação
ΔK	Varição da energia cinética
l, L	Distância, comprimento
ΔL	Varição de comprimento
L	Coefficiente de auto-indução
L_{eq}	Coefficiente de auto-indução equivalente de uma associação de auto-induções
m	Massa
\dot{m}_a	Caudal mássico de admissão
\dot{m}_e	Caudal mássico de ejeção
m_i	Massa da partícula i
Δm	Varição de massa
Δm	Massa admitida ou massa ejectada
M	Massa
M	Massa molar de uma substância
M_T	Massa da Terra
n	Densidade de espiras num solenóide
n	Número de moles de partículas presentes num dado volume
\vec{N}, N	Força de reacção normal, norma ou valor da força de reacção normal
N	Número de partículas presentes num dado volume
N_A	Número de Avogadro
p	Pressão

\vec{p}, p	Momento linear, norma ou valor do momento linear
\vec{p}_f, p_f	Momento linear final, norma ou valor do momento linear final
\vec{p}_i, p_i	Momento linear inicial, norma ou valor do momento linear inicial
$\Delta\vec{p}, \Delta p$	Variação do momento linear, norma ou valor da variação do momento linear
P	Potência instantânea
P_g	Potência de um gerador eléctrico
P'	Potência mecânica de um motor eléctrico
P_R	Potência dissipada por efeito de Joule na resistência R
P_m	Potência motora
P_{med}	Potência média
P_u	Potência útil
q, Q	Carga eléctrica
Q	Calor
\vec{r}	Vector posição
r	Coordenada radial
r_i	Resistência interna de um gerador eléctrico
r'	Resistência interna de um receptor de energia eléctrica
\vec{r}_{CM}	Vector posição do centro de massa
\vec{r}_{ij}	Posição da partícula i em relação à posição da partícula j
$\Delta\vec{r}$	Vector deslocamento
R	Raio
R	Resistência eléctrica
R	Constante dos gases ideais
R_{eq}	Resistência eléctrica equivalente de uma associação de resistências
R_T	Raio médio da Terra
s	Distância percorrida ao longo de uma trajectória
S	Área de uma superfície
S	Entropia
ΔS	Variação de entropia
t	Tempo
t_{des}	Tempo de descida
t_{sub}	Tempo de subida
t_{voo}	Tempo de voo
T	Período
T	Temperatura
\vec{T}, T	Tensão, norma ou valor da tensão
t_0	Instante inicial
Δt	Intervalo de tempo
\vec{u}_a	Velocidade relativa da massa admitida
\vec{u}_e	Velocidade relativa da massa ejectada
\vec{u}_r	Versor radial
\vec{u}_t	Versor da tangente

U	Energia interna
U	Energia potencial
U_c	Energia potencial associada à força conservativa \vec{F}_c
ΔU	Variação da energia potencial
U_e	Energia potencial elástica
U_{elec}	Energia potencial eléctrica
U_g	Energia potencial gravítica
U_{mag}	Energia potencial magnética
\vec{v}, v	Velocidade, norma ou valor da velocidade
\vec{v}_m, v_m	Velocidade média, norma ou valor da velocidade média
\vec{v}_a, v_a	Velocidade da massa admitida, norma ou valor da velocidade da massa admitida
\vec{v}_{CM}, v_{CM}	Velocidade do centro de massa, norma ou valor da velocidade do centro de massa
\vec{v}_e, v_e	Velocidade da massa ejectada, norma ou valor da velocidade da massa ejectada
\vec{v}_{esc}, v_{esc}	Velocidade de escape, norma ou valor da velocidade de escape
\vec{v}_f, v_f	Velocidade final, norma ou valor da velocidade final
\vec{v}_{ij}, v_{ij}	Velocidade da partícula i em relação à partícula j , norma ou valor da velocidade da partícula i em relação à partícula j
\vec{v}_l, v_l	Velocidade limite, norma ou valor da velocidade limite
\vec{v}_{max}, v_{max}	Velocidade máxima, norma ou valor da velocidade máxima
\vec{v}_{min}, v_{min}	Velocidade mínima, norma ou valor da velocidade mínima
\vec{v}_{solo}, v_{solo}	Velocidade de embate no solo, norma ou valor da velocidade de embate no solo
v_x	Componente x da velocidade
v_y	Componente y da velocidade
v_z	Componente z da velocidade
\vec{v}_0, v_0	Velocidade no instante t_0 , norma ou valor da velocidade no instante t_0
v_{0x}	Componente x da velocidade \vec{v}_0
v_{0y}	Componente y da velocidade \vec{v}_0
v_{0z}	Componente z da velocidade \vec{v}_0
$\Delta \vec{v}$	Variação da velocidade
v_{rms}	Valor da velocidade quadrática média
V	Volume
ΔV	Variação de volume
V	Potencial eléctrico
V_P	Potencial eléctrico no ponto P
$\Delta V, V$	Diferença de potencial eléctrico entre dois pontos
x	Coordenada cartesiana correspondente ao eixo Ox
x_{max}	Alcance de um projectil
x_0	Valor da coordenada x no instante t_0

y	Coordenada cartesiana correspondente ao eixo Oy
y_{max}	Altura máxima atingida por um projectil
y_0	Valor da coordenada y no instante t_0
W	Trabalho
W_c	Trabalho total das forças conservativas
W_m	Trabalho motor
W_{nc}	Trabalho total das forças não conservativas
W_u	Trabalho útil
z	Coordenada cartesiana correspondente ao eixo Oz
z_0	Valor da coordenada z no instante t_0
$\vec{\alpha}, \alpha$	Aceleração angular, norma ou valor da aceleração angular
α	Ângulo
α	Coefficiente de temperatura da resistividade eléctrica
α	Coefficiente de dilatação linear
α_{solo}	Ângulo de embate no solo
β	Ângulo
β	Coefficiente de dilatação volúmica
γ	Ângulo
γ	Coefficiente de expansão adiabática
η	Viscosidade
η	Rendimento
η_g	Rendimento de um gerador eléctrico
η_M	Rendimento de um receptor de energia eléctrica
ϵ	Permitividade eléctrica absoluta
ϵ_0	Permitividade eléctrica absoluta do vácuo
ϵ_r	Permitividade eléctrica relativa
ϵ	Força electromotriz de um gerador eléctrico
ϵ'	Força contra-electromotriz de um receptor de energia eléctrica
ϵ_{ind}	Força electromotriz induzida
ϵ_L	Força electromotriz auto-induzida
λ	Comprimento de onda
λ	Massa linear
θ	Ângulo
θ	Posição angular
θ_c	Ângulo crítico
θ_0	Posição angular no instante t_0
μ	Massa reduzida
μ	Permeabilidade magnética absoluta
μ_0	Permeabilidade magnética absoluta do vácuo
μ_r	Permeabilidade magnética relativa
μ_k	Coefficiente de atrito cinético
μ_s	Coefficiente de atrito estático

ρ	Massa volúmica
ρ	Raio instantâneo de curvatura
ρ	Resistividade eléctrica
ϕ	Energia potencial de interacção entre partículas constituintes da matéria
φ	Ângulo
φ_0	Fase inicial
Φ_B	Fluxo de indução magnética
$\Phi_B^{(1)}$	Fluxo de indução magnética através de uma única espira
σ	Massa superficial
σ	Condutividade eléctrica
$\vec{\omega}, \omega$	Velocidade angular, norma ou valor da velocidade angular
ω_f	Velocidade angular no instante final
ω_i	Velocidade angular no instante inicial
$\vec{\omega}_0, \omega_0$	Velocidade angular no instante t_0 , norma ou valor da velocidade angular no instante t_0

ABREVIATURAS

CM	Centro de massa
DCL	Diagrama do corpo livre
d.d.p.	Diferença de potencial
f.c.e.m.	Força contra-electromotriz
f.e.m.	Força electromotriz
m.c.u.	Movimento circular uniforme
m.c.u.v.	Movimento circular uniformemente variado
m.h.s.	Movimento harmónico simples
m.r.u.	Movimento rectilíneo uniforme
m.r.u.v.	Movimento rectilíneo uniformemente variado
m.u.v.	Movimento uniformemente variado
r.p.m.	Rotações por minuto

CAPÍTULO 1

GRANDEZAS E UNIDADES: O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES. CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE CÁLCULO VECTORIAL

Iniciamos o estudo da Física com uma discussão geral sobre grandezas físicas e as unidades utilizadas na sua medição, com especial ênfase no Sistema Internacional de unidades (SI)¹. Seguidamente, fazemos uma revisão dos conceitos fundamentais do cálculo vectorial, cujo domínio é indispensável à compreensão da matéria tratada nos capítulos posteriores.

1.1. NOÇÃO DE GRANDEZA

A Física (do grego φυσικς, *natureza*) é a ciência que estuda a natureza ao nível mais fundamental, procurando descobrir as regularidades – ditas *leis* – que regem o comportamento dos fenómenos naturais. Tal como, por exemplo, a Química ou a Biologia, a Física é uma ciência experimental por excelência. Uma *experiência* em Física é uma observação de um objecto – dito *corpo* – ou de um fenómeno natural, feita sob condições controladas, de modo a permitir extrair conclusões acerca desse corpo ou desse fenómeno.

De entre os muitos atributos de um corpo ou de um fenómeno – por exemplo, a cor, o cheiro, a duração, os materiais envolvidos, seus volumes e suas massas –, interessam-nos sobretudo aqueles que é possível quantificar, uma vez que assim podemos ter deles um conhecimento mais objectivo. A observação de um objecto ou fenómeno natural é incompleta quando dela não podermos extrair uma informação quantitativa. Efectivamente, a evolução da Física tem sido no sentido de uma quantificação crescente da nossa compreensão do universo. O que nos conduz à definição de *grandeza* (mensurável) tal como consta do Vocabulário Internacional de Metrologia:

¹ Para um estudo detalhado sobre grandezas físicas e sistemas de unidades, em particular o Sistema Internacional de unidades, recomendamos vivamente a leitura dos livros de J. Valadares e J. M. Tavares, *Grandezas e Medidas*, edições da Universidade Aberta, n.º 254, Universidade Aberta, Lisboa, 2002, e de G. Almeida, *Grandezas e Unidades Físicas, Sistemas Internacional de Unidades*, 2.ª edição, Plátano Editora, Lisboa, 1997.

Grandeza é o “atributo de um fenómeno, corpo ou substância susceptível de ser caracterizado qualitativamente e determinado quantitativamente”.

Grandeza é portanto algo que se pode medir, ou seja, cujo valor numérico pode ser determinado. À determinação do valor de uma grandeza dá-se o nome de *medição* dessa grandeza. A medição (também dita *medição efectiva*) de uma grandeza consiste em comparar o valor dessa grandeza com o de outra da mesma natureza e cujo valor se tomou como unidade. Por exemplo, para medir o comprimento de uma folha de papel, o que fazemos é comparar a distância entre as extremidades da folha com a distância entre dois traços marcados numa régua, à qual sabemos corresponderem um determinado número de unidades de medida.

O resultado da medição é uma relação do tipo

$$G = \{G\}u, \quad (1.1)$$

que tem a seguinte leitura: o valor (também designado por *medida*) da grandeza G é igual ao produto de um número, $\{G\}$, pela *unidade* da grandeza, u . Dito de outro modo, a grandeza G é $\{G\}$ vezes maior do que a unidade u . $\{G\}$ é designado por *valor numérico* da grandeza G no sistema de unidades a que pertence u . Regressando ao nosso exemplo de medição do comprimento de uma folha de papel, o resultado poderia vir na forma²:

$$l = 297 \text{ mm} = 297 \times 1 \text{ mm}, \quad (1.2)$$

ou seja, o comprimento da folha de papel é igual a 297 vezes o comprimento da divisão da régua que corresponde a 1 milímetro.

Sublinhamos que é essencial ter presente que uma grandeza só fica correctamente expressa se conhecermos o seu valor numérico e a unidade que foi utilizada. Claramente, não é o mesmo receber, por uma hora de trabalho, 10 euros, 10 francos suíços ou 10 dólares do Zimbábwe: embora o valor numérico seja o mesmo em todos os casos, as unidades fazem toda a diferença...

1.2. UNIDADES

A cada grandeza, e num dado *sistema de unidades* (veremos mais adiante o que isto é), corresponde, portanto, uma dada unidade. Note-se, contudo, que podem existir grandezas diferentes que têm as mesmas unidades, como é o caso, por exemplo, do trabalho e da energia, grandezas que encontraremos no capítulo 4 deste livro.

Toda a unidade tem um nome e um símbolo próprios, cuja escrita obedece a regras, que se enunciam em seguida.

² No caso de uma folha de formato A4.

- i. Os nomes das unidades devem ser escritos em caracteres redondos e sempre com inicial minúscula, mesmo que derivem de nomes de cientistas. *Exemplos*: quilograma, newton, watt, metro, hertz.
- ii. Quando o nome da unidade deriva do nome de um cientista, deve manter-se a grafia original; é, portanto, incorrecto, ainda que corrente em certos meios, utilizar formas aportuguesadas como vátio (em vez de watt), óhmio (em vez de ohm), etc.
- iii. Os nomes das unidades admitem plural, como as outras palavras. *Exemplos*: três metros, dois quilogramas, cinco segundos, dezoito joules.
- iv. Os símbolos das unidades devem escrever-se em caracteres redondos e sempre em letra minúscula, excepto quando derivam dos nomes de cientistas. Apenas neste caso deverão escrever-se em maiúsculas (se o símbolo consistir em uma só letra), ou com inicial maiúscula (se o símbolo tiver mais do que uma letra). *Exemplos*: s (segundo), m (metro), N (newton), Pa (pascal), J (joule).
- v. O símbolo de uma unidade não é uma abreviatura, por conseguinte não deve ser seguido de qualquer ponto (excepto o ponto final da frase).
- vi. O símbolo de uma unidade não admite plural, pelo que não deve nunca ser seguido de “s”, “’s”, etc. *Exemplos*: 2 km (não 2 kms, nem 2 km’s), 10 W (não 10 Ws, nem 10 W’s).
- vii. Ao referir unidades que resultam da combinação de duas ou mais outras unidades, não deverão misturar-se nomes e símbolos. *Exemplo*: metro por segundo ou m/s (não metro/s ou m/segundo).
- viii. As unidades são também grandezas e, como tal, têm de obedecer às mesmas regras matemáticas que quaisquer outras variáveis ou constantes. *Exemplos*: $4\text{ m} \times 2\text{ m} = 8\text{ m}^2$ (área), 2 joules por segundo = 2 J/s , ou 2 J s^{-1} , ou $2\text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$ (potência).

No presente livro encontraremos numerosos exemplos de aplicação de todas estas regras.

1.3. SISTEMAS DE UNIDADES. O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

A enorme variedade de fenómenos que se estudam e com que se trabalha actualmente, nos mais variados domínios da actividade humana, torna vastíssimo o número de grandezas a medir. Um conjunto de unidades que permita expressar os valores de todas estas grandezas diz-se um *sistema de unidades*. Um sistema de unidades compreende unidades de dois tipos, a saber:

- i. *Unidades de base*: são as unidades de medida das grandezas de base do sistema, que são as grandezas que se consideram independentes entre si. Tradicionalmente, foram definidas com base em *protótipos*, também chamados *padrões*. São

actualmente definidas a partir das constantes fundamentais da natureza, como veremos a seguir.

- ii. *Unidades derivadas*: são as unidades em que se medem as grandezas que são definidas a partir das grandezas de base, através das *equações de definição*.

A escolha das grandezas de base é altamente arbitrária: basta que constituam uma “base” em função da qual se possam exprimir todas as outras grandezas. Há, contudo, muitas escolhas possíveis que satisfazem este requisito. Cingindo-nos, de momento, ao domínio da Mecânica, é habitual tomar como grandezas de base o comprimento, a massa e o tempo. Mas nada nos impede de tomar, por exemplo, o comprimento, a força e o tempo, ou o comprimento, a energia e o tempo.

Uma outra fonte de arbitrariedade está na escolha dos protótipos ou padrões, que têm sido, até agora, as materializações das unidades. Por exemplo, o metro foi inicialmente definido como $1/40000000$ do comprimento de um meridiano terrestre. Mas o número 40000000 não tem nada de misterioso ou de especial: se se tivesse definido o metro como a fracção $1/80000000$ do comprimento do meridiano terrestre, isso significaria apenas, por exemplo, que os autores deste livro teriam uma altura média não de 1.75 m, mas sim de 3.5 m – embora continuassem a ser as mesmas pessoas.

Uma última fonte de arbitrariedade tem que ver com a definição das grandezas derivadas. Para percebermos melhor o problema, consideremos um exemplo. Suponhamos, novamente, que o comprimento e o tempo são grandezas de base e a velocidade é uma grandeza derivada. Sabemos, intuitivamente, que a velocidade mede a rapidez com que um corpo se desloca, o que sugere que a definamos através da equação

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t}, \quad (1.3)$$

onde Δr é o deslocamento sofrido por um corpo em movimento no intervalo de tempo Δt (veremos em mais pormenor a definição de velocidade no capítulo 2). Se tomarmos o metro como a nossa unidade de comprimento e o segundo como a nossa unidade de tempo, a velocidade dada pela relação (1.3) será expressa na unidade metros por segundo. No entanto, nada nos impediria de definir a velocidade como

$$v = 100 \frac{\Delta r}{\Delta t}. \quad (1.4)$$

De facto, o significado físico da velocidade não é alterado pela presença do pré-factor numérico. A expressão (1.4) continua a ser uma medida da rapidez de um deslocamento; apenas o “tamanho” da unidade que escolhemos para medir essa rapidez de deslocamento é diferente. Qual é agora a unidade de velocidade, se o deslocamento e o tempo continuarem a ser medidos em metros e em segundos, respectivamente? Para respondermos a esta pergunta, notemos que multiplicar por 100 um comprimento expresso em metros equivale a exprimi-lo em centímetros: por exemplo, $8 \text{ m} = 8 \times 100 \text{ cm} = 800 \text{ cm}$. Assim, a unidade de velocidade que corresponde à equação

de definição (1.4) é o centímetro por segundo. Mais geralmente, podemos escrever a equação de definição (1.4) na forma

$$v = k \frac{\Delta r}{\Delta t}, \quad (1.5)$$

onde k é um coeficiente de proporcionalidade arbitrário.

A escolha de um conjunto de grandezas de base em detrimento de outros é, então, feita recorrendo aos seguintes critérios:

- i. Simplicidade: as unidades de base adoptadas devem ter padrões simples, de fácil reprodução e/ou verificação, ou poder ser expressas, de modo expedito, em função de constantes fundamentais da natureza. Devem tomar valores não muito diferentes de 1 quando aplicadas a objectos de uso corrente, e serem independentes entre si. As equações de definição das unidades derivadas devem ser tão simples quanto possível.
- ii. Exactidão: As unidades devem ser passíveis de ser definidas com grande exactidão, de preferência a partir de fenómenos naturais.
- iii. Invariabilidade: Os padrões das unidades de base devem ser, tanto quanto possível, invariáveis, ou seja, não depender do tempo ou de quaisquer outras grandezas.
- iv. Coerência: as unidades derivadas deverão ser expressas como um produto de potências das unidades de base, com coeficiente de proporcionalidade igual a 1. Por outras palavras, se fizermos o cálculo de uma grandeza derivada utilizando sempre unidades de um sistema de unidades coerente, o resultado deverá vir automaticamente na unidade correspondente desse mesmo sistema para a grandeza que estamos a calcular.

A história das unidades de medida e respectivos sistemas é longa e pode ser consultada, por exemplo, no livro de J. Valadares e J. M. Tavares, *Grandezas e Medidas*, edições da Universidade Aberta, n.º 254, Universidade Aberta, Lisboa, 2002. Limitar-nos-emos aqui a referir que existiram, e existem ainda, dos mais variados sistemas de unidades. No entanto, a adopção de um sistema de unidades único por todos os países teria vantagens óbvias para todas as actividades humanas, uma vez que pouparia a estudantes, professores, técnicos, engenheiros, cientistas, jornalistas, políticos, etc., a necessidade de converter unidades, actividade que consome tempo e é atreita a erros, por vezes com consequência graves. A tendência é, portanto, no sentido da adopção daquele que é conhecido, desde 1960, por Sistema Internacional de unidades, abreviadamente representado por SI (sem pontos). A utilização do SI é recomendada pelas mais importantes organizações que se dedicam à normalização, como é o caso da *International Standards Organization* (ISO), a *International Union of Pure and Applied Physics* (IUPAP), a *International Union of Pure and Applied Chemistry* (IUPAC), o *National Institute of Standards and technology* (NIST), bem como por muitas sociedades científicas e académicas. O SI foi adoptado oficialmente pela maior parte

dos países do mundo, com a excepção de alguns, como os Estados Unidos da América, que continuam a utilizar o antigo Sistema Imperial Britânico. Portugal adoptou oficialmente o SI em 1983.

Tabela 1.1. Grandezas e unidades de base do SI.

Grandeza física de base (símbolo)	Unidade de base (símbolo)	Dimensão de base	Definição da unidade de base
Comprimento (l)	metro (m)	L	1 m é o comprimento do trajecto da luz, no vazio, no tempo de $1/299792458$ s (1983).
Massa (m)	quilograma (kg)	M	Definição antiga 1 kg é a massa do protótipo internacional do quilograma (1901). Nova definição $1 \text{ kg} = 1.475521 \times 10^{40} h \Delta\nu/c^2$ (2018) ³
Tempo (t)	segundo (s)	T	1 s é a duração de 9192631770 períodos da radiação da transição entre 2 níveis hiperfinos do estado fundamental do ^{133}Cs (1967).
Intensidade de corrente eléctrica (I)	ampere (A)	I	Definição antiga 1 A é a intensidade de uma corrente constante que mantida em 2 condutores paralelos, rectilíneos, de comprimento infinito, de secção circular desprezável e à distancia de 1 m no vazio produz uma força de 2×10^{-7} N/m (1948). Nova definição $1 \text{ A} = 6.789686 \times 10^8 \Delta\nu e$ (2018) ⁴ .
Temperatura termodinâmica (T)	kelvin (K)	Q	Definição antiga 1 K é $1/273.16$ da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água (1967). Nova definição $1 \text{ K} = 2.266665 \Delta\nu h/k_B$ (2018) ⁵ .
Quantidade de matéria (n)	mole (mol)	N	Definição antiga 1 mol é a quantidade de matéria de um sistema contendo tantas entidades elementares quanto os átomos que existem em 0.012 kg de ^{12}C (1971). Nova definição $1 \text{ mol} = 6.02214076 \times 10^{23}/N_A$ (2018) ⁶ .
Intensidade luminosa (I_v)	candela (cd)	J	1 cd é a intensidade luminosa numa dada direcção de uma fonte que emite radiação monocromática de frequência 540×10^{12} Hz e cuja intensidade nessa direcção é $1/683$ W/sr (1979).

³ Onde $\Delta\nu = 9192631770$ Hz é a frequência da radiação da transição entre 2 níveis hiperfinos do estado fundamental do ^{133}Cs (1967), h é a constante de Planck e c é a velocidade da luz no vácuo (ver Apêndice 1).

⁴ Onde e é a carga elementar (ver Apêndice 1).

⁵ Onde k_B é a constante de Boltzmann (ver Apêndice 1).

⁶ Onde N_A é a constante de Avogadro (ver Apêndice 1).

O SI é um sistema de unidades *absoluto* ou *físico*, pois as unidades de base são absolutas, isto é, não variam de lugar para lugar. O SI é, igualmente, um sistema *coerente*, já que as equações de definição das grandezas derivadas contêm apenas produtos de potências das grandezas de base e nenhum factor de proporcionalidade diferente de 1, isto é, no SI $k = 1$ na equação (1.5) ou em qualquer outra equação de definição.

Importa referir que o SI sofreu recentemente uma verdadeira revolução, visando a substituição de todos os protótipos como definição das unidades de base pelas expressões dessas unidades em função de constantes fundamentais da natureza, previamente determinadas com a maior precisão possível. A grande vantagem desta mudança de paradigma está em que as unidades de base, assim definidas, deixam de depender das propriedades de um corpo físico, as quais estão sujeitas a inevitáveis variações (por exemplo, a massa do chamado protótipo internacional do quilograma varia alguns microgramas por ano devido à corrosão). O “novo SI” foi aprovado na Conferência Geral de Pesos e Medidas, realizada em Novembro de 2018, e entrou em vigor no Dia Mundial da Metrologia, 20 de Maio de 2019. Na tabela 1.1 estão descritas as grandezas e unidades de base do SI, bem como os respectivos símbolos e definições (tanto no “antigo” como no “novo” SI, no caso das unidades de base cuja definição foi alterada em 2018). Na tabela 1.2 encontram-se as grandezas e unidades de ângulo plano e de ângulo sólido e na tabela 1.3 apresentam-se alguns exemplos de unidades derivadas do SI.

Tabela 1.2. Grandezas e unidades de ângulo plano e ângulo sólido⁷ do SI.

Grandeza física	Unidade (símbolo)	Dimensão de base	Definição da unidade
Ângulo plano	radiano (rad)	adimensional	1 rad é o ângulo plano compreendido entre 2 raios que, na circunferência de um círculo, intersectam um arco de comprimento igual ao comprimento do raio desse círculo (1960).
Ângulo sólido	esterradiano (sr)	adimensional	1 sr é o ângulo sólido que tendo o vértice no centro de uma esfera, intersecta na superfície desta uma área igual à de um quadrado tendo por lado o raio da esfera (1960).

As unidades SI, bem como as de quaisquer outros sistemas de unidades, admitem múltiplos e submúltiplos decimais. A sua utilização é útil pois permite abreviar a representação de valores numéricos que contenham muitos zeros. Para escrever esses múltiplos e submúltiplos existem os chamados prefixos SI, que constam das tabelas 1.4 e 1.5 respectivamente. Os prefixos, entre *micro* (10^{-6}) e *mega* (10^6), foram introduzidos em 1874 como fazendo parte do sistema de unidades CGS (*vide* apêndice A3.1). Posteriormente, os doze prefixos entre *pico* (10^{-12}) e *tera* (10^{12}) foram definidos como fazendo parte do SI. Em 1964 foram adicionados os prefixos *femto* (10^{-15}) e *atto* (10^{-18}); em 1975

⁷ As unidades SI de ângulo plano e de ângulo sólido foram inicialmente denominadas *unidades suplementares* (1960). Foram posteriormente interpretadas como unidades derivadas sem dimensão (1980).

os prefixos *peta* (10^{15}) e *exa* (10^{18}) e em 1991 os prefixos *zetta* (10^{21}), *zepto* (10^{-21}), *yotta* (10^{24}) e *yocto* (10^{-24}).

Tabela 1.3. Exemplos de grandezas e unidades derivadas do SI.

Grandeza física derivada (símbolo)	Unidade (símbolo)	Dimensão de base	Equação de definição
Área (A ou S)	metro quadrado (m^2)	L^2	$l_1 l_2$
Volume (V)	metro cúbico (m^3)	L^3	$l_1 l_2 l_3$
Período (T)	segundo (s)	T	
Frequência (f ou ν)	hertz (Hz ou s^{-1})	T^{-1}	$f = 1/T = 1/T$
Frequência angular (ω)	radiano por segundo ($rad\ s^{-1}$)	T^{-1}	$\omega = 2\pi f$
Velocidade (v)	metro por segundo ($m\ s^{-1}$)	$T^{-1}L$	$\vec{v} = d\vec{r}/dt$
Aceleração (a)	metro por segundo quadrado ($m\ s^{-2}$)	$T^{-2}L$	$\vec{a} = d\vec{v}/dt$
Massa linear (λ)	quilograma por metro ($kg\ m^{-1}$)	$L^{-1}M$	$\lambda = m/L$
Massa superficial (σ)	quilograma por metro quadrado ($kg\ m^{-2}$)	$L^{-2}M$	$\sigma = m/S$
Massa volúmica (ρ)	quilograma por metro cúbico ($kg\ m^{-3}$)	$L^{-3}M$	$\rho = m/V$
Força (F)	newton (N)	$T^{-2}LM$	$\vec{F} = m\vec{a}$
Impulso de uma força (J)	newton segundo (N s)	$T^{-1}LM$	$\vec{J} = \int \vec{F}\ dt$
Momento de uma força (M)	metro newton (N m)	$T^{-2}L^2M$	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Momento linear (p)	quilograma metro por segundo ($kg\ m\ s^{-1}$)	$T^{-1}LM$	$\vec{p} = m\vec{v}$
Momento angular (L)	quilograma metro quadrado por segundo ($kg\ m^2\ s^{-1}$)	$T^{-1}L^2M$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
Momento de inércia (I)	quilograma metro quadrado ($kg\ m^2$)	L^2M	$I = \int R^2\ dm$
Raio de giração (R_g)	metro (m)	L	$R_g = \sqrt{I/m}$
Trabalho (W)	joule (J)	$T^{-2}L^2M$	$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$
Energia (E)	joule (J)	$T^{-2}L^2M$	
Potência (P)	watt (W)	$T^{-3}L^2M$	$P = dW/dt$

Tabela 1.4. Prefixos de múltiplos de unidades SI. Notar que alguns dos símbolos são em letra minúscula (por exemplo k) e outros em maiúscula (por exemplo M).

Factor	Prefixo	Símbolo
10^{24}	yotta	Y
10^{21}	zetta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto	h
10^1	deca	da

Tabela 1.5. Prefixos de submúltiplos de unidades SI. Notar que todos símbolos são em letra minúscula.

Factor	Prefixo	Símbolo
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	<i>m</i>
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	fento	f
10^{-18}	ato	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

Note-se que os múltiplos ou submúltiplos de uma unidade SI não são unidades SI, uma vez que há apenas uma unidade SI para cada grandeza. Relativamente ao modo como devem ser usados, os nomes e símbolos dos múltiplos e submúltiplos das unidades formam-se juntando – sem qualquer espaço ou hífen – o prefixo ao nome ou símbolo da unidade correspondente. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
 10^{-9} \text{ s} &= 1 \text{ nanosegundo} = 1 \text{ ns} \\
 10^{-6} \text{ m} &= 1 \text{ micrometro}^8 = 1 \mu\text{m} \\
 10^3 \text{ watt} &= 1 \text{ quilowatt} = 1 \text{ kW} \\
 10^9 \text{ Hz} &= 1 \text{ gigahertz} = 1 \text{ GHz}
 \end{aligned}$$

No caso da unidade SI de massa, o quilograma (kg), os múltiplos e submúltiplos são construídos a partir do grama (g), uma vez que não são, em caso algum, admitidos dois prefixos seguidos. Assim:

$$\begin{aligned}
 10^3 \text{ kg} &= 10^6 \text{ g} = 1 \text{ megagrama} = 1 \text{ Mg (e não 1 kkg)} \\
 10^{-12} \text{ kg} &= 10^{-9} \text{ g} = 1 \text{ nanograma} = 1 \text{ ng (e não 1 pkg)}
 \end{aligned}$$

Refira-se ainda que, por vezes, se utilizam prefixos SI para formar múltiplos ou submúltiplos de unidades fora do SI. Por exemplo MeV (megaelectrão-volt) e ml (mililitro).

Antes de passarmos à secção seguinte, convém recordar que as grandezas físicas dizem respeito ao mundo real. Importa por isso ter noção dos valores numéricos que caracterizam certos sistemas ou fenómenos naturais. A título de exemplo, estão coligidos nas tabelas 1.6, 1.7 e 1.8 as ordens de grandeza dos intervalos de tempo característicos, das dimensões lineares e das massas de alguns sistemas físicos, respectivamente.

⁸ Também chamado *mícron*.

Tabela 1.6. Ordens de grandeza da duração de alguns fenómenos naturais.

Facto	Ordem de grandeza (s)
Tempo que a luz demora a atravessar um núcleo de hidrogénio	10^{-24}
Tempo que a luz demora a atravessar um átomo	10^{-18}
Tempo que a luz demora a atravessar uma mão	10^{-9}
Tempo entre dois batimentos de um coração	1
Tempo que a luz demora a percorrer a distância entre o Sol e a Terra	10^3
Tempo médio de vida de um ser humano	10^9
Idade das pirâmides do Egipto	10^{12}
Idade do universo	10^{18}

Tabela 1.7. Ordens de grandeza das dimensões lineares de alguns sistemas físicos.

Facto	Ordem de grandeza (m)
Raio de um núcleo atómico	10^{-15}
Raio de um átomo	10^{-10}
Dimensão de um vírus	10^{-7}
Dimensão de um grão de sal	10^{-3}
Altura de uma criança	1
Altitude da Serra da Estrela	10^3
Distância da Terra à Lua	10^8
Distância da Terra ao Sol	10^{12}
Distância da Terra à estrela mais próxima	10^{17}
Distância da Terra ao centro da Via Láctea	10^{20}
Distância da Terra à galáxia mais próxima	10^{22}
Dimensão do universo	10^{26}

Tabela 1.8. Ordens de grandeza da massa de alguns sistemas físicos.

Facto	Ordem de grandeza (kg)
Massa do electrão	10^{-31}
Massa do protão	10^{-27}
Massa de um átomo de urânio	10^{-25}
Massa de uma partícula de pó	10^{-10}
Massa de um bago de uva	10^{-3}
Massa de um livro	1
Massa de um rinoceronte	10^3
Massa de um navio transatlântico	10^7
Massa do asteroide Eros	10^{15}
Massa da Lua	10^{22}
Massa da Terra	10^{24}
Massa do Sol	10^{30}
Massa da nossa galáxia (Via Láctea)	10^{41}
Massa do universo (conhecido)	10^{53}

1.4. CONVERSÕES DE UNIDADES

Na prática, é frequente depararmo-nos com grandezas expressas em unidades não SI, seja por serem expressas em múltiplos ou submúltiplos de unidades SI, seja por utilizarem unidades de outros sistemas de unidades (por exemplo, o sistema CGS, *vide* apêndice A3.1). Se no caso das unidades de base a conversão é fácil, já as unidades derivadas apresentam por vezes dificuldades. Descreve-se a seguir o método geral que permite efectuar a conversão de quaisquer unidades sem problemas. O método baseia-se nos dois factos seguintes:

- i. As unidades são, elas próprias, grandezas;
- ii. As unidades obedecem às habituais regras de manipulação algébrica.

Vejamos então como aplicar o método através de alguns exemplos.

Exemplo 1.1

A massa volúmica do ferro é 7.87 g cm^{-3} . Expressar o valor da massa volúmica do ferro em unidades SI.

Resolução:

Começemos por notar que:

$$7.87 \text{ g cm}^{-3} = 7.87 \times 1 \text{ g cm}^{-3} = 7.87 \times (1 \text{ g}) \times (1 \text{ cm})^{-3}.$$

Para converter estas unidades para o SI, onde estão gramas, queremos que estejam quilogramas; e onde estão centímetros, queremos metros. Mais não temos que fazer que substituir, na expressão acima, os factores de conversão das unidades de base: $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$ e $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$. Obtém-se então

$$\begin{aligned} 7.87 \text{ g cm}^{-3} &= 7.87 \times (10^{-3} \text{ kg}) \times (10^{-2} \text{ m})^{-3} = \\ &= 7.87 \times 10^{-3} \times 1 \text{ kg} \times 10^6 \times 1 \text{ m}^{-3} = \\ &= 7.87 \times 10^3 \times 1 \text{ kg m}^{-3} = 7.87 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.2

É por vezes conveniente utilizar um sistema de unidades alternativo ao SI, chamado sistema CGS, e cuja designação deriva das iniciais das suas unidades de base para a Mecânica, a saber: o centímetro, o grama e o segundo. A unidade de força no sistema CGS chama-se dine (símbolo dyn). Qual é a relação entre o newton e o dine?

Resolução:

A equação de definição da grandeza força é a mesma no SI e no CGS, apenas as unidades são diferentes. Além disso, ambos os sistemas são físicos e coerentes. Utilizando a tabela 1.3, teremos então que

$$1 \text{ dyn} = 1 \text{ g cms}^{-2}.$$

Procedendo como no exemplo 1.1, tem-se

$$\begin{aligned} 1 \text{ dyn} &= 1 \times 1 \text{ g} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ s}^{-2} = 1 \times (10^{-3} \text{ kg}) \times (10^{-2} \text{ m}) \times 1 \text{ s}^{-2} = \\ &= 1 \times 10^{-5} \times 1 \text{ kg m s}^{-2} = 10^{-5} \text{ kg m s}^{-2}. \end{aligned}$$

Finalmente, notando que $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$, obtém-se

$$1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}.$$

Referiu-se nas tabelas 1.1 e 1.3 as *dimensões* das grandezas de base e derivadas, respectivamente, sem definir este conceito. Fazemo-lo em seguida.

1.5. DIMENSÕES DAS GRANDEZAS

Vimos atrás que, em qualquer sistema de grandezas, as grandezas derivadas se relacionam com as grandezas de base através de equações de definição. Note-se que existe alguma arbitrariedade na escolha das equações de definição⁹. No entanto, é sempre possível escolhê-las de tal modo que qualquer grandeza G seja dada por um produto de potências das grandezas de base: no caso do SI, tem-se

$$[G] = T^\alpha L^\beta M^\gamma I^\delta \Theta^\varepsilon N^\zeta J^\eta, \quad (1.7)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$ são números reais. A equação (1.7) diz-se a equação das dimensões da grandeza G e ler-se do seguinte modo: G tem dimensão α relativamente ao tempo, dimensão β relativamente ao comprimento, dimensão γ relativamente à massa, etc. Se G não depender de uma dada grandeza de base, então a sua dimensão relativamente a essa grandeza ou grandezas é zero. Em particular, qualquer grandeza de base tem dimensão 1 relativamente a si própria e zero relativamente a todas as outras grandezas de base; por exemplo,

$$[L] = L^1 = L, \quad [T] = T^1 = T, \quad [\Theta] = \Theta^1 = \Theta, \text{ etc.} \quad (1.8)$$

No caso em que $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = \zeta = \eta = 0$, a grandeza G em questão tem dimensão nula relativamente a todas as grandezas de base e diz-se adimensional. Exemplos de grandezas adimensionais são o ângulo (plano ou sólido) e o rendimento de um sistema (que definiremos no capítulo 4). Em geral, é adimensional toda a grandeza que seja definida como a razão de duas grandezas com as mesmas dimensões.

Decorre do exposto que as dimensões de uma grandeza serão diferentes em diferentes sistemas de unidades, uma vez que dependem das grandezas escolhidas como grandezas de base.

⁹ Vide a este respeito J. Valadares e J. M. Tavares, *Grandezas e Medidas*, edições da Universidade Aberta, n.º 254, Universidade Aberta, Lisboa, 2002.

Consideremos, por exemplo, apenas o conjunto das grandezas mecânicas, genericamente designadas por G_m . Como as dimensões de G_m relativamente às grandezas de base não mecânicas são, obviamente, zero, as dimensões de G_m envolvem apenas o comprimento, a massa e o tempo. Assim, as dimensões de G_m podem ser escritas na forma geral

$$[G_m] = T^\alpha L^\beta M^\gamma . \quad (1.9)$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.3: área

Consideremos, por exemplo, um rectângulo de lados l_1 e l_2 . A sua área é dada pelo produto dos comprimentos dos seus lados. Deste modo tem-se:

$$A = l_1 \times l_2 \Rightarrow [A] = L \times L = L^2$$

onde a implicação resulta do facto de os comprimentos dos lados do rectângulo terem, obviamente, dimensão 1 relativamente ao comprimento, ou, por outras palavras, dimensões de comprimento. Segue-se que a área tem dimensão 2 relativamente ao comprimento (e zero relativamente a todas as outras grandezas de base). Isto é válido, obviamente, para a dimensão de qualquer área. Pense o leitor, por exemplo, na área da superfície de uma esfera de raio R e verifique que tem dimensão L^2 .

Exemplo 1.4: massa volúmica

A massa volúmica ρ de uma substância define-se como a razão entre a massa de uma dada porção da substância e o volume por ela ocupado. Se a porção de substância tiver forma paralelepípedica com lados de comprimentos l_1 , l_2 e l_3 , o seu volume será dado por $V = l_1 \times l_2 \times l_3$ e ter-se-á

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{l_1 \times l_2 \times l_3} \Rightarrow [\rho] = \frac{M}{L \times L \times L} = ML^{-3}.$$

A massa volúmica tem, portanto, dimensão 1 relativamente à massa e dimensão -3 relativamente ao comprimento. Dito por outras palavras, a massa volúmica tem dimensões de massa a dividir por comprimento ao cubo.

O conceito de dimensão fornece-nos imediatamente uma condição necessária (mas não suficiente) para que uma fórmula possa estar correcta:

Uma fórmula correcta tem de ser dimensionalmente homogénea, ou seja, as dimensões de todos os seus termos têm de ser as mesmas.

Vejamos o que isto quer dizer com um exemplo. Suponhamos que não nos lembramos bem da expressão que dá a área de um círculo, mas desconfiamos que seja $A = \pi R$. Sabemos que a área tem dimensão 2 relativamente ao comprimento; ora o segundo membro desta equação tem apenas dimensão 1 relativamente ao comprimento, logo a equação não pode estar correcta: a resposta correcta é, evidentemente, $A = \pi R^2$. Note-se, todavia, que a homogeneidade dimensional não é condição suficiente para que uma fórmula esteja correcta: por exemplo, tanto $A = \pi R^2$ como $A = 2\pi R^2$ são dimensionalmente homogêneas, mas só a primeira nos dá o valor correcto da área do círculo de raio R .

1.6. GRANDEZAS ESCALARES E GRANDEZAS VECTORIAIS

A Física lida com *grandezas escalares* e *grandezas vectoriais*. As grandezas escalares ficam totalmente determinadas por um valor numérico referido a uma unidade conveniente. São exemplos de grandezas escalares o comprimento, a massa, o tempo, a energia, a temperatura ou a pressão. Relativamente às grandezas vectoriais, para além de um valor numérico e da respectiva unidade, a sua descrição só fica completa se lhe for atribuída uma direcção e um sentido. São exemplos de grandezas vectoriais, o deslocamento, a velocidade, a aceleração ou a força. Na medida em que a descrição dos sistemas físicos, e em particular a dos sistemas mecânicos, faz simultaneamente uso de grandezas escalares e vectoriais, os conceitos fundamentais de cálculo vectorial são essenciais e por isso devem ser conhecidos e bem dominados.

1.7. NOÇÃO DE VECTOR

Um vector é definido matematicamente como uma classe de elementos geométricos, denominados segmentos de recta orientados, que possuem todos a mesma magnitude – denominada norma ou, por abuso de linguagem, módulo –, a mesma direcção e o mesmo sentido. Deste modo, um vector \vec{v} pode ser representado por qualquer segmento de recta orientado que seja membro da classe deste vector, isto é, pode ser representado por qualquer segmento de recta orientado que possua a mesma norma, a mesma direcção e o mesmo sentido de qualquer outro segmento da referida classe (*vide* figura 1.1).

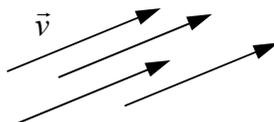


Figura 1.1. Conjunto de segmentos de recta orientados que pertencem à mesma classe do vector \vec{v}

No caso de o segmento de recta orientado do ponto A para o ponto B ser um representante do vector \vec{v} , então podemos afirmar que o vector \overline{AB} é igual ao vector \vec{v} (vide figura 1.2).

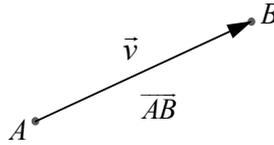


Figura 1.2. O segmento de recta orientado \overline{AB} é igual ao vector \vec{v} .

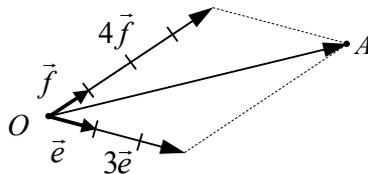
Os vectores dizem-se *vectores aplicados* quando têm um ponto de aplicação bem definido. Dizem-se *vectores deslizantes* no caso de puderem deslizar sobre a recta que os contém. Dizem-se *vectores livres* caso o ponto de aplicação possa ser qualquer ponto do espaço. A recta que contém um vector diz-se a *linha de acção do vector*.

1.8. SISTEMA DE COORDENADAS. NOÇÃO DE BASE. COMPONENTES DE UM VECTOR.

Para descrever de modo completo um vector é necessário referenciá-lo em relação a um sistema de coordenadas, cuja construção é feita a partir da noção de *base*. Qualquer conjunto de n vectores não colineares pode formar uma base no espaço n -dimensional, isto é, é possível escrever qualquer vector deste espaço como uma combinação linear dos vectores da base. Por exemplo, quaisquer dois vectores não colineares podem formar uma base no espaço bidimensional (plano) e quaisquer três vectores não colineares podem formar uma base do espaço tridimensional. Numa dada base, a decomposição de um vector é única.

Exemplo 1.5

Considere-se o diagrama representado na seguinte figura:



Os vectores (\vec{e}, \vec{f}) formam uma base. Nesta base o vector \overline{OA} tem componentes $(3, 4)$, podendo ser expresso na forma $\overline{OA} = 3\vec{e} + 4\vec{f}$. Notar que o vector \overline{OA} não pode ser expresso de outro modo na base (\vec{e}, \vec{f}) . A sua decomposição na base considerada é única.

Um conjunto de vectores $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots)$ de \mathbb{R}^n forma uma *base ortonormada* se e só se os vectores forem perpendiculares dois a dois e as suas normas forem iguais a 1.

1.9. REPRESENTAÇÃO DE UM VECTOR NO ESPAÇO CARTESIANO

O sistema de coordenadas de utilização mais frequente é o sistema cartesiano ou espaço cartesiano¹⁰. É um sistema de coordenadas ortonormado que no espaço bidimensional (plano cartesiano) é formado pelos eixos Ox e Oy e com vectores de base (\vec{i}, \vec{j}) . No caso do espaço tridimensional, o sistema de coordenadas é formado pelos eixos Ox , Oy e Oz e com vectores de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Os vectores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} são vectores unitários (norma 1) que apontam no sentido positivo dos eixos Ox , Oy e Oz , respectivamente. São os chamados versores dos eixos coordenados.

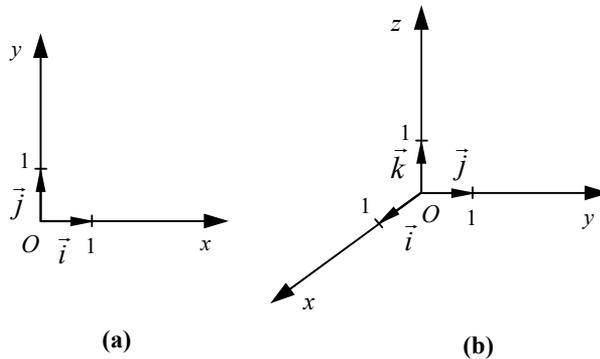


Figura 1.3. a) sistema cartesiano bidimensional e b) sistema cartesiano tridimensional com os eixos orientados de modo a formar um triedro directo.

Na figura 1.3 encontram-se representados um sistema cartesiano bidimensional (figura 1.3a) e um sistema cartesiano tridimensional (figura 1.3b). Note-se que neste último caso, as orientações dos três eixos coordenados foram escolhidas de tal modo que o sistema constitui um triedro directo. Qualquer vector \vec{v} de componentes cartesianas (v_x, v_y, v_z) pode ser escrito na forma

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (1.10)$$

ou, abreviadamente, na forma

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z). \quad (1.11)$$

¹⁰ A invenção do sistema de coordenadas cartesianas ficou a dever-se a René Descartes (séc. XVII). Foi um contributo fundamental para o desenvolvimento da matemática, não só providenciando a primeira ligação sistemática entre a geometria euclidiana e a álgebra como lançando as bases para o desenvolvimento da geometria analítica.

1.9.1. Norma e versor de um vector

A norma ou magnitude do vector \vec{v} de componentes cartesianas (v_x, v_y, v_z) , que se representa por $\|\vec{v}\|$ ou simplesmente por v , é dada por

$$\|\vec{v}\| \equiv v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} . \quad (1.12)$$

O vector unitário (vector de norma 1) com a direcção e sentido de \vec{v} chama-se *versor* de \vec{v} e representa-se por *vers* \vec{v} ou \vec{u}_v . É calculado através da expressão

$$\text{vers } \vec{v} \equiv \vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} . \quad (1.13)$$

Exemplo 1.6

Considere-se o vector $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$. Determinar a) a norma do vector \vec{v} e b) o versor do vector \vec{v} .

Resolução:

a) $\|\vec{v}\| \equiv v = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6.$

b) $\text{vers } \vec{v} \equiv \vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}.$

Da definição de versor de um vector expressa na relação (1.13) deduz-se que qualquer vector \vec{v} pode ser escrito como o produto da sua norma pelo seu versor, isto é,

$$\vec{v} = v\vec{u}_v . \quad (1.14)$$

1.9.2. Vector definido por dois pontos do espaço

Consideremos dois pontos A e B de coordenadas cartesianas (a_x, a_y, a_z) e (b_x, b_y, b_z) , respectivamente. O vector \overline{AB} , com origem no ponto A e extremidade no ponto B , tem componentes definidas pela diferença entre as coordenadas do ponto B e as do ponto A , isto é,

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= B - A = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z) = \\ &= (b_x - a_x)\vec{i} + (b_y - a_y)\vec{j} + (b_z - a_z)\vec{k} . \end{aligned} \quad (1.15)$$

Note-se que, se o ponto A coincidir com a origem do sistema de eixos, terá coordenadas $(0,0,0)$ e, portanto, o vector \overline{AB} terá componentes coincidentes com as coordenadas do ponto B . É este o facto que justifica a forma abreviada (1.11) de escrever um vector. É, também, esta a razão pela qual nos referimos frequentemente às “coordenadas” de um vector – quando em rigor, deveríamos dizer “componentes”: ao fazê-lo, estamos implicitamente a pensar na representação do vector num sistema de coordenadas cartesianas. Noutros sistemas de coordenadas como as coordenadas polares ou as coordenadas esféricas, que encontraremos já a seguir, as componentes de um vector não são iguais às

diferenças das coordenadas das suas extremidades. No entanto, uma vez que utilizaremos quase sempre coordenadas cartesianas, não diferenciaremos entre “componentes” e “coordenadas” de um vector. É uma prática algo abusiva, mas corrente.

1.9.3. Decomposição de vectores nas suas componentes cartesianas

1.9.3.1. Caso bidimensional

Considere-se o vector \vec{v} de coordenadas (v_x, v_y) no plano cartesiano representado na figura 1.4. Seja v a sua norma e θ o ângulo por ele formado com o eixo dos xx .

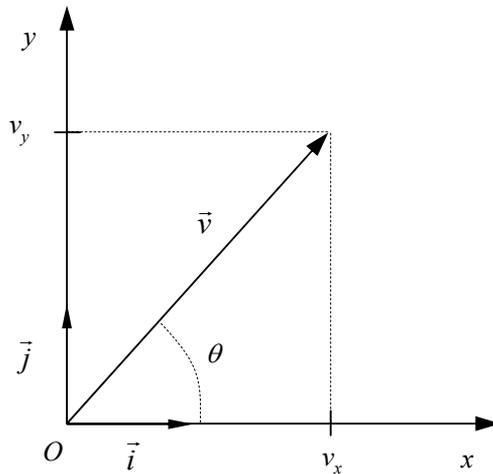


Figura 1.4. Representação do vector \vec{v} no plano cartesiano.

Da análise da figura 1.4, deduz-se imediatamente que as componentes v_x e v_y do vector \vec{v} se relacionam com v e θ através das seguintes relações:

$$\begin{cases} v_x = v \cos \theta \\ v_y = v \sin \theta \end{cases} \quad (1.16)$$

Notar que o vector \vec{v} fica completamente determinado conhecendo o par de valores (v_x, v_y) ou em alternativa, o par de valores (v, θ) . O ângulo θ pode ser determinado através de qualquer das seguintes expressões usando as funções trigonométricas inversas:

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} \quad ; \quad \theta = \arcsin \frac{v_y}{v} \quad ; \quad \theta = \arccos \frac{v_x}{v}. \quad (1.17)$$

Aos valores (v, θ) dá-se o nome de *componentes polares* do vector \vec{v} . Face às relações (1.16) ou (1.17), vemos que é equivalente representar um vector do plano através das suas componentes cartesianas (v_x, v_y) ou através das suas componentes polares (v, θ) . No entanto, dependendo do problema em estudo, em particular da sua simetria, poderá ser mais conveniente utilizar um destes sistemas de coordenadas em detrimento do outro.

1.9.3.2. Caso tridimensional

Considere-se agora o caso tridimensional. Seja \vec{v} o vector de componentes (v_x, v_y, v_z) no espaço cartesiano representado na figura 1.5. Seja v a sua norma, θ o ângulo que \vec{v} forma com o eixo Oz e φ ângulo que a projecção de \vec{v} sobre o plano Oxy forma com o eixo Ox .

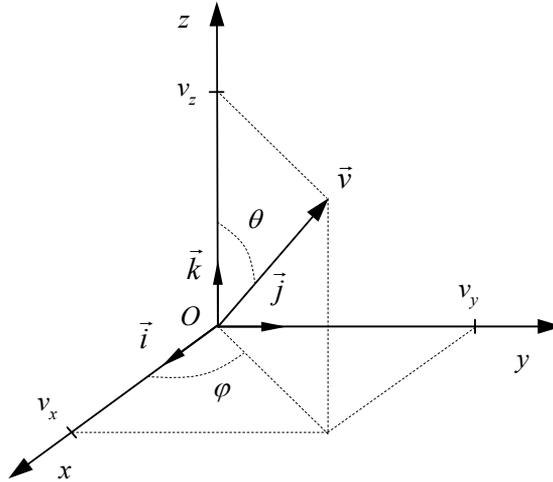


Figura 1.5. Representação do vector \vec{v} no espaço cartesiano tridimensional.

Através de relações trigonométricas simples deduz-se que o vector \vec{v} admite a seguinte decomposição:

$$\begin{cases} v_x = v \sin \theta \cos \varphi \\ v_y = v \sin \theta \sin \varphi \\ v_z = v \cos \theta \end{cases} \quad (1.18)$$

Tal como no caso bidimensional, é imediato inverter estas relações para achar θ e φ em função de (v_x, v_y, v_z) . O resultado, cuja demonstração se sugere como exercício, é:

$$\varphi = \arctan \frac{v_y}{v_x} \quad ; \quad \theta = \arccos \frac{v_z}{v} \quad (1.19)$$

Aos valores (v, θ, φ) dá-se o nome de *componentes esféricas* do vector \vec{v} . Face às relações (1.18) ou (1.19), vemos que é equivalente representar um vector do espaço tridimensional através das suas componentes cartesianas (v_x, v_y, v_z) ou através das suas componentes esféricas (v, θ, φ) . No entanto, tal como no caso bidimensional, dependendo da simetria do sistema em estudo poderá ser mais conveniente utilizar um ou o outro destes sistemas de coordenadas.

1.10. OPERAÇÕES COM VECTORES

1.10.1. Adição e subtração de vectores

A adição e subtração de vectores são talvez as mais simples de todas as operações com vectores. Vejamos como efectua-las, primeiro graficamente, depois com recurso às representações dos vectores num dado sistema de coordenadas cartesianas.

Sejam então \vec{u} e \vec{v} quaisquer dois vectores. Para calcular $\vec{u} + \vec{v}$ graficamente podemos utilizar os dois métodos representados na figura 1.6 e que a seguir se descrevem.

Método 1 (vide figura 1.6a)

- Translacionam-se os dois vectores de modo a que as suas origens fiquem coincidentes.
- Partindo da extremidade do vector \vec{u} , traça-se um segmento de recta paralela ao vector \vec{v} . Em seguida, partindo da extremidade do vector \vec{v} , traça-se outro segmento de recta paralela ao vector \vec{u} .
- $\vec{u} + \vec{v}$ será, então, o vector cuja origem é a origem comum dos vectores \vec{u} e \vec{v} , e cuja extremidade é o ponto de intersecção dos dois segmentos acima referidos.

Método 2 (vide figura 1.6b)

- Translaciona-se o vector \vec{v} de modo a que a sua origem coincida com a extremidade do vector \vec{u} .
- $\vec{u} + \vec{v}$ será, então, o vector cuja origem é a origem do vector \vec{u} , e cuja extremidade é a extremidade do vector \vec{v} .

É imediato concluir que a adição de vectores goza das seguintes propriedades:

- A soma de dois vectores é um vector. Em geral com direcção e norma diferentes das de qualquer dos vectores parcelas.
- A adição de vectores é comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

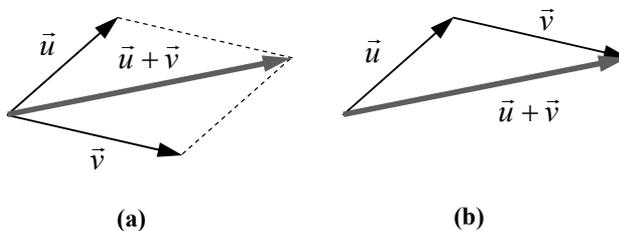


Figura 1.6. Representação dos dois métodos gráficos utilizados na adição de vectores (vide texto).

Passemos agora à subtração dos vectores \vec{u} e \vec{v} (vide figura 1.7). Esta operação reduz-se à adição, tendo em conta que $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Como veremos na secção seguinte,

$-\vec{v} = -1 \times \vec{v}$ é um vector com a mesma norma e a mesma direcção que \vec{v} , mas sentido contrário. Para calcular a diferença $\vec{u} - \vec{v}$, basta então começar por calcular $-\vec{v}$ e em seguida somá-lo a \vec{u} , usando qualquer dos dois métodos gráficos anteriormente explicados. Note-se que, ao contrário da adição, a subtracção de vectores é anti-comutativa: $\vec{u} - \vec{v} = -(\vec{v} - \vec{u})$.

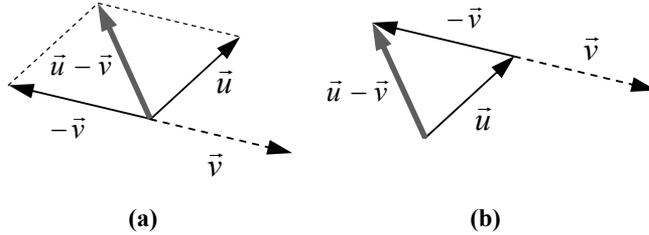


Figura 1.7. Representação dos dois métodos gráficos utilizados na subtracção de dois vectores (*vide texto*).

Finalmente, vejamos como efectuar as operações adição e subtracção utilizando as representações dos vectores \vec{u} e \vec{v} num dado sistema de coordenadas cartesianas. Se $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, ter-se-á:

$$\begin{aligned} \vec{u} \pm \vec{v} &= (u_x \pm v_x, u_y \pm v_y, u_z \pm v_z) = \\ &= (u_x \pm v_x)\vec{i} + (u_y \pm v_y)\vec{j} + (u_z \pm v_z)\vec{k} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ou seja, as componentes dos vectores soma e diferença são, respectivamente, a soma e a diferença das componentes correspondentes dos vectores parcelas.

1.10.2. Produto de um escalar por um vector

Seja \vec{u} um vector do espaço a qualquer número de dimensões, e seja k um escalar. O produto de k por \vec{u} , representado por $k\vec{u}$, é um vector com as seguintes propriedades (*vide figura 1.8*):

- i. A mesma direcção que \vec{u} .
- ii. Sentido igual ao de \vec{u} se $k > 0$, e contrário ao de \vec{u} se $k < 0$.
- iii. Norma igual a $|k|$ vezes a norma de \vec{u} : $\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$. Em particular se $k > 1$ ou $k < -1$ tem-se $\|k\vec{u}\| > \|\vec{u}\|$ e se $-1 < k < 1$ tem-se $\|k\vec{u}\| < \|\vec{u}\|$.

Esta última propriedade demonstra-se facilmente. Efectivamente se se considerar a representação do vector \vec{u} num dado sistema de coordenadas cartesianas, teremos:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} \Rightarrow k\vec{u} = ku_x\vec{i} + ku_y\vec{j} + ku_z\vec{k}. \quad (1.21)$$

Ou seja, as componentes do vector $k\vec{u}$ são iguais ao produto de k pelas componentes correspondentes do vector \vec{u} , de onde resulta imediatamente que

$$\begin{aligned} \|k\vec{u}\| &= \sqrt{(ku_x)^2 + (ku_y)^2 + (ku_z)^2} = \sqrt{k^2(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)} = \\ &= |k|\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = |k|\|\vec{u}\| \end{aligned} \quad (1.22)$$

É particularmente importante notar que a multiplicação de um escalar por um vector não altera a direcção do vector. Apenas a sua norma e/ou o seu sentido são, eventualmente, alterados. Uma consequência deste facto é a seguinte: se dois vectores \vec{u} e \vec{v} forem colineares, isto é, tiverem a mesma direcção, então existe um escalar (não nulo) k tal que $\vec{u} = k\vec{v}$ e $\vec{v} = k^{-1}\vec{u}$. Ou seja, cada um dos vectores é igual ao produto de um escalar pelo outro vector.

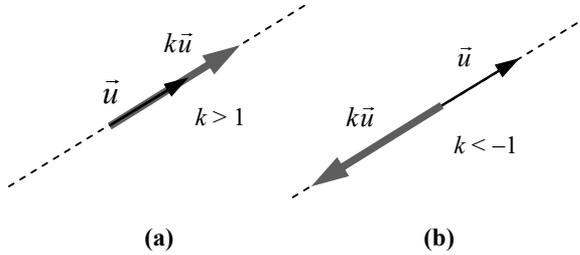


Figura 1.8. Representação gráfica da multiplicação de um escalar por um vector. a) caso em que $k > 1$ e b) caso em que $k < -1$.

Notemos ainda que o produto de um escalar por um vector é a operação que está na base da determinação do versor de um dado vector, que vimos atrás: $vers \vec{u} = k\vec{u}$ com $k = 1/\|\vec{u}\|$. Mais geralmente, podemos considerar o seguinte problema: ao calcularmos o versor de um vector, estamos a transformar esse vector em outro vector com a mesma direcção, o mesmo sentido, e norma igual à unidade. Como obter, a partir de um dado vector, \vec{v} , um outro vector \vec{V} com a mesma direcção e norma $\lambda > 0$ qualquer? A resposta é simples: partindo do vector \vec{v} , começa-se por calcular o seu versor

$$vers \vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \quad (1.23)$$

versor este que sabemos ter norma 1. Para o transformarmos num vector com norma λ qualquer, basta multiplica-lo por λ :

$$\vec{V} = \lambda vers \vec{v} = \frac{\lambda}{\|\vec{v}\|} \vec{v}, \quad (1.24)$$

ou, o que é equivalente, multiplicar \vec{v} por $\lambda / \|\vec{v}\|$: intuitivamente, “extrai-se” a norma de \vec{v} dividindo por $\|\vec{v}\|$, e “introduz-se” a norma pretendida multiplicando por λ . O vector \vec{V} tem a mesma direcção que \vec{v} e norma λ (*exercício*: verifique esta última afirmação). Além disso, como λ é positivo, \vec{V} tem o mesmo sentido que \vec{v} ; se se pretendesse determinar um vector \vec{U} com norma λ e sentido oposto ao de \vec{v} , bastaria multiplicar o versor de \vec{v} por $-\lambda$:

$$\vec{U} = -\lambda \text{ vers } \vec{v} = -\frac{\lambda}{\|\vec{v}\|} \vec{v}. \tag{1.25}$$

1.10.3. Produto interno ou escalar de vectores

Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vectores do espaço a qualquer número de dimensões. Define-se *produto interno* ou *produto escalar* de \vec{u} com \vec{v} , e representa-se por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, ou, em alternativa, por $\vec{u} | \vec{v}$, a grandeza

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}), \tag{1.26}$$

onde $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ é o menor dos ângulos formados pelos vectores \vec{u} e \vec{v} (*vide* figura 1.9). A expressão $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tem a seguinte leitura: “ \vec{u} interno com \vec{v} ”.

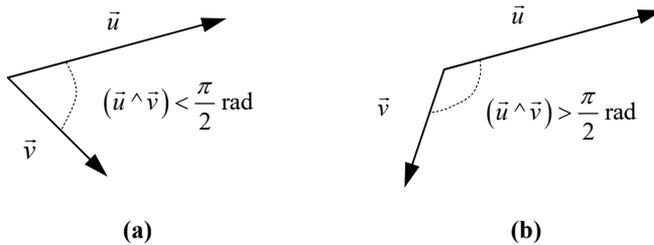


Figura 1.9. Ângulo entre dois vectores. a) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) < \pi/2 \text{ rad} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} > 0$; b) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) > \pi/2 \text{ rad} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.

Da definição do produto interno resultam imediatamente as seguintes propriedades:

- i. O produto interno de dois vectores é um escalar.
- ii. O produto interno é comutativo: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- iii. O produto interno do vector nulo com qualquer outro vector (nulo ou não) é zero.
- iv. Se $(\vec{u} \wedge \vec{v}) < \pi/2 \text{ rad} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ e se $(\vec{u} \wedge \vec{v}) > \pi/2 \text{ rad} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.
- v. O produto interno de dois vectores não nulos é zero se e só se os dois vectores forem perpendiculares entre si, ou seja, se $(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \pi/2 \text{ rad}$. Por outras palavras, a operação produto interno de vectores não obedece à lei do anulamento do produto, ao contrário do que se passa com o produto de escalares, mas em perfeita analogia com o que se passa no caso do produto de matrizes. Que assim seja não é acidental, uma vez que, como se sabe, os vectores podem ser vistos

como matrizes (linha ou coluna). Esta propriedade tem uma importante consequência: se dois vectores não nulos tiverem produto interno nulo, podemos imediatamente concluir que são perpendiculares entre si. Por esta razão, o produto interno facultá-nos um método extremamente simples de determinar se dois vectores dados são perpendiculares, ou, mais geralmente, de determinar o ângulo entre eles, como veremos já a seguir.

- vi. Por ser $\cos(\vec{u} \wedge \vec{u}) = 1$, o produto interno de um vector por ele próprio é igual ao quadrado da sua norma:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2. \quad (1.27)$$

A maneira mais frequente e expedita de calcular o produto interno de dois vectores é através das respectivas componentes. Se os vectores \vec{u} e \vec{v} forem representados, num dado sistema de coordenadas cartesianas, por $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, então o seu produto interno pode ser calculado como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = \sum_{i=x,y,z} u_i v_i. \quad (1.28)$$

Tomadas em conjunto, as equações (1.12), (1.26) e (1.28) permitem calcular o ângulo entre os dois vectores:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}\right). \quad (1.29)$$

Utilizando este último resultado podemos determinar, em particular, os chamados *co-senos directores* de um qualquer vector \vec{u} , que são os co-senos dos ângulos que esse vector forma com os eixos dos xx , dos yy e dos zz . Para tal, basta tomar, sucessivamente, $\vec{v} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{j}$ e $\vec{v} = \vec{k}$, obtendo-se

$$\cos(\vec{u} \wedge \vec{i}) = \frac{u_x}{\|\vec{u}\|}; \quad \cos(\vec{u} \wedge \vec{j}) = \frac{u_y}{\|\vec{u}\|}; \quad \cos(\vec{u} \wedge \vec{k}) = \frac{u_z}{\|\vec{u}\|}. \quad (1.30)$$

Exemplo 1.7

Sejam os vectores $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ e $\vec{b} = -2\vec{i} - 3\vec{k}$. a) Determinar o ângulo formado pelos vectores \vec{a} e \vec{b} ; b) calcular os ângulos formados pelo vector \vec{a} e os eixos Ox , Oy e Oz .

Resolução:

- a) O valor do ângulo é calculado com base na expressão (1.29). Calculamos primeiro as normas dos dois vectores:

$$\|\vec{a}\| \equiv a = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \quad \text{e} \quad \|\vec{b}\| \equiv b = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = 3.6.$$

Seguidamente calculamos o produto interno de \vec{a} com \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{i} - 4\vec{j}) \cdot (-2\vec{i} - 3\vec{k}) = -6 + 0 + 0 = -6.$$

Finalmente, determinamos o ângulo $(\vec{a} \wedge \vec{b})$:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{-6}{5 \times 3.6} = -0.33 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \arccos(-0.33) = 109.3^\circ. \end{aligned}$$

b) Com base nas expressões (1.30) obtemos:

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{i}) = \frac{a_x}{a} = \frac{3}{5} = 0.6 \Rightarrow (\vec{a} \wedge \overline{Ox}) = \arccos 0.6 = 53.1^\circ,$$

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{j}) = \frac{a_y}{a} = \frac{-4}{5} = -0.8 \Rightarrow (\vec{a} \wedge \overline{Oy}) = \arccos(-0.8) = 143.1^\circ,$$

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{k}) = \frac{a_z}{a} = \frac{0}{5} = 0 \Rightarrow (\vec{a} \wedge \overline{Oz}) = \arccos(0) = 90^\circ.$$

1.10.4. Produto externo ou vectorial de vectores

Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vectores do espaço tridimensional. Define-se *produto externo* ou *produto vectorial* de \vec{u} com \vec{v} , e representa-se por $\vec{u} \times \vec{v}$ ¹¹, o vector com as seguintes características:

- i. Tem direcção perpendicular ao plano definido pelos vectores \vec{u} e \vec{v} e sentido definido pela *regra da mão direita* ou *regra de Stokes*, que se aplica do seguinte modo: apontando o indicador e o dedo médio nos sentidos de \vec{u} e \vec{v} , respectivamente, o polegar apontará no sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ (*vide* figura 1.10a) ou, em alternativa, fechando a mão direita e curvando os dedos no mesmo sentido que leva o vector \vec{u} a ficar alinhado com o vector \vec{v} , o polegar indicará a direcção e o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ (*vide* figura 1.10b). Deste modo, os vectores \vec{u} , \vec{v} e $\vec{u} \times \vec{v}$ formam um triedro directo.

¹¹ É também frequentemente usada a notação $\vec{u} \wedge \vec{v}$ para designar o produto externo ou vectorial dos dois vectores. Não a usaremos por considerarmos que se pode confundir com a notação usada para representar o ângulo entre dois vectores.

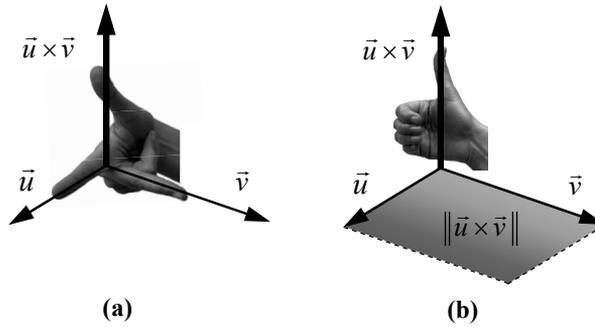


Figura 1.10. Produto externo ou produto vectorial de \vec{u} com \vec{v} . a) Determinação da direcção e sentido do vector $\vec{u} \times \vec{v}$ usando a regra da mão direita ou regra de Stokes. b) A norma do vector $\vec{u} \times \vec{v}$ é igual à área do paralelogramo definido pelos vectores \vec{u} e \vec{v} .

ii. Tem norma dada por

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u} \wedge \vec{v}). \quad (1.31)$$

Repare-se que a norma assim definida é sempre maior ou igual a zero, uma vez que o ângulo entre dois vectores é sempre menor ou igual que π rad e, portanto, $\sin(\vec{u} \wedge \vec{v}) \geq 0$.

A expressão $\vec{u} \times \vec{v}$ deve ler-se “ \vec{u} externo com \vec{v} ”. Dever-se-á resistir à tentação (inteiramente compreensível) de ler “ \vec{u} vezes \vec{v} ”, uma vez que esta leitura é ambígua. De facto, como vimos, existem pelo menos dois tipos de operação envolvendo o produto de vectores, sendo importante deixar sempre bem claro a que produto de vectores nos estamos a referir.

Decorrem da definição de produto externo ou vectorial as seguintes propriedades:

- i. O produto externo de dois vectores é um vector.
- ii. O produto externo é anti-comutativo: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.
- iii. O produto externo de um vector por ele próprio é o vector nulo, porque $\sin(\vec{u} \wedge \vec{u}) = 0$. Mais geralmente, o produto externo de dois vectores colineares (isto é, com a mesma direcção) é o vector nulo. Ou seja, tal como o produto interno, também o produto externo não obedece à lei do anulamento do produto.
- iv. O produto externo do vector nulo com qualquer outro vector é o vector nulo.

A maneira mais frequente e expedita de calcular o produto externo de dois vectores é através das respectivas componentes. Se os vectores \vec{u} e \vec{v} forem representados, num dado sistema de coordenadas cartesianas, por $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, então o seu produto externo pode ser calculado através da operação:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \quad (1.32)$$

$$= (u_y v_z - u_z v_y) \vec{i} + (u_z v_x - u_x v_z) \vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \vec{k}$$

onde $|\dots|$ representa um determinante simbólico. A primeira linha deste determinante contém os vectores de base do sistema de coordenadas, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; a segunda linha, as componentes do primeiro dos vectores do produto externo, \vec{u} ; e a terceira linha, as componentes do segundo vector do produto externo, \vec{v} . É agora clara a origem de algumas das propriedades do produto externo:

- i. Trocar a ordem dos factores corresponde a trocar a segunda e terceira linhas do determinante, logo a trocar o seu sinal.
- ii. O produto externo de um vector por ele próprio, ou por outro que lhe seja colinear, corresponde a um determinante em que a segunda e a terceira linhas não são linearmente independentes, o que implica que o determinante tenha valor nulo.

A operação produto externo é particularmente útil, uma vez que nos permite, a partir de dois vectores \vec{u} e \vec{v} quaisquer, determinar um terceiro vector perpendicular a ambos, isto é, que seja perpendicular ao plano definido pelos dois vectores: esse vector é simplesmente $\vec{u} \times \vec{v}$ (ou, em alternativa, $-\vec{u} \times \vec{v}$). Finalmente, verifica-se ainda que a norma do vector produto externo de dois vectores \vec{u} e \vec{v} é igual à área do paralelogramo definido por esses dois vectores (*vide* figura 1.10b).

Exemplo 1.8

Sejam os vectores $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ e $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. a) Determinar o vector $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$; b) calcular a área A do paralelogramo definido pelos vectores \vec{a} e \vec{b} .

Resolução:

a) Pela expressão (1.32) vem

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-6 - 0)\vec{i} + (0 - 6)\vec{j} + (-4 - 2)\vec{k} = -6\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}.$$

b) A área do paralelogramo é igual à norma de $\vec{a} \times \vec{b}$, donde

$$A = \|\vec{c}\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = 10.4.$$

O valor de A deverá ser expresso nas unidades que resultem do produto das unidades do vector \vec{a} pelas unidades do vector \vec{b} .

1.10.5. Derivadas e integrais de vectores

Considere-se o vector $\vec{v}(t) = v(t)\vec{u}(t)$, que depende da variável t . A sua derivada em ordem a t é

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[v(t)\vec{u}(t)] = \frac{dv}{dt}\vec{u} + v\frac{d\vec{u}}{dt}, \quad (1.33)$$

onde utilizámos a regra habitual da derivada do produto. No caso de o vector estar escrito nas suas componentes cartesianas, ter-se-á que $\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$ e a sua derivada em ordem a t será

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}. \quad (1.34)$$

Ou seja, a derivada de um vector é o vector cujas componentes cartesianas são as derivadas em ordem a t das componentes cartesianas do vector original. De modo análogo se calcula o integral definido de um vector expresso nas suas componentes cartesianas:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt = \left[\int_{t_1}^{t_2} v_x(t) dt \right] \vec{i} + \left[\int_{t_1}^{t_2} v_y(t) dt \right] \vec{j} + \left[\int_{t_1}^{t_2} v_z(t) dt \right] \vec{k}. \quad (1.35)$$

Ou seja, o integral definido de um vector é o vector cujas componentes são os integrais definidos das componentes cartesianas do vector original.

Exemplo 1.9

Considere a hélice circular de equação $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}$. Determinar:

- $d\vec{r}/dt$ e $\|d\vec{r}/dt\|$.
- $d^2\vec{r}/dt^2$ e $\|d^2\vec{r}/dt^2\|$.
- $\int_0^{\pi/2} \vec{r}(t) dt$.

Resolução:

a) Derivando uma vez em ordem a t e calculando a norma do vector, vem

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{k} \quad \text{e} \quad \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \sqrt{2}.$$

b) Derivando uma segunda vez em ordem a t e calculando a norma do vector, resulta

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j} \quad \text{e} \quad \left\| \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right\| = 1.$$

c) Notando que os vectores da base são constantes, vem

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \vec{r}(t) dt &= \int_0^{\pi/2} (\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}) dt = \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} \cos t dt \right) \vec{i} + \left(\int_0^{\pi/2} \sin t dt \right) \vec{j} + \left(\int_0^{\pi/2} t dt \right) \vec{k} = \\ &= [\sin t]_0^{\pi/2} \vec{i} + [-\cos t]_0^{\pi/2} \vec{j} + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi/2} \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \frac{\pi^2}{8} \vec{k}. \end{aligned}$$

PROBLEMAS

- 1.1. A intensidade da força gravítica, F_g , entre duas massas m_1 e m_2 que se encontram à distância d uma da outra é dada pela lei da gravitação universal

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{d^2},$$

onde G é a chamada constante de gravitação universal. Com base nesta expressão e na informação contida nas tabelas 1.1 e 1.3, determine as dimensões da constante G , bem como as unidades em que deve ser expressa no SI.

- 1.2. Como referido no exemplo 1.2, é por vezes conveniente utilizar um sistema de unidades alternativo ao SI, chamado sistema CGS, e cujas unidades de base para a Mecânica são o centímetro, o grama e o segundo. A unidade de energia no sistema CGS chama-se erg (símbolo erg). Qual é a relação entre o joule e o erg?
- 1.3. Sabendo que as dimensões lineares das bactérias são da ordem de $1 \mu\text{m}$, estime a massa de uma bactéria. *Sugestão:* de que substância são, essencialmente, constituídas as bactérias? *Dado:* a massa volúmica da água é $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ g cm}^{-3}$.
- 1.4. A Antárctida é um continente aproximadamente semicircular, com um raio de 2000 km e coberta com uma camada de gelo de espessura 3000 m. Ignorando a curvatura da Terra, estime o volume de gelo na Antárctida em centímetros cúbicos.
- 1.5. A unidade astronómica (au) é definida como a distância média entre a Terra e o Sol. O seu valor é aproximadamente $1.50 \times 10^8 \text{ km}$. Sabendo que a velocidade da luz é aproximadamente $3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, determine o valor da velocidade da luz em unidades astronómicas por minuto.
- 1.6. A relação entre a unidade de massa atómica (u) e o quilograma é $1 \text{ u} = 1.66057 \times 10^{-27} \text{ kg}$. Sabendo que a massa da Terra é $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ e que a massa média dos átomos que a constituem é 40 u, estime o número de átomos que existem na Terra.
- 1.7. Um depósito com 5700 m^3 de água demorou 10 h a ser esvaziado. Determine o fluxo mássico de saída da água expresso em quilogramas por segundo. *Dado:* a massa volúmica da água é $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ g cm}^{-3}$.
- 1.8. A *Hesperoyucca whipplei* é uma planta cuja inflorescência (flor) cresce muito rapidamente, tendo sido registado num espécime o recorde de crescimento de 3.7 m em 14 dias. Determine a taxa de crescimento do referido espécime em micrómetros por segundo.
- 1.9. Sejam os pontos $O(0,0,0)$, $A(2,0,3)$, $B(5,4,-1)$ e $C(1,4,-3)$.
- Determine os vectores $\vec{a} = B - A$ e $\vec{b} = C - O$ e calcule as respectivas normas.
 - Calcule a distância entre os pontos A e B .
 - Dado o vector $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, determine as coordenadas do ponto P tal que $\vec{v} = P - A$.

- 1.10. Dados os pontos $A(3,1,0)$, $B(1,3,0)$ e $C(0,1,3)$, determine:
- A expressão cartesiana dos vectores $\vec{a} = B - A$ e $\vec{b} = B - C$, bem como os respectivos co-senos directores.
 - A distância entre os pontos A e C .
 - O ponto D tal que $\overline{AD} = \overline{BC}$.
 - A norma e o versor do vector $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.
 - O ângulo entre os vectores \vec{b} e \vec{c} .
 - $4\vec{a} \times 2\vec{b}$.
- 1.11. Um navio parte de um ponto O e percorre, em linha recta, 50 km com a proa apontando para sul. Muda, então, de direcção apontando a proa para $S40^\circ E$, percorrendo mais 60 km. Finalmente, com a proa apontada para leste percorre 30 km até parar. Calcule a distância entre o ponto de partida e o ponto de chegada do navio.
- 1.12. Determine as componentes do vector cuja norma é 16 unidades de comprimento, que forma um ângulo $\theta = 28.9^\circ$ com o eixo dos zz e cuja projecção no plano Oxy forma um ângulo $\theta = 49.7^\circ$ com o eixo dos xx . Calcule em seguida os ângulos que o vector forma com os eixos dos xx e dos yy .
- 1.13. Calcule o produto interno do vector $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ com o vector $\vec{r} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$.
- 1.14. Calcule o ângulo formado pelo vector $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ com o vector $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.
- 1.15. Calcule o ângulo que o segmento de recta que liga o ponto $P(1,2,3)$ à origem O de um referencial cartesiano ortonormado forma com o eixo dos xx .
- 1.16. Dados os vectores $P - O = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $Q - O = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, determine as coordenadas cartesianas do vector $Q - P$, bem como os seus co-senos directores.
- 1.17. Considere o vector $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.
- Calcule os co-senos directores do vector.
 - Determine o ângulo que o vector forma com o plano Oxy .
 - Calcule um vector unitário, \vec{w} , perpendicular a \vec{v} e definido no plano Oyz .
 - Calcule o valor de a para que o vector $\vec{u} = 2\vec{i} - (3 + \alpha)\vec{j} - \vec{k}$ seja perpendicular ao vector \vec{v} .
- 1.18. Calcule a área do paralelogramo cujos lados são definidos pelos vectores $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.
- 1.19. Recorrendo apenas à operação produto externo, determine a área do triângulo de vértices $A(1,1)$, $B(3,3)$ e $C(2,0)$. Qual é o valor do ângulo no vértice A ?
- 1.20. Determine a distância entre o ponto P de coordenadas $(4, -1, 5)$ e a recta definida pelos pontos $P_1(-1, 2, 0)$ e $P_2(1, 1, 4)$.
- 1.21. Dados os vectores $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ e $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ calcule:
- A norma e os ângulos que o vector $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ forma com os eixos coordenados.

- b) A norma e os ângulos que o vector $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$ forma com os eixos coordenados.
c) O ângulo entre \vec{a} e \vec{b} .

- 1.22. Sejam \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} três vectores que satisfazem $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$. Que se pode concluir acerca destes vectores?
- 1.23. Prove que dois vectores \vec{a} e \vec{b} têm a mesma norma quando o vector soma $\vec{a} + \vec{b}$ é perpendicular ao vector diferença $\vec{a} - \vec{b}$.
- 1.24. Mostre que $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2$.

CAPÍTULO 2

CINEMÁTICA DO PONTO MATERIAL

A cinemática é o ramo da Mecânica que estuda a descrição dos movimentos sem preocupação das causas que os induziram ou os podem alterar; a dinâmica, que se debruça sobre as causas que induzem ou alteram um dado estado de movimento, será tratada em capítulos posteriores. Para o estudo da cinemática consideraremos sempre o movimento de um ponto ou partícula material, definido como um objecto dotado de massa, mas suficientemente pequeno para que as suas dimensões possam ser desprezadas.

2.1. POSIÇÃO, TRAJECTÓRIA E DESLOCAMENTO

A *posição* de uma partícula material define a sua localização no espaço relativamente a um dado sistema de coordenadas. É uma grandeza vectorial que, em geral, depende do tempo, e é representada pelo vector $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Em particular, num sistema de eixos cartesiano, o vector \vec{r} é escrito na seguinte forma geral:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad (2.1)$$

onde $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são funções do tempo e \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} são, recorde-se, os versores dos eixos Ox , Oy e Oz , respectivamente. Quer o vector \vec{r} quer as coordenadas cartesianas x , y e z são expressos no SI em metros.

Ao descrever um determinado movimento, uma partícula ocupa uma sequência de posições ao longo do tempo (*vide* figura 2.1). Esta sequência de posições define uma curva matemática a que se dá o nome de *trajectória*. Conhecidas as posições da partícula em quaisquer dois instantes t_1 e t_2 , define-se o *vector deslocamento* como a diferença entre os vectores posição nos instantes t_1 e t_2 :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (2.2)$$

O vector deslocamento afere a mudança de posição da partícula. Note-se, contudo, que a norma ou módulo do vector deslocamento, em geral, não coincide com a distância percorrida, que é o comprimento medido ao longo da trajectória entre as posições inicial e final. Coincidirão apenas se o movimento for rectilíneo e sem mudanças de sentido.

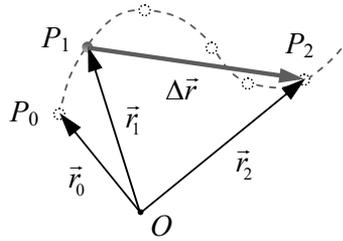


Figura 2.1. Representação do movimento de uma partícula material ao longo de uma determinada trajetória (linha a tracejado). O vector deslocamento $\Delta\vec{r}$ representado é determinado pela diferença entre as posições P_2 e P_1 .

2.1.1. Equações paramétricas. Determinação da trajetória da partícula

Como acima se referiu, a trajetória de uma partícula material fica definida pela sequência de posições por ela ocupadas no decurso do seu movimento. Esta sequência de pontos define uma curva descrita por relações matemáticas entre as coordenadas da partícula, relações estas que não envolvem a variável tempo¹². Coloca-se então a seguinte questão: conhecido o vector posição $\vec{r} = \vec{r}(t)$ como proceder para encontrar a curva matemática que define a trajetória da partícula? É fácil. Escrevem-se as equações paramétricas do movimento, definidas por

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

e elimina-se a variável t destas equações. Em seguida, estabelecem-se as relações entre coordenadas que definem a trajetória. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1

Uma partícula descreve um movimento de tal modo que o seu vector posição é $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + 5\vec{j} + 4t^2\vec{k}$ m. Determinar a equação da trajetória da partícula.

Resolução:

As equações paramétricas do movimento são as seguintes:

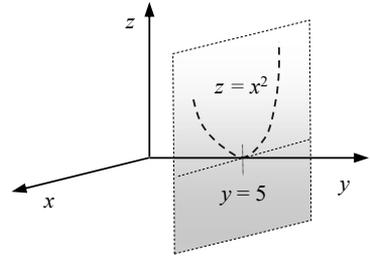
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 5 \\ z = 4t^2 \end{cases}$$

¹² O leitor deve certamente recordar que no estudo da geometria analítica nunca utilizou a variável tempo para descrever, por exemplo, a equação de uma recta ou de uma circunferência. As relações que permitem descrever estas curvas são relações apenas entre coordenadas espaciais.

Eliminando t do sistema de equações, resulta

$$\begin{cases} y = 5 \\ z = x^2 \end{cases}$$

donde se deduz que a trajectória da partícula é uma parábola no plano $y = 5$, com vértice no ponto de coordenadas $(0,5,0)$.



2.2. VECTOR VELOCIDADE

A *velocidade* é a grandeza física que mede a taxa de variação da posição de um objecto. Define-se *velocidade média* como o deslocamento por unidade de tempo, num dado intervalo de tempo finito Δt , isto é,

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \tag{2.4}$$

\vec{v}_m é um vector com a mesma direcção e sentido que o deslocamento $\Delta \vec{r}$. Note-se que, excepto quanto o deslocamento é o mesmo em intervalos de tempo iguais, \vec{v}_m não é a velocidade num dado instante t . A *velocidade instantânea* – a “verdadeira” velocidade num determinado instante t – é dada por

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{2.5}$$

Tendo em conta a relação (2.5), a velocidade instantânea é um vector tangente em cada ponto da trajectória da partícula, como decorre da definição de derivada e ilustrado na figura 2.2. Quer a velocidade média quer a velocidade instantânea são expressas no SI em m s^{-1} .

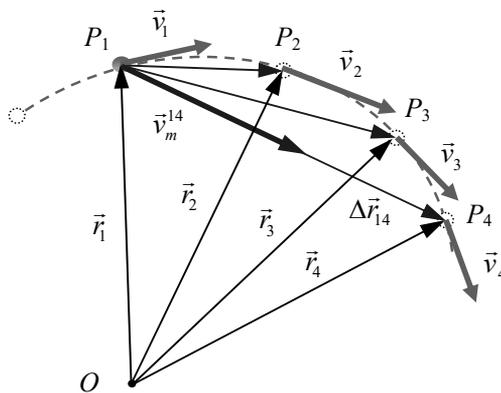


Figura 2.2. Em cada ponto da trajectória o vector velocidade instantânea, \vec{v}_i , é tangente à trajectória. Entre os pontos P_1 e P_4 está indicado o vector deslocamento $\Delta \vec{r}_{14}$ e a correspondente velocidade média \vec{v}_m^{14} .

Se a norma da velocidade for constante, $\|\vec{v}\| = \text{const}$, a taxa de variação da posição não muda e o movimento diz-se *uniforme*. A velocidade instantânea tem, neste caso, valor (módulo) igual ao da velocidade média, $v = v_m$ ¹³. Se, além disso, o vector velocidade for constante, $\vec{v} = \text{const}$, não só a taxa de variação da posição como a direcção e sentido do movimento não mudam. Neste caso o movimento diz-se *rectilíneo e uniforme*: a trajectória é uma linha recta, percorrida sempre no mesmo sentido.

2.3. VECTOR ACELERAÇÃO

Em geral, os movimentos não são uniformes. Um movimento não uniforme diz-se um movimento *variado*. Para caracterizar os movimentos variados define-se uma grandeza denominada *aceleração*, que mede a variação da velocidade no tempo, do mesmo modo que a velocidade mede a variação da posição no tempo. Define-se *aceleração média* como a variação de velocidade por unidade de tempo, num dado intervalo de tempo finito Δt , como o vector

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (2.6)$$

\vec{a}_m é, portanto, um vector com a mesma direcção e sentido que a variação de velocidade $\Delta \vec{v}$. A *aceleração instantânea* é dada por

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (2.7)$$

A aceleração instantânea é um vector tangente à curva da velocidade instantânea; não é, em geral, tangente à trajectória¹⁴. Quer a aceleração média quer a aceleração instantânea são expressas no SI em m s^{-2} . O tipo mais simples de movimento não uniforme é aquele em que a aceleração instantânea tem valor (norma) constante e igual ao da aceleração média, $a_m = a$. É denominado movimento *uniformemente variado*.

2.4. MOVIMENTO RECTILÍNEO NO ESPAÇO UNIDIMENSIONAL

Iniciaremos o estudo dos movimentos com os casos mais simples: os movimentos rectilíneos no espaço unidimensional. Nestes casos, a direcção do movimento não se altera e coincide com a direcção do vector velocidade (média ou instantânea). Para facilitar, va-

¹³ No que se segue, utilizaremos frequentemente o símbolo de uma grandeza vectorial sem o sinal de vector para representar o seu módulo ou norma; por exemplo $v = \|\vec{v}\|$ é o módulo, norma ou valor da velocidade instantânea.

¹⁴ Quando a trajectória de uma partícula material é rectilínea a aceleração tem sempre a direcção da trajectória. Apenas neste caso a aceleração é tangente à trajectória.

mos admitir que a referida direcção do movimento coincide com a direcção do eixo dos xx . Não advém daqui qualquer perda de generalidade, uma vez que temos plena liberdade de escolher o sistema de eixos que mais nos convier. Deste modo, os vectores posição, velocidade e aceleração poderão ser escritos na forma $\vec{r}(t) = x(t) \vec{i}$, $\vec{v}(t) = v(t) \vec{i}$ e $\vec{a}(t) = a(t) \vec{i}$, respectivamente. Note-se que ao admitirmos que o movimento ocorre ao longo de um dos eixos cartesianos podemos escamotear o carácter vectorial das grandezas posição, velocidade e aceleração e ter apenas em conta o seu valor e sinal.

2.4.1. Movimento rectilíneo e uniforme

Um movimento rectilíneo diz-se *rectilíneo e uniforme* se o valor da velocidade for constante ($v = const.$), o que implica que a aceleração seja nula ($a = 0$) em qualquer instante. Admitamos que uma partícula que descreve um movimento rectilíneo e uniforme (m.r.u.) se encontrava na posição $x = x_0$ no instante $t = t_0$. Pretende-se encontrar a expressão que permita calcular a posição da referida partícula em qualquer instante. Sabe-se que $v = dx/dt$, logo

$$dx = v dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx' = \int_{t_0}^t v dt', \quad (2.8)$$

obtendo-se por integração de (2.8) a expressão

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0), \quad (2.9)$$

conhecida por *lei dos espaços* ou *equação do movimento* do movimento rectilíneo e uniforme. É a expressão (2.9) que permite determinar a posição da partícula em qualquer instante t que se considere. De notar que as constantes x_0 e t_0 são extremamente importantes, pois é através delas que se introduzem as características específicas de cada movimento. No caso particular de $t_0 = 0$, a lei dos espaços do m.r.u. assume a forma simplificada

$$x(t) = x_0 + vt. \quad (2.10)$$

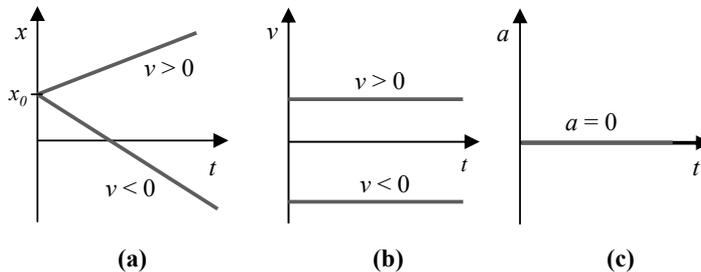


Figura 2.3. Gráficos associados ao movimento rectilíneo e uniforme: a) lei dos espaços, $x \neq x(t)$, para os casos $v > 0$ e $v < 0$; b) lei das velocidades, $v = const.$, para os casos $v > 0$ e $v < 0$; c) lei das acelerações, $a = 0$ em qualquer instante. Note-se que x , v e a são, respectivamente, as componentes segundo o eixo dos xx da posição, da velocidade e da aceleração.

Na figura 2.3 mostram-se os gráficos $x = x(t)$, $v = v(t)$ e $a = a(t)$ associados ao m.r.u.. A partícula desloca-se no sentido positivo do eixo dos xx se $v > 0$, e no sentido negativo se $v < 0$. Em qualquer dos casos nunca haverá inversão do sentido do movimento, na medida em que a velocidade é constante.

Exemplo 2.2

Uma partícula movimenta-se com velocidade constante de 4 m s^{-1} segundo a direcção e sentido positivo do eixo dos xx . a) Determinar a equação do movimento sabendo que no instante $t = 0$ a partícula se encontrava na posição $x = 3 \text{ m}$. b) Calcular a posição da partícula no instante $t = 4 \text{ s}$. c) Calcular a distância percorrida pela partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 4 \text{ s}$.

Resolução:

a) Como se conhece a posição da partícula em $t = 0$, a lei dos espaços do movimento é

$$x(t) = x_0 + vt = 3 + 4t.$$

b) $x(t = 4) = 3 + 4 \times 4 = 19 \text{ m}$.

c) $|\Delta x| = |x(t = 4) - x(t = 0)| = |19 - 3| = 16 \text{ m}$.

Exemplo 2.3

Uma partícula movimenta-se com velocidade constante de 2 m s^{-1} segundo a direcção e sentido positivo do eixo dos xx . a) Determinar a equação do movimento sabendo que no instante $t = 1 \text{ s}$ a partícula se encontrava na posição $x = 4 \text{ m}$. b) Calcular a posição da partícula no instante $t = 0 \text{ s}$. c) Calcular a distância d percorrida pela partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 4 \text{ s}$.

Resolução:

a) Como neste caso não se conhece a posição da partícula no instante $t = 0$, a lei dos espaços do movimento é calculada através da integração da velocidade:

$$dx = v dt \Rightarrow \int_{x(t=1)}^{x(t)} dx' = \int_{t=1}^t v dt' \Leftrightarrow \int_4^{x(t)} dx' = \int_1^t 2 dt',$$

donde,

$$x(t) - 4 = 2(t - 1) \Leftrightarrow x(t) = 2 + 2t.$$

b) $x(t = 0) = 2 \text{ m}$ (calculado directamente da lei dos espaços).

c) $x(t = 4) = 10 \text{ m}$; $d = |\Delta x| = |x(t = 4) - x(t = 0)| = |10 - 2| = 8 \text{ m}$.

2.4.2. Movimento rectilíneo uniformemente variado

Consideremos agora o movimento rectilíneo uniformemente variado (m.r.u.v.). Uma partícula que descreva um m.r.u.v. tem aceleração de norma constante não nula, $a = \text{const.} \neq 0$. Pretende-se conhecer, em cada instante t , a posição e a velocidade de uma partícula animada deste movimento. Admita-se então que uma partícula descreve um m.r.u.v. de

tal modo que no instante $t = t_0$ se encontrava na posição $x = x_0$ animada de velocidade $v = v_0$. Começemos por determinar a expressão que permite calcular a velocidade da partícula em qualquer instante. Sabe-se que $a = dv/dt$, logo

$$dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dv' = \int_{t_0}^t a dt', \quad (2.11)$$

obtendo-se por integração de (2.11) a expressão

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0), \quad (2.12)$$

conhecida por *lei das velocidades* do m.r.u.v. Esta a expressão permite o cálculo da velocidade da partícula em qualquer instante t . No caso particular de $t_0 = 0$, a expressão (2.11) reduz-se à forma simplificada

$$v(t) = v_0 + at. \quad (2.13)$$

Pretende-se agora determinar a lei dos espaços do m.r.u.v.. Recordando que $v = dx/dt$ e considerando a expressão da lei das velocidades (2.11), vem

$$dx = v dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx' = \int_{t_0}^t v dt' \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx' = \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt', \quad (2.14)$$

donde, integrando (2.14), se tem

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2, \quad (2.15)$$

que é a lei dos espaços do m.r.u.v.. No caso particular de $t_0 = 0$, a expressão (2.14) reduz-se à forma

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \quad (2.16)$$

A lei dos espaços do m.r.u.v. pode ser igualmente deduzida graficamente. Para este tipo de movimento, o gráfico da velocidade em função do tempo é uma linha recta cuja ordenada na origem é a velocidade inicial, v_0 , e cujo declive é a aceleração, a (*vide* figura 2.4). O deslocamento $\Delta x = x(t) - x_0$ é simplesmente o integral da velocidade no tempo, isto é, a área delimitada por aquela linha recta e pelo eixo das abcissas. Como esta área tem a forma de um trapézio, vem

$$x(t) - x_0 = \Delta x = \frac{v_0 + v(t)}{2}(t - t_0) = \frac{v_0 + v_0 + a(t - t_0)}{2}(t - t_0), \quad (2.17)$$

logo,

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2, \quad (2.18)$$

que é a lei dos espaços do movimento anteriormente obtida.

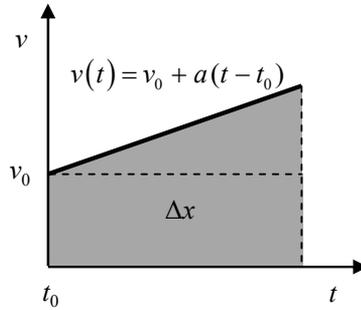


Figura 2.4. Representação gráfica da lei das velocidades do movimento retilíneo uniformemente variado. A área delimitada pela recta $v(t) = v_0 + a(t - t_0)$ e o eixo dos tempos iguala a o deslocamento $\Delta x = x(t) - x_0$.

Note-se que o movimento retilíneo e uniforme é um caso particular de movimento retilíneo uniformemente variado em que a aceleração é constante e igual a zero; nesse caso a figura delimitada pela curva da velocidade e pelo eixo dos tempos é um rectângulo, como se pode verificar na figura 2.3 b).

Num m.r.u.v. o sentido do movimento fica definido exclusivamente pelo sentido (sinal) da velocidade. Contudo, para se diferenciar um movimento acelerado de um movimento retardado é necessário ter em conta os sinais relativos da velocidade e da aceleração. O movimento é acelerado se a velocidade e a aceleração tiverem o mesmo sentido (sinal) e é retardado se a velocidade e a aceleração tiverem sentidos (sinais) contrários (*vide* esquema da figura 2.5). Note-se ainda que uma partícula material que descreva um m.r.u.v. pode inverter o sentido do movimento. Mas para o fazer terá forçosamente que anular a sua velocidade. Encontra-se o instante em que ocorre a inversão do sentido de movimento igualando a zero a expressão que define a lei das velocidades do movimento da partícula.

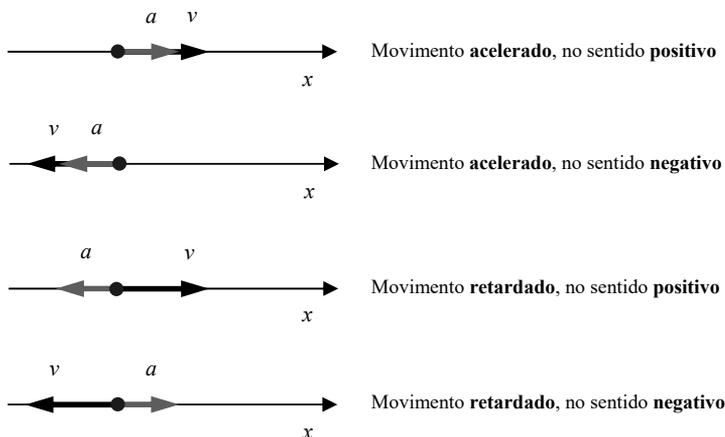


Figura 2.5. Representação esquemática de movimentos retilíneos acelerados e retardados. O sentido do movimento fica definido pelo sentido da velocidade. O movimento é acelerado se v e a tiverem o mesmo sentido (sinal) e é retardado se v e a tiverem sentidos (sinais) contrários.

Podemos igualmente deduzir uma relação entre a velocidade e o deslocamento no movimento rectilíneo uniformemente variado, eliminando o tempo entre as equações (2.12) e (2.15):

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \\ v(t) = v_0 + a(t - t_0) \end{cases} \Leftrightarrow \quad , \quad (2.19)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t - t_0 = \frac{v(t) - v_0}{a} \\ x(t) - x_0 = v_0 \frac{v(t) - v_0}{a} + \frac{1}{2}a \left[\frac{v(t) - v_0}{a} \right]^2 \end{cases}$$

donde se obtém a relação

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \quad (2.20)$$

A expressão (2.20) é uma relação cinemática importante porque permite relacionar o deslocamento $\Delta x = x - x_0$ com a velocidade e a aceleração, sem o envolvimento da variável tempo.

Terminamos esta secção com uma observação importante: decorre da lei das velocidades (2.12) e da lei dos espaços do m.r.u.v. (2.15) que, para se determinar a velocidade $v(t)$ e a posição $x(t)$ num determinado instante t , é necessário conhecer a velocidade v_0 e a posição x_0 num determinado instante t_0 . Este instante t_0 não tem de ser zero. O seu valor depende do problema concreto que se estiver a tratar.

Exemplo 2.4

Uma partícula movimenta-se com aceleração constante de 2 m s^{-2} ao longo do eixo dos xx . Sabe-se que no instante $t = 1 \text{ s}$ a partícula se encontrava na posição $x = 0$ com velocidade $v = -2 \text{ m s}^{-1}$. a) Determinar a lei das velocidades e a lei dos espaços do movimento. b) Calcular o instante em que a partícula inverte o sentido do movimento, indicando quando se movimenta no sentido positivo do eixo e quando se movimenta no sentido negativo. c) Calcular o deslocamento Δx sofrido pela partícula no intervalo de tempo $[0, 5] \text{ s}$. d) Determinar a distância Δs percorrida pela partícula no intervalo de tempo referido na alínea anterior.

Resolução:

a) A lei das velocidades do movimento é calculada através da integração da aceleração. Neste caso conhece-se a velocidade da partícula no instante $t = 1 \text{ s}$ e não no instante $t = 0$:

$$dv = a dt \Rightarrow \int_{v(t=1)}^{v(t)} dv' = \int_{t=1}^t a dt' \Leftrightarrow \int_{-2}^{v(t)} dv' = 2 \int_1^t dt',$$

donde vem

$$v(t) + 2 = 2(t - 1) \Leftrightarrow v(t) = -4 + 2t$$

A lei dos espaços é determinada integrando a velocidade

$$dx = v dt \Rightarrow \int_{x(t=1)}^{x(t)} dx' = \int_{t=1}^t v(t') dt' \Leftrightarrow \int_0^{x(t)} dx' = \int_1^t (-4 + 2t') dt',$$

resultando

$$x(t) = -4[t']_1^t + 2\left[\frac{t'^2}{2}\right]_1^t \Leftrightarrow x(t) = 3 - 4t + t^2.$$

- b) O instante em que há inversão do sentido do movimento é o instante que verifica $v(t) = 0$, isto é,

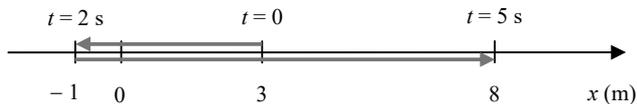
$$v(t) = -4 + 2t = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ s.}$$

A partícula movimenta-se no sentido positivo do eixo dos xx ($v > 0$) para $t > 2$ s e no sentido negativo ($v < 0$) para $t < 2$ s.

- c) $\Delta x = x(t = 5) - x(t = 0) = 8 - 3 = 5$ m.
 d) Como no intervalo de tempo considerado há inversão do sentido de movimento, a distância percorrida pela partícula é diferente da norma do deslocamento correspondente ao mesmo intervalo de tempo (calculado na alínea anterior). Nestes casos deveremos considerar dois intervalos de tempo: o primeiro entre o instante inicial e o instante em que ocorre a inversão do movimento e um segundo intervalo entre este último instante e o instante de tempo final. No presente caso, estes intervalos são $[0, 2]$ s e $[2, 5]$ s. Em seguida, calcula-se a distância mediante a soma das normas dos deslocamentos correspondentes aos dois intervalos de tempo (as quais, neste caso unidimensional, coincidem com os respectivos módulos):

$$\begin{aligned} \Delta s &= |x(t = 2) - x(t = 0)| + |x(t = 5) - x(t = 2)| = \\ &= |(-1) - 3| + |8 - (-1)| = 13 \text{ m.} \end{aligned}$$

O raciocínio subjacente ao cálculo efectuado encontra-se esquematizado na seguinte figura:



2.5. MOVIMENTO RECTILÍNEO NOS ESPAÇOS BI E TRIDIMENSIONAL

As leis do movimento rectilíneo uniforme e do movimento rectilíneo uniformemente variado no espaço unidimensional podem ser facilmente generalizadas aos espaços bi- e tridimensionais, considerando agora explicitamente os vectores posição, velocidade e aceleração e impondo as condições para que a trajectória da partícula seja uma linha recta

2.5.1. Movimento rectilíneo uniforme

Num movimento rectilíneo e uniforme a duas ou três dimensões teremos $\vec{a} = \vec{0}$ e por isso a lei das velocidades será $\vec{v} = \overline{const}$. Admitindo que no instante t_0 a partícula se encontrava na posição definida pelo vector \vec{r}_0 , a lei dos espaços será

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0), \quad (2.21)$$

ou, no caso particular de $t_0 = 0$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t. \quad (2.22)$$

Como neste caso a norma e a direcção do vector velocidade são constantes, a trajectória de um movimento descrito pelas expressões (2.21) ou (2.22) será sempre rectilínea.

2.5.2. Movimento rectilíneo uniformemente variado

Num movimento rectilíneo uniformemente variado em espaços bi- ou tridimensionais teremos $\vec{a} = \overline{const}$. Admitindo que no instante t_0 a partícula que descreve o movimento se encontrava na posição definida pelo vector \vec{r}_0 com velocidade \vec{v}_0 , a lei das velocidades do movimento será

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0), \quad (2.23)$$

ou, no caso particular de $t_0 = 0$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \quad (2.24)$$

A lei dos espaços será

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2, \quad (2.25)$$

expressão cuja forma se simplifica caso $t_0 = 0$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2 \end{cases}. \quad (2.26)$$

Para que o movimento descrito pela expressões (2.23) e (2.25) ou (2.24) e (2.26) seja um movimento rectilíneo uniformemente variado é necessário que os vectores \vec{v}_0 e \vec{a} sejam colineares. Caso contrário, teremos um movimento uniformemente variado, mas não rectilíneo – a trajectória será curvilínea.

2.6. MOVIMENTO CURVILÍNEO

Um movimento diz-se *curvilíneo* se a direcção da velocidade variar ao longo do tempo. O movimento diz-se em duas dimensões se o vector velocidade permanecer sempre no mesmo plano, ou em três dimensões, se não permanecer. Claro que em qualquer destes casos o carácter vectorial da posição, da velocidade e da aceleração não pode ser escamoteado. Note-se, contudo, que um movimento em duas (ou três) dimensões é descrito por dois (ou três) movimentos em uma dimensão, cada um segundo um dos eixos coordenados: diz-se que um movimento em duas (ou três) dimensões é a composição de dois (ou três) movimentos em uma dimensão. Para estudar o movimento em duas (ou três) dimensões basta-nos, então, considerar separadamente os movimentos segundo os eixos dos xx , yy e zz como dois (ou três) movimentos rectilíneos (unidimensionais) independentes. Por exemplo, um movimento em que a velocidade seja igual a

$$\vec{v}(t) = 2t\vec{i} + 4\vec{j}, \quad (2.27)$$

é claramente a composição de um movimento uniformemente acelerado segundo o eixo dos xx , e um movimento uniforme no sentido positivo do eixo dos yy , pelo que, se no instante inicial $t_0 = 0$ a posição for $\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (1, 0)$, a lei dos espaços vem

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_x(t') dt' = 1 + \int_0^t 2t' dt' = 1 + t^2 \\ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t v_y(t') dt' = 0 + \int_0^t 4 dt' = 4t \end{array} \right., \quad (2.28)$$

isto é,

$$\vec{r}(t) = (1 + t^2)\vec{i} + 4t\vec{j}. \quad (2.29)$$

Eliminando a variável t do sistema (2.28) pode igualmente obter-se a equação cartesiana da trajectória,

$$x = 1 + \frac{y^2}{16}, \quad (2.30)$$

que neste caso é uma parábola. Veremos outros exemplos quando abordarmos o movimento dos projecteis.

É importante ter sempre presentes as seguintes propriedades do movimento, qualquer que seja o espaço dimensional em que ocorra:

- i. O vector velocidade é tangente à trajectória em cada ponto.
- ii. O vector aceleração é tangente à curva da velocidade em cada ponto (não à trajectória).
- iii. Mesmo que, num dado movimento, o valor de \vec{v} não mude, a sua direcção pode mudar, razão pela qual a aceleração \vec{a} não é necessariamente nula. Por esta razão, o vector aceleração tem, no caso mais geral, uma componente paralela e uma componente perpendicular ao vector velocidade¹⁵.

Elaboremos um pouco mais sobre a terceira propriedade acima descrita e para o efeito consideremos o esquema representado na figura 2.6. A componente de \vec{a} paralela a \vec{v} recebe o nome de *aceleração tangencial* e designa-se por \vec{a}_t . A aceleração tangencial mede a variação no tempo do valor da velocidade, sendo por isso o seu valor dada por

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \quad (2.31)$$

com v a norma da velocidade; a_t é nula se o movimento for uniforme. A componente de \vec{a} perpendicular a \vec{v} é chamada *aceleração normal ou centrípeta* e designa-se por \vec{a}_n . A aceleração normal é a responsável pela variação da direcção da velocidade a valor constante. Verifica-se a relação vectorial

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t, \quad (2.32)$$

da qual decorre

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}. \quad (2.33)$$

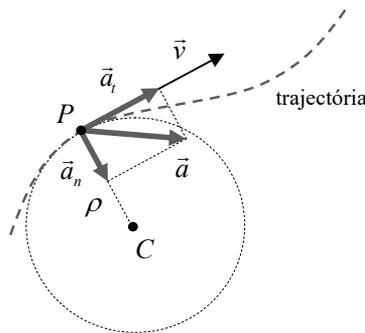


Figura 2.6. Representação de um movimento curvilíneo. A circunferência tangente à trajectória no ponto P e centrada no ponto C define o raio de curvatura, r , da trajectória no ponto P . O vector velocidade é sempre tangente à trajectória. O vector aceleração tem duas componentes: a componente tangencial (a_t) e a componente normal (a_n). A componente a_t tem a direcção do vector velocidade e a componente a_n tem a direcção de ρ e aponta sempre no sentido \overline{PC} . Deste modo o vector aceleração aponta sempre para o lado côncavo da trajectória.

¹⁵ Qualquer vector pode ser escrito como a soma de dois vectores perpendiculares entre si.

Se a aceleração normal não for nula, o movimento não pode, portanto, ser rectilíneo. Define-se o *raio de curvatura* da trajectória como

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}. \quad (2.34)$$

Note-se que ρ pode variar no tempo, uma vez que nada obriga a que os valores de v ou de a_n sejam constantes; trata-se, portanto, de um raio de curvatura instantâneo. No caso particular de ρ ser constante no tempo, a trajectória da partícula é circular.

A aceleração tangencial tem a mesma direcção que a velocidade. Se, além disso, tiver o mesmo sentido (sinal) que a velocidade, o movimento diz-se acelerado; se tiver sentido contrário, o movimento diz-se retardado. A aceleração tangencial não afecta a direcção da velocidade, apenas o seu valor. Logo, um movimento curvilíneo pode ter aceleração tangencial nula (se for uniforme), mas a aceleração normal só é nula se o movimento for rectilíneo (mesmo não sendo uniforme).

O facto de a aceleração ter, em geral, duas componentes, pode ser facilmente deduzido tendo em conta que o vector velocidade é sempre tangente à trajectória, ou seja

$$\vec{v} = v\vec{u}_t, \quad (2.35)$$

com v a norma da velocidade e \vec{u}_t o versor da tangente à trajectória. Como qualquer destas duas grandezas é função do tempo, a aceleração é dada por

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \quad (2.36)$$

Exemplo 2.5

Um ponto material percorre uma curva plana de tal modo que as suas coordenadas cartesianas são dadas pelo vector posição $\vec{r}(t) = 5t^2\vec{i} + 12t\vec{j}$ (SI). a) Determinar a equação da trajectória do ponto material; b) calcular os vectores velocidade e aceleração do ponto material; c) calcular as componentes normal e tangencial da aceleração do ponto material; d) calcular o raio de curvatura da trajectória no instante $t = 2$ s.

Resolução:

a) As equações paramétricas do movimento são:

$$\begin{cases} x = 5t^2 \\ y = 12t \end{cases}.$$

Eliminando t deste sistema, obtemos a equação da trajectória

$$y = \frac{12}{\sqrt{5}}x^{1/2}.$$

b) $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = 10t\vec{i} + 12\vec{j} \text{ ms}^{-1}$, $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = 10\vec{i} \text{ ms}^{-2}$.

- c) Usando a relação (2.31) e tendo em consideração a expressão da velocidade anteriormente determinada, podemos calcular a componente tangencial da aceleração:

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{(10t)^2 + 12^2} = \frac{1}{2} \frac{200t}{\sqrt{(10t)^2 + 144}} = \\ &= \frac{100t}{\sqrt{100t^2 + 144}} = \frac{50t}{\sqrt{25t^2 + 36}} \text{ ms}^{-2} \end{aligned}$$

Da alínea b) sabe-se que a norma da aceleração é $a = 10 \text{ m s}^{-2}$. Logo, através da expressão (2.33) podemos calcular a componente normal da aceleração:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \Leftrightarrow a_n^2 = a^2 - a_t^2 = 100 - \frac{(50t)^2}{25t^2 + 36} = \frac{3600}{25t^2 + 36},$$

donde,

$$a_n = \sqrt{\frac{3600}{25t^2 + 36}} = \frac{60}{\sqrt{25t^2 + 36}} \text{ ms}^{-2}.$$

- d) Para determinarmos o raio da trajectória no instante $t = 2 \text{ s}$ usamos a expressão (2.34), calculando primeiro o quadrado da velocidade e a aceleração normal naquele mesmo instante:

$$v^2(t=2) = [(10t)^2 + 12^2]_{t=2} = 544 \text{ m}^2\text{s}^{-2},$$

$$a_n(t=2) = \left[\frac{60}{\sqrt{25t^2 + 36}} \right]_{t=2} = 5.145 \text{ ms}^{-2}.$$

Temos finalmente

$$\rho(t=2) = \left[\frac{v^2}{a_n} \right]_{t=2} = \frac{544}{5.145} = 105.7 \text{ m}.$$

2.7. MOVIMENTO DE PROJÉCTEIS

Um projectil é um corpo ao qual é comunicada uma velocidade inicial e que é seguidamente abandonado num campo gravítico (*vide* figura 2.7). As equações do movimento de um projectil podem obter-se a partir de

$$\vec{a} = -g\vec{j} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}, \quad (2.37)$$

onde $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ é a aceleração da gravidade da Terra (toma valores diferentes noutros corpos celestes). É um facto experimental que a aceleração da gravidade terrestre é a mesma

para todos os corpos e dirigida segundo a vertical, de cima para baixo (ou seja, aponta para o centro da Terra). Como a aceleração de um projectil é constante, o seu movimento vai ser um movimento uniformemente variado. Deste modo aplicam-se as expressões (2.23) e (2.25), ou (2.24) e (2.26) caso $t_0 = 0$, para se deduzirem a leis das velocidades e dos espaços do movimento de um projectil, respectivamente. A lei das velocidades é, portanto,

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0). \quad (2.38)$$

A partir desta relação, considerando que $\vec{a} = -g\vec{j}$ e que

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} = v_0 \cos\theta \vec{i} + v_0 \sin\theta \vec{j}, \quad (2.39)$$

podemos escrever a lei das velocidades do movimento na forma

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos\theta \vec{i} + [v_0 \sin\theta - g(t - t_0)]\vec{j}. \quad (2.40)$$

A velocidade do projectil tem, pois, as seguintes componentes:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_y(t) = v_{0y} - g(t - t_0) = v_0 \sin\theta - g(t - t_0) \end{cases} \quad (2.41)$$

Reparar que a componente horizontal da velocidade não depende do tempo; é constante e sempre igual v_{0x} . A razão deste facto é simples: após o seu lançamento, o projectil fica submetido apenas à aceleração gravítica e esta só tem componente segundo yy (directão da vertical do lugar). Note-se que estamos a desprezar a curvatura da superfície terrestre. Logo só pode haver variação da componente v_y da velocidade, como está explicitamente indicado na segunda equação do sistema (2.41).

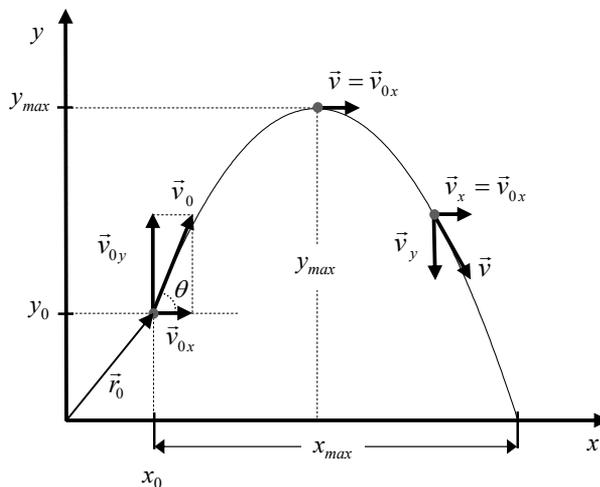


Figura 2.7. Representação de um movimento de um projectil lançado da posição (x_0, y_0) com velocidade inicial de valor v_0 , formando um ângulo θ com a horizontal.

No que respeita à lei dos espaços do movimento de um projectil, usando a expressão do vector posição para o movimento uniformemente variado

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2, \quad (2.42)$$

obtemos

$$\vec{r}(t) = [x_0 + v_{0x}(t - t_0)]\vec{i} + \left[y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \right]\vec{j}. \quad (2.43)$$

verificando-se que o vector que define a posição do projectil em cada instante tem componentes

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{cases}, \quad (2.44)$$

o que permite verificar que o movimento de um projectil é uma composição de um movimento uniforme segundo o eixo dos xx e de um movimento uniformemente variado segundo o eixo dos yy .

Eliminando $(t - t_0)$ entre as equações (2.44), facilmente se obtém a equação da trajectória de um projectil¹⁶:

$$y = y_0 + \tan\theta(x - x_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}(x - x_0)^2, \quad (2.45)$$

que é uma parábola.

As equações (2.41) e (2.45) permitem determinar vários parâmetros de interesse relativos ao movimento dos projecteis, a saber:

- i. *Tempo de voo do projectil* (t_{voo}): é o tempo que decorre desde que o projectil inicia o seu movimento até se deter. Pode ser determinado, por exemplo, utilizando uma das equações (2.44), se for conhecido o ponto onde o projectil termina o seu movimento.
- ii. *Alcance do projectil* (x_{max}): é a distância percorrida na horizontal durante o tempo de voo. Determina-se substituindo o tempo de voo na primeira das equações (2.44).
- iii. *Tempo de subida* (t_{sub}): é o intervalo de tempo até ser atingido o ponto mais alto da trajectória. Como a velocidade é sempre tangente à trajectória, neste ponto anula-se a componente vertical da velocidade, logo t_{sub} determina-se igualando a zero a segunda das equações (2.41).

¹⁶ *Exercício*: deduza a equação (2.45).

- iv. *Altura máxima atingida pelo projectil* (y_{max}): é o valor máximo de y atingido durante o movimento do projectil. Determina-se substituindo o tempo de subida na segunda das equações (2.44).

2.7.1. Movimento de um projectil lançado na horizontal

Como caso particular do movimento geral de projecteis, consideremos o lançamento horizontal de uma partícula material representado esquematicamente na figura 2.8.

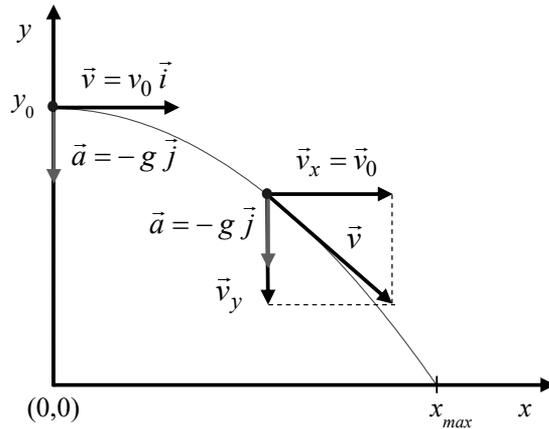


Figura 2.8. Representação do movimento de um projectil lançado na horizontal de uma altura y_0 com velocidade inicial de valor v_0 .

Admitindo que o lançamento do projectil ocorre no instante $t_0 = 0$, teremos, por aplicação das equações (2.41), que as componentes da velocidade do projectil são

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -gt \end{cases}, \quad (2.46)$$

deduzindo-se assim a lei das velocidades

$$\vec{v}(t) = v_0 \vec{i} - gt \vec{j}. \quad (2.47)$$

Por aplicação das relações (2.44), as componentes do vector posição do projectil são

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}, \quad (2.48)$$

e portanto a lei das posições é definida pelo vector

$$\vec{r}(t) = v_0 t \vec{i} + \left(y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \right) \vec{j}. \quad (2.49)$$

Eliminando o tempo do sistema de equações (2.48), obtemos a equação da trajectória do projectil,

$$y = y_0 - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}, \quad (2.50)$$

que é uma parábola no plano Oxy .

Podemos agora calcular alguns parâmetros característicos do movimento:

- i. *Tempo de voo do projectil* (t_{voo}). É calculado fazendo $y(t) = 0$ na segunda das equações (2.48):

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Leftrightarrow t_{voo} = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}. \quad (2.51)$$

- ii. *Alcance do projectil* (x_{max}). É calculado substituindo o valor t_{voo} na componente $x(t)$ definida pela primeira das equações (2.48):

$$x_{max} = x(t_{voo}) = v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}. \quad (2.52)$$

- iii. *Velocidade de embate no solo* (v_{solo}). Calcula-se substituindo o valor t_{voo} na expressão da velocidade (2.47):

$$\vec{v}_{solo} = v_0 \vec{i} - g t_{voo} \vec{j} = v_0 \vec{i} - \sqrt{2y_0 g} \vec{j}. \quad (2.53)$$

- iv. *Ângulo de embate no solo* (α_{solo}). É o ângulo que o vector \vec{v}_{solo} forma com a direcção do eixo Ox . é dado por:

$$\alpha_{solo} = \arctan\left(\frac{v_{y,solo}}{v_{x,solo}}\right) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2y_0 g}}{v_0}\right). \quad (2.54)$$

2.7.2. Movimento de um projectil lançado obliquamente da origem

Consideremos agora o caso particular de um projectil lançado obliquamente da origem do referencial, conforme se representa na figura 2.9.

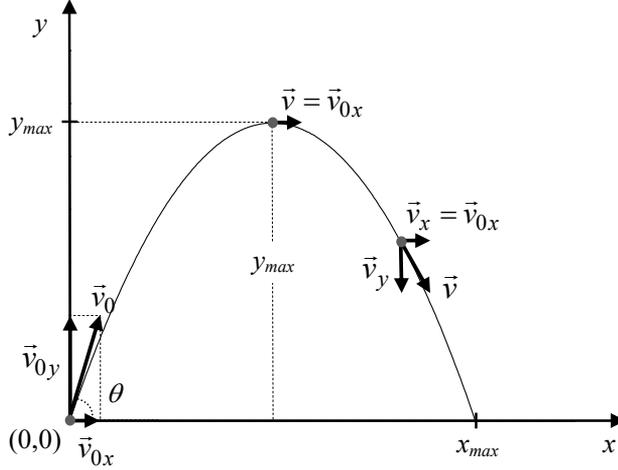


Figura 2.9. Representação de um movimento de um projectil lançado da origem do referencial com velocidade inicial de valor v_0 , formando um ângulo θ com a horizontal.

Admitindo, para simplificar, que o lançamento do projectil ocorre no instante $t_0 = 0$, teremos, por aplicação das equações (2.41), que as componentes da velocidade do projectil são

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_y(t) = v_{0y} - gt = v_0 \sin\theta - gt \end{cases} \quad (2.55)$$

donde se deduz que a lei das velocidades é dada pelo vector

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos\theta \vec{i} + (v_0 \sin\theta - gt) \vec{j}. \quad (2.56)$$

Notar, mais uma vez, que a componente v_x da velocidade é constante ao longo de toda a trajectória. Por aplicação das relações (2.44), as componentes do vector posição do projectil são

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t = v_0 \cos\theta t \\ y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (2.57)$$

ficando a lei dos espaços do movimento definida pelo vector posição

$$\vec{r}(t) = v_0 \cos\theta t \vec{i} + \left(v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \vec{j}. \quad (2.58)$$

Tal como no caso anterior, podemos agora calcular alguns parâmetros característicos do movimento com base nas leis das velocidades e dos espaços acima deduzidas:

- i. *Tempo de voo do projectil* (t_{voo}). É calculado fazendo $y(t) = 0$ na segunda das equações (2.57):

$$y(t) = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_{voo} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}. \quad (2.59)$$

- ii. *Alcance do projectil* (x_{max}). É calculado substituindo o valor de t_{voo} na componente $x(t)$ definida pela primeira das equações (2.57):

$$x_{max} = x(t_{voo}) = \frac{v_0^2 (2 \sin\theta \cos\theta)}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}. \quad (2.60)$$

Da expressão (2.60) podemos concluir que, uma vez fixado o valor da velocidade de lançamento v_0 , o alcance de um projectil será máximo quando $\theta = 45^\circ$, e que se obtêm alcances idênticos para ângulos complementares (exemplo: $\theta = 15^\circ$ e $\theta = 75^\circ$).

- iii. *Tempo de subida do projectil* (t_{sub}). É calculado fazendo $v_y(t) = 0$ na segunda das equações (2.55):

$$v_y(t) = v_0 \sin\theta - g t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_{sub} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}. \quad (2.61)$$

Comparando as expressões (2.59) e (2.61) verifica-se que $t_{voo} = 2t_{sub}$ e, portanto, o tempo de descida é igual ao tempo de subida.

- iv. *Altura máxima atingida* (y_{max}). Calcula-se substituindo o valor t_{sub} na expressão de $y(t)$ definida pela segunda das equações (2.57):

$$y_{max} = y(t_{sub}) = v_0 \sin\theta t_{sub} - \frac{1}{2} g t_{sub}^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g}. \quad (2.62)$$

- v. *Velocidade de embate no solo* (v_{solo}). Calcula-se substituindo o valor t_{voo} na expressão da velocidade (2.56):

$$\vec{v}(t_{voo}) = v_0 \cos\theta \vec{i} + (v_0 \sin\theta - g t_{voo}) \vec{j} = v_0 \cos\theta \vec{i} - v_0 \sin\theta \vec{j}. \quad (2.63)$$

2.7.3. Movimento de um projectil lançado obliquamente de uma altura y_0

Por último, consideremos o caso geral de um projectil lançado obliquamente de um ponto situado à altura inicial y_0 e que termina o seu voo num ponto situado à altura final y_f . Note-se que se pode ter $y_f > y_0$ ou $y_f < y_0$. Esta é a situação representada esquematicamente na figura 2.7.

Se admitimos, como anteriormente, que o lançamento do projectil ocorre no instante $t_0 = 0$ e tomarmos a abcissa do ponto de lançamento como a origem do eixo Ox , é fácil verificar que as componentes da velocidade do projectil são dadas pelas equações (2.56) e, portanto, a lei das velocidades do projectil é dada pela expressão (2.55). Ou seja, a lei das velocidades é exactamente a mesma que a obtida na secção 2.7.2. As componentes do vector posição resultam de aplicar as relações (2.44):

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\theta t \\ y(t) = y_0 + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}, \quad (2.64)$$

conduzindo à lei dos espaços

$$\vec{r}(t) = v_0 \cos\theta t \vec{i} + \left(y_0 + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \right) \vec{j}. \quad (2.65)$$

Calculemos em seguida os parâmetros característicos do movimento.

- i. *Tempo de voo do projectil (t_{voo})*. É calculado fazendo $y(t) = y_f$ na segunda das equações (2.64):

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 = y_f \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t_{voo} &= \frac{v_0 \sin\theta}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2\theta - 2g(y_f - y_0)}}{g}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

- ii. *Tempo de subida do projectil (t_{sub})*. É calculado fazendo $v_y(t) = 0$ em (2.55), o que dá, novamente, a equação (2.61). Uma vez que o tempo de voo é a soma do tempo de subida com o tempo de descida, $t_{voo} = t_{sub} + t_{desc}$ comparando as equações (2.61) e (2.66), conclui-se que:

$$t_{desc} = \frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2\theta - 2g(y_f - y_0)}}{g}. \quad (2.67)$$

Neste caso, o tempo de subida não é, em geral, igual ao tempo de descida: sê-lo-á apenas se as alturas inicial e final forem iguais.

iii. *Alcance do projectil* (x_{max}). É calculado substituindo o valor t_{voo} na componente $x(t)$ definida pela primeira das equações (2.64):

$$x_{max} = x(t_{voo}) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2g(y_f - y_0)}{v_0^2 \sin^2 \theta}} \right]. \quad (2.68)$$

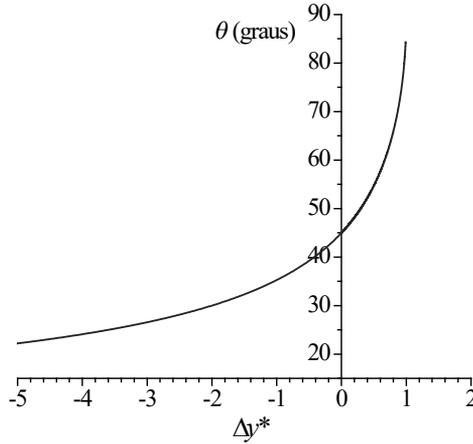


Figura 2.10. Ângulo de lançamento θ para o qual o alcance de um projectil é máximo em função da diferença de alturas final e inicial, em unidades adimensionais $\Delta y^* = g(y_f - y_0)/v_0^2$.

Da expressão (2.68) decorre que o ângulo de lançamento para o qual o alcance do projectil é máximo já não é necessariamente $\theta = 45^\circ$: vai depender de $y_f - y_0$, a diferença entre as alturas final e inicial. Para o determinar, igualamos a zero a derivada de x_{max} em ordem a θ ; o resultado é o que se mostra na figura 2.10. O problema não tem solução se $y_f - y_0 > v_0^2 \sin^2 \theta / 2g$, uma vez que, neste caso, a diferença entre as alturas final e inicial é superior à altura máxima atingida pelo projectil. O ângulo de lançamento que maximiza o alcance do projectil é menor do que 45° se $y_f < y_0$ e maior do que 45° se $y_f > y_0$.

iv. *Altura máxima atingida* (y_{max}). Substituindo t_{sub} dado por (2.61) na segunda das equações (2.64), obtém-se

$$y_{max} = y_0 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g} \quad (2.69)$$

v. *Velocidade de embate no solo* (v_{solo}). Calcula-se substituindo o valor t_{voo} dado por (2.66) na expressão da velocidade, equação (2.56), obtendo-se novamente a equação (2.63).

2.7.4.* Movimento de um projectil lançado por um ser humano

Os cálculos do ângulo de lançamento para o qual o alcance de um projectil é máximo, efectuados nas secções 2.7.2 e 2.7.3, pressupõem, obviamente, que é possível comunicar ao projectil uma velocidade inicial de valor v_0 seja qual for o ângulo θ . Isto verifica-se se o projectil for lançado por meios mecânicos, por exemplo uma bala disparada por um canhão, mas não se o projectil for lançado por um ser humano, por exemplo num jogo de basquetebol ou de futebol. Neste caso, as limitações da biomecânica humana impõem que v_0 não seja independente de θ : é mais fácil exercer forças na horizontal do que na vertical, logo é possível comunicar a um corpo maiores valores de v_0 se o ângulo de lançamento for mais próximo de zero. Um modelo simples¹⁷ consiste em supor que, se for F_0 a força média que um ser humano pode exercer na direcção horizontal, então a força exercida segundo uma direcção que faça um ângulo θ com a horizontal será, aproximadamente, $F = F_0 - c\theta$, onde c é uma constante a determinar empiricamente. Durante o lançamento, a força exercida pelo lançador é muito superior às restantes forças que se exercem sobre o projectil (peso e resistência do ar), pelo que podemos desprezá-las. Utilizando o *teorema do trabalho-energia*, que encontraremos no capítulo 4, podemos estimar a velocidade v_0 a que um projectil de massa m é acelerado a partir do repouso:

$$Fl = \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2(F_0 - c\theta)l}{m}} \quad (2.70)$$

onde l é a distância ao longo da qual o projectil é acelerado – ou seja, a distância ao longo da qual a força F é exercida sobre o projectil¹⁸. Substituindo a equação (2.70) na equação (2.68), podemos determinar o valor de θ para o qual o alcance é máximo. Na figura 2.11 apresentamos resultados para o caso particular de um jogador de futebol que repõe uma bola em campo, utilizando¹⁵ $F_0 = 46$ N, $c = 0.00768$ N rad⁻¹, $l = 1.14$ m, $m = 0.43$ kg e $y_f - y_0 = -2.3$ m: o alcance máximo é atingido para $\theta \approx 30^\circ$. Repare-se, porém, que estamos a considerar, simultaneamente, uma velocidade inicial que depende do ângulo de lançamento e alturas de partida e de chegada diferentes. Para isolarmos o efeito apenas de uma velocidade inicial que depende de θ , incluímos igualmente na figura 2.11 o resultado para $y_f - y_0 = 0$; neste caso, o alcance máximo é atingido para $\theta \approx 35^\circ$.

¹⁷ Vide N. P. Linthorne e D. J. Everett, “Release angle for attaining maximum distance in the soccer throw-in”, *Sports Biomechanics* 5, 243-260 (2006). Ver também N. P. Linthorne, “A new angle on throwing”, *Physics World*, June 2006, pp. 29-30.

¹⁸ Como veremos no capítulo 4, o produto Fl é o *trabalho* realizado pela força F , o qual, supondo que não existem outras forças a actuar sobre o projectil, é igual à variação da *energia cinética* do projectil.

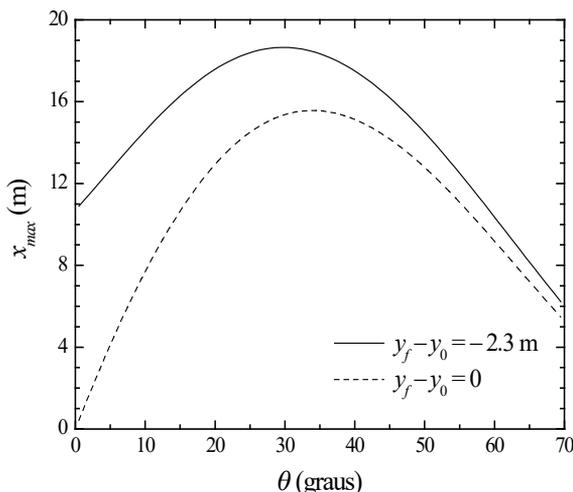


Figura 2.11. Alcance de uma bola reposta em campo por um jogador de futebol, em função do ângulo de lançamento, para dois valores da diferença entre as alturas final e inicial. Estes resultados sobrestimam ligeiramente a realidade, uma vez que desprezamos a resistência do ar e o eventual movimento de rotação da bola.

Outros modelos e estudos indicam ângulos de lançamento óptimos entre 30° e 37° para diferentes tipos de projectéis (peso, dardo, etc.), e entre 20° e 25° para o salto em comprimento (em que o projectil é o próprio ser humano)¹⁹.

2.8. MOVIMENTO CIRCULAR

O movimento circular é um caso particularmente importante de movimento curvilíneo em que a trajectória é uma circunferência. Consideremos a figura 2.12, que representa um ponto material descrevendo uma trajectória circular de raio R .

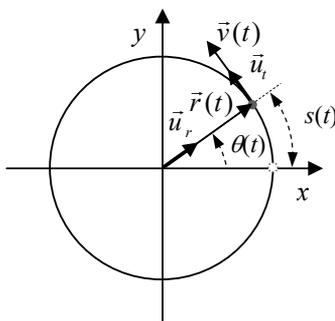


Figura 2.12. Representação de um movimento circular com trajectória de raio $\|\vec{r}\| = R$.

¹⁹ Vide N. P. Linthorne, "A new angle on throwing", *Physics World*, June 2006, pp. 29-30.

Porque a trajectória da partícula é circular, o vector posição tem norma constante e igual ao raio da trajectória, isto é

$$\|\vec{r}\| = R. \quad (2.71)$$

A distância percorrida pela partícula ao longo da trajectória, $s(t)$, é proporcional ao ângulo $\theta(t)$ varrido pelo vector posição da partícula, sendo a constante de proporcionalidade o valor do raio da trajectória. Deste modo podemos escrever

$$s(t) = R\theta(t), \quad (2.72)$$

com $\theta(t)$ expresso em radianos²⁰. Notar que explicitámos propositadamente a dependência de s e de θ no tempo porque estamos a admitir que a partícula está em movimento e, por isso, aquelas duas grandezas são forçosamente dependentes da variável t .

De acordo com o esquema da figura 2.12, o vector posição de partícula que se encontra a descrever o movimento circular é

$$\vec{r}(t) = R \cos\theta(t) \vec{i} + R \sin\theta(t) \vec{j} \quad (2.73)$$

ou

$$\vec{r}(t) = R [\cos\theta(t) \vec{i} + \sin\theta(t) \vec{j}] = R \vec{u}_r(t), \quad (2.74)$$

com

$$\vec{u}_r(t) = \cos\theta(t) \vec{i} + \sin\theta(t) \vec{j}, \quad (2.75)$$

o vector unitário²¹ com a direcção e sentido do vector \vec{r} , dito *versor radial* ou *normal* (*vide* figura 2.12). Note-se que \vec{u}_r depende do tempo porque a sua direcção e sentido variam ao longo do movimento.

Conhecido o vector posição, podemos calcular o vector velocidade derivando a expressão (2.73):

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d}{dt} [R \cos\theta(t)] \vec{i} + \frac{d}{dt} [R \sin\theta(t)] \vec{j} = \\ &= -R \frac{d\theta}{dt} \sin\theta(t) \vec{i} + R \frac{d\theta}{dt} \cos\theta(t) \vec{j} = \\ &= R \frac{d\theta}{dt} [-\sin\theta(t) \vec{i} + \cos\theta(t) \vec{j}] \end{aligned} \quad (2.76)$$

²⁰ Recordamos que é por se verificar a expressão (2.72), entre o arco de circunferência, s , e o ângulo θ , por ele subtendido que o radiano é a medida natural dos ângulos planos. A expressão não é válida se θ for expresso em graus ou grados.

²¹ *Exercício:* mostre que \vec{u}_r tem norma 1 e é colinear com o vector \vec{r} .

Nesta última expressão, o vector definido entre parênteses rectos coincide com o *vector unitário* \vec{u}_t , *tangente em cada ponto à trajectória*,

$$\vec{u}_t(t) = -\sin\theta(t)\vec{i} + \cos\theta(t)\vec{j}, \quad (2.77)$$

e a grandeza

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}\theta(t), \quad (2.78)$$

mede a variação instantânea do ângulo θ varrido pelo vector posição da partícula. A esta grandeza dá-se o nome de *velocidade angular ou frequência angular*, sendo expressa no SI em rad s^{-1} . Podemos, então, escrever a expressão da velocidade na forma

$$\vec{v}(t) = R\omega(t)\vec{u}_t(t). \quad (2.79)$$

Note-se que, apesar de \vec{u}_t ser um vector unitário, a sua direcção e sentido estão constantemente a mudar e por isso depende da variável t . Mais, como o vector velocidade é sempre tangente à trajectória (qualquer que seja a trajectória), verifica-se também que

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{u}_t(t), \quad (2.80)$$

com $v(t)$ a norma da velocidade. Logo, por comparação de (2.80) com (2.79), somos levados à conclusão que a norma do vector velocidade no movimento circular é

$$v(t) = R\omega(t). \quad (2.81)$$

Vejamos agora qual é a expressão do vector aceleração no movimento circular. Para isso derivemos a expressão da velocidade (2.80),

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}[R\omega(t)\vec{u}_t(t)] = R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_t + R\omega\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \\ &= R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_t + R\omega\frac{d}{dt}[-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}] = \\ &= R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_t - R\omega\frac{d\theta}{dt}[\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}] = R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_t - R\omega^2\vec{u}_r \end{aligned} \quad (2.82)$$

A grandeza

$$\alpha(t) = \frac{d}{dt}\omega(t), \quad (2.83)$$

é denominada *aceleração angular*; mede a variação instantânea da velocidade angular e é expressa no SI em rad s^{-2} . Podemos escrever a aceleração (2.82) na forma

$$\vec{a}(t) = R\alpha \vec{u}_t - R\omega^2 \vec{u}_r. \quad (2.84)$$

Da expressão (2.84) podemos concluir que a aceleração tem duas componentes: uma componente *tangencial*, a_t , proporcional à aceleração angular, e outra componente *normal* ou *centrípeta*²², a_n , proporcional ao quadrado da velocidade angular. Teremos

$$\begin{cases} a_t = R\alpha \\ a_n = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \end{cases}, \quad (2.85)$$

onde tivemos em conta a relação (2.81) na segunda igualdade de a_n . As relações (2.85) mostram que a aceleração só terá componente tangencial se $\alpha \neq 0$, isto é, se houver variação da velocidade angular da partícula. E só haverá variação da velocidade angular se houver variação da norma da velocidade ($\omega = v / R$). Por outro lado, a componente centrípeta da aceleração será sempre não nula, na medida em que a velocidade é diferente de zero²³. A existência de uma componente centrípeta não nula da aceleração está associada ao facto de o vector velocidade estar permanentemente a mudar de direcção e sentido. Notemos, ainda, que uma aceleração centrípeta não nula, qualquer que seja o tipo de movimento circular, impõe que o vector aceleração aponte sempre para o lado côncavo da trajectória. No esquema da figura 2.13 estão representadas as relações vectoriais entre a aceleração e as respectivas componentes tangencial e centrípeta.

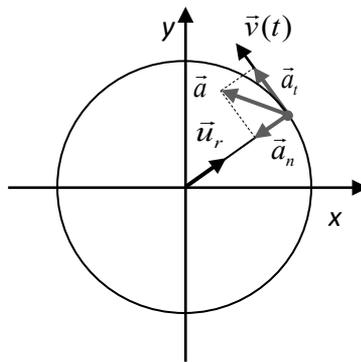


Figura 2.13. Representação da aceleração e das respectivas componentes centrípeta (a_n) e tangencial (a_t) num movimento circular.

²² Diz-se componente centrípeta da aceleração porque tem sentido contrário a \vec{u}_r , apontando, por isso, para o centro da trajectória.

²³ Admitindo que a partícula se encontra em movimento, claro.

2.8.1. Movimento circular uniforme

Um movimento circular diz-se *uniforme* (m.c.u.) se o valor (norma) da velocidade da partícula que o descreve for constante; note-se, porém, que, como o vector velocidade muda constantemente de direcção, a partícula terá sempre aceleração normal ou centrípeta. O vector posição da partícula será, obviamente, dado pela expressão (2.73), isto é,

$$\vec{r}(t) = R \cos \theta(t) \vec{i} + R \sin \theta(t) \vec{j} \quad (2.86)$$

e o vector velocidade será dado pela relação (2.79), que aqui repetimos:

$$\vec{v}(t) = R \omega \vec{u}_t(t). \quad (2.87)$$

Contudo, como neste caso a norma da velocidade é constante, será também constante a velocidade angular ($\omega = v/R$). Daqui resulta que a aceleração angular, $\alpha = d\omega/dt$, é nula. Sendo $\alpha = 0$ teremos, por (2.85), que a componente tangencial da aceleração é também nula:

$$a_t = R\alpha = 0. \quad (2.88)$$

Deste modo, num m.c.u. o vector aceleração só tem componente centrípeta:

$$\vec{a} = \vec{a}_n = -R\omega^2 \vec{u}_r = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r, \quad (2.89)$$

e por isso a aceleração num m.c.u. aponta sempre para o centro da trajectória (*vide* figura 2.14).

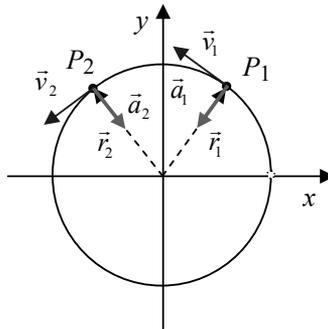


Figura 2.14. Representação dos vectores posição, velocidade e aceleração em dois pontos distintos da trajectória de um movimento circular uniforme.

Procuremos agora estabelecer as relações entre as grandezas angulares θ e ω num movimento circular uniforme. Para tal, vamos admitir que em $t = 0$ a partícula se encontrava na posição angular θ_0 . Sabe-se que $\omega = d\theta/dt$, logo

$$d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta' = \int_0^t \omega dt', \quad (2.90)$$

obtendo-se, por ser $\omega = \text{const.}$,

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t, \quad (2.91)$$

que é a chamada *lei dos ângulos* do movimento circular uniforme.

É conveniente definir mais algumas grandezas relevantes para o estudo do movimento circular uniforme. O *período*, T , define-se como o tempo que uma partícula descrevendo um m.c.u. demora a completar uma volta; a sua unidade no SI é, evidentemente, o segundo. Uma vez que o ângulo varrido durante uma volta completa é 2π e a distância percorrida é $2\pi R$ (perímetro da trajectória circular), tem-se que a velocidade da partícula tem o valor

$$v = \frac{2\pi R}{T}, \quad (2.92)$$

donde se deduz

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.93)$$

A *frequência*, designada por f ou ν , mede o número de rotações dividido pelo tempo em que ocorrem: é simplesmente o inverso do período,

$$f = \frac{1}{T}, \quad (2.94)$$

medindo-se no SI em s^{-1} ou hertz (Hz). Usando as relações (2.93) e (2.94) podemos estabelecer para o m.c.u. a seguinte relação entre a velocidade angular, o período e a frequência:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \quad (2.95)$$

2.8.2. Movimento circular uniformemente variado

Um movimento circular diz-se *uniformemente variado* (m.c.u.v.) se a aceleração angular for constante e não nula ($\alpha = \text{const.}$). Neste caso não podemos definir um período (ou uma frequência) uma vez que a partícula em movimento não demora sempre o mesmo intervalo de tempo a descrever cada volta.

Procuramos encontrar as relações entre as grandezas angulares α , ω e θ num movimento circular uniformemente variado. Admitamos, então, que uma partícula descreve um m.c.u.v. de tal modo que no instante $t = 0$ se encontrava na posição angular $\theta = \theta_0$ animada de velocidade angular $\omega = \omega_0$. Começemos por determinar a expressão que permite calcular a velocidade angular da partícula em qualquer instante. Sabe-se que $\alpha = d\omega/dt$, logo

$$d\omega = \alpha dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega(t)} d\omega' = \int_0^t \alpha dt', \quad (2.96)$$

obtendo-se (por ser $\alpha = \text{const.}$)

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t, \quad (2.97)$$

expressão esta conhecida por *lei das velocidades angulares* do m.c.u.v.. É esta a relação que permite o cálculo da velocidade angular da partícula em qualquer instante t .

Pretendemos em seguida determinar a posição angular da partícula em qualquer instante. Recordando que $\omega = d\theta/dt$ e considerando a expressão da lei das velocidades (2.97), vem

$$d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta' = \int_0^t \omega dt' \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta' = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t) dt', \quad (2.98)$$

donde se obtém

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2, \quad (2.99)$$

que é a *lei dos ângulos* do m.c.u.v.. É esta a expressão que permite o cálculo da posição angular da partícula em qualquer instante t . Os vectores posição, velocidade e aceleração, definidos por (2.73), (2.76) e (2.82), respectivamente, são válidos para o m.c.u.v., conjugadas, naturalmente, com a lei das velocidades angulares (2.97) e a lei dos ângulos (2.99) que regem este movimento.

Exemplo 2.6

Uma roda de bicicleta de 66 cm de diâmetro é montada num eixo ligado a um motor que a faz girar. Durante um intervalo de 10 s o motor fornece à roda uma aceleração angular α constante. Sabendo que a roda estava inicialmente em repouso e que ao fim de 10 s a velocidade linear de um ponto da sua periferia é de 28.05 m s^{-1} , calcular: a) a velocidade angular da roda ao fim dos 10 s; b) a aceleração angular constante durante o mesmo intervalo de tempo; c) a aceleração tangencial de um ponto da periferia da roda; d) o número de rotações realizadas pela roda durante os 10 s

Resolução:

a) Por (2.81) resulta $\omega = \frac{v(t)}{R} \Big|_{t=10} = \frac{28.05}{0.33} = 85 \text{ rad s}^{-1}$.

b) Trata-se de um movimento circular uniformemente acelerado (α é constante). Deste modo, usando a lei das velocidades angulares (2.97) vem

$$\alpha = \frac{\omega(t) - \omega_0}{t} \Big|_{t=10} = \frac{85 - 0}{10} = 8.5 \text{ rad s}^{-2}.$$

c) Usando a primeira das relações (2.85) obtemos

$$a_t = \alpha R = 8.5 \times 0.33 = 2.8 \text{ m s}^{-2}.$$

- d) Tendo em conta que $\omega_0 = 0$ e que podemos escolher um ponto de referência na periferia da roda tal que $\theta_0 = 0$, resulta da lei dos ângulos para o m.c.u.v. (2.99)

$$\theta(t=10) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Big|_{t=10} =$$

$$= \frac{1}{2} \times 8.5 \times 10^2 = 425 \text{ rad.}$$

Como uma rotação corresponde a um ângulo varrido de 2π rad, o número de rotações ao fim de 10 s é $425/2\pi = 67.64$ rotações.

2.8.3. Semelhanças formais entre o m.r.u.v. e o m.c.u.v.

Como nota final sobre o movimento circular, gostaríamos de realçar a semelhança formal entre as grandezas lineares²⁴ e as relações entre elas existentes no movimento rectilíneo uniformemente variado (m.r.u.v.) e as grandezas angulares e as relações obtidas para o movimento circular uniformemente variado (m.c.u.v.), e que se resumem na tabela 2.1.

Tabela 2.1. Semelhanças formais entre o m.r.u.v. e o m.c.u.v. Admitiu-se em todas as equações do movimento que $t_0 = 0$.

m.r.u.v.	m.c.u.v.
x (posição)	θ (posição angular)
v (velocidade)	ω (velocidade angular)
a (aceleração)	α (aceleração angular)
$v(t) = v_0 + at$ (lei das velocidades)	$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$ (lei das velocidades angulares)
$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ (lei das posições)	$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ (lei das posições angulares)

Vemos, assim, que podemos obter as leis angulares do m.c.u.v. a partir das leis que regem o m.r.u.v., tendo em consideração a substituição de grandezas $x \rightarrow \theta$, $v \rightarrow \omega$ e $a \rightarrow \alpha$. Obviamente que o mesmo princípio de equivalência formal permite obter as leis angulares do m.c.u. a partir das leis do m.r.u., tendo apenas em conta que neste caso $a = 0$ e $\alpha = 0$.

2.9. Movimento harmónico simples

Vimos no parágrafo 2.8.1 que o movimento circular uniforme é um movimento do tipo *periódico*, no sentido em que a posição, velocidade e aceleração da partícula material em movimento se repetem a intervalos de tempo T iguais, ou seja,

²⁴ As grandezas posição, velocidade e aceleração introduzidas nas secções 2.1, 2.2 e 2.3 são chamadas *lineares* sempre que houver necessidade de as distinguir das grandezas posição, velocidade e aceleração angulares introduzidas nesta secção.

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}(t+T), \\ \vec{v}(t) &= \vec{v}(t+T) \\ \vec{a}(t) &= \vec{a}(t+T)\end{aligned}\tag{2.100}$$

sendo, portanto, T o período do movimento.

O *movimento harmónico simples* (m.h.s.) é um movimento do tipo periódico, que, como veremos, está estreitamente relacionado com o movimento circular uniforme. Por definição, um m.h.s. é um movimento no qual um ponto material, ou um corpo, oscila simetricamente em torno de um ponto central, realizando ciclos completos em intervalos de tempo iguais – denominados *período de oscilação*, T . São exemplos de sistemas físicos que podem ser descritos como realizando um m.h.s. o pêndulo simples ou um corpo ligado a uma mola e colocado em oscilação sem atrito por acção da força elástica exercida pela mola sobre o corpo (*vide* figura 2.15)²⁵. Ambos estes sistemas serão estudados em mais pormenor no capítulo 3.

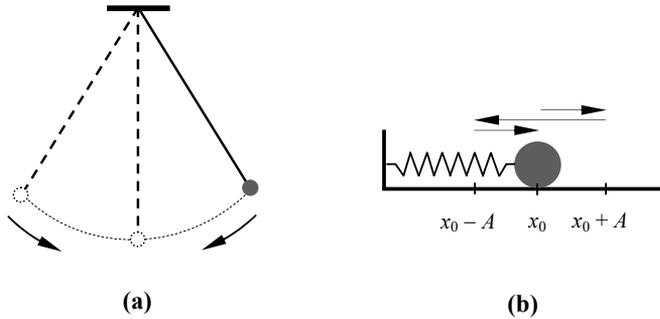


Figura 2.15. Dois exemplos de sistemas físicos cujo movimento, admitindo que não existe atrito, pode ser descrito como um m.h.s.: a) um pêndulo simples; b) um corpo em oscilação sem atrito em torno do ponto x_0 por acção da força elástica de uma mola.

A posição de uma partícula material animada de m.h.s. num espaço tridimensional é dada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},\tag{2.101}$$

onde

$$\begin{cases} x(t) = A_x \sin(\omega_x t + \varphi_{0x}) \\ y(t) = A_y \sin(\omega_y t + \varphi_{0y}) \\ z(t) = A_z \sin(\omega_z t + \varphi_{0z}) \end{cases}.\tag{2.102}$$

²⁵ Nos exemplos referidos admitimos que, idealmente, não existe atrito. É a condição para que o movimento se perpetue *ad aeternum* sem a intervenção de um agente exterior. Caso exista atrito (sistemas reais) os sistemas realizam um movimento oscilatório amortecido, cuja amplitude tende para zero com o tempo.

Note-se que poderíamos ter descrito as funções periódicas, $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ usando a função co-seno em vez da função seno. Para efeito da descrição matemática de um m.h.s. é totalmente indiferente usar uma ou outra função trigonométrica na medida em que são duas funções periódicas com o mesmo período. Para simplificar a discussão, comecemos por analisar o m.h.s. em uma dimensão, no qual a posição é descrita pela relação

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2.103)$$

onde A representa a *amplitude* do movimento (valor máximo do afastamento da partícula relativamente à sua posição de equilíbrio em $x = 0$) e o argumento da função seno, $(\omega t + \varphi_0)$, é a *fase* do movimento. Nesta última, ω representa a *velocidade* ou *frequência angular*²⁶ do movimento e φ_0 a sua *fase inicial*. Em particular, φ_0 determina a posição da partícula em $t = 0$. Contudo, devemos notar que φ_0 fica subordinado apenas à escolha da origem dos tempos, ou seja, depende do instante em que começamos a estudar o movimento e da posição que a partícula ocupa nesse mesmo instante. Na figura 2.16 estão representados três movimentos harmônicos simples com a mesma amplitude ($A = 5$ m), com a mesma frequência angular ($\omega = 2$ rad s⁻¹) e três fases iniciais diferentes: o movimento com $\varphi_0 = 0$ diz-se *em fase* com o eixo dos tempos, o movimento com $\varphi_0 = \pi / 4$ diz-se *em avanço* e o movimento com $\varphi_0 = -\pi / 4$ diz-se *em atraso* relativamente ao eixo dos tempos. Esta terminologia é usada para qualquer valor de φ_0 maior ou menor que zero, respectivamente.

A velocidade da partícula é calculada derivando a expressão (2.103),

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.104)$$

e a aceleração derivando a expressão da velocidade,

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t). \quad (2.105)$$

Segue-se que a velocidade está avançada $\pi / 2$ relativamente à posição, e a aceleração avançada $\pi / 2$ relativamente à velocidade, logo π relativamente à posição (isto é, a aceleração está em *oposição de fase* com a posição: quando uma é mínima, a outra é máxima, e vice-versa). Repara-se ainda que, de acordo com as expressões (2.104) e (2.105), respectivamente, o valor máximo da velocidade é

$$v_{max} = A\omega, \quad (2.106)$$

²⁶ A grandeza ω é usualmente denominada velocidade angular no âmbito do estudo do movimento circular e frequência angular no quadro do estudo dos movimentos oscilatórios. Em qualquer dos casos trata-se da mesma grandeza, relacionando-se com a frequência, f , e período, T , do movimento através da relação (2.92), $\omega = 2\pi / T = 2\pi f$.

e o valor máximo da aceleração é

$$a_{max} = A\omega^2. \quad (2.107)$$

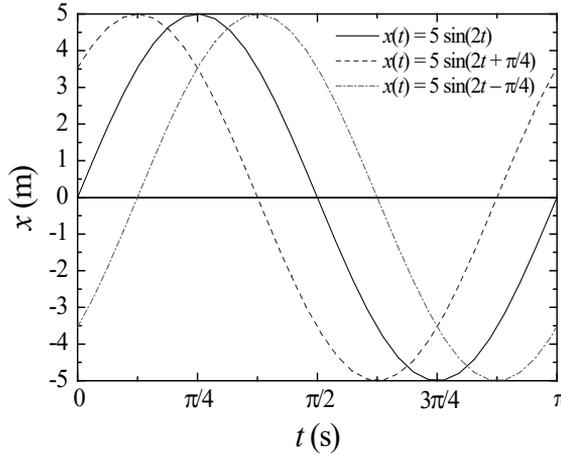


Figura 2.16. Representação de três movimentos harmônicos simples com a mesma amplitude ($A = 5$ m), a mesma frequência angular ($\omega = 2$ rad s^{-1}) e três fases diferentes ($\varphi_0 = 0, \pi/4$ e $-\pi/4$).

Exemplo 2.7

Uma partícula descreve um movimento harmônico simples cuja posição é definida pela equação $x(t) = 4\sin(\pi t - \pi/2)$ (SI). Calcular: a) as expressões da velocidade e da aceleração do movimento em função do tempo; b) a frequência e o período do movimento; c) os instantes em que a partícula passa pela posição de equilíbrio no primeiro período do movimento; d) o valor da velocidade da partícula no instante $t = 1$ s; e) os valores da velocidade e da aceleração máximas da partícula.

Resolução:

a) Velocidade: $v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = 4\pi \cos(\pi t - \pi/2)$ m s^{-1} .

Aceleração: $a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = -4\pi^2 \sin(\pi t - \pi/2)$ m s^{-2} .

b) A relação entre a frequência angular, o período e a frequência do movimento é dada pela expressão $\omega = 2\pi / T = 2\pi f$. Logo:

$$f = \omega / 2\pi = \pi / 2\pi = 0.5 \text{ Hz e } T = 1 / f = 2 \text{ s.}$$

c) Os instantes em que a partícula passa pela posição de equilíbrio são definidos pela igualdade $x(t) = 0$. Temos, portanto, que resolver a equação trigonométrica

$$4\sin(\pi t - \pi/2) = 0 \Rightarrow \sin(\pi t - \pi/2) = 0$$

cujas soluções são definidas pelas igualdades:

$$\pi t - \pi/2 = 0 \vee \pi t - \pi/2 = \pi \Leftrightarrow t = 0.5 \text{ s} \vee t = 1.5 \text{ s}$$

isto é, a partícula passa pela posição de equilíbrio, durante o primeiro período do movimento, nos instantes 0.5 s e 1.5 s.

d) $v(t=1) = 4\pi \cos(\pi - \pi/2) = 4\pi \cos \frac{\pi}{2} = 0.$

e) Velocidade máxima: $v_{max} = A\omega = 4\pi \text{ m s}^{-1} = 12.57 \text{ m s}^{-1}.$

Aceleração máxima: $a_{max} = A\omega^2 = 4\pi^2 \text{ m s}^{-2} = 39.48 \text{ m s}^{-2}.$

2.9.1. Relação entre o m.h.s. e o movimento circular uniforme

Coloca-se agora a questão de saber qual é a relação entre o m.h.s. e o movimento circular uniforme. De acordo com a figura 2.12, a posição de uma partícula animada de movimento circular uniforme de raio R é dada pela equação (2.73). Tendo em consideração que num m.c.u. se verifica

$$\theta(t) = \omega t + \varphi_0, \tag{2.108}$$

podemos escrever que as componentes cartesianas do vector posição da partícula são

$$\begin{cases} x(t) = R \cos \theta(t) = R \cos(\omega t + \varphi_0) \\ y(t) = R \sin \theta(t) = R \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}. \tag{2.109}$$

Utilizando agora a igualdade trigonométrica $\cos \beta = \sin(\beta + \pi/2)$, a primeira das equações (2.109) transforma-se em

$$x(t) = R \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \tag{2.110}$$

pelo que as coordenadas definidas por (2.109) se podem escrever na forma

$$\begin{cases} x(t) = A_x \sin(\omega_x t + \varphi_{0x}) \\ y(t) = A_y \sin(\omega_y t + \varphi_{0y}) \end{cases}, \tag{2.111}$$

com $A_x = A_y = R$, $\omega_x = \omega_y = \omega$, $\varphi_{0x} = \varphi_0 + \pi/2$ e $\varphi_{0y} = \varphi_0$. Ou seja, as equações do movimento circular uniforme são as mesmas que as do m.h.s. em duas dimensões.

Duas notas importantes:

- i. Um corpo animado de m.h.s., em geral, não descreve uma trajectória sinusoidal: o que varia sinusoidalmente com o tempo é a sua distância à posição de equilíbrio (bem como as suas velocidade e aceleração).
- ii. Uma outra observação importante é que, num m.h.s. em 1, 2 ou 3 dimensões, se tem sempre que a aceleração é directamente proporcional à posição:

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t), \quad (2.112)$$

propriedade esta que se pode tomar como definição de movimento harmónico simples. Reparemos ainda que a relação (2.112) é equivalente à equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t), \quad (2.113)$$

na medida em que a aceleração é a segunda derivada em ordem ao tempo do vector posição. A relação (2.113) é a equação diferencial que rege o comportamento de um *oscilador harmónico*. No caso unidimensional, a equação diferencial (2.113) escreve-se na forma simplificada

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega^2 x(t), \quad (2.114)$$

podendo mostrar-se facilmente que $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ é solução da equação diferencial (2.114).

2.9.2. Representação gráfica de um m.h.s.

Como anteriormente se mostrou, o movimento circular uniforme resulta da conjugação de dois m.h.s. com a mesma amplitude (igual ao raio da trajectória circular), com a mesma frequência angular (igual à velocidade angular do m.c.u.) e desfasados de $\pi/2$. Deste modo, um movimento harmónico simples unidimensional pode ser interpretado como a projecção de um movimento circular uniforme sobre um dos eixos de coordenadas. Com base neste facto, a representação gráfica manual de um m.h.s. pode ser feita, de uma maneira simples e rápida, executando os seguintes passos:

- i. Constrói-se um sistema de eixos Otx e um círculo de referência associado a esse sistema de eixos (*vide* figura 2.16);
- ii. Divide-se o círculo em, pelo menos, oito partes (em $2\pi/\varphi_0$ partes se 2π for um múltiplo inteiro de φ_0) e determina-se a posição inicial marcando o valor de φ_0 ;
- iii. Marcam-se sobre o círculo as n posições (8, pelo menos) no sentido indicado pelo sinal de ω ;

- iv. Marca-se no eixo dos tempos o período T ;
- v. Divide-se o período no mesmo número de partes em que se dividiu o círculo;
- vi. Faz-se a correspondência entre cada posição do círculo e a respectiva posição no eixo dos tempos, começando pela posição em $t = 0$;
- vii. Unem-se os pontos encontrados obtendo-se, deste modo, a representação do m.h.s. como projecção do m.c.u. sobre o eixo vertical (eixo dos xx).

Os passos acima descritos estão ilustrados na figura 2.16, que representa a construção do gráfico da posição *versus* tempo do movimento harmónico simples definido pela lei das posições $x(t) = 2 \sin(2t + \pi/4)$ (SI).

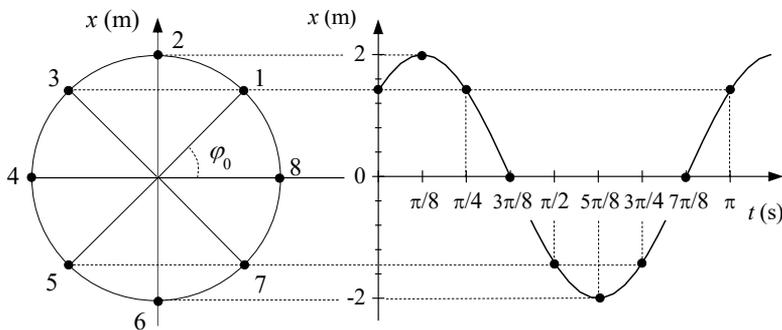


Figura 2.16. Construção da representação do movimento harmónico simples definido pela expressão $x(t) = 2 \sin(2t + \pi/4)$ (SI) a partir um círculo de referência associado ao sistema de eixos Otx .

PROBLEMAS

- 2.1. Uma partícula material move-se ao longo do eixo dos yy segundo a lei $y(t) = 2t^3 + 4t^2 + 4$ (SI). Determine o valor da velocidade média e da aceleração média da partícula entre os instantes $t = 1$ s e $t = 4$ s.
- 2.2. Uma partícula material move-se ao longo do eixo dos xx segundo a lei: $x(t) = 4t^3 + 4t^2 + 6$ (SI). Calcule a posição, a velocidade e a aceleração da partícula no instante $t = 2$ s.
- 2.3. A posição de um ponto material que se desloca ao longo do eixo dos xx é definida pela relação $x(t) = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$ (SI). Determine:
- O instante em que a velocidade do ponto material se anula.
 - A posição e a distância percorrida pelo ponto material até ao instante em que $v = 0$.
 - A aceleração do ponto material no instante em que $v = 0$.
 - A distância percorrida pelo ponto material entre os instantes $t = 3$ s e $t = 8$ s.
- 2.4. Considere a queda livre ($v_0 = 0$) de um corpo sujeito à aceleração da gravidade g . Tome como referencia o eixo dos yy orientado de baixo para cima e considere que o corpo é lançado de uma altura h . Mostre que:
- O tempo de queda ou tempo de voo do corpo é $t_{\text{voo}} = \sqrt{2h/g}$.
 - A velocidade de embate no solo ou velocidade final do corpo é $v_f = -\sqrt{2hg}$.
- 2.5. Considere o lançamento vertical de um corpo sujeito à aceleração da gravidade g . Tome como referencia o eixo dos yy orientado de baixo para cima e considere que o corpo é lançado com velocidade inicial de valor v_0 . Mostre que:
- O tempo de subida do corpo até atingir a altura máxima é $t_{\text{sub}} = v_0/g$.
 - A altura máxima atingida pelo corpo é $h = v_0^2/2g$.
 - O tempo de voo (tempo total de subida e descida) do corpo é $t_{\text{voo}} = 2v_0/g$.
 - O valor da velocidade de embate no solo, ou da velocidade final do corpo, é $v_f = -v_0$.
- 2.6. A aceleração de uma partícula material que se move ao longo do eixo dos xx é definida em função do tempo pela expressão $a(t) = 36t - 24t^3$ (SI). Sabendo que no instante $t = 0$ a partícula se encontrava em repouso na origem do referencial, determine:
- A velocidade e a posição da partícula em função do tempo.
 - O afastamento máximo da partícula, relativamente à origem, para $t > 0$.
 - O valor máximo da velocidade da partícula para $t > 0$.
 - O valor da velocidade média da partícula no intervalo $0 < t < 2$ s.
 - O valor da aceleração média da partícula no mesmo intervalo.
- 2.7. Uma partícula material move-se ao longo do eixo dos xx de acordo com uma velocidade definida pela expressão $v(t) = 2t^3 + 2t^2 + 2$ (SI). Sabendo que $x = 3$ m

quando $t = 1$ s, determine a posição da partícula quando $t = 3$ s e o valor da sua aceleração nesse mesmo instante.

- 2.8. Considere um ponto material que percorre uma trajectória rectilínea de acordo com a lei $x(t) = 16t - 6t^2$ (SI).
- Estabeleça a expressão geral que permite calcular o valor da velocidade média do ponto material para o intervalo de tempo $t_0 \leq t \leq (t_0 + \Delta t)$.
 - Calcule a velocidade do ponto material para $t = 1$ s.
 - Determine os instantes em que o ponto material passa pela origem.
 - Determine a posição do ponto material no instante em que a sua velocidade se anula.
 - Haverá algum instante em que a aceleração do ponto material se anule? Justifique.
- 2.9. A aceleração de uma partícula material com movimento rectilíneo ao longo do eixo dos xx é $a(t) = 2 - 12t^2$ (SI). Sabendo que em $t = 2$ s se tem $x = 48$ m e $v = 2$ m s⁻¹, determine a posição e a velocidade da partícula em função do tempo.
- 2.10. A aceleração de uma partícula material que se move ao longo do eixo dos xx é definida, em função da posição, pela expressão $a(x) = 4x - 2$ (SI). Sabendo que em $x = 0$ a velocidade da partícula é 2 m s⁻¹, determine a sua velocidade em função da posição, $v = v(x)$.
- 2.11. A aceleração de uma partícula material que se move ao longo do eixo dos xx é dada, em função da velocidade, pela expressão $a(v) = -kv^2$, onde k é uma constante e v é a velocidade. Sabe-se que em $t = 0$ se tem $x = x_0$ e $v = v_0$.
- Estabeleça as expressões da velocidade e do deslocamento como funções do tempo.
 - Obtenha a expressão da velocidade como função de x .
- 2.12. A aceleração de um ponto material que se move ao longo do eixo dos xx é definida, em função do tempo, pela expressão $a(t) = kt^2$.
- Determine o valor da constante k sabendo que $v = -9$ m s⁻¹ quando $t = 0$ e que $v = +9$ m s⁻¹ quando $t = 3$ s.
 - Estabeleça a equação do movimento do ponto material sabendo que $x = 0$ quando $t = 3$ s.
- 2.13. Considere um ponto material que se desloca com movimento rectilíneo ao longo do eixo dos xx . No instante $t = 0$ o ponto material encontrava-se na origem dos eixos com velocidade de 3 m s⁻¹, no sentido positivo do eixo dos xx . Nesse mesmo instante, começa a ser submetido a uma aceleração constante de 4 m s⁻², com sentido oposto ao da velocidade.
- Calcule a velocidade do ponto material depois de ter sido submetido à referida aceleração durante 20 s.

b) Determine a distância percorrida pelo ponto material durante os 20 s considerados na alínea anterior. *Sugestão:* verifique se há inversão do sentido de movimento.

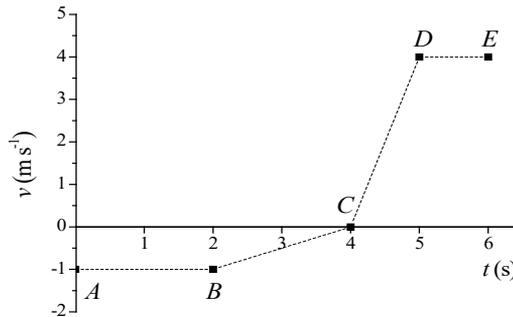
2.14. Uma partícula material percorre uma trajectória rectilínea ao longo do eixo dos xx com movimento uniformemente acelerado. Sabendo que no instante $t_0 = 0$ a partícula se encontrava na origem do referencial e que nos instantes t_1 e t_2 as suas posições são x_1 e x_2 , respectivamente, mostre que a aceleração da partícula é

$$a = \frac{2(x_2 t_1 - x_1 t_2)}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)}$$

2.15. A aceleração de uma partícula material em função da sua posição é dada por $a(x) = -kx^{-2}$ (SI), com k uma constante. A partícula material parte do repouso em $x = 30$ cm e observa-se que a sua velocidade é de 20 cm s^{-1} quando $x = 15$ cm. Determine:

- O valor de k .
- O valor da velocidade da partícula material quando $x = 12$ cm.

2.16. Uma partícula material, inicialmente na origem de um sistema de eixos cartesianos, descreve um movimento rectilíneo ao longo do eixo dos xx com velocidade variável no tempo, de acordo com o seguinte gráfico:



- Classifique os movimentos da partícula correspondentes a cada troço e calcule a aceleração de cada movimento.
- Determine, para cada troço, as expressões da velocidade e da posição da partícula em função do tempo.
- Calcule o espaço percorrido pela partícula, bem como a sua distância ao ponto de partida no instante $t = 6$ s.

2.17. O vector posição de uma partícula material é dado por

$$\vec{r}(t) = \left[(t-2)^2 + 1 \right] \vec{i} + \left[(t-2)^2 + 1 \right] \vec{j} \quad (\text{SI}).$$

- Determine a trajectória da partícula.
- Escreva as expressões analíticas de \vec{v} e de \vec{a} e determine as respectivas normas.

- c) Classifique o movimento da partícula, indicando os intervalos de tempo em que é acelerado e aqueles em que é retardado.
- d) Calcule o espaço percorrido pela partícula durante os primeiros 5 s.
- 2.18. Uma partícula material percorre uma curva plana de tal modo que as suas coordenadas cartesianas são $x = 2t^3 - 3t^2$ e $y = t^2 - 2t + 1$ (SI). Determine:
- A expressão do vector velocidade da partícula em função do tempo.
 - O instante em que a velocidade da partícula se anula.
 - A expressão do vector aceleração da partícula em função do tempo.
 - O instante em que a aceleração da partícula é paralela ao eixo dos yy .
 - O instante em que a aceleração da partícula se anula.
- 2.19. Uma partícula material movimenta-se ao longo de uma trajectória curvilínea definida pelo vector posição $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + (t-1)^2 \vec{j}$ (SI).
- Estabeleça a equação cartesiana da trajectória.
 - Determine o instante em que a velocidade tem valor mínimo.
 - Calcule as coordenadas da partícula no instante em que a sua velocidade tem valor igual a 10 m s^{-1} .
 - Calcule os valores das acelerações tangencial e normal em função do tempo.
- 2.20. Uma partícula material percorre uma curva plana de tal modo que a sua velocidade é $\vec{v}(t) = 2\vec{i} + 4(t-1)\vec{j}$ (SI). Sabendo que em $t = 0$ a partícula se encontrava na posição (2, 1) m, determine:
- A equação da trajectória da partícula.
 - O instante em que a aceleração da partícula se reduz à componente centrípeta.
 - O raio de curvatura da trajectória no instante calculado em b).
 - O versor da tangente à trajectória em cada instante.
 - O versor da normal à trajectória em cada instante.
- 2.21. A trajectória de uma partícula material é descrita pelo vector posição $\vec{r}(t) = \sin 2t \vec{i} - \cos 2t \vec{j} + (t^3/2) \vec{k}$ (SI). Escreva as expressões dos vectores velocidade e aceleração da partícula. Seguidamente calcule as suas normas para $t = 1$ s.
- 2.22. Uma partícula material move-se ao longo de uma curva cujas equações paramétricas são:
- $$x = 3 \sin 2t \wedge y = -\cos 2t \wedge z = 4e^{-3t} \text{ (SI).}$$
- Determine os vectores velocidade e aceleração da partícula em função do tempo.
 - Calcule os valores da velocidade e da aceleração em $t = 0$.
- 2.23. Uma partícula material desloca-se no plano Oxy com aceleração constante. No instante $t = 0$ a partícula encontra-se na origem do referencial com velocidade $\vec{v}_0 = 3\vec{i} - 2\vec{j} \text{ m s}^{-1}$ e no instante $t = 3$ s tem velocidade $\vec{v}_3 = 9\vec{i} + 7\vec{j} \text{ m s}^{-1}$. Determine:

- a) O vector aceleração da partícula.
- b) O vector velocidade da partícula.
- c) A lei do movimento da partícula.

2.24. Uma partícula material move-se com aceleração dada por:

$$\vec{a}(t) = 2 \cos 3t \vec{i} + 6 e^{-3t} \vec{j} - 3 \sin 3t \vec{k} \quad (\text{SI}).$$

Sabendo que no instante $t = 0$ a partícula está localizada no ponto de coordenadas $(-2/9, 2/3, 0)$ m e tem velocidade $\vec{v}_0 = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ m s⁻¹, estabeleça as expressões, em função do tempo:

- a) do vector velocidade da partícula;
- b) do vector posição da partícula.

2.25. Uma partícula material move-se no plano Oxy com aceleração $\vec{a} = 3\vec{j}$ m s⁻². Sabendo que no instante inicial a partícula se encontrava na origem do referencial com velocidade $\vec{v}_0 = 6\vec{i} + 6\vec{j}$ m s⁻¹, determine:

- a) O valor da aceleração tangencial da partícula no instante $t = 1$ s.
- b) A equação da trajectória da partícula.

2.26. Seja $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + 2t \vec{j}$ (SI) o vector que define a posição de uma partícula material. Determine, para o instante $t = 1$ s:

- a) Os valores da velocidade e da aceleração da partícula.
- b) Os valores das componentes tangencial e normal da aceleração da partícula.

2.27. Uma partícula material move-se no plano Oxy com velocidade $\vec{v}(t) = (4t^3 + 4t)\vec{i} + 4t \vec{j}$ (SI). Sabendo que no instante $t = 0$ as coordenadas da partícula são $(1, 2)$ m, determine:

- a) O vector posição da partícula.
- b) A equação da trajectória da partícula.

2.28. Uma partícula material move-se no plano Oxy com aceleração definida pelo vector $\vec{a}(t) = -4 \sin t \vec{i} + 3 \cos t \vec{j}$ (SI). Sabendo que para $t = 0$ se tem $\vec{r}_0 = 3\vec{j}$ m e $\vec{v}_0 = 4\vec{i}$ m s⁻¹, determine:

- a) Os vectores velocidade e posição da partícula.
- b) O valor da velocidade da partícula no instante $t = \pi / 2$ s.
- c) A equação da trajectória da partícula.

2.29. A posição de uma partícula material é definida pela função vectorial $\vec{r}(t) = (t/2)\vec{i} + \vec{j} + 3t^2 \vec{k}$ (SI).

- a) Determine o vector velocidade e as componentes tangencial e normal do vector aceleração em função do tempo.
- b) Determine, para o instante $t = 2$ s, o ângulo formado pelos vectores \vec{v} e \vec{a} .

- 2.30. O vector posição de uma partícula material é $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + t^2\vec{j}$ (SI).
- Caracterize o movimento descrito pela partícula e determine a equação da trajectória da partícula.
 - Determine as acelerações tangencial e normal da partícula, bem como o raio de curvatura da sua trajectória, no instante $t = 1$ s.
- 2.31. O vector posição de uma partícula material é definido pela função vectorial $\vec{r}(t) = 3\cos 2t\vec{i} + 3\sin 2t\vec{j} + (8t - 4)\vec{k}$ (SI). Determine:
- O versor da tangente à trajectória da partícula em função do tempo.
 - O versor da normal à trajectória da partícula em função do tempo.
 - O raio de curvatura da trajectória em função do tempo.
- 2.32. Um ponto material parte da origem de um referencial com velocidade inicial $\vec{v}_0 = 3\vec{j}$ m s⁻¹ e aceleração $\vec{a}(t) = 6t\vec{i}$ m s⁻². Determine:
- O valor da velocidade do ponto material no instante $t = 2/\sqrt{3}$ s.
 - Os valores das acelerações tangencial e centrípeta do ponto material no instante $t = 1$ s.
 - A equação da trajectória do ponto material.
- 2.33. A aceleração de uma partícula material é dada pela expressão $\vec{a}(t) = \vec{i} + t\vec{j}$ m s⁻². Sabendo que no instante $t = 0$ a partícula se encontrava na origem do referencial com velocidade nula, determine, para o instante $t = 2$ s:
- Os valores das acelerações tangencial e normal da partícula.
 - O raio de curvatura da trajectória da partícula.
 - A distância da partícula à origem do referencial.
- 2.34. A posição de uma partícula material é definida pela função vectorial $\vec{r}(t) = -5\sin\pi t\vec{i} + 2\cos\pi t\vec{j}$ (SI).
- Obtenha a equação da trajectória da partícula. Represente-a graficamente, assinalando nela o ponto onde se inicia o movimento.
 - Calcule a expressão da velocidade da partícula. O movimento processa-se no sentido directo ou no sentido retrógrado?
 - Mostre que a aceleração da partícula é sempre dirigida para a origem do referencial e que a sua norma é proporcional à distância a que a partícula se encontra da origem do referencial.
- 2.35. Um projectil é disparado do solo com velocidade de valor 200 m s⁻¹ segundo um ângulo de 35° com a horizontal. O voo termina quando o projectil embate no solo. Determine:
- Os vectores velocidade e posição do projectil decorridos 15 s após o lançamento. Nesse instante o projectil está a subir ou a descer?
 - O tempo de voo do projectil.
 - O alcance do projectil.

- 2.36. Um avião voa horizontalmente à altitude de 1000 m com velocidade de valor 400 m s^{-1} , quando deixa cair uma bomba.
- Quanto tempo antes de passar sobre o alvo, situado no solo, deve o avião largar a bomba?
 - Determine:
 - O valor da velocidade da bomba ao atingir o solo.
 - O valor da velocidade da bomba quando se encontra a 500 m do solo.
 - A distância na horizontal percorrida pela bomba.
- 2.37. Resolva o problema anterior considerando que o avião inclinou em direcção ao solo segundo um ângulo de $30.^\circ$. Procure tirar conclusões comparando os resultados destes dois problemas.
- 2.38. Um projectil é disparado do solo com um ângulo de lançamento de $30.^\circ$ e atinge o solo a 4 km do ponto de disparo. Calcule:
- O valor da velocidade inicial do projectil.
 - O tempo de voo do projectil.
 - A altura máxima atingida pelo projectil.
 - O valor da velocidade do projectil no ponto de altura máxima.
- 2.39. Um projectil é disparado do topo de uma colina de 200 m de altura com uma velocidade de valor 100 m s^{-1} e num ângulo de $30.^\circ$ acima da horizontal. Determine:
- O tempo de voo do projectil.
 - O alcance do projectil.
 - A altura máxima que o projectil alcança em relação ao solo.
 - O valor da velocidade do projectil, bem como a inclinação (ângulo com a horizontal) com que atinge o solo.
 - O raio mínimo de curvatura da trajectória descrita pelo projectil.
- 2.40. Um projectil é disparado horizontalmente, com velocidade inicial de valor 300 m s^{-1} , de um ponto situado 500 m acima do solo.
- Quanto tempo fica o projectil no ar?
 - Qual é o alcance do projectil?
 - Qual é o valor da velocidade do projectil quando atinge o solo?
 - Qual é o valor da velocidade do projectil a 25 m do solo?
 - Estabeleça a equação cartesiana da trajectória do projectil.
- 2.41. Um projectil é lançado do solo com velocidade de valor 40 m s^{-1} numa direcção que forma um ângulo de 25° com a horizontal. O voo termina quando o projectil embate no solo. Determine:
- O tempo de voo do projectil.
 - O alcance do projectil.
 - A altura máxima que o projectil atinge.

- d) O valor da velocidade do projectil quando este se encontra a 4 m de altura, na fase descendente do movimento.
- e) O valor da velocidade do projectil no ponto mais alto da trajectória.
- 2.42. Uma bola é lançada com velocidade inicial de valor 25 m s^{-1} do topo de um edifício com 30 m de altura. Sabendo que o referido lançamento é feito segundo um ângulo de 37° acima da horizontal, determine:
- O tempo que a bola permanece no ar.
 - A distância horizontal percorrida pela bola até bater no solo.
 - A altura máxima que a bola atinge em relação ao solo.
 - O valor da velocidade da bola bem como a inclinação (ângulo com a horizontal) com que atinge o solo.
- 2.43. Um golfista dá uma tacada numa bola imprimindo-lhe uma velocidade inicial de valor 24.5 m s^{-1} com um ângulo de lançamento de $35.^\circ$. A bola acerta numa árvore a 48.8 m de distância. Calcule:
- O tempo de voo da bola.
 - A altura a que a bola atinge a árvore.
 - O vector velocidade da bola no instante do impacto com a árvore. A bola bate na árvore na subida ou na descida?
- 2.44. Um projectil é disparado com uma velocidade inicial de valor 250 m s^{-1} , para atingir um alvo, A, situado 500 m acima da arma e a uma distância horizontal de 3600 m. Desprezando a resistência do ar e sabendo que a meia distância entre a arma e o alvo existe uma colina com 800 m de altura, determine o valor do ângulo de lançamento. *Sugestão:* use a relação trigonométrica $1/\cos^2 x = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$.
- 2.45. Num ginásio um jogador lança uma bola com velocidade de valor $v_0 = 15 \text{ m s}^{-1}$ de um ponto A localizado a 1.5 m do solo. Sabendo que o tecto do ginásio tem 6 m de altura, determine o ponto mais alto, B, que a bola pode atingir numa parede situada a 18 m do jogador.
- 2.46. Quando lançado do solo, um projectil tem um alcance máximo de 1000 m. Pretende-se atingir com ele um alvo situado a 500 m de distância. A meio desta distância, entre o alvo e o projectil, existe uma colina de 200 m de altura. Determine o ângulo de lançamento que se deve dar ao projectil para conseguir o que se pretende. *Sugestão:* use a relação trigonométrica $1/\cos^2 x = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$.
- 2.47. Se o alcance máximo horizontal de uma arma é L , determine o ângulo de disparo que deveria ser usado para atingir um alvo localizado a uma distância de $L/2$ no mesmo nível da arma.
- 2.48. Calcule o raio de curvatura no ponto mais alto da trajectória de um projectil cuja velocidade de disparo forma um ângulo θ com a horizontal. *Sugestão:* qual é o valor da aceleração centrípeta de um projectil no ponto mais alto da sua trajectória?

- 2.49. Um ponto material move-se numa trajectória circular de 12 m de raio de acordo com a lei $s(t) = 1.2t^3 - 3t$ (SI). Calcule o valor da aceleração do ponto material no instante $t = 3$ s.
- 2.50. Uma partícula descreve uma trajectória circular de raio unitário de acordo com a lei angular $\theta(t) = 5t^2 + 3t$ (SI). Determine a velocidade angular, a aceleração angular e as coordenadas cartesianas da partícula no instante $t = 2$ s.
- 2.51. A posição angular de uma partícula cuja trajectória é uma circunferência de raio 3 m é dada por $\theta(t) = 0.5t^2$ (SI). Determine os valores das acelerações tangencial, normal e total da partícula no instante $t = 2$ s.
- 2.52. Um ponto material movimenta-se numa trajectória circular de raio 2 m com aceleração angular $\alpha(t) = 120t^2 - 48t + 16$ (SI). Sabendo que em $t = 0$ o referido ponto material se encontrava em repouso e na posição angular $\theta_0 = 0$, determine a velocidade angular e a posição angular do ponto material em função do tempo, bem como as componentes tangencial e normal da sua aceleração no instante $t = 1$ s.
- 2.53. Um ponto material descreve uma circunferência de acordo com a lei $s(t) = t^3 + 2t^2$ (SI). Calcule o raio da circunferência, sabendo que no instante $t = 2$ s a aceleração do ponto tem valor $16\sqrt{2}$ m s⁻².
- 2.54. Uma partícula descreve uma trajectória circular com uma velocidade angular dada pela expressão $\omega(t) = t / (t^2 + 1)$. Determine o instante em que a aceleração se reduz apenas à componente normal.
- 2.55. Uma partícula material descreve uma trajectória circular de raio 2 m com uma aceleração angular de 12 rad s⁻². Sabendo que, ao fim de 2 s, a partícula percorreu uma distância de 40 m sobre a trajectória e adquiriu uma velocidade de valor 30 m s⁻¹, determine:
- A velocidade angular e a posição angular da partícula em função do tempo.
 - O valor da aceleração da partícula no instante $t = 1$ s.
- 2.56. Considere uma partícula assente num disco, situada a 10 cm do eixo de rotação. Suponha que a partícula parte do repouso em $t = 0$ e experimenta um acréscimo linear da velocidade angular de tal modo que após 2 s a sua velocidade angular instantânea é 10 rad s⁻¹. Calcule:
- A aceleração angular da partícula.
 - O valor da aceleração nos instantes $t = 0$ e $t = 2$ s.
- 2.57. Uma roda de bicicleta de 68.58 cm de diâmetro é montada num eixo ligado a um motor que a faz girar. Durante um intervalo de 10 s o motor fornece à roda uma aceleração angular constante. Sabendo que a roda estava inicialmente em repouso e que ao fim de 10 s a velocidade linear de um ponto da sua periferia tem o valor 28.82 m s⁻¹, calcule:

- a) A velocidade angular da roda ao fim do período de 10 s de aceleração.
 b) A aceleração angular da roda.
 c) O número de rotações efectuadas pela roda durante os primeiros 5 s em que o motor está ligado.
- 2.58. Dois pontos A e B descrevem com movimento circular uniforme trajectórias de raios R_A e R_B , respectivamente, sendo $R_A = 1/3 R_B$. O período de A , T_A , é triplo do período de B , T_B . Relacione:
- a) As velocidades angulares dos dois pontos, ω_A e ω_B .
 b) Os valores das velocidades dos dois pontos, v_A e v_B .
 c) Os valores das acelerações dos dois pontos, a_A e a_B .
- 2.59. Uma partícula descreve um movimento de tal modo que a sua posição é definida pelo vector $\vec{r}(t) = -3\sin\pi t \vec{i} - 3\cos\pi t \vec{j}$ (SI).
- a) Determine a equação da trajectória da partícula, bem como o ponto P_0 onde a partícula se encontra no instante $t = 0$.
 b) Deduza a expressão do vector velocidade da partícula. O movimento processa-se no sentido directo ou no sentido retrógrado?
- 2.60. Na rotação de um corpo, a equação do movimento de um dos seus pontos, P , é $\vec{r}(t) = \sqrt{2} \sin t \vec{i} - \sqrt{2} \cos t \vec{j}$ (SI).
- a) Mostre que o movimento de rotação do corpo é uniforme.
 b) Indique a posição do ponto P no instante $t = 0$.
 c) Estabeleça a lei das posições angulares do movimento.
 d) Calcule em que instante o ponto P ocupa a posição (1, -1) m no primeiro período do movimento.
- 2.61. O vector posição de uma partícula material é definido pela função vectorial $\vec{r}(t) = a \cos \omega t \vec{i} + a \sin \omega t \vec{j}$, com a e ω constantes positivas.
- a) Mostre que o vector velocidade da partícula é sempre perpendicular a \vec{r} .
 b) Mostre que a aceleração é um vector com a direcção de \vec{r} e sentido oposto ao de \vec{r} .
 c) Determine a equação da trajectória e classifique o movimento.
- 2.62. O vector posição de uma partícula material é definido pela função vectorial $\vec{r}(t) = a \cos bt \vec{i} + a \sin bt \vec{j}$ (SI), com a e b constantes positivas.
- a) Determine a equação da trajectória da partícula.
 b) Calcule o valor da velocidade da partícula em função do tempo. Conjugando o resultado que obteve com o obtido na alínea anterior, classifique o tipo de movimento descrito pela partícula.
 c) Estabeleça a lei das posições angulares deste movimento.
 d) Calcule os valores das acelerações tangencial e normal da partícula.
 e) Determine o vector velocidade e a sua norma quando a partícula ocupa o ponto (3, 4) m.

- 2.63. Uma partícula material descreve um movimento circular de raio R . Admitindo que se trata de um movimento retardado com aceleração angular constante, $-\alpha$, e que a velocidade angular inicial é ω_0 , mostre que, decorrido o tempo $t = \omega_0 / \alpha$, a partícula está em repouso, tendo percorrido até esse instante a distância $s = R\omega_0^2 / 2\alpha$.
- 2.64. Uma partícula material encontra-se animada de movimento harmónico simples horizontal, com período $T = 8$ s. Sendo $5\sqrt{2}$ cm e $\pi / 4$ rad, respectivamente, a posição da partícula em $t = 0$ e a fase inicial do movimento, determine:
- A lei do movimento.
 - Os instantes em que a velocidade da partícula se anula, nos primeiros 8 s do movimento.
- 2.65. Uma partícula material descreve um movimento harmónico simples segundo a equação $y(t) = 3 \cos [0.2 (t + 5)]$ (SI). Determine:
- O período e a fase inicial do movimento.
 - A aceleração da partícula no instante $t = 5$ s.
 - Os valores máximos da velocidade e da aceleração da partícula.
- 2.66. Um ponto material tem um movimento harmónico simples e está, no instante t , a 5 cm da sua posição de equilíbrio. Passados $1/3$ s, atinge o afastamento máximo da posição de equilíbrio, que é de 10 cm. Calcule o período do movimento, tomando para origem dos tempos a origem do espaço.
- 2.67. Considere uma partícula material em vibração rectilínea definida pela equação $x(t) = \sin(t - \pi)$ (SI).
- Determine, no primeiro período do movimento, os instantes em que a partícula passa pela posição de equilíbrio.
 - Calcule, para o primeiro período do movimento, os instantes em que o valor numérico da velocidade iguala o valor numérico da aceleração.
- 2.68. Um ponto material encontra-se em vibração rectilínea com um período de 2 s. A posição e a fase iniciais são, respectivamente, -5 cm e $-\pi / 6$ rad.
- Deduza a lei do movimento do ponto material.
 - Determine o valor da velocidade máxima do ponto material.
- 2.69. Uma partícula vibra com movimento harmónico simples segundo o eixo dos xx , sendo a amplitude do movimento 2 mm. Sabendo que a aceleração nos pontos extremos da trajectória é de 8×10^3 m s⁻², calcule:
- A frequência do movimento.
 - O valor da velocidade da partícula quando passa pela posição de equilíbrio
 - O valor da velocidade da partícula quando $x = 1.2$ mm.
- 2.70. Um ponto material encontra-se em movimento vibratório rectilíneo definido pela equação $x(t) = \sin t - \cos t$ (SI). Calcule:

- a) A amplitude do movimento.
 - b) A fase inicial do movimento
 - c) A frequência angular do movimento.
- 2.71. A posição de uma partícula material é definida pelas seguintes equações: $x = 6 \sin t$ e $y = 8 \sin t$ (SI).
- a) Determine a equação da trajetória da partícula material.
 - b) Calcule as coordenadas dos pontos correspondentes às extremidades do movimento.
 - c) Mostre que a partícula material está animada de movimento harmónico simples.
 - d) Calcule o período do movimento.
- 2.72. Uma partícula oscila ao longo do eixo dos xx com movimento harmónico simples de amplitude 15 cm e frequência de 4 Hz. Calcule:
- a) Os valores máximos da velocidade e da aceleração da partícula.
 - b) A velocidade e a aceleração da partícula quando $x = 9$ cm.
- 2.73. A análise do movimento de um ponto material mostra uma aceleração máxima de 30 m s^{-2} e uma frequência de 120 ciclos por minuto. Supondo que o movimento é harmónico simples, determine:
- a) A amplitude do movimento.
 - b) O valor da velocidade máxima do ponto material.

CAPÍTULO 3

DINÂMICA

O movimento dos corpos sob a acção das forças que sobre eles se exercem, ou seja, a sua *dinâmica*, é governado pelas leis de Newton. A grande importância das leis de Newton reside no facto de se aplicarem a todos os corpos, independentemente da forma, dimensões ou composição química. As leis de Newton apenas deixam de ser válidas nas seguintes situações:

1. Corpos animados de velocidades próximas da velocidade da luz²⁷.
2. Movimentos à escala atómica ou nuclear²⁸.

3.1. As leis de Newton

3.1.1. Primeira lei de Newton ou lei da inércia

A *primeira lei de Newton* ou *lei da inércia* descreve o que acontece a um corpo quando deixado entregue a si mesmo, ou seja, quando a resultante (soma vectorial) das forças que sobre ele se exercem é nula. Pode enunciar-se do seguinte modo:

Se a resultante das forças que se exercem sobre um corpo é nula, esse corpo move-se com velocidade constante (note-se que o “repouso” é o caso particular de velocidade constante nula).

Não é difícil aceitar que um corpo em repouso permaneça em repouso se a soma das forças que sobre ele actuam for nula. Já é mais difícil aceitar que um corpo em movimento conserve a sua velocidade na ausência de forças. De facto, estamos habituados, na nossa vida corrente, a ver extinguir-se o movimento de corpos (automóveis, bolas, etc.) sobre os quais, aparentemente, não se exerce qualquer força. Isto sucede, porém, porque os movimentos que vemos correntemente à nossa volta são afectados pelo atrito: a resultante das forças que actuam sobre a maior parte dos corpos aparentemente “entregues a si mesmos” na verdade não é nula.

Uma importantíssima consequência da primeira lei de Newton é que o repouso é, de algum modo, equivalente ao movimento rectilíneo e uniforme. Efectivamente, conside-

²⁷ Este caso é tratado no quadro da teoria da Relatividade Restrita.

²⁸ Este caso é tratado no quadro da Mecânica Quântica.

remos dois observadores, um em repouso, por exemplo, sentado à mesa de um café numa estação de caminhos-de-ferro, e outro sentado num comboio que se desloca com velocidade constante relativamente à referida estação. Se cada um destes observadores colocar, por exemplo, uma caneta na mesa à sua frente, ambos concordarão que a sua caneta fica em repouso se a resultante das forças que sobre ela se exercem for nula. Cada observador conclui, portanto, que a sua caneta permanece em repouso relativamente a si. No entanto, para o observador na estação, a caneta do observador no comboio não está em repouso; está, sim, a descrever um movimento com velocidade constante, ou seja, um movimento rectilíneo e uniforme. Isto apesar de a resultante das forças que se exercem sobre a caneta do observador no comboio ser nula: as forças têm origens físicas bem definidas (pancadas, atrito, ímanes, etc.) pelo que não existe ambiguidade quanto a se se exercem ou não. Uma vez que os dois observadores são igualmente fiáveis – não temos qualquer razão para acreditar mais num do que no outro – a única maneira de reconciliar as suas diferentes observações é aceitar que o repouso é equivalente ao movimento rectilíneo e uniforme. Chama-se a este enunciado *princípio da relatividade de Galileu*. Diz-se, então, que a lei da inércia é válida para todos os observadores que se movem, relativamente uns aos outros, com velocidade constante – são os chamados *observadores inerciais*. Aos sistemas de eixos ligados a estes observadores chama-se *referenciais de inércia*, como referimos no capítulo anterior. O princípio da relatividade de Galileu afirma que as leis da Mecânica são as mesmas para todos os observadores inerciais ou, de modo equivalente, em todos os referenciais de inércia.

Poder-se-ia pensar que a primeira lei de Newton é completamente trivial, uma vez que se limita a afirmar aquilo que é, aparentemente, óbvio: que, se nada se fizer, tudo fica na mesma. Isto não é verdade. Esta lei permite-nos determinar as forças que se exercem sobre um determinado corpo. De facto, se soubermos que um dado corpo está em repouso ou tem movimento rectilíneo e uniforme, então seguir-se-á que a resultante das forças que sobre ele actuam se anula. Logo, se conhecermos todas as forças que actuam sobre o corpo excepto uma, seremos capazes de determinar essa força que falta. Inversamente, se soubermos que a resultante das forças que actuam sobre um dado corpo não é nula, a primeira lei de Newton assegura-nos que esse corpo não pode estar em repouso ou em movimento rectilíneo e uniforme. Quando parece que assim não é, é porque nos esquecemos de contabilizar uma ou mais forças, como sucede no caso do movimento com atrito que referimos atrás.

Repare-se que a palavra “inércia” tem, no contexto da Mecânica, um significado diferente do que toma na linguagem corrente. Em Mecânica, inércia é a propriedade de um corpo que o leva a conservar o seu estado de movimento, que pode ser de repouso ou de movimento rectilíneo e uniforme.

3.1.2. Segunda lei de Newton ou lei fundamental da dinâmica

A *segunda lei de Newton* ou *lei fundamental da dinâmica* descreve o que acontece quando a resultante das forças que se exercem sobre um corpo não é nula. Pode enunciar-se do seguinte modo:

Se a resultante \vec{F}_R das forças que se exercem sobre um dado corpo não for nula, o corpo sofrerá uma aceleração \vec{a} dada por

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_R}{m} \Leftrightarrow \vec{F}_R = m\vec{a}. \quad (3.1)$$

Esta relação mostra que a aceleração (variação de velocidade) tem a direcção e o sentido da força total que se exerce sobre o corpo. O coeficiente de proporcionalidade, m , entre a força total e a aceleração é a *massa inercial* do corpo. A massa inercial é, como o nome indica, uma medida da inércia do corpo – isto é, uma medida da resistência do corpo a ser acelerado na direcção e sentido da força resultante. Para uma dada força resultante, quanto maior for a massa inercial de um corpo menor é a aceleração por ele adquirida. De facto, verifica-se

$$F_{R1} = F_{R2} \Leftrightarrow m_1 a_1 = m_2 a_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \quad (3.2)$$

A unidade SI de força é o newton (N): 1 N é a força que é necessário aplicar a um corpo de massa 1 kg para lhe imprimir uma aceleração de 1 m s⁻².

A segunda lei de Newton utiliza-se sempre que a resultante das forças que actuam sobre um dado sistema não é nula, permitindo-nos achar a respectiva lei do movimento:

$$\vec{F}_R = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (3.3)$$

Ou seja, se conhecermos a força resultante, podemos, por integrações sucessivas, conhecer a velocidade e a posição do sistema. Em alternativa, se a aceleração de um sistema for conhecida, a segunda lei de Newton permite-nos deduzir qual é a resultante das forças que actuam sobre esse sistema. Note-se, contudo, que a segunda lei de Newton não permite determinar cada uma das forças individuais que actuam sobre o sistema.

Exemplo 3.1

Uma partícula de massa 2 kg é actuada por uma força definida pela expressão $\vec{F}(t) = 4t\vec{i} + 2t^2\vec{j}$ (SI). Sabendo que a partícula se encontrava inicialmente em repouso e na origem dos eixos, determine os vectores aceleração, velocidade e posição da partícula em função do tempo e no instante $t = 2$ s.

Resolução:

Por aplicação da segunda lei de Newton tem-se

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} \text{ ms}^{-2} \Rightarrow \vec{a}(t=2) = 4\vec{i} + 4\vec{j} \text{ ms}^{-2}.$$

Integrando a aceleração obtemos o vector velocidade

$$d\vec{v} = \vec{a} dt \Rightarrow \int_{\vec{v}_0=0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}' = \int_{t_0=0}^t \vec{a} dt' \Leftrightarrow \vec{v}(t) = t^2 \vec{i} + \frac{1}{3} t^3 \vec{j} \text{ ms}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t=2) = 4 \vec{i} + \frac{8}{3} \vec{j} \text{ ms}^{-1}.$$

Finalmente, integrando a velocidade, obtemos o vector posição

$$d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_0=0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}' = \int_{t=0}^t \vec{v} dt' \Leftrightarrow \vec{r}(t) = \frac{1}{3} t^3 \vec{i} + \frac{1}{12} t^4 \vec{j} \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t=2) = \frac{8}{3} \vec{i} + \frac{4}{3} \vec{j} \text{ m}.$$

Note-se que este problema poderia ter sido colocado de outro modo: conhecido à partida o vector posição da partícula, por sucessivas derivações, poderíamos obter o vector aceleração. Conhecido este último poderíamos calcular a força resultante que actua sobre a partícula.

3.1.3. Terceira lei de Newton ou lei da acção-reacção

A primeira e segunda leis de Newton dizem respeito a forças que se exercem *sobre um* corpo. A *terceira lei de Newton* diz respeito a forças que se exercem *entre* corpos. Pode ser enunciada do seguinte modo:

Se o corpo A exerce a força \vec{F}_{BA} sobre o corpo B, então o corpo B exerce a força $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ sobre o corpo A.

As duas forças têm, portanto, a mesma intensidade, a mesma direcção, mas sentidos opostos, e estão aplicadas em corpos diferentes. A força que A exerce sobre B e a força que B exerce sobre A constituem um *par acção-reacção*: qual das forças tomamos como sendo a acção, e qual como sendo a reacção, é totalmente arbitrário – se uma delas for a acção, a outra será a reacção, e vice-versa. Vejamos alguns exemplos.

- i. O peso de um corpo é a força atractiva sobre ele exercida pela Terra. A acção é, portanto, a força que a Terra exerce sobre o corpo. A reacção é a força, de igual intensidade e igual direcção, mas de sentido oposto, que o corpo exerce sobre a Terra. Note-se que as intensidades da acção e da reacção são iguais: o corpo exerce sobre a Terra uma força de igual intensidade à que a Terra exerce sobre ele. A diferença está em que, como a massa da maior parte dos corpos à superfície da Terra é muito menor do que a massa da Terra, pela equação (3.2) a aceleração que a Terra adquire é muito menor do que a aceleração adquirida pelo corpo, razão pela qual se diz que os corpos “caem para a Terra”, e não que a Terra “vem ao encontro dos corpos”.
- ii. Um corpo pousado sobre uma mesa exerce sobre ela uma força vertical, com sentido de cima para baixo e intensidade igual ao peso do corpo. A mesa reage sobre

o corpo com uma força dirigida segundo a vertical, apontando de baixo para cima, e de intensidade igual ao peso do corpo. Note-se que esta força não é o par acção-reacção do peso do corpo, o qual, como vimos, se exerce sobre a Terra: é, sim, a reacção correspondente à acção que o corpo exerce sobre a mesa.

3.2. Algumas forças

3.2.1. Peso ou força gravítica. A lei da gravitação universal de Newton

O *peso* de um corpo é a *força gravítica* que a Terra (ou, mais geralmente, o astro onde se encontrar o corpo) exerce sobre esse corpo. Esta força é dirigida segundo a vertical do lugar, de cima para baixo (aponta para o centro da Terra) e tem valor constante desde que a distância a que o corpo se encontra da superfície da Terra seja muito menor do que o raio da Terra (regressaremos a este ponto mais adiante). Se a força gravítica, \vec{F}_g , for a única força que se exerce sobre um corpo de massa m , a segunda lei de Newton diz-nos que este adquire uma aceleração, dita *aceleração da gravidade*, g , dada por

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_g}{m} = \vec{g}. \quad (3.4)$$

Uma propriedade importantíssima da força gravítica é que, num dado lugar da Terra, ela comunica a mesma aceleração a todos os corpos, quaisquer que sejam as suas massa ou composição química: a aceleração da gravidade é a mesma para todos os corpos²⁹. À superfície da Terra³⁰, $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$. Dado que g é constante, segue-se, então, que a força gravítica que se exerce sobre um corpo é proporcional à sua massa:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \quad (3.5)$$

Poderia agora parecer que a força gravítica não depende da distância a que o corpo se encontra do centro da Terra – o que é manifestamente absurdo. Um corpo situado a distância infinita da Terra não pode certamente ser para ela atraído com uma força da mesma intensidade que o é um corpo colocado na sua vizinhança próxima. Vejamos porquê.

Considere-se dois corpos de massas m_1 e m_2 à distância r um do outro (*vide* figura 3.1). A *lei da gravitação universal de Newton* afirma que todos os corpos se atraem mutuamente com uma força cuja intensidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa, e directamente proporcional ao produto das suas massas. A sua expressão matemática é

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3.6)$$

²⁹ Estamos a admitir que se despreza a resistência do ar.

³⁰ Há pequenas variações deste valor, devidas ao achatamento e heterogeneidade de composição da Terra. É maior nos pólos e menor no equador.

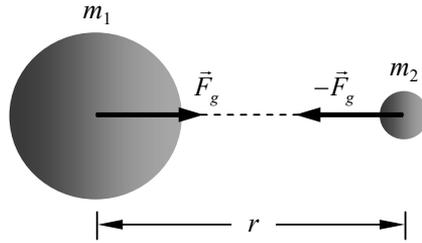


Figura 3.1. Representação esquemática da lei da gravitação universal de Newton entre dois corpos de massas m_1 e m_2 .

onde $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ é a chamada *constante de gravitação universal de Newton*. Coloca-se agora a seguinte questão: como conciliar as equações (3.5) e (3.6)?

Para resolver esta aparente contradição consideremos o esquema da figura 3.1 e a equação (3.6). Tomemos a Terra como corpo 1, isto é, $m_1 = M_T$ e o nosso corpo de prova como corpo 2, ou seja, $m_2 = m$. Note-se agora que r é a distância do nosso corpo de prova (suposto muito mais pequeno do que a Terra) ao centro da Terra, razão pela qual podemos escrever

$$r = R_T + h, \quad (3.7)$$

onde R_T é o raio da Terra e h é a distância entre o corpo e a superfície da Terra. Repare-se que podemos considerar que toda a massa da Terra está concentrada no seu centro devido à simetria aproximadamente esférica que a Terra possui. Substituindo a equação (3.7) na equação (3.6), vem

$$F_g = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} = G \frac{M_T}{R_T^2} \frac{m}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2}. \quad (3.8)$$

No caso em que a distância do corpo à superfície da Terra é muito menor do que o raio da Terra, isto é, $h \ll R_T$, vem

$$F_g \approx m \left(G \frac{M_T}{R_T^2} \right). \quad (3.9)$$

Substituindo G , M_T e R_T pelos respectivos valores, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, $M_T = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ e $R_T = 6.38 \cdot 10^6 \text{ m}$, obtemos

$$G \frac{M_T}{R_T^2} \approx 9.8 \text{ ms}^{-2} = g, \quad (3.10)$$

reduzindo-se, assim, a equação (3.6), que é exacta, à equação (3.5), que é aproximada e apenas válida quando $h \ll R_T$. Note-se ainda que o cálculo que acabámos de efectuar permite perceber também que o valor de g seria forçosamente diferente num outro qual-

quer astro com massa e raio diferentes dos da Terra. A aceleração da gravidade é responsável pela queda dos corpos, ditos “*graves*”, para a Terra. Em particular, é a causa do movimento dos projecteis.

3.2.2. Tensão

Todos já vimos corpos suspensos de cordas, fios ou cabos, que para efeito deste estudo se admitem inextensíveis. É óbvio que sobre todos eles se exerce a força gravítica e, no entanto, encontram-se em repouso. A primeira lei de Newton exige, então, que sobre eles se exerça uma outra força que compense a gravidade, de modo que a resultante das forças que sobre eles actuam seja nula. Claramente uma tal força dever-se-á às cordas, fios ou cabos, pois sem eles o corpo suspenso cairia para o solo. A *tensão da corda, fio ou cabo*, \vec{T} , é então a força exercida sobre o corpo suspenso pela corda, fio ou cabo: está dirigida segundo a direcção da corda, fio ou cabo de suspensão; o seu sentido é tal que aponta para fora do corpo (é uma força que “puxa” o corpo).

Note-se que o par acção-reacção da tensão não é o peso do corpo suspenso: o peso é a força exercida pela Terra sobre o corpo, logo o seu par acção-reacção é a força exercida pelo corpo sobre a Terra. A tensão e o peso estão ambas aplicadas no corpo, logo nunca poderiam ser um par acção-reacção. Uma vez que a tensão da corda, fio ou cabo é a força por estes exercida no corpo, o seu par acção reacção será a força que o corpo exerce sobre a corda, fio ou cabo, a que se dá o nome de *tensão na corda, fio ou cabo*. Esta tem a mesma direcção e intensidade, mas sentido oposto, ao da tensão da corda, fio ou cabo (*vide* figura 3.2).

A origem da tensão está nas forças de natureza química que asseguram a coesão da corda, fio ou cabo. Se a massa da corda, fio ou cabo for desprezável, isto é, muito mais pequena do que a dos corpos deles suspensos, então a tensão é a mesma em todos os pontos da corda, fio ou cabo.

Ao contrário do peso de um corpo, que depende apenas das suas propriedades, o valor da tensão depende da situação que estivermos a considerar. Por exemplo, a tensão numa corda da qual está suspenso um balde cheio de pedras é diferente (maior) da tensão na mesma corda caso o balde esteja vazio. Note-se ainda que, para cada corda, fio ou cabo, existe um valor limite da tensão, correspondente a um valor máximo do peso do corpo suspenso, acima do qual ocorre a ruptura: a força de tensão torna-se neste caso superior à intensidade das forças que asseguram a coesão da corda, fio ou cabo.

3.2.2.1. Roldanas fixas e roldanas móveis

Uma roldana é uma máquina simples constituída por um disco de material rígido, normalmente metal, com um sulco em torno da sua periferia. Quando accionada por uma

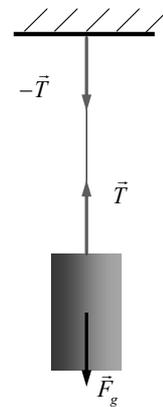


Figura 3.2. Representação de um corpo suspenso e da força de tensão da corda inextensível que permite a sua suspensão.

corda, fio ou cabo, a roldana gira em torno de um eixo perpendicular ao seu plano, permitindo transferir movimento a um ou mais corpos em direcções e sentidos diferentes às forças aplicadas na corda fio ou cabo. As roldanas são um caso paradigmático de sistemas que envolvem forças de tensão. No estudo que iremos agora efectuar vamos admitir que as roldanas são sistemas livres de atrito e de massa desprezável. Igualmente se admite que a corda, fio ou cabo tem massa desprezável, servindo apenas como elemento de ligação.

Consideremos em primeiro lugar um sistema composto por uma roldana fixa e um corpo suspenso de um dos lados do cabo que circula no sulco da roldana. Um agente exterior ao sistema exerce uma força na outra extremidade do cabo, a qual equilibra o peso do corpo suspenso (*vide* figura 3.3). Ao peso do corpo suspenso chamamos *força resistente*, $\vec{F}_{res} = \vec{F}_g$, e à força exercida pelo agente exterior chamamos *força potente*, \vec{F}_{pot} . Como o cabo é um só, as tensões nas suas extremidades têm a mesma norma, T . Como o sistema está em equilíbrio, a tensão têm que igualar quer a força potente, quer a força resistente. Temos, então, que concluir que, para uma roldana fixa, a intensidade da força potente iguala a intensidade da força resistente, isto é

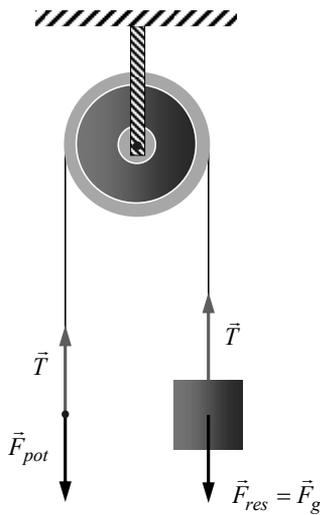


Figura 3.3. Roldana fixa. O sistema encontra-se em equilíbrio por acção da força exercida pelo agente exterior \vec{F}_{pot} .

$$F_{pot} = F_{res} \quad (3.11)$$

Consideremos agora o caso de um sistema composto por uma roldana móvel acoplada a uma roldana fixa, conforme se representa no esquema da figura 3.4a. Admitimos que a força exercida pelo agente exterior (força potente) equilibra o peso do corpo suspenso da roldana móvel (força resistente). Como o sistema se encontra em equilíbrio, a intensidade da tensão T tem de igualar a intensidade do peso do corpo, F_g . Mas como a

roldana móvel está suspensa por dois cabos, teremos $T = 2T'$, com T' a tensão em cada um dos cabos de que está suspensa a roldana móvel. Daqui resulta

$$F_{pot} = T' = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}F_g = \frac{1}{2}F_{res}, \quad (3.12)$$

isto é, numa roldana móvel a intensidade da força potente é metade da intensidade da força resistente. No caso de um sistema em equilíbrio com n roldanas móveis acopladas a uma roldana fixa a relação entre a força potente e a força resistente é

$$F_{pot} = \frac{F_{res}}{2^n}. \quad (3.13)$$

Este último resultado tem uma demonstração óbvia na medida em que por cada roldana móvel existente no sistema a força potente é dividida por 2 em relação à força resistente. Na figura 3.4b está representado um exemplo de sistema com três roldanas móveis acopladas a uma roldana fixa, pelo que, neste caso, a força potente é 1/8 da força resistente.

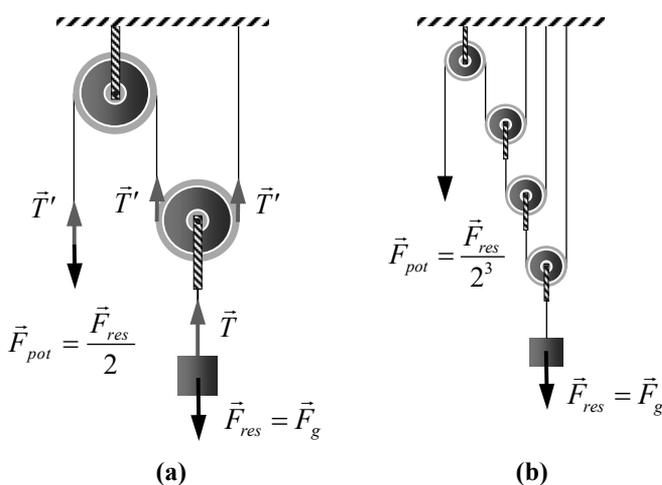


Figura 3.4. a) Sistema composto por uma roldana móvel acoplada a uma roldana fixa. b) Sistema composto por três roldanas móveis acopladas a uma roldana fixa. Ambos os sistemas se encontram em equilíbrio por acção da força potente, de intensidade F_{pot} , exercida pelo agente exterior.

3.2.2.2. Forças de tensão em sistemas fora do equilíbrio

Vimos até aqui exemplos de sistemas que envolvem forças de tensão e que estão em equilíbrio, isto é, que estão em repouso ou em movimento rectilíneo e uniforme. Contudo, no caso mais geral, as forças de tensão podem estar presentes em sistemas fora do equilíbrio. Neste caso, as forças de tensão devem ser englobadas no cômputo da força resultante que actua cada corpo do sistema e, em seguida, aplicar a segunda lei de Newton para calcular a aceleração dos referidos corpos. Conhecidas as acelerações, podem ser deduzidas por integração as respectivas leis do movimento.

3.2.3. Força de reacção normal

Se em vez de suspendermos um corpo de uma corda, fio ou cabo o colocarmos sobre uma superfície, por exemplo uma mesa, o corpo ficará igualmente em repouso (*vide* figura 3.5). Uma vez que sobre ele continua a actuar a força da gravidade, tem de existir uma outra força que a cancele, de modo a que a resultante das forças que se exercem sobre o corpo seja nula. Esta força deve-se, obviamente, à presença da superfície, na medida em que, sem ela, o corpo cairia para o solo. É denominada *força de reacção normal*, ou apenas *reacção normal*, da superfície, \vec{N} . A sua direcção é perpendicular à superfície e o seu sentido é de dentro para fora desta, isto é, no sentido de “sustentar” o corpo assente na superfície.

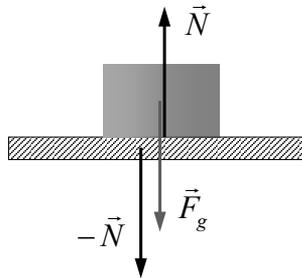


Figura 3.5. Força de reacção normal.

Tal como no caso da tensão, a força de reacção normal deve-se às forças de natureza química que asseguram a coesão do material que constitui a superfície, dependendo o seu valor da situação que estivermos a considerar; é o par acção-reacção da força que o corpo exerce sobre a superfície devido ao seu peso (não é o par acção-reacção do peso do corpo, o qual, como vimos, actua na Terra). De modo idêntico ao que se passa com a tensão, também existe um valor máximo do peso do corpo acima do qual a superfície entra em ruptura.

Finalmente, note-se que a força de reacção normal é sempre perpendicular à superfície onde o corpo estiver pousado. Se a superfície estiver inclinada, a reacção normal não terá direcção vertical. Mais, sobre o corpo assente na superfície podem actuar várias forças para além do peso. Neste caso a reacção normal é tal que anulará todas as componentes perpendiculares à superfície das forças que actuam sobre o corpo, isto é

$$\vec{N} = -\vec{F}_{1\perp} - \dots - \vec{F}_{n\perp} = -\sum_{i=1}^n \vec{F}_{i\perp}, \quad (3.14)$$

onde $\vec{F}_{i\perp}$ representa a componente perpendicular à superfície da força \vec{F}_i aplicada no corpo.

3.2.4. Força elástica

Um tipo de força que surge com muita frequência é a *força elástica*, \vec{F}_e , cuja intensidade aumenta linearmente com o afastamento do seu ponto de aplicação de uma dada posição de equilíbrio, x_0 , de acordo com a lei

$$F_e = -k(x - x_0). \quad (3.15)$$

Para simplificar a discussão tomaremos $x_0 = 0$, o que corresponde simplesmente à escolha da origem do eixo dos xx . Um exemplo é a força exercida por uma mola sobre um corpo que lhe esteja ligado: ao alongarmos ou comprimirmos a mola, esta “resiste” à deformação, tentando puxar ou empurrar o corpo de volta à posição de equilíbrio (*vide* figura 3.6), que é a posição para a qual a mola tem o seu comprimento natural, isto é, o comprimento que tem na ausência de forças aplicadas. A *constante elástica*, k , depende do material constituinte da mola e das suas dimensões. É expressa no SI em N m^{-1} .

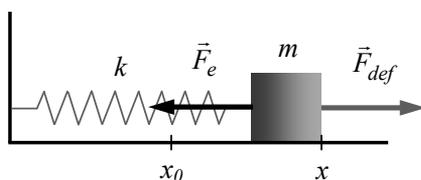


Figura 3.6. Sistema oscilatório massa-mola.

A equação (3.15) exprime a chamada *lei de Hooke*: a força exercida por uma mola é proporcional à sua deformação. Da terceira lei de Newton conclui-se imediatamente que a intensidade da força que é necessário exercer sobre uma mola para a deformar, F_{def} , é igualmente proporcional à deformação que se produz, sendo válida a relação vectorial

$$\vec{F}_{def} = -\vec{F}_e. \quad (3.16)$$

Como exemplo de aplicação do conceito de força elástica e da lei de Hooke, mostremos que o movimento oscilatório de um corpo de massa m acoplado a uma mola de constante k é um movimento harmónico simples. Efectivamente

$$\begin{cases} F_e = -kx & (\text{admitindo } x_0 = 0) \\ F_e = ma \end{cases}, \quad (3.17)$$

donde

$$a(t) = -\frac{k}{m}x(t). \quad (3.18)$$

Como num m.h.s. se verifica sempre $a = -\omega^2x$, temos que concluir que o corpo de massa m acoplado à mola de constante k oscila com frequência angular dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.19)$$

A partir de (3.19), e recordando que $\omega = 2\pi f$, obtém-se a frequência de oscilação

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.20)$$

e o respectivo período

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.21)$$

Repare-se que ω , f e T não dependem da deformação imposta à mola. Dependem apenas da constante elástica da mola e da massa do corpo a ela acoplado. Finalmente, gostaríamos de chamar à atenção para o facto de a lei de Hooke ser válida apenas para pequenos alongamentos ou compressões que não conduzam a deformações plásticas (isto é, permanentes) da mola que impeçam a recuperação da posição central de equilíbrio.

3.2.5. Força de atrito

O atrito tem grande importância em muitos e variados processos e é um conceito com o qual todos estamos mais ou menos familiarizados. É graças ao atrito que é possível caminhar, que os automóveis não derrapam na estrada, que os pregos permanecem pregados e os parafusos apertados. Mas é também devido ao atrito que as máquinas dissipam (perdem) energia, com a inerente perda de rendimento, para além de as suas partes móveis sofrerem desgastes mecânicos que lhes diminuem a vida útil. No estudo que iremos efectuar, consideraremos primeiro o chamado atrito sólido, isto é, o atrito que se exerce entre duas superfícies sólidas em contacto, e posteriormente o atrito entre um sólido e um fluido.

3.2.5.1. Força de atrito entre superfícies sólidas

Há dois tipos de atrito entre superfícies sólidas:

1. A *força de atrito estático*, \vec{F}_s^a , exerce-se entre duas superfícies sólidas em contacto de modo a impedir o seu movimento relativo, ou seja, as superfícies não se movem relativamente uma à outra. No exemplo da figura 3.7, o corpo mover-se-ia sob a acção da força aplicada \vec{F} , se não existisse a força de atrito estático \vec{F}_s^a que a cancela. Esta força de atrito toma valores no intervalo

$$0 \leq F_s^a \leq \mu_s N, \quad (3.22)$$

onde μ_s é o *coeficiente de atrito estático* e N é o valor da reacção normal da superfície. F_s^a tem, portanto, um valor máximo $\mu_s N$. Quer isto dizer que, se aplicarmos uma força \vec{F} suficientemente intensa, acabamos por conseguir “vencer” a força de atrito estático \vec{F}_s^a .

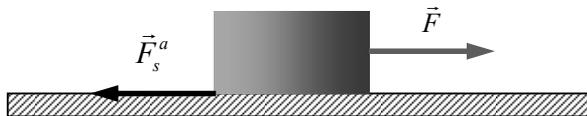


Figura 3.7. Representação da força de atrito estático \vec{F}_s^a que surge em resultado da força \vec{F} aplicada sobre o corpo.

2. A *força de atrito cinético* ou de *deslizamento*, \vec{F}_k^a , exerce-se entre duas superfícies sólidas em contacto, em movimento de translação relativamente uma à outra. Tem um valor menor do que o da força de atrito estático e dado por

$$F_k^a = \mu_k N, \quad (3.23)$$

onde μ_k é o *coeficiente de atrito cinético*.

Impõem-se agora algumas observações.

- i. Ambos os coeficientes de atrito, estático e cinético, são grandezas adimensionais.
- ii. Experimentalmente, verifica-se que $\mu_k < \mu_s$. Significa isto que, quando a força \vec{F} aplicada a um corpo é suficientemente intensa para vencer a força de atrito estático entre esse corpo e a superfície sobre a qual se encontra em contacto, a força de atrito sobre o corpo (que passa a ser atrito cinético) diminui (*vide* figura 3.8).

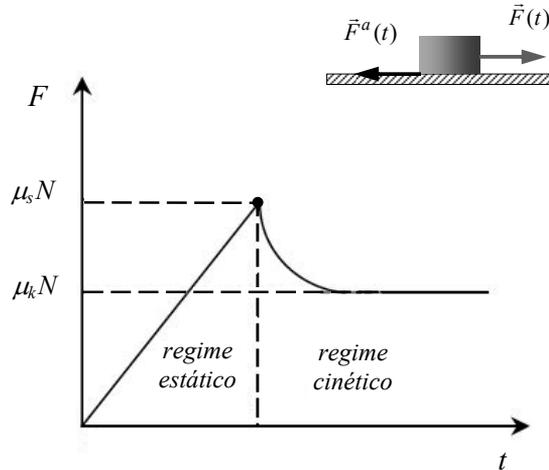


Figura 3.8. Força de atrito *versus* tempo. À medida que a força F aplicada no corpo vai aumentando de intensidade a força de atrito estático aumenta até atingir o valor máximo $\mu_s N$ (regime estático). A partir do instante em que a força iguala aquele valor, inicia-se o movimento (regime cinético) e o valor da força de atrito diminui até atingir o valor $\mu_k N$ (força de atrito cinético).

- iii. A força de atrito entre duas superfícies é sempre paralela às superfícies. As equações (3.21) e (3.22) são apenas relações entre os valores das forças de atrito, estático e cinético, e o valor da força de reacção normal. Não são válidas entre os vectores força de atrito, estática ou cinética, e o vector reacção normal, uma vez que estes vectores têm direcções diferentes, respectivamente, paralela e perpendicular à superfície de contacto entre os corpos.
- iv. A força de atrito (estático ou cinético) entre duas superfícies em contacto é uma propriedade do par de superfícies em contacto, e não apenas de uma delas. Assim sendo, os coeficientes de atrito entre, por exemplo, o aço e o alumínio não são os mesmos que entre o aço e o gelo. As tabelas de coeficientes de atrito mencionam sempre quais as duas superfícies a que os coeficientes correspondem (*vide* tabela 3.1).

Tabela 3.1. Exemplos de coeficientes de atrito estático e cinético entre duas superfícies (valores típicos).

Materiais em contacto	μ_s	μ_k
Madeira sobre madeira	0.4	0.2
Aço sobre alumínio	0.6	0.5
Aço sobre aço	0.7	0.6
Aço sobre gelo	0.03	0.01
Borracha sobre cimento	1.0	0.8
Articulações sinoviais em humanos	0.01	0.003

- v. Os coeficientes de atrito dependem não apenas da composição das superfícies em contacto, mas também do seu estado de rugosidade; um par de superfícies muito rugosas tem, como seria de esperar, coeficientes de atrito elevados. Paradoxalmente, um par de superfícies muito lisas tem também coeficientes de atrito elevados, uma vez que a regularidade permite que se formem ligações químicas entre as duas superfícies.
- vi. A existência de uma substância lubrificante entre um par de superfícies em contacto diminui o valor dos coeficientes de atrito.
- vii. Estamos a supor que o atrito entre duas superfícies sólidas em movimento não depende da sua velocidade relativa, o que é uma aproximação válida apenas para velocidades relativas baixas.

3.2.5.2. Atrito em fluidos

A força de atrito sobre um corpo sólido imerso num fluido, F_f^a , depende da velocidade v com que o corpo se desloca no seio do fluido, verificando-se, em boa aproximação, que

$$F_f^a = Av + Bv^2, \quad (3.24)$$

onde A e B são constantes. Para baixos valores de velocidade, a força de atrito no fluido pode ser calculada pela expressão simplificada

$$F_f^a = Av, \quad (3.25)$$

relação esta conhecida por *lei de Stokes*. O coeficiente A depende da forma do corpo sólido e das propriedades do fluido. No caso de uma esfera de raio R , tem-se $A = 6\pi\eta R$, onde η é a *viscosidade* do fluido, medida no SI em N s m^{-2} ou em Pa s (pascal segundo). Na tabela 3.2 apresentam-se os valores da viscosidade de alguns fluidos à temperatura de 20°C .

Tabela 3.2. Viscosidade de alguns fluidos à temperatura de 20 °C.

Líquidos	h (Pa s)	Gases	h (Pa s)
Água	1.005×10^{-3}	Ar	1.81×10^{-5}
Álcool etílico	0.367×10^{-3}	Hidrogénio	0.89×10^{-5}
Azeite	7.20×10^{-2}	Amónia	0.97×10^{-5}
Glicerina	8.33×10^{-1}	Dióxido de carbono	1.46×10^{-5}

Pensemos agora na queda livre de um corpo mergulhado num fluido. Tendo em consideração que qualquer corpo mergulhado num fluido sofre uma força de impulsão vertical, F_f , de baixo para cima, de intensidade igual ao peso do volume do fluido deslocado (*princípio de Arquimedes*) e que, à medida que a sua velocidade vai aumentando, a força de atrito F_f^a vai também aumentando, haverá um instante em que a velocidade atinge um valor v_l tal que F_f^a somado com F_f iguala a força gravítica. Esta velocidade é conhecida por *velocidade limite* ou *velocidade de sedimentação*. O seu valor é determinado a partir da igualdade

$$F_f^a + F_f = F_g, \quad (3.26)$$

donde, na aproximação das baixas velocidades,

$$v_l = \frac{F_g - F_f}{A} = \frac{(m - m_f)g}{A}, \quad (3.27)$$

onde m representa a massa do corpo em movimento e m_f a massa do fluido deslocado. No caso particular de o corpo ser uma esfera de raio R e massa volúmica ρ em movimento num fluido com massa volúmica ρ_f a velocidade limite é

$$\begin{aligned} v_l &= \frac{(\rho V - \rho_f V)g}{6\pi\eta R} = \frac{(\rho - \rho_f)Vg}{6\pi\eta R} = \\ &= \frac{(\rho - \rho_f)\frac{4}{3}\pi R^3 g}{6\pi\eta R} = \frac{2(\rho - \rho_f)R^2 g}{9\eta}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde V é o volume do corpo e que, obviamente, coincide com o volume do fluido deslocado. Note-se que, a partir do instante em que é atingida a velocidade limite, a velocidade do corpo permanece constante e igual a v_l .

Exemplo 3.2

Uma esfera de chumbo com raio 1 mm é deixada cair livremente numa proveta com glicerina a 20 °C. Sabendo que a massa volúmica do chumbo é $\rho_{pb} = 11.34 \text{ g cm}^{-3}$, que a massa volúmica da glicerina é $\rho_{glic} = 1.26 \text{ g cm}^{-3}$ e que a sua viscosidade a 20 °C é $\eta_{glic} = 8.33 \times 10^{-1} \text{ Pa s}$, determinar a velocidade limite da esfera.

Resolução:

Por aplicação directa da expressão (3.28) obtém-se

$$v_l = \frac{2(\rho_{pb} - \rho_{glic})R^2 g}{9\eta_{glic}} = \frac{2 \times (11.34 \times 10^3 - 1.26 \times 10^3) (1 \times 10^{-3})^2 \times 9.8}{9 \times 8.33 \times 10^{-1}} \approx 0.026 \text{ ms}^{-1}.$$

Podemos agora interrogar-nos como varia a velocidade do corpo desde que é largado livremente ($v_0 = 0$) no seio de um determinado fluido até atingir a velocidade limite. Sem perda de generalidade, vamos admitir que o corpo é largado em queda livre no instante $t_0 = 0$. O corpo vai adquirir uma aceleração dada pela segunda lei de Newton, ou seja

$$ma = F_g - F_l - F_f^a \Leftrightarrow m \frac{dv}{dt} = (m - m_f)g - Av. \quad (3.29)$$

Fazendo $F = (m - m_f)g$, podemos escrever (3.29) na forma

$$\frac{dv}{dt} + \frac{A}{m}v = \frac{F}{m}, \quad (3.30)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem não homogénea. Esta equação tem solução (sugestão: verifique)

$$v(t) = \frac{F}{A} \left(1 - e^{-\frac{A}{m}t} \right), \quad (3.31)$$

ou, substituindo F por $(m - m_f)g$,

$$v(t) = \frac{(m - m_f)g}{A} \left(1 - e^{-\frac{A}{m}t} \right) = v_l \left(1 - e^{-\frac{A}{m}t} \right) = v_l \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (3.32)$$

com $\tau = m/A$ a *constante de tempo* característica do sistema³¹. Vemos assim que a velocidade de um corpo em queda livre num fluido é uma função crescente (*vide* figura 3.9), tendendo assintoticamente para a velocidade limite dada pela expressão (3.27) quando $t \rightarrow \infty$. Decorrido um período de tempo igual a uma constante de tempo ($t = \tau$) a velocidade do corpo atinge 63.2 % de v_l . Decorrido um intervalo de tempo igual a 5 constantes de tempo ($t = 5\tau$) a velocidade vale 99.3 % de v_l , admitindo-se por isso, na prática, que o regime estacionário se encontra atingido.

³¹ Sugere-se como exercício que o leitor verifique, através da análise dimensional da expressão m/A , que efectivamente τ tem dimensão de tempo.

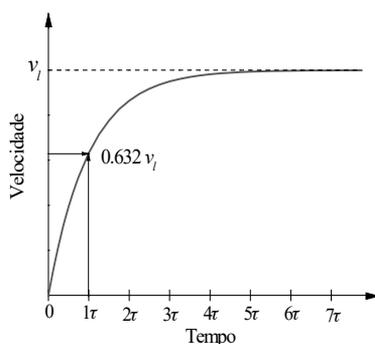


Figura 3.9. Variação da velocidade de um corpo deixado em queda livre num fluido. A velocidade tende assintoticamente para a velocidade limite definida pela expressão (3.27).

3.3. Técnicas para aplicação das leis de Newton

As técnicas para resolução de problemas utilizando as leis de Newton podem ser sistematizadas como se segue:

1. Definir qual é o sistema sob estudo – a parte do universo que nos interessa.
2. Desenhar um esboço do sistema. Não é necessário grande talento artístico, mas as dimensões relativas das diferentes partes do sistema e quaisquer ângulos devem estar correctos. Linhas rectas e circunferências devem ser representadas o mais rigorosamente possível.
3. Representar todas as forças que actuam sobre o sistema.
4. Com base nas forças que actuam sobre o sistema, escolher um sistema de eixos cartesianos ortogonais. A orientação dos eixos deve ser tal que haja tantas forças quanto possível dirigidas segundo um ou mais dos eixos.
5. Desenhar o *diagrama do corpo livre* (DCL), que consiste na representação de todas as forças no sistema de eixos escolhido.
6. Com base no DCL, escrever as forças em função das suas componentes segundo os eixos escolhidos.
7. Aplicar as leis de Newton.

Como exemplo desta metodologia, consideremos um caso clássico em Mecânica: o estudo de um corpo que desce um plano inclinado³², deslizando sem rolar e sem atrito (*vide* figura 3.10). Começemos por definir o nosso sistema: será o corpo, e não o conjunto “corpo + plano”, pelo que não representaremos as forças que o corpo exerce sobre o plano. Em seguida, esquematizemos o sistema; repare-se que, embora, estritamente falando, o plano inclinado não faça parte do nosso sistema, temos de o desenhar também,

³² O estudo do plano inclinado, empreendido originalmente por Galileu Galilei (1564-1642), desempenhou um papel importantíssimo na história da Mecânica.

uma vez que constitui o ambiente onde o corpo se move. Depois, a representação das forças. Na ausência de atrito, as forças que actuam sobre o corpo são apenas a força gravítica e a reacção normal do plano. Há agora que escolher um sistema de eixos apropriado. Como o corpo se desloca sobre o plano, as suas velocidade e aceleração vão ser paralelas ao plano. Por outro lado, a reacção normal é perpendicular ao plano. Faz, portanto, sentido escolher um referencial com o eixo dos xx paralelo ao plano e apontando para baixo, e o eixo dos yy perpendicular ao plano (figura 3.10a). Constrói-se em seguida o respectivo diagrama do corpo livre (figura 3.10b).

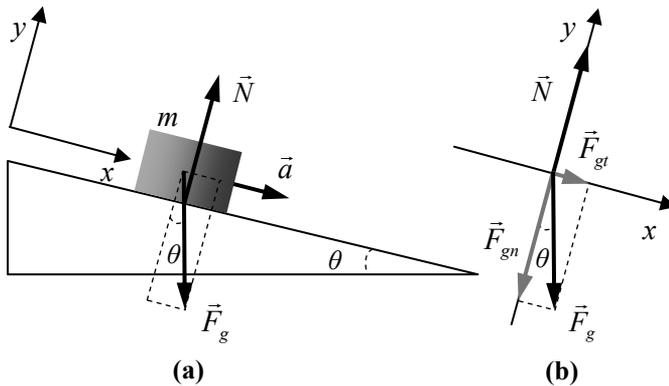


Figura 3.10. Representação de um corpo deslizando sobre um plano inclinado sob acção exclusiva do seu peso. a) Esquema do sistema e representação das forças que actuam sobre o corpo. O sistema de eixos mais adequado para tratar este problema é o sistema composto por um eixo paralelo ao plano inclinado (eixo dos xx) e um outro perpendicular ao plano (eixo dos yy). b) Diagrama do corpo livre construído com base no esquema apresentado em a).

Com base na escolha de eixos efectuada e no diagrama do corpo livre construído, o peso do corpo pode ser decomposto nas componentes normal ao plano, F_{gn} , e tangencial ao plano, F_{gt} . Podemos então escrever

$$\vec{F}_g = F_{gt} \vec{i} - F_{gn} \vec{j}, \quad (3.33)$$

com

$$\begin{cases} F_{gt} = mg \sin \theta \\ F_{gn} = mg \cos \theta \end{cases} \quad (3.34)$$

Por outro lado, a reacção normal é dada por

$$\vec{N} = N \vec{j}. \quad (3.35)$$

Como o movimento do corpo é sobre o plano, qualquer aceleração que adquira será paralela ao plano, isto é

$$\vec{a} = a \vec{i}. \quad (3.36)$$

Aplicando agora a segunda lei de Newton (a resultante das forças actuando sobre o corpo não é nula), obtém-se

$$\vec{F}_R = \vec{F}_g + \vec{N} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} mg \sin\theta = ma \\ N - mg \cos\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = g \sin\theta \\ N = mg \cos\theta = F_{gn} \end{cases} \quad (3.37)$$

Concluimos então que, para um corpo que desce, escorregando sem rolar, um plano inclinado por acção exclusiva do seu peso:

- i. A aceleração adquirida pelo corpo é menor do que a do mesmo corpo em queda livre, por um factor de $\sin\theta$ ($a = g \sin\theta$ versus $a = g$, respectivamente);
- ii. A intensidade da força de reacção normal é igual à norma da componente normal do peso do corpo.

Na secção seguinte apresentam-se mais alguns exemplos.

3.4. Forças no movimento circular

Consideremos uma partícula de massa m , animada de velocidade v e descrevendo um movimento circular com trajectória de raio R . Como vimos anteriormente, pelo facto de a partícula descrever um movimento circular – mesmo que uniforme – tem aceleração não nula. No caso particular de o movimento circular ser uniforme, o vector velocidade da partícula varia apenas em direcção e sentido (não em norma) e, portanto, a partícula tem apenas a aceleração centrípeta ou normal, dada por

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{u}_n, \quad (3.38)$$

onde \vec{u}_n é um vector unitário que aponta para o centro da trajectória circular de raio R , isto é, $\vec{u}_n = -\vec{u}_r$ (*vide* figura 3.11). Da segunda lei de Newton segue-se, então, que esta partícula é actuada por uma *força centrípeta* ou *normal*, \vec{F}_n , dada por

$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n = m \frac{v^2}{R} \vec{u}_n. \quad (3.39)$$

No caso mais geral de a partícula descrever um movimento circular não uniforme, como a norma da velocidade varia no tempo existe também uma componente tangencial da aceleração e, por isso, para além da força normal (3.39) existe também uma *força tangencial* à trajectória, \vec{F}_t , dada por

$$\vec{F}_t = m\vec{a}_t, \quad (3.40)$$

de tal modo que a força total, \vec{F}_R , que é exercida sobre a partícula em movimento é a soma das forças centrípeta (3.39) e tangencial (3.40), isto é,

$$\vec{F}_R = \vec{F}_n + \vec{F}_t, \quad (3.41)$$

a qual não aponta para o centro da trajectória circular, mas aponta sempre para o interior da trajectória (*vide* figura 3.11).

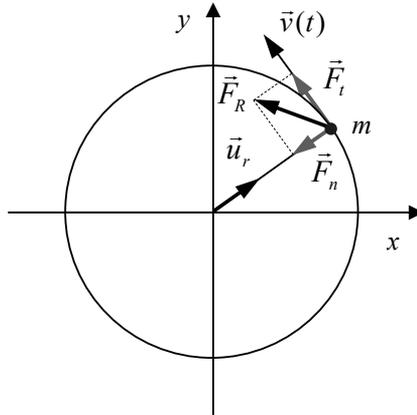


Figura 3.11. Forças que actuam sobre um corpo de massa m animado de movimento circular.

Dão-se a seguir alguns exemplos da dinâmica de movimentos circulares.

3.4.1. Pêndulo cónico

O pêndulo cónico consiste num corpo de massa m suspenso de um fio de comprimento l , de tal modo que o corpo descreve uma trajectória circular de raio R , com velocidade constante v , num plano horizontal (*vide* figura 3.12). Se for θ o ângulo de abertura do pêndulo (*vide* figura 3.12a), tem-se obviamente $R = l \sin\theta$. As forças que actuam sobre o corpo são a força gravítica, \vec{F}_g , e a tensão do fio, \vec{T} , dadas por (*vide* figura 3.12b)

$$\begin{cases} \vec{F}_g = -m g \vec{j} \\ \vec{T} = T \sin\theta \vec{i} + T \cos\theta \vec{j} \end{cases} . \quad (3.42)$$

Uma vez que o corpo descreve um movimento circular uniforme, a força resultante que sobre ele actua é dada pela equação (3.39). Com uma escolha apropriada do sistema de eixos $\vec{u}_n = \vec{i}$ (*vide* figura 3.12b), teremos

$$\vec{F}_R = \vec{F}_g + \vec{T} = m \frac{v^2}{R} \vec{i} , \quad (3.43)$$

donde resulta

$$\begin{cases} T \sin\theta = m \frac{v^2}{R} \\ T \cos\theta = mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\theta = \frac{v^2}{gR} \\ T = \frac{mg}{\cos\theta} \end{cases} , \quad (3.44)$$

obtendo-se para a expressão da velocidade do pêndulo

$$v = \sqrt{gR \tan\theta} , \quad (3.45)$$

relação esta que mostra que a velocidade do pêndulo não depende da massa do corpo. Por outro lado a tensão é dada por

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} , \quad (3.46)$$

expressão que mostra que a tensão no pêndulo cónico depende apenas do peso do corpo e do ângulo de abertura do pêndulo. (*Sugestão*: pense no que acontece quando θ tende para $\pi/2$).

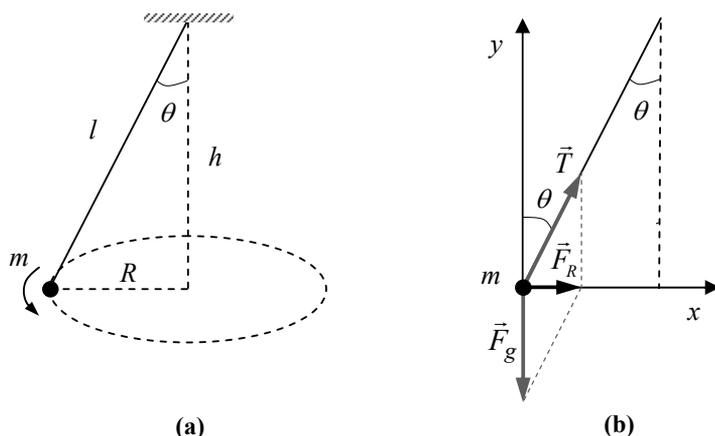


Figura 3.12. a) Esquema de um pêndulo cónico. b) Diagrama do corpo livre do pêndulo cónico construído com base no esquema apresentado em a).

3.4.2.* Automóvel que descreve uma curva, sem atrito ou com atrito

Admitamos que um automóvel descreve uma curva com *relevêe* e de raio R , com velocidade de valor constante, sem deslizar nem para cima (lado de fora da curva) nem para baixo da estrada (lado de dentro da curva), conforme se representa na figura 3.13a. Como a curva tem *relevêe*, o seu corte transversal é um plano inclinado (*vide* figura 3.13b). Como o automóvel se move numa trajectória circular e não desce nem sobe o plano, a sua aceleração vai ser puramente centrípeta (recorde-se que o valor da velocidade é constante) e que esta está dirigida segundo a horizontal. Por esta razão, escolhemos um sistema de eixos tal que o eixo dos xx é horizontal e aponta para o lado de dentro da curva, e o eixo dos yy é vertical, apontando, como habitualmente, de baixo para cima.

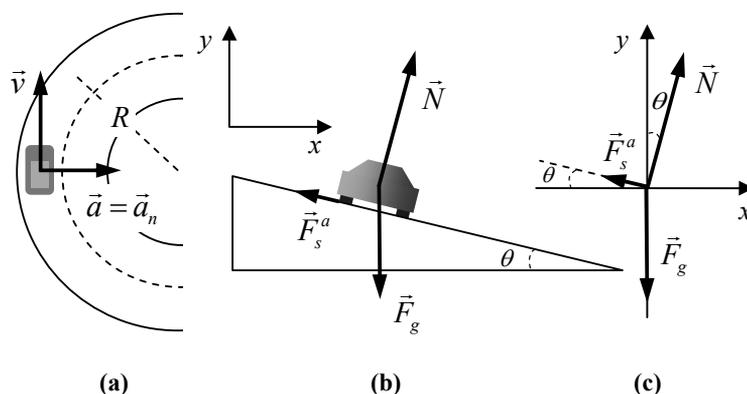


Figura 3.13. a) Automóvel descrevendo uma curva com *relevêe*. b) Corte transversal da curva com *relevêe*, forças que actuam sobre o automóvel e sistema de eixos mais adequado para estudar o sistema. c) Diagrama do corpo livre construído com base no esquema apresentado em b).

Consideremos primeiramente o caso em que não há atrito. Neste caso, as únicas forças que actuam sobre o automóvel são a força gravítica, \vec{F}_g , e a reacção normal do plano, \vec{N} . De acordo com a escolha de eixos efectuada e o respectivo diagrama do corpo livre (*vide* figura 3.13c) aquelas forças escrevem-se

$$\begin{cases} \vec{F}_g = -mg\vec{j} \\ \vec{N} = N\sin\theta\vec{i} + N\cos\theta\vec{j} \end{cases}. \quad (3.47)$$

Uma vez que o automóvel descreve movimento circular uniforme, a força que sobre ele actua é dada pela equação (3.39). Com a escolha do sistema de eixos efectuada temos $\vec{u}_n = \vec{i}$ e, portanto

$$\vec{F}_R = \vec{F}_g + \vec{N} = m\frac{v^2}{R}\vec{i} \Rightarrow \begin{cases} N\sin\theta = m\frac{v^2}{R} \\ N\cos\theta = mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\theta = \frac{v^2}{gR} \\ N = \frac{mg}{\cos\theta} \end{cases}, \quad (3.48)$$

Isto é,

$$\begin{cases} v^2 = gR\tan\theta \\ N = \frac{mg}{\cos\theta} \end{cases}, \quad (3.49)$$

resultado este que, note-se, é formalmente muito semelhante ao do pêndulo cónico – para passar de um para o outro sistema basta substituir T por N .

Concluimos, assim, que o automóvel só pode efectuar a curva de raio R se a sua velocidade v for a dada pela primeira das equações (3.49): caso contrário, o automóvel cairá para dentro da curva, ou sairá para fora dela. A experiência de todos os dias diz-nos, porém, que isto não corresponde à verdade; os automóveis conseguem descrever uma dada curva a diferentes velocidades, desde que nem muito baixas, nem muito elevadas. Isto significa que existe um intervalo de velocidades admissíveis para descrever cada curva. Por que razão obtivemos nós um resultado irrealista? A resposta é simples: porque não considerámos o atrito. Façamo-lo em seguida. A força de atrito, devido à interacção entre a superfície dos pneus e o asfalto da estrada, vai ser exercida sobre o automóvel, paralelamente à estrada. À partida não sabemos se o seu sentido aponta plano acima ou plano abaixo: se o automóvel for com velocidade a menos, tenderá a descer o plano e, neste caso, a força de atrito apontará para cima, para contrariar este movimento. É o caso representado nas figuras 3.13b e 3.13c. Por outro lado, se o automóvel tiver excesso de velocidade, tenderá a subir o plano, caso em que a força de atrito apontará para baixo, para igualmente contrariar o movimento de saída da estrada do automóvel. A força de atrito estático máxima é então escrita na sua forma mais geral como

$$\vec{F}_s^a = \mp\mu_s N\cos\theta\vec{i} \pm \mu_s N\sin\theta\vec{j} \quad (3.50)$$

onde a combinação de sinais $(-,+)$ corresponde a uma força de atrito que aponta plano acima (vide figura 3.13c) e a combinação $(+,-)$ a uma força de atrito que aponta plano abaixo (não representado na figura 3.13). Repare-se que estamos a utilizar a força de atrito estático, porque queremos que o automóvel não tenha movimento nem de subida, nem de descida do plano, e queremos determinar as velocidades mínima e máxima para as quais isso acontece.

A resultante das forças que actuam sobre o automóvel tem agora de incluir a força de atrito (3.50), donde se segue que

$$\vec{F}_R = \vec{F}_g + \vec{N} + \vec{F}_s^a = m \frac{v^2}{R} \vec{i} \Rightarrow \begin{cases} N \sin \theta \mp \mu_s N \cos \theta = m \frac{v^2}{R} \\ N \cos \theta \pm \mu_s N \sin \theta = mg \end{cases}, \quad (3.51)$$

isto é,

$$\begin{cases} v^2 = g R \frac{\sin \theta \mp \mu_s \cos \theta}{\cos \theta \pm \mu_s \sin \theta} \\ N = \frac{mg}{\cos \theta \pm \mu_s \sin \theta} \end{cases}, \quad (3.52)$$

resultado este que se reduz às equações (3.49) no caso de não haver atrito ($\mu_s = 0$). Repare-se que agora a curva pode ser descrita a qualquer velocidade $v \in [v_{min}, v_{max}]$, onde

$$v_{min} = \sqrt{g R \frac{\sin \theta - \mu_s \cos \theta}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}} \quad (3.53)$$

e

$$v_{max} = \sqrt{g R \frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta}}. \quad (3.54)$$

3.4.3. Pêndulo simples

Um pêndulo simples consiste num corpo de massa m suspenso da extremidade de um fio de comprimento l e massa desprezável. O corpo suspenso move-se num plano vertical, descrevendo uma trajectória que é um arco de circunferência de raio $R = l$ com oscilações de amplitude θ_0 , variando o ângulo θ no tempo entre os valores θ_0 e $-\theta_0$ (vide figura 3.14a). Note-se, porém, que o movimento é circular, mas não é uniforme. De facto, nos dois pontos de afastamento máximo da posição vertical o corpo detém-se para inverter o sentido do movimento e, por isso, a sua velocidade anula-se e muda de sinal; por outro lado, no ponto mais baixo da trajectória (quando o corpo passa pela vertical) a sua velocidade é máxima.

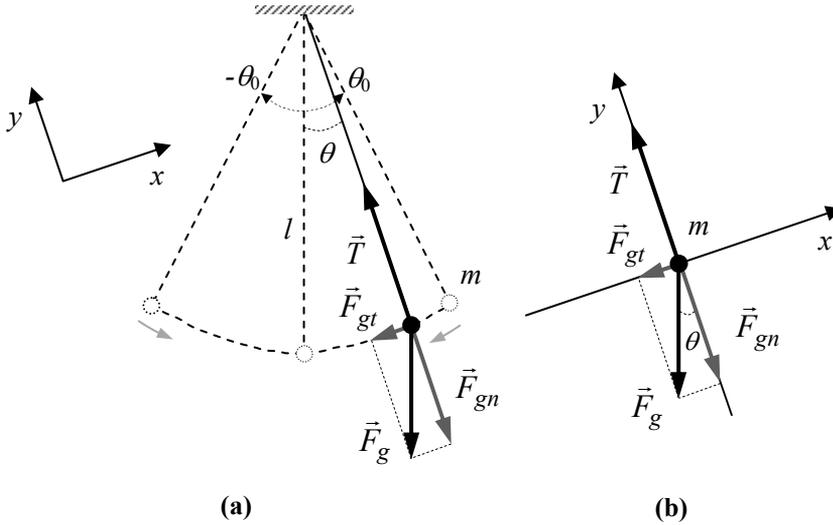


Figura 3.14. a) Esquema de um pêndulo simples, forças que nele actuam e sistema de eixos mais adequado para estudar o sistema. b) Diagrama do corpo livre construído com base no esquema apresentado em a).

O corpo de massa m é actuado apenas pela força gravítica, \vec{F}_g , e pela tensão do fio, \vec{T} . A componente tangencial da força gravítica, \vec{F}_{gt} , é a responsável pela variação da magnitude da velocidade. Escolhendo um sistema de eixos em que o eixo dos xx é tangente à trajectória e o eixo dos yy é radial e aponta para o centro da trajectória circular (*vide* figura 3.14), podemos decompor \vec{F}_g e \vec{T} nas seguintes componentes:

$$\begin{cases} \vec{F}_g = -F_{gt} \vec{i} - F_{gn} \vec{j} = -mg \sin\theta \vec{i} - mg \cos\theta \vec{j} \\ \vec{T} = T \vec{j} \end{cases} \quad (3.55)$$

Como se trata de um movimento circular não uniforme, a aceleração tem componentes tangencial e normal ou centrípeta. Com a escolha do sistema de eixos efectuada teremos $\vec{u}_t = \vec{i}$ e $\vec{u}_n = \vec{j}$, donde

$$\vec{a} = a_t \vec{i} + a_n \vec{j} = a_t \vec{i} + \frac{v^2}{l} \vec{j} \quad (3.56)$$

Aplicando agora a segunda lei de Newton e as equações (3.55) e (3.56), vem

$$\begin{aligned} \vec{F}_R = \vec{F}_g + \vec{T} = m\vec{a} &\Rightarrow \begin{cases} F_{gt} = -ma_t \\ T - F_{gn} = ma_n \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} mg \sin\theta = -ma_t \\ T - mg \cos\theta = ma_n = m\frac{v^2}{l} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.57)$$

isto é,

$$\begin{cases} a_t = -g \sin\theta \\ T = mg \cos\theta + m \frac{v^2}{l} = F_{gn} + F_n \end{cases} \quad (3.58)$$

Podemos então concluir que a aceleração tangencial do pêndulo simples é nula quando o corpo suspenso passa pela vertical ($\theta = 0$) e tem valor máximo nas posições de maior amplitude angular ($\theta = \pm\theta_0$). Note-se que a tensão tem duas parcelas: uma de magnitude igual à componente normal da força gravítica, $F_{gn} = mg \cos\theta$, e outra igual à magnitude da força normal ou centrípeta, $F_n = m v^2/l$.

Procuremos agora encontrar a equação diferencial que rege o movimento do pêndulo simples. Como se trata de um movimento circular de raio $R = l$, a aceleração tangencial relaciona-se com o ângulo θ pela primeira das relações (2.84), isto é,

$$a_t = l \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (3.59)$$

Substituindo a expressão (3.59) na primeira das equações (3.58) obtemos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\theta, \quad (3.60)$$

que é a equação diferencial que rege o movimento do pêndulo simples. Tendo em conta o desenvolvimento em série de Taylor da função seno,

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots, \quad (3.61)$$

e considerando apenas oscilações pendulares de pequena amplitude ($\theta_0 \ll 1$ rad), podemos tomar a aproximação

$$\sin\theta \approx \theta, \quad (3.62)$$

o que permite escrever a equação diferencial (3.60) na forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta. \quad (3.63)$$

Esta última equação é facilmente reconhecida. É em tudo idêntica à equação do movimento harmónico simples, equação (2.114), fazendo as substituições $x \rightarrow \theta$ e $\omega^2 \rightarrow g/l$. Temos então que concluir que, para pequenas oscilações, o pêndulo simples descreve um m.h.s.. A solução da equação diferencial (3.63) é, portanto,

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t \pm \varphi_0), \quad (3.64)$$

com ω a frequência angular do movimento e φ_0 a fase inicial (determina a posição da massa em $t = 0$). A comparação da equação (2.114) com a equação (3.63) permite de-

duzir que, na aproximação das pequenas oscilações, a frequência angular do pêndulo simples é

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (3.65)$$

Daqui resulta que a frequência do movimento é dada por

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (3.66)$$

e o seu período por

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3.67)$$

Repare-se que a equação (3.67) mostra que o período do pêndulo simples é independente da massa do corpo suspenso no fio; depende apenas do comprimento do fio e da aceleração gravítica. Daqui resulta que um pêndulo simples possa ser usado para determinar o valor da aceleração gravítica através da medição precisa do seu período de oscilação. Por outro lado, no quadro da aproximação das oscilações de pequena amplitude angular, o período é independente do valor de θ_0 o que explica porque funcionam tão bem os relógios de pêndulo.

Pretendemos em seguida determinar as expressões da velocidade e da aceleração do corpo de massa m no movimento pendular. Recordando agora a equação (2.71), a posição s do corpo de massa m ao longo do arco de circunferência que constitui a trajectória do pêndulo é

$$s(t) = l\theta(t). \quad (3.68)$$

Deste modo, para obter a velocidade e a aceleração tangencial do pêndulo ao longo da trajectória basta calcular a primeira e a segunda derivadas de $s(t)$ em ordem ao tempo, respectivamente. Temos, portanto, para a velocidade do pêndulo a expressão

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = l \frac{d}{dt}\theta(t) \quad (3.69)$$

e para a aceleração tangencial a expressão

$$a_t(t) = \frac{d}{dt}v(t) = l \frac{d^2}{dt^2}\theta(t). \quad (3.70)$$

Na aproximação das pequenas oscilações a posição angular do pêndulo simples é dada por (3.64) pelo que, nesta aproximação, e tendo em conta as expressões (3.69) e (3.70), a velocidade e aceleração tangencial do corpo de massa m são dadas por

$$\begin{cases} v(t) = l\omega\theta_0 \cos(\omega t \pm \varphi_0) \\ a_t(t) = -l\omega^2\theta_0 \sin(\omega t \pm \varphi_0) \end{cases} \quad (3.71)$$

o que mostra que $v(t)$ e $a_t(t)$ são funções harmónicas simples, com valores máximos $\pm l\omega\theta_0$ e $\pm l\omega^2\theta_0$, respectivamente. Com base nas expressões (3.71) podemos também facilmente mostrar que nas posições de maior amplitude ($\theta = \pm\theta_0$) a velocidade do pêndulo é nula e a sua aceleração tangencial é máxima. Por outro lado, na posição vertical ($\theta = 0$) a velocidade é máxima e a aceleração tangencial é nula. Para o fazermos vamos admitir, apenas por simplicidade e sem qualquer perda de generalidade, que o pêndulo se encontrava na posição $\theta = \theta_0$ em $t = 0$. Isto implica que $\varphi_0 = +\pi/2$. Em $t = 0$, temos neste caso

$$\begin{cases} v(t=0) = l\omega\theta_0 \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ a_t(t=0) = -l\omega^2\theta_0 \sin\frac{\pi}{2} = -l\omega^2\theta_0 \end{cases}, \quad (3.72)$$

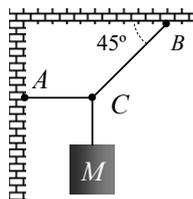
o que mostra que em $\theta = \theta_0$ a velocidade é nula e que a aceleração tangencial é máxima (a componente tangencial da força gravítica é máxima). A primeira vez em que o pêndulo atinge a posição vertical é no instante $t = T/4$, o que, tendo em conta as expressões (3.65) e (3.67), permite deduzir

$$\begin{cases} v\left(t = \frac{T}{4}\right) = l\omega\theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{\pi}{2}\right) = l\omega\theta_0 \cos\pi = -l\omega\theta_0 \\ a_t\left(t = \frac{T}{4}\right) = -l\omega^2\theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{\pi}{2}\right) = -l\omega^2\theta_0 \sin\pi = 0 \end{cases}, \quad (3.73)$$

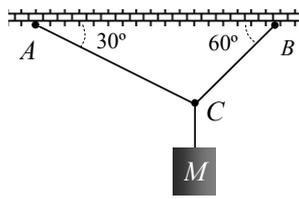
resultado que mostra que, na posição vertical, a velocidade do pêndulo é máxima e a sua aceleração tangencial é nula (a componente tangencial da força gravítica é nula). Note-se que os sinais da aceleração tangencial e da velocidade nas expressões (3.72) e (3.73) estão de acordo com o sistema de eixos escolhido. O leitor é convidado a efectuar os mesmos cálculos para $t = T/2$ e $t = 3T/4$.

PROBLEMAS

- 3.1. Uma partícula material de massa 2 g move-se ao longo de uma curva definida pelo vector posição $\vec{r}(t) = (4t^2 - t^3)\vec{i} + 5t\vec{j} + (t^4 - 2)\vec{k}$ cm. Calcule a força que actua a partícula no instante $t = 2$ s.
- 3.2. Uma partícula material de massa 1 kg move-se sob a acção de uma força definida pela expressão $\vec{F}(t) = 4\cos 3t\vec{i} + 12e^{3t}\vec{j} - 6\sin 3t\vec{k}$ (SI). Sabe-se que no instante $t = 0$ a partícula se encontra no ponto (1, 3, -2) (SI) e tem a velocidade $\vec{v}_0 = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ (SI). Estabeleça as expressões dos vectores velocidade e posição da partícula em função do tempo.
- 3.3. Uma partícula material de massa 2 kg encontra-se sob a acção da força $\vec{F}(t) = (8 - 6t)\vec{i} + (4 - t^2)\vec{j} + (4 + t)\vec{k}$ (SI). Sabendo que no instante $t = 0$ a velocidade da partícula é $\vec{v} = 150\vec{i} + 100\vec{j} - 250\vec{k}$ (SI), determine:
- O instante em que a velocidade da partícula é paralela ao plano Oyz .
 - O valor da velocidade da partícula nesse instante.
- 3.4. Uma partícula material de massa m move-se ao longo do eixo dos xx segundo a lei $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, com A , ω e φ_0 constantes. Determine a expressão da força que actua sobre a partícula em função da sua posição.
- 3.5. Uma partícula de massa m move-se no plano Oxy , sendo a sua posição dada pelo vector $\vec{r}(t) = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$, com a , b e ω constantes.
- Mostre que a trajectória da partícula é uma elipse.
 - Mostre que a força que actua sobre a partícula é sempre dirigida para a origem.
- 3.6. Um corpo de massa 0.15 kg cai de uma altura de 3 m sobre uma superfície plana e horizontal de areia. Sabendo que o corpo se afunda 3 cm antes de parar, determine o valor da força, suposta constante, que a areia exerce sobre o corpo.
- 3.7. Uma partícula de massa 1.5 kg é actuada pela força $\vec{F} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$ N. Sabendo que no instante inicial a partícula se encontrava na origem de um determinado referencial com velocidade $2\vec{i}$ m s⁻¹, determine:
- A lei do movimento da partícula.
 - A equação cartesiana da trajectória descrita pela partícula.
- 3.8. Para cada um dos esquemas representados na figura que se segue, determine o valor das tensões nas cordas AC e BC se o corpo M tiver um peso de valor 50 N.

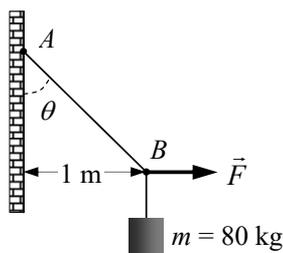


(a)

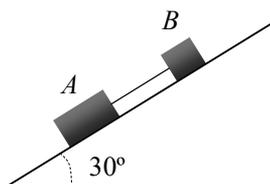


(b)

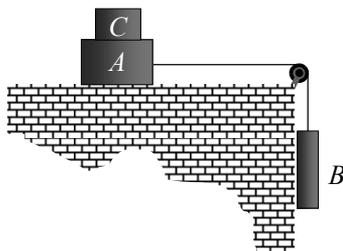
- 3.9. De acordo com o esquema representado em baixo, um corpo com massa 80 kg está preso por um fio ao ponto A. No ponto B do fio aplica-se uma força horizontal \vec{F} , desviando-o 1 m da parede. Sabendo que $\overline{AB} = 2$ m, determine o ângulo θ , a intensidade da força \vec{F} e a tensão no fio.



- 3.10. Dois paralelepípedos, A e B, de massas $m_A = 0.50$ kg e $m_B = 0.25$ kg, respectivamente, estão ligados entre si por uma haste de massa desprezável, conforme se representa na figura em baixo. Sabendo que o plano tem uma inclinação de 30° e que os coeficientes de atrito cinético entre os paralelepípedos A e B e a superfície do plano são, respectivamente, 0.2 e 0.3, determine a aceleração do conjunto, bem como a tensão na haste.



- 3.11. No esquema da figura que se segue, os corpos A e B têm massas de 10 kg e 5 kg, respectivamente, estando ligados por um fio inextensível e de massa desprezável. O coeficiente de atrito (estático ou dinâmico, suponha que têm o mesmo valor) entre a superfície do corpo A e a superfície da mesa é 0.25.



- Determine o valor mínimo que a massa do corpo C tem de ter para que o conjunto dos corpos A, B e C se encontre em repouso.
 - Calcule a aceleração do sistema, bem como a tensão do fio, no caso de o corpo C ser retirado.
- 3.12. Uma partícula de massa m move-se ao longo do eixo dos xx sob a acção de uma força $F = -kx$ (SI). Sabe-se que quando $t = 2$ s a partícula passa pela origem, e que quando $t = 4$ s a sua velocidade tem valor 4 m s^{-1} .

- a) Classifique, justificando, o movimento da partícula.
 b) Mostre que a amplitude deste movimento é $32\sqrt{2}/\pi$ m se o período for de 16 s.
- 3.13. Uma mola de constante elástica $k = 20 \text{ N m}^{-1}$ em posição vertical tem um corpo de massa de 1 kg suspenso na sua ponta livre.
- a) Calcule o período de oscilação que teria o sistema corpo-mola se o mesmo fosse colocado a oscilar.
 b) Determine a posição de equilíbrio do sistema corpo-mola, se $y = 0$ corresponder à posição não distendida da mola.
 c) Admita que se põe o corpo em movimento, puxando-o 0.5 m para baixo da sua posição de equilíbrio e soltando-o em seguida. Estabeleça a equação do movimento do corpo.
- 3.14. Um oscilador harmónico simples consiste num corpo de massa 2.4 kg, repousando numa superfície horizontal sem atrito, ligada a um suporte fixo por uma mola horizontal de constante elástica $k = 180 \text{ N m}^{-1}$. O sistema é posto em oscilação de tal modo que no instante $t = 0.16$ s, o deslocamento é 0.15 m e a velocidade tem valor 0.8 m s^{-1} e sentido positivo. Determine:
- a) A frequência angular do movimento.
 b) O período do movimento.
 c) A equação do movimento.
- 3.15. Uma partícula de massa 2 g vibra com movimento harmónico simples, sendo a amplitude do movimento de 1 cm. A aceleração nos pontos extremos da trajectória tem o valor $4 \times 10^3 \text{ m s}^{-2}$.
- a) Calcule a frequência do movimento.
 b) Calcule o valor da velocidade da partícula quando passa na posição de equilíbrio.
 c) Calcule o valor da velocidade da partícula quando a sua posição é 0.6 cm.
 d) Estabeleça a equação que exprime a força que actua sobre a partícula como função da posição.
- 3.16. Uma esfera de grafite com 1 mm de raio é deixada cair livremente numa proveita com água a $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Sabendo que, a $20 \text{ }^\circ\text{C}$, a massa volúmica da grafite é $\rho_C = 2.254 \text{ g cm}^{-3}$, a massa volúmica da água é $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ g cm}^{-3}$ e a viscosidade da água é $\eta_{\text{H}_2\text{O}} = 1.005 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$, determine:
- a) O valor da velocidade limite da esfera.
 b) A distância percorrida pela esfera desde que é largada em queda livre até atingir a velocidade limite. *Nota:* admita que a velocidade limite da esfera é atingida decorrido um intervalo de tempo igual a 5 vezes a constante de tempo característica do sistema.
- 3.17. Um satélite é colocado em órbita a uma altitude h de 300 km acima da superfície terrestre. Admitindo que o satélite descreve um movimento circular uniforme no plano equatorial da Terra, determine o valor da velocidade do satélite. Note que

o satélite está muito afastado da superfície da Terra, pelo que a força gravítica que sobre ele actua deve ser calculada usando a expressão (3.6).

- 3.18. Num pêndulo cónico, uma esfera de massa m , presa à extremidade de um fio de comprimento l e massa desprezável, descreve uma trajectória circular num plano horizontal com velocidade angular ω . Calcule o valor da tensão na corda e o ângulo que ela faz com a vertical no caso em que $m = 12 \text{ kg}$, $l = 1.5 \text{ m}$ e $\omega = 3.0 \text{ rad s}^{-1}$.

CAPÍTULO 4

TRABALHO E ENERGIA

No capítulo anterior abordámos o estudo da dinâmica com base nas leis de Newton, tendo o conceito de força um papel central na análise que desenvolvemos: conhecida a resultante das forças que actuam o sistema em estudo, por aplicação da segunda lei de Newton calcula-se a expressão da aceleração do sistema e, em seguida, por integração, as leis do seu movimento.

Neste capítulo encetaremos o estudo da dinâmica tendo como base as grandezas trabalho e energia. As relações entre trabalho e energia e, em particular, o facto de a energia mecânica se conservar sob determinadas condições, permitem não só uma análise mais profunda da natureza dos sistemas físicos, como também um modo mais expedito de atacar a resolução de problemas concretos. Introduziremos estes conceitos com base nos sistemas físicos mais simples que podemos conceber: os sistemas compostos por uma única partícula material³³ ou que podem ser tratados como tal.

4.1. Trabalho e energia cinética

Os conceitos de energia e trabalho e, em particular, o da conservação de energia, possibilitam-nos resolver de modo simples um grande número de problemas de dinâmica; permitem que nos concentremos no facto de o valor de uma grandeza conservada ser o mesmo em qualquer instante, em particular no início e no fim do movimento, independentemente da complexidade desse movimento. No que se segue iremos estabelecer o conceito de *trabalho de uma força* bem como a relação entre o *trabalho da força resultante* que actua uma partícula material e a variação da *energia cinética* da partícula, grandeza esta relacionada com a sua velocidade. Esta última relação é válida qualquer que seja a natureza da força resultante, em particular é válida em situações em que a força é variável de ponto para ponto e para as quais, portanto, a aplicação directa da segunda lei de Newton pode ser difícil ou mesmo impossível.

³³ Recordamos que uma partícula material é um corpo dotado de massa, mas suficientemente pequeno para que as suas dimensões possam ser desprezadas.

4.1.1. Trabalho de uma força constante no espaço unidimensional

Começemos por considerar uma partícula material de massa m , sobre a qual actua uma força resultante constante, \vec{F}_R . Admitamos que a partícula só se pode mover ao longo do eixo dos xx e que \vec{F}_R tem a direcção desse mesmo eixo (caso unidimensional). Pela segunda lei de Newton, a partícula adquire uma aceleração dada por $\vec{a} = \vec{F}_R/m$. Uma vez que a aceleração é também constante e o problema é unidimensional, a partícula adquire necessariamente movimento rectilíneo uniformemente variado. Admitamos que, por acção da força F_R , a velocidade da partícula varia do valor inicial v_0 para o valor v , sofrendo um deslocamento Δx . Na medida em que se trata de um m.r.u.v., verifica-se que (*vide* equação (2.20))

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x = v_0^2 + 2\frac{F_R}{m}\Delta x. \quad (4.1)$$

Reagrupando os termos desta equação, obtemos

$$F_R\Delta x = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (4.2)$$

A grandeza no primeiro membro da equação (4.2) é o *trabalho realizado pela força* F_R ao deslocar o seu ponto de aplicação da distância Δx e representa-se por $W(F_R)$, isto é

$$W(F_R) = F_R\Delta x. \quad (4.3)$$

O trabalho é uma grandeza escalar cuja unidade SI é o joule (J): $1 \text{ J} = 1 \text{ N m}$. Note-se que a palavra trabalho tem aqui um significado diferente do que toma na linguagem corrente. Em Física, para que uma força realize trabalho tem forçosamente que deslocar o seu ponto de aplicação. Por mais que nos esforcemos por deslocar um enorme bloco de pedra, as forças que sobre ele exercemos não realizam qualquer trabalho se ele não se mover...

A grandeza

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad (4.4)$$

também representada, frequentemente, por E_c , denomina-se *energia cinética* da partícula. É energia que a partícula possui pelo facto de se encontrar em movimento. A unidade SI de energia cinética é, evidentemente, também o joule. Na tabela 4.1 encontram-se valores das ordens de grandeza da energia cinética de alguns sistemas físicos. As definições atrás introduzidas permitem-nos reescrever a equação (4.2) na forma

$$W(F_R) = K - K_0 = \Delta K, \quad (4.5)$$

expressão esta que traduz o chamado *teorema do trabalho-energia* ou *teorema da energia cinética*:

O trabalho realizado pela resultante das forças que actuam sobre uma partícula num dado intervalo de tempo é igual à variação da energia cinética da partícula durante o mesmo intervalo de tempo.

Note-se que o trabalho pode ser *positivo* ou *negativo*, consoante a energia cinética aumenta ou diminui, respectivamente. É positivo quando a força e o deslocamento têm o mesmo sentido e negativo quando têm sentidos opostos.

Tabela 4.1. Ordens de grandeza das energias cinéticas de alguns sistemas físicos.

Sistema físico	Energia cinética (J)
Electrão em movimento em torno de um núcleo	10^{-18}
Molécula de oxigénio à temperatura ambiente	10^{-17}
Electrão num tubo de raios catódicos	10^{-15}
Gota de chuva	10^{-3}
Atleta a correr	10^3
Automóvel numa via rápida	10^5
Terra em movimento em torno do Sol	10^{33}

4.1.2. Trabalho de uma força constante no espaço tridimensional

Generalizemos agora os resultados atrás obtidos ao caso do trabalho de uma força no espaço tridimensional. Continuemos a supor que a força resultante que actua a partícula é constante, mas que \vec{F}_R tem uma direcção diferente de \vec{v}_0 . Neste caso o movimento é um movimento uniformemente variado ($\vec{a} = \overline{const}$), mas não forçosamente rectilíneo. Teremos por isso que aplicar a equação (4.2) a cada uma das três dimensões do espaço. Tem-se, portanto:

$$\begin{cases} F_{Rx} \Delta x = \frac{1}{2} m v_x^2 - \frac{1}{2} m v_{x0}^2 \\ F_{Ry} \Delta y = \frac{1}{2} m v_y^2 - \frac{1}{2} m v_{y0}^2 \\ F_{Rz} \Delta z = \frac{1}{2} m v_z^2 - \frac{1}{2} m v_{z0}^2 \end{cases} \quad (4.6)$$

O trabalho realizado pela força resultante é agora simplesmente a soma das três parcelas:

$$\begin{aligned} W(\vec{F}_R) &= F_{Rx} \Delta x + F_{Ry} \Delta y + F_{Rz} \Delta z = \\ &= \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - \frac{1}{2} m (v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2), \end{aligned} \quad (4.7)$$

ou seja,

$$W(\vec{F}_R) = \vec{F}_R \cdot \Delta\vec{r} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 = K - K_0 = \Delta K, \quad (4.8)$$

de onde se segue que a forma geral do trabalho realizado por uma força constante quando o deslocamento do seu ponto de aplicação é $\vec{\Delta r}$ é dado pelo produto interno ou escalar da força pelo vector deslocamento:

$$W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\Delta r \cos\theta, \quad (4.9)$$

onde θ é o ângulo entre os vectores força e deslocamento ($\theta = \vec{F} \wedge \Delta\vec{r}$). Repare-se que a expressão (4.9) entra em linha de conta, através do factor $\cos\theta$, com a possibilidade de o deslocamento e a força não terem a mesma direcção. Sempre que $\cos\theta > 0$ o trabalho é positivo e diz-se *trabalho motor* (vide figura 4.1a); sempre que $\cos\theta < 0$ o trabalho é negativo e diz-se *trabalho resistivo* (vide figura 4.1b). Por outro lado, da equação (4.9) deduz-se imediatamente que uma força perpendicular ao deslocamento não realiza trabalho, na medida em que $\cos\theta = 0$ (vide figura 4.1c).

Note-se, ainda, que a expressão (4.9) – a definição de trabalho de uma força – é válida para o cálculo do trabalho realizado por qualquer força \vec{F} constante, e não apenas para a força resultante constante, \vec{F}_R , que actue a partícula. Por outro lado, se a partícula material for actuada por um conjunto de n forças, ter-se-á $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ e, portanto, o trabalho da força resultante igualará o somatório dos trabalhos realizados por cada força que actua a partícula, ou seja,

$$\begin{aligned} W(\vec{F}_R) &= \vec{F}_R \cdot \Delta\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \cdot \Delta\vec{r} = \\ &= (\vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}) + (\vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}) + \dots + (\vec{F}_n \cdot \Delta\vec{r}) = . \quad (4.10) \\ &= W(\vec{F}_1) + W(\vec{F}_2) + \dots + W(\vec{F}_n) \end{aligned}$$

Diz-se por isto que o trabalho é uma *grandeza aditiva* ou *extensiva*. Note-se, contudo, que apenas o trabalho realizado pela força resultante iguala a variação da energia cinética da partícula, conforme expresso pela relação (4.8).

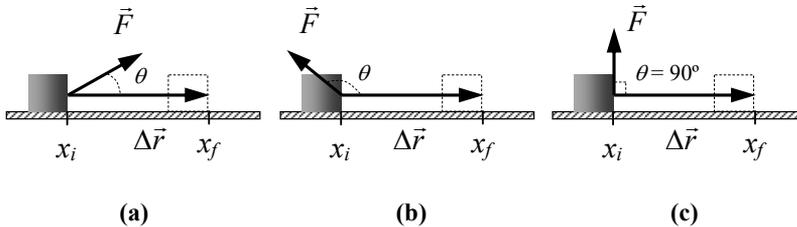


Figura 4.1. Trabalho realizado pela força \vec{F} . Dependendo do ângulo entre a força e o deslocamento podemos ter: a) um trabalho motor ($W > 0$); b) um trabalho resistivo ($W < 0$); c) um trabalho nulo.

Exemplo 4.1

De acordo com o esquema a seguir representado, um bloco de massa 5 kg é deslocado horizontalmente, da esquerda para a direita, ao longo de uma distância de 6 m, por acção de uma força de valor $F = 40$ N, cuja direcção forma um ângulo de 60° com a horizontal. Sabendo que o bloco partiu do repouso e que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é $\mu_k = 0.1$, determinar: a) o trabalho da força \vec{F} , o trabalho da força de atrito, o trabalho do peso do bloco e o trabalho da reacção normal ao plano; b) o trabalho da força resultante; c) a velocidade do bloco após ter percorrido a distância de 6 metros.

Resolução:

- a) Teremos para o trabalho da força \vec{F} , e para o trabalho da força de atrito, respectivamente,

$$W(\vec{F}) = F \Delta r \cos(\vec{F} \wedge \Delta \vec{r}) = 40 \times 6 \times \cos 60^\circ = 120 \text{ J};$$

$$\begin{aligned} W(\vec{F}_k^a) &= F_k^a \Delta r \cos(\vec{F}_k^a \wedge \Delta \vec{r}) = (\mu_k N) \Delta r \cos(\vec{F}_k^a \wedge \Delta \vec{r}) = \\ &= \mu_k (mg - F \sin 60) \Delta r \cos(\vec{F}_k^a \wedge \Delta \vec{r}) = \\ &= 1.43 \times 6 \times \cos 180^\circ = -8.58 \text{ J}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como quer o peso do bloco quer a força de reacção normal da superfície sobre o bloco são forças perpendiculares ao deslocamento, teremos

$$W(\vec{F}_g) = W(\vec{N}) = 0.$$

- b) O trabalho da força resultante é a soma dos trabalhos de todas as forças aplicadas no bloco. Logo

$$\begin{aligned} W(\vec{F}_R) &= W(\vec{F}) + W(\vec{F}_k^a) + W(\vec{F}_g) + W(\vec{N}) = \\ &= 120 - 8.58 + 0 + 0 = 111.42 \text{ J}. \end{aligned}$$

Note-se que este resultado poderia ter sido obtido, calculando primeiro a expressão vectorial da força resultante, dada por $\vec{F}_R = \vec{F} + \vec{F}_k^a + \vec{F}_g + \vec{N}$, e, em seguida, calculando o produto interno entre a força resultante e o vector deslocamento ($\Delta \vec{r} = 6\vec{i}$), de acordo com a equação (2.24).³⁴

- c) Pelo teorema do trabalho-energia sabemos que o trabalho da força resultantes é $W(\vec{F}_R) = \Delta K = mv_f^2/2 - mv_i^2/2$. Como o bloco estava inicialmente em repouso ($v_i = 0$), após ter percorrido os 6 metros a sua velocidade é

$$v_f = \sqrt{\frac{2W(\vec{F}_R)}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 111.42}{5}} = 6.68 \text{ m s}^{-1}.$$

³⁴ Sugere-se vivamente que o leitor efectue estes cálculos.

4.1.3. Trabalho de uma força variável

Consideremos, finalmente, o cálculo do trabalho de uma força que varia de ponto para ponto, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$. Suponhamos que uma partícula de massa m , ao ser actuada por uma força variável, sofre um deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$, durante o qual a força é aproximadamente constante. O trabalho elementar (ou infinitesimal) realizado pela força neste deslocamento é dado pela equação (4.9):

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (4.11)$$

ou seja, $dW = F dr \cos(\vec{F} \wedge d\vec{r}) = F dr \cos\theta$ (vide figura 4.2).

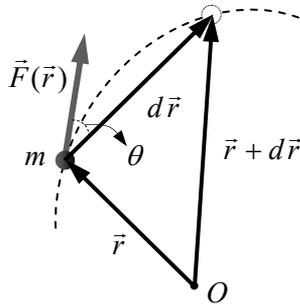


Figura 4.2. Deslocamento infinitesimal da partícula de massa m por acção da força $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$.

Para calcularmos o trabalho realizado por \vec{F} variável num deslocamento finito entre um ponto A e um ponto B, ao longo de uma curva C (trajectória), teremos de calcular o *integral de linha* (ou *integral de caminho*) de \vec{F} ao longo da curva C, entre os pontos A e B (vide figura 4.3a), isto é,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4.12)$$

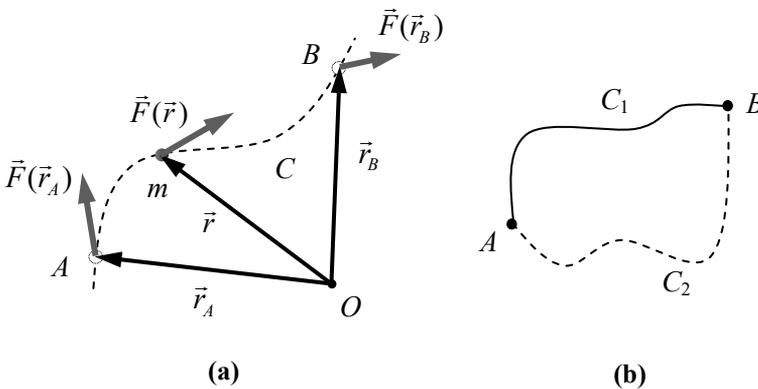


Figura 4.3. a) Deslocamento finito da partícula de massa m ao longo de uma trajetória entre os pontos A e B por acção da força variável $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$. b) Duas trajetórias distintas que podem conduzir a partícula do ponto A ao ponto B.

Desta expressão resulta que o trabalho realizado por uma força variável quando o seu ponto de aplicação se desloca de um ponto A para um ponto B depende, em geral, da curva C que os une e a que corresponde o percurso seguido pela partícula. Assim, se consideramos dois pontos A e B e duas quaisquer curvas C_1 e C_2 que os unam (*vide* figura 4.3b), o trabalho realizado pela força \vec{F} variável depende da curva (trajectória) descrita. Em geral teremos

$$W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq W_2 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4.13)$$

Note-se que para o cálculo de um integral de linha ou de caminho é sempre necessário conhecer a equação da trajectória (caminho) sobre a qual se pretende calcular o integral. Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.2

Uma partícula material é actuada por uma força $\vec{F}(\vec{r}) = y\vec{i} - x\vec{j}$ (SI). Calcule o trabalho realizado pela força quando desloca a partícula entre o ponto $O(0,0)$ m e o ponto $A(2,4)$ m por cada um dos seguintes caminhos: a) ao longo de uma recta que passa por ambos os pontos; b) ao longo da parábola $y = x^2$.

Resolução:

a) O trabalho realizado pela força é

$$\begin{aligned} W &= \int_{\overline{OA}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\overline{OA}} (y\vec{i} - x\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = \\ &= \int_{\overline{OA}} (ydx - xdy) = \int_{\overline{OA}} ydx - \int_{\overline{OA}} xdy \end{aligned}$$

Considerando que a recta que passa pelos pontos O e A é definida pela relação $y = 2x$, resulta neste caso

$$\begin{aligned} W &= \int_{\overline{OA}} ydx - \int_{\overline{OA}} xdy = \int_0^2 2x dx - \int_0^4 \frac{y}{2} dy = \\ &= 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4 = 4 - \frac{16}{4} = 0 \end{aligned}$$

Este mesmo resultado poderia ter sido obtido integrando apenas na variável x , tendo em conta que $y = 2x \Rightarrow dy = 2dx$,

$$W = \int_{\overline{OA}} ydx - \int_{\overline{OA}} xdy = \int_0^2 2x dx - \int_0^2 2x dx = 0,$$

ou integrando apenas na variável y ,

$$W = \int_{\overline{OA}} y dx - \int_{\overline{OA}} x dy = \frac{1}{2} \int_0^4 y dy - \frac{1}{2} \int_0^4 y dy = 0.$$

b) O trabalho da força é também

$$\begin{aligned} W &= \int_{\overline{OA}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\overline{OA}} (y\vec{i} - x\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = \\ &= \int_{\overline{OA}} (y dx - x dy) = \int_{\overline{OA}} y dx - \int_{\overline{OA}} x dy \end{aligned}$$

mas neste caso o seu ponto de aplicação desloca-se ao longo da parábola $y = x^2$, logo

$$\begin{aligned} W &= \int_{\overline{OA}} y dx - \int_{\overline{OA}} x dy = \int_0^2 x^2 dx - \int_0^4 y^{1/2} dy = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 - \left[\frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_0^4 = \frac{8}{3} - \frac{16}{3} = -\frac{8}{3} \text{ J.} \end{aligned}$$

Note-se que também neste caso poderíamos ter optado por fazer a integração apenas numa das variáveis, x ou y , tendo em consideração que $y = x^2 \Rightarrow dy = 2x dx$. Reparar ainda que, neste exemplo, o resultado obtido em a) é diferente do obtido em b), concluindo-se assim que o trabalho da força $\vec{F}(\vec{r}) = y\vec{i} - x\vec{j}$ depende efectivamente do caminho percorrido pelo seu ponto de aplicação e não apenas dos pontos inicial e final do percurso.

No caso de a força resultante aplicada na partícula ser uma força variável, $\vec{F}_R = \vec{F}_R(\vec{r})$, verifica-se também o teorema do trabalho-energia:

$$W(\vec{F}_R) = \int_C \vec{F}_R \cdot d\vec{r} = \Delta K = K_f - K_i, \quad (4.14)$$

isto é, o trabalho da força resultante iguala a variação da energia cinética da partícula, tal como vimos anteriormente para o caso de a força resultante ser constante.

Demonstração:

Se \vec{F}_R é a força resultante que actua a partícula podemos escrever, pela segunda lei de Newton,

$$dW = \vec{F}_R \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt. \quad (4.15)$$

Por outro lado, repare-se que

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}, \quad (4.16)$$

ou seja,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}. \quad (4.17)$$

Donde,

$$dW = \vec{F}_R \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt} dt = \frac{1}{2} m dv^2 = d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = dK \quad (4.18)$$

e, portanto, o trabalho da força resultante que actua a partícula quando esta se desloca entre um ponto A e um ponto B ao longo de uma curva C será então

$$W(\vec{F}_R) = \int_C dW = \int_A^B dK = K_B - K_A = \Delta K. \quad (4.19)$$

4.2. Forças conservativas e não conservativas

Referimos anteriormente que, em geral, o trabalho de uma força que actua uma partícula material depende, não só dos pontos inicial e final da trajectória mas também da curva descrita pela partícula. Contudo, existe um conjunto de forças que se distinguem pelo facto de o trabalho por elas realizado depender apenas das posições inicial e final da partícula, sendo independente da trajectória descrita. São as chamadas *forças conservativas*. Para compreender melhor a noção de força conservativa, analisemos o trabalho realizado por três forças distintas.

4.2.1. Trabalho da força gravítica

Calculemos o trabalho realizado pela força gravítica ao deslocar um corpo de massa m do alto de um plano inclinado de comprimento L e altura h , para a base desse mesmo plano, segundo duas trajectórias diferentes (*vide* figura 4.4):

1. Deslizando ao longo do plano cuja trajectória é \overline{AC} e a que corresponde o vector deslocamento dado por, $\Delta\vec{r} = L \cos\theta \vec{i} - h \vec{j}$;
2. Caindo primeiro verticalmente do alto do plano (trajectória \overline{AB}) e deslizando em seguida na horizontal (trajectória \overline{BC}). O vector deslocamento será neste caso $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2$, com $\Delta\vec{r}_1 = -h \vec{j}$ e $\Delta\vec{r}_2 = L \cos\theta \vec{i}$.

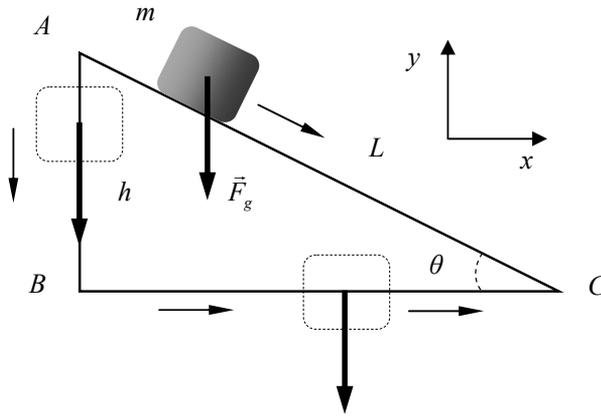


Figura 4.4. Movimento do corpo de massa m do ponto A para o ponto C, ao longo de dois caminhos possíveis: 1) directamente de A para C e 2) primeiro de A para B e depois de B para C.

Como a força gravítica é a mesma em qualquer dos casos e igual a $\vec{F}_g = -mg \vec{j}$, teremos:

Caso 1:

$$W(\vec{F}_g) = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r} = mgL \sin\theta = mgh. \quad (4.20)$$

Caso 2:

$$\begin{aligned} W(\vec{F}_g) &= W_1(\vec{F}_g) + W_2(\vec{F}_g) = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r}_2 = \\ &= mgh + 0 = mgh \end{aligned} \quad (4.21)$$

Em ambos os casos, o trabalho realizado pela força gravítica é o mesmo. Podemos então intuir que o trabalho da força gravítica não depende da trajectória seguida pela partícula.

4.2.2. Trabalho da força elástica

Calculemos agora o trabalho realizado pela força elástica (a força exercida por uma mola sobre um corpo) ao deslocar um corpo de massa m da posição de equilíbrio da mola, situada em $x = 0$, até $x = L > 0$, segundo duas trajectórias (*vide* figura 4.5):

1. Esticando simplesmente a mola de $x = 0$ até $x = L$;
2. Comprimindo primeiro a mola de $x = 0$ até $x = a < 0$, esticando-a em seguida de $x = a$ até $x = b > L$, e finalmente comprimindo-a de $x = b$ até $x = L$.

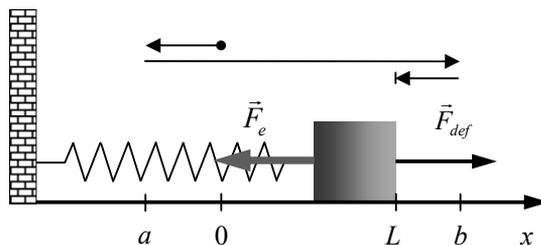


Figura 4.5. Sistema massa-mola descrevendo as trajectórias referidas no texto.

Note-se que agora a força não é constante, uma vez que depende da deformação (distensão ou compressão) da mola. Pela lei de Hooke sabemos que $\vec{F}_e = -kx\vec{i}$. Teremos então:

Caso 1:

$$W = \int_0^L F_e dx = \int_0^L (-kx) dx = \left[-\frac{kx^2}{2} \right]_0^L = -\frac{kL^2}{2}. \quad (4.22)$$

Caso 2:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^a F_e dx + \int_a^b F_e dx + \int_b^L F_e dx = \\ &= \int_0^a (-kx) dx + \int_a^b (-kx) dx + \int_b^L (-kx) dx = \quad (4.23) \\ &= \left[-\frac{kx^2}{2} \right]_0^a + \left[-\frac{kx^2}{2} \right]_a^b + \left[-\frac{kx^2}{2} \right]_b^L = -\frac{kL^2}{2} \end{aligned}$$

O trabalho realizado é o mesmo em ambos os casos. Tal como no caso da força gravítica, também se pode intuir deste exemplo que o trabalho da força elástica não depende da trajectória da partícula.

4.2.3. Trabalho da força de atrito

O trabalho de uma força de atrito estático é sempre nulo, $W(\vec{F}_s^a) = 0$, porque não há deslocamento do seu ponto de aplicação. Calculemos agora o trabalho realizado pela força de atrito cinético sobre um corpo que se desloca uma distância L sobre um plano horizontal, percorrendo duas trajectórias distintas:

1. Em linha recta de $x = 0$ até $x = L$, e em que a força de atrito é dada por $\vec{F}_k^a = -\mu_k N \vec{i}$;
2. Em linha recta de $x = 0$ até $x = 2L$, onde a força de atrito é $\vec{F}_k^a = -\mu_k N \vec{i}$, e em seguida invertendo o sentido sobre a mesma linha recta e indo de $x = 2L$ até $x = L$, onde a força de atrito é $\vec{F}_k^a = \mu_k N \vec{i}$.

Notar que, em qualquer dos casos, a força de atrito tem sempre sentido contrário ao do movimento e que $N = mg$. Teremos, portanto:

Caso 1:

$$W(\vec{F}_k^a) = -\mu_k mgL. \quad (4.24)$$

Caso 2:

$$W(\vec{F}_k^a) = -\mu_k mg \times 2L + \mu_k mg \times (-L) = -3\mu_k mgL. \quad (4.25)$$

Verificamos, assim, que, ao contrário do valor do trabalho da força gravítica ou da força elástica, o valor do trabalho realizado pela força de atrito depende da trajectória descrita pelo seu ponto de aplicação.

Como referimos anteriormente, se o trabalho realizado por uma força no deslocamento de um corpo não depender da trajectória por ele percorrida, mas apenas das posições inicial e final, a força diz-se *conservativa*; caso o trabalho dependa da trajectória, a força diz-se *não conservativa*. Qualquer força constante, a força gravítica, a força elástica bem como qualquer força central³⁵ são exemplos de forças conservativas; já a força de atrito é uma força não conservativa. Note-se, porém, que o atrito não implica forçosamente a existência de interacções não conservativas entre partículas. O atrito é um conceito estatístico. O atrito de escorregamento, por exemplo, resulta de um número elevadíssimo de interacções individuais entre as moléculas das duas superfícies em contacto. Cada uma destas interacções pode ser expressa por uma força conservativa. Contudo, o efeito macroscópico não é conservativo, na medida em que, uma vez completada uma trajectória fechada, embora o corpo se encontre macroscopicamente na posição original, as suas moléculas, individualmente, não retornaram à condição original. Deste modo, o estado final não é microscopicamente idêntico ao estado inicial, nem sequer equivalente do ponto de vista estatístico.

As forças conservativas assumem grande importância, não só porque ocorrem na natureza com muita frequência, mas também porque estão associadas à grandeza *energia potencial*, que abordaremos em seguida. É de referir, ainda, as seguintes duas consequências da definição de força conservativa:

- O trabalho realizado por uma força conservativa, \vec{F}_c , ao longo de uma trajectória C fechada é nulo, isto é,

$$W(\vec{F}_c) = \oint_C \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = 0. \quad (4.26)$$

- Uma força conservativa não pode depender da velocidade. Por outras palavras: se uma força depender da velocidade, é forçosamente não conservativa. Um exemplo é a força de atrito viscoso, dada pela equação (3.24). Como veremos no parágrafo seguinte, uma força conservativa ou é constante ou só depende da posição. Note-se, porém, que existem forças não conservativas que não dependem da velocidade, como por exemplo as forças de atrito entre superfícies sólidas (ver parágrafo 3.2.5.1).

³⁵ Um força central é uma força convergente ou divergente de um ponto fixo do espaço e cuja intensidade só depende da distância do ponto de aplicação da força ao referido ponto fixo. A força gravítica, a força elástica e a força centrípeta são exemplos de forças centrais.

4.3. Energia potencial

As forças conservativas têm uma propriedade especial: a energia que comunicam a um corpo ao realizarem trabalho sobre ele fica “armazenada” no referido corpo e pode ser recuperada. É isto que sucede, por exemplo, quando elevamos um corpo no campo gravítico terrestre: o trabalho realizado para elevar o corpo fica armazenado nele na forma de *energia potencial gravítica*, a qual pode ser recuperada quando se larga o corpo. O mesmo se passa com uma mola: o trabalho realizado ao comprimi-la fica armazenado sob a forma de *energia potencial elástica*, a qual é recuperada quando se larga a mola.

Uma vez que o trabalho realizado por uma força conservativa apenas depende dos pontos inicial e final do deslocamento e não da trajectória, este trabalho pode ser expresso em termos de uma função apenas desses pontos. Essa função é precisamente a *energia potencial*, como veremos a seguir com alguns exemplos.

4.3.1. Energia potencial gravítica

Tendo em conta a equação (4.12), o trabalho realizado pela força gravítica $\vec{F}_g = -mg\vec{j}$ quando um corpo de massa m é deslocado de um ponto à altura y_1 para um ponto à altura y_2 é dado por

$$\begin{aligned} W(\vec{F}_g) &= \int \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \int (F_g \vec{j}) \cdot (dy \vec{j}) = \int_{y_1}^{y_2} F_g dy = \\ &= \int_{y_1}^{y_2} (-mg) dy = mg(y_1 - y_2) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Pode-se, portanto, escrever este trabalho na forma

$$\begin{aligned} W(\vec{F}_g) &= mgy_1 - mgy_2 = (mgy_1 + U_0) - (mgy_2 + U_0) = \\ &= U_g(y_1) - U_g(y_2) \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde U_0 é uma constante aditiva arbitrária. À função

$$U_g(y) = mgy + U_0, \quad (4.29)$$

chama-se *energia potencial gravítica* do sistema *partícula-Terra*. Verifica-se, deste modo, que o trabalho realizado pela força gravítica é simétrico da variação da energia potencial gravítica, ou seja,

$$W(\vec{F}_g) = -\Delta U_g. \quad (4.30)$$

Reparemos ainda que $U_g(y)$ está definido a menos da constante U_0 , arbitrária, o que é uma consequência do facto de o trabalho apenas determinar qual é a diferença dos va-

lores da energia potencial entre os pontos inicial e final, mas não o valor absoluto da energia potencial em cada um desses pontos. Tomar $U_0 = 0$ equivale a tomar $U_g(y) = 0$ quando $y = 0$. Note-se, contudo, que não somos obrigados a fazer esta escolha. Daqui resulta que, ao ser efectuado o cálculo da energia potencial gravítica, podemos tomar a origem do eixo dos yy (vertical do lugar) em qualquer ponto que nos seja mais conveniente para a resolução de um problema concreto. Evidentemente que, uma vez feita a escolha da origem do eixo dos yy , não a podemos modificar.

4.3.2. Energia potencial elástica

Suponhamos que uma mola é esticada de $x = a$ até $x = b$. O trabalho realizado pela força elástica $\vec{F}_e = -kx\vec{i}$ na deformação da mola é

$$\begin{aligned} W(\vec{F}_e) &= \int \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = \int_a^b (-kx\vec{i}) \cdot (dx\vec{i}) = \int_a^b (-kx) dx = \\ &= \left[-\frac{kx^2}{2} \right]_a^b = \frac{ka^2}{2} - \frac{kb^2}{2} \end{aligned} \quad (4.31)$$

resultado este que pode igualmente ser escrito na forma

$$W(\vec{F}_e) = \left(\frac{ka^2}{2} + U_0 \right) - \left(\frac{kb^2}{2} + U_0 \right) = U_e(a) - U_e(b). \quad (4.32)$$

A função

$$U_e(x) = \frac{1}{2}kx^2 + U_0, \quad (4.33)$$

é denominada *energia potencial elástica*. Por (4.32) verificamos que o trabalho realizado pela força elástica é simétrico da variação da energia potencial elástica, isto é,

$$W(\vec{F}_e) = -\Delta U_e. \quad (4.34)$$

Tal como no caso da energia potencial gravítica, $U_e(x)$ é também definido a menos de uma constante aditiva U_0 , arbitrária, uma vez que o trabalho determina apenas a diferença entre os valores inicial e final da energia potencial elástica e não o seu valor absoluto. Quer isto dizer que, ao efectuarmos o cálculo da energia potencial elástica, podemos tomar a origem do eixo dos xx em qualquer ponto que nos seja conveniente. Em particular, podemos escolher $U_0 = 0$ para que $U_e(x) = 0$ quando $x = 0$.

4.3.3. Energia potencial; caso geral

Podemos sempre afirmar que qualquer força conservativa, \vec{F}_c , está relacionada com uma determinada função energia potencial, U_c , de tal modo que é válida a relação

$$W(\vec{F}_c) = -\Delta U_c, \quad (4.35)$$

expressão esta que garante que o trabalho da força conservativa \vec{F}_c é independente da trajectória seguida pelo seu ponto de aplicação.

Duas questões:

1. Como verificar se uma determinada força \vec{F} é conservativa?
2. Caso \vec{F} seja uma força conservativa, qual é a sua relação com a função energia potencial U que lhe está associada (melhor dito, da qual \vec{F} deriva)?

Resposta à questão 1:

Se a força for conservativa, o trabalho por ela realizado ao longo de uma trajectória fechada é nulo, ou seja,

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (4.36)$$

Logo, pelo *teorema de Stokes*³⁶, o rotacional da força tem de ser também nulo, isto é,

$$\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}, \quad (4.37)$$

onde $\vec{\nabla}$ representa o operador “nabla” e que se escreve, em coordenadas cartesianas, na forma

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (4.38)$$

Deste modo, o rotacional de \vec{F} , em coordenadas cartesianas, é

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (4.39)$$

³⁶ Vide, por exemplo, R. Adams, *Calculus: A Complete Course*, Addison Wesley, 1999, ou qualquer outro bom livro de cálculo diferencial e integral em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 4.3

Dada a força $\vec{F} = 2yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + 2xy\vec{k}$, verificar se \vec{F} é uma força conservativa.

Resolução:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2yz & 2xz & 2xy \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(2xy) - \frac{\partial}{\partial z}(2xz) \right] \vec{i} - \\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial z}(2yz) \right] \vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(2xz) - \frac{\partial}{\partial y}(2yz) \right] \vec{k} = \\ &= (2x - 2x)\vec{i} - (2y - 2y)\vec{j} + (2z - 2z)\vec{k} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Logo, como $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, a força \vec{F} é conservativa.

Resposta à questão 2:

Se \vec{F} é uma força conservativa então verifica $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$. Como qualquer função vectorial cujo rotacional seja nulo deriva de uma função potencial escalar pela operação “gradiente da função potencial”, podemos afirmar que \vec{F} deriva de uma função escalar, dita energia potencial, $U = U(x,y,z)$, pela operação

$$\vec{F} = -\text{grad}U \equiv -\vec{\nabla}U, \quad (4.40)$$

onde $\vec{\nabla}U$ representa o gradiente da função U . Em coordenadas cartesianas ter-se-á

$$\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}. \quad (4.41)$$

Compreende-se agora por que razão uma força que dependa da velocidade nunca pode ser conservativa: não é possível obtê-la como o gradiente de nenhuma função escalar das coordenadas espaciais.

Exemplo 4.4

Deduzir, a partir da respectiva expressão da energia potencial, a) a expressão da força gravítica e b) a expressão da força elástica.

Resolução:

a) $U_g(y) = mgy$ (admitimos $U_0=0$), donde

$$\begin{aligned}\vec{F}_g &= -\vec{\nabla}U_g = -\frac{\partial}{\partial x}(mgy)\vec{i} - \frac{\partial}{\partial y}(mgy)\vec{j} - \frac{\partial}{\partial z}(mgy)\vec{k} = \\ &= -mg\vec{j}.\end{aligned}$$

b) $U_e(x) = kx^2/2$ (admitimos $U_0=0$), donde

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= -\vec{\nabla}U_e = -\frac{\partial}{\partial x}(kx^2/2)\vec{i} - \frac{\partial}{\partial y}(kx^2/2)\vec{j} - \frac{\partial}{\partial z}(kx^2/2)\vec{k} = \\ &= -kx\vec{i}.\end{aligned}$$

Exemplo 4.5

Deduzir a função energia potencial de que deriva a força conservativa analisada no exemplo 4.3, $\vec{F} = 2yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + 2xy\vec{k}$.

Resolução:

Como a força é conservativa (*vide* exemplo 4.3) $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, ter-se-á que verificar

$$\begin{cases} -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x = 2yz \\ -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y = 2xz \\ -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z = 2xy \end{cases}$$

Este sistema de equações diferenciais tem como solução a função, $U = -xyz + U_0$, com U_0 uma constante arbitrária.

4.4. Energia mecânica

Consideremos uma partícula material actuada por um conjunto de n forças, conjunto este que inclui forças conservativas e forças não conservativas. O trabalho da força resultante iguala a soma dos trabalhos de todas as forças, ou seja,

$$W(\vec{F}_R) = W(\vec{F}_1) + \dots + W(\vec{F}_n), \tag{4.42}$$

resultado este que pode ser reescrito na forma simplificada

$$W(\vec{F}_R) = W_c + W_{nc}, \tag{4.43}$$

onde W_c e W_{nc} representam, respectivamente, o trabalho total realizado por todas as forças conservativas e o trabalho total realizado por todas as forças não conservativas. Por outro lado, sabemos que $W(\vec{F}_R) = \Delta K$ e que $W_c = -\Delta U$, com ΔU a variação da energia potencial total³⁷ do sistema. Deste modo podemos reescrever a equação (4.43) na forma

$$\Delta K = -\Delta U + W_{nc} \Leftrightarrow \Delta K + \Delta U = W_{nc}. \tag{4.44}$$

³⁷ Para a energia potencial total de um sistema contribuem todas as formas de energia potencial envolvidas no sistema (energia potencial gravítica, energia potencial elástica, etc.).

A grandeza

$$E = K + U , \quad (4.45)$$

denomina-se *energia mecânica* (energia mecânica = energia cinética + os vários tipos de energia potencial). Podemos então concluir pela equação (4.45) que

$$W_{nc} = \Delta K + \Delta U = \Delta(K + U) = \Delta E , \quad (4.46)$$

isto é, o trabalho total das forças não conservativas aplicadas na partícula iguala a variação da energia mecânica da partícula. Deste último resultado podemos deduzir o *princípio de conservação da energia mecânica*:

Se o trabalho das forças não conservativas que actuam sobre uma dada partícula ou sistema for nulo, então a energia mecânica dessa partícula ou sistema é constante.

$$\Delta E = E_f - E_i = 0 \Rightarrow (\text{sistema conservativo}) . \quad (4.47)$$

4.4.1. Corpo em queda livre por acção da força gravítica

Apliquemos o princípio de conservação da energia mecânica para determinar a velocidade de um corpo ao embater no solo quando deixado cair livremente de uma altura h (*vide* figura 4.6). Inicialmente, o corpo possui apenas energia potencial gravítica, uma vez que não tem velocidade inicial. Como referimos anteriormente, temos completa liberdade de escolher onde é que a energia potencial gravítica é zero. Neste caso, é conveniente escolhermos o zero da energia potencial gravítica no solo, porque assim, quando o corpo chegar ao solo, terá apenas energia cinética, o que simplifica os cálculos. Note-se que por “chegar ao solo” queremos dizer “no instante imediatamente anterior a entrar em contacto com o solo”: assim que o corpo tocar no solo, será actuado pela força de reacção deste, a qual não é necessariamente conservativa, logo não permitiria aplicar o princípio de conservação da energia mecânica. Durante a queda, pelo contrário, o corpo é unicamente actuado pela força gravítica, a qual é conservativa³⁸. Deste modo, a energia mecânica do corpo em queda livre é conservada. Igualando a energia mecânica inicial (exclusivamente potencial gravítica) e a energia mecânica final (exclusivamente cinética), obtemos

$$mgh(\text{inicial}) = \frac{1}{2}mv_f^2(\text{final}) \Leftrightarrow v_f = \sqrt{2gh} , \quad (4.48)$$

resultado que podemos obter, de modo menos expedito, utilizando as equações da cinemática do m.r.u.v. a uma dimensão (*vide* problema 2.4).

³⁸ Estamos, obviamente, a desprezar a força de atrito do corpo no ar.

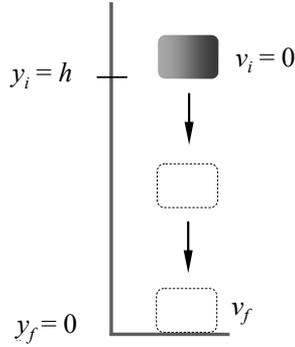


Figura 4.6. Corpo deixado cair livremente da altura h .

4.4.2. Corpo em movimento ascensional sob acção da força gravítica

Consideremos um corpo lançado verticalmente, de baixo para cima, com velocidade inicial v_0 e, naturalmente, actuado pela força gravítica. Pretendemos calcular a altura máxima h que o corpo atingirá antes de começar a cair. Tal como o problema do corpo em queda livre, este problema pode também ser resolvido utilizando as equações da cinemática do m.r.u.v. a uma dimensão (*vide* problema 2.5). Contudo, é muito mais fácil chegar ao mesmo resultado através do princípio da conservação da energia mecânica. Quando o corpo inicia o seu movimento, possui, evidentemente, energia cinética. É agora conveniente tomarmos o zero da energia potencial gravítica como sendo o ponto de onde o corpo parte: assim, a energia mecânica inicial é exclusivamente cinética. Como queremos saber até onde o corpo sobe antes de começar a cair, o ponto “final” vai ser o ponto mais alto da sua trajectória: nesse ponto, o corpo pára, logo não possui energia cinética, mas apenas energia potencial gravítica. Igualando a energia mecânica inicial (exclusivamente cinética) e a energia mecânica final (exclusivamente potencial gravítica), vem que

$$\frac{1}{2}mv_0^2(\text{inicial}) = mgh(\text{final}) \Leftrightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (4.49)$$

4.4.3. Energia no movimento harmónico simples

O movimento de uma partícula que oscile com movimento harmónico simples pode ser modelado com base num sistema massa-mola (*vide* figura 3.6). Suponhamos, então, que uma partícula de massa m oscila horizontalmente com frequência angular ω e amplitude A , em torno da posição $x_0 = 0$, por acção da força elástica induzida por uma mola de constante elástica k . Como vimos atrás (secções 2.9 e 3.2.4), a posição da partícula é dada por

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (4.50)$$

e a sua velocidade por

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.51)$$

onde, recordamos, a frequência angular ω está relacionada com a constante k por pela equação (3.19), que aqui repetimos:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.52)$$

A energia potencial da partícula é dada pela equação (4.33). Admitindo que em $x_0 = 0$ a energia potencial da partícula é nula ($U_0 = 0$), teremos

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \quad (4.53)$$

Por outro lado, a energia cinética da partícula é dada por

$$K(x) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 [1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)], \quad (4.54)$$

relação que, tendo em consideração as expressões (4.50) e (4.52), se pode escrever na forma

$$K(x) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2). \quad (4.55)$$

A energia mecânica da partícula obtém-se somando a energia potencial com a energia cinética, resultando

$$E = U(x) + K(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2. \quad (4.56)$$

Esta última expressão mostra que a energia mecânica de uma partícula em movimento harmónico simples é constante, resultado este já esperado na medida em que a partícula está submetida à acção de uma força central e, portanto, conservativa. Sendo a energia mecânica constante (conservada), podemos afirmar que há uma troca contínua entre as energias potencial e cinética da partícula. Por outras palavras, o que a partícula ganhar em energia potencial perde em energia cinética e vice-versa. Este balanço pode ser visto em detalhe no gráfico da figura 4.7, onde estão representadas as curvas correspondentes às energias potencial, cinética e mecânica definidas pelas equações (4.53), (4.55) e (4.56), respectivamente. A função $U(x)$ é uma parábola simétrica em torno do ponto $x_0 = 0$, verificando-se que quanto mais afastada está a partícula da posição de equilíbrio maior é a sua energia potencial e menor a sua energia cinética. A energia potencial anula-se em $x_0 = 0$ e é máxima em $x = \pm A$, verificando-se $U(x = \pm A) = E$. Por outro lado, a energia cinética é nula em $x = \pm A$ (posições onde ocorre inversão do sentido do movimento e, portanto, $v = 0$) e máxima em $x_0 = 0$, verificando-se $K(x = 0) = E$. Em qualquer posição $x \in [-A, A]$, a energia cinética é dada pela distância entre a curva $U(x)$ e a linha horizontal que define o valor da energia mecânica (energia total).

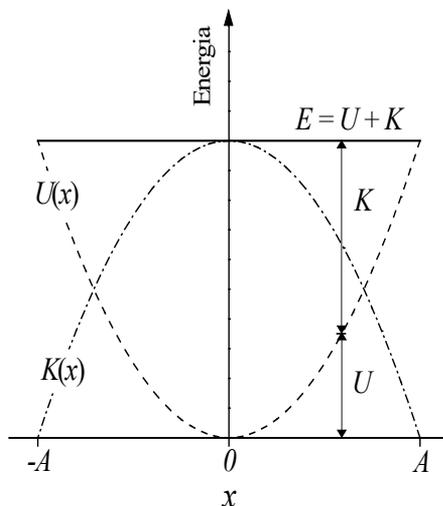


Figura 4.7. Diagrama de energia de um movimento harmónico simples, com amplitude A , em torno da posição $x_0 = 0$.

Os diagramas de energia como o exemplificado na figura 4.7 são úteis na análise de movimentos sob influência de uma força conservativa. Tendo a sua construção sido precedida da escolha do zero da energia potencial, verifica-se:

- i. O movimento está excluído das regiões do diagrama a que corresponderiam energias cinéticas negativas.
- ii. Os pontos a que corresponde $K = 0$ são pontos de inversão do movimento ($v = 0$). Nestes mesmos pontos a curva da energia potencial intersecta a linha horizontal a que corresponde o valor da energia total (mecânica) ($U = E$).
- iii. Os mínimos da função $U = U(x)$ são pontos de equilíbrio estável.

4.5.* A energia potencial gravítica revisitada

No parágrafo 4.3.1 discutimos a energia potencial gravítica de um sistema partícula-Terra. A dedução da expressão $U_g = mgy + U_0$ que então obtivemos para a energia potencial gravítica pressupôs que a força gravítica seja invariável com a distância ($F_g = mg$). Contudo, pelo que vimos no parágrafo 3.2.1, sabemos que isto é apenas uma aproximação válida para corpos muito próximos da superfície terrestre. Efectivamente, a força de atracção gravítica entre duas massas diminui com o inverso do quadrado da distância que as separa (*vide* equação (3.6)).

Vamos em seguida deduzir a expressão geral da energia potencial gravítica de um sistema constituído por duas massas m_1 e m_2 que distam entre si de uma distância r . Considere-se para isso o esquema da figura 4.8, em que se toma o centro da massa m_1 como origem do sistema de coordenadas.

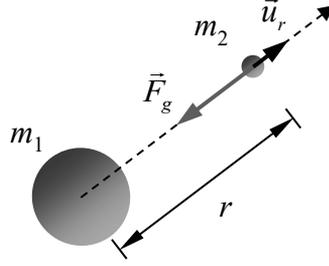


Figura 4.8. A força de atração gravítica de m_1 sobre m_2 .

Considerando que a força gravítica que m_1 exerce sobre m_2 é uma força atractiva, esta terá forçosamente sentido contrário ao versor \vec{u}_r . Deste modo, e de acordo com a lei da gravitação universal descrita pela equação (3.6), podemos escrever

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r, \quad (4.57)$$

Por outro lado, como a força gravítica é uma força conservativa, terá que verificar a relação (3.122) existente entre uma força conservativa e a função energia potencial que lhe está associada, ou seja

$$\vec{F}_g = -\vec{\nabla} U_g. \quad (4.58)$$

Atendendo a que a força gravítica é uma força central, \vec{F}_g só depende da variável r . Portanto o operador gradiente na equação (3.140) reduz-se à expressão

$$\vec{F}_g = -\frac{dU_g}{dr} \vec{u}_r, \quad (4.59)$$

donde podemos escrever

$$-G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r = -\frac{dU_g}{dr} \vec{u}_r \Rightarrow dU_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr. \quad (4.60)$$

Integrando a expressão diferencial (4.60) entre um ponto no infinito e r , e tomando como referência $U_g(r = \infty) = 0$, resulta:

$$\int_0^{U_g(r)} dU'_g = G m_1 m_2 \int_{\infty}^r \frac{1}{r'^2} dr' \Leftrightarrow U_g(r) = G m_1 m_2 \left[-\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r, \quad (4.61)$$

obtendo-se

$$U_g(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (4.62)$$

que é a expressão geral da energia potencial gravítica de um sistema de duas massas. Note-se que, como $U_g(r = \infty) = 0$, a energia potencial gravítica é sempre negativa para

qualquer separação finita entre as duas massas, sendo progressivamente mais negativa à medida que as duas massas se aproximam uma da outra. Tende obviamente para zero quando $r \rightarrow \infty$. O facto de a energia potencial gravítica ser negativa significa que é necessário fornecer energia à massa m_2 para a remover da influência da massa m_1 , isto é, para transportar m_2 da posição em que se encontra até ao infinito. Esta energia, $W_\infty(r)$, é chamada *energia de ligação* do sistema e vale

$$W_\infty(r) = G \frac{m_1 m_2}{r} = -U_g(r). \quad (4.63)$$

Devemos ainda sublinhar que a energia potencial dada pela equação (4.61) é uma propriedade intrínseca do sistema formado pelas duas massas m_1 e m_2 e não apenas de uma delas. Aliás, não há qualquer modo de atribuir uma parcela da energia potencial gravítica a uma das massas e a restante à outra. Mais, não faz qualquer sentido falar da energia potencial gravítica de uma única partícula. Quando o fazemos, fazemo-lo por abuso de linguagem, estando sempre implícito que nos estamos a referir ao sistema partícula-Terra³⁹.

Mostremos agora que a $U_g = mgy + U_0$ é uma aproximação da equação (4.63) para corpos próximos da superfície terrestre. Para isso vamos tomar $m_1 = M_T$ (massa da Terra), $m_2 = m$ e r a distância do corpo de massa m (suposto muito mais pequeno do que a Terra) ao centro da Terra. Podemos então escrever

$$r = R_T + y, \quad (4.64)$$

onde R_T é o raio da Terra e y a distância entre o corpo e a superfície da Terra ($y \ll R_T$). Substituindo (4.64) na equação (4.63), vem

$$U_g(r) = -G \frac{M_T m}{R_T + y} = -G \frac{M_T}{R_T^2} m \frac{R_T^2}{R_T + y}. \quad (4.65)$$

Recordando que $g = GM_T/R_T^2$ (*vide* equação (3.10)), podemos escrever

$$U_g(r) = -mg \frac{R_T^2}{R_T + y}. \quad (4.66)$$

Este último resultado pode ainda ser escrito na forma

$$U_g(r) = -mg \frac{R_T^2}{R_T + y} = -mg R_T \frac{1}{1 + y/R_T}. \quad (4.67)$$

Tendo em conta que $y \ll R_T$, podemos desenvolver a fracção no segundo membro da equação (4.67) em série de Taylor até primeira ordem:

$$\frac{1}{1 + y/R_T} \approx 1 - \frac{y}{R_T}, \quad (4.68)$$

³⁹ Se estivermos a estudar um corpo junto à superfície do planeta Terra, claro.

obtendo-se

$$U_g(r) = -mg(R_T - y) = mgy - mgR_T = mgy + U_0, \quad (4.69)$$

expressão esta idêntica à equação (4.29) com $U_0 = -mgR_T$. Note-se que se admitiu que toda a massa da Terra está concentrada no seu centro pelo facto de a Terra possuir simetria esférica, como referido anteriormente.

4.5.1. Velocidade de escape

A velocidade mínima com que deve ser lançado um corpo da superfície de um planeta, em particular da Terra, para alcançar o infinito, nunca mais retornando, é denominada *velocidade de escape*, v_{esc} . Vejamos como o princípio de conservação da energia mecânica pode ser aplicado para calcular esta grandeza.

Consideremos um corpo de massa m lançado com velocidade v_{esc} da superfície de um planeta de massa M e raio R . A energia mecânica do corpo no momento do lançamento é

$$E_0 = K + U_g = \frac{1}{2}mv_{esc}^2 - G\frac{Mm}{R}. \quad (4.70)$$

Quando o corpo atinge o infinito a sua velocidade anula-se e por isso a sua energia cinética é zero. Por outro lado também a energia potencial é nula porque a distância que separa o corpo do planeta é infinita. Portanto, a energia mecânica do corpo no infinito é

$$E_\infty = 0. \quad (4.71)$$

Como admitimos que sobre o corpo só actua a força gravítica devida ao planeta, a qual, recordamos, é uma força conservativa, terá de se verificar o princípio da conservação da energia mecânica, ou seja,

$$E_0 = E_\infty, \quad (4.72)$$

donde resulta

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - G\frac{Mm}{R} = 0. \quad (4.73)$$

A partir desta equação obtemos a velocidade de escape,

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (4.74)$$

A equação (4.74) pode ser usada para determinar a velocidade de escape de qualquer corpo celeste. Na tabela 3.4 encontram-se os valores das velocidades de escape do Sol e de alguns planetas do Sistema Solar. Em particular, a velocidade de escape da Terra é de 11.2 km s^{-1} . É, de facto, uma velocidade muito elevada, o que explica porque têm sido

necessários foguetões enormes para lançar as sondas de exploração espacial. Note-se, ainda, que a velocidade de escape é independente da direcção de lançamento do corpo. Mesmo que o corpo seja lançado na horizontal irá escapar da superfície do corpo celeste.

Tabela 4.2. Velocidades de escape de alguns corpos celestes do Sistema Solar.

Corpo celeste	Massa (kg)	Raio (m)	v_{esc} (km s ⁻¹)
Sol	1.99×10^{30}	6.96×10^8	617.7
Mercúrio	3.30×10^{23}	2.44×10^6	4.2
Vénus	4.87×10^{24}	6.05×10^6	10.4
Terra	5.97×10^{24}	6.38×10^6	11.2
Lua	7.35×10^{22}	1.74×10^6	2.4
Marte	6.42×10^{23}	3.40×10^6	5.0
Júpiter	1.90×10^{27}	6.91×10^7	60.6
Saturno	5.68×10^{26}	6.03×10^7	35.5

4.6. Energia térmica. O princípio de conservação da energia total

A maioria dos sistemas físicos macroscópicos reais envolvem forças não conservativas. De facto, as forças dissipativas, como as forças de atrito de escorregamento sólido/sólido ou de atrito em fluidos, são praticamente omnipresentes nos sistemas com que lidamos no dia a dia. Na presença destas forças, parte da energia total do sistema é dissipada e, por isso, parece não ser conservada. Contudo, a energia perdida nos processos dissipativos que envolvem as forças de atrito pode ser associada a uma outra forma de energia: a *energia térmica*. É esta forma de energia que está associada à variação da temperatura dos sistemas e respectiva vizinhança⁴⁰. Quando fazemos deslizar um livro sobre a superfície de uma mesa, quer o livro quer a mesa aumentam de temperatura devido à energia dissipada no atrito existente entre as duas superfícies em movimento relativo. Quando uma partícula se movimenta no seio de um fluido, quer a temperatura da partícula quer a temperatura do fluido que a rodeia aumentam devido ao atrito existente entre a partícula e o fluido. Esta é, por exemplo, a razão porque podemos observar as chamadas *estrelas cadentes*. Estes objectos não são mais que pequenas partículas ferro-rochosas, conhecidos por *meteoróides*, que ao entrarem na atmosfera terrestre se tornam incandescentes, podendo mesmo serem vaporizados, devido ao aumento de temperatura resultante do atrito entre a partícula e o fluido que é a atmosfera da Terra. É o rasto luminoso destas partículas incandescentes que permite a sua observação como estrelas cadentes.

⁴⁰ A vizinhança de um sistema é definida em Física a como a região do universo complementar à região delimitada pelo sistema. A separação entre o sistema e a sua vizinhança é feita através de uma superfície, real ou imaginária, denominada fronteira. São conceitos muito importantes em Termodinâmica.

Quando a energia térmica é incluída no balanço da energia total posta em jogo num dado sistema e na sua vizinhança verifica-se que a energia total é sempre conservada. O *princípio de conservação da energia* é um dos pilares fundamentais de toda a Física. Note-se que este princípio não é derivável das leis de movimento. É um princípio e não um teorema. Contudo, tem sido verificado experimentalmente vezes sem fim em todos os ramos da Física, incluído a Mecânica, a Termodinâmica, o Electromagnetismo, a Relatividade ou a Mecânica Quântica.

4.7. Potência

Sendo o trabalho um processo físico pelo qual se transfere, ordenadamente, energia entre sistemas, é importante conhecer a taxa a que essa energia é transferida. A grandeza que mede a taxa à qual se realiza trabalho (se transfere energia) é a *potência*. A *potência instantânea* é, portanto, determinada pela expressão

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (4.75)$$

A potência é uma grandeza escalar cuja unidade SI é o watt (W), verificando-se $1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1}$.

Podemos igualmente definir a *potência média* pela razão entre o trabalho realizado e o intervalo de tempo finito Δt necessário para realizar o referido trabalho:

$$P_{med} = \frac{W}{\Delta t}. \quad (4.76)$$

Em determinadas circunstâncias, poderá ser útil exprimir a potência instantânea em função da força (que está a realizar o trabalho) e da velocidade da partícula actuada pela força, deduzindo-se facilmente que

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v} dt}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (4.77)$$

isto é, a potência instantânea é também dada pelo produto interno ou escalar da força pela velocidade da partícula.

Do ponto de vista da engenharia, o conceito de potência é muito importante na medida em que, no projecto de um sistema, qualquer que seja a sua natureza (mecânico, eléctrico, químico, etc.), é muito mais importante a rapidez com que o sistema pode produzir trabalho (rapidez com que pode transferir energia) do que a quantidade de trabalho que o mesmo é capaz de realizar.

Devemos ainda referir que a potência e a energia são muitas vezes expressas em *unidades industriais*. As unidades industriais de potência são o *cavalo-vapor* métrico (cv), sendo $1 \text{ cv} = 735.5 \text{ W}$, e o *cavalo-vapor* do sistema imperial britânico (hp), sendo $1 \text{ hp} = 745.7 \text{ W}$. A unidade industrial de energia é o watt-hora (Wh) e é definida como

sendo o trabalho realizado por uma máquina com a potência de 1 W durante 1 h. O factor de conversão para o SI é, portanto, $1 \text{ Wh} = 3.6 \times 10^3 \text{ J}$.

Exemplo 4.6

Um automóvel de massa $m = 1200 \text{ kg}$ sobe uma colina ao longo de uma estrada com inclinação de 5° a uma velocidade constante de 72 km h^{-1} . Desprezando o atrito, determine o trabalho realizado pelo motor do automóvel no intervalo de tempo de 5 minutos, bem como a potência por ele desenvolvida.

Resolução:

A velocidade do automóvel é constante ($72 \text{ km h}^{-1} = 20 \text{ m s}^{-1}$) logo trata-se de um movimento rectilíneo e uniforme ($a = 0$). Deste modo, a força exercida pelo motor tem de igualar a componente tangencial do peso do automóvel:

$$F_{motor} = F_{gt} = mg \sin 5^\circ = 1.025 \times 10^3 \text{ N.}$$

A distância percorrida pelo automóvel nos 5 minutos (300 s) é

$$r = r_0 + vt \Rightarrow \Delta r = vt = 20 \times 300 = 6000 \text{ m.}$$

Logo, o trabalho realizado pelo motor é

$$\begin{aligned} W_{motor} &= F_{motor} \Delta r \cos(\vec{F}_{motor} \wedge \Delta \vec{r}) = \\ &= 1.025 \times 10^3 \times 6000 \times \cos 0^\circ = 6.15 \times 10^6 \text{ J.} \end{aligned}$$

Quanto à potência desenvolvida pelo motor, pode ser calculada de dois modos:

$$P_{motor} = \frac{W_{motor}}{\Delta t} = \frac{6.15 \times 10^6}{300} = 2.05 \times 10^4 \text{ W,}$$

ou

$$P_{motor} = F_{motor} v = 1.025 \times 10^3 \times 20 = 2.05 \times 10^4 \text{ W.}$$

4.8. Rendimento

Em geral, nem todas as forças que actuam sobre um dado sistema realizam *trabalho útil*, ou seja, trabalho que é possível converter em formas de energia reaproveitáveis. Efectivamente, em todos os sistemas reais actuam forças de natureza dissipativa (por exemplo, forças de atrito) cujo trabalho não é possível converter em formas de energia útil, isto é, energia cinética, energia potencial, energia química, etc..

A razão entre o *trabalho útil*, W_u , e o *trabalho total ou motor* realizado pelo sistema, W_m , chama-se o *rendimento* do sistema:

$$\eta = \frac{W_u}{W_m}. \quad (4.78)$$

Claro que o rendimento pode ser expresso também como a razão entre a *potência útil* ou *eficaz*, P_u , isto é, a potência que corresponde ao trabalho recuperável realizado por unidade de tempo, e a *potência total ou motora* posta em jogo no sistema, P_m . De facto

$$\eta = \frac{W_u}{W_m} = \frac{W_u/\Delta t}{W_m/\Delta t} = \frac{P_u}{P_m}. \quad (4.79)$$

A potência que não é eficaz recebe o nome de *potência dissipada*. O rendimento pode assumir valores no intervalo $0 \leq \eta \leq 1$, sendo válida a igualdade $\eta = 1$ apenas em sistemas ideais (sistemas onde não ocorre dissipação de energia). O rendimento é uma grandeza adimensional.

Exemplo 4.7

Um motor eléctrico com rendimento de 70 % é usado para tirar água de um poço. Sabe-se que tem a capacidade de elevar, a velocidade constante, um balde de 5 litros de água de uma altura de 5 metros num intervalo de tempo de 10 s. Desprezando a massa do balde vazio, determinar: a) o trabalho e a potência úteis desenvolvidos pelo motor; b) a potência posta em jogo (consumida) no motor; c) a potência dissipada no motor.

Resolução:

a) Para elevar o balde de água com velocidade constante, a força exercida pelo motor tem de igualar o peso da massa de água. A massa correspondente aos 5 litros de água é 5 kg ($\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ g cm}^{-3}$). Logo, a força exercida pelo motor é $F = mg = 49 \text{ N}$. O trabalho realizado por esta força é o trabalho útil, ou seja, o trabalho realizado em proveito do dono do poço. O seu valor é

$$W_u = F \Delta r \cos(\vec{F} \wedge \Delta \vec{r}) = 49 \times 5 \times \cos 0^\circ = 245 \text{ J}.$$

Tendo em conta o intervalo de tempo que demora a ser realizado este trabalho, a potência útil é

$$P_u = \frac{W_u}{\Delta t} = \frac{245}{10} = 24.5 \text{ W}.$$

b) Considerando que o rendimento do motor é de 70 %, a potência consumida pelo motor é

$$P_m = \frac{P_u}{\eta} = \frac{24.5}{0.7} = 35 \text{ W}.$$

c) A potência dissipada é, obviamente, a diferença entre a potência consumida pelo motor e a potência útil, ou seja

$$P_{\text{diss}} = P_m - P_u = 35 - 24.5 = 10.5 \text{ W}.$$

PROBLEMAS

- 4.1. Uma partícula material está submetida a uma força definida pela função $\vec{F}(\vec{r}) = (y^2 - x^2)\vec{i} + 4xy\vec{j}$ (SI). Calcule o trabalho realizado pela força quando desloca a partícula entre o ponto (0, 0) m e o ponto (2, 4) m ao longo de cada um dos seguintes caminhos:
- Ao longo do eixo Ox , de (0, 0) m a (2, 0) m e, paralelamente ao eixo Oy , até (2, 4) m.
 - Ao longo do eixo Oy de (0, 0) m a (0, 4) m e, paralelamente ao eixo Ox , até (2, 4) m.
 - Ao longo de uma recta que passa por ambos os pontos.
 - Ao longo da parábola $y = x^2$.
 - Trata-se de uma força conservativa? Justifique.
- 4.2. Uma partícula de massa 200 g encontra-se em repouso na origem do sistema de eixos quando passa a ser actuada pela força definida pela função $\vec{F}(t) = 3t\vec{i} + 2t\vec{j}$ (CGS). Calcule:
- A potência instantânea posta em jogo no sistema.
 - O trabalho realizado pela força em 10 s.
- 4.3. Considere a força definida pelo vector $\vec{F} = 7\vec{i} + 6\vec{j}$ (SI).
- Calcule o trabalho realizado por \vec{F} quando uma partícula submetida a essa força vai da origem de um referencial ao ponto $P(-3, 4, 16)$ m. Será necessário especificar o caminho seguido pela partícula? Justifique.
 - Calcule a potência média posta em jogo no deslocamento quando a partícula leva 0.6 s para ir de um ponto ao outro.
 - Calcule a diferença de energia potencial entre os dois pontos.
 - Calcule a variação da energia cinética sofrida pela partícula entre os dois pontos.
- 4.4. Considere a força $\vec{F}(t) = 2t^2\vec{i} - t\vec{j}$ (SI) que actua um corpo de massa 2 kg durante 4 s.
- Sabendo que o corpo estava inicialmente em repouso na origem do referencial, determine a variação da sua energia cinética no intervalo de tempo referido.
 - Calcule o trabalho realizado pela força no deslocamento do corpo.
- 4.5. Um comboio com massa de 10 toneladas desloca-se na horizontal a uma velocidade de valor 100 km h^{-1} . Determine o valor da força exercida pelos freios para que o comboio pare:
- Em 20 m.
 - Em 10 s.
- 4.6. O coeficiente de atrito entre os pneus de um automóvel e o asfalto da estrada é μ . Determine a distância mínima em que esta força de atrito pode fazer parar o automóvel de massa m , deslocando-se inicialmente com velocidade de valor v , em estrada horizontal.

- 4.7. Um automóvel de massa 1100 kg sobe com velocidade constante de 36 km h^{-1} uma colina inclinada de 5° . Calcule o trabalho que o motor realiza em 5 minutos e a potência por ele desenvolvida se:
- Desprezar todos os efeitos de atrito.
 - Considerar uma dissipação de energia equivalente à de uma força de atrito cinético de coeficiente $\mu_k = 0.2$.
- 4.8. Uma bola de massa 0.4 kg é lançada horizontalmente do alto de uma colina de 150 m de altura com velocidade de valor 6 m s^{-1} . Desprezando o atrito no ar, calcule:
- A energia cinética inicial da bola.
 - A energia potencial inicial da bola.
 - A energia cinética da bola quando atinge o solo.
 - O valor da velocidade da bola quando atinge o solo.
- 4.9. Um carrinho de massa 30 kg parte do repouso e percorre 20 m a descer uma rampa com 1 % de inclinação. Com a energia adquirida na descida, sobe uma encosta com 2 % de inclinação, percorrendo nela 6 m até parar. Calcule o valor da força de resistência ao movimento do carrinho. *Nota:* a inclinação de uma rampa é o seno do ângulo que ela faz com a horizontal.
- 4.10. Uma partícula de massa 4 g executa um movimento harmónico simples de amplitude 6 cm e frequência 0.25 Hz. Sabendo que no instante inicial a partícula se encontra a 3 cm do centro de oscilação:
- Estabeleça a lei do movimento e represente-a graficamente.
 - Calcule o valor da força actuante para $t = 1 \text{ s}$.
 - Determine as energias cinética e potencial da partícula em $t = 0$.
- 4.11. Uma partícula de massa 1 kg descreve um movimento harmónico simples descrito pela equação $x(t) = 6\sin(3\pi t + \pi/2)$ (SI). Determine:
- A amplitude, o período, a frequência angular e a fase inicial do movimento.
 - A energia cinética do oscilador, em função da posição, $K = K(x)$.
 - A energia potencial, em função da posição, $U = U(x)$.
- 4.12. Uma partícula de massa 2.5 kg oscila numa superfície horizontal com movimento harmónico simples de 0.4 m de amplitude e frequência 1.8 Hz. Calcule:
- A energia total da partícula
 - A energia cinética média da partícula.
 - A energia potencial média da partícula.
 - Os valores do ângulo de fase que tornam as energias cinética e potencial iguais.
 - O afastamento da partícula da posição de equilíbrio e a sua velocidade quando as suas energias cinética e potencial são iguais.
- 4.13. Um trenó de massa 30 kg desliza pela encosta de uma colina partindo de uma altitude de 30 m. Sabendo que o trenó parte do repouso e que atinge o fim da

encosta com velocidade de valor 20 m s^{-1} , determine a energia dissipada devido ao atrito entre o trenó e a neve.

- 4.14. Um projectil com uma massa de 0.5 kg é lançado verticalmente para cima, com velocidade inicial de valor 20 m s^{-1} . Sabendo que o projectil atinge uma altura de 15 m , calcule a energia dissipada devido ao atrito no ar.
- 4.15. Um corpo com uma massa de 1 kg é largado da altura de 1 m sobre uma mola vertical cuja constante elástica é $k = 2500 \text{ N m}^{-1}$. Calcule a deformação máxima sofrida pela mola.
- 4.16. Um corpo de massa 0.5 kg desliza 4 m sobre um plano inclinado que forma um ângulo de 45° com a horizontal, até embater numa mola paralela ao plano e com uma extremidade fixa nele. Admitindo que não existe atrito entre o corpo e a superfície do plano e que constante da mola é $k = 400 \text{ N m}^{-1}$, calcule a deformação máxima da mola.
- 4.17. Uma mola de massa desprezável pode ser comprimida de 1 m com uma força de intensidade 100 N . Um corpo de massa 10 kg é abandonado do alto de um plano inclinado de 30° , partindo do repouso e parando momentaneamente depois de comprimir a mola 2.5 m . Considerando desprezável o atrito, determine:
- A distância percorrida pelo corpo antes de parar.
 - O valor da velocidade do corpo no instante em que atinge a mola.
- 4.18. Três forças conservativas estão associadas às seguintes funções de energia potencial:
- $U(x,y) = C x^2 y^2$,
 - $U(x,y,z) = C xyz$,
 - $U(x,y,z) = C (x^2 + y^2 + z^2)$,
- onde C é uma constante. Determine a força conservativa em cada caso.

- 4.19. Considere a força definida pela expressão

$$\vec{F}(\vec{r}) = (y^2 z^3 - 6xz^2)\vec{i} + 2xyz^3 \vec{j} + (3xy^2 z^2 - 6x^2 z)\vec{k} \quad (\text{SI}).$$

- Prove que se trata de uma força conservativa.
 - Determine a expressão da energia potencial associada à força $\vec{F}(\vec{r})$.
 - Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}(\vec{r})$ quando desloca o seu ponto de aplicação entre o ponto $A(-2,1,3) \text{ m}$ e o ponto $B(1,-2,-1) \text{ m}$.
- 4.20. A força de interacção entre dois nucleões (protões ou neutrões) pode ser aproximadamente descrita pelo *potencial de Yukawa*,

$$U(r) = -V_0 \left(\frac{r_0}{r} \right) e^{-\frac{r}{r_0}},$$

com V_0 aproximadamente igual a $8 \times 10^{-12} \text{ J}$ e r_0 aproximadamente igual a $1.5 \times 10^{-15} \text{ m}$.

- a) Determine a expressão do valor da força de interacção entre dois nucleões em função de r .
- b) Calcule o valor da força quando $r = r_0$.
- 4.21. Uma partícula de massa m move-se numa trajectória circular de raio r sob acção de uma força central de intensidade $F = -k/r^2$, com k uma constante. Demonstre que a partícula tem velocidade de valor $v = \sqrt{k/mr}$ e energia total $E = -k/2r$.
- 4.22. Sabendo que a Lua se encontra a uma distância média da Terra de 384405 km e que as massas da Terra e da Lua são $M_T = 5.97 \times 10^{24}$ kg e $M_L = 7.35 \times 10^{22}$ kg, respectivamente, estime a energia que seria necessário fornecer à Lua para a libertar da atracção gravítica da Terra.
- 4.23. Ceres é um planeta anão que se encontra no cinturão de asteróides, entre Marte e Júpiter. Tem um diâmetro de cerca de 950 km e uma massa de aproximadamente 8.7×10^{20} kg. Admitindo que uma nave espacial pousou em Ceres, qual deverá ser o valor da velocidade de partida da nave para poder regressar à Terra?

CAPÍTULO 5

MOMENTO LINEAR E SUAS APLICAÇÕES

Neste capítulo vamos introduzir o momento linear de uma partícula como uma importante grandeza conservada que permite simplificar consideravelmente a resolução de problemas envolvendo as leis de Newton. Em seguida, generalizaremos os resultados a sistemas de n partículas materiais. Em particular o princípio da conservação do momento linear revela-se extremamente útil no estudo das colisões. Introduziremos o importante conceito de centro de massa de um sistema de partículas e estudaremos o seu movimento. Finalmente analisaremos o movimento de um sistema de partículas em relação ao seu centro de massa.

5.1. Momento linear de uma partícula e sua conservação

Define-se o *momento linear* ou *quantidade de movimento* de uma partícula de massa m animada de velocidade \vec{v} como

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (5.1)$$

O momento linear é uma grandeza vectorial, expressa no SI em kg m s^{-1} . Tendo em consideração a definição de momento linear, a segunda lei de Newton, que descreve como as forças alteram o estado de movimento dos corpos sobre os quais actuam, pode ser reescrita na forma:

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (5.2)$$

Efectivamente, considerando que a massa de uma partícula é constante, temos

$$\vec{F}_R = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (5.3)$$

Desta última relação podemos deduzir o *princípio de conservação do momento linear*:

Se a resultante das forças que se exercem sobre uma partícula for nula, o seu momento linear não varia – diz-se que é conservado.

De facto,

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = \overline{const.} \quad (5.4)$$

5.1.1. $\vec{F}_R = m\vec{a}$ versus $\vec{F}_R = d\vec{p}/dt$

Para um sistema de massa constante as equações $\vec{F}_R = m\vec{a}$ e $\vec{F}_R = d\vec{p}/dt$ são exactamente equivalentes. Contudo, se a massa do sistema não for constante, então

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a} + \frac{dm}{dt}\vec{v}, \quad (5.5)$$

que, claramente, é diferente da equação $\vec{F}_R = m\vec{a}$. Coloca-se então a questão de saber qual das equações devemos usar para descrever um sistema de massa variável. Qual das duas equações descreve correctamente a física de um sistema de massa variável? De um modo geral, podemos resolver um dado problema usando qualquer das duas equações acima referidas. Temos, todavia, que ser cuidadosos com o que consideramos ser “o sistema” ao qual associamos as grandezas m , \vec{p} e \vec{a} . Estas subtilidades poderão ser melhor compreendidas através do exemplo seguinte.

Exemplo 5.1

Considere-se um vagão sobre o qual está a ser carregada verticalmente areia à taxa $dm/dt = \dot{m}$. Qual deverá ser a força aplicada no vagão para que este se mova horizontalmente com velocidade constante, v ?

Resolução 1

Seja $m = m(t)$ a massa do vagão mais a massa de areia no seu interior. É este “o sistema” que escolhemos tratar. Se se usar a expressão $F_R = ma$ para determinar a força aplicada no sistema, obtemos $F_R = 0$, o que obviamente está incorrecto. A expressão correcta a usar neste caso é $F_R = dp/dt$, obtendo-se

$$F_R = \frac{dp}{dt} = ma + \frac{dm}{dt}v = 0 + \dot{m}v = \dot{m}v.$$

Repare-se que este resultado faz sentido porque a força F_R é a responsável pelo aumento do momento linear do sistema e este último aumenta simplesmente porque a massa do sistema aumenta.

Resolução 2

É possível resolver este problema usando a equação $F_R = ma$ se considerarmos “o sistema” uma pequena parcela da massa de areia que está a ser adicionada ao vagão. A força será, então, a grandeza responsável por acelerar esta massa desde o repouso até à velocidade v . Seja Δm a massa carregada sobre o vagão no intervalo de tempo Δt . Imaginemos que a referida massa cai no vagão de uma só vez no instante inicial e

que acelera até à velocidade v durante o intervalo de tempo Δt e que este processo se repete a cada intervalo de tempo Δt . Como neste caso Δm é constante podemos aplicar $F_R = ma$, obtendo-se

$$F_R = ma = \Delta m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \Delta m \frac{v - 0}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta m}{\Delta t} \right) v = \dot{m}v,$$

resultado idêntico ao anteriormente obtido através da resolução 1.

5.2. Impulso de uma força

O *impulso de uma força*, \vec{J} , mede o efeito total dessa força no sistema durante um dado intervalo de tempo. Define-se como o integral dessa força no tempo, para o intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ em questão:

$$\vec{J}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt. \quad (5.6)$$

O impulso de uma força é uma grandeza vectorial cujas unidades SI são o newton \times segundo (N s). O impulso assume especial importância quando lidamos com forças que actuam durante intervalos de tempo muito curtos, como por exemplo durante os choques ou colisões – impactos de curta duração entre corpos. Utilizando a segunda lei de Newton escrita em termos do momento linear, *vide* equação (5.2), tem-se, para o impulso da resultante das forças que se exercem sobre uma partícula,

$$\vec{J}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_R dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}, \quad (5.7)$$

portanto,

$$\vec{J}(t_1, t_2) = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1. \quad (5.8)$$

Conclui-se, assim, que o impulso da resultante das forças que se exercem sobre uma dada partícula material é igual à variação do momento linear da partícula durante o intervalo de tempo considerado. Em muitas situações de interesse prático, como por exemplo nas colisões, não é conhecida a expressão da força instantânea, $\vec{F}(t)$. No entanto, a partir do conhecimento do impulso e do tempo durante o qual essa força actua pode ser calculada uma força média:

$$\vec{F}_{med} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}. \quad (5.9)$$

Finalmente, note-se que das equações (5.6) e (5.8) se segue que a unidade N s é exactamente igual à unidade kg m s^{-1} ; a única diferença está em que se convencionou usar a primeira como unidade de impulso de uma força e a segunda como unidade de momento linear.

Exemplo 5.2

Uma partícula de massa $m = 2 \text{ kg}$ encontra-se animada de velocidade $\vec{v}_0 = 2\vec{j} \text{ m s}^{-1}$ quando é subitamente actuada por uma força $\vec{F}(t) = 2t\vec{i} + t^2\vec{j}$ (SI) durante 3 s. Calcular: a) o impulso da força no intervalo de tempo em que actuou a partícula; b) a velocidade da partícula após a actuação da força.

Resolução:

a) O impulso da força é

$$\vec{J} = \int_0^3 \vec{F}(t) dt = \int_0^3 (2t\vec{i} + t^2\vec{j}) dt = 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^3 \vec{i} + \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^3 \vec{j} = 9\vec{i} + 9\vec{j} \text{ N s.}$$

b) Como o impulso da força é igual à variação do momento linear da partícula, isto é,

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_3 - \vec{p}_0 = 9\vec{i} + 9\vec{j} \text{ kg m s}^{-1},$$

vem

$$\vec{p}_3 = \Delta\vec{p} + \vec{p}_0 = \Delta\vec{p} + m\vec{v}_0 = 9\vec{i} + 9\vec{j} + 4\vec{j} = 9\vec{i} + 13\vec{j} \text{ kg m s}^{-1},$$

resultando finalmente

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{p}_3}{m} = \frac{9}{2}\vec{i} + \frac{13}{2}\vec{j} \text{ m s}^{-1}.$$

Exemplo 5.3

Uma bola de futebol com uma massa de 0.4 kg move-se horizontalmente da direita para a esquerda com velocidade de valor 20 m s^{-1} quando é chutada por um jogador. Após o chute, a bola adquire uma velocidade de valor 30 m s^{-1} e dirigida segundo um ângulo de 45° com a horizontal. Calcular: a) o impulso da força aplicada na bola pelo jogador; b) a força média aplicada na bola, admitindo que o tempo de contacto entre a chuteira e a bola foi de 0.01 s; c) o ângulo que a força média faz com a horizontal.

Resolução:

a) A velocidade inicial da bola é $\vec{v}_i = -20\vec{i} \text{ m s}^{-1}$ e a velocidade após o chute do jogador é $\vec{v}_f = 30\cos 45^\circ\vec{i} + 30\sin 45^\circ\vec{j} \text{ m s}^{-1}$. Se desprezarmos todas as outras forças que se exercem sobre a bola, ou seja, o seu peso e a força de atrito, por serem muito menores do que a força exercida pelo jogador, o impulso desta última força será igual à variação do momento linear da bola, ou seja,

$$\vec{J} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = 16.5\vec{i} + 8.5\vec{j} \text{ N s},$$

cujo valor ou magnitude é

$$J = \sqrt{16.5^2 + 8.5^2} = 18.6 \text{ N s.}$$

b) A força média é

$$\vec{F}_{med} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{16.5}{0.01} \vec{i} + \frac{8.5}{0.01} \vec{j} = 1650 \vec{i} + 850 \vec{j} \text{ N,}$$

com magnitude

$$F_{med} = \sqrt{1650^2 + 850^2} = 1.86 \times 10^3 \text{ N,}$$

a qual é, efectivamente, muito maior do que o valor do peso da bola, que é 3.92 N.

c) O ângulo formado pela força média e a horizontal é

$$\theta = \arctan(850 / 1650) = 27^\circ$$

Repare-se que θ é inferior ao ângulo com que é chutada a bola (45°). A razão para tal facto é que a bola não estava em repouso quando foi impulsionada pelo pé do jogador e, por isso, a sua velocidade após o chute não tem a mesma direcção da força média nela aplicada.

5.3. Momento linear de um sistema de partículas e sua conservação

Consideremos agora um sistema de n partículas materiais de massas m_1, \dots, m_n e velocidades $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. O *momento linear total* deste sistema de partículas materiais é simplesmente a soma dos momentos lineares das partículas individuais, ou seja,

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i, \quad (5.10)$$

com $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ o momento linear da partícula i ($i = 1, \dots, n$).

Questão: Como se exprime a conservação (ou não) do momento linear no caso de um sistema de n partículas?

Começemos por observar que as forças que se exercem sobre as partículas que compõem o sistema são de dois tipos:

- i. *forças interiores*, que resultam da interacção entre as partículas que compõem o sistema. Usaremos a notação \vec{F}_{ij} para representar a força interior exercida sobre a partícula i pela partícula j ;
- ii. *forças exteriores*, que são as forças exercidas sobre as partículas por agentes exteriores ao sistema, por exemplo a força da gravidade, ou (no caso de as partículas terem carga eléctrica) as forças devidas a campos eléctricos e/ou magnéticos. Usaremos a notação \vec{F}_i^{ext} para representar a força resultante exterior que actua a partícula i .

Deste modo, a força resultante (total) que actua a partícula i de um sistema de n partículas é

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} . \quad (5.11)$$

Procuramos agora dar resposta à questão formulada. Para simplificar a discussão, mas sem perda de generalidade, consideremos um sistema composto por apenas três partículas, conforme se indica na figura 5.1.

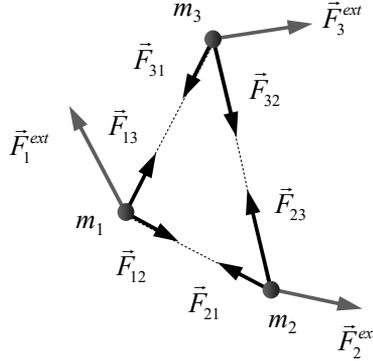


Figura 5.1. Sistema de três partículas e forças (interiores e exteriores) que entre elas se exercem.

Aplicando a segunda lei de Newton a cada partícula, isto é, fazendo $\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} . \\ \frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{F}_3 = \vec{F}_3^{ext} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} \end{cases} \quad (5.12)$$

A variação do momento linear total do sistema é dada pela soma das variações dos momentos lineares de cada uma das partículas suas constituintes, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \frac{d\vec{p}_3}{dt} \\ &= \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_3^{ext} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} \end{aligned} . \quad (5.13)$$

Mas, segundo a terceira lei de Newton, a força que a partícula j exerce sobre a partícula i é igual e oposta à que a partícula i exerce sobre a partícula j , logo

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}, \quad \vec{F}_{31} = -\vec{F}_{13} . \quad (5.14)$$

Das equações (5.13) e (5.14) resulta então que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_3^{ext} = \vec{F}_R = \vec{F}_R^{ext} , \quad (5.15)$$

ou seja, que a variação temporal do momento linear total de um sistema de partículas materiais é igual à força exterior total que se exerce sobre o sistema. Em particular, resulta desta expressão o *princípio de conservação do momento linear para um sistema de n partículas*:

Se um sistema de n partículas não for actuado por quaisquer forças exteriores ou a resultante das forças exteriores for nula, o momento linear total do sistema mantém-se constante – diz-se que é conservado.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_R^{ext} \Rightarrow \vec{p} = \overline{const} \text{ sse } \vec{F}_R^{ext} = \vec{0}.$$

Repare-se que este resultado é totalmente independente das forças que se exercem entre as partes constituintes do sistema (forças interiores); estas não têm qualquer efeito sobre o momento linear total. É isto que nos permitirá, na secção seguinte, tratar os choques ou colisões aplicando o princípio de conservação do momento linear: na ausência de forças exteriores, o momento linear do sistema antes da colisão é igual ao momento linear do sistema depois da colisão – sejam quais forem as forças que se exerçam entre os dois ou mais corpos nela envolvidos.

5.4. Choques ou colisões

Um *choque* ou *colisão* é um contacto de curta duração entre dois ou mais corpos. Na ausência de forças exteriores (atrito, etc.), o momento linear total dos corpos depois do choque é igual ao momento linear total dos corpos antes do choque, isto é,

$$\vec{p} = \vec{p}' \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n'} \vec{p}'_i, \quad (5.16)$$

onde as grandezas assinaladas com ' (plica) se referem a grandezas *depois* do choque. Durante o choque, cada um dos corpos intervenientes é actuado por forças devidas aos outros corpos, logo o *seu* momento linear não se conserva: *o que se conserva é apenas a soma dos momentos lineares de todos os corpos, antes e depois do choque, mas não o de cada corpo individual*. Dito de outro modo, *é o momento linear total do sistema que se conserva*.

Num choque, pode acontecer o seguinte:

- Todos os corpos intervenientes conservam a sua integridade.
- Um dos corpos intervenientes fragmenta-se em vários pedaços.
- É transferida massa de um corpo para outro (por exemplo, um pedaço de um corpo fica agarrado a um outro).
- Um ou mais corpos coalescem num só (ou seja, passam a mover-se em conjunto).

Em geral, a conservação do momento linear não determina de modo único as velocidades dos corpos pós-choque, ou seja, existem várias maneiras de atribuir velocidades aos

corpos que emergem de um choque e que satisfazem a conservação do momento linear. Isto deve-se ao facto de a conservação do momento linear ser apenas uma equação, mas haver várias incógnitas – as velocidades dos corpos depois do choque. Em geral, algumas das forças envolvidas serão não conservativas, pelo que a energia mecânica não se conserva. É, portanto, necessário dispor de alguma informação adicional, como, por exemplo, que depois do choque dois dos corpos ficam ligados (logo têm a mesma velocidade), etc..

Os choques classificam-se em *elásticos*, se conservam a energia cinética total do sistema, e *inelásticos*, se não a conservam. Um choque em que se perde o máximo possível de energia cinética (ou seja, em que a variação da energia cinética toma o maior valor negativo que pode tomar) diz-se *perfeitamente inelástico*.

Analisaremos primeiro choques em uma dimensão e depois em duas dimensões. Choques em três dimensões são uma generalização imediata do caso bidimensional.

5.4.1. Choques unidimensionais

Num *choque unidimensional*, as velocidades de todas as partículas, antes e depois do choque, têm a mesma direcção, que podemos tomar para eixo dos xx . Assim sendo, a equação (5.16) pode escrever-se

$$\vec{p} = \vec{p}' \Leftrightarrow \sum_{l=1}^n m_l v_l \vec{i} = \sum_{l=1}^{n'} m'_l v'_l \vec{i} \Leftrightarrow \sum_{l=1}^n m_l v_l = \sum_{l=1}^{n'} m'_l v'_l. \quad (5.17)$$

Note-se que usámos l para os índices de somatório para evitar confusão com o versor \vec{i} . Recorde-se ainda que v_l e v'_l podem ser positivos ou negativos, consoante o movimento da l -ésima partícula for, respectivamente, no sentido positivo ou negativo do eixo Ox .

Consideremos agora um caso particular muito importante na prática: uma *colisão binária*, em que dois corpos colidem, conservando cada um deles a sua integridade. A equação (5.17) escreve-se

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \Leftrightarrow m_1 (v'_1 - v_1) = m_2 (v_2 - v'_2). \quad (5.18)$$

As energias cinéticas totais antes (K) e depois (K') do choque são:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ K' &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Logo a variação de energia cinética é

$$\Delta K = K' - K = \frac{1}{2} m_1 (v_1'^2 - v_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2'^2 - v_2^2). \quad (5.20)$$

É possível exprimir a variação de energia cinética numa colisão binária – e, por conseguinte, o seu carácter mais ou menos elástico – de um modo particularmente sugestivo,

mediante a introdução da grandeza *coeficiente de restituição*, designado por C_R , ou e , e definido como

$$C_R \equiv e = -\frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1}. \quad (5.21)$$

Trata-se de uma grandeza claramente adimensional, que é igual ao simétrico da razão entre os valores da velocidade do corpo 2 em relação ao corpo 1, depois e antes da colisão. Em geral, tem-se $0 < C_R \leq 1$; voltaremos a este assunto um pouco mais adiante. Reescrevendo (5.20) na forma

$$\Delta K = \frac{1}{2}m_1(v'_1 - v_1)(v'_1 + v_1) + \frac{1}{2}m_2(v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2), \quad (5.22)$$

e utilizando (5.21), pode mostrar-se (*exercício: verifique*) que

$$\Delta K = \frac{1}{2}\mu(C_R^2 - 1)(v_2 - v_1)^2, \quad (5.23)$$

onde μ (por vezes também designada por m_{12}) é a *massa reduzida* do sistema, dada por

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.24)$$

Conclui-se, assim, que uma colisão binária elástica corresponde a $C_R = 1$ ($v'_1 = v_2$ corresponde a não haver colisão – porquê? –, caso em que a energia cinética trivialmente se conserva). Neste caso, a velocidade do corpo 2 relativamente ao corpo 1 troca de sinal (sentido) na colisão, mas o seu valor não se altera (o mesmo sucede, evidentemente, com a velocidade do corpo 1 em relação ao corpo 2). Por sua vez, $C_R > 1$ corresponde a um *aumento* da energia cinética total aquando da colisão, o que só é possível se um dos corpos explodir, transformando-se a energia potencial das suas ligações químicas ou nucleares em energia cinética.

E a que corresponderia um hipotético $C_R < 0$? A velocidade do corpo 2 relativamente ao corpo 1 teria de ter o mesmo sinal (logo, o mesmo sentido) antes e depois da colisão, o que só é possível ou se não houver colisão, ou, havendo colisão, se um dos corpos passasse através do outro!

Analisaremos agora mais alguns tipos de choques.

- i. O corpo 1 move-se com velocidade inicial \vec{v}_1 e colide com o corpo 2, que se encontra em repouso, $\vec{v}_2 = \vec{0}$. Depois do choque o corpo 1 fica em repouso, $\vec{v}'_1 = \vec{0}$, e o corpo 2 move-se com velocidade \vec{v}'_2 . Este é um caso particular de choque binário.

Antes:

$$\begin{aligned} \text{momento linear: } \vec{p} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1 \\ \text{energia cinética: } K &= K_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Depois:

$$\begin{aligned} \text{momento linear: } \vec{p}' &= \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = m_2 \vec{v}'_2 \\ \text{energia cinética: } K' &= K'_1 + K'_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Conservação:

$$\begin{aligned} \vec{p}' = \vec{p} &\Rightarrow m_2 \vec{v}'_2 = m_1 \vec{v}_1 \Leftrightarrow \vec{v}'_2 = \frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1 \\ \Delta K = K' - K &= \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1 \right)^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 (m_1 - m_2)}{m_2} v_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_2} \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1 + m_2} v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left[\left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 - 1 \right] v_1^2 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Verifica-se, assim, que a velocidade que o corpo 2 adquire após o choque tem a mesma direcção e sentido que a do corpo 1 antes do choque. Tem-se ainda, da segunda das equações (5.27), que $C_R = m_1/m_2$, logo o choque só é elástico se $m_1 = m_2$, caso em que os dois corpos simplesmente trocam de velocidades ao chocar.

- ii. Um corpo de massa m_0 em repouso explode, dando origem a dois corpos de massas m_1 e m_2 ($m_0 = m_1 + m_2$) animados de velocidades \vec{v}'_1 e \vec{v}'_2 , respectivamente.

Antes:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{p}_0 = \vec{0} \\ K &= K_0 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Depois:

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \\ K' &= K'_1 + K'_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Conservação:

$$\begin{aligned} \vec{p}' = \vec{p} &\Rightarrow m_2 \vec{v}'_2 = -m_1 \vec{v}'_1 \Leftrightarrow \vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{v}'_1 \\ \Delta K = K' - K &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(-\frac{m_1}{m_2} \vec{v}'_1 \right)^2 - 0 = \frac{1}{2} \frac{m_1 (m_1 + m_2)}{m_2} v_1'^2 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Os dois fragmentos adquirem velocidades com a mesma direcção, mas sentidos opostos ($\vec{v}_2 \propto -\vec{v}_1$); uma vez que não se trata de um choque binário, o coeficiente

de restituição não está definido. A energia cinética claramente não é conservada, logo este choque nunca é elástico. Poder-se-á, porém, colocar a seguinte questão: se a energia cinética total do sistema era nula antes da explosão e, claramente, não o é depois da explosão, de onde veio essa energia cinética? A resposta é simples: tem origem nas ligações químicas que se romperam ao dar-se a explosão.

- iii. O corpo 1 move-se com velocidade inicial \vec{v}_1 e colide com o corpo 2 que se encontra em repouso, $\vec{v}_2 = \vec{0}$. Depois do choque os corpos 1 e 2 movem-se em conjunto, $\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2$. Mais uma vez, trata-se de um choque binário.

Antes:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1 \\ K &= K_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2\end{aligned}\quad (5.31)$$

Depois:

$$\begin{aligned}\vec{p}' &= \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}' \\ K' &= K'_1 + K'_2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2\end{aligned}\quad (5.32)$$

Conservação:

$$\begin{aligned}\vec{p}' &= \vec{p} \Rightarrow (m_1 + m_2)\vec{v}' = m_1\vec{v}_1 \Leftrightarrow \vec{v}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 \\ \Delta K &= K' - K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1\right)^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1 + m_2}v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 = -\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}v_1^2\end{aligned}\quad (5.33)$$

Após o choque, o conjunto “corpo 1 + corpo 2” move-se com uma velocidade que tem a mesma direção e sentido que a velocidade inicial do corpo 1. Além disso, comparando a segunda das equações (5.33) com (5.23), conclui-se que $C_R = 0$: a perda de energia cinética é máxima e o choque diz-se *perfeitamente inelástico*.

5.4.2. Choques bidimensionais

Até agora, tratámos apenas os choques unidimensionais, ou seja, em que todas as velocidades têm a mesma direção. Consideremos agora um exemplo de um choque bidimensional no plano Oxy , em que uma partícula de massa m_1 , animada de velocidade \vec{v}_1 segundo a direção e sentido do eixo dos xx , colide com uma partícula de massa m_2 , em repouso ($\vec{v}_2 = \vec{0}$). Após a colisão, as partículas adquirem velocidades \vec{v}'_1 e \vec{v}'_2 com direções formando ângulos $\theta_1 > 0$ e $\theta_2 < 0$ com o eixo dos xx , respectivamente (*vide* figura 5.2).

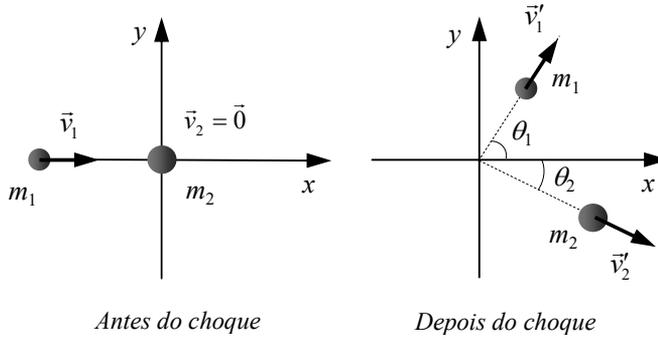


Figura 5.2. Choque em duas dimensões (*vide texto*).

Teremos então,

Antes:

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1 = m_1v_1\vec{i} \quad (5.34)$$

Depois:

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 = \\ &= m_1(v'_1 \cos\theta_1 \vec{i} + v'_1 \sin\theta_1 \vec{j}) + m_2(v'_2 \cos\theta_2 \vec{i} + v'_2 \sin\theta_2 \vec{j}) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Conservação:

$$\vec{p} = \vec{p}' \Leftrightarrow m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \quad (5.36)$$

Expressando todas as velocidades em termos das suas componentes segundo os eixos coordenados, tem-se

$$\begin{cases} m_1v_1 = m_1v'_1 \cos\theta_1 + m_2v'_2 \cos\theta_2 \\ 0 = m_1v'_1 \sin\theta_1 + m_2v'_2 \sin\theta_2 \end{cases} \quad (5.37)$$

Se forem conhecidas as direcções das velocidades dos dois corpos após o choque, θ_1 e θ_2 , o sistema de equações (5.37) permite determinar os valores dessas velocidades após o choque, v'_1 e v'_2 (note-se que o sistema (5.37) é linear em v'_1 e v'_2 , pelo que pode ser resolvido, em ordem a estas incógnitas, utilizando qualquer dos processos aprendidos para o efeito em Álgebra Linear). Em alternativa, se forem conhecidos v'_1 e v'_2 , o mesmo sistema permite determinar θ_1 e θ_2 :

$$\begin{aligned} \begin{cases} m_1v_1 = m_1v'_1 \cos\theta_1 + m_2v'_2 \cos\theta_2 \\ 0 = m_1v'_1 \sin\theta_1 + m_2v'_2 \sin\theta_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{m_1v_1 - m_2v'_2 \cos\theta_2}{m_1v'_1} \\ \sin\theta_1 = -\frac{m_2v'_2}{m_1v'_1} \sin\theta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2\theta_1 = \left(\frac{m_1v_1 - m_2v'_2 \cos\theta_2}{m_1v'_1} \right)^2 \\ \cos^2\theta_1 = 1 - \left(\frac{m_2v'_2}{m_1v'_1} \right)^2 \sin^2\theta_2 \end{cases} \end{aligned}$$

donde se obtém

$$\begin{cases} \cos^2 \theta_1 = \left(\frac{m_1 v_1 - m_2 v_2' \cos \theta_2}{m_1 v_1'} \right)^2 \\ \cos^2 \theta_1 = 1 - \left(\frac{m_2 v_2'}{m_1 v_1'} \right)^2 (1 - \cos^2 \theta_2)^2 \end{cases} \quad (5.38)$$

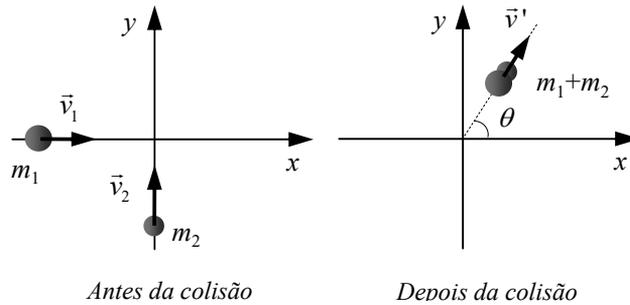
ou seja,

$$\left(\frac{m_1 v_1 - m_2 v_2' \cos \theta_2}{m_1 v_1'} \right)^2 = 1 - \left(\frac{m_2 v_2'}{m_1 v_1'} \right)^2 (1 - \cos^2 \theta_2)^2 \quad (5.39)$$

Desenvolvendo os quadrados, obtém-se uma equação do segundo grau em $\cos \theta_2$, a qual pode ser resolvida para determinar θ_2 (deverá neste caso escolher-se a solução $\theta_2 < 0$, de acordo com a figura 5.2). Uma vez conhecido θ_2 , é imediato achar θ_1 utilizando a segunda equação do sistema (5.38) (deverá neste caso escolher-se a solução $\theta_1 > 0$, de acordo com a figura 5.2).

Exemplo 5.1

Considere-se o seguinte esquema:



Duas partículas de massas $m_1 = 70 \text{ kg}$ e $m_2 = 50 \text{ kg}$ colidem, permanecendo juntas após a colisão. Antes da colisão, a partícula 1 movia-se de oeste para este com velocidade de valor 6 km h^{-1} e a partícula 2 movia-se de sul para norte com velocidade de valor 8 km h^{-1} . a) Determinar a velocidade final das duas partículas. b) Calcular a fracção da energia cinética do sistema perdida na colisão.

Resolução:

a) Antes da colisão, temos:

$$\vec{v}_1 = v_1 \vec{i} = 6 \vec{i} \text{ km h}^{-1} = 1.667 \vec{i} \text{ ms}^{-1}$$

$$\vec{v}_2 = v_2 \vec{j} = 8 \vec{j} \text{ km h}^{-1} = 2.222 \vec{j} \text{ ms}^{-1}$$

Pelo princípio de conservação do momento linear,

$$\vec{p} = \vec{p}' \Leftrightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}'$$

ou seja,

$$70(1.667\vec{i}) + 50(2.222\vec{j}) = (70 + 50)\vec{v}'$$

donde

$$\vec{v}' = 0.972\vec{i} + 0.926\vec{j} \text{ m s}^{-1}$$

$$v' = \sqrt{0.972^2 + 0.926^2} = 1.34 \text{ m s}^{-1}$$

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{v'_y}{v'_x}\right) = \text{arctg}\left(\frac{0.926}{0.972}\right) = 43.6^\circ$$

b)

i) Cálculo da energia cinética do sistema antes e depois do choque:

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2} \times 70 \times 1.667^2 + \frac{1}{2} \times 50 \times 2.222^2 = 220.7 \text{ J};$$

$$K' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = \frac{1}{2} \times 120 \times 1.34^2 = 107.7 \text{ J}.$$

ii) Cálculo da variação da energia cinética:

$$\Delta K = K' - K = 107.7 - 220.7 = -113 \text{ J}.$$

iii) Cálculo da fracção da energia cinética perdida pelo sistema no choque:

$$\frac{|\Delta K|}{K} = \frac{113}{220.7} = 0.512 \quad (51.2\%).$$

5.4.3.* Porque é legítimo desprezar a força da gravidade no estudo das colisões?

Os leitores mais atentos não terão deixado de notar que o estudo que temos estado a fazer das colisões não é consistente caso as colisões não ocorram no espaço livre. De facto, se os corpos têm massa, estarão sujeitos à força da gravidade da Terra – que é claramente uma força exterior, logo o momento linear total não deveria conservar-se. Embora, estritamente falando, isto seja verdade, na prática a variação do momento linear total devida à força da gravidade é pequena ao ponto de ser desprezável. Passemos a demonstrá-lo.

Como vimos no capítulo anterior, a variação do momento linear devido a uma dada força, num dado intervalo de tempo, é igual ao impulso da força. O impulso devido à força da gravidade que se exerce sobre um corpo envolvido na colisão terá, então, valor $J_g = mg\Delta t$, onde Δt é a duração da colisão. O impulso total que se exerce sobre o mesmo corpo, por outro lado, tem valor $J = m\Delta v$, onde Δv é a variação do valor da velocidade do corpo. Para a colisão ser detectável, a variação da velocidade do corpo tem de ter valor não muito inferior ao da sua velocidade inicial, ou seja, $\Delta v \approx v_0$. Então, para que o valor do impulso devido à gravidade seja muito inferior ao impulso total sobre o corpo, tem-se-á de verificar $J \gg J_g \Rightarrow v_0 \gg g\Delta t$. O intervalo de tempo Δt em geral não é conhecido. Para o estimarmos, consideremos um caso em que é dado por uma expressão analítica: a colisão entre duas esferas que não sofrem deformação permanente⁴¹. Trata-se, evidentemente, de uma situação algo artificial, ou, no mínimo, restritiva, mas que nos permitirá ter uma ideia da ordem de grandeza da duração das colisões. Assim, para duas esferas de aço ou de borracha, com raios entre 1 cm e 1 m, e velocidades relativas entre 1 m s^{-1} e 100 m s^{-1} , tem-se sempre que $\Delta t < 0.01 \text{ s}$. Uma vez que $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$, conclui-se que o efeito da gravidade terrestre sobre um corpo envolvido numa colisão é desprezável se a sua velocidade inicial for substancialmente superior a 0.1 m s^{-1} , o que se verifica na maior parte das colisões de interesse envolvendo corpos macroscópicos.

Obviamente, é sempre legítimo desprezar o efeito da gravidade quando os corpos que colidem estejam constrangidos a mover-se num plano horizontal, porque nesse caso a força da gravidade (que é sempre vertical) tem componente nula segundo as direcções das velocidades dos corpos (que são todas horizontais), não podendo, portanto, causar qualquer variação dos seus momentos lineares.

5.5.* Movimento de sistemas de massa variável

Os sistemas com que lidamos no dia a dia são, maioritariamente, sistemas de massa constante. Existem, contudo, sistemas cuja massa é variável no tempo e que importa estudar com mais pormenor. São exemplos mecânicos destes sistemas os aviões utilizados no combate aos incêndios – que carregam água em voo rasante sobre a superfície de albufeiras ou de grandes lagos e a descarregam posteriormente sobre as zonas de fogo –, os aviões com motores de reacção a jacto ou os foguetes. Mas podemos encontrar sistemas de massa variável na natureza: é o caso de uma gota de chuva que ao cair pode perder ou ganhar massa por evaporação ou condensação de água na sua superfície, respectivamente, ou dos moluscos como a lula ou o choco que se movimentam à custa da emissão de um jacto de água através de um sifão móvel e direccionável, conferindo-lhes grande capacidade de manobra.

⁴¹ Vide P. Patrício, “The Hertz contact in chain elastic collisions”, *American Journal of Physics* 72, 1488-1491 (2004).

5.5.1. Movimento de sistemas com admissão de massa

Consideremos um sistema de massa m que, num determinado instante t , se desloca com velocidade \vec{v} e que num instante posterior $t + \Delta t$ absorve uma determinada quantidade de massa Δm , que se deslocava com velocidade \vec{v}_a (*vide* figura 5.3).

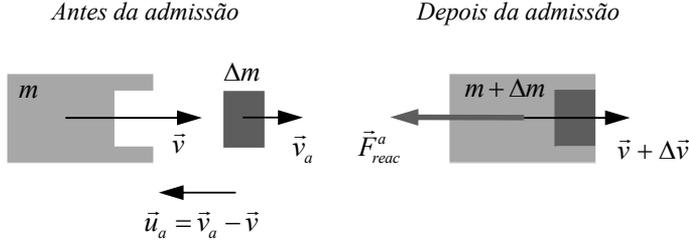


Figura 5.3. Movimento de um sistema de massa m com velocidade \vec{v} que absorve uma determinada quantidade de massa Δm que se deslocava com velocidade \vec{v}_a . A velocidade de Δm em relação a m é $\vec{u}_a = \vec{v}_a - \vec{v}$. Em consequência da admissão da massa Δm surge a força de reacção de admissão \vec{F}_{reac}^a .

Vamos estudar a dinâmica deste sistema com base na variação do momento linear do sistema global “massa absorvente + massa admitida”. O momento linear deste sistema antes de ocorrer a admissão da massa Δm é

$$\vec{p}_i = m\vec{v} + \Delta m\vec{v}_a, \quad (5.40)$$

e após a admissão de Δm é

$$\vec{p}_f = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}). \quad (5.41)$$

Deste modo, a variação do momento linear do sistema global é

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\Delta\vec{v} + \Delta m(\vec{v} - \vec{v}_a) + \Delta m\Delta\vec{v}. \quad (5.42)$$

Dividindo agora a expressão (5.42) por Δt , tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$ e desprezando o termo infinitesimal de segunda ordem $dm d\vec{v}$, obtemos

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{v}_a)\frac{dm}{dt}. \quad (5.43)$$

Como, por (5.6), a resultante das forças exteriores aplicadas no sistema é $\vec{F}_R^{ext} = d\vec{p}/dt$, podemos reescrever a equação (5.43) na forma

$$\vec{F}_R^{ext} - (\vec{v} - \vec{v}_a)\frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \vec{F}_R^{ext} + \vec{u}_a\frac{dm}{dt} = m\vec{a}, \quad (5.44)$$

onde

$$\vec{u}_a = \vec{v}_a - \vec{v}, \quad (5.45)$$

é a velocidade relativa da massa admitida em relação a m e

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_a > 0, \quad (5.46)$$

é o *caudal mássico de admissão*. Representa a massa por unidade de tempo admitida pelo sistema de massa inicial m e expressa-se no SI em kg s^{-1} . O seu valor é sempre positivo porque representa a massa ganha pelo sistema por unidade de tempo.

Ao termo

$$\vec{F}_{\text{reac}}^a = \vec{u}_a \frac{dm}{dt} = \vec{u}_a \dot{m}_a, \quad (5.47)$$

chama-se *força de reacção de admissão*. É uma força de reacção interna sobre o sistema de massa m^{42} , que tem origem na interacção entre a massa admitida e o sistema que a absorveu. Pela equação (5.38) e tendo em conta que $\dot{m}_a > 0$, vemos que \vec{F}_{reac}^a tem sentido igual ao da velocidade relativa da massa admitida, \vec{u}_a (*vide* figura 5.3)

Exemplo 5.2

Um avião de combate a incêndios *Canadair* CL-415 tem massa de 12880 kg com os tanques de água vazios. Ao efectuar um voo rasante a 130 km h^{-1} sobre a superfície da água de uma albufeira, recarrega os tanques admitindo, a uma taxa constante, 6137 l de água em 12 s. Determinar a aceleração sofrida pelo avião quando inicia a admissão de água. *Dado:* a massa volúmica da água é $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

Resolução:

O caudal mássico de admissão é

$$\dot{m}_a = \frac{dm}{dt} = \text{taxa constante} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}} \Delta V}{\Delta t} = 511.42 \text{ kg s}^{-1}.$$

Como a superfície da água está em repouso ($v_a = 0$), teremos para a velocidade relativa de admissão da água no avião

$$u_a = -v = -130 \text{ km h}^{-1} = -36.11 \text{ m s}^{-1}.$$

Usando (5.44) e tendo em conta que a resultante das forças exteriores que actuam o avião é nula (o avião voa com velocidade constante antes de tocar a superfície da água), a sua aceleração após iniciar a admissão de água é

$$a = \frac{F_{\text{reac}}^a}{m} = \frac{u_a \dot{m}_a}{m} = \frac{-36.11 \times 511.42}{12880} = -1.43 \text{ ms}^{-2}$$

É uma aceleração negativa, como seria de esperar. O avião perde velocidade quando inicia a admissão de água.

⁴² Sendo a força de reacção de admissão uma força de reacção interna ao sistema, terá obviamente que fazer parte de um par acção-reacção. A força que constitui o seu par acção-reacção é a força que o sistema de massa m exerce sobre a massa admitida Δm .

5.5.2. Movimento de sistemas com ejeção de massa

Consideremos agora um sistema de massa m que, num determinado instante t , se desloca com velocidade \vec{v} , ejectando, em seguida, uma determinada quantidade de massa $-\Delta m$ ($\Delta m < 0$ porque corresponde a uma perda de massa) num intervalo de tempo Δt . No instante $t + \Delta t$, a massa ejectada Δm move-se com velocidade \vec{v}_e e a massa sobranete $m + \Delta m$ com velocidade $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ (vide figura 5.4).

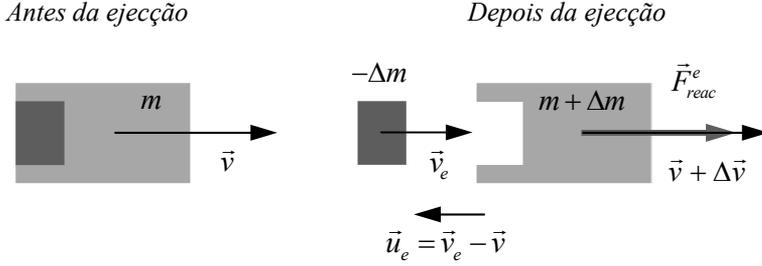


Figura 5.4. Movimento de um sistema de massa m com velocidade \vec{v} que ejecta uma pequena quantidade de massa $-\Delta m$ ($\Delta m < 0$) que se desloca com velocidade \vec{v}_e . A velocidade relativa de $-\Delta m$ em relação à massa sobranete $m + \Delta m$ é $\vec{u}_e = \vec{v}_e - \vec{v}$. Em consequência da ejeção da massa $-\Delta m$ surge a força de reacção de ejeção \vec{F}_{reac}^e .

Os procedimentos que vamos seguir para estudar a dinâmica deste sistema são em tudo análogos aos seguidos no caso de um sistema que admite massa. O momento linear do sistema global “massa sobranete + massa ejectada” antes da ejeção da massa Δm é

$$\vec{p}_i = m\vec{v}, \quad (5.48)$$

e após a ejeção de Δm é

$$\vec{p}_f = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) - \Delta m\vec{v}_e. \quad (5.49)$$

Daqui resulta que a variação do momento linear do sistema global é

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\Delta\vec{v} - \Delta m(\vec{v}_e - \vec{v}) + \Delta m\Delta\vec{v}. \quad (5.50)$$

Dividindo a expressão (5.50) por Δt , tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$ e desprezando o termo infinitesimal de segunda ordem $dm d\vec{v}$, obtemos

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - (\vec{v}_e - \vec{v})\frac{dm}{dt}. \quad (5.51)$$

Recordando novamente que a resultante das forças exteriores aplicadas no sistema é $\vec{F}_R^{\text{ext}} = d\vec{p}/dt$, podemos reescrever a equação (5.51) na forma

$$\vec{F}_R^{\text{ext}} + (\vec{v}_e - \vec{v})\frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \vec{F}_R^{\text{ext}} + \vec{u}_e\frac{dm}{dt} = m\vec{a}, \quad (5.52)$$

onde

$$\vec{u}_e = \vec{v}_e - \vec{v}, \quad (5.53)$$

é a velocidade relativa da massa ejetada em relação à massa sobranete e

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_e < 0, \quad (5.54)$$

é o *caudal mássico de ejeção*. Representa a massa por unidade de tempo ejetada pelo sistema de massa inicial m . O seu valor é sempre negativo porque traduz a massa perdida pelo sistema por unidade de tempo.

Ao termo

$$\vec{F}_{\text{reac}}^e = \vec{u}_e \frac{dm}{dt} = \vec{u}_e \dot{m}_e, \quad (5.55)$$

chama-se *força de reacção de ejeção*. Tal como a força de reacção de admissão, a força de reacção de ejeção é uma força de reacção interna que tem origem na interacção entre a massa ejetada e o sistema que a ejectou, exercendo-se sobre a massa sobranete. Pela equação (5.55) e tendo em conta que $\dot{m}_e < 0$, vemos que \vec{F}_{reac}^e tem sentido contrário à velocidade relativa da massa ejetada, \vec{u}_e (*vide* figura 5.4).

5.5.2.1. Movimento de um foguete sob acção da gravidade

O foguete é, possivelmente, o mais conhecido de todos os sistemas cuja dinâmica é determinada pela ejeção de massa. Trata-se de um projectil que sofre a acção de uma força contínua de reacção em resultado da descarga de gases produzidos no interior da sua câmara de combustão. Deste modo, a variação da velocidade de um foguete é conseguida pelo consumo do combustível e consequente decréscimo da massa que transporta.

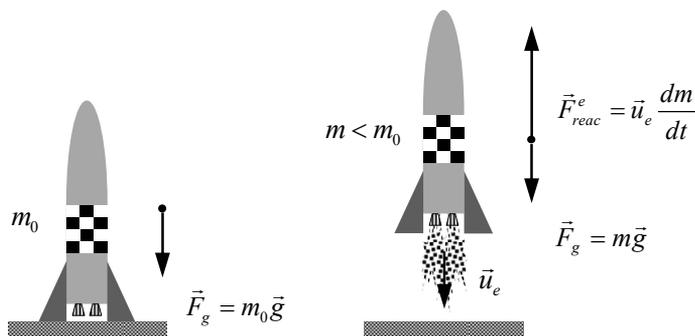


Figura 5.5. Lançamento vertical de um foguete sob a acção da força gravítica. Antes da ignição dos motores, o foguete tem massa m_0 , incluindo a massa do combustível. Após a ignição dos motores, os gases resultantes da queima do combustível são ejetados com velocidade relativa \vec{u}_e em relação ao foguete, a uma taxa (caudal mássico de ejeção) $\dot{m}_e = dm/dt < 0$. Em consequência surge a força de reacção de ejeção \vec{F}_{reac}^e , responsável pela propulsão do foguete.

Vamos estudar a dinâmica de um foguete tendo como base as equações (5.52) e (5.55), admitindo que é lançado na vertical, de baixo para cima e que está sujeito apenas à força gravítica⁴³ (*vide* figura 5.5). Neste contexto, a equação que rege a dinâmica de um foguete é

$$\vec{F}_g + \vec{u}_e \frac{dm}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow m\vec{g} + \vec{u}_e \frac{dm}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (5.56)$$

ou, rearranjando os membros da equação (5.56),

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \vec{u}_e \frac{1}{m} \frac{dm}{dt}. \quad (5.57)$$

Para resolver esta equação diferencial vamos admitir que no instante de lançamento ($t = 0$) a massa inicial do conjunto “foguete + combustível” é m_0 , que a velocidade relativa de ejeção dos gases é constante e que se pode desprezar a variação da aceleração gravítica com a altitude⁴⁴. Com estes pressupostos, a equação diferencial (5.57) pode ser facilmente resolvida. De facto, multiplicando ambos os membros de (5.57) por dt , obtém-se

$$d\vec{v} = \vec{g} dt + \vec{v}_e \frac{1}{m} dm. \quad (5.58)$$

Integrando esta última expressão, vem

$$\int_0^{\vec{v}} d\vec{v}' = \int_0^t \vec{g} dt' + \vec{v}_e \int_{m_0}^m \frac{1}{m'} dm', \quad (5.59)$$

donde resulta que a velocidade instantânea de um foguete é dada por

$$\vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{u}_e \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) = \vec{g}t - \vec{u}_e \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right), \quad (5.60)$$

com $m(t)$ a massa sobranete (foguete + combustível não consumido). Caso o caudal mássico de ejeção seja constante, verifica-se (*exercício*: deduza esta equação)

$$m(t) = m_0 - |\dot{m}_e|t, \quad (5.61)$$

e podemos, portanto, escrever a equação das velocidades de um foguete na forma

$$\vec{v}(t) = \vec{g}t - \vec{u}_e \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - |\dot{m}_e|t}\right). \quad (5.62)$$

⁴³ Estamos a desprezar a força de atrito no ar.

⁴⁴ Os cálculos que a seguir se efectuam são, por isso, apenas válidos perto da superfície da Terra. Como sabemos, a força gravítica diminui com o aumento da distância à superfície da Terra.

Note-se ainda que, caso se considere nas equações (5.60) ou (5.62) o intervalo de tempo correspondente ao consumo total do combustível, a massa $m(t)$ corresponde à massa final (massa do foguete sem combustível) e a velocidade à velocidade máxima atingida pelo foguete.

Exemplo 5.3

A massa de um foguete no momento do lançamento é de 21×10^3 kg, incluindo 15×10^3 kg de combustível. Os gases resultantes da queima de combustível são ejetados a uma taxa constante de 190 kg s^{-1} (caudal mássico de ejeção) com uma velocidade relativa de 2800 m s^{-1} . Determinar: a) a força de reação de ejeção responsável pela propulsão do foguete; b) o instante correspondente à queima total do combustível; c) a velocidade máxima atingida pelo foguete.

Resolução:

- a) Como o movimento é vertical, podemos escamotear o carácter vectorial da aceleração gravítica e da velocidade relativa de ejeção dos gases, tendo apenas em conta os seus respectivos sinais. Tomamo-los como negativos, considerando que o eixo dos yy está orientado de baixo para cima. Tendo ainda em conta que o caudal mássico de ejeção é negativo porque corresponde a uma perda de massa, teremos para a força de reação de ejeção

$$F_{\text{reac}}^e = v_e \frac{dm}{dt} = v_e \dot{m}_e = (-2800)(-190) = 5.32 \times 10^5 \text{ N}$$

Obtemos uma força positiva, como seria de esperar; sendo esta a força responsável pela propulsão do foguete teria forçosamente de apontar de baixo para cima.

- b) Como o combustível é queimado a uma taxa constante, o tempo que demora a queimar a totalidade do combustível é

$$t = \frac{m_{\text{comb}}}{|\dot{m}_e|} = \frac{15 \times 10^3}{190} = 78.95 \text{ s},$$

onde m_{comb} representa a massa total de combustível e $|\dot{m}_e|$ o módulo do caudal mássico de ejeção dos gases resultantes da queima do combustível.

- c) A velocidade máxima atingida pelo foguete é calculada usando a expressão (5.60) para $t = 78.95$ s, e tendo em conta que neste instante a massa sobranete é a massa do foguete sem combustível (6×10^3 kg)

$$\begin{aligned} v_{\text{max}} &= v(t = 78.95) = -9.8 \times 78.95 - (-2800) \times \ln \left(\frac{21 \times 10^3}{6 \times 10^3} \right) = \\ &= 2734.03 \text{ ms}^{-1}. \end{aligned}$$

A equação das velocidades de um foguete merece ainda mais uma observação. Vemos por (5.60) ou (5.62) que a velocidade de um foguete depende do produto da velocidade

relativa de ejeção dos gases pelo logaritmo da razão das massas m_0 / m . Como a função logaritmo é uma função que varia lentamente com a variação do argumento, a forma mais eficaz de obter velocidades elevadas é impondo velocidades relativas de ejeção muito grandes. Os motores de reacção dos foguetes espaciais podem ejectar gases a velocidades relativas da ordem de $4 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$. Em consequência, as velocidades atingidas por estes foguetes são também da ordem de 10^3 m s^{-1} .

5.5.3. Movimento de sistemas com admissão e ejeção de massa

A generalização do que anteriormente vimos a sistemas que simultaneamente admitem e ejectam massa, através de n_a fontes de admissão e de n_e fontes de ejeção de massa, respectivamente, é agora bastante simples. Basta ter em atenção que a admissão de massa no sistema induz uma força de reacção de admissão $\vec{F}_{\text{reac}}^a = \vec{u}_a \dot{m}_a$, tendo-se tantas forças deste tipo quantas as fontes de admissão de massa no sistema, e que a ejeção de massa induz uma força de reacção de ejeção $\vec{F}_{\text{reac}}^e = \vec{u}_e \dot{m}_e$, tendo-se, igualmente, tantas forças deste tipo quantas as fontes de ejeção de massa do sistema. Deste modo, a equação da dinâmica deste tipo de sistemas é dada por

$$\begin{aligned} \vec{F}_R^{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{reac}}^a + \vec{F}_{\text{reac}}^e &= m\vec{a} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{F}_R^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^{n_a} \vec{u}_a^i \dot{m}_a^i + \sum_{i=1}^{n_e} \vec{u}_e^i \dot{m}_e^i &= m\vec{a}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

com

$$\vec{F}_{\text{reac}}^a = \sum_{i=1}^{n_a} \vec{u}_a^i \dot{m}_a^i \quad (5.64)$$

a força de reacção total de admissão e

$$\vec{F}_{\text{reac}}^e = \sum_{i=1}^{n_e} \vec{u}_e^i \dot{m}_e^i \quad (5.65)$$

a força de reacção total de ejeção. Devemos ainda sublinhar que os caudais mássicos de admissão verificam sempre $\dot{m}_a^i > 0$ e que os caudais mássicos de ejeção verificam sempre $\dot{m}_e^i < 0$.

Exemplo 5.4

Um avião a jacto F-16 voa horizontalmente a uma velocidade constante de 1062 km h^{-1} . Nesta situação, a admissão de ar é feita a uma taxa de $60 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, à queima do combustível corresponde um caudal mássico de ejeção de 0.9 kg s^{-1} e os gases (da queima de combustível + ar) são ejectados a uma velocidade relativa de 640 m s^{-1} . Sabendo que a massa volúmica do ar é $r_{\text{ar}} = 1.21 \text{ kg m}^{-3}$, determinar: a) os caudais mássicos de admissão e de ejeção; b) as forças de reacção de admissão e de ejeção totais; c) a resultante das forças exteriores exercidas sobre o avião para o manter à velocidade constante acima referida.

Resolução:

- a) Temos três caudais mássicos: um de admissão (ar, $n_a = 1$) e dois de ejeção (gases de combustão e ar, $n_e = 2$). Assim:

$$\dot{m}_a^{ar} = 1.21 \times 60 = 72.6 \text{ kg s}^{-1} \text{ caudal mássico de admissão de ar;}$$

$$\dot{m}_e^{comb} = -0.9 \text{ kg s}^{-1} \text{ caudal mássico de ejeção dos gases de combustão;}$$

$$\dot{m}_e^{ar} = -\dot{m}_a^{ar} = -72.6 \text{ kg s}^{-1} \text{ caudal mássico de ejeção de ar (o ar que entra é o que sai).}$$

- b) A força de reacção de admissão total que actua o avião é apenas a força de reacção de admissão do ar. Supomos que o ar está em repouso relativamente ao referencial Terra (desprezamos a velocidade do vento, que tipicamente é muito inferior à velocidade de um avião). Deste modo, a velocidade relativa do ar em relação ao avião é $u_a^{ar} = -v_{avião} = -1062 \text{ km h}^{-1} = -295 \text{ m s}^{-1}$. Logo a força de reacção de admissão é

$$F_{reac}^a = u_a^{ar} \dot{m}_a^{ar} = -295 \times 72.6 = -21417 \text{ N.}$$

Quanto à força de reacção de ejeção, tem a contribuição da ejeção dos gases de combustão e da ejeção do ar. Tanto os gases de combustão como o ar são ejetados com velocidade relativa $v_e = -640 \text{ m s}^{-1}$, pelo que a força de reacção total de ejeção é

$$F_{reac}^e = v_e (\dot{m}_e^{comb} + \dot{m}_e^{ar}) = -640 \times (-0.9 - 72.6) = 47040 \text{ N.}$$

- c) Como o avião se desloca com velocidade constante, a soma da resultante das forças exteriores com as forças de reacção terá que ser nula. Logo

$$F_R^{ext} + F_{reac}^a + F_{reac}^e = 0 \Leftrightarrow F_R^{ext} = -F_{reac}^a - F_{reac}^e,$$

donde

$$F_R^{ext} = +21417 - 47040 = -25623 \text{ N} \approx -25.6 \text{ kN.}$$

Esta força é a resultante das forças de atrito do ar sobre o avião.

5.6. Centro de massa de um sistema de partículas materiais

Um sistema composto por vários (ou seja, mais do que um) corpos possui um ponto com propriedades especiais chamado *centro de massa* (CM) do sistema. Como veremos a seguir, a importância deste ponto reside no facto de ele se mover como se a totalidade da massa do sistema nele estivesse concentrada.

Por definição, a *posição do centro de massa do sistema* é dada pelo vector

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad (5.66)$$

cujas coordenadas cartesianas são

$$\begin{cases} x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{cases} \quad (5.67)$$

A *velocidade do centro de massa*, \vec{v}_{CM} , é evidentemente dada por

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (5.68)$$

Da definição de momento linear do sistema de partículas, resulta

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_{CM}, \quad (5.69)$$

com $m = m_1 + \dots + m_n$ a massa total do sistema de partículas. Vemos assim que o momento linear do sistema de partículas é igual ao momento linear de uma partícula com a massa total do sistema e que se move com a velocidade do CM. Como exemplo, consideremos o lançamento oblíquo de um projectil cuja trajectória está representada na figura 5.6. Imaginemos que num dado ponto da trajectória o projectil explode, dividindo-se em vários fragmentos. Como a explosão resulta de uma reacção química que ocorre no interior do projectil, as forças que dela resultam, e que levam à separação dos fragmentos, são forças internas. Não podem, por isso, modificar o momento linear total do sistema, ainda que alterem o momento linear de cada um dos fragmentos. Deste modo a velocidade do CM do sistema, antes e depois da explosão, não varia; o CM do conjunto de fragmentos continuará, portanto, a percorrer a trajectória parabólica que o projectil percorreria se não tivesse explodido.

No que respeita à *aceleração do centro de massa*, \vec{a}_{CM} , é determinada derivando em ordem ao tempo o vector velocidade do centro de massa, obtendo-se

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_{CM}}{dt^2} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_n \vec{a}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (5.70)$$

Momento linear e suas aplicações

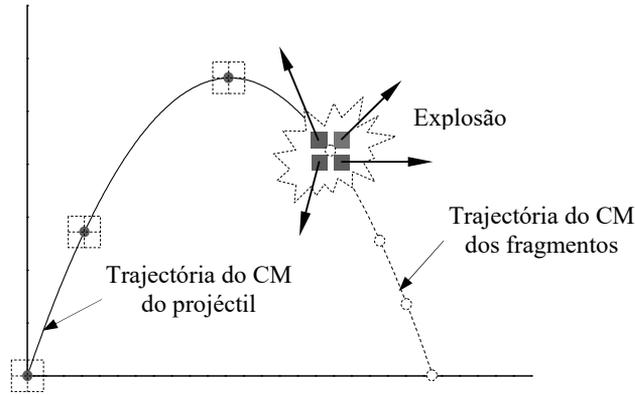


Figura 5.6. Um projétil é lançada obliquamente percorrendo uma trajetória parabólica. Num dado instante explode, dividindo-se em vários fragmentos. O CM do conjunto dos fragmentos prossegue ao longo da trajetória parabólica original.

Desta expressão resulta que

$$\begin{aligned} m\vec{a}_{CM} &= m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \dots + m_n\vec{a}_n = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \dots + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n) = \frac{d\vec{p}}{dt}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$m\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (5.71)$$

Ora, como vimos atrás, na ausência de forças exteriores o momento linear do sistema conserva-se, logo, pela equação (5.71), a aceleração do centro de massa é nula: *o centro de massa de um sistema sobre o qual não actuam forças exteriores move-se com velocidade constante*. Em particular, no decurso de uma colisão, a velocidade do centro de massa permanece constante.

Por outro lado, se existirem forças exteriores,

$$\vec{F}_R^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_{CM}, \quad (5.72)$$

o que significa que o centro de massa de um sistema de partículas materiais se move, sob a acção das forças exteriores, como se fosse uma partícula pontual de massa igual à massa total do sistema. Note-se, contudo, que o centro de massa não é, forçosamente, um ponto material real na medida em que, em geral, não coincide com nenhuma parte (partícula) do sistema.

5.7. Movimento em relação ao centro de massa

É por vezes conveniente estudar os movimentos das partículas que constituem um dado sistema em relação ao centro de massa desse mesmo sistema, ou seja, no chamado *referencial do centro de massa*. Este referencial tem a sua origem no centro de massa e eixos paralelos aos do referencial do laboratório. No que se segue, as grandezas sem ' (plica) são medidas no referencial do laboratório e as grandezas com ' (plica) são medidas no referencial do centro de massa.

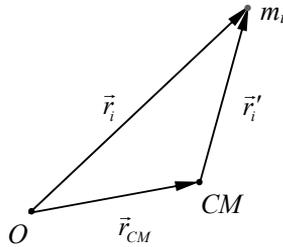


Figura 5.7. Posição de uma partícula em relação à origem do referencial do laboratório e em relação ao centro de massa do sistema de partículas.

Utilizando as regras da adição de vectores, é imediato concluir da figura 5.7 que existe a seguinte relação entre o vector posição \vec{r}_i da partícula i no referencial do laboratório (com origem no ponto O) e o vector posição \vec{r}'_i dessa mesma partícula no referencial do centro de massa:

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM} \Leftrightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM}, \quad (5.73)$$

onde \vec{r}_{CM} é o vector posição do centro de massa do sistema no referencial do laboratório. Derivando a equação (5.73) em ordem ao tempo, obtém-se

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM}. \quad (5.74)$$

De igual modo se define \vec{p}'_i , o momento linear da partícula i no referencial do centro de massa, como

$$\vec{p}'_i = m_i \vec{v}'_i = m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{CM}) = m_i \left(\vec{v}_i - \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \right). \quad (5.75)$$

Um corolário importante desta última definição é que o *momento linear total do sistema calculado em relação ao referencial do centro de massa é nulo*, isto é,

$$\vec{p}' = \sum_{i=1}^n \vec{p}'_i = \vec{0}. \quad (5.76)$$

Exercício: verifique a relação (5.76).

5.8. Energia cinética translacional de um sistema de partículas materiais

A energia cinética de um sistema de partículas materiais é a soma das energias cinéticas das diferentes partículas, ou seja,

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2. \quad (5.77)$$

É, no entanto, conveniente escrevê-la em termos da velocidade do centro de massa. Para tal basta utilizar a equação (5.74):

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM})^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}'_i{}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{CM}^2 + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_{CM} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}'_i{}^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{v}_{CM}^2 + \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i \right) \cdot \vec{v}_{CM} \end{aligned}$$

Analisemos cada parcela do segundo membro desta igualdade:

$$P1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}'_i{}^2 = K'$$

Representa a energia cinética do sistema, calculada em relação ao CM.

$$P2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{v}_{CM}^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}_{CM}^2 = K_{CM}$$

Representa a energia cinética de translação do CM.

$$P3 = \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i \right) \cdot \vec{v}_{CM} = \vec{p}' \cdot \vec{v}_{CM} = 0$$

Usando a relação (5.67).

Resulta então que

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}'_i{}^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}_{CM}^2 = K' + K_{CM}, \quad (5.78)$$

ou seja, a energia cinética pode ser separada numa parte *interna* (ou *local*) e numa parte *externa* (ou *global*)⁴⁵. A parte interna ou local, K' , é dada pela energia cinética das par-

⁴⁵ Os termos “externo” ou “global” são empregues porque um observador colocado a uma distância muito superior à distância média entre partículas observará o sistema de partículas como se de uma só partícula se tratasse, com a massa total do sistema concentrada no CM e com energia cinética dada por $m\vec{v}_{CM}^2/2$. Já os termos “interno” ou “local” são usados devido ao facto de a energia cinética medida no referencial do CM coincidir com a energia cinética interna do sistema.

tículas constituintes no referencial do centro de massa; a parte externa ou global, K_{CM} , pela energia cinética do sistema como um todo. Esta parte global é igual à energia de uma partícula cuja massa é a massa total do sistema e cuja velocidade é a velocidade do centro de massa do sistema.

PROBLEMAS

- 5.1. Um corpo de massa de 20 kg move-se sob a acção de uma força $\vec{F}(t) = 100t\vec{i}$ N. Sabendo que em $t = 2$ s a velocidade do corpo é $\vec{v} = 3\vec{i}$ m s⁻¹, determine:
- O impulso transmitido ao corpo durante o intervalo de tempo $2 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$.
 - O momento linear do corpo ao fim dos 10 s.
- 5.2. Um corpo de massa 400 kg inicialmente em repouso é submetido a uma força de intensidade F durante 20 s. A força induz no corpo uma velocidade final de 0.5 m s⁻¹. Considerando que a intensidade da força cresce, desde zero, linearmente com o tempo durante 15 s e decresce depois até zero, também linearmente, durante 5 s, determine:
- O valor do impulso causado pela força sobre o corpo.
 - A intensidade máxima da força exercida sobre o corpo.
 - Faça um gráfico de F em função do tempo e calcule a área delimitada por essa curva. O resultado é concordante com o da alínea a)?
- 5.3. Considere a força $\vec{F}(t) = (2t + 10)\vec{i}$ (SI) que actua um corpo de massa 10 kg inicialmente em repouso.
- Determine o impulso transmitido ao corpo, a variação do seu momento linear e a sua velocidade, após 4 s de actuação da força.
 - Durante quanto tempo deveria a força actuar sobre o corpo para que o seu impulso tivesse o valor 200 N s?
- 5.4. Num determinado instante, uma partícula de massa 2 kg tem um momento linear dado por $\vec{p} = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ (SI). A partir daquele instante a partícula é actuada durante 3 s por uma força $\vec{F}(t) = 2t^2\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j}$ (SI). Determine:
- O momento linear da partícula ao fim dos 3 s.
 - A norma da velocidade da partícula ao fim dos 3 s.
- 5.5. Considere uma força cujo valor decresce linearmente com o tempo. No instante $t = 0$ a força tem o valor de 100 N, anulando-se 20 s depois.
- Represente o valor da força graficamente e calcule o impulso da força no intervalo de tempo considerado (gráfico e analiticamente).
 - Supondo que esta força actua num corpo de massa 4 kg, calcule a variação do valor da sua velocidade no intervalo $t \in [10, 20]$ s.
- 5.6. Uma partícula de massa 1 kg desloca-se sob a acção da força $\vec{F}(t) = 3t^2\vec{i} - \sin(t/2)\vec{k}$ N. Sabendo que no instante $t = 0$ a partícula se encontrava em repouso na origem do referencial, determine em função do tempo:
- O vector quantidade de movimento.
 - O vector posição da partícula.
- 5.7. A posição de uma partícula de massa 6 kg é definida pelo vector $\vec{r}(t) = (3t^2 - 6t)\vec{i} - 4t^3\vec{j} + (3t + 2)\vec{k}$ (SI). Determine:

- a) A força que actua a partícula.
- b) O momento linear da partícula.
- c) Verifique que $\vec{F} = d\vec{p}/dt$.

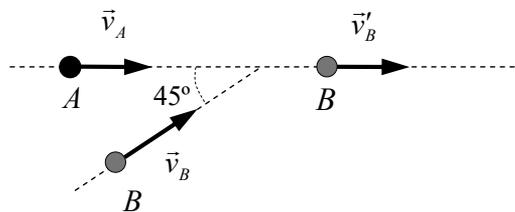
5.8. Considere uma partícula de massa 1 kg que se movimenta no plano Oxy entre os pontos $A(0, 4)$ e $B(0, -4)$ (SI) sob acção da força $\vec{F}(t) = (2 - t^2)\vec{i} + (t - 2)\vec{j}$ (SI). Sabe-se que o seu movimento é definido pelas equações paramétricas

$$x = 4t^2 - 16t \wedge y = -2t + 4 \text{ (SI)}$$

e que no ponto A a partícula possui velocidade $\vec{v} = -16\vec{i} - 2\vec{j}$ (SI).

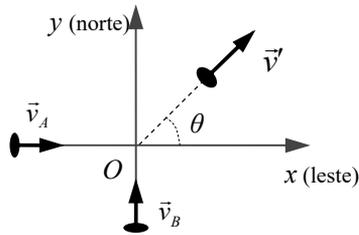
- a) Estabeleça a equação da trajectória da partícula.
 - b) Determine o impulso da força durante o movimento.
- 5.9. Uma partícula de massa 1 kg move-se sob acção da força definida pela função $\vec{F}(t) = (3t^2 - 4t)\vec{i} + (12t - 6)\vec{j} + (3t - 6t^2)\vec{k}$ (SI).
- a) Determine a variação do momento linear da partícula entre $t = 1$ s e $t = 2$ s.
 - b) Se no instante $t = 1$ s a partícula estiver animada de velocidade $\vec{v} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 10\vec{k}$ (SI), calcule a velocidade da partícula no instante $t = 2$ s.
- 5.10. Um corpo A , de massa $m_A = 5$ kg, move-se com velocidade de valor $v_A = 3$ m s⁻¹ paralelamente ao eixo dos xx , no sentido positivo, quando colide com um corpo B , de massa $m_B = 2$ kg, inicialmente em repouso. Após a colisão, o valor da velocidade do corpo A é $v'_A = 1$ m s⁻¹ na direcção que forma um ângulo $\theta = 30^\circ$ com a direcção inicial. Determine a velocidade final do corpo B .

5.11. Duas bolas, A e B , de massas m e $3m$, respectivamente, e velocidades de norma igual a v , chocam de tal modo que as direcções das suas velocidades fazem um ângulo de 45° , de acordo com o seguinte esquema:



Depois do choque a bola B segue com velocidade \vec{v}'_B , de valor igual a metade do da sua velocidade inicial. Calcule a relação entre os valores da velocidade da bola A antes e depois do choque, bem como a sua direcção depois do choque.

5.12. Dois patinadores colidem e permanecem juntos após a colisão, de acordo com o seguinte esquema:

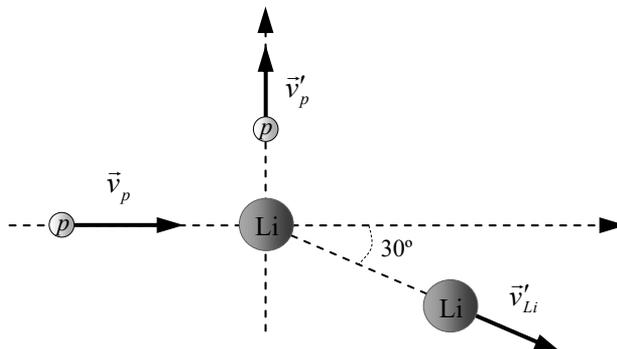


O patinador A, de 80 kg, move-se inicialmente de oeste para leste com velocidade de valor $v_A = 6.2 \text{ km h}^{-1}$. A patinadora B, de 55 kg, move-se inicialmente de sul para norte com velocidade de valor $v_B = 7.7 \text{ km h}^{-1}$. Qual é a velocidade final do par de patinadores?

- 5.13. Um projectil de massa 10 kg passa pela origem O de um referencial com velocidade $\vec{v}_0 = 60\vec{i} \text{ m s}^{-1}$ quando explode em dois fragmentos A e B de massas 4 kg e 6 kg, respectivamente. Sabendo que, 2 s mais tarde, a posição do fragmento A é (100, 12, -24) m, determine a posição do fragmento B nesse mesmo instante. Considere que a força da gravidade está dirigida segundo o sentido negativo do eixo Oy e despreze a resistência do ar.
- 5.14. Considere um sistema de duas partículas no plano Oxy. A partícula A, de massa $m_A = 0.5 \text{ kg}$, desloca-se com velocidade $\vec{v}_A = 0.3\vec{i} \text{ m s}^{-1}$, quando colide com uma partícula B, de massa $m_B = 0.1 \text{ kg}$ e em repouso. Após a colisão, a velocidade da partícula A tem norma $v'_A = 0.2 \text{ m s}^{-1}$ e faz um ângulo de 25° com o eixo dos xx.
- Esquematize o sistema antes e depois da colisão e calcule o vector velocidade da partícula B após o choque, bem como o seu módulo e o ângulo que faz com o eixo dos xx.
 - Calcule o impulso sofrido por cada partícula em resultado da colisão.
 - Calcule a variação de energia cinética sofrida por cada partícula.
 - Diga, justificando, se o choque é elástico.
- 5.15. Um veículo espacial, com massa 200 kg, desloca-se no espaço, longe de qualquer campo gravítico. No instante $t = 0$, é observado a passar pela origem de um referencial cartesiano Oxyz com velocidade $\vec{v}_0 = 150\vec{i} \text{ m s}^{-1}$ em relação ao referencial. Como resultado da detonação de cargas explosivas internas, o veículo separa-se em três partes A, B e C, de massas 100 kg, 60 kg e 40 kg, respectivamente. Sabendo-se que em $t = 2.5 \text{ s}$ as partes A e B são observadas nas posições A (500, -180, 240) m e B (300, 0, -120) m, determine a posição da parte C naquele instante.
- 5.16. Para o veículo espacial de 200 kg do problema anterior sabe-se que, em $t = 2.5 \text{ s}$, a velocidade da parte A é $\vec{v}_A = 200\vec{i} - 72\vec{j} + 96\vec{k} \text{ m s}^{-1}$ e a velocidade da parte B é paralela ao plano Oxz. Determine a velocidade da parte C do veículo espacial.
- 5.17. Um corpo (corpo 1) de massa 12 kg move-se de oeste para leste, com velocidade inicial de valor 8 m s^{-1} , quando colide com um outro corpo (corpo 2), de massa 25 kg, e cuja velocidade inicial tem o valor 12 m s^{-1} e está dirigida de

sul para norte. Após o impacto, o corpo 1 move-se de sudoeste para nordeste e o seu vector velocidade forma um ângulo de 45° com a parte positiva do eixo dos xx (que se supõe apontar de oeste para leste). Admitindo que a colisão entre os dois corpos é elástica, calcule as velocidades dos dois corpos após a colisão.

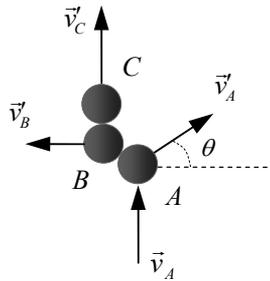
- 5.18. Um corpo de peso 25 N desliza sem atrito sobre o plano Oxy . No instante $t = 0$ passa pela origem do referencial com velocidade $\vec{v}_0 = 6\vec{i}$ m s⁻¹. Molas internas separam então o corpo em três fragmentos A , B e C , de pesos 10 N, 10 N e 5 N, respectivamente. Sabendo que no instante $t = 3$ s as posições dos fragmentos A e B são dadas por $\vec{r}_A = 12.6\vec{i} + 8.1\vec{j}$ m e $\vec{r}_B = 18.0\vec{i} - 1.8\vec{j}$ m, respectivamente, que a velocidade do fragmento A é $\vec{v}_A = 4.2\vec{i} - 2.7\vec{j}$ m s⁻¹ e que a velocidade do fragmento B , \vec{v}_B , é paralela ao eixo Ox , determine a velocidade e a posição do fragmento C naquele instante. Considere que a força da gravidade está dirigida segundo o sentido negativo do eixo Oy e despreze a resistência do ar.
- 5.19. Um corpo de massa 20 kg move-se no sentido positivo do eixo dos xx com velocidade de valor 200 m s⁻¹, quando uma explosão interna o divide em três fragmentos. Um fragmento, de 10 kg de massa, afasta-se com velocidade de valor 100 m s⁻¹ no sentido positivo do eixo dos yy . Um segundo fragmento, de massa 4 kg, move-se no sentido negativo do eixo dos xx com velocidade de valor 500 m s⁻¹. Ignorando os efeitos da gravidade, calcule:
- A velocidade do terceiro fragmento.
 - A energia libertada na explosão.
- 5.20. Um protão de massa m_p dirige-se horizontalmente para um núcleo de lítio, de número de massa 7 ($m_{Li} = 7m_p$), inicialmente em repouso. Após a colisão o protão sai numa direcção perpendicular à inicial e o núcleo de lítio desvia-se segundo um ângulo de 30° com a direcção inicial da velocidade do protão, conforme se indica na seguinte figura:



- Determine a razão entre os valores das velocidades inicial e final do protão, bem como a razão entre os valores das velocidades finais do protão e do núcleo.

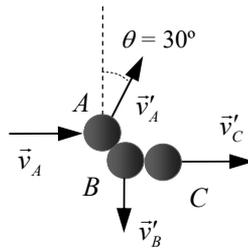
b) Admitindo que o sistema é isolado, qual é a relação entre os valores das velocidades do centro de massa das duas partículas antes e depois da interação?

- 5.21. Num jogo de bilhar a bola A move-se com velocidade $\vec{v}_A = v_0 \vec{j}$ quando atinge as bolas B e C , que estão em repouso, lado a lado. Após a colisão observa-se que as três bolas se movem nas direções assinaladas na seguinte figura:



Supondo que na colisão há conservação da energia cinética, determine as normas das velocidades \vec{v}'_A , \vec{v}'_B e \vec{v}'_C em função de v_0 e de θ . Note que todas as bolas têm a mesma massa, m .

- 5.22. Num jogo de bilhar a bola A move-se com velocidade $\vec{v}_A = 2\vec{i}$ m s⁻¹ quando bate nas bolas B e C , que estão em repouso, lado a lado. Após a colisão observa-se que as três bolas se movem nas direções assinaladas na seguinte figura:



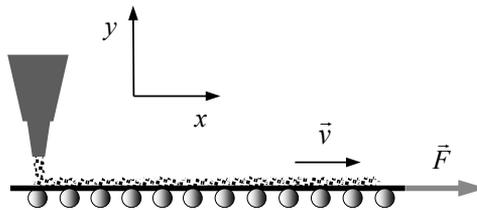
Admitindo que a colisão é elástica, determine as normas das velocidades \vec{v}'_A , \vec{v}'_B e \vec{v}'_C . Note que todas as bolas têm a mesma massa, m .

- 5.23. Um corpo A , de massa $m_A = 5$ kg, move-se com velocidade inicial de valor $v_A = 2$ m s⁻¹, no sentido positivo do eixo dos xx , quando colide com um corpo B , de massa $m_B = 4$ kg, inicialmente em repouso. Após a colisão a velocidade do corpo A tem valor $v'_A = 1$ m s⁻¹ na direção que forma um ângulo $\theta = 30^\circ$ com a direção inicial. Determine a velocidade final do corpo B .
- 5.24. Uma partícula A com massa 0.2 kg move-se com velocidade de valor 0.4 m s⁻¹ no sentido positivo do eixo dos xx quando colide com um partícula B , de massa 0.5 kg, inicialmente em repouso. Após a colisão, a partícula A move-se com velocidade de valor 0.2 m s⁻¹, segundo uma direção que faz um ângulo $\theta'_A = 40^\circ$ com o eixo dos xx .
- a) Calcule a norma e a direção da velocidade da partícula B após a colisão.

b) Determine a variação da velocidade e do momento linear de cada partícula.

c) Verifique que:
$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{\|\Delta \vec{v}_B\|}{\|\Delta \vec{v}_A\|}.$$

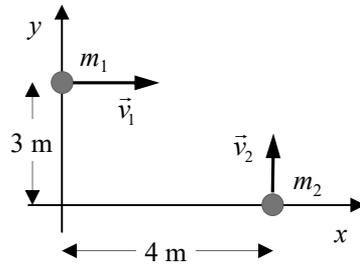
- 5.25. Um foguete com uma massa de 1100 kg, incluindo 900 kg de combustível, é lançado verticalmente a partir do repouso. Sabendo que o combustível é consumido à taxa de 12 kg s^{-1} e que os gases resultantes da queima do combustível são ejetados com uma velocidade relativa de valor 3600 m s^{-1} , determine:
- A força de reacção de ejeção responsável pela propulsão do foguete.
 - A aceleração do foguete no instante de lançamento.
 - O instante correspondente à queima total do combustível.
 - A velocidade máxima atingida pelo foguete.
 - A aceleração do foguete no instante correspondente à queima total do combustível.
- 5.26. No instante de lançamento vertical, um foguete ejecta gases de combustão a uma taxa constante de 220 kg s^{-1} e com uma velocidade relativa de valor 820 m s^{-1} . Sabendo que a aceleração inicial do foguete tem o valor 6.8 m s^{-2} , calcule a massa total do foguete, incluindo a massa de combustível, no instante de lançamento.
- 5.27. Um silo de armazenamento de cereais liberta trigo sobre uma esteira móvel, de acordo com o seguinte esquema:



Sabendo que o trigo é libertado a uma taxa constante de 0.314 kg s^{-1} e que a esteira se movimenta com uma velocidade constante de valor 0.96 m s^{-1} , determine:

- O valor da força exercida sobre a esteira para a manter em movimento com a referida velocidade constante de valor 0.96 m s^{-1} .
 - A potência desenvolvida pelo motor que acciona a esteira, nas condições acima consideradas.
- 5.28. Três partículas, de massas $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$ e $m_3 = 4 \text{ kg}$, movem-se sob acção de uma força tal que as suas posições relativamente a um referencial fixo são dadas pelos vectores $\vec{r}_1 = 2t\vec{i} - 3\vec{j} + t^2\vec{k}$ (SI), $\vec{r}_2 = (t+1)\vec{i} + 3t\vec{j} - 4\vec{k}$ (SI) e $\vec{r}_3 = t^2\vec{i} - t\vec{j} + (2t-1)\vec{k}$ (SI), respectivamente. Determine, para o instante $t = 1 \text{ s}$:
- A velocidade do centro de massa do sistema de partículas.
 - O momento linear total do sistema de partículas.

- 5.29. Considere o sistema de partículas A , B e C de massas $m_A = 5$ kg, $m_B = 10$ kg e $m_C = 5$ kg, respectivamente. Num determinado instante, as referidas partículas têm velocidades $\vec{v}_A = 3\vec{j} + 5\vec{k}$ m s⁻¹, $\vec{v}_B = 2\vec{i} + 160\vec{k}$ m s⁻¹ e $\vec{v}_C = 2\vec{j} + 2\vec{k}$ m s⁻¹, respectivamente. Determine, para o referido instante, a energia cinética do sistema calculada em relação ao centro de massa.
- 5.28. Considere um sistema de duas partículas materiais com massas $m_1 = 1$ kg e $m_2 = 4$ kg. No instante $t = 0$ as suas posições estão representadas na seguinte figura:



Sabendo que as partículas se encontram animadas das velocidades $\vec{v}_1 = 3\vec{i}$ m s⁻¹ e $\vec{v}_2 = 2\vec{j}$ m s⁻¹, respectivamente, determine:

- Os vectores posição e velocidade do centro de massa do sistema, em função do tempo.
- A energia cinética total do sistema, em relação à origem do referencial e em relação ao centro de massa do sistema.

CAPÍTULO 6

CAMPO ELECTROSTÁTICO

Embora os fenómenos eléctricos sejam conhecidos desde a aurora da humanidade, o seu estudo científico só se iniciou em princípios do século XVII. A manifestação mais espectacular da electricidade na natureza é, provavelmente, a trovoadas. Por outro lado, encontram-se já em textos datando do Antigo Egipto referências à electricidade de origem animal, associada a certos peixes⁴⁶. E sabe-se, desde a Antiguidade Clássica, que diferentes materiais adquirem, quando friccionados, a propriedade de se atraírem ou repelirem uns aos outros. Um dos materiais utilizados nessas primitivas experiências foi o âmbar (*elektron* em grego), de onde vem a palavra electricidade (William Gilbert, 1600).

6.1. Natureza da interacção entre cargas eléctricas

Uma vez que as acções eléctricas podem ser atractivas ou repulsivas, tinham de existir dois tipos de electricidade, a que convencionalmente se veio a chamar positiva e negativa. No início da era moderna (século XVII) e até ao século XIX, a electricidade era vista como um fluido (ou melhor, como dois fluidos); foi só com a descoberta do electrão (J. J. Thomson, 1897) e posteriores partículas elementares que ficou estabelecida a natureza discreta da carga eléctrica.

Vamos iniciar o nosso estudo da electricidade com o caso mais simples possível: a electrostática, que trata de cargas em repouso, ou em movimento “infinitamente lento”, Começaremos por considerar cargas situadas no vácuo; veremos a seguir como o seu comportamento se altera quando colocadas no interior da matéria, o que nos levará a definir diferentes classes de materiais. Terminaremos este capítulo com o estudo do primeiro dos elementos de circuito: o condensador, que combina condutores e isoladores.

6.2. Lei de Coulomb da interacção entre duas cargas pontuais

No nosso estudo dos fenómenos electrostáticos vamos utilizar o conceito de *carga eléctrica pontual*. Uma carga eléctrica pontual q é uma partícula carregada com carga q e

⁴⁶ Por exemplo, o Trovão do Nilo, *Torpedo sinuspersici*.

cujas dimensões físicas se reduzem a um ponto. Trata-se, evidentemente, de uma idealização: no mundo real não existem cargas verdadeiramente pontuais⁴⁷. É razoável supôr que uma partícula carregada é pontual se as suas dimensões forem muito inferiores às dos restantes constituintes do sistema em estudo. Deste modo, a carga pontual é uma idealização semelhante à de partícula material que encontrámos no estudo da Mecânica.

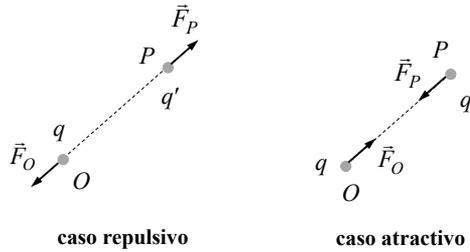


Figura 6.1. Interação electrostática repulsiva (à esquerda) e atractiva (à direita) entre duas cargas pontuais.

Consideremos duas cargas pontuais q e q' em repouso no espaço livre (vácuo), situadas nos pontos O e P , respectivamente, à distância $r = \overline{OP}$ uma da outra (*vide* figura 6.1): A *lei de Coulomb* afirma que as acções mútuas entre as duas cargas pontuais se traduzem por duas forças \vec{F}_O e \vec{F}_P , aplicadas, respectivamente, em O e em P , com a mesma direcção, a mesma intensidade e sentidos opostos. Estas duas forças constituem, portanto, um par acção-reacção, sendo a lei de Coulomb traduzida pela expressão

$$\begin{cases} \vec{F}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \text{vers } \overline{OP} \\ \vec{F}_O = -\vec{F}_P \end{cases}, \quad (6.1)$$

onde $\text{vers } \overline{OP}$ representa o versor (vector unitário) da direcção \overline{OP} . No SI a força é expressa em newton (N), a carga eléctrica em coulomb (C) e a distância em metro (m), resultando que, no SI, a *permissividade eléctrica do vácuo*, ϵ_0 , tenha o valor

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}. \quad (6.2)$$

Veremos mais adiante o significado físico da permissividade eléctrica de um meio material.

Da expressão (6.1) que traduz a lei de Coulomb podemos extrair as seguintes conclusões:

- i. A *direcção* comum ao par de forças \vec{F}_O e \vec{F}_P é definida pela linha recta que une os pontos O e P .

⁴⁷ Com a possível excepção de electrões (e positrões) individuais.

- ii. A *intensidade* ou *magnitude* (norma) das duas forças é directamente proporcional ao produto dos módulos das duas cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa, ou seja,

$$F_O = F_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q||q'|}{r^2}. \quad (6.3)$$

- iii. O par de forças é *atractivo* ou *repulsivo* consoante as cargas interactuantes forem de sinais contrários ou do mesmo sinal, respectivamente (*vide* figura 6.1).

Na tabela 6.1 apresentamos as cargas e as massas aproximadas dos constituintes atómicos.

Tabela 6.1. Cargas eléctricas e massas aproximadas dos constituintes atómicos.

Partícula	Carga (C)	Massa (kg)
Electrão, e	-1.602×10^{-19}	9.11×10^{-31}
Protão, p	1.602×10^{-19}	1.67×10^{-27}
Neutrão, n	0	1.67×10^{-27}

Exemplo 6.1

Compare as intensidades das forças eléctrica e gravitacional que se exercem entre o electrão e o protão que formam um átomo de hidrogénio, admitindo que o electrão se move numa órbita circular em torno do protão (nucleo atómico) com um raio de 5×10^{-11} m (modelo atómico de Bohr).

Resolução:

A intensidade da força gravitacional é dada pela equação (3.6):

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 1.67 \times 10^{-27}}{(5 \times 10^{-11})^2} = 4 \times 10^{-47} \text{ N.}$$

Por sua vez, a intensidade da força eléctrica é dada pela equação (6.4):

$$F_{elec} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_e||q_p|}{r^2} = \frac{1}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}} \times \frac{(1.602 \times 10^{-19})^2}{(5 \times 10^{-11})^2} = 9 \times 10^{-8} \text{ N.}$$

Donde resulta que

$$\frac{F_{elec}}{F_g} = 2.25 \times 10^{39}.$$

Este resultado é independente de r e mostra que, à escala atómica, a interacção eléctrica é muito mais forte que a interacção gravitacional. É por isso que, ao nível das interacções atómicas, a força gravitacional entre as partículas que constituem os átomos é desprezável.

6.3. Campo eléctrico gerado por uma carga pontual

Consideremos uma carga eléctrica pontual q situada num ponto O (origem do espaço). O campo eléctrico gerado pela carga q num ponto P , distante $r = \overline{OP}$ de O , é uma grandeza vectorial definida pela expressão

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \text{vers } \overline{OP}. \quad (6.4)$$

Comparando as expressões (6.1) e (6.4), concluímos que, se no ponto P colocarmos uma carga de prova q_0 , a força sentida por q_0 devido à interacção com a carga q é:

$$\vec{F}_P = q_0 \vec{E}_P. \quad (6.5)$$

A expressão (6.5) relaciona a força que se exerce sobre uma carga situada num dado ponto com o campo eléctrico existente nesse ponto. É válida qualquer que seja a origem do campo eléctrico, e não apenas para o campo gerado por uma carga pontual. Logo, o campo eléctrico no ponto P é numericamente igual à força que actua a carga unitária ($q_0 = 1 \text{ C}$) situada em P . No SI, o campo eléctrico é expresso em newton por coulomb (N C^{-1}) ou em volt por metro (V m^{-1})⁴⁸.

Matematicamente, o campo eléctrico é aquilo a que se chama um *campo vectorial*: uma aplicação de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 , que associa a cada ponto do espaço um vector – o campo eléctrico nesse ponto. Fisicamente, o campo eléctrico representa a alteração do espaço em torno de uma carga eléctrica, a qual medeia a sua interacção com outras cargas. Curiosamente, esta alteração dá-se mesmo quando a carga geradora do campo se encontra no vácuo!

Define-se *linha de campo eléctrico* como a linha que, em cada ponto do espaço, é tangente ao vector campo eléctrico nesse ponto. Como em cada ponto do espaço existe apenas um vector campo eléctrico, também aí existe apenas uma linha de campo; ou seja, as linhas de campo não podem intersectar-se.

A expressão (6.4) permite concluir que o campo eléctrico gerado por uma carga eléctrica pontual tem as seguintes características:

- i. É um campo *radial*: é dirigido segundo o raio vector $\vec{r} = \overline{OP}$ que liga o ponto O em que se situa a carga geradora do campo e o ponto P onde se situa a carga de prova (ponto de observação).
- ii. É um campo com *simetria esférica* em torno do ponto O . Com efeito, os valores da intensidade do campo são invariantes perante uma rotação do observador (carga de prova) em torno de um qualquer eixo que passe pelo ponto O .
- iii. É um campo *atractivo* ou *repulsivo* com linhas de força (linhas de campo) divergentes de O ou convergentes para O , consoante a carga geradora q for positiva

⁴⁸ O volt é a unidade SI em que se expressa o potencial eléctrico (*vide* prágrafo 6.4).

ou negativa, respectivamente (*vide* figura 6.2). As linhas de campo têm, portanto, origem numa carga positiva e terminam no infinito, ou têm origem no infinito e terminam numa carga negativa.

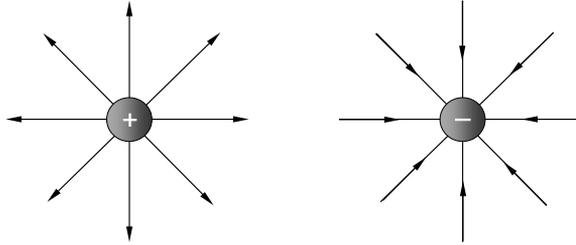


Figura 6.2. Linhas de campo divergentes em torno de uma carga positiva (à esquerda) e convergentes em torno de uma carga negativa (à direita).

iv. O campo tem intensidade, magnitude ou norma

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}, \quad (6.6)$$

decrecendo com a distância r segundo a lei do inverso do quadrado ($1/r^2$). É nulo no infinito, tendendo para zero (como $1/r^2$) quando $r \rightarrow \infty$.

v. O campo não é definido no ponto em que se encontra situada a carga geradora. Tende para infinito quando $r \rightarrow 0$ e apresenta uma singularidade em $r = 0$.

6.4. Potencial eléctrico gerado por uma carga pontual

Consideremos uma carga eléctrica pontual q situada num ponto O (origem do referencial). Como vimos, esta carga gera, num qualquer ponto P do espaço, distante r de O , um campo eléctrico de magnitude $E = (1/4\pi\epsilon_0)(|q|/r^2)$. A par do campo eléctrico (grandeza vectorial, relacionada com a força que a carga geradora exerce sobre uma carga de prova) define-se a função *potencial eléctrico* – grandeza escalar, cuja unidade no SI é o volt (V) – pela expressão

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (6.7)$$

A *diferença de potencial* (d.d.p.) entre dois quaisquer pontos A e B do espaço relaciona-se com o trabalho W_{AB} que a força eléctrica que se exerce sobre uma carga de prova q_0 terá de realizar, no deslocamento, em equilíbrio (ou seja, sem aceleração), dessa carga de prova de A para B , através da expressão

$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{W_{AB}}{q_0} \quad (6.8)$$

ou

$$W_{AB} = q_0(V_A - V_B). \quad (6.9)$$

sendo o valor do trabalho W_{AB} independente do percurso realizado pela carga q_0 ao ser deslocada do ponto A para o ponto B⁴⁹ (*vide* figura 6.3).

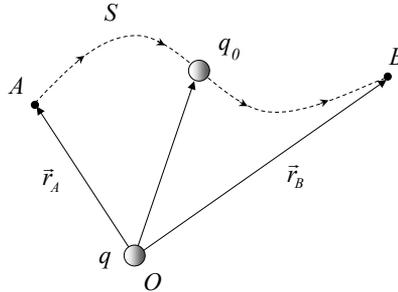


Figura 6.3. Transporte da carga q_0 , em equilíbrio, de A até B.

Reparar que, no caso de a carga q_0 ser uma carga unitária (i.e., $q_0 = 1$ C), W_{AB} tem valor numérico igual a $V_A - V_B$, podendo, então, definir-se a função potencial eléctrica do seguinte modo:

A função potencial eléctrico fornece sempre, pela sua variação, o valor numérico do trabalho realizado pela força eléctrica sobre uma carga unitária ($q_0 = 1$ C) que se desloca entre dois pontos, por qualquer caminho.

Em particular, se o ponto B coincidir com um ponto no infinito, teremos, para o trabalho da força eléctrica,

$$W_{A\infty} = q_0(V_A - V_\infty) \quad (6.10)$$

mas $V_\infty = 0$ (por convenção), donde

$$W_{A\infty} = q_0V_A \quad (6.11)$$

Esta última expressão permite-nos atribuir ao potencial eléctrico num ponto um significado físico bem preciso:

A função potencial eléctrico num ponto representa o valor numérico do trabalho realizado pela força eléctrica no transporte, em equilíbrio, de uma carga eléctrica unitária ($q_0 = 1$ C) desse ponto até ao infinito, por qualquer caminho.

⁴⁹ Este resultado é consequência de a força eléctrica ser uma força conservativa (*vide* parágrafo 4.2). Para mais pormenores *vide* P.M. Fishbane *et al.*, *Physics for Scientists and Engineers*, Prentice Hall, New Jersey, 1996, pp. 661–665.

Acrescente-se que, matematicamente, o potencial eléctrico é um exemplo de *campo escalar*: uma aplicação de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R} , que associa a cada ponto do espaço um escalar – o potencial eléctrico nesse ponto.

Concluimos notando um paralelo entre o campo eléctrico e o potencial eléctrico. Assim como o campo eléctrico é uma força por unidade de carga eléctrica, o potencial eléctrico é um trabalho por unidade de carga eléctrica

6.4.1. Trabalho realizado pelo agente exterior

Devemos realçar que, em tudo o que respeita as relações entre o trabalho realizado pela força eléctrica, W_{AB} , no transporte, por qualquer caminho S , de uma carga eléctrica entre dois pontos quaisquer do espaço A e B , e a diferença de potencial eléctrico entre esses dois pontos, $V_A - V_B$, admitimos sempre que o transporte se processa em equilíbrio, isto é, sem aceleração da carga eléctrica. Logo, admitimos implicitamente que, durante o referido transporte, a força eléctrica é, em cada instante, equilibrada por uma força exterior, exercida por um agente exterior, de igual intensidade e direcção, mas sentido oposto, à força eléctrica, ou seja

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{elec}. \quad (6.12)$$

Podemos, portanto, escrever que o trabalho realizado pelo agente exterior no transporte de uma carga q_0 de um ponto A até um ponto B , por qualquer caminho, é dado pela expressão

$$W_{AB}(\vec{F}_{ext}) = -q_0(V_A - V_B). \quad (6.13)$$

Este resultado é consequência de o trabalho total, realizado pela força eléctrica e pelo agente exterior, ter de ser nulo: só assim é nula a variação de energia cinética da carga (pelo teorema da energia cinética, que estudámos no capítulo 3, logo a sua velocidade é constante e a sua aceleração é nula).

Em particular, se o ponto B coincidir com um ponto no infinito, teremos

$$W_{AB_\infty}(\vec{F}_{ext}) = -q_0V_A. \quad (6.14)$$

Naturalmente que, se o agente exterior pretender realizar a operação inversa, ou seja, transportar a carga q_0 desde o infinito até ao ponto A , terá que realizar um trabalho de valor

$$W_{\infty A}(\vec{F}_{ext}) = q_0V_A. \quad (6.15)$$

Exemplo 6.2

Num ponto P do espaço, situado a uma distância r de uma carga pontual q , o potencial eléctrico é de 600 V e a intensidade do campo eléctrico é de 200 N C⁻¹. a) Deter-

minar o valor e o sinal da carga q , bem como a sua distância r ao ponto P ; b) Admitindo que se transporta, em equilíbrio, uma carga $q' = 2.5 \text{ nC}$ do infinito até ao ponto P , determinar o trabalho realizado pela força eléctrica e pelo agente exterior neste transporte; c) Nas condições da alínea anterior, determinar a intensidade da força eléctrica que se exerce entre as duas cargas. Trata-se de uma força atractiva ou repulsiva?

Resolução:

- a) A carga q encontra-se num ponto a que chamaremos O , situado à distância r do ponto P . Então os valores (conhecidos!) do potencial eléctrico e do campo eléctrico gerados pela carga q no ponto P são:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad ; \quad E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Repare-se que os segundos membros das duas equações são semelhantes (a menos de um factor $1/r$); dividindo-as membro a membro, obtém-se:

$$\frac{V_P}{E_P} = r \Rightarrow r = \frac{600}{200} = 3 \text{ m}.$$

Da equação que dá V_P conclui-se imediatamente que a carga tem de ser positiva, porque o potencial por ela gerado é também positivo. Substituindo o valor de r nesta equação (ou na equação que dá E_P), tem-se $q = 2 \times 10^{-17} \text{ C} = 0.2 \mu\text{C}$.

- b) O trabalho realizado pela força eléctrica no transporte, em equilíbrio, da carga q' entre o infinito e o ponto P é:

$$W(\vec{F}_{elect}) = q'(V_\infty - V_P) = 2.5 \times 10^{-9} \times (0 - 600) = -1.5 \times 10^{-6} \text{ J}.$$

Como o transporte se dá em equilíbrio, ou seja, a velocidade constante, a energia cinética da carga tem de ser constante, logo o trabalho de todas as forças que sobre ela se exercem tem de ser nulo (pelo teorema da energia cinética). Uma vez que as forças que se exercem sobre a carga são a força eléctrica e a força devida ao agente exterior, segue-se que o trabalho realizado pelo agente exterior tem de ser o simétrico do trabalho da força eléctrica:

$$W(\vec{F}_{ext}) = -W(\vec{F}_{elect}) = 1.5 \times 10^{-6} \text{ J}.$$

- c) A intensidade da força eléctrica que se exerce entre as duas cargas é dada pela lei de Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} = 5.0 \times 10^{-7} \text{ N}.$$

Dado que as cargas são ambas positivas, a força é repulsiva. Note-se que se poderia igualmente determinar o valor desta força a partir do conhecimento do valor do campo eléctrico em P :

$$F = q'E_p = 5.0 \times 10^{-7} \text{ N.}$$

6.4.2. Relações entre o campo eléctrico de uma carga pontual e as superfícies equipotenciais

Define-se *superfície equipotencial* como o lugar geométrico dos pontos do espaço nos quais a função potencial eléctrico $V(r)$ tem o mesmo valor V_0 que em determinado ponto P_0 do espaço – ou seja, o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a igualdade $V(r) = V_0$.

Atendendo a que a função potencial eléctrico gerado num ponto P por uma carga pontual q situada num outro ponto O é dado pela expressão (6.7), deduz-se imediatamente que as superfícies equipotenciais geradas por uma carga pontual são superfícies esféricas centradas no ponto onde se encontra a carga, com valores de potencial decrescendo com r se $q > 0$ e com valores de potencial crescendo com r se $q < 0$ (*vide* figura 6.4).

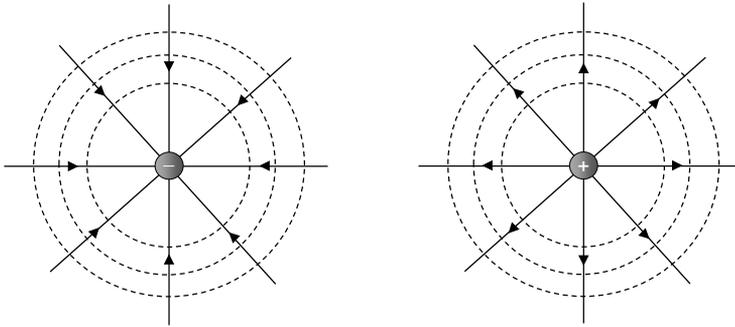


Figura 6.4. Superfícies equipotenciais e linhas de campo de uma carga pontual negativa (à esquerda) e positiva (à direita).

Recordando a expressão (6.4) que dá o campo eléctrico num ponto P gerado por uma carga pontual q colocada em O , é fácil verificar que o campo eléctrico (logo, também as linhas de campo eléctrico) satisfaz as seguintes três relações com as superfícies equipotenciais:

- i. É, em cada ponto, normal à superfície equipotencial que passa por esse ponto – ou seja, o campo eléctrico de uma carga pontual é radial e as suas superfícies equipotenciais são esféricas (*vide* figura 6.4).
- ii. Tem sempre o sentido das superfícies equipotenciais decrescentes (*vide* figura 6.4).
- iii. Tem intensidade (norma) dada pela derivada de V_p em ordem à distância marcada sobre a normal às equipotenciais. De facto verifica-se que

$$\vec{E}_p = -\frac{dV}{dr} \text{ vers } \overline{OP} = -\nabla V_p. \quad (6.16)$$

6.5. Sistemas de cargas eléctricas pontuais

6.5.1. Lei de Coulomb para distribuições discretas de cargas pontuais

Consideremos agora n cargas pontuais q_i ($i = 1, \dots, n$), situadas nos pontos Q_i ($i = 1, \dots, n$) e uma carga q_0 no ponto P (vide figura 6.5).

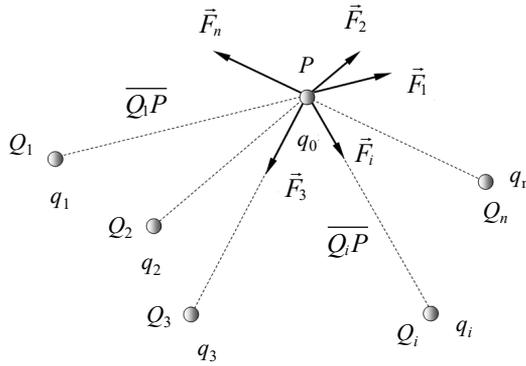


Figura 6.5. Forças exercidas pelas cargas pontuais q_i ($i = 1, \dots, n$) de uma distribuição discreta sobre uma carga pontual q_0 exterior à distribuição.

A força eléctrica total exercida sobre q_0 , resultante da interacção do sistema de cargas pontuais q_i ($i = 1, \dots, n$) com q_0 , é a soma vectorial das n forças \vec{F}_{Pi} que resultam da interacção entre cada uma das cargas q_i e q_0 . Podemos deste modo escrever⁵⁰

$$\vec{F}_P = \vec{F}_{P1} + \vec{F}_{P2} + \dots + \vec{F}_{Pn} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{Pi} \quad (6.17)$$

com

$$\vec{F}_{Pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_0}{r_{Q_i P}^2} \text{vers } \overline{Q_i P}. \quad (6.18)$$

representando $r_{Q_i P} = \overline{Q_i P}$ a distância entre os pontos Q_i e P .

6.5.2. Campo e potencial eléctricos gerados por distribuições discretas de cargas pontuais

Consideremos novamente uma distribuição de n cargas pontuais. Seja \vec{E}_{Pi} o campo eléctrico que a partícula i de carga q_i e situada no ponto Q_i gera no ponto P . O campo eléctrico produzido pela distribuição das n partículas carregadas tem, no ponto P , o valor da soma vectorial dos n campos \vec{E}_{iP} ($i = 1, \dots, n$), ou seja,

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{P1} + \vec{E}_{P2} + \dots + \vec{E}_{Pn} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_{Pi} \quad (6.19)$$

⁵⁰ Note-se que, pela lei da acção-reacção, a carga q_0 também exerce uma força sobre cada uma das cargas q_i , que não representamos na figura 6.5.

com

$$\vec{E}_{Pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{QiP}^2} \text{vers } \overline{Q_iP}. \quad (6.20)$$

e representando r_{QiP} a distância entre o ponto Q_i e o ponto P . Pode-se, pois, afirmar, pela expressão (6.19), que o campo eléctrico goza da propriedade aditiva. Repare-se, ainda, que as expressões (6.19) e (6.20) resultam imediatamente das expressões (6.17) e (6.18) se fizermos $q_0 = 1$ C, ou seja, utilizando a definição de que o campo eléctrico num dado ponto é numericamente igual à força electrostática que se exerceria sobre uma carga unitária colocada nesse ponto (cf. expressão (6.5)).

De modo idêntico, o potencial eléctrico no ponto P , resultante da acção das n cargas q_i é a soma (escalar) dos n potenciais gerados individualmente por cada carga, ou seja

$$V_P = V_{P1} + V_{P2} + \dots + V_{Pn} = \sum_{i=1}^n V_{Pi}. \quad (6.21)$$

Deve notar-se, contudo, que o campo resultante da composição dos campos eléctricos gerados por várias cargas pontuais não tem, em geral, simetria esférica. Na figura 6.6 representa-se as linhas de campo da distribuição discreta de cargas pontuais mais simples, formada por apenas duas cargas de igual valor absoluto e sinais iguais ou diferentes. Neste caso, a simetria é axial, em torno da recta que passa por ambas as cargas: note-se que o campo eléctrico reside no espaço tridimensional: a figura mostra apenas uma secção bidimensional do mesmo.

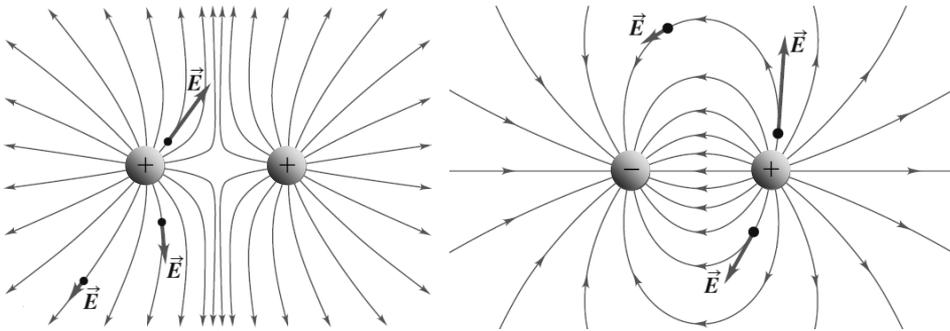


Figura 6.6 Linhas de campo de dois sistemas de duas cargas pontuais com o mesmo valor absoluto e sinais iguais (à esquerda) ou sinais opostos (à direita). Este último sistema constitui aquilo a que se chama um *dipolo eléctrico*, de grande importância em Química.

A figura 6.7 mostra as superfícies equipotenciais do sistema de duas cargas com o mesmo valor absoluto e sinais contrários (*dipolo eléctrico*). Embora as superfícies equipotenciais não sejam esféricas, as linhas de campo continuam a ser-lhes perpendiculares.

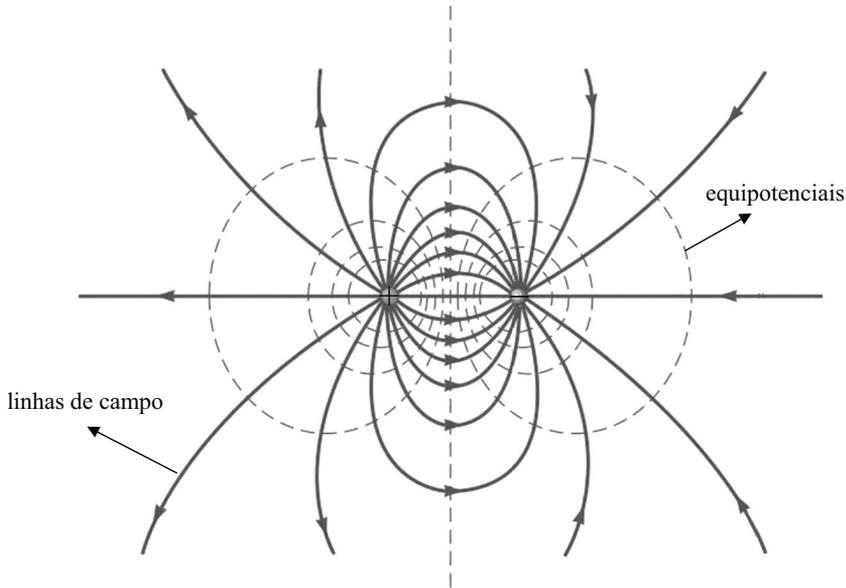


Figura 6.7. Superfícies equipotenciais do dipolo: o campo eléctrico (logo, também as linhas de campo eléctrico) é, em cada ponto, perpendicular às superfícies equipotenciais. Esta propriedade resulta de se ter, para qualquer distribuição de cargas, $\vec{E}_p = -\nabla V_p$: o campo eléctrico em cada ponto é igual ao simétrico do gradiente do potencial eléctrico nesse ponto.

6.5.3. Energia potencial electrostática de uma distribuição discreta de cargas pontuais

Tal como as forças gravítica e elástica, que encontrámos no capítulo 3, também a força electrostática é uma força conservativa, ou seja, o trabalho por ela realizado depende apenas das posições inicial e final do seu ponto de aplicação. Como vimos, a toda a força conservativa está associada uma grandeza chamada energia potencial, de tal modo que o trabalho da força conservativa num dado deslocamento é dado pelo simétrico da variação da energia potencial que lhe está associada. Vamos agora deduzir a expressão da energia potencial electrostática. Comecemos por observar que a energia potencial electrostática é uma propriedade de um sistema de cargas eléctricas: uma carga eléctrica isolada não possui qualquer energia potencial. O que faremos será construir gradualmente o nosso sistema de cargas eléctricas, partindo de uma única carga (que, como dissemos, tem energia potencial electrostática nula) e calculando a variação de energia potencial electrostática que resulta da adição de cada nova carga ao sistema. Esta variação de energia potencial electrostática vai ser igual ao simétrico do trabalho da força eléctrica. Se a adição de cargas se fizer em equilíbrio, ou seja, sem aceleração, e portanto sendo nula a resultante das forças que se exercem sobre a carga adicionada, o simétrico do trabalho da força eléctrica e, portanto, a variação de energia potencial electrostática, vai ser igual ao trabalho do agente exterior.

Consideremos, então, uma carga pontual q situada em O e geradora de um campo eléctrico \vec{E}_1 no ponto P_1 . Suponhamos agora que se pretende transportar uma carga q_1 desde o infinito até ao ponto P_1 , sem aceleração, pelo que a força exercida pelo agente exterior que transporta a carga tem, em cada ponto, intensidade e direcção iguais, e sentido oposto, à força eléctrica de interacção entre as cargas q e q_1 . O trabalho realizado pelo agente exterior neste transporte é dado pela expressão (6.15):

$$W(\vec{F}_{ext}) = q_1 V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{OP_1} \equiv U(q, q_1). \quad (6.22)$$

Podemos, pois, concluir que, para levar q_1 do infinito até ao ponto P_1 , na presença da carga q , é necessário realizar o trabalho $W = q_1 V_1$, que é precisamente a energia potencial electrostática do sistema formado pelas cargas q e q_1 . Com base neste resultado pode deduzir-se a expressão da energia potencial electrostática de um sistema de n cargas pontuais q_1, \dots, q_n situadas nos pontos P_1, \dots, P_n , respectivamente. Vejamos o caso particular de um sistema de três cargas.

Para construir um sistema de três cargas, é preciso ir buscar ao infinito uma carga q_2 e colocá-la no ponto P_2 . O trabalho realizado pelo agente exterior neste transporte é, novamente, dado por

$$\begin{aligned} W(\vec{F}_{ext}) &= q_2 V_2 = q_2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{OP_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{P_1 P_2} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_2}{OP_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{P_1 P_2} \end{aligned} \quad (6.23)$$

porque o potencial total em P_2 é a soma do potencial em P_2 devido à carga q com o potencial em P_2 devido à carga q_1 . A energia electrostática do sistema de três cargas é agora a soma do trabalho realizado pelo agente exterior ao trazer do infinito a carga q_1 com o trabalho realizado pelo agente exterior ao trazer do infinito a carga q_2 , ou seja,

$$U_{elec}(q, q_1, q_2) = q_1 V_1 + q_2 V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{OP_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_2}{OP_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{P_1 P_2}. \quad (6.24)$$

Repare-se que, nesta expressão, V_1 é o potencial em P_1 gerado pela carga q em O , e V_2 é o potencial em P_2 gerado pelas cargas q em O e q_1 em P_1 . Sugere-se que o leitor deduza a expressão da energia electrostática de um sistema de quatro cargas pontuais, utilizando o mesmo raciocínio: calcule o trabalho realizado pelo agente exterior ao transportar, em equilíbrio, uma carga q_3 do infinito até um ponto P_3 , no qual existe um potencial V_3 que é a soma dos potenciais devidos às cargas q (situada em O), q_1 (situada em P_1) e q_2 (situada em P_2). Quantos termos vai ter esta expressão? E quantos termos terá ela no caso geral de n cargas? Para pensar...

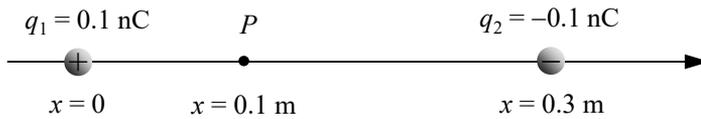
Finalmente, para colocar as cargas q_1, \dots, q_n nos pontos P_1, \dots, P_n será necessário que o agente exterior realize trabalho para as trazer do infinito uma a uma, ficando esse trabalho armazenado na forma de energia potencial electrostática U_{elec} do sistema. Pode facilmente demonstrar-se⁵¹ que a energia potencial electrostática de um sistema de n cargas eléctricas pontuais pode ser calculada mediante a expressão

$$\begin{aligned}
 U_{elec}(q_1, \dots, q_n) &= \frac{1}{2} (q_1 V_1 + \dots + q_n V_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.
 \end{aligned}
 \tag{6.25}$$

onde V_i representa agora o potencial eléctrico no ponto P_i gerado por todas as cargas com excepção da carga q_i situada no próprio ponto P_i . O factor 1/2 destina-se a corrigir o facto de, no somatório, cada carga estar a ser contada duas vezes: uma vez por estar em P_j , outra vez por contribuir para o potencial V_i em P_i .

Exemplo 6.3

Duas cargas pontuais, $q_1 = 0.1$ nC e $q_2 = -0.1$ nC, encontram-se imersas no vácuo sobre o eixo dos xx , nas posições indicadas na figura. Determinar: a) o vector campo eléctrico no ponto P , gerado pelas cargas q_1 e q_2 ; b) o vector força eléctrica que actua sobre uma terceira carga, $q_3 = -0.2$ nC, colocada no ponto P ; c) a energia potencial do conjunto das três cargas, nas condições da alínea anterior.



Resolução:

a) O campo eléctrico no ponto P , \vec{E}_P , é a soma do campo gerado no ponto P pela carga q_1 , \vec{E}_{P1} , com o campo gerado no ponto P pela carga q_2 , \vec{E}_{P2} :

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{E}_P &= \vec{E}_{P1} + \vec{E}_{P2} \\
 \vec{E}_{P1} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{d_1^2} \vec{i} = 89.9 \vec{i} \text{ Vm}^{-1} \\
 \vec{E}_{P2} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{d_2^2} (-\vec{i}) = 22.5 \vec{i} \text{ Vm}^{-1}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}_P = 112.4 \vec{i} \text{ Vm}^{-1}.$$

⁵¹ Para pormenores da demonstração, vide P.M. Fishbane *et al.*, *Physics for Scientists and Engineers*, Prentice Hall, New Jersey, 1996, pp. 666 – 667.

- b) A força eléctrica que se exerce sobre uma carga colocada no ponto P é igual ao valor da carga multiplicado pelo campo eléctrico em P :

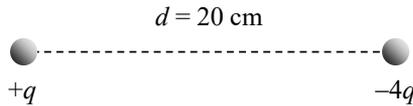
$$\vec{F}_{elect} = q_3 \vec{E}_P = -2 \times 10^{-10} \times 112.4 \vec{i} = -2.25 \times 10^{-8} \vec{i} \text{ N.}$$

- c) a energia potencial do conjunto das três cargas, nas condições da alínea anterior, é dada pela expressão (6.24):

$$U(q_1, q_2, q_3) = -1.2 \times 10^{-19} \text{ J.}$$

Exemplo 6.4

Duas cargas eléctricas, $+q$ e $-4q$, encontram-se no vácuo, à distância $d = 20$ cm uma da outra, conforme se representa no esquema da figura. a) Determinar a posição do ponto do segmento de recta que une as duas cargas no qual o potencial eléctrico total é nulo. b) Dizer, justificando, se existe algum ponto do segmento de recta que une as duas cargas no qual o campo eléctrico total é nulo.



Resolução:

- a) O potencial eléctrico num qualquer ponto P , V_P , é a soma do potencial gerado no ponto P pela carga $+q$, V_{P1} , com o potencial gerado no ponto P pela carga $-4q$, V_{P2} : Seja x a distância entre a carga $+q$ e o ponto do segmento de recta que une as duas cargas onde o potencial é nulo; segue-se, imediatamente, que a distância desse mesmo ponto à carga $-4q$ é $d - x$. Impondo que $V_P = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} V_P = 0 = V_{P1} + V_{P2} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{+q}{x} + \frac{-4q}{d-x} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{4}{0.20-x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0.20 - x &= 4x \Leftrightarrow x = 0.04 \text{ m} = 4 \text{ cm.} \end{aligned}$$

- b) Em qualquer ponto do segmento de recta que une as duas cargas, o campo eléctrico gerado pela carga $+q$ aponta da esquerda para a direita (porque a carga é positiva), e o campo eléctrico gerado pela carga $-4q$ aponta, igualmente, da esquerda para a direita (porque a carga é negativa). Logo, os campos gerados pelas duas cargas nunca podem anular-se e o campo total não é nulo em nenhum ponto deste segmento de recta.

Repare que as respostas não dependem do valor das cargas.

6.6. Materiais condutores, dieléctricos e semi-condutores. Características de um material dieléctrico

Do ponto de vista do seu comportamento eléctrico, podemos distinguir na natureza, essencialmente, três tipos de materiais⁵²:

- i. *Condutores*. Os materiais condutores são caracterizados pela existência de cargas livres (electrões nos sólidos, iões nos electrólitos) disponíveis para a condução eléctrica (ou seja, que podem ser mobilizados mediante a aplicação de um campo eléctrico). No caso dos condutores sólidos, a resistência eléctrica (grandeza que definiremos mais rigorosamente no capítulo 7, mas que mede a dificuldade da corrente eléctrica em atravessar um objecto) aumenta com a temperatura. São exemplos de condutores os metais e a água do mar.
- ii. *Isoladores ou dieléctricos*. São materiais onde não existem cargas livres disponíveis para a condução eléctrica. São exemplos de isoladores o ar, a mica, quase todos os plásticos, a cerâmica e o óleo de silicone.
- iii. *Semicondutores*. Os materiais semicondutores são caracterizados pela possibilidade de efectuarem a condução eléctrica quer através do movimento dos electrões, quer de “buracos” (lacunas de electrões, carga $q = +1.6 \cdot 10^{-19}$ C). A sua resistência eléctrica diminui com o aumento da temperatura e pode ser manipulada através da inclusão de átomos de outras espécies químicas⁵³. São exemplos de materiais semicondutores os elementos químicos silício, e germânio, bem como muitos compostos como PbS e GaAs.

Iremos em seguida introduzir algumas grandezas que nos permitem caracterizar quantitativamente os materiais isoladores ou dieléctricos. Faremos o mesmo para os materiais condutores no capítulo 7. Os materiais semicondutores estão fora do âmbito deste curso.

As duas propriedades fundamentais que permitem caracterizar um material dieléctrico do ponto de vista da sua interacção com um campo eléctrico são:

- i. A *permissividade eléctrica absoluta* (ϵ). É uma grandeza escalar, expressa no SI em $C^2 N^{-1} m^{-2}$ ou em $F m^{-1}$ ⁵⁴.
- ii. A *susceptibilidade eléctrica* (χ_e). É uma grandeza adimensional.

⁵² Um quarto tipo de materiais são os *supercondutores*. Estes materiais, quando submetidos a temperaturas muito inferiores à temperatura ambiente, conduzem a corrente eléctrica sem resistência (sem dispersão dos electrões de condução) e, portanto, sem perdas de energia.

⁵³ Este processo, conhecido por *dopagem*, torna os semicondutores extremamente atraentes do ponto de vista tecnológico, uma vez que permite, efectivamente, fabricar materiais com as propriedades eléctricas desejadas, em vez de se estar limitado ao que se encontra na natureza. Por esta razão os semicondutores são materiais imprescindíveis na indústria electrónica.

⁵⁴ O símbolo F representa o *farad*, a unidade SI de capacidade eléctrica, que será definida na secção 6.7.1.

Define-se, ainda, a grandeza *permissividade eléctrica relativa* ou *constante dieléctrica* do material (ϵ_r ou κ) como a razão entre ϵ e ϵ_0 :

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \quad (6.26)$$

verificando-se a relação

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e. \quad (6.27)$$

A tabela 6.2 colige as propriedades dieléctricas de alguns materiais correntes. Repare-se que a água, que é um condutor, tem uma constante dieléctrica elevada. Um condutor perfeito teria constante dieléctrica infinita, razão pela qual não é muito útil utilizar esta grandeza para caracterizar condutores. Note-se que os valores das constantes dieléctricas apresentados nesta tabela devem ser “lidos” com um certo cuidado, na medida em que, para muitos materiais, a constante dieléctrica tem uma forte dependência com a temperatura.

Todos os resultados que obtivemos anteriormente para cargas no vácuo – a lei de Coulomb, as definições de campo eléctrico, potencial eléctrico e de energia potencial electrostática, para distribuições discretas de cargas – continuam a ser válidos no interior de um meio material, desde que nelas se substitua a permissividade eléctrica do vácuo, ϵ_0 , pela permissividade do meio material, ϵ – a qual, evidentemente, é diferente para diferentes materiais. Vemos, assim, que os fenómenos electrostáticos dependem não apenas dos valores das cargas e das suas posições relativas, mas também do meio onde se encontram. Como exemplo, considere-se duas cargas pontuais a uma distância d uma da outra e colocadas no ar. Se as mesmas duas cargas forem colocadas dentro de água, mantendo-se a distância que as separa, a intensidade da força electrostática que entre elas se exerce será 80 vezes menor! (*Exercício:* verifique.) Efectivamente, o campo criado por cada uma das cargas polariza o meio material, logo o seu valor no ponto onde se encontra a outra carga é menor do que seria no vácuo⁵⁵.

Tabela 6.2. Propriedades dieléctricas de diferentes materiais.

Material	ϵ_r	ϵ (F m ⁻¹)	χ_e
Vácuo	1	8.85×10^{-12}	0
Ar	1.00054	8.85478×10^{-12}	0.00054
Teflon (PTFE)	2.1	1.859×10^{-11}	1.1
Polistireno (PS)	2.5	2.213×10^{-11}	1.5
Lucite	2.8	2.478×10^{-11}	1.8
Mylar	3.1	2.744×10^{-11}	2.1
Plexiglass (PMMA)	3.4	3.009×10^{-11}	2.4
Nylon	3.5	3.098×10^{-11}	2.5
Papel	3.7	3.275×10^{-11}	2.7
Neoprene	6.7	5.930×10^{-11}	5.7
Água	80	7.08×10^{-10}	79

⁵⁵ Para saber mais sobre o efeito de um campo eléctrico sobre um meio material, vide, por exemplo, D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd edition, Prentice Hall, New Jersey, 1999, capítulo 4.

6.7. Condensadores

O condensador é o primeiro dos *elementos de circuito* que iremos estudar. Elementos de circuito são os componentes dos circuitos eléctricos, que trataremos em mais pormenor no capítulo 7. Um condensador é um sistema formado por dois condutores separados por um material isolador (dieléctrico). Os condensadores são sistemas capazes de armazenar energia potencial electrostática no campo eléctrico que se estabelece no seu interior (*vide* figura 6.8).

Aos condutores de um condensador dá-se o nome de *armaduras* ou *placas*. Em particular, o isolador de um condensador pode ser o vácuo (embora não seja esse o caso na maior parte dos condensadores). Um condensador possui, igualmente, um par de terminais – fios condutores que são utilizados para ligar o condensador ao resto do circuito.

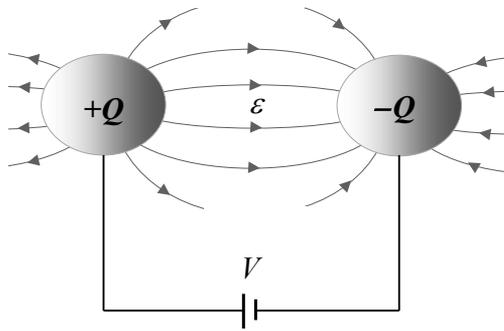


Figura 6.8. Representação esquemática das linhas de campo entre as armaduras de um condensador carregado com uma carga Q .

6.7.1. Noção de capacidade eléctrica

Considere-se o condensador formado por duas armaduras com cargas $+Q$ e $-Q$. Admita-se que entre elas existe uma diferença de potencial V , imposta ligando as armaduras a um gerador (*vide* figura 6.8). Note-se que a carga *total* de um condensador é sempre zero, uma vez que as cargas das duas armaduras têm o mesmo valor absoluto e sinais contrários. Um condensador diz-se *carregado* se o valor absoluto da carga de cada uma das suas armaduras for diferente de zero.

Define-se *capacidade do condensador*, C , como a razão entre o valor absoluto da carga de qualquer das suas armaduras e a diferença de potencial existente entre elas:

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (6.28)$$

A capacidade é uma grandeza escalar que no SI é expressa em farad (F). $1 \text{ F} = 1 \text{ C V}^{-1}$. O valor da capacidade de um condensador é determinado por dois factores:

- i. A geometria do sistema (forma e dimensões do condensador, bem como distância entre as suas placas/armaduras);
- ii. O material dieléctrico que separa os dois condutores. Um determinado material dieléctrico é caracterizado pela sua permissividade eléctrica ϵ , expressa no SI em $\text{C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$

ou em F m^{-1} . Em particular, se o material dieléctrico for o vácuo a sua permitividade eléctrica é ϵ_0 , cujo valor é $8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$, como vimos na secção 6.2.

6.7.2. Energia potencial electrostática armazenada num condensador carregado

Como foi anteriormente referido, um condensador é um sistema capaz de armazenar energia potencial electrostática. Para calcularmos esta energia, consideremos o condensador inicialmente descarregado: a sua energia potencial electrostática é nula. Ligue-se, agora, o condensador a um gerador: vai começar a fluir carga do gerador para o condensador. Por cada elemento infinitesimal de carga dq que chega ao condensador, a sua energia potencial electrostática vai aumentar $dU = v dq$, onde v é o valor da diferença de potencial instantânea entre as placas do condensador (recorde-se o cálculo da energia potencial electrostática de um sistema de cargas eléctricas na secção 6.5.3). À medida que o condensador carrega, a diferença de potencial entre as suas placas aproxima-se da imposta pelo gerador, V , e a carga nele armazenada aproxima-se de $Q = CV$. Segue-se que a quantidade de energia que é possível armazenar no campo eléctrico de um condensador de capacidade C , carregado com uma carga Q quando existe uma diferença de potencial V entre as suas armaduras, é dada por

$$U_{elec} = \int_0^Q v dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2. \quad (6.29)$$

É interessante confrontar a expressão da energia electrostática de um condensador, equação (6.29), com a da energia potencial electrostática de um sistema de duas cargas pontuais iguais e de sinais contrários. Que concluir?

6.7.3. Condensador de placas paralelas

Existem muitos tipos de condensadores diferentes. Estudaremos apenas em pormenor o caso particularmente simples, mas informativo, do *condensador de placas paralelas*.

Num condensador de placas paralelas, as armaduras são duas superfícies planas paralelas entre si, de área A e separadas por uma distância d (*vide* figura 6.9). Para que o campo eléctrico entre as armaduras seja uniforme, d deve ser muito menor que qualquer das dimensões lineares das armaduras.

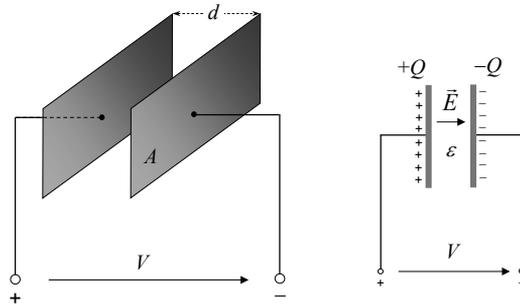


Figura 6.9. Representação esquemática de um condensador de placas paralelas (à esquerda) e do campo eléctrico entre as suas placas (à direita).

O campo eléctrico na região central do condensador de placas paralelas é uniforme e tem linhas de força paralelas entre si e perpendiculares às placas (*vide* figura 6.10). Aponta da placa positiva para a placa negativa e o seu valor é dado por

$$E = \frac{Q}{\epsilon A}. \quad (6.30)$$

A diferença de potencial entre as armaduras resulta imediatamente do facto de o campo eléctrico ser igual ao simétrico do gradiente do potencial; como aqui o campo é uniforme, tem-se

$$E = \frac{V}{d} = \frac{Q}{\epsilon A} \Rightarrow V = \frac{Qd}{\epsilon A} = Ed. \quad (6.31)$$

donde decorre para a capacidade do condensador de placas paralelas o valor

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Qd/\epsilon A} = \epsilon \frac{A}{d}, \quad (6.32)$$

verificando-se, conforme referido anteriormente, que a capacidade de um condensador só depende da geometria do sistema e do meio dieléctrico que o constitui. Em particular, de entre todos os condensadores de placas paralelas com a mesma área A e separadas pela mesma distância d , o que tem a menor capacidade é aquele cujo dieléctrico for o vácuo (uma vez que, para qualquer meio material, se tem $\epsilon \geq \epsilon_0$).

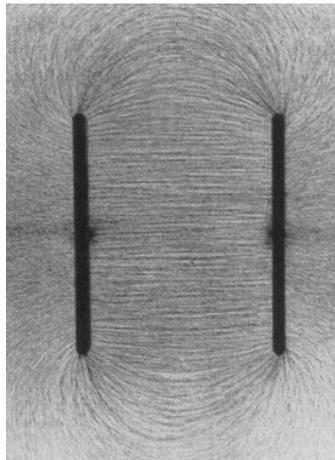


Figura 6.10. Visualização das linhas do campo eléctrico gerado por um condensador de placas paralelas. O campo é uniforme apenas na região central entre as armaduras, com linhas perpendiculares às placas e paralelas entre si.

A expressão da energia potencial electrostática que é possível armazenar no campo eléctrico de um condensador de placas paralelas é dada pela equação (6.29), com C e V dados pelas expressões (6.32) e (6.31). Esta energia fica acumulada no condensador mesmo depois de se desligar a fonte de tensão V , mantendo então o condensador esta

diferença de potencial aos seus terminais. Obviamente, a carga do condensador também permanece constante, uma vez que não tem por onde se escoar.

Exemplo 6.5

Considere um condensador de placas paralelas cuja área é $A = 1 \text{ cm}^2$. As armaduras encontram-se à distância $d = 1 \text{ mm}$ uma da outra e separadas por ar ($\epsilon_{ar} \approx \epsilon_0$). Às armaduras é aplicada uma d.d.p. $V = 100 \text{ V}$. Calcular: a) a capacidade do condensador; b) a carga acumulada e a energia potencial electrostática armazenada no condensador.

Resolução:

a) Da expressão (6.32) resulta $C = 8.85 \times 10^{-13} \text{ F} = 0.885 \text{ pF}$.

b) Das expressões (6.28) e (6.29) resultam, respectivamente, $Q = CV = 8.85 \times 10^{-11} \text{ C}$ e $U_{elec} = (1/2) CV^2 = 4.425 \times 10^{-9} \text{ J}$.

6.7.4. Leis de associação de condensadores

Em geral, os circuitos eléctricos contêm mais do que um condensador. Para facilitar os cálculos, é por vezes útil substituir um conjunto de condensadores por um único condensador tal que o seu efeito sobre o resto do circuito – a sua carga total e a diferença de potencial entre as suas armaduras – sejam as mesmas que as do conjunto de condensadores que substitui. A capacidade de um tal condensador diz-se a *capacidade equivalente* do conjunto, ou associação, de condensadores. Evidentemente, existe um grande número de maneiras de ligar n condensadores uns aos outros, mas (quase) todas essas maneiras possíveis se reduzem a combinações de associações em série e em paralelo. É por esta razão que iremos estudar estes dois modos de associação.

6.7.4.1. Associação em série

Pretende-se calcular a capacidade C_{eq} do condensador equivalente à associação em série de n condensadores de capacidades C_1, \dots, C_n (vide figura 6.11).

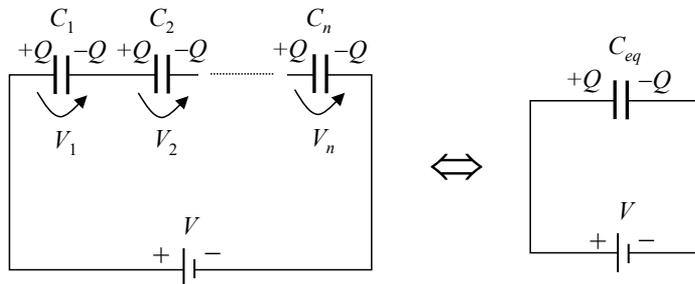


Figura 6.11. Associação de condensadores em série.

Por conservação da carga eléctrica entre cada par de condensadores da associação, verifica-se que

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q. \quad (6.33)$$

Por outro lado, aplicando a este circuito a lei das malhas de Kirchhoff (que encontraremos no capítulo 7), verifica-se a seguinte relação:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n. \quad (6.34)$$

Das expressões (6.33), (6.34) e da definição da capacidade de um condensador, $V_i = Q/C_i$ ($i = 1, \dots, n$), resulta que

$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \Rightarrow \frac{V}{Q} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}, \quad (6.35)$$

o que nos permite definir uma capacidade equivalente $C_{eq} = Q/V$ como

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (6.36)$$

ou seja, a capacidade equivalente de uma associação de condensadores em série é o inverso da soma dos inversos das capacidades dos condensadores individuais:

6.7.4.2. Associação em paralelo

Pretende-se calcular a capacidade C_{eq} do condensador equivalente à associação em paralelo de n condensadores de capacidades C_1, \dots, C_n (vide figura 6.12).

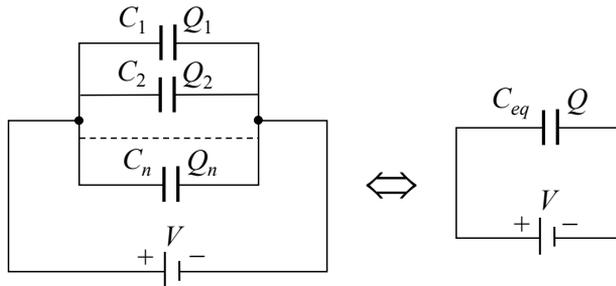


Figura 6.12. Associação de condensadores em paralelo.

Para os n condensadores em paralelo verificam-se as relações:

$$V_1 = V_2 = \dots = V_n = V. \quad (6.37)$$

que resulta do facto de cada condensador estar ligado a todos os outros, e todos estarem ligados directamente ao gerador, e

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \quad (6.38)$$

que nos diz simplesmente que a carga total armazenada no conjunto dos condensadores é a soma das cargas armazenadas em cada um dos condensadores. Das expressões

(6.37), (6.38) e da definição da capacidade de um condensador, $Q_i = C_i V$ ($i = 1, \dots, n$), resulta que

$$Q = C_1 V + C_2 V + \dots + C_n V = \left(\sum_{i=1}^n C_i \right) V \Rightarrow \frac{Q}{V} = \sum_{i=1}^n C_i, \quad (6.39)$$

o que nos permite definir uma capacidade equivalente $C_{eq} = Q/V$ como

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i \quad (6.40)$$

Exemplo 6.6

Dois condensadores de capacidades $C_1 = 10 \mu\text{F}$ e $C_2 = 20 \mu\text{F}$ são associados em paralelo e submetidos a uma d.d.p. de 100 V. Determinar: a) a capacidade equivalente da associação; b) a carga armazenada em C_1 , em C_2 e no conjunto dos dois condensadores; c) a energia potencial electrostática acumulada no sistema considerado.

Resolução:

a) Os dois condensadores estão associados em paralelo, logo:

$$C_{eq} = C_1 \parallel C_2 = C_1 + C_2 = 30 \mu\text{F}.$$

b) Utilizando a definição de capacidade e o facto de os dois condensadores estarem associados em paralelo ($V_1 = V_2 = V$), segue-se imediatamente que

$$Q_1 = C_1 V = 20 \times 10^{-6} \times 100 = 2 \times 10^{-3} \text{ C}$$

$$Q_2 = C_2 V = 10 \times 10^{-6} \times 100 = 1 \times 10^{-3} \text{ C}$$

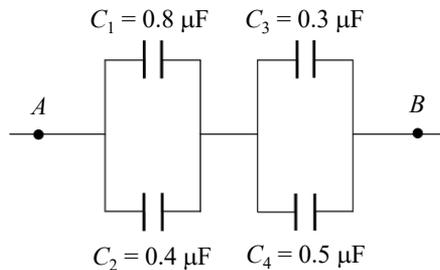
$$Q = Q_1 + Q_2 = 3 \times 10^{-3} \text{ C}.$$

c) A maneira mais simples de calcular a energia potencial electrostática é tratando a associação dos dois condensadores como um único condensador, de capacidade igual à capacidade equivalente:

$$U_{elec} = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = \frac{1}{2} \times 30 \times 10^{-6} \times (100)^2 = 0.15 \text{ J}.$$

Exemplo 6.7

Considere a associação de condensadores representada no esquema da seguinte figura:



Todos os condensadores são de placas paralelas com dieléctrico o vácuo. a) Determinar a capacidade equivalente da associação de condensadores esquematizada. b) Se se aplicar uma d.d.p. de 120 V entre A e B, determinar a carga eléctrica existente em cada um dos condensadores e a d.d.p. entre os terminais de cada condensador. c) Nas condições da alínea anterior, determinar a energia potencial electrostática armazenada nesta associação de condensadores. d) Qual passará a ser a energia potencial electrostática armazenada no circuito se for introduzido um material dieléctrico com permitividade relativa de valor $\epsilon_r = 2.5$ entre as placas de cada condensador, mantendo-se constante a d.d.p. entre A e B?

Resolução:

a) A associação de condensadores esquematizada é a associação em série de C_1 em paralelo com C_2 e C_3 em paralelo com C_4 :

$$C_{eq} = (C_1 \parallel C_2) \oplus (C_3 \parallel C_4) = \frac{1}{\frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4}} = 0.48 \mu\text{F}.$$

b) Começemos por determinar a carga total da associação de condensadores:

$$Q = C_{eq} V_{AB} = 0.48 \times 10^{-6} \times 120 = 5.76 \times 10^{-5} \text{ C}.$$

Esta é, igualmente, a carga de cada um dos conjuntos (C_1, C_2) e (C_3, C_4) , uma vez que os mesmos estão associados em série. Calculando as capacidades equivalentes destes conjuntos, poderemos determinar as d.d.p. aos respectivos terminais:

$$C_{eq}^{12} = C_1 \parallel C_2 = 1.2 \mu\text{F} \Rightarrow V_{AC} = \frac{Q}{C_{eq}^{12}} = \frac{5.76 \times 10^{-5}}{1.2 \times 10^{-5}} = 48 \text{ V}$$

$$C_{eq}^{34} = C_3 \parallel C_4 = 0.8 \mu\text{F} \Rightarrow V_{CB} = \frac{Q}{C_{eq}^{34}} = \frac{5.76 \times 10^{-5}}{0.8 \times 10^{-6}} = 72 \text{ V}$$

verificando-se, obviamente, $V_{AC} + V_{CB} = V_{AB} = 120 \text{ V}$.

Em cada conjunto (C_1, C_2) e (C_3, C_4) , os condensadores estão ligados em paralelo, logo a d.d.p. aos seus terminais é a mesma: $V_1 = V_2 = V_{AC} = 48 \text{ V}$ e $V_3 = V_4 = V_{CB} = 72 \text{ V}$. As respectivas cargas, no entanto, são diferentes:

$$Q_1 = C_1 V_1 = 0.8 \times 10^{-6} \times 48 = 3.84 \times 10^{-5} \text{ C}$$

$$Q_2 = C_2 V_2 = 0.4 \times 10^{-6} \times 48 = 1.92 \times 10^{-5} \text{ C}$$

$$Q_3 = C_3 V_3 = 0.3 \times 10^{-6} \times 72 = 2.16 \times 10^{-5} \text{ C}$$

$$Q_4 = C_4 V_4 = 0.5 \times 10^{-6} \times 72 = 3.60 \times 10^{-5} \text{ C}$$

podendo facilmente verificar-se que $Q = Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4$.

- c) Novamente, a maneira mais simples de calcular a energia potencial electrostática é tratando a associação dos quatro condensadores como um único condensador, de capacidade igual à capacidade equivalente:

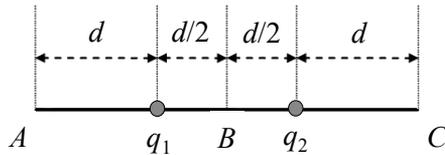
$$U_{elec} = \frac{1}{2} C_{eq} V_{AB}^2 = 3.456 \times 10^{-3} \text{ J.}$$

- d) A capacidade de cada condensador aumenta de um factor de ϵ_r . É fácil mostrar que a capacidade equivalente aumenta na mesma proporção, logo:

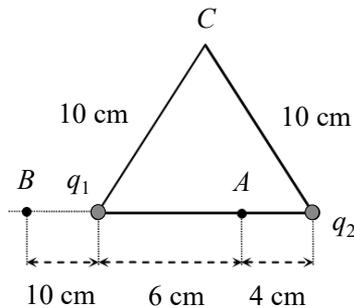
$$U_{elec} = \frac{1}{2} \epsilon_r C_{eq} V_{AB}^2 = \epsilon_r W_0 = 8.64 \times 10^{-3} \text{ J.}$$

PROBLEMAS

6.1. Considere o conjunto de duas cargas eléctricas representado na figura abaixo, em que $q_1 = +1.0 \times 10^{-9} \text{ C}$, $q_2 = -3.0 \times 10^{-9} \text{ C}$ e $d = 10 \text{ cm}$. Este conjunto encontra-se no vácuo.

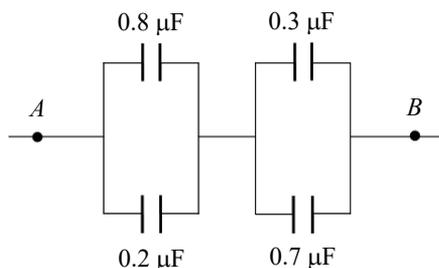


- Calcule o valor do campo eléctrico gerado pelas duas cargas em cada um dos três pontos A , B , e C . (*Sugestão:* Comece por calcular o vector campo eléctrico em A , B , e C e depois ache a sua norma.)
 - Considere que se coloca um electrão no ponto B . Calcule o valor da força que actua o electrão.
 - Represente num esquema os vectores campo eléctrico nos pontos A , B , e C bem como o vector força eléctrica que actua o electrão colocado no ponto B .
- 6.2. Considere uma carga eléctrica $q_1 = +1.0 \times 10^{-6} \text{ C}$ situada a uma distância de 10 cm de uma carga $q_2 = +2.0 \times 10^{-6} \text{ C}$. Em que ponto, situado sobre o segmento de recta que une as duas cargas, é o campo eléctrico nulo?
- 6.3. As cargas eléctricas pontuais $q_1 = 12 \times 10^{-9} \text{ C}$ e $q_2 = -12 \times 10^{-9} \text{ C}$ são colocadas a uma distância de 10 cm uma da outra de acordo com o esquema da figura abaixo. Este conjunto encontra-se no vácuo.

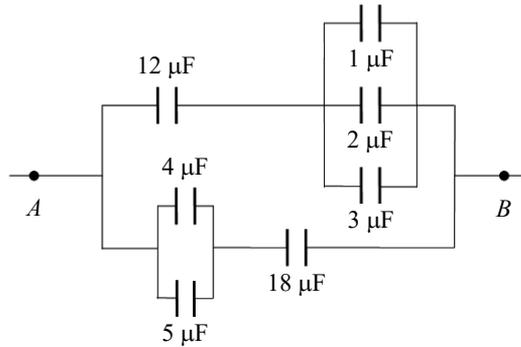


- Calcule os potenciais eléctricos nos pontos A , B e C .
 - Calcule a d.d.p. $V_B - V_A$.
 - Coloca-se uma carga pontual de valor $3 \times 10^{-9} \text{ C}$ no ponto B . Calcule a energia potencial electrostática do conjunto das três cargas.
- 6.4. Considere uma carga eléctrica pontual, de valor $q_1 = 10 \mu\text{C}$, situada no ponto O , origem dos eixos do plano Oxy , e uma outra carga eléctrica, de valor $q_2 = -5 \mu\text{C}$, situada no ponto A , de coordenadas $(4,0)$ (SI). Este conjunto encontra-se no vácuo.

- a) Calcule o potencial eléctrico gerado pelas duas cargas no ponto B de coordenadas $(3, 2)$ (SI).
- b) Calcule o campo eléctrico gerado pelas duas cargas nesse mesmo ponto.
- c) Admita que se quer transportar, em equilíbrio, uma carga $q' = 2.5 \mu\text{C}$ do infinito até ao ponto B . Qual é o trabalho realizado pela força eléctrica neste transporte?
- d) Qual é a força electrostática que actuará sobre a carga q' uma vez colocada no ponto B ?
- 6.5. Uma carga eléctrica de valor $2.5 \times 10^{-8} \text{ C}$ é colocada num campo eléctrico uniforme dirigido de baixo para cima e cuja intensidade é $q_1 = 5 \times 10^{-4} \text{ N C}^{-1}$. Qual é o trabalho efectuado contra o campo quando a carga é deslocada:
- a) 45 cm para a direita, na horizontal.
- b) 80 cm para baixo, na vertical.
- c) 260 cm obliquamente, para cima, fazendo um ângulo de 45° com a horizontal.
- d) Calcule, para o caso da alínea b), a d.d.p. entre os pontos inicial e final do deslocamento.
- (Nota: o trabalho efectuado contra o campo é o trabalho realizado pela força aplicada ou agente exterior.)
- 6.6. No modelo atómico de Bohr (que fez 100 anos em 2013) supõe-se que os electrões descrevem órbitas circulares em torno de um núcleo positivamente carregado. Considerando o ião de hélio He^+ , (cujo núcleo, recorde-se, contém dois prótons) determine:
- a) A intensidade da força eléctrica que se exerce entre o núcleo e o único electrão do ião He^+ ,
- b) O valor do campo eléctrico e o potencial eléctrico gerados pelo núcleo no ponto onde se encontra o electrão.
- c) O valor da velocidade do electrão e a frequência do seu movimento.
- d) A energia potencial electrostática do ião He^+ .
- (Dado: raio do ião He^+ é $r = 9.3 \times 10^{-11} \text{ m}$.)
- 6.7. Quatro cargas eléctricas pontuais, valendo cada uma $2 \mu\text{C}$, estão situadas nos vértices de um quadrado de 4 m de lado. Determine a energia potencial electrostática deste conjunto de cargas, que se encontra no vácuo.
- 6.8. Admita que se aplica uma tensão de 100 V entre os pontos A e B da associação de condensadores representada na figura abaixo. Calcule a carga eléctrica armazenada em cada condensador.

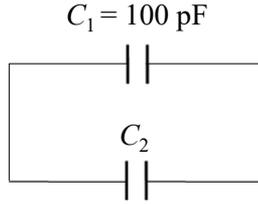


6.9. Considere a associação de condensadores representada no esquema da figura abaixo.

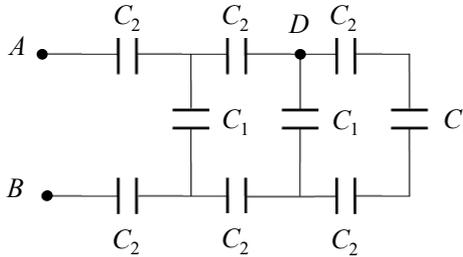


- a) Determine a capacidade equivalente desta associação de condensadores.
 - b) Se se aplicar uma d.d.p. de 120 V entre A e B, determine a carga eléctrica existente em cada um dos condensadores e a d.d.p. entre os terminais de cada condensador.
 - c) Determine a energia potencial electrostática desta associação de condensadores.
- 6.10. Um condensador de $1\ \mu\text{F}$ e outro de $2\ \mu\text{F}$ são ligados em paralelo, aplicando-se ao conjunto uma d.d.p. de 1200 V.
- a) Determine a carga adquirida por cada um dos condensadores, bem como a d.d.p. aos seus terminais.
 - b) Admita que, após terem carregado totalmente, os condensadores são desligados da fonte de tensão e separados um do outro. Seguidamente, e sem que percam a carga que tinham adquirido, são ligados novamente entre si, em paralelo, mas com os terminais de polaridades contrárias juntos. Determine, nesta nova configuração, a carga de cada condensador e a d.d.p. aos seus terminais.
- 6.11. Liga-se em série dois condensadores de capacidades $C_1 = 10\ \text{pF}$ e $C_2 = 5\ \text{pF}$, inicialmente descarregados. Em seguida, carrega-se o sistema ligando os seus terminais a uma pilha de 18 V.
- a) Calcule a carga e a d.d.p. entre as armaduras de cada condensador.
 - b) Calcule a energia potencial electrostática armazenada nos dois condensadores.
 - c) Desligam-se os condensadores da montagem em série e ligam-se em paralelo, sem a pilha, com os terminais de polaridades iguais juntos. Determine a carga de cada um dos condensadores e a d.d.p. entre as suas armaduras.
 - d) Se os dois condensadores forem constituídos por placas paralelas, de forma circular e 2 cm de diâmetro, calcule a distância entre as placas de cada condensador (o dieléctrico é o ar).
- 6.12. Um condensador C_1 de capacidade 100 pF é ligado a uma bateria e carregado até atingir uma tensão de 100 V. Depois de carregado, desliga-se a bateria e liga-se C_1 a um outro condensador C_2 , que se encontra descarregado, da maneira indicada

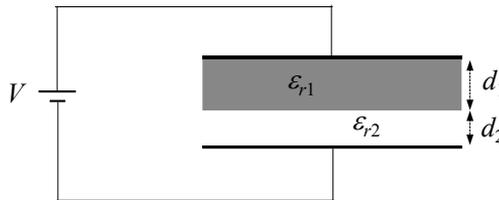
na figura abaixo. Se a tensão final do conjunto for de 30 V, determine a capacidade de C_2 , bem com a variação da energia potencial electrostática devida à ligação ao segundo condensador.



6.13. Considere o circuito representado na figura abaixo, em que $C_1 = 2 \mu\text{F}$ e $C_2 = 3 \mu\text{F}$.

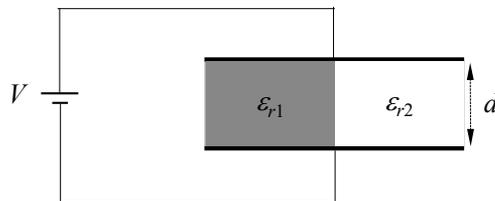


- Calcule a capacidade equivalente da rede compreendida entre os pontos A e B.
 - Calcule a carga existente em cada um dos condensadores mais próximos de A e B, quando $V_{AB} = 900 \text{ V}$.
 - Com $V_{AB} = 900 \text{ V}$, calcule V_{DB} .
- 6.14. Um condensador plano com dieléctrico de ar é carregado e desligado do gerador. A d.d.p. entre as suas armaduras é de 100 V.
- Calcule o valor da d.d.p. aos terminais do condensador, quando preenchemos o espaço entre as armaduras com uma placa de material isolador cuja constante dieléctrica (ou permitividade relativa) é 2.5.
 - Com o ar como dieléctrico, a capacidade do condensador é $100 \mu\text{F}$. Qual é a energia potencial electrostática armazenada por cada um dos dieléctricos?
 - Supondo que não há atrito, qual é o trabalho necessário para retirar a placa isoladora de entre as armaduras do condensador?
- 6.15. Um condensador de placas paralelas de área A é preenchido com dois materiais dieléctricos de permitividades relativas ϵ_{r1} e ϵ_{r2} e cujas espessuras valem d_1 e d_2 , respectivamente, conforme se representa no esquema da figura seguinte.



- a) Determine a expressão da capacidade do condensador admitindo que $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = \epsilon_r$, e a energia potencial electrostática armazenada quando se aplica uma tensão V aos terminais do condensador.
- b) Determine a expressão da capacidade do condensador admitindo que $\epsilon_{r1} \neq \epsilon_{r2}$. Concretize o cálculo para $\epsilon_{r1} = 2$, $\epsilon_{r2} = 4$, $d_1 = 2$ cm, $d_2 = 1$ cm e $A = 36$ cm².
- c) Calcule a carga eléctrica Q armazenada nas armaduras do condensador e a queda de tensão ao longo de cada material dieléctrico, sabendo que se aplica uma tensão de 100 V nas armaduras do condensador.

6.16. Um condensador de placas paralelas de área A é preenchido com dois materiais dieléctricos de permitividades relativas ϵ_{r1} e ϵ_{r2} cada um ocupando metade do volume do condensador, como se mostra na figura abaixo.



- a) Determine o valor da capacidade do condensador admitindo os seguintes valores: $\epsilon_{r1} = 1.5$, $\epsilon_{r2} = 3.5$, $d = 1$ cm e $A = 36$ cm².
 - b) Calcule as cargas Q_1 e Q_2 armazenadas em cada um dos dieléctricos, sabendo que se aplica uma tensão de 100 V nas armaduras do condensador.
- 6.17. Um neurónio pode ser visto como um pequeno condensador de placas paralelas, uma vez que os iões no seu exterior e no seu interior (meios condutores) estão separados por uma membrana isoladora (dieléctrico) muito mais fina do que as dimensões lineares do neurónio. Admitindo que a espessura da membrana é $d = 10^{-8}$ m, a sua área é $A = 10^{-15}$ m², a sua permitividade relativa é $\epsilon_r = 8$, e o campo eléctrico no seu interior tem o valor $E = 10^7$ V m⁻¹, calcule:
- a) A capacidade eléctrica de um neurónio.
 - b) A d.d.p. entre o interior e o exterior de um neurónio.
 - c) A carga eléctrica acumulada num neurónio.
 - d) A energia potencial electrostática armazenada na membrana de um neurónio.

CAPÍTULO 7

CORRENTE ELÉCTRICA ESTACIONÁRIA

No capítulo anterior tratámos da electrostática, que é o estudo das cargas eléctricas em repouso. Neste capítulo ocupar-nos-emos de cargas eléctricas em movimento, constituindo aquilo a que se chama uma *corrente eléctrica*. As correntes eléctricas podem estabelecer-se em materiais condutores (por exemplo, metais ou electrólitos. Consideraremos apenas correntes em condutores sólidos, nos quais as cargas em movimento são electrões (no caso de electrólitos, são iões, tanto positivos como negativos). Um conjunto de materiais condutores ligados entre si e alimentados por uma ou mais fontes de corrente, constitui aquilo a que se chama um *circuito eléctrico*. Já encontrámos no capítulo anterior um dos elementos dos circuitos eléctricos: o condensador. Neste capítulo introduziremos outros elementos, como resistências, geradores e receptores de energia eléctrica. Enunciaremos e aplicaremos ainda as leis que nos permitem fazer a chamada *análise de circuitos*.

7.1. Intensidade de corrente eléctrica

Uma corrente eléctrica consiste, portanto, num conjunto de cargas eléctricas em movimento com uma direcção e sentido bem definidos, impostos pela aplicação de uma diferença de potencial. Vamos agora introduzir algumas grandezas para descrever quantitativamente a corrente eléctrica. A *intensidade de corrente eléctrica* (ou, simplesmente, *corrente eléctrica*), $i(t)$, é a grandeza física que mede a variação no tempo da carga eléctrica que atravessa a secção recta de um condutor, ou seja:

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t). \quad (7.1)$$

Trata-se, claramente, de uma grandeza escalar, expressa no SI em ampère (A): $1 \text{ A} = 1 \text{ C s}^{-1}$.

Uma corrente eléctrica de valor constante (no tempo) diz-se uma corrente *estacionária* e representa-se habitualmente por I . Pode escrever-se, neste caso, que

$$I = \frac{|\Delta Q|}{\Delta t}, \quad (7.2)$$

onde $|\Delta Q|$ representa o módulo da carga total que atravessa a secção recta do condutor no intervalo de tempo Δt ⁵⁶. No presente capítulo iremos tratar apenas de circuitos resistivos em regime estacionário, isto é, em que vigoram apenas correntes eléctricas estacionárias.

7.2. Resistência eléctrica e resistividade. Lei de Ohm

Considere-se um condutor rectilíneo de comprimento l e área de secção recta S , ao qual se aplica uma diferença de potencial constante V (vide figura 7.1).

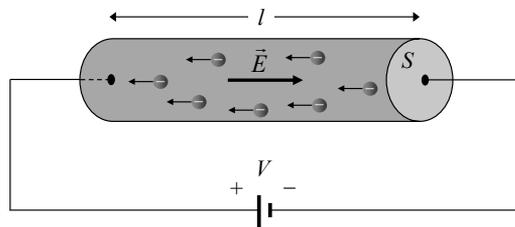


Figura 7.1. Condutor percorrido por uma corrente eléctrica. Estamos a supor que se trata de um fio, de forma cilíndrica, que é a situação mais frequente na prática.

Em consequência da aplicação da diferença de potencial, surge no seio do condutor uma corrente eléctrica estacionária I . Verifica-se experimentalmente que, para muitos condutores, é válida a seguinte relação entre I e V :

$$I = \frac{V}{R}, \quad (7.3)$$

onde R é uma constante que se designa por *resistência eléctrica* (ou, simplesmente, *resistência*) do condutor. A expressão (7.3) traduz o facto de que a intensidade da corrente que percorre o condutor é directamente proporcional à diferença de potencial entre as extremidades desse mesmo condutor, sendo a constante de proporcionalidade o inverso da resistência do condutor. Este resultado é conhecido por *lei de Ohm*, e os condutores para os quais ela se verifica (que, recorde-se, não são todos os condutores) dizem-se *condutores óhmicos*. A lei de Ohm pode, ainda, escrever-se em qualquer das formas alternativas:

$$V = RI \quad \text{ou} \quad R = \frac{V}{I}, \quad (7.4)$$

o última das quais nos permite estabelecer que a resistência eléctrica é expressa no SI em ohm (Ω): $1 \Omega = 1 \text{ VA}^{-1}$. A resistência eléctrica é, portanto, uma medida da dificuldade que

⁵⁶ Note-se a analogia formal entre a intensidade de corrente instantânea, equação (7.1), e a velocidade instantânea, equação (2.5). No âmbito desta analogia, o segundo membro da equação (7.2) define uma intensidade de corrente *média* (cf. definição de velocidade média, equação (2.4)), a qual coincide com a intensidade de corrente instantânea no caso de uma corrente estacionária, do mesmo modo que a velocidade média coincide com a velocidade instantânea no caso de um movimento rectilíneo e uniforme.

a corrente eléctrica tem em atravessar um condutor: quanto maior o valor de R , tanto maior o valor da diferença de potencial que é necessário aplicar a um dado condutor para produzir corrente de uma dada intensidade. Logo, bons condutores têm resistências baixas e maus condutores (e isoladores) resistências elevadas. A figura 7.2 ilustra o comportamento dos condutores óhmicos e não óhmicos.

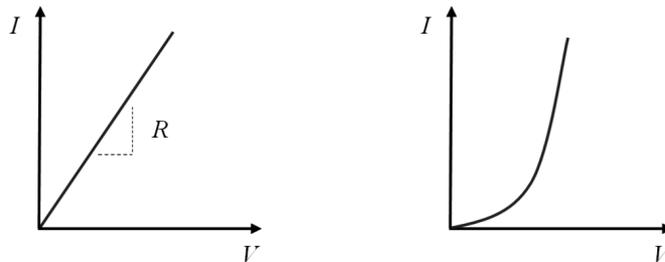


Figura 7.2. Gráfico da intensidade de corrente eléctrica que percorre um condutor em função da diferença de potencial aos seus terminais, para condutores óhmicos (à esquerda) e não óhmicos (à direita). No caso dos condutores óhmicos, a resistência é o inverso do declive da curva. No caso de condutores não óhmicos, este declive não é constante e o conceito de resistência perde o sentido.

A resistência de um condutor depende do material de que é feito e da sua forma geométrica e dimensões (além de outros factores, como por exemplo a temperatura ou a estrutura cristalina do material). Tem-se que

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (7.5)$$

onde ρ depende apenas das características do material de que é feito o condutor e da sua temperatura e se designa por *resistividade* do material. A resistividade é expressa no SI em ohm metro ($\Omega \text{ m}$). A expressão (7.5) diz-nos que a resistência de um condutor é directamente proporcional ao seu comprimento, l (a dimensão linear na direcção em que a corrente eléctrica o atravessa), e inversamente proporcional à área da sua secção recta, S .

Define-se, igualmente, a grandeza *condutividade* como o inverso da resistividade:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \quad (7.6)$$

A condutividade eléctrica exprime-se no SI em $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$. Materiais condutores são aqueles que apresentam, portanto, condutividade elevada (ou resistividade baixa) e materiais dieléctricos ou isoladores os que apresentam resistividade elevada (ou condutividade baixa).

Exemplo 7.1

Um fio condutor cilíndrico, com comprimento $l = 4 \text{ m}$ e secção transversal com área $S = 1 \text{ mm}^2$ apresenta uma resistência eléctrica de $R = 10 \Omega$. Aplica-se uma diferença de potencial de 5 V entre as suas extremidades. Determinar: a) a resistividade e a

condutividade do material de que é feito o fio; b) A intensidade da corrente que percorre o fio; c) O valor do campo eléctrico no interior do fio.

Resolução:

a) Utilizando as relações entre a resistência R , a resistividade ρ e a condutividade σ , vem (não nos esquecendo de converter a área para unidades SI):

$$\rho = R \frac{S}{l} = 10 \times \frac{10^{-6}}{4} = 2.5 \times 10^{-6} \text{ } \Omega \text{ m}$$

e

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = 4 \times 10^5 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}.$$

b) A intensidade de corrente é dada pela lei de Ohm:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{5}{10} = 0.5 \text{ A.}$$

c) Utilizando a relação entre o campo eléctrico e a diferença de potencial, vem:

$$E = \frac{V}{l} = \frac{5}{4} = 1.25 \text{ Vm}^{-1}.$$

A resistividade de muitos materiais depende fortemente da temperatura. Esta dependência pode ser descrita em boa aproximação pela relação linear⁵⁷

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)], \quad (7.7)$$

onde α representa o coeficiente de temperatura da resistividade e ρ_0 a resistividade do material à temperatura de referência T_0 . Normalmente considera-se $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Para um condutor específico de resistência R , será válida a relação

$$R(T) = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)], \quad (7.8)$$

com R_0 a resistência à temperatura de referência. No caso dos metais, a resistividade e a resistência aumentam com o aumento de temperatura, logo $\alpha > 0$. Já nos materiais semicondutores, a resistividade e a resistência diminuem com o aumento de temperatura e $\alpha < 0$. Para percebermos esta diferença de comportamento entre metais e semicondutores, recordemos o que é, fisicamente, a resistividade eléctrica: é uma medida da dificuldade que uma corrente eléctrica tem em atravessar um material. Ora, quanto mais elevada for a temperatura, tanto maiores os movimentos dos átomos ou iões que constituem

⁵⁷ Esta relação só é válida em intervalos de temperatura estreitos, ou seja, para $(T - T_0)/T_0 \leq 1$.

o material, que assim colocam obstáculos efectivamente maiores à passagem da corrente. Mas, se assim fosse, então a resistividade deveria aumentar sempre com a temperatura, para qualquer tipo de material... Sucede, porém, que nos semicondutores o número de electrões de condução aumenta com a temperatura, e este efeito sobrepõe-se ao aumento das dimensões efectivas dos obstáculos à passagem da corrente. Nos metais, pelo contrário, o número de electrões de condução é (praticamente) independente da temperatura.

A tabela 7.1 colige as resistividades e condutividades de alguns materiais.

Tabela 7.2. Resistividades de diferentes materiais (valores a $T = 20\text{ }^\circ\text{C}$).

Materiais		ρ ($\Omega\text{ m}$)	σ ($\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$)	α ($^\circ\text{C}^{-1}$)
Condutores	Alumínio	2.82×10^{-8}	3.55×10^7	0.0039
	Cobre	1.72×10^{-8}	5.81×10^7	0.0039
	Prata	1.59×10^{-8}	6.29×10^7	0.0038
	Ferro	10.0×10^{-8}	1.00×10^7	0.0050
	Platina	10.6×10^{-8}	0.94×10^7	0.0039
Semicondutores	Silício	640	1.6×10^{-3}	-0.075
	Germânio	0.46	2.2	-0.048
	Carbono (grafite)	3.5×10^{-5}	2.9×10^4	-0.0005
Isoladores	Vidro	10^{10} a 10^{14}	10^{-14} a 10^{-10}	
	Teflon	10^{14}	10^{-14}	
	Enxofre	10^1	10^{-15}	

Exemplo 7.2

Sabe-se que a resistividade do cobre, à temperatura de $20\text{ }^\circ\text{C}$, é $\rho_0 = 1.72 \times 10^{-8}\ \Omega\text{ m}$. Determinar a resistividade do cobre à temperatura de $40\text{ }^\circ\text{C}$.

Resolução:

Claramente, ρ_0 é a resistência quando $T = T_0$. Tomando, então, $T_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$ e $T = 40\text{ }^\circ\text{C}$ na expressão (7.7), vem imediatamente

$$\rho(40^\circ\text{C}) = 1.72 \times 10^{-8} \times [1 + 0.0039 \times (40 - 20)] = 1.85 \times 10^{-8}\ \Omega\text{ m}.$$

7.3. Análise de circuitos resistivos

As leis de análise de circuitos permitem-nos relacionar as intensidades das correntes em diferentes partes de um dado circuito com os valores dos seus elementos (geradores, resistências, condensadores, etc.) e das diferenças de potencial a que estão submetidos.

Antes de as enunciarmos, importa introduzir alguns conceitos que nos permitam descrever a topologia dos circuitos eléctricos:

- *Ramo*: conjunto de elementos de circuito ligados em série, ou seja, cada um deles está ligado a, no máximo, dois outros. Dentro de cada ramo, a intensidade da corrente é a mesma em todos os pontos. Um circuito tem de ter pelo menos um ramo. Se o circuito tiver nodos, um ramo liga dois nodos consecutivos.
- *Nodo, nó ou vértice*: ponto de um circuito onde se encontram três ou mais ramos. Um circuito pode não ter quaisquer nodos, se for constituído por apenas um ramo.
- *Malha*: qualquer percurso fechado dentro de um circuito (independentemente do sentido). Em geral, uma malha é composta por um ou mais ramos, e pode conter ou não vários nodos. Logo, a intensidade da corrente pode tomar valores diferentes dentro de uma mesma malha (um valor em cada um dos ramos que a constituem). Um circuito tem de ter pelo menos uma malha.

Na análise de um circuito, apenas interessa a topologia – o que está ligado ao quê – e não a geometria – as posições relativas dos elementos de circuito. Significa isto que podemos sempre redesenhar um circuito da maneira que nos for mais conveniente ou perceptível, desde que respeitemos a sua topologia.

Finalmente, vimos no capítulo anterior que as correntes eléctricas podem ser compostas por cargas negativas – electrões – nos condutores sólidos, por cargas quer positivas, quer negativas – iões – em electrólitos, e por cargas negativas – electrões – ou positivas – lacunas ou buracos – em semicondutores. Obviamente, quando sujeitas a uma diferença de potencial, cargas de sinais opostos fluirão em sentidos opostos. Define-se o *sentido convencional* de uma corrente eléctrica como o sentido em que ela fluiria se fosse constituída por cargas positivas. Resulta daqui que, no caso de sólidos condutores, nos quais a corrente é constituída por cargas negativas – electrões –, o sentido convencional da corrente é o oposto do sentido em que as cargas efectivamente se movem, a que se chama *sentido real* da corrente. Do ponto de vista da realização de cálculos, é indiferente utilizar um ou outro sentido (desde que, evidentemente, se utilize sempre o mesmo!). No que se segue, utilizaremos sempre o sentido convencional da corrente eléctrica.

7.3.1. Leis de Kirchhoff

Além da lei de Ohm, o principal resultado que iremos utilizar na análise de circuitos são as duas leis de Kirchhoff. A *lei dos nodos* ou *lei das correntes* pode enunciar-se do seguinte modo:

A soma algébrica das correntes eléctricas num nodo é zero, considerando positivas as correntes que entram no nodo e negativas as que dele saem, isto é

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (7.9)$$

A lei dos nodos está ilustrada na figura 7.3 e é consequência directa do princípio de conservação da carga eléctrica: um nodo não pode ser nem fonte, nem sumidoiro de cargas eléctricas.

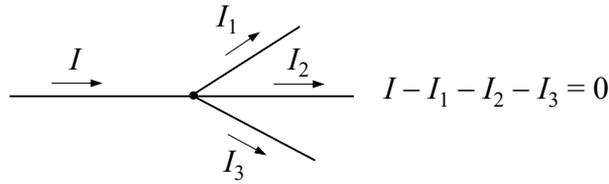


Figura 7.3. Ilustração da lei dos nodos de Kirchhoff.

A lei das malhas ou lei das tensões pode enunciar-se do seguinte modo:

A soma algébrica das diferenças de potencial numa malha (circuito fechado) é zero, considerando que uma diferença de potencial é positiva se a corrente a atravessa do pólo negativo para o pólo positivo, e negativa se a corrente a atravessa do pólo positivo para o pólo negativo, isto é

$$\sum_{i=1}^n V_i = 0. \quad (7.10)$$

A lei das malhas está ilustrada na figura 7.4 e é consequência directa do princípio de conservação da energia: num circuito não pode ser criada nem destruída energia, logo toda a energia fornecida por alguns dos elementos de circuito tem de ser consumida por outros. Por outras palavras: o trabalho total realizado pela força eléctrica ao longo de uma malha tem de ser nulo, uma vez que se trata de uma força conservativa. Como esse trabalho é proporcional á diferença entre o potencial inicial e o potencial final, estes têm de ser iguais.

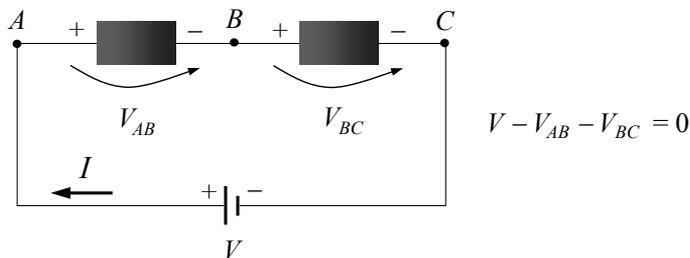


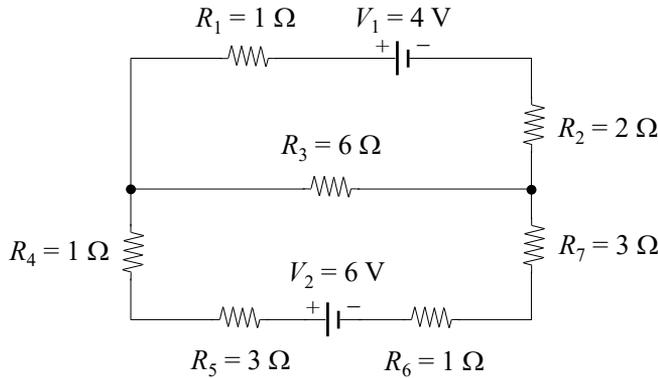
Figura 7.4. Ilustração da lei das malhas de Kirchhoff aplicada a um circuito de uma só malha.

A aplicação das leis de Kirchhoff permitem determinar as correntes eléctricas nos diferentes ramos de um circuito e, consequentemente, as diferenças de potencial aos terminais dos elementos que o constitem. Admitamos que um circuito tem n nodos e r ramos. O número de equações independentes que se obtém por aplicação da lei dos

nodos é $n - 1$ ⁵⁸. Para calcular todas as correntes ficam a faltar $r - (n - 1) = r - n + 1$ equações independentes que coincidem com o número de malhas independentes ou fundamentais do circuito. Assim, num circuito com n nodos e r ramos deve aplicar-se $n - 1$ vezes a lei dos nodos e $r - n + 1$ a lei das malhas.

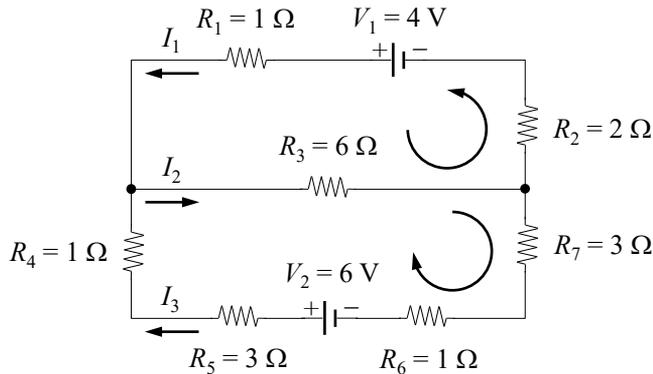
Exemplo 7.3

Determinar as intensidades da corrente nos diferentes ramos do seguinte circuito:



Resolução:

Começemos por notar que este circuito tem 2 nodos e 3 ramos. O circuito tem 3 correntes eléctricas, tantas quantos os ramos do circuito. Para calcular o valor das correntes começamos por arbitrar um sentido para cada. Os sentidos escolhidos (poderiam ter sido escolhidos outros quaisquer!) são os que constam da seguinte figura:



Aplicando as leis de Kirchhoff, vem

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ V_1 - R_1 I_1 - R_3 I_2 - R_2 I_1 = 0 \\ V_2 - R_5 I_3 - R_4 I_3 - R_3 I_2 - R_7 I_3 - R_6 I_3 = 0 \end{cases},$$

⁵⁸ A lei dos nodos fornece n equações, uma para cada nodo. Contudo, estas equações não são todas independente. De facto, como cada ramo liga dois nodos, cada corrente encontra-se representada, no conjunto das n equações, duas vezes e com sinais contrários. A soma das n equações conduz a uma igualdade do tipo $0 = 0$. Segue-se que o número de equações independentes que é possível escrever com a lei dos nodos é $n - 1$.

onde a primeira equação resulta de se aplicar a lei dos nodos ao nodo do lado esquerdo, e a segunda e terceira equações resultam de se aplicar a lei das malhas à malha superior (percorrida no sentido anti-horário) e à malha inferior (percorrida no sentido horário), respectivamente. Substituindo valores, tem-se:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 3I_1 + 6I_2 = 4 \\ 6I_2 + 8I_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 = 0.22 \text{ A} \\ I_2 = 0.56 \text{ A} \\ I_3 = 0.33 \text{ A} \end{cases}.$$

As intensidades de todas as correntes são positivas, logo os sentidos para elas escolhidos estão correctos.

7.3.2. Leis de associação de resistências

Se tivermos um conjunto de resistências ligadas arbitrariamente entre si, e pretendermos substituí-las por uma única resistência, de modo a que nada se altere no resto do circuito, qual deverá ser o valor dessa resistência única? A resposta é: essa resistência única deverá ter o valor da *resistência equivalente* do conjunto. As leis de associação de resistências permitem-nos calcular a resistência equivalente de qualquer conjunto de resistências: a diferença de potencial aos terminais da resistência equivalente, e a corrente que a atravessa, são as mesmas que para o conjunto de resistências que estamos a substituir.

Embora haja um grande número de maneiras de ligar n resistências uma às outras, todas essas maneiras possíveis se reduzem, como no caso dos condensadores, a combinações de associações em *série* e em *paralelo*⁵⁹. É por esta razão que iremos estudar estes dois modos de associação.

7.3.2.1. Associação em série

Pretende-se calcular a resistência equivalente, R_{eq} , à associação em série das n resistências R_1, \dots, R_n representada no esquema da figura 7.5.

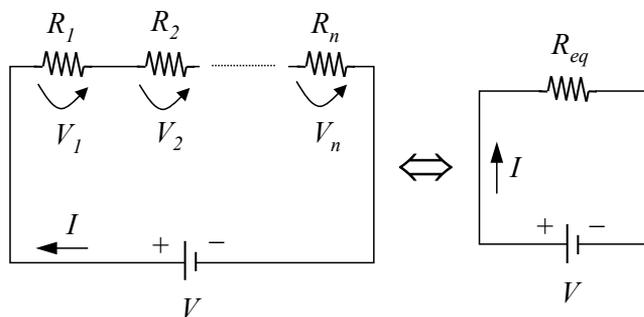


Figura 7.5. Associação de resistências em série e respectivo circuito equivalente.

⁵⁹ No âmbito deste curso. As associações em estrela e em triângulo não são redutíveis a nenhuma destas formas, mas não as consideraremos aqui.

Aplicando a este circuito a lei das malhas de Kirchhoff, verifica-se a relação:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n. \quad (7.11)$$

Como, pela lei de Ohm, se tem $V_i = R_i I$ ($i = 1, \dots, n$) – recordar que, numa associação em série, a intensidade da corrente é a mesma em todos os elementos –, resulta que

$$V = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = \left(\sum_{i=1}^n R_i \right) I \Rightarrow \frac{V}{I} = \sum_{i=1}^n R_i, \quad (7.12)$$

o que nos permite definir uma resistência equivalente $R_{eq} = V/I$ como

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (7.13)$$

ou seja, a resistência equivalente de uma associação de resistências em série é igual à soma das resistências individuais.

7.3.2.2. Associação em paralelo

De modo análogo ao caso anterior, pretende-se também calcular a resistência equivalente, R_{eq} , à associação em paralelo das n resistências R_1, \dots, R_n (*vide* figura 7.6).

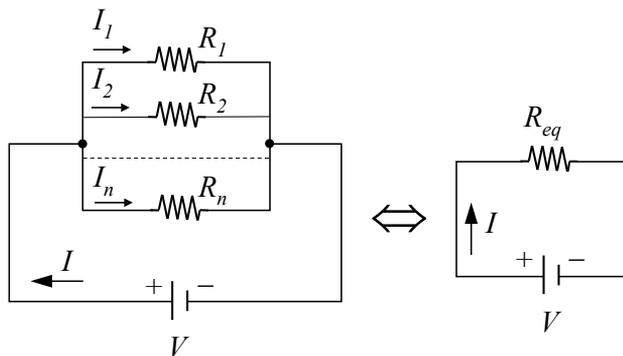


Figura 7.6. Associação de resistências em paralelo e respectivo circuito equivalente.

Aplicando a este circuito a lei dos nodos de Kirchhoff, verifica-se a relação

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n. \quad (7.14)$$

Como, pela lei de Ohm, se tem $I_i = V/R_i$ ($i = 1, \dots, n$) – recordar que, numa associação em paralelo, a diferença de potencial é a mesma em todos os elementos –, resulta que

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \dots + \frac{V}{R_n} = V \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \Rightarrow \frac{I}{V} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}, \quad (7.15)$$

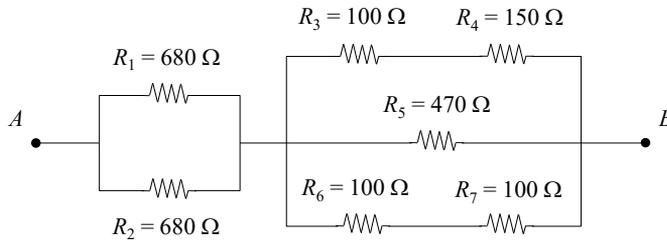
o que nos permite definir uma resistência equivalente $R_{eq} = V/I$ como

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (7.16)$$

Ou seja, a resistência equivalente de uma associação de resistências em paralelo é o inverso da soma dos inversos das resistências individuais.

Exemplo 7.4

Calcule a resistência equivalente do circuito representado na seguinte figura:



Resolução:

Começemos por reconhecer que este circuito não é nem uma associação em série, nem uma associação em paralelo, mas sim uma combinação de ambas. No entanto, podemos notar que:

- i. A resistência R_1 está em paralelo com a resistência R_2 , logo a resistência equivalente deste conjunto é:

$$R_{12} = R_1 \parallel R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 340 \Omega.$$

- ii. A resistência R_3 está em série com a resistência R_4 , logo a resistência equivalente deste conjunto é:

$$R_{34} = R_3 \oplus R_4 = R_3 + R_4 = 250 \Omega.$$

- iii. A resistência R_6 está em série com a resistência R_7 , logo a resistência equivalente deste conjunto é:

$$R_{67} = R_6 \oplus R_7 = R_6 + R_7 = 200 \Omega.$$

- iv. As resistências R_{34} , R_5 e R_{67} estão ligados em paralelo, logo a resistência equivalente deste conjunto de conjuntos é:

$$R_{34567} = R_{34} \parallel R_5 \parallel R_{67} = \frac{1}{\frac{1}{R_{34}} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_{67}}} = 89.9 \Omega.$$

- v. Finalmente, o circuito completo consiste no conjunto das resistências R_1 e R_2 em série com o conjunto formado pelas restantes resistências. A resistência equivalente do circuito é, portanto,

$$R_{eq} = R_{12} \oplus R_{34567} = R_{12} + R_{34567} = 429.9\Omega.$$

7.4. Potência eléctrica

7.4.1. Potência posta em jogo num circuito

Consideremos um circuito ao qual se liga uma fonte de tensão de valor V (*vide* figura 7.7). O circuito é perfeitamente genérico e pode conter quaisquer elementos: representamo-lo aqui por uma “caixa negra”.

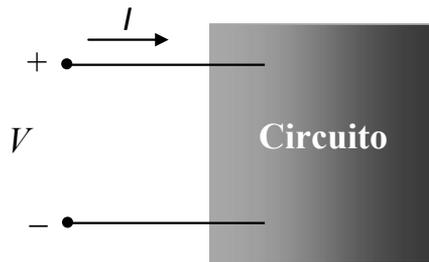


Figura 7.7. Circuito genérico submetido a uma diferença de potencial V e percorrido por uma corrente de intensidade I .

Pela acção do campo eléctrico imposto pela diferença de potencial V , vai mover-se através do circuito uma carga ΔQ , pelo que é realizado, no intervalo de tempo Δt , um trabalho

$$W = \Delta Q \times V. \quad (7.17)$$

Ora, por definição de potência (trabalho realizado, ou energia posta em jogo, por unidade de tempo), resulta para a potência eléctrica posta em jogo no transporte da carga ΔQ ao longo do circuito:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \times V = IV \Leftrightarrow P = IV. \quad (7.18)$$

P representa o valor da potência (fornecida ou absorvida) posta em jogo num circuito quando submetido a uma diferença de potencial V e percorrido por uma corrente eléctrica de intensidade I . Repare-se que um circuito pode ser constituído apenas por um elemento, logo a expressão (7.18) aplica-se, igualmente, a elementos de circuito considerados individualmente. Como vimos no capítulo 3, a potência é expressa no SI em watt (W), sendo $1 W = 1 J s^{-1}$.

Levanta-se agora a questão de como distinguir se um determinado circuito (ou elemento de circuito) absorve ou fornece energia (potência)? Supondo que a corrente eléctrica tem o sentido convencional, diz-se que um elemento de circuito absorve (ou consome) energia se a corrente flui do terminal positivo para o negativo desse elemento, e que fornece energia se a corrente flui do terminal negativo para o terminal positivo (*vide* figura 7.8).

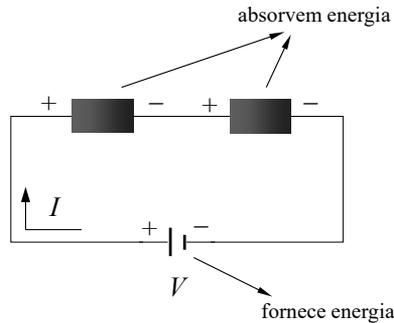


Figura 7.8. Elementos de circuito que fornecem ou absorvem energia/potência.

7.4.2. Potência posta em jogo numa resistência: lei de Joule.

Considere-se agora o caso particular de um circuito que contém apenas resistências (dito circuito *puramente resistivo*, ou circuito *do tipo R*), submetido a uma diferença de potencial V . Como vimos atrás, num circuito deste tipo podemos substituir todas as resistências por uma única, de valor igual à resistência equivalente do circuito, pelo que representamos aqui apenas uma resistência (*vide* figura 7.9).

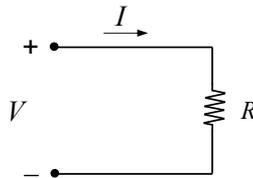


Figura 7.9. Circuito puramente resistivo submetido a uma diferença de potencial V e percorrido por uma corrente de intensidade I .

Em consequência da tensão a que está submetido, o circuito vai drenar uma corrente eléctrica I , absorvendo energia eléctrica. Toda a energia por unidade de tempo (potência) recebida pelo circuito é dissipada na sua resistência sob a forma de calor. Este fenómeno, conhecido por *efeito de Joule*, deve-se à transferência de energia cinética entre os portadores de carga (electrões em metais, iões em electrólitos, electrões ou lacunas em semicondutores) e o meio condutor (a rede cristalina num sólido, o solvente num electrólito), fazendo aumentar a amplitude dos movimentos dos constituintes deste último, ou seja, elevando a sua temperatura. Por aplicação directa da expressão (7.18), que fornece a potência eléctrica posta em jogo num elemento de circuito, e da lei de

Ohm, expressão (7.3) ou (7.4), podemos facilmente concluir que a potência posta em jogo num circuito puramente resistivo é

$$P_R = IV = RI^2 = \frac{V^2}{R}, \quad (7.19)$$

relações estas que constituem a chamada *lei de Joule*.

7.5. Geradores de energia eléctrica

Um *gerador de energia eléctrica* ou *gerador eléctrico* é um dispositivo capaz de converter uma determinada forma de energia (mecânica, química, etc.) em energia eléctrica. São exemplos de geradores eléctricos:

- A *pilha* ou *bateria*, que transforma energia química em energia eléctrica.
- O *dinamo*, que transforma energia mecânica em energia eléctrica⁶⁰.
- A *célula fotovoltaica*, que transforma energia luminosa em energia eléctrica.

7.5.1. Força electromotriz e resistência interna de um gerador

Um gerador eléctrico é caracterizado por duas grandezas:

- i. *Resistência interna, r_i* . Um gerador com resistência interna nula diz-se um *gerador ideal*; caso contrário, diz-se *não ideal*. Na prática, nenhum gerador é ideal; no entanto, alguns geradores possuem resistência interna suficientemente pequena para poderem ser considerados, aproximadamente, geradores ideais. A resistência interna é consequência do facto de os materiais que constituem o gerador não serem condutores perfeitos.

Força electromotriz (f.e.m.), ε . Grandeza física expressa no SI em volt e que é numericamente igual à energia (mecânica, química, etc.) convertida em energia eléctrica (W_g) dividida pela carga (ΔQ) que atravessa o gerador num dado intervalo de tempo Δt :

$$\varepsilon = \frac{W_g}{\Delta Q}. \quad (7.20)$$

Como $\Delta Q = I \Delta t$, resulta que $W_g = I \varepsilon \Delta t$ e, portanto, a *potência eléctrica* (energia convertida por unidade de tempo) do gerador é

$$P_g = \frac{W_g}{\Delta t} = I \varepsilon. \quad (7.21)$$

Note-se que, ao contrário da f.e.m. que é uma característica intrínseca do gerador, a potência depende não apenas do próprio gerador, mas também do circuito de que ele faz parte, o qual determina a intensidade da corrente debitada pelo gerador.

⁶⁰ Como veremos no capítulo seguinte, o dinamo está na base da maior parte da produção industrial de energia eléctrica.

No caso de um gerador ideal (*vide* figura 7.10) a f.e.m. coincide com a diferença de potencial existente aos seus terminais, que é dada pela lei de Ohm:

$$\varepsilon = I R_{eq}, \quad (7.22)$$

de onde se segue que

$$P_g = I\varepsilon = R_{eq} I^2 = P_{R_{eq}}. \quad (7.23)$$

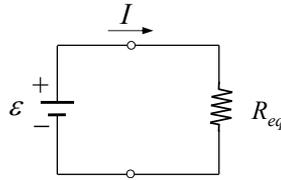


Figura 7.10. Circuito contendo um gerador ideal. O gerador é representado por duas linhas paralelas, em que a mais comprida corresponde ao pólo positivo e a mais curta (e mais grossa) ao pólo negativo.

Conclui-se, assim, que toda a energia ou potência fornecida por um gerador ideal a um circuito resistivo puro é dissipada, por efeito de Joule, na resistência equivalente do circuito.

No caso de um gerador não ideal (*vide* figura 7.11), existe sempre uma resistência interna (r_i) associada ao circuito interno do próprio gerador. Pela lei das malhas de Kirchhoff verifica-se, portanto,

$$\varepsilon = r_i I + R_{eq} I, \quad (7.24)$$

donde resulta que

$$P_g = I\varepsilon = r_i I^2 + R_{eq} I^2 = P_{r_i} + P_{R_{eq}}. \quad (7.225)$$

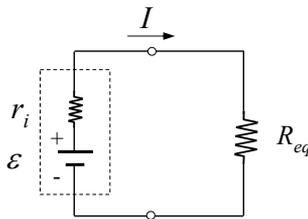
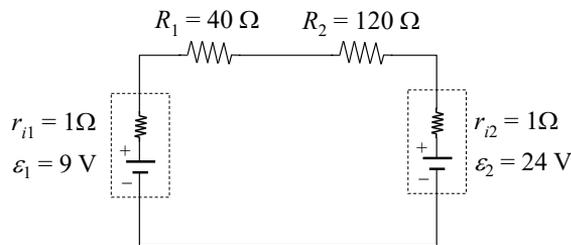


Figura 7.11. Circuito contendo um gerador não ideal (delimitado pela linha a tracejado). A resistência interna r_i faz parte do gerador: representamo-la, esquematicamente, como estando em série com um gerador ideal.

Desta última expressão pode concluir-se que toda a energia ou potência fornecida por um gerador a um circuito resistivo puro é dissipada, por efeito de Joule, na resistência interna do gerador e na resistência equivalente do circuito. Uma aplicação prática do que acabámos de dizer é se o gerador for, por exemplo, a pilha que alimenta um telemóvel: a potência dissipada na resistência interna da pilha leva a que a mesma aqueça, fenómeno bem conhecido de todos.

Exemplo 7.5

Considere o circuito representado na figura seguinte (os geradores não são ideais). a) Este circuito é constituído por quantos ramos, quantos nodos e quantas malhas? b) Determinar a intensidade e o sentido da corrente que percorre o circuito. c) Quais são os elementos do circuito que **fornecem** potência ao circuito, e quais são os que **consomem** potência?



Resolução:

- a) Este circuito é constituído por um único ramo (todos os elementos estão ligados em série) e por uma única malha, logo o número de nodos é zero.
- b) Uma vez que o circuito é constituído por um único ramo, existe uma única intensidade de corrente I . Vamos determiná-la utilizando a lei das malhas de Kirchhoff. Arbitrando, por exemplo, que o sentido de corrente é o sentido anti-horário, tem-se:

$$\begin{aligned}
 -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - (R_1 + R_2 + r_{11} + r_{12})I &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow I &= \frac{24 - 9}{120 + 40 + 1 + 1} = 0.092 \text{ A.}
 \end{aligned}$$

Dado que $I > 0$, o sentido escolhido está correcto.

- c) Todas as resistências consomem potência (por efeito de Joule). Quanto aos geradores, o gerador 2 fornece potência (é atravessado pela corrente do terminal – para o terminal +), enquanto o gerador 1 consome potência (é atravessado pela corrente do terminal + para o terminal –). Ou seja, o gerador 2 funciona como gerador de energia eléctrica (está em descarga) enquanto o gerador 1 funciona como receptor de energia eléctrica (está em carga).

7.5.2. Medição da diferença de potencial aos terminais de um gerador

Como podemos determinar experimentalmente a f.e.m. e a resistência interna de um gerador? Começemos por efectuar uma medição dita em *circuito aberto*, em que os terminais de um voltímetro são ligados directamente aos terminais do gerador (*vide* figura 7.12).

Como a resistência interna do voltímetro é infinita (na prática, muito mais elevada do que qualquer outra resistência presente no circuito), não circula qualquer corrente e a diferença de potencial V medida aos terminais do gerador iguala a f.e.m. do gerador: $\varepsilon = V$.

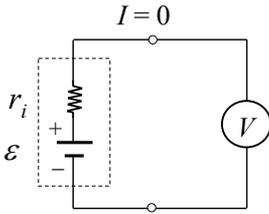


Figura 7.12. Determinação da diferença de potencial aos terminais de um gerador em circuito aberto. A corrente no circuito é nula porque a resistência de um voltímetro é (teoricamente) infinita.

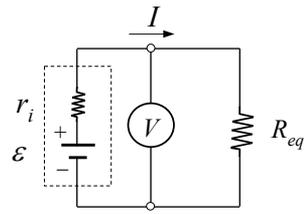


Figura 7.13. Determinação da diferença de potencial aos terminais de um gerador em circuito fechado. Neste caso o circuito é percorrido por uma corrente de intensidade I .

Se agora fecharmos o circuito (*vide* figura 7.13) e procedermos à medição da diferença de potencial V aos terminais do gerador (note-se que vai ter um valor diferente do medido em circuito aberto!) teremos que, pela lei de Ohm, $V = R_{eq} I$, que nos dá o valor de I , uma vez que a resistência equivalente do circuito é conhecida. Acha-se o valor da resistência interna do gerador, r_p , introduzindo os valores de I e ε (anteriormente determinado) na expressão (7.24).

7.5.3. Rendimento de um gerador

Vimos que parte da energia (não eléctrica) que um gerador converte em energia eléctrica é consumida pelo próprio gerador, por efeito de Joule, na sua resistência interna. Esta energia consumida pelo próprio gerador não é “útil”, uma vez que não pode ser fornecida ao circuito exterior. É, portanto, conveniente introduzir uma grandeza que meça a fracção da energia (ou, equivalentemente, da potência) “útil” de um gerador. Define-se *rendimento de um gerador*, η_g , como o quociente entre a potência útil, P_u – potência efectivamente fornecida ao circuito pelo gerador – e a potência do gerador, P_g :

$$\eta_g = \frac{P_u}{P_g} = \frac{IV}{I\varepsilon} = \frac{V}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - r_i I}{\varepsilon} = 1 - \frac{r_i I}{\varepsilon}. \quad (7.26)$$

O rendimento é uma grandeza adimensional. Num gerador ideal ($r_i = 0$) verifica-se sempre $\eta_g = 1$, na medida em que $\varepsilon = V$. Num gerador não ideal ($r_i \neq 0$) ter-se-á $\eta_g < 1$ porque $\varepsilon > V$.

Note-se que o rendimento de um gerador pode também ser calculado mediante a razão entre a energia útil fornecida ao circuito pelo gerador (W_u) e a energia do gerador (W_g). De facto, para um dado período de tempo de funcionamento do circuito, verifica-se $W_u = P_u \Delta t$ e $W_g = P_g \Delta t$, donde

$$\eta_g = \frac{W_u}{W_g} = \frac{P_u \Delta t}{P_g \Delta t} = \frac{P_u}{P_g} = \frac{IV}{I\varepsilon} = \frac{V}{\varepsilon}. \quad (7.27)$$

Exemplo 7.6

A lâmpada de uma lanterna de bolso esteve acesa durante 10 s, tendo sido percorrida por uma corrente eléctrica de 200 mA. Durante aquele intervalo de tempo a lâmpada recebeu uma energia de 2.68 J e a pilha que a alimenta dissipou uma energia de 0.32 J. Calcular: a) a carga eléctrica que a pilha fez circular durante os 10 s; b) o valor da energia química que se transformou em energia eléctrica no intervalo de tempo considerado; c) a f.e.m. da pilha; d) a potência da pilha e a potência da lâmpada; e) o valor da resistência da lâmpada, bem como o da resistência interna da pilha.

Resolução:

- a) Da expressão (7.2) que relaciona a intensidade da corrente com a carga que circula no circuito, temos:

$$\Delta Q = I \Delta t = 200 \times 10^{-3} \times 10 = 2 \text{ C}.$$

- b) A quantidade de energia química que se transformou em energia eléctrica é, pelo princípio de conservação da energia, igual à energia total consumida pelo circuito: Ora o circuito consumiu energia para alimentar a lâmpada e devido à resistência interna da pilha, logo

$$W_g = 2.68 + 0.32 = 3.0 \text{ J}.$$

- c) Utilizando a definição de f.e.m., expressão (7.20), e os resultados das alíneas anteriores, vem

$$\varepsilon = \frac{W_g}{\Delta Q} = \frac{3.0}{2} = 1.5 \text{ V}.$$

- d) Utilizando a definição de potência do gerador, expressão (7.21), e os resultados das alíneas anteriores, vem

$$P_g = \frac{W_g}{\Delta t} = \frac{3.0}{10} = 0.3 \text{ W}.$$

A lâmpada consome 2.68 J em 10 s, logo a sua potência é $2.68/10 = 0.268 \text{ W}$.

- e) As resistências da lâmpada e da pilha consomem energia (ou potência) por efeito de Joule. Se for R a resistência da lâmpada e r_i a resistência interna da pilha, segue-se da expressão (7.19) que

$$P_R = RI^2 \Rightarrow R = \frac{P_R}{I^2} = \frac{2.68/10}{0.2^2} = 6.7 \Omega \quad (\text{lâmpada}),$$

$$P_{r_i} = r_i I^2 \Rightarrow r_i = \frac{P_{r_i}}{I^2} = \frac{0.32/10}{0.2^2} = 0.8 \Omega \quad (\text{pilha}).$$

Exemplo 7.7

Durante a fase de arranque, a diferença de potencial aos terminais de uma bateria de automóvel de f.e.m. 12 V baixa para 10 V quando ela debita uma corrente eléctrica de intensidade 80 A. Calcular: a) a resistência interna da bateria; b) A potência da bateria; c) a potência fornecida ao motor de arranque (igual à potência útil da bateria); d) a potência dissipada na própria bateria; e) o rendimento da bateria.

Resolução:

- a) O enunciado diz-nos que a f.e.m. da bateria é 12 V (igual à diferença de potencial aos seus terminais em circuito aberto, ou seja, quando não está a alimentar o circuito). Segue-se da expressão (7.24) que a diferença de potencial aos terminais da bateria (gerador) em circuito fechado, ou seja, enquanto debita corrente, é

$$V = \varepsilon - r_i I \Rightarrow r_i = \frac{\varepsilon - V}{I} = \frac{12 - 10}{80} = 0.025 \Omega.$$

- b) A potência da bateria é dada pela expressão (7.21):

$$P_g = I\varepsilon = 80 \times 12 = 960 \text{ W}.$$

- c) A potência útil da bateria é igual à sua potência menos a potência consumida pela resistência interna da bateria:

$$P_u = P_g - P_{r_i} = I\varepsilon - r_i I^2 = 960 - 0.025 \times 80^2 = 800 \text{ W}.$$

- d) A potência dissipada na própria bateria é igual à diferença entre a potência da bateria e a sua potência útil:

$$P_{r_i} = P_g - P_u = 160 \text{ W}.$$

- e) Pela expressão (7.26), o rendimento da bateria é

$$\zeta_g = \frac{P_u}{P_g} = \frac{800}{960} = 0.83 = 83\%.$$

7.6. Receptores de energia eléctrica

Um *receptor de energia eléctrica* é um elemento de circuito capaz de transformar a energia eléctrica que recebe noutra forma de energia. É o caso particular dos *motores eléctricos*, que transformam energia eléctrica em energia mecânica. São exemplos de outros tipos de receptores os voltímetros, que transformam energia eléctrica em energia química; ou, ainda, uma bateria, que, quando inserida num circuito que a carrega, funciona também como um receptor (e não como um gerador), transformando energia eléctrica em energia química.

7.6.1. Força contra-electromotriz e resistência interna de um receptor

A caracterização, do ponto de vista eléctrico, de um receptor de energia eléctrica, designadamente de um motor, é feita através das grandezas físicas:

- i. *Resistência interna, r'* . Um receptor com resistência interna nula diz-se um *receptor ideal*; caso contrário, diz-se *não ideal*. Na prática, nenhum receptor é ideal; no entanto, alguns receptores possuem resistência interna suficientemente pequena para poderem ser considerados, aproximadamente, receptores ideais. Tal como no caso de um gerador, a resistência interna é consequência do facto de os materiais que constituem o receptor não serem condutores perfeitos.
- ii. *Força contra-electromotriz (f.c.e.m.), ε'* – grandeza física expressa no SI em volt – e que é numericamente igual à energia eléctrica convertida em energia de outro tipo (W') dividida pela carga (ΔQ) que atravessa o gerador num dado intervalo de tempo Δt :

$$\varepsilon' = \frac{W'}{\Delta Q}. \quad (7.28)$$

Quando se diz que um motor eléctrico tem uma f.c.e.m. de 1 volt, significa isto que o motor é capaz de fornecer uma energia mecânica de 1 joule por cada carga de 1 coulomb que o atravessa.

Retomando a expressão de definição da f.c.e.m., como $\Delta Q = I \Delta t$, resulta que $W' = I \varepsilon' \Delta t$ e, portanto, a *potência mecânica* (energia por unidade de tempo que é possível extrair de um receptor) é

$$P' = \frac{W'}{\Delta t} = I \varepsilon'. \quad (7.29)$$

A diferença de potencial aos terminais de um receptor é, então, a soma da sua f.c.e.m. com a diferença de potencial aos terminais da sua resistência interna:

$$V_M = \varepsilon' + r'I, \quad (7.30)$$

de onde se segue que a intensidade da corrente que percorre um circuito com um receptor (*vide* figura 7.14) se pode determinar recorrendo à lei das malhas, com o resultado

$$\varepsilon = r_i I + R_{eq} I + r' I + \varepsilon' \Leftrightarrow I = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{r_i + R_{eq} + r'}. \quad (7.31)$$

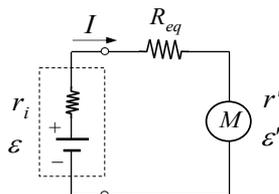


Figura 7.14. Circuito contendo um gerador não ideal e um receptor, percorrido por uma corrente de intensidade I .

Repare-se que esta expressão implica que um receptor de f.c.e.m. ε' é equivalente, para efeitos de cálculo da corrente eléctrica drenada pelo circuito, a um gerador de f.e.m. ε' que esteja ligado em oposição ao gerador que alimenta o circuito.

Recordando agora a expressão (7.18), a potência eléctrica total que o receptor recebe, P_M , é

$$P_M = IV_M = I\varepsilon' + r'I^2 = P' + P_r, \quad (7.32)$$

ou seja, é igual à soma da a potência mecânica P' que é possível extrair do receptor com a potência dissipada, por efeito de Joule, na resistência interna r' do receptor. Em termos de energia, tem-se:

$$W_M = W' + W_{r'}. \quad (7.33)$$

7.6.2. Rendimento de um receptor

Tal como no caso de um gerador, também um receptor consome mais energia (potência) do que aquela que transforma em energia (potência) útil não eléctrica. O *rendimento de um receptor* é, portanto, expresso pela razão entre a potência mecânica que é possível extrair do receptor (potência útil), P' , e a potência eléctrica total por ele consumida (potência motora), P_M :

$$\eta_M = \frac{P'}{P_M} = \frac{I\varepsilon'}{IV_M} = \frac{\varepsilon'}{V_M} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon' + r'I} = \frac{1}{1 + \frac{r'I}{\varepsilon'}}. \quad (7.34)$$

Num receptor ideal verifica-se sempre $\eta_M = 1$ na medida em que $\varepsilon' = V_M$. Num receptor não ideal ter-se-á $\eta_M < 1$ porque $\varepsilon' < V_M$. Como é evidente, o rendimento de um receptor pode também ser calculado fazendo a razão entre a energia que é possível extrair do receptor (W') e a energia eléctrica que este recebe do circuito (W_M).

Exemplo 7.8

Um motor consome uma energia de 1000 J durante 10 s quando é percorrido por uma corrente eléctrica de 2 A. Calcular: a) a carga eléctrica que atravessa o motor nesse intervalo de tempo; b) a diferença de potencial aos terminais do motor; c) a energia eléctrica que é convertida em energia mecânica, sabendo que na resistência interna do motor é dissipada uma energia de 200 J; d) a f.c.e.m. do motor.

Resolução:

a) Da expressão (7.2) que relaciona a intensidade da corrente com a carga que circula no circuito, temos:

$$\Delta Q = I \Delta t = 2 \times 10 = 20 \text{ C}$$

- b) O motor consome uma energia de 1000 J em 10 s, ou seja, a sua potência eléctrica total é $P_M = 1000/10 = 100$ W. Pela expressão (7.32), a diferença de potencial V_M aos seus terminais é

$$V_M = \frac{P_M}{I} = \frac{100}{2} = 50 \text{ V.}$$

- c) Se o motor consome uma energia de 1000 J e 200 J são dissipados na sua resistência interna, então a energia eléctrica que é convertida em energia mecânica é $1000 - 200 = 800$ J.
 d) Se o motor converte 800 J de energia eléctrica em energia mecânica em 10 s, então a sua potência mecânica é $P' = 800/10 = 80$ W. Pela expressão (7.29) vem, então, que a f.c.e.m. do motor é

$$\varepsilon' = \frac{P'}{I} = \frac{800}{20} = 40 \text{ V.}$$

Exemplo 7.9

Um motor de f.c.e.m. 10 V é percorrido por uma corrente eléctrica de intensidade 2 A, quando se aplica os seus terminais uma d.d.p. de 15 V. Calcular: a) a energia eléctrica consumida pelo motor, a energia mecânica que ele fornece e a energia dissipada na sua resistência interna, num intervalo de tempo de 1 minuto; b) a resistência interna do motor; c) o rendimento do motor.

Resolução:

- a) A potência total consumida pelo motor é dada pela expressão (7.32):

$$P_M = IV_M = 2 \times 15 = 30 \text{ W.}$$

Por outro lado, a potência eléctrica convertida em potência mecânica é dada pela expressão (7.29):

$$P' = I\varepsilon' = 2 \times 10 = 20 \text{ W.}$$

A potência dissipada na resistência interna é, portanto, $P_M - P' = 10$ W. No intervalo de 1 minuto = 60 s temos, portanto, que a energia total consumida pelo motor, a energia por ele transformada em energia mecânica, e a energia dissipada na sua resistência interna são, respectivamente, 1800 J, 1200 J e 600 J.

- b) Se a potência dissipada na resistência interna do motor é 10 W, vem pela lei de Joule, expressão (7.19), que

$$r' = \frac{P_{r'}}{I^2} = \frac{10}{4} = 2.5 \Omega.$$

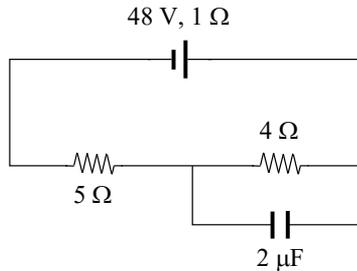
- c) Da expressão (7.34) segue-se imediatamente que

$$\eta_M = \frac{\varepsilon'}{V_M} = \frac{10}{15} = 67\%.$$

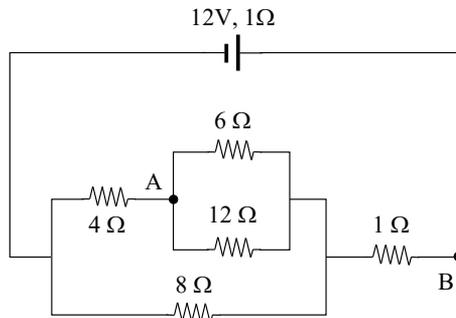
PROBLEMAS

- 7.1. Um fio eléctrico condutor, com 100 m de comprimento e 2 mm de diâmetro, é constituído por um material cuja resistividade é $4.8 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$.
- Calcule a resistência eléctrica do fio.
 - Um segundo fio, feito do mesmo material, tem o mesmo peso que o de 100 m de comprimento, mas o dobro do diâmetro. Qual é a sua resistência?
- 7.2. Considere dois fios metálicos, o primeiro com comprimento $l_1 = 1.2 \text{ m}$, diâmetro $d_1 = 1.6 \text{ mm}$ e resistividade $\rho_1 = 1.72 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$, e o segundo, com comprimento $l_2 = 1.8 \text{ m}$, diâmetro $d_2 = 0.8 \text{ mm}$ e resistividade $\rho_2 = 5.73 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$.
- Determine as resistências, R_1 e R_2 , destes dois fios?
 - Se os dois fios estiverem ligados em paralelo e o primeiro fio for percorrido por uma corrente de intensidade $I_1 = 2.5 \text{ mA}$, qual será a intensidade da corrente I_2 que percorre o segundo fio?
 - Nas condições da alínea anterior, determine a energia dissipada, por efeito de Joule, em 5 minutos, no conjunto dos dois fios.
 - Nas condições das alíneas anteriores, quais serão os valores dos campos eléctricos, E_1 e E_2 , em cada um dos fios? (Suponha-os rectilíneos.)
- 7.3. Uma barra de carbono, com a forma de um prisma quadrangular, tem dimensões $1.0 \text{ cm} \times 1.0 \text{ cm} \times 50.0 \text{ cm}$. Sabendo que a resistividade do carbono a $20 \text{ }^\circ\text{C}$ é $\rho_c = 3.5 \times 10^{-5} \Omega \text{ m}$, determine:
- A resistência da barra medida entre as duas faces quadradas.
 - A resistência da barra medida entre duas faces rectangulares opostas. Compare os resultados obtidos em a) e b) e comente.
- 7.4. Um aquecedor eléctrico de potência 660 W é projectado para funcionar ligado a uma rede eléctrica de 120 V .
- Qual é a resistência do aquecedor?
 - Qual é a intensidade da corrente eléctrica que atravessa a resistência do aquecedor?
 - Qual é a quantidade de calor produzida por unidade de tempo, expressa em cal s^{-1} ?
 - Se a tensão da rede eléctrica cair para 110 V , qual passará a ser a potência do aquecedor?
- 7.5. Duas resistências de valor $1.5 \text{ k}\Omega$ e $1 \text{ k}\Omega$, dissipam, cada uma, uma potência máxima de 1 W . Determine a tensão máxima que pode ser aplicada ao conjunto das duas resistências, bem como a potência por elas dissipada quando lhes é aplicada essa tensão, se as duas estiverem ligadas:
- Em série;
 - Em paralelo.

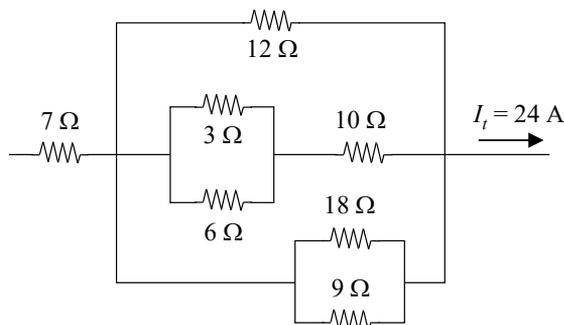
- 7.6. Uma corrente I_t divide-se entre dois ramos paralelos de resistências R_1 e R_2 . Determine as correntes I_1 e I_2 que percorrem, respectivamente, o ramo 1 e o ramo 2, em função de I_t e dos valores das resistências.
- 7.7. Considere o circuito representado na figura abaixo. Calcule a carga eléctrica armazenada no condensador de $2 \mu\text{F}$.



- 7.8. Considere o circuito representado no esquema da figura abaixo. Determine:

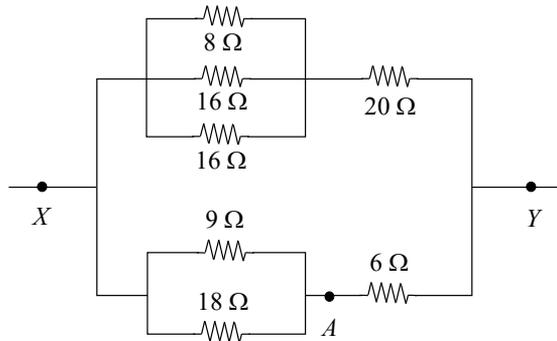


- A intensidade de corrente na bateria
 - As intensidades de corrente em cada resistência.
 - A diferença de potencial entre os pontos A e B.
- 7.9. Considere o circuito representado na figura seguinte. Sabendo que o mesmo é percorrido por uma corrente de intensidade total igual a 24 A , determine:



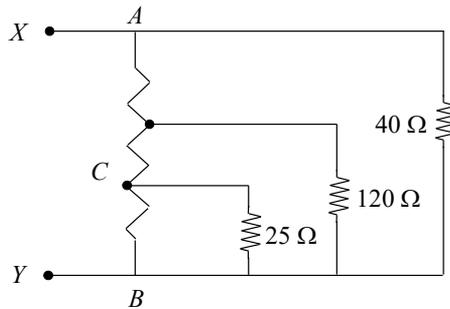
- A resistência equivalente do circuito.
- A intensidade de corrente e a diferença de potencial em cada uma das resistências.

7.10. Considere o circuito esquematizado na figura abaixo.

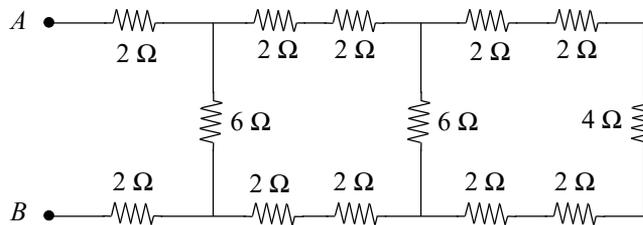


- Calcule a resistência equivalente entre os pontos X e Y.
 - Determine a diferença de potencial entre X e A, admitindo que a intensidade de corrente na resistência de valor 8Ω é 0.5 A .
- 7.11. Considere o circuito esquematizado na figura seguinte. A resistência compreendida entre A e B vale 300Ω e apresenta tomadas em pontos que a dividem em três resistências de valor igual.

- Calcule a resistência equivalente entre os pontos X e Y.
- Admitindo que se aplica uma tensão de valor 320 V aos terminais XY do circuito, determine a diferença de potencial entre os pontos B e C.

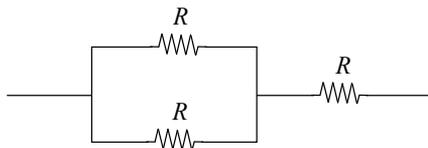


7.12. Considere o circuito representado na figura abaixo. Determine:

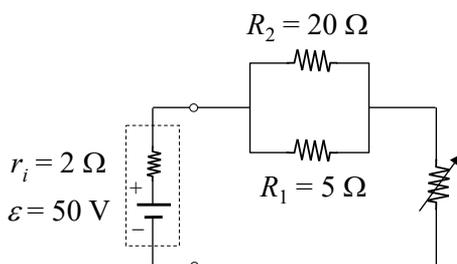


- A resistência equivalente do circuito.
- O valor da diferença de potencial a aplicar entre A e B para que a resistência de valor 4Ω drene uma corrente de intensidade 1 A .

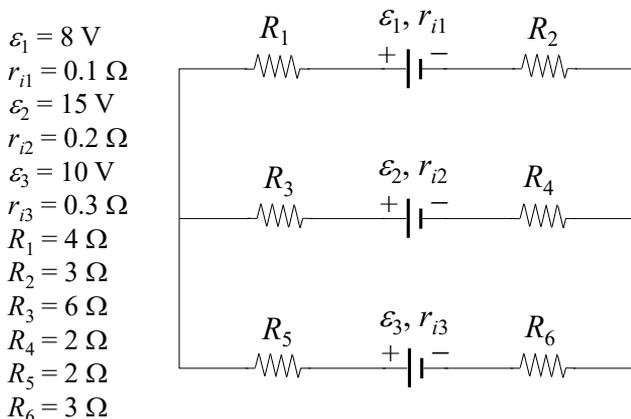
- 7.13. Considere o circuito representado na figura abaixo. As três resistências são iguais, de valor $R = 2 \Omega$, e podem dissipar uma potência máxima de 18 W sem fundir (especificação do fabricante). Qual é a potência máxima que todo o circuito pode dissipar sem se danificar?



- 7.14. Considere o circuito representado na figura seguinte, O gerador tem força electro-motriz $\varepsilon = 50 \text{ V}$ e resistência interna $r_i = 2 \Omega$.
- Determine o valor para que deve ser ajustada a resistência variável R para que a potência dissipada na resistência de 5Ω seja 20 W .
 - Com os parâmetros de funcionamento determinados na alínea anterior, calcule a razão entre a potência dissipada pelo gerador e a dissipada pelo circuito.

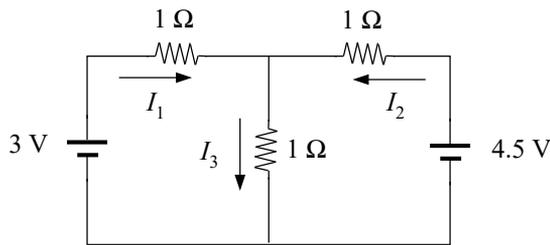


- 7.15. Para o circuito representado na figura abaixo (os geradores não são ideais), determine:

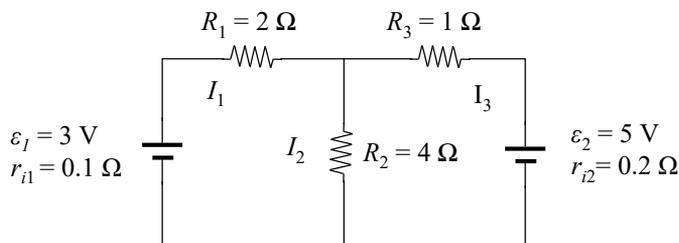


- As intensidades das correntes nos diferentes ramos do circuito.
- Os rendimentos dos geradores.
- A potência dissipada, por efeito de Joule, em cada uma das resistências.

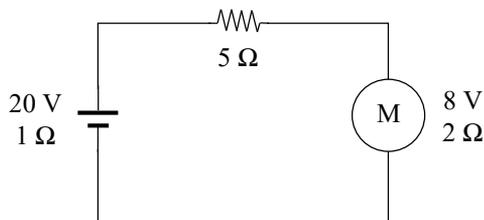
- 7.16. Calcule as intensidades de corrente I_1 , I_2 e I_3 assinaladas no circuito representado na figura seguinte.



- 7.17. Determine as intensidades das correntes nos diferentes ramos do circuito representado na figura seguinte (os geradores **não** são ideais).



- 7.18. Um gerador de força electromotriz $\varepsilon = 110 \text{ V}$ e resistência interna $r_i = 0.5 \text{ } \Omega$ está ligado a um motor de resistência interna $1 \text{ } \Omega$ através de um fio condutor de resistência igual a $3.5 \text{ } \Omega$.
- Sabendo que a intensidade de corrente é 10 A , calcule a tensão aos terminais do gerador, bem como a tensão aos terminais do motor.
 - Calcule a intensidade de corrente que percorreria o circuito se o motor estivesse travado.
- 7.19. No circuito esquematizado na figura seguinte, encontram-se ligados em série um gerador de força electromotriz $\varepsilon = 20 \text{ V}$ e resistência interna $r_i = 1 \text{ } \Omega$, uma resistência de $5 \text{ } \Omega$ e um motor M de força contra-electromotriz $\varepsilon' = 8 \text{ V}$ e resistência interna $r' = 2 \text{ } \Omega$.



- Admitindo que o motor esteja a funcionar, calcule:
 - A intensidade de corrente drenada pelo circuito.
 - As diferenças de potencial aos terminais do gerador e aos terminais do motor.

- a₃) A potência do gerador. Mostre que esta é igual à soma de todas as potências postas em jogo no circuito.
- a₄) O rendimento do motor.
- b) Suponha agora que se trava o motor, deixando este de fornecer energia mecânica, mas continuando a ser percorrido por corrente eléctrica. Nestas circunstâncias, calcule:
 - b₁) A intensidade de corrente drenada pelo circuito.
 - b₂) As diferenças de potencial aos terminais do gerador e aos terminais do motor.
 - b₃) A potência dissipada na resistência interna do motor.
 - b₄) A potência do gerador.

CAPÍTULO 8

CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Os fenómenos eléctricos e magnéticos permaneceram até ao século XVIII como simples curiosidades (com excepção das agulhas magnéticas usadas na construção de bússolas para orientação geográfica). Contudo, no decurso dos séculos XVIII e XIX houve um empenhamento profundo da comunidade científica no sentido de descrever os fenómenos eléctricos e magnéticos mediante uma teoria que os explicasse. Na compreensão da ligação entre os fenómenos eléctricos e os magnéticos, foram de importância capital os trabalhos de Hans Christian Oersted (1777-1851), de André-Marie Ampère (1775-1836) e de Michael Faraday (1791-1862). Em particular, foram as experiências notáveis realizadas por Faraday que conduziram à descoberta do fenómeno da indução electromagnética e que mostraram a natureza indissociável dos campos eléctrico e magnético. As descobertas de Oersted, de Ampère e de Faraday projectaram-se mais tarde nos trabalhos de James Clerk Maxwell (1831-1879) que conduziram à formulação da teoria electromagnética sintetizada no célebre sistema de equações de Maxwell (1873) e que encerram os princípios fundamentais do electromagnetismo. Na teoria de Maxwell, os campos eléctrico e magnético surgem como manifestações diferentes de uma mesma entidade – o campo electromagnético. A teoria electromagnética de Maxwell, para além de um enorme valor prático – visto que está na base da construção e da utilização da quase totalidade dos equipamentos eléctricos actualmente usados – possibilitou prever a existência de ondas electromagnéticas, que explicariam também os fenómenos ópticos. Foi Heinrich Hertz (1857-1894) quem provou a existência experimental das referidas ondas electromagnéticas (1887), lançando deste modo as bases do desenvolvimento das telecomunicações (rádio, TV, etc.).

8.1. Campo magnético dos ímanes

Pensa-se que as primeiras observações de fenómenos magnéticos tenham sido realizadas na Antiguidade Clássica, numa região denominada Magnésia, na Ásia Menor⁶¹. Foram naquela região encontradas pedras de um mineral que se designou por magnetite (Fe_3O_4) e que se verificou terem a propriedade de atrair pedaços de ferro e de se orientarem,

⁶¹ Actual Turquia.

quando suspensas por um fio, na direcção aproximada do norte-sul geográfico. Estas pedras constituíram os primeiros ímanes naturais usados pelo homem e foi com elas que se construíram as primeiras bússolas (*vide* figura 8.1).



Figura 8.1. A agulha de uma bússola aponta para o pólo sul magnético terrestre, cuja localização não coincide exactamente com a do pólo norte geográfico.

As propriedades dos ímanes podem resumir-se como segue:

1. Os ímanes, ou magnetes, independentemente da sua forma, têm sempre dois pólos, o pólo norte e o pólo sul. Isto significa que, sempre que se dividir um íman em duas partes, por mais pequenas que sejam, obtêm-se sempre dois novos ímanes: não é possível separar um pólo norte de um pólo sul (*vide* figura 8.2). Dito de outro modo, não existem cargas magnéticas reais, ou monopólos magnéticos⁶².

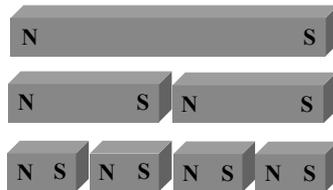


Figura 8.2. Não é possível separar os pólos de um íman fragmentando-o: cada fragmento continua a apresentar pólos norte e sul.

2. Pólos magnéticos iguais repelem-se e pólos magnéticos diferentes atraem-se (*vide* figura 8.3). A intensidade da força atractiva ou repulsiva é, tal como no caso das cargas eléctricas pontuais, inversamente proporcional ao quadrado da distância.

⁶² Nenhuma lei física proíbe que existam monopólos magnéticos: simplesmente nunca foram observados (mau grado as numerosas tentativas feitas nesse sentido). O físico britânico Paul Dirac (1902-1984) propôs em 1931 que a existência de monopólos magnéticos permitiria explicar o facto de a carga eléctrica ser quantizada, ou seja, o facto de todas as partículas elementares observáveis terem cargas cujo valor absoluto é um múltiplo inteiro da carga do protão.

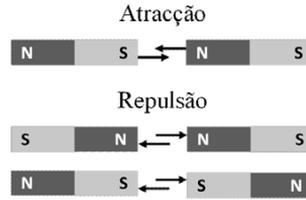


Figura 8.3. Um pólo norte e um pólo sul atraem-se, dois pólos norte ou dois pólos sul repelem-se.

8.2. Campo de indução magnética e campo magnético

As forças de interacção entre ímãs denominam-se forças magnéticas. Tal como as interacções eléctricas podem ser descritas através do campo eléctrico, as interacções magnéticas são descritas através de uma grandeza vectorial denominada *campo magnético*. Em boa verdade, as interacções de natureza magnética podem ser descritas quer através da grandeza campo magnético, \vec{H} , quer através da grandeza *campo de indução magnética*, \vec{B} . A relação entre estes dois campos, no vácuo, é, no SI,

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (8.1)$$

onde $\mu_0 = 4 \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ é uma constante universal da natureza designada por *permeabilidade magnética do vácuo*⁶³.

A equação (8.1) implica que, no vácuo, os campos \vec{B} e \vec{H} tenham o mesmo significado físico, uma vez que um é igual ao produto do outro por uma constante universal da natureza. Já o mesmo não se passa no interior da matéria, onde os dois campos têm significados bem diferentes: dito de modo simples, o campo magnético é o campo que é imposto exteriormente a um dado corpo, o campo de indução magnética compreende tanto o campo imposto exteriormente como a resposta do corpo ao campo exterior, através da chamada magnetização do corpo. Deste modo, o campo de indução magnética depende das propriedades do material ao qual é aplicado o campo magnético exterior.

O campo de indução magnética, \vec{B} , é medido no SI em tesla (T), e o campo magnético, \vec{H} , é medido no SI em ampère por metro (A.m^{-1}). Uma outra unidade muito usada para exprimir o campo \vec{B} é o gauss (G), sendo que $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$. O campo de indução magnética da Terra tem ordem de grandeza de 1 G.

Tal como sucede com o campo electrostático, o campo de indução magnética é tanto mais intenso quanto menor for a distância do magnete de prova à fonte do campo de indução magnética. Em boa verdade, John Michell descobriu (1750) que as intensidades das forças produzidas por cada pólo num íman são iguais e diminuem proporcionalmente com o quadrado da distância.

⁶³ O símbolo H usado na unidade de permeabilidade magnética significa henry, a unidade SI de indutância, como veremos adiante.

8.2.1. Linhas de campo magnético

Tal como no caso do campo eléctrico (capítulo 6), define-se linha de campo de indução magnética como a linha que é, em cada ponto do espaço, tangente ao campo de indução magnética nesse ponto. As linhas de campo de indução magnética de um íman saem do pólo norte magnético, entram pelo pólo sul e continuam dentro do íman na direcção do pólo norte, formando uma curva fechada (*vide* figura 8.4).

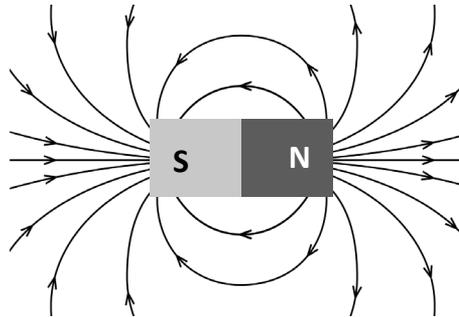


Figura 8.4. Linhas do campo de indução magnética de um íman em forma de barra.

Repare-se na semelhança com as linhas do campo de um dipolo eléctrico (figura 6.6), o que era de esperar, uma vez que, como se disse atrás, qualquer íman é um dipolo magnético. No entanto, ao contrário das linhas do campo eléctrico, as linhas do campo de indução magnética podem ser facilmente visualizadas colocando sobre o íman fonte do campo uma lâmina de vidro e, sobre esta, partículas de limalha de ferro. As partículas de limalha orientam-se segundo as linhas de campo (*vide* figura 8.5).

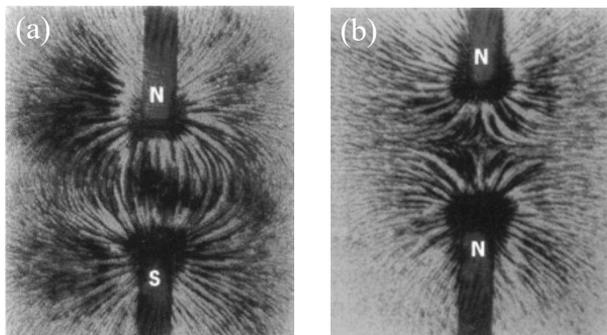


Figura 8.5. Visualização das linhas do campo magnético utilizando limalha de ferro: a) caso atrativo e b) caso repulsivo.

8.2.2. Campos magnéticos uniformes e não uniformes

Tal como o campo eléctrico, também o campo magnético dos ímanes pode ser uniforme ou não uniforme. Num campo uniforme, ou seja, que não varia de ponto para ponto, as linhas de campo são paralelas e equidistantes, logo a sua densidade é constante. É o caso do campo na região entre os braços de um íman em forma de “U” (*vide* figura 8.6).

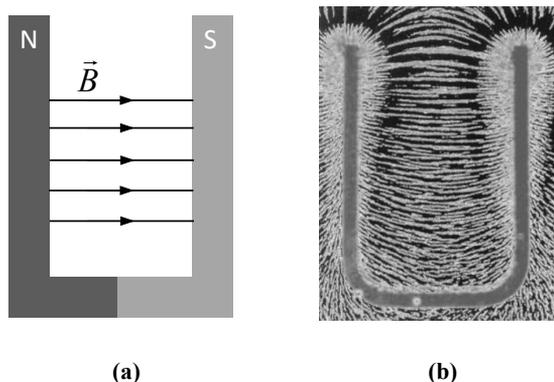


Figura 8.6. Campo magnético uniforme entre os braços de um íman em forma de U: a) representação esquemática e b) visualização das linhas do campo magnético utilizando limalha de ferro.

Num campo magnético não uniforme, \vec{B} e \vec{H} são diferentes em cada ponto e a densidade de linhas de campo é variável. É o caso do campo gerado por um íman em forma de barra (*vide* figura 8.5).

8.2.3. Ordem de grandeza dos campos magnéticos

Na tabela que a seguir se apresenta estão registadas as ordens de grandeza das intensidades do campo magnético \vec{H} para diferentes sistemas magnéticos. Para calcular a intensidade B do campo de indução magnética equivalente, no espaço livre (vácuo) basta multiplicar H pela constante $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$.

Tabela 8.1. Valores de alguns campos magnéticos.

Sistema magnético	H (A m ⁻¹)
Superfície de uma estrela de neutrões	10 ¹⁴
Magnetes implosivos (duração μs)	10 ⁸
Electromagnetes pulsados (duração μs)	2×10 ⁷ – 5×10 ⁷
Magnetes supercondutores	1×10 ⁷ – 1.5×10 ⁷
Electromagnetes usados em laboratório	1×10 ⁶ – 2×10 ⁶
Magnetes permanentes mais fortes	1×10 ⁶
Campo magnético à superfície da Terra	10 ²
Ruído magnético urbano	1
Magnetocardiogramas	10 ⁻⁴
Batimento cardíaco fetal	10 ⁻⁵
Campo magnético de um cérebro humano	10 ⁻⁶
Limite de detecção de um SQUID	10 ⁻⁸

A título exemplificativo, a ordem de grandeza do campo \vec{B} gerado pelos magnetes permanentes mais fortes é $1 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} = 1.26 \text{ T}$. Este resultado mostra em particular, que um campo de indução magnética de 1 tesla é efectivamente um campo muito intenso. A ordem de grandeza do campo de indução magnética terrestre é de apenas $1.26 \times 10^{-4} \text{ T}$.

8.3. Experiência de Oersted

Será que os campos magnéticos só podem ser gerados por ímanes? Com o desenvolvimento da Física no séc. XIX, compreendeu-se que as interações magnéticas não existiam exclusivamente entre ímanes. As correntes eléctricas e, de um modo mais geral, as cargas eléctricas em movimento produzem também campos magnéticos.

Em 1819, Oersted verificou experimentalmente que a passagem de corrente eléctrica através de um fio condutor obrigava uma agulha magnética próxima do fio a modificar a sua orientação, modificação esta que dependia do sentido da corrente (*vide* figura 8.7).

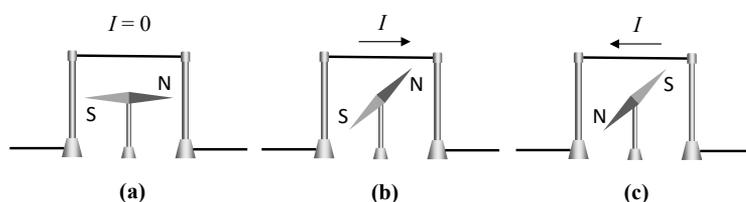


Figura 8.7. Experiências de Oersted. a) Na ausência de corrente eléctrica, a agulha magnética aponta para norte. b) Uma vez ligada a corrente, a direcção da agulha desvia-se do norte magnético. c) Invertendo o sentido da corrente, o desvio da agulha faz-se no sentido contrário ao anterior.

As observações experimentais de Oersted permitiram verificar que uma corrente eléctrica gera à sua volta um campo magnético capaz de interagir com a agulha magnética. As experiências de Oersted foram, posteriormente, continuadas por Rowland, que mostrou que uma carga em movimento produz também um campo magnético. De facto, verificou-se que, enquanto uma carga eléctrica em repouso relativamente ao observador gera no espaço apenas um campo eléctrico, uma carga em movimento, mesmo que rectilíneo e uniforme, em relação ao observador gera no espaço não só um campo eléctrico, mas também um campo magnético⁶⁴.

⁶⁴ Aparentemente, no Electromagnetismo os estados de repouso e de movimento rectilíneo e uniforme não são equivalentes, ao contrário do que se passa na Mecânica. Este equívoco provém de pressupormos que é possível identificar separadamente os efeitos dos campos eléctrico e magnético produzidos por uma carga q em movimento relativamente ao observador. Na verdade, o observador apenas pode detectar a força exercida pela carga q sobre uma carga de prova q_0 , em repouso relativamente ao observador. Essa força depende do estado de movimento da carga q , e o observador atribui, então, parte dela a um “campo eléctrico” e parte a um “campo magnético” gerados pela carga q . Por outras palavras, os campos eléctrico e magnético são duas manifestações de uma realidade física única, o campo electromagnético. Este entendimento está na base da Teoria da Relatividade Restrita, de Einstein. Para mais pormenores, ver, por exemplo D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd edition, Prentice Hall, New Jersey, 1999, capítulo 11.

8.4. Lei de Biot-Savart

Uma carga eléctrica q , animada de velocidade \vec{v} num dado referencial e no instante t , gera num ponto P à distância r da carga, uma indução magnética \vec{B}_P dada por

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^2} (\vec{v} \times \vec{u}_r), \quad (8.2)$$

com \vec{u}_r o versor do vector \vec{r} . Esta relação é conhecida por *lei de Biot e Savart* ou *lei de Biot-Savart*.

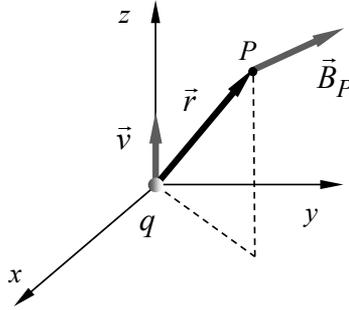


Figura 8.8. O campo de indução magnética \vec{B}_P , gerado num ponto P por uma carga eléctrica q que se move com velocidade \vec{v} é perpendicular ao plano definido por \vec{v} e \vec{r} e tem sentido e norma dados pela lei de Biot-Savart.

De acordo com as regras do produto externo ou vectorial de dois vectores, a indução magnética no ponto P , \vec{B}_P , é um vector normal ao plano definido por \vec{v} e \vec{r} ; sendo $q > 0$, o sentido do vector \vec{B}_P é tal que os três vectores \vec{v} , \vec{r} e \vec{B}_P formam um triedro directo (regra da mão direita ou regra de Stokes, *vide* figura 8.8). A intensidade da indução magnética no ponto P é directamente proporcional a q e inversamente proporcional ao quadrado da distância do observador (situado no ponto P) à carga eléctrica móvel. Note-se a semelhança e a diferença com o campo eléctrico, cuja intensidade é também inversamente proporcional ao quadrado da distância à carga que o gera, mas cuja direcção é sempre radial.

Importa referir que a lei de Biot-Savart é uma lei aproximada. Na verdade só é válida para velocidades muito menores que a velocidade da luz no vácuo. Contudo, esta condição cumpre-se sempre que as cargas se acham organizadas em corrente eléctrica.

8.5. Interação de uma carga eléctrica em movimento com um campo magnético

Uma vez que uma carga eléctrica em movimento é, efectivamente, um pequeno íman, vai sofrer a influência de outros campos magnéticos que porventura existam nas regiões por

onde a carga se desloca. Seja, então, uma carga eléctrica q , animada de velocidade \vec{v} e submetida à acção de um campo de indução magnética \vec{B} ⁶⁵. A carga é actuada, em cada instante, por uma força \vec{F} , dada por

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (8.3)$$

e dita *força electrodinâmica*. Esta relação é conhecida por *lei de Laplace* (vide figura 8.9).

A força electrodinâmica \vec{F} , também chamada *força de Laplace*, é sempre perpendicular a \vec{v} e a \vec{B} . Por isso, a força electrodinâmica actuando sobre a carga q em movimento não realiza trabalho. Este resultado implica que uma carga eléctrica, quando entra numa região do espaço onde existe um campo magnético, não perde nem ganha energia.

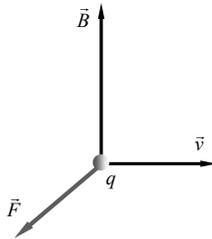


Figura 8.9. Força electrodinâmica \vec{F} que actua sobre uma carga $q > 0$ que se desloca com velocidade \vec{v} num campo de indução magnética \vec{B} .

Generalizando o resultado da lei de Laplace, se se admitir que uma carga q , animada de velocidade \vec{v} , é submetida à acção simultânea de um campo eléctrico \vec{E} e de um campo de indução magnética \vec{B} , então a força \vec{F} que actua a carga é, em cada instante, dada pela soma da força electrodinâmica, equação (8.3), e da força electrostática, equação (6.5):

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (8.4)$$

e neste caso a força é dita *força de Lorentz-Laplace*.

Como aplicação, consideremos uma partícula de massa m e carga eléctrica $q > 0$, animada de velocidade \vec{v} e que entra numa região do espaço onde existe um campo de indução magnética \vec{B} , uniforme e perpendicular a \vec{v} (vide figura 8.10).

⁶⁵ Note que se trata de um campo exterior, e não do campo de indução magnética gerado pela própria carga, o qual é dado pela lei de Biot-Savart. Uma carga não sofre qualquer efeito do campo que ela própria gera.

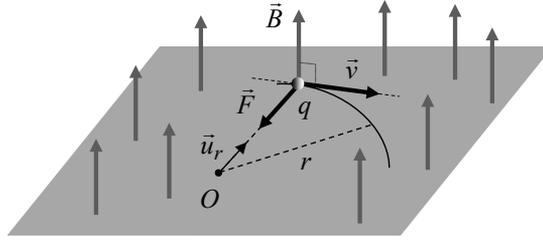


Figura 8.10. Força electrodinâmica actuando sobre uma carga q que se desloca com velocidade \vec{v} num campo de indução magnética \vec{B} perpendicular à velocidade da partícula.

Nesta situação, a partícula vai ficar submetida a uma força electrodinâmica (força de Laplace) dada por

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = -|q|vB\vec{u}_r, \quad (8.5)$$

e cuja intensidade tem valor $F = |q|vB$. A força electrodinâmica tende a encurvar a trajectória da partícula, adquirindo esta um movimento circular uniforme de raio r , se v e B forem constantes. A força electrodinâmica será, nesse caso, uma força centrípeta e, por isso, terá intensidade dada por

$$F = \frac{mv^2}{r}. \quad (8.6)$$

Igualando a norma da expressão (8.5) à expressão (8.6), podemos deduzir que o raio da trajectória é dado por

$$r = \frac{mv}{|q|B}. \quad (8.7)$$

Se, no decurso do seu movimento circular, a partícula não deixar a região do espaço na qual existe o campo de indução magnética, a frequência angular do seu movimento será

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{v}{mv/|q|B} = \frac{|q|B}{m}, \quad (8.8)$$

e, portanto, a frequência (temporal) do movimento será

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q|B}{2\pi m}. \quad (8.9)$$

Esta frequência é conhecida por *frequência de ciclotrão*. Se, no entanto, a partícula deixar a região do espaço na qual existe o dito campo de indução magnética, o seu movimento passará a ser rectilíneo e uniforme, e o efeito do campo de indução magnética terá sido alterar a direcção, mas não o valor, da velocidade que a partícula tinha antes de sofrer a acção do campo.

Se a velocidade \vec{v} da partícula não for rigorosamente perpendicular ao campo \vec{B} , então \vec{v} vai ter uma componente perpendicular a \vec{B} e outra paralela a \vec{B} . A componente de \vec{v} perpendicular a \vec{B} irá reproduzir todos os resultados que obtivemos anteriormente (movimento circular): haverá apenas que substituir, nas equações (8.6) a (8.9), v por $v_{\perp} = v \sin \theta$, onde θ é o ângulo entre \vec{v} e \vec{B} . A componente de \vec{v} paralela a \vec{B} dará origem a um movimento rectilíneo na direcção do campo. A conjugação dos dois movimentos resulta num único movimento helicoidal em torno das linhas do campo de indução magnética (*vide* figura 8.11).

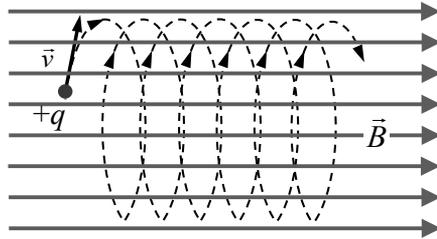


Figura 8.11. Movimento helicoidal de uma partícula carregada no seio de um campo magnético.

As aplicações tecnológicas do movimento de partículas no seio de campos magnéticos e eléctricos são inúmeras e variadas, indo desde os gigantescos aceleradores de partículas, passando pelos microscópios electrónicos, até aos tubos de raios catódicos. A imagem nos (antigos!) televisores ou monitores de computador que usam ecrãs de raios catódicos é obtida através do varrimento de um ou mais feixes contínuos de electrões num ecrã fluorescente, varrimento este controlado com precisão por meio de campos eléctricos e magnéticos. Um outro exemplo importante é o espectrómetro de massa, equipamento que também utiliza campos eléctricos e magnéticos para separar os constituintes de uma mistura gasosa (*vide* figura 8.12). Estes constituintes são primeiramente ionizados, depois acelerados e separados de acordo com a sua razão massa/carga por aplicação da lei de Lorentz-Laplace. Iões com diferentes razões massa/carga sofrem deflexões com diferentes raios de curvatura. É um equipamento especialmente usado para identificar diferentes isótopos de um mesmo elemento.

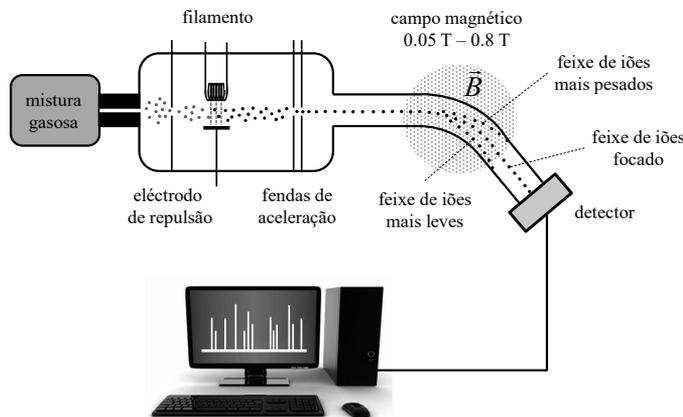


Figura 8.12. Esquema de um espectrómetro de massa.

Exemplo 8.1

Um electrão move-se com velocidade $\vec{v} = 26.5 \times 10^5 \vec{j} \text{ ms}^{-1}$. a) Determinar o campo de indução magnética gerado pelo electrão no ponto P , cujo vector posição é $\vec{r}_p = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \text{ cm}$, no instante em que o electrão passa pela origem das coordenadas. b) O electrão penetra em seguida numa região do espaço onde existe um campo de indução magnética uniforme \vec{B} , com intensidade 2 T. O electrão passa então a descrever uma trajectória circular de raio R . Qual é a direcção do campo \vec{B} relativamente à velocidade do electrão? c) Determinar o valor da força magnética que o campo \vec{B} exerce sobre o electrão e o raio R da sua trajectória. Qual é a direcção desta força relativamente à velocidade do electrão e ao campo \vec{B} ?

Resolução:

a) O campo gerado pelo electrão no ponto P é dado pela Lei de Biot-Savart:

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0}{4\pi} (-e) \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

onde \vec{r} é o vector que une o electrão ao ponto P . Como o electrão se encontra na origem,

$$\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{0} = (-2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) \times 10^{-2} \text{ m},$$

$$r = \|\vec{r}\| = \|\vec{r}_p\| = \sqrt{14} \times 10^{-2} \text{ m}.$$

Deste modo, tendo em conta a expressão da lei de Biot e Savart e que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$, resulta

$$\vec{B}_p = -(2.43\vec{i} + 1.62\vec{k}) \times 10^{-18} \text{ T}.$$

- b) Se o electrão passa a descrever uma trajectória circular, é porque o campo \vec{B} é perpendicular à velocidade inicial do electrão. Caso contrário, a velocidade teria uma componente paralela a \vec{B} e a trajectória seria uma hélice.
- c) Pela lei de Laplace, $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$, logo esta força é perpendicular tanto à velocidade do electrão como ao campo de indução magnética. Como $\vec{v} \perp \vec{B}$, $F = evB$. O raio obtém-se igualando a força de Laplace à força centrípeta. Vem, assim, que:

$$F = evB = 8.49 \times 10^{-13} \text{ N},$$

$$R = \frac{m_e v}{eB} = 7.53 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

8.6. Campo magnético gerado por correntes eléctricas

Para determinarmos o campo de indução magnética gerado por uma corrente eléctrica, comecemos por notar que um *elemento de corrente* num fio condutor pode ser assimilado a uma carga em movimento. De facto, considere-se um elemento infinitesimal de

carga dq que se move, com velocidade \vec{v} , ao longo de um fio condutor (suposto, sem grande perda de generalidade, de espessura desprezável). Pela lei de Biot-Savart, este elemento de corrente gera, num ponto P do espaço situado a uma distância r , um campo de indução magnética $d\vec{B}_P$ dado por

$$d\vec{B}_P = \frac{\mu_o}{4\pi} dq \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (8.10)$$

Se for $d\vec{s}$ o deslocamento infinitesimal de dq no intervalo de tempo infinitesimal dt , tem-se (recorde as definições de intensidade da corrente e de velocidade):

$$dq\vec{v} = \frac{dq}{dt} \frac{d\vec{s}}{dt} dt = I \frac{d\vec{s}}{dt} dt = I d\vec{s}. \quad (8.11)$$

Combinando as equações (8.10) e (8.11), vem que

$$d\vec{B}_P = \frac{\mu_o}{4\pi} I \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (8.12)$$

e, portanto, o campo de indução magnética gerado pelo condutor no ponto P obtém-se integrando $d\vec{B}_P$ ao longo de todo o condutor, C :

$$\vec{B}_P = \int_C d\vec{B}_P = \int_C \frac{\mu_o}{4\pi} I \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (8.13)$$

O integral que aparece na equação (8.13) é um integral de linha, semelhante ao que aparece na definição de trabalho de uma força variável de ponto para ponto, estudado no capítulo 4. Excepto nos casos em que o condutor tem uma forma geométrica muito simples como, por exemplo, uma linha recta ou uma circunferência, o seu cálculo pode ser, em geral, difícil e não o efectuaremos aqui. Limitar-nos-emos a apresentar as expressões dos campos \vec{B} e \vec{H} gerados por fios condutores de algumas formas mais correntes.

8.6.1. Condutor rectilíneo infinito

Começemos com um caso unidimensional, que é o mais simples possível. Considere-se um fio condutor rectilíneo, de espessura nula e comprimento infinito, situado no vácuo e percorrido por uma corrente de intensidade I . Pode mostrar-se que a magnitude do campo \vec{B} num ponto P que dista r do fio condutor (*vide* figura 8.13) é dado por⁶⁶

$$B = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I}{r} \quad (8.14)$$

e a magnitude do campo \vec{H} por

$$H = \frac{B}{\mu_o} = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r}. \quad (8.15)$$

⁶⁶ Sobre a demonstração da expressão (8.14) *vide*, por exemplo, D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd edition, Prentice Hall, New Jersey, 1999, pag. 216.

O sentido dos campos \vec{B} ou \vec{H} relaciona-se com o sentido da corrente de acordo com a *regra da mão direita*. As linhas de campo são circulares, concêntricas em relação ao fio e assentes no plano perpendicular ao mesmo e que contém o ponto P (*vide* figura 8.13).

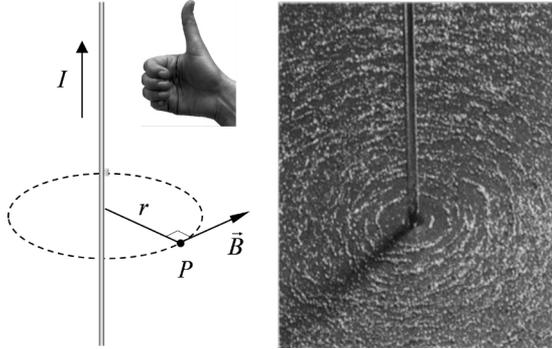


Figura 8.13. Campo de indução magnética gerado por um fio retilíneo infinito, de espessura nula. À direita, mostra-se o desenho das linhas de campo feito com limalha de aço.

Observe-se que, no mundo real, não existem, obviamente, condutores de espessura nula e comprimento infinito. Os resultados acima apresentados serão, portanto, apenas aproximadamente válidos no caso de condutores reais, mas sê-lo-ão em muito boa aproximação em pontos cuja distância r ao condutor seja muito menor do que a distância às suas extremidades.

8.6.2. Espira circular

Vejam agora um caso bidimensional. Considere-se uma espira circular de raio r_0 , situada no vácuo e percorrida por uma corrente de intensidade I (*vide* figura 8.14).

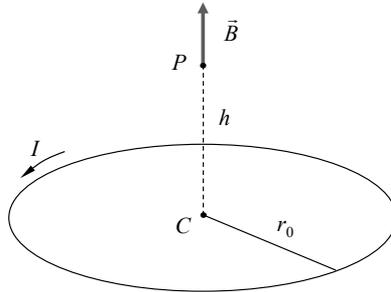


Figura 8.14. Campo de indução magnética gerado por uma espira circular num ponto situado no eixo da espira.

Em pontos situados junto da espira, quer dizer, afastados dela distâncias $r \ll r_0$, os campos \vec{B} e \vec{H} gerados pela espira serão aproximadamente iguais ao que são junto de um fio retilíneo infinito, ou seja, tangentes a circunferências perpendiculares à espira e nela centradas, com valores dados pelas equações (8.14) e (8.15). Em todos os outros pontos do espaço os campos \vec{B} e \vec{H} têm uma forma complexa. Pode mostrar-se que a

sua magnitude num ponto P , situado no eixo da espira e distando uma altura h do seu centro, é dada por⁶⁷

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + h^2)^{3/2}} \text{ e } H = \frac{I}{2} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (8.16)$$

Em particular, no centro da espira ($h = 0$) verificar-se-á

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r_0} \text{ e } H = \frac{I}{2r_0}. \quad (8.17)$$

Relativamente à direcção e ao sentido, os campos \vec{B} e \vec{H} são perpendiculares ao plano da espira, e o seu sentido está relacionado com o da corrente I pela *regra da mão direita* (vide figura 8.15).

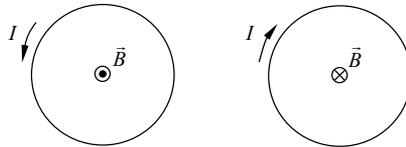


Figura 8.15. O campo de indução magnética gerado por uma espira circular percorrida por corrente eléctrica é, no eixo da espira, perpendicular ao plano da espira. Se, olhando ao longo desse eixo, a corrente for vista a circular no sentido anti-horário (esquerda), então o campo sai da página; se, pelo contrário, a corrente for vista a circular no sentido horário (direita), o campo entra na página.

8.6.3. Solenóide

Denomina-se *solenóide* ou *bobina* um conjunto de espiras circulares justapostas (enrolamento), perfazendo um determinado comprimento (vide figura 8.16). Um solenóide é caracterizado pelo número de espiras, N , pelo seu comprimento, ℓ , e pelo raio das espiras, r_0 ⁶⁸.

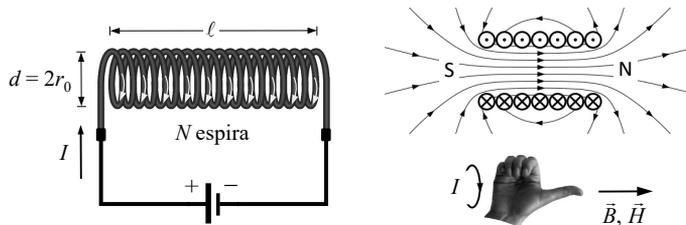


Figura 8.16. Solenóide de N espiras (esquerda) e linhas do campo de indução magnética por ele gerado (direita). O sentido dos campos \vec{B} e \vec{H} em relação à corrente I fica definido pela regra da mão direita. No interior do solenóide, o campo é aproximadamente uniforme e dirigido segundo o seu eixo de simetria.

⁶⁷ Sobre a demonstração das expressões (8.16) vide, por exemplo, D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd edition, Prentice Hall, New Jersey, 1999, pag. 218.

⁶⁸ Iremos admitir neste estudo que todos os solenóides têm secção recta circular, o que nem sempre é verdade. Solenóides com geometrias diferentes têm expressões do campo de indução magnética diferentes. Por outro lado, assumiremos, por agora, que o material que preenche o interior de um solenóide é o vácuo ou o ar. Contudo, e na prática, a maioria dos solenóides têm um núcleo de um material ferromagnético (por exemplo o ferro) caracterizado por uma permeabilidade magnética μ muito superior a μ_0 e, portanto, capazes de gerar campos de indução magnética muito mais elevados, como veremos no parágrafo 8.8.

Pode deduzir-se que as intensidades dos campos \vec{B} e \vec{H} no centro do solenóide são dadas por⁶⁹

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\sqrt{4r_o^2 + \ell^2}} \text{ e } H = \frac{N I}{\sqrt{4r_o^2 + \ell^2}}. \quad (8.18)$$

Estas expressões reduzem-se ao caso anterior, de uma só espira, se tomarmos $N = 1$ e $\ell = 0$. Em particular, para um solenóide muito comprido $\ell \gg r_0$ são válidas as seguintes expressões para as magnitudes dos campos no centro do solenóide:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\ell} = \mu_0 n I \text{ e } H = \frac{N I}{\ell} = n I, \quad (8.19)$$

onde $n = N / \ell$ representa o número de espiras por unidade de comprimento (densidade de espiras) do solenóide. Tal como nos casos analisados anteriormente, o sentido dos campos \vec{B} e \vec{H} em relação à corrente I fica definido pela *regra da mão direita* (vide figura 8.16).

Exemplo 8.2

Um solenóide com 150 espiras e 0.5 m de comprimento, é percorrido por uma corrente de intensidade $I = 0.5$ A. A área de cada espira é $S = 0.5$ cm². Determinar os valores dos campos \vec{B} e \vec{H} dentro do solenóide.

Resolução:

Utilizando a equação (8.18) para o campo de indução magnética gerado por um solenóide cujo núcleo é o vácuo ou o ar:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 N I}{\sqrt{4r^2 + \ell^2}} = \frac{\mu_0 N I}{\sqrt{4(S/\pi) + \ell^2}} = \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 150 \times 0.5}{\sqrt{4 \times (0.5 \times 10^{-4} / \pi) + 0.5^2}} = 1.88 \times 10^{-4} \text{ T.} \end{aligned}$$

O campo magnético correspondente é

$$H = \frac{B}{\mu_0} = 150 \text{ A m}^{-1}.$$

8.7. Indução electromagnética

Com as experiências de Oersted ficou demonstrada a capacidade de uma corrente eléctrica gerar um campo magnético. Colocou-se, naturalmente, a questão contrária: poderia um campo magnético induzir uma corrente eléctrica?

⁶⁹ Sobre a demonstração das expressões (8.18) *vide*, por exemplo, P. Lorrain and D. R. Corson, *Electromagnetism – Principles and Applications*, 2nd edition, W. H. Freeman and Company, New York, 1997, pag. 226.

Michael Faraday, conhecedor dos resultados de Oersted, tentou responder precisamente a esta pergunta. Os resultados iniciais das suas experiências foram negativos: um íman colocado junto a um circuito condutor (por exemplo, uma bobina) não gera qualquer corrente nesse mesmo circuito. Contudo, em 1831, Faraday descobriu que, movimentando o íman relativamente ao circuito (ou movimentando o circuito relativamente ao íman), se induzia uma corrente eléctrica no circuito. Fisicamente, o que sucede é que a energia cinética do movimento é transformada em energia eléctrica através do campo magnético (*vide* figura 8.17).

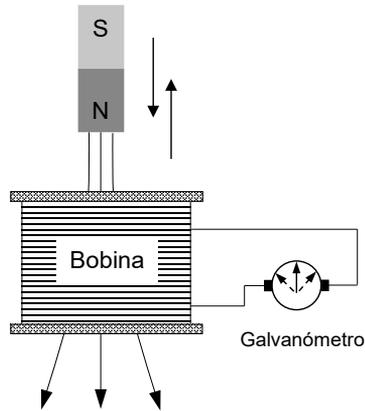


Figura 8.17. Indução electromagnética: quando o íman se move relativamente à bobina, surge nesta uma corrente eléctrica induzida, que é registada pelo galvanómetro.

Como o circuito não tem qualquer gerador, diz-se que a corrente eléctrica nele gerada é uma *corrente induzida* e falamos de um processo de *indução electromagnética*. As correntes induzidas podem ser geradas não só através de ímanes, mas também através de outras correntes eléctricas (*vide* figuras 8.18 e 8.19) – uma vez que uma corrente eléctrica produz à sua volta um campo magnético.

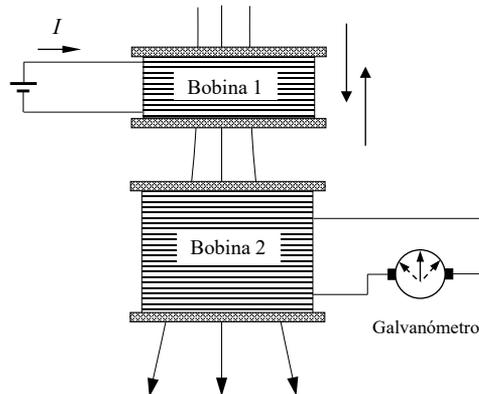


Figura 8.18. Corrente eléctrica induzida por um bobina que se afasta e aproxima. A bobina 1 é o circuito indutor e a bobina 2 o circuito induzido.

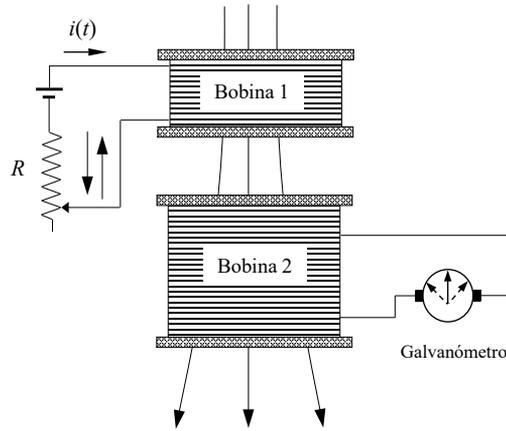


Figura 8.19. Corrente eléctrica induzida (na bobina 2) por um circuito indutor (bobina 1) cuja corrente se faz variar por variação da sua resistência R .

Em qualquer das situações, a corrente induzida pode ser entendida como devida ao aparecimento, no circuito induzido, de uma força electromotriz induzida, ε_{ind} . Ou seja, estabelece-se no interior do circuito condutor uma diferença de potencial, logo um campo eléctrico, não nulos. Por esta razão, utilizam-se campos de indução magnética variáveis para induzir correntes do interior de células vivas (recorde-se que o interior de uma célula é rico em iões, logo condutor) e, assim, estudar os efeitos fisiológicos dos campos eléctricos.

A indução electromagnética é extremamente importante do ponto de vista prático: está por trás da geração industrial da maior parte da electricidade que utilizamos: turbinas termoeléctricas, hidroeléctricas, eólicas, de marés, todas funcionam com base no fenómeno da indução electromagnética. Poderá, talvez, dizer-se que foi a indução electromagnética que, ao permitir a geração de grandes quantidades de energia eléctrica a preços acessíveis, tornou possível o mundo moderno.

Vejamos agora como descrever quantitativamente o fenómeno da indução electromagnética. Para tal, precisamos de definir primeiro a grandeza fluxo de indução magnética.

8.7.1. Fluxo de indução magnética

Considere-se um ponto P contido num elemento de superfície plana ΔS e que este elemento de superfície se encontra mergulhado num campo de indução magnética uniforme \vec{B} que faz um ângulo α com a direcção do vector unitário \vec{n} que define a normal a ΔS (*vide* figura 8.20).

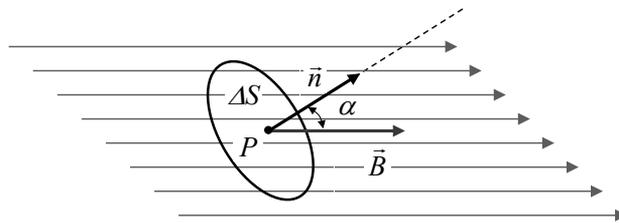


Figura 8.20. Fluxo de indução magnética através de uma superfície plana.

Chama-se *fluxo de indução magnética através do elemento de superfície* ΔS à grandeza Φ_B definida por

$$\Phi_B = B \Delta S \cos \alpha = \vec{B} \cdot \Delta \vec{S}, \quad (8.20)$$

onde $\Delta \vec{S} = \Delta S \vec{n}$ é um vector perpendicular ao elemento de superfície e com norma igual à área deste; \vec{n} representa o versor da direcção perpendicular à área ΔS . A unidade SI de fluxo de indução magnética é o weber (Wb), sendo válida a relação $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T m}^2$.

Obviamente, o fluxo de indução magnética Φ_B será nulo sempre que $\alpha = 90^\circ$ e terá o valor máximo $B \Delta S$ sempre que $\alpha = 0^\circ$. Repare-se, ainda, que o produto $\Delta S \cos \alpha$ representa a projecção da superfície ΔS sobre um plano perpendicular às linhas de campo.

Se a superfície não for plana, ou se o campo \vec{B} não for uniforme, a definição de fluxo de indução magnética tem de ser generalizada, tendo-se

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (8.21)$$

onde a integração é realizada sobre toda a superfície S .

8.7.2. Lei de Faraday e lei de Lenz

Como referimos, se um determinado circuito está sujeito a um fluxo de indução magnética, Φ_B , variável no tempo, surge no referido circuito uma corrente induzida, I_{ind} , que pode ser entendida como resultante do aparecimento, no circuito induzido, de uma força electromotriz induzida, ε_{ind} . O valor desta força electromotriz induzida é dada por

$$\varepsilon_{ind} = - \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (8.22)$$

expressão esta conhecida por *lei de Faraday*. Pode, pois, afirmar-se que a f.e.m. induzida iguala, a menos do sinal “-”, a taxa de variação do fluxo de indução magnética que atravessa o circuito. No caso particular de o fluxo Φ_B variar linearmente no tempo, teremos

$$\varepsilon_{ind} = - \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t}, \quad (8.23)$$

Note-se que, mesmo quando a variação do fluxo não é linear, a equação (8.23) é uma aproximação da equação (8.22), válida para intervalos de tempo muito curtos.

Caso o circuito induzido tenha N espiras (enrolamento) a expressão da lei de Faraday assume a forma

$$\varepsilon_{ind} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d(N\Phi_B^{(1)})}{dt} = - N \frac{d\Phi_B^{(1)}}{dt}, \quad (8.24)$$

com $\Phi_B^{(1)}$ o fluxo de indução magnética associado a uma única espira: o fluxo total através do circuito é, evidentemente, $\Phi_B = N\Phi_B^{(1)}$.

O sinal “-” nas equações (8.22) a (8.24) é suficientemente importante para constituir, por si só, uma lei física: incorpora a *lei de Lenz* na lei de Faraday. A lei de Lenz diz-nos qual é o sentido da corrente induzida; ou, por outras palavras, qual é o sinal da f.e.m. induzida. A corrente induzida I_{ind} surgirá sempre com um sentido tal que gere um fluxo de indução magnética que se oponha à variação do fluxo de indução magnética indutor que a gerou. A figura 8.21 ilustra a lei de Lenz no caso em que o campo de indução magnética é gerado por um íman.

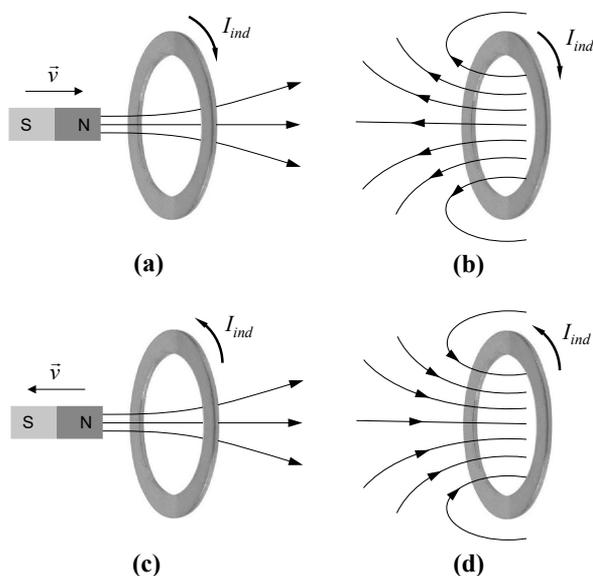


Figura 8.21. A lei de Lenz dá o sentido da corrente induzida numa espira condutora. a) Fluxo de indução magnética do íman através da espira quando o íman se aproxima da espira. b) Campo de indução magnética gerado pela corrente induzida devido à variação do fluxo de indução magnética em a). c) Fluxo de indução magnética do íman através da espira quando o íman se afasta da espira. d) Campo de indução magnética gerado pela corrente induzida devido à variação do fluxo de indução magnética em c).

A figura 8.21a mostra o íman (e respectivas linhas de campo de indução magnética) a aproximar-se de uma espira condutora estacionária: o fluxo do campo de indução magnética do íman através da espira aumenta e é induzida na espira uma corrente com o sentido que a figura mostra. Por sua vez, esta corrente induzida gera um campo de indução magnética, cujas linhas de campo se podem ver na figura 8.21b: note-se que têm sentido (relacionado com o da corrente induzida pela regra da mão direita) contrário às do campo de indução magnética do íman. Logo, o campo de indução magnética gerado pela corrente induzida na espira faz diminuir o fluxo de indução magnética total através da espira, contrariando, assim, o aumento do fluxo de indução magnética (devido à aproximação do íman) que deu origem à corrente induzida.

A figura 8.21c mostra o mesmo íman (e respectivas linhas de campo de indução magnética) a afastar-se de uma espira estacionária: o fluxo do campo de indução

magnética do íman através da espira diminui e é induzida na espira uma corrente com o sentido que a figura mostra. Por sua vez, esta corrente induzida gera um campo de indução magnética, cujas linhas de campo se podem ver na figura 8.21d: estas têm sentido (relacionado com o da corrente induzida pela regra da mão direita) igual às do campo de indução magnética do íman. Logo, o campo de indução magnética gerado pela corrente induzida na espira faz aumentar o fluxo de indução magnética total através da espira, contrariando, assim, a diminuição do fluxo de indução magnética (devido ao afastamento do íman) que deu origem à corrente induzida.

Repare-se que, se não fosse verificada a lei de Lenz, haveria uma clara violação do princípio de conservação da energia. De facto, se uma corrente indutora gerasse uma corrente induzida com sentido contrário ao estabelecido pela lei de Lenz, esta iria gerar um fluxo de indução magnética que aumentaria a intensidade da corrente indutora. Esta, por sua vez, aumentaria a intensidade da corrente induzida, e assim sucessivamente até ambas as correntes se tornarem infinitas!

Pode também ser estabelecido um certo paralelismo entre a lei de Lenz e o princípio de Le Chatelier do equilíbrio químico (para pensar...).

Exemplo 8.3

Considere uma bobina constituída por um enrolamento de $N = 10$ espiras circulares com área de secção recta 1 dm^2 . Admitindo que a bobina é mergulhada numa região do espaço onde existe um campo de indução magnética de valor $B(t) = 10 \sin(10t) \text{ T}$, o qual faz um ângulo de 60° com o plano das espiras, determine a f.e.m. induzida na bobina.

Resolução:

i) cálculo do fluxo $\Phi_B^{(1)}$ através de uma espira:

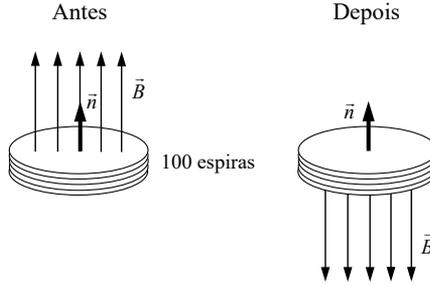
$$\Phi_B^{(1)} = B \Delta S \cos \alpha = 10 \sin(10t) \times 10^{-2} \times \cos 60^\circ = 0.05 \sin(10t) \text{ Wb.}$$

ii) cálculo da f.e.m. induzida, utilizando o fluxo total $\Phi_B = N\Phi_B^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ind} &= -N \frac{d\Phi_B^{(1)}}{dt} = -10 \frac{d}{dt} [0.05 \sin(10t)] = \\ &= -10(0.05 \times 10) \cos(10t) = 5 \cos(10t) \text{ V.} \end{aligned}$$

Exemplo 8.4

Uma bobina circular com 100 espiras tem um diâmetro de 2 cm. O plano da espira é perpendicular a um campo de indução magnética uniforme de valor $B = 1 \text{ T}$, que inverte o seu sentido num intervalo de tempo de 0.01 s (ver esquema da figura). Calcular: a) o fluxo Φ_B do campo \vec{B} através da bobina, antes da inversão do sentido do campo; b) a força electromotriz induzida na bobina pela inversão do sentido do campo \vec{B} .



Resolução:

- a) **Antes** da inversão do sentido do campo, o ângulo entre o campo de indução magnética e a normal ao plano das espiras é 0° , logo:

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \vec{B} \cdot \Delta\vec{S} = NB\Delta S \cos \alpha = NB\pi r^2 \cos \alpha = \\ &= 100 \times 1 \times \pi \times (2 \times 10^{-2})^2 \times 1 = 1.26 \times 10^{-1} \text{ Wb.}\end{aligned}$$

- b) Para calcular a força electromotriz induzida, utilizando a lei de Faraday, é primeiro preciso calcular o fluxo do campo de indução magnética através da bobina **depois** da inversão do sentido do campo. Agora, o ângulo entre o campo de indução magnética e a normal às espiras é 180° :

$$\begin{aligned}\Phi'_B &= \vec{B} \cdot \Delta\vec{S} = NB\Delta S \cos \alpha = NB\pi r^2 \cos \alpha = \\ &= 100 \times 1 \times \pi \times (2 \times 10^{-2})^2 \times (-1) = -1.26 \times 10^{-1} \text{ Wb.}\end{aligned}$$

Pela lei de Faraday, a força electromotriz induzida vem

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \approx -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Phi'_B - \Phi_B}{\Delta t} = \frac{2.52 \times 10^{-1}}{0.01} = 25.2 \text{ V.}$$

8.7.3. Auto-indução de uma bobina

Vimos que uma bobina percorrida por uma corrente eléctrica variável, $i(t)$, pode gerar uma f.e.m. induzida numa outra bobina, devido à variação do fluxo de indução magnética gerado pela primeira bobina (que resulta da corrente variável que a percorre) através da segunda bobina (lei da indução de Faraday).

Em boa verdade, não é necessária a presença das duas bobinas para que ocorra o efeito de indução electromagnética. Este efeito surge na própria bobina onde há variação da corrente eléctrica. É o chamado efeito de *auto-indução*, descrito também pela lei de Faraday.

Consideremos uma bobina de N espiras percorrida por uma corrente variável $i(t)$. Pode mostrar-se que o fluxo total associado à própria bobina, $\Phi_B = N\Phi_B^{(1)}$ (onde $\Phi_B^{(1)}$ é o fluxo magnético através de uma única espira da bobina), é proporcional à corrente drenada pela bobina, ou seja,

$$\Phi_B = N \Phi_B^{(1)} = L i(t), \quad (8.25)$$

com L o chamado *coeficiente de auto-indução*, ou *indutância*, da bobina, expresso no SI em henry (H): $1 \text{ H} = 1 \text{ V A}^{-1} \text{ s}$. O coeficiente de auto-indução é uma característica da bobina que só depende da sua geometria, da densidade de espiras que a constituem e da permeabilidade magnética do seu núcleo (μ_0 no caso do vácuo ou do ar).

Como da lei de Faraday sabemos que

$$\varepsilon_{ind} = - \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (8.26)$$

podemos escrever para a f.e.m. auto-induzida numa bobina, ε_L ,

$$\varepsilon_L = - L \frac{di(t)}{dt}. \quad (8.27)$$

Exemplo 8.5

Calcular o coeficiente de auto-indução de uma bobina com N espiras, de secção circular de raio r_0 e comprimento ℓ , admitindo que $\ell \gg r_0$. Concretizar o cálculo para $N = 1000$ espiras, $r_0 = 1 \text{ mm}$ e $\ell = 4 \text{ cm}$.

Resolução:

Podemos supôr que a bobina é infinita, pelo que o campo de indução magnética no interior da bobina é uniforme e tem valor dado por pela equação (8.19),

$$B = \frac{\mu_o N I}{\ell} = \mu_o n I$$

O fluxo total do campo \vec{B} através da secção recta $\Delta S = \pi r_0^2$ da bobina é

$$\Phi_B = N \Phi_B^{(1)} = N B \Delta S \cos 0^\circ = \mu_o \frac{N^2}{\ell} \Delta S I = \mu_o n^2 \ell \Delta S I$$

Assim, o coeficiente de auto-indução da bobina é

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \mu_o \frac{N^2}{\ell} \Delta S = \mu_o n^2 \ell \Delta S = \mu_o \pi n^2 r_0^2 \ell$$

Reparar que o coeficiente L só depende das características da bobina e não da corrente que a percorre. Concretizando para os valores dados, vem

$$L = \mu_o \pi n^2 r_0^2 \ell = 4 \times 10^{-7} \times \pi \times \left(\frac{1000}{4 \times 10^{-2}} \right)^2 \times (1 \times 10^{-2})^2 \times 4 \times 10^{-2} \approx \\ \approx 3.14 \times 10^{-3} \text{ H} = 3.14 \text{ mH}.$$

A polaridade da f.e.m. auto-induzida numa bobina obtém-se a partir da lei de Lenz. Imaginemos um circuito constituído por uma resistência variável em série com uma bobina, ao qual se liga a um gerador de f.e.m. constante (*vide* figura 8.22). Em consequência da f.e.m. aplicada, a bobina é percorrida por uma corrente eléctrica de intensidade constante, $i(t) = I$. Admitamos que, súbita e rapidamente, se aumenta o valor da

resistência variável. A corrente eléctrica diminui e, em consequência da lei de Lenz, a f.e.m. auto-induzida na bobina deve opor-se a esta variação e, por isso, ε_L deve ter uma polaridade que se oponha à diminuição da corrente inicial (*vide* figura 8.22a). Se, pelo contrário, se diminui o valor da resistência variável, a corrente $i(t)$ aumenta e a bobina reage gerando uma f.e.m. auto-induzida cuja polaridade se oporá ao aumento de corrente (*vide* figura 8.22b).

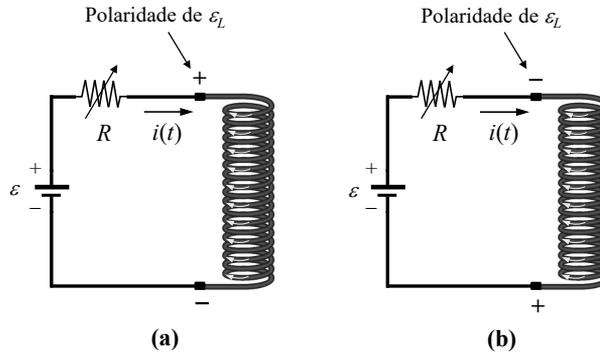


Figura 8.22. Lei de Lenz aplicada a uma bobina: a) quando a intensidade da corrente que percorre uma bobina *diminui*, a polaridade da f.e.m. induzida é de molde a fazer *aumentar* a intensidade da corrente, contrariando, assim, a variação que lhe deu origem; b) quando a intensidade da corrente que percorre uma bobina *aumenta*, o sinal da f.e.m. induzida é de molde a fazer *diminuir* a intensidade da corrente, contrariando, assim, a variação que lhe deu origem.

Por esta razão, as bobinas de auto-indução são utilizadas para eliminar flutuações de correntes indesejáveis, devidas, por exemplo, a instabilidades dos geradores que alimentam o circuito.

8.7.4. Leis de associação de auto-induções

Tal como no caso das resistências e dos condensadores, um circuito eléctrico pode conter, em geral, um número variado de bobinas de indução. Se pretendemos substituí-las por uma única bobina, de modo a que nada se altere no resto do circuito, qual deverá ser o valor do coeficiente de auto-indução dessa bobina única? A resposta é: deverá ser o valor da coeficiente de auto-indução equivalente do conjunto. As leis de associação de auto-induções permitem-nos calcular o coeficiente de auto-indução equivalente de qualquer conjunto de bobinas: a d.d.p. aos terminais da bobina equivalente, e a corrente que a atravessa, são as mesmas que para o conjunto de bobinas que estamos a substituir.

Embora haja um grande número de maneiras de ligar n bobinas uma às outras, quase todas⁷⁰ essas maneiras possíveis se reduzem, como nos casos das resistências e dos condensadores, a combinações de associações em série e em paralelo. É por esta razão que iremos estudar estes dois modos de associação.

⁷⁰ Excepto as associações em triângulo e em estrela, que não consideraremos aqui.

8.7.4.1. Associação em série

Pretende-se calcular o coeficiente de auto-indução L_{eq} da bobina equivalente à associação em série das n bobinas com coeficientes de auto-indução L_1, \dots, L_n (*vide* figura 8.23).

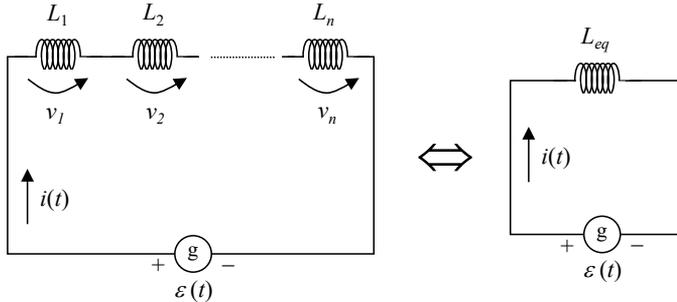


Figura 8.23. Associação de n bobinas em série ligadas a um gerador de f.e.m. variável e respectivo circuito equivalente.

Se forem v_1, v_2, \dots, v_n as d.d.p. aos terminais das bobinas 1, 2, ..., n , aplicando a este circuito a lei das malhas de Kirchoff obtém-se a seguinte relação:

$$\varepsilon = v_1 + v_2 + \dots + v_n = \sum_{j=1}^n v_j \quad (8.28)$$

Pode mostrar-se⁷¹ que a d.d.p. aos terminais de uma bobina é dada por

$$v_j = L_j \frac{di_j(t)}{dt} \quad (j=1, \dots, n). \quad (8.29)$$

Como as n bobinas estão ligadas em série, a intensidade da corrente que as percorre é igual para todas ($i = i_1 = \dots = i_n$), logo

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^n L_j \frac{di(t)}{dt} = \left(\sum_{j=1}^n L_j \right) \frac{di(t)}{dt} = L_{eq} \frac{di(t)}{dt} \quad (8.30)$$

ou seja, o coeficiente de auto-indução equivalente de uma associação de bobinas em série é a soma dos coeficientes de auto-indução das bobinas individuais:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n = \sum_{j=1}^n L_j \quad (8.31)$$

8.7.4.2. Associação em paralelo

Pretende-se calcular o coeficiente de auto-indução L_{eq} da bobina equivalente à associação em paralelo das n bobinas com coeficientes de auto-indução L_1, \dots, L_n (*vide* figura 8.24).

⁷¹ *Vide*, por exemplo, H. Young and R. A. Freedman, *Sears and Zemansky's University Physics*, 11th edition, Addison Wesley, New York, 2004.

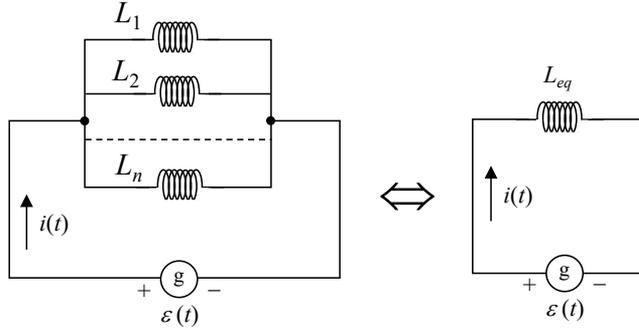


Figura 8.24. Associação de n bobinas em paralelo ligadas a um gerador de f.e.m. variável e respectivo circuito equivalente.

Aplicando a este circuito a lei dos nodos de Kirchhoff, verifica-se a seguinte relação:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = \sum_{j=1}^n i_j. \quad (8.32)$$

Como as n bobinas estão ligadas em paralelo, a d.d.p. aos seus terminais é igual para todas e igual à f.e.m. do gerador ($\varepsilon = v_1 = \dots = v_n$), logo

$$\frac{di_j(t)}{dt} = \frac{v}{L_j} \quad (j=1, \dots, n), \quad (8.33)$$

donde resulta

$$\frac{di(t)}{dt} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{L_j} \right) \varepsilon = \frac{1}{L_{eq}} \varepsilon, \quad (8.34)$$

ou seja, o coeficiente de auto-indução equivalente de uma associação de bobinas em paralelo é o inverso da soma dos inversos dos coeficientes de auto-indução das bobinas individuais:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{L_j}. \quad (8.35)$$

8.7.5. Energia armazenada numa bobina de auto-indução

Tal como um condensador carregado armazena energia potencial electrostática no campo eléctrico que existe entre as suas placas, também uma bobina armazena energia potencial, desta feita magnética, no campo de indução magnética que existe no seu interior. Considere-se uma bobina de coeficiente de auto-indução L e admita-se que no intervalo de tempo entre 0 e t a bobina drena uma corrente $i(t)$ que varia entre I_0 e I . A potência eléctrica instantânea posta em jogo na bobina é dada pelo produto da corrente por ela drenada pela d.d.p. existente aos seus terminais:

$$p_L(t) = i(t)v_L(t) = i(t)L \frac{di(t)}{dt}. \quad (8.36)$$

A energia armazenada na bobina quando a corrente varia entre I_0 e I é calculada mediante a integração da potência. Como, por definição,

$$p_L(t) = \frac{dw_L(t)}{dt}, \quad (8.37)$$

com $w_L(t)$ a energia instantânea, resulta que

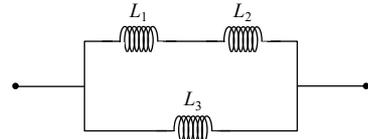
$$dw_L(t) = p_L(t) dt. \quad (8.38)$$

Integrando esta última expressão, obtemos para a energia armazenada no campo magnético da bobina, U_{mag} :

$$U_{mag} = \int_{w_L(I_0)}^{w_L(I)} dw_L = L \int_{I_0}^I i di \Rightarrow W_L(I) - W_L(I_0) = \frac{1}{2} L (I^2 - I_0^2) \quad (8.39)$$

Exemplo 8.6

Considere-se a associação de bobinas de auto indução representada na figura, onde. $L_1 = 10$ mH, $L_2 = 15$ mH e $L_3 = 20$ mH. Determinar: a) O coeficiente de auto-indução equivalente desta associação.



b) A energia magnética armazenada nesta associação de bobinas, quando a corrente total que a atravessa varia entre $I_0 = 0$ e o valor máximo (amplitude da corrente), $I_m = 5$ A. c) A f.e.m auto-induzida, ε_{ind} , sabendo que a variação do valor da corrente se deu no intervalo de tempo $\Delta t = 0.02$ s.

Resolução:

a) L_1 está em série com L_2 , e o conjunto das duas está em paralelo com L_3 . Vem, portanto, para o coeficiente de auto-indução equivalente:

$$L_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{L_1 + L_2} + \frac{1}{L_3}} = 11.1 \text{ mH.}$$

b) A energia magnética acumulada na associação de bobinas é:

$$U_{mag} = \frac{1}{2} L_{eq} (I_m^2 - I_0^2) = \frac{1}{2} \times 11.1 \times 10^{-3} \times (5^2 - 0^2) = 1.39 \times 10^{-1} \text{ J.}$$

c) Pela lei de Faraday, a força electromotriz auto-induzida é:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ind} &= -L_{eq} \frac{di(t)}{dt} \approx -L_{eq} \frac{\Delta i(t)}{\Delta t} = -L_{eq} \frac{I_m - I_0}{\Delta t} = \\ &= -11.1 \times 10^{-3} \times \frac{5 - 0}{0.02} = -2.8 \text{ V.} \end{aligned}$$

8.8. Campo magnético em meios materiais

Até ao momento, estudámos campos magnéticos no vazio – meio caracterizado pela permeabilidade magnética $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ – ou no ar (em boa aproximação $\mu_0 \approx \mu_{\text{ar}}$). Vimos também que correntes eléctricas geram campos magnéticos, tendo-se mostrado as equações que descrevem a magnitude desses campos para circuitos de diferentes formas. Os efeitos magnéticos da matéria podem, portanto, ser associados ao movimento dos electrões em torno dos núcleos atómicos – que pode ser assimilado a uma corrente eléctrica microscópica⁷². Não será, então, difícil admitir que as propriedades magnéticas da matéria possam ser alteradas pela presença de um campo magnético exterior, e que um tal campo possa, por sua vez, ser modificado pela presença de matéria. Na verdade, podemos pensar em cada átomo individual como sendo um minúsculo íman. Se o material for um sólido, os seus átomos ocupam posições aproximadamente fixas (regulares, no caso de um sólido cristalino).

8.8.1. Tipos de materiais magnéticos

Se uma amostra de um dado material for colocada num campo magnético, o campo de indução magnética na vizinhança da amostra será alterado. É esta a diferença crucial entre os campos magnético e de indução magnética: o primeiro consiste na influência magnética imposta do exterior, enquanto o segundo inclui não só a influência exterior, mas também a resposta do material (através da sua *magnetização*) a essa influência exterior (obviamente, no vácuo não existe qualquer meio material capaz de responder ao campo exterior, logo campo magnético e campo de indução magnética têm o mesmo significado físico, diferindo apenas nas suas unidades). Esta modificação depende da natureza do material constituinte da amostra e da sua forma. Para alguns materiais – ditos *magnéticos não permanentes* – a modificação do campo de indução magnética é mínima, mas, para outros – ditos *magnéticos permanentes* – esse campo pode aumentar por um factor que pode ser da ordem de milhares relativamente ao seu valor na ausência do material.

Os materiais magnéticos permanentes podem ser de três tipos. Nos materiais do primeiro tipo, designados por *ferromagnéticos*, os pequenos ímanes atómicos apontam todos no mesmo sentido. São exemplos de materiais ferromagnéticos os elementos Fe, Ni e Co, bem como algumas ligas. Nos restantes dois tipos de materiais magnéticos permanentes, os pequenos ímanes atómicos apontam em sentidos opostos em posições alternadas das redes cristalinas. Se os pequenos ímanes atómicos apontando em sentidos opostos não se cancelarem, diz-se que estamos na presença de um material *ferrimagnético*, de que é exemplo a magnetite (Fe_3O_4). Caso contrário, o material diz-se *antiferromagnético*. São exemplos de materiais antiferromagnéticos os elementos Ce, Cr, Nd, bem como os compostos CuO, FeS e MnO_2 . Um material ferrimagnético comporta-se, do

⁷² Em boa verdade, o magnetismo nos materiais não está apenas associado ao movimento dos electrões em torno dos núcleos atómicos (*momento angular orbital*) mas também ao seu *spin* (*momento angular de spin*).

ponto de vista macroscópico, como um material ferromagnético – atrai ou repele outros materiais. O mesmo já não sucede com um material antiferromagnético, cujas propriedades magnéticas se manifestam de um modo mais subtil.

Nos materiais magnéticos não permanentes, os pequenos ímanes atómicos apontam todos em direcções diferentes. Estes materiais podem ser de dois tipos: podem ser *diamagnéticos* (por exemplo, Cu, Au, N, He, vidro) ou *paramagnéticos* (por exemplo, V, Mn, Ti, Pt, Al, O, ligas de crómio). Um material paramagnético é atraído por um íman permanente (ferromagnete ou ferrimagnete), enquanto um material diamagnético é repellido por um íman permanente. A figura 8.25 apresenta a classificação dos materiais do ponto de vista do seu comportamento magnético.

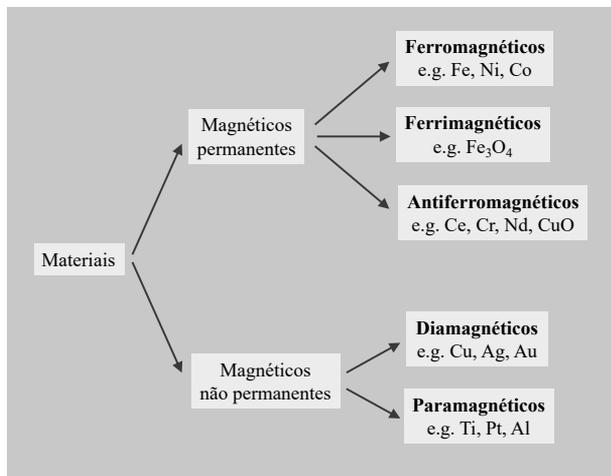


Figura 8.25. Quadro síntese do magnetismo em meios materiais.

A diferença fundamental entre materiais magnéticos permanentes e não permanentes está em que, nos primeiros, as atracções ou repulsões entre os pequenos ímanes presentes nos átomos individuais são suficientemente fortes para os fazer apontar todos na mesma direcção. Nos segundos, pelo contrário, essas atracções ou repulsões não conseguem vencer a agitação térmica, e os pequenos ímanes atómicos apontam em todas as direcções. É, portanto, possível destruir o magnetismo permanente através do aquecimento: um material ferromagnético ou ferrimagnético torna-se paramagnético acima de uma determinada temperatura característica, dita *temperatura de Curie*, enquanto um material anti-ferromagnético se torna paramagnético acima da sua *temperatura de Néel*. As temperaturas de Curie ou de Néel são propriedades dos materiais, do mesmo modo que o são, por exemplo, os seus pontos de fusão ou de ebulição. E, tal como a fusão ou a ebulição, as transições dos estado ferromagnético, ferrimagnético ou antiferromagnético para o estado paramagnético são reversíveis: ao baixar-se a temperatura abaixo da temperatura de Curie ou de Néel, recupera-se o magnetismo permanente.

8.8.2. Relação entre campo de indução magnética e campo magnético em meios materiais

A relação entre \vec{B} e \vec{H} em meios homogêneos e isotrópicos é

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \quad (8.40)$$

com χ_m a *susceptibilidade magnética* do meio material (grandeza adimensional). À grandeza

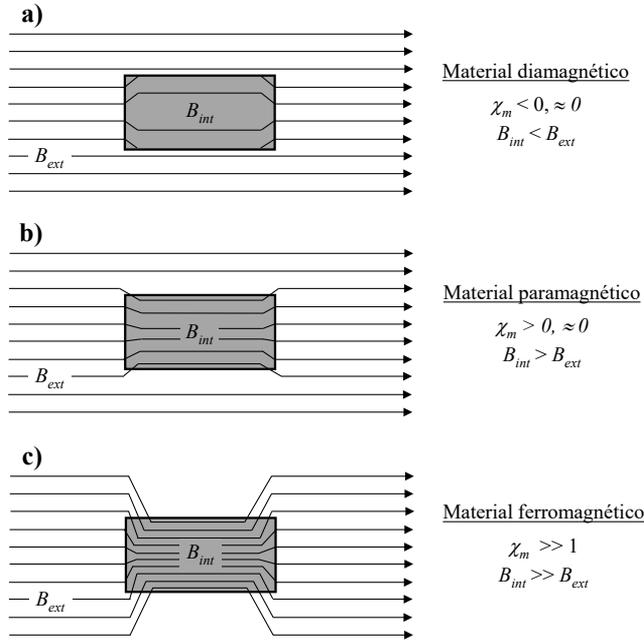


Figura 8.26. a) Material diamagnético colocado num campo magnético. A intensidade do campo de indução magnética é menor no interior do que no exterior (ar ou vácuo) do material, logo as linhas de campo estão mais afastadas. b) Material paramagnético colocado num campo magnético. A intensidade do campo de indução magnética é maior no interior do que no exterior (ar ou vácuo) do material, logo as linhas de campo estão mais juntas. c) Material ferromagnético colocado num campo magnético. A intensidade do campo de indução magnética é muito maior no interior do que no exterior (ar ou vácuo) do material, logo as linhas de campo estão muito próximas umas das outras – o material intensifica dramaticamente um campo aplicado.

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (8.41)$$

dá-se o nome de *permeabilidade magnética relativa* do meio material.

A permeabilidade magnética relativa relaciona-se com a *permeabilidade magnética absoluta* do meio material, μ , através da relação

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (8.42)$$

Podemos então escrever

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (8.43)$$

Destas relações, em particular da primeira igualdade, pode perceber-se facilmente que a intensidade do campo de indução magnética \vec{B} no interior de um meio material depende do parâmetro χ_m que caracteriza o material. Assim, teremos:

- i. para materiais diamagnéticos, o valor de χ_m é negativo e muito próximo de zero. Deste modo, a intensidade do campo \vec{B} no interior de um meio diamagnético é ligeiramente menor do que no vácuo ou ar (*vide* figura 8.26a);
- ii. para materiais paramagnéticos, o valor de χ_m é positivo e muito próximo de zero. Deste modo, o campo \vec{B} no interior de um meio paramagnético é ligeiramente maior do que no vácuo ou ar (*vide* figura 8.26b);
- iii. para materiais magnéticos permanentes, o valor de χ_m é positivo e muito superior a 1 (para o Fe e outros materiais fortemente ferromagnéticos pode ser da ordem de 10^3), sendo, por isso, o campo \vec{B} no interior de um meio ferromagnético muito mais intenso do que no vácuo ou ar (*vide* figura 8.26c).

Na tabela 8.2 estão coligidos os valores da susceptibilidade magnética de alguns materiais magnéticos não permanentes e permanentes.

Tabela 8.2. Susceptibilidade magnética de alguns materiais diamagnéticos, paramagnéticos e ferromagnéticos.

Materiais		χ_m
Diamagnéticos	Água	-9.0×10^{-6}
	Cobre	-9.7×10^{-6}
	Prata	-2.4×10^{-5}
	Ouro	-3.4×10^{-5}
	Bismuto	-1.6×10^{-4}
Paramagnéticos	Sódio	7.2×10^{-6}
	Alumínio	2.1×10^{-5}
	Platina	2.8×10^{-4}
Ferromagnéticos	Ferro	5.5×10^3
	45Ni55Fe (permalloy 45)	2.5×10^4
	75Ni5Cu2Cr18Fe (mumetal)	3.0×10^4
	79Ni5Mo15Fe0.5Mn (mupermalloy)	1.0×10^5
	Fe78B13Si9	6.0×10^5
	Fe67Co18B14Si1	4.0×10^6
	Co66Fe4Ni1B14Si15	1.0×10^6

8.8.3. Aplicação: fogões de indução

Terminamos este capítulo com uma aplicação moderna da indução electromagnética e do ferromagnetismo: os fogões de indução. Debaxo de cada placa de um fogão de indução

encontra-se uma bobina condutora, percorrida por uma corrente eléctrica alternada (ou seja, de intensidade variável). Essa bobina vai, portanto, gerar um campo magnético variável no tempo, cujo fluxo de indução magnética através de um tacho, panela ou frigideira colocados sobre a placa de indução vai ser também variável no tempo. Logo, pela lei de Faraday, vai circular nas paredes do tacho, panela ou frigideira uma corrente induzida. Uma vez que o tacho, panela ou frigideira tem uma resistência eléctrica não nula, esta corrente vai causar aquecimento por efeito de Joule (*vide* capítulo 7), permitindo, assim, cozinhar a comida. Para produzir as temperaturas necessárias à preparação dos alimentos, importa que o tacho, panela ou frigideira sejam feitos de um material ferromagnético que “amplifique” o campo magnético das bobinas, permitindo que se gere uma corrente induzida suficientemente intensa. O efeito está igualmente presente em material de cozinha feito de qualquer outro material condutor, como cobre ou alumínio, mas o aquecimento daí resultante é demasiado pequeno para ter utilidade culinária.

PROBLEMAS

- 8.1. Um electrão é lançado numa região do espaço onde existe um campo de indução magnética \vec{B} uniforme, de valor 10 T. Sabendo que a velocidade do electrão é perpendicular ao campo magnético e tem valor $3 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$, calcule o valor da força magnética que actua sobre o electrão e compare-o com o peso do electrão.
- 8.2. Numa determinada região do espaço existe um campo de indução magnética uniforme e estacionário \vec{B} , de intensidade 0.5 T, apontando horizontalmente (isto é, no plano xy) de sul para norte. Calcule:
- A intensidade e a direcção da força de Laplace que actuará um protão que se move verticalmente (isto é, ao longo do eixo dos z) de cima para baixo e com uma energia cinética de $8 \times 10^{-13} \text{ J}$ ao entrar na região onde \vec{B} se faz sentir.
 - O campo de indução magnética \vec{B}_p gerado pelo protão no ponto $P = (1, -2, 2) \times 10^{-9} \text{ m}$, no instante em que o protão se encontra na origem das coordenadas.
- 8.3. Um electrão penetra numa região do espaço onde existe um campo eléctrico de intensidade 1500 V m^{-1} e um campo de indução magnética de valor 0.40 T. A velocidade do electrão é perpendicular ao campo de indução magnética.
- Sabendo que, ao mergulhar na referida região do espaço, a resultante das forças eléctrica e magnética que actuam o electrão é nula, calcule o valor da velocidade do electrão.
 - Esquematize as direcções e os sentidos dos vectores \vec{E} , \vec{B} e \vec{v} .
- 8.4. Um electrão desloca-se com velocidade $\vec{v}_e = 1 \times 10^6 \vec{i} \text{ ms}^{-1}$, quando entra numa região do espaço onde existe um campo de indução magnética uniforme \vec{B} , passando a descrever uma trajectória circular de raio $R = 10 \text{ cm}$ no plano Oxz . Determine:
- O vector campo de indução magnética \vec{B} .
 - O valor da força electrodinâmica (ou de Laplace) que se exerce sobre o electrão.
 - O período e a frequência do movimento circular que o electrão passa a descrever.
 - O trabalho realizado pela força electrodinâmica sobre o electrão.
- 8.5. Dois fios rectilíneos, paralelos entre si e muito compridos, distam um do outro 20 cm. Os fios são percorridos por correntes eléctricas de sentidos opostos e valor 10 A.
- Calcule o valor do campo de indução magnética num ponto situado no plano dos fios e equidistante deles.
 - Indique a direcção e o sentido do campo de indução magnética no ponto referido na alínea anterior.

- 8.6. Um solenóide com núcleo de ar, tem 300 espiras circulares de secção recta 8 cm^2 e 40 cm de comprimento. Sabendo que o solenóide drena uma corrente eléctrica de 1.2 A, calcule o valor do campo de indução magnética no centro do solenóide.
- 8.7. Um solenóide com núcleo de ar e 10 cm de comprimento é enrolado em duas camadas de fio. A camada interna tem 50 espiras e a camada externa tem 40 espiras. A corrente eléctrica que percorre o solenóide tem intensidade de valor 3 A e o mesmo sentido em ambos os enrolamentos. Calcule o valor do campo de indução magnética no interior do solenóide.
- 8.8. Um solenóide de comprimento 8 cm, com área de secção recta 6 cm^2 e composto por um enrolamento de 96 espiras, é percorrido por uma corrente de intensidade 0.25 A. Em torno do solenóide está enrolada uma bobina de 2 espiras. Quando se abre o circuito, o campo de indução magnética do solenóide anula-se em 0.05 s.
- Calcule a força electromotriz induzida nas duas espiras.
 - Determine a intensidade da corrente induzida no circuito das duas espiras se a resistência do fio for 0.01Ω .
- 8.9. Uma bobina de resistência 5Ω e 100 espiras, com diâmetro 6 cm, é colocada entre os pólos de um magnete de tal modo que o fluxo de indução magnética através da sua secção é máximo. Retira-se então rapidamente a bobina do campo magnético gerado pelo magnete. Ao proceder deste modo, verifica-se que um galvanómetro, de resistência interna 595Ω , ligado à bobina, é atravessado por uma carga de $1 \times 10^{-4} \text{ C}$. Nestas circunstâncias, calcule a intensidade do campo \vec{B} entre os pólos do magnete.
- 8.10. Uma bobina cilíndrica com núcleo de ar tem um enrolamento de 1000 espiras, comprimento 10 cm e raio 0.5 cm. Durante um curto intervalo de tempo, é injectada na bobina uma corrente eléctrica à taxa de 10^3 A s^{-1} .
- Calcule o coeficiente de auto-indução da bobina.
 - Determine a força electromotriz induzida na bobina durante o referido intervalo de tempo.
- 8.11. Uma bobina de 25 espiras tem raio $r_0 = 30 \text{ cm}$ e comprimento desprezável. É percorrida por uma corrente de intensidade $I = 5 \text{ A}$. Determine:
- O valor do campo de indução magnética no centro da bobina. (*Sugestão: recorde que os campos gerados pelas diferentes espiras se somam.*)
 - O fluxo que atravessa a superfície limitada pela bobina.
 - A indutância da bobina.
 - A força electromotriz induzida, quando a variação da intensidade da corrente for 20 A s^{-1} .
- 8.12. Considere um solenóide de 50 cm de comprimento, 5 cm de diâmetro e $N = 1000$ espiras de fio de cobre. Sabe-se que o solenóide é percorrido por uma corrente eléctrica de intensidade 2 A. O solenóide encontra-se no ar. Determine:

- a) A intensidade do campo de indução magnética no interior do solenóide.
- b) A intensidade do campo de indução magnética no interior do solenóide se nele for introduzido um núcleo de um material com susceptibilidade magnética $\chi_m = -0.1$.
- c) O fluxo do campo de indução magnética através do solenóide, nas condições das alíneas a) e b).
- d) A intensidade da corrente induzida numa espira circular de fio, de resistência 0.5Ω enrolado à volta do solenóide, se o núcleo referido na alínea b) tiver sido introduzido em 0.1 s .

CAPÍTULO 9

TEMPERATURA E CALOR

A Termodinâmica é o ramo da Física que estuda os fenômenos envolvendo calor e temperatura, bem como as suas relações com o trabalho e a energia realizados por, ou transferidos entre, sistemas físicos. Ocupa-se, ainda, das propriedades macroscópicas da matéria que dependem da temperatura, bem como das grandezas que descrevem quantitativamente essas propriedades.

Em linguagem corrente, os conceitos de “calor” e “temperatura” são quase sinónimos. Veremos neste capítulo, porém, que, em Física, os dois termos têm significados muito diferentes.

9.1. Sistemas termodinâmicos. Sistemas fechados, abertos e isolados

Em Termodinâmica, como no resto da Física, falamos frequentemente de sistemas. Um *sistema termodinâmico* é um corpo ou um conjunto de corpos com uma determinada massa e delimitado no espaço. Poderá ou não trocar energia e matéria com o resto do universo – a *vizinhança* que o rodeia. Chama-se *fronteira* a superfície real ou imaginária que separa o sistema da sua vizinhança. Os sistemas podem classificar-se em *fechados* ou *abertos*. Os sistemas fechados permitem a troca de energia através da sua fronteira com a vizinhança mas não permitem a troca de matéria (*vide* figura 9.1a). A massa de um sistema fechado é, portanto, constante. Uma certa quantidade de água dentro de uma panela de pressão, bem vedada, ao lume é um exemplo de um sistema fechado. A panela (fronteira do sistema) permite apenas a troca de energia entre a vizinhança e a água, o que induz o seu aquecimento. Os sistemas abertos permitem a troca de energia e de matéria com a sua vizinhança (*vide* figura 9.1b). São exemplos de sistemas abertos todos os seres vivos, desde os organismos mais simples aos mais complexos como o Homem. De facto, em qualquer ser vivo têm de ocorrer trocas de energia e de matéria com a vizinhança para que o ser se possa manter vivo. Um sistema que não permita nem trocas de energia nem de matéria com a vizinhança diz-se um sistema *isolado*. Consideraremos no presente estudo apenas sistemas fechados ou sistemas que se podem considerar fechados em boa aproximação.

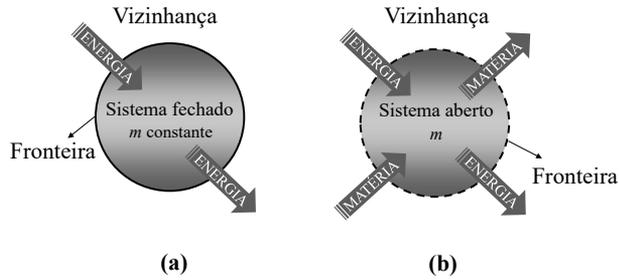


Figura 9.1. Representação de um a) sistema fechado e b) de um sistema aberto. Um sistema fechado permite apenas a troca de energia com a vizinhança através da sua fronteira. Um sistema aberto permite a troca de energia e de matéria com a vizinhança através da sua fronteira.

9.2. Propriedades de um sistema

Chama-se *propriedade* de um sistema a qualquer grandeza física que o caracterize. São exemplos destas propriedades a massa, o volume, a pressão, a temperatura, a massa volúmica, a resistividade eléctrica, etc.. As propriedades podem classificar-se em propriedades *extensivas* ou *intensivas*. As propriedades extensivas são grandezas físicas aditivas e que por isso dependem da dimensão do sistema, isto é, são proporcionais à quantidade de matéria presente no sistema. São exemplos de propriedades extensivas o volume, a massa ou a energia interna e a entropia, estas últimas, grandezas que serão definidas adiante. Se se dividir ao meio um corpo com um determinado volume, cada parte fica com metade do volume do corpo original. Em contraste com as propriedades extensivas, as propriedades intensivas não dependem da dimensão do sistema: se se dividir ao meio um corpo a uma determinada temperatura, cada metade fica com a mesma temperatura que a do corpo original, não com metade dessa temperatura. Outros exemplos de propriedades intensivas são a pressão, a massa volúmica, a concentração ou a resistividade eléctrica.

9.3. Estados termodinâmicos. Estados de equilíbrio

Diz-se que um sistema está num determinado *estado termodinâmico* quando não ocorrem variações no valor de todas as suas propriedades. Isto é, num dado estado termodinâmico todos os valores das propriedades do sistema estão fixos. Note-se que basta a modificação do valor de uma única propriedade para que o sistema mude de estado.

Uma outra noção importante em Termodinâmica é a de *estado de equilíbrio*. Os sistemas macroscópicos apresentam algum tipo de memória da história dos estímulos exteriores que sobre eles actuaram. O café numa chávena mexido por uma colher mantém-se em movimento durante algum tempo mesmo após ter terminado a acção da colher. Contudo, a memória histórica dos estímulos exteriores tende a desaparecer e os sistemas evoluem, mais ou menos rapidamente, para estados termodinâmicos simples em que os

valores das suas propriedades são determinados apenas por factores intrínsecos e não pelas acções exteriores previamente aplicados no sistema. Estes estados simples são designados por estados de equilíbrio e são, por definição, estados estacionários. Assim, podemos afirmar que um sistema está num estado de equilíbrio se não ocorrerem variações das suas propriedades na ausência de estímulos exteriores. Os estados de equilíbrio são o principal foco de estudo da Termodinâmica.

Podem distinguir-se vários tipos de equilíbrio. Vimos no estudo da Mecânica que um sistema estará em *equilíbrio mecânico* se houver equilíbrio entre as forças que sobre ele actuam. Diz-se que um sistema está em *equilíbrio químico* quando todas as reacções químicas no sistema se completarem ou atingirem o correspondente ponto de equilíbrio, de tal modo que nenhuma variação estequiométrica, isto é, da composição, possa ser macroscopicamente medida no sistema. Um sistema em que coexistem duas ou mais fases (por exemplo líquido e gás) estará em *equilíbrio de fases* se não ocorrer espontaneamente transferência de massa entre as fases. Um sistema está em *equilíbrio térmico* se a temperatura for a mesma em qualquer ponto do sistema. O equilíbrio térmico é particularmente importante no estudo que se segue.

9.4. Temperatura e equilíbrio térmico: lei zero da Termodinâmica

O conceito de “temperatura” tem que ver com as nossas sensações de “quente” ou “frio”, que são vagas e subjectivas. Veremos mais adiante que a temperatura de um material está relacionada com a energia cinética das partículas (átomos, moléculas, iões) que o constituem. No entanto, é possível definir temperatura sem recurso a considerações microscópicas. É o que faremos aqui.

Para podermos utilizar a temperatura como medida de “frio” e “quente”, precisamos de definir uma escala de temperatura. Para o fazer, vamos socorrer-nos de uma propriedade mensurável de um sistema que dependa da sua “quentura” ou “friura”. Por exemplo:

- O comprimento de uma coluna de líquido (por exemplo, álcool ou mercúrio) num tubo estreito.
- A pressão de um gás num recipiente rígido.
- A resistência eléctrica de um condutor.

O valor de cada uma destas propriedades pode ser associado a um dado valor da temperatura, ou seja, os sistemas correspondentes podem ser utilizados com termómetros. O termómetro necessita, evidentemente, de ser calibrado – que se faça corresponder um dado valor da propriedade que está a ser medida a um valor da temperatura. Há inúmeras maneiras de fazer isto, as quais definem as diferentes escalas de temperatura.

A temperatura de um dado corpo mede-se colocando-o em contacto com o termómetro. Por exemplo, para medir a temperatura de um tacho de água quente, coloca-se o

termómetro, inicialmente à temperatura ambiente, dentro do tacho. À medida que a água quente e o termómetro interagem, o termómetro fica mais quente e a água um pouco mais fria: a temperatura marcada pelo termómetro começa por subir, até estabilizar num dado valor. Diz-se então que o sistema composto por “água + termómetro” está em equilíbrio térmico. Para que se estabeleça este equilíbrio, tem de haver troca de energia entre a água e o termómetro. Esta troca de energia faz-se sob a forma de *calor*. Calor é, portanto, energia em trânsito. Por abuso de linguagem, diz-se que há troca de calor entre a água e o termómetro.

Vamos agora estabelecer uma propriedade importante dos sistemas em equilíbrio térmico. Consideremos três sistemas, *A*, *B* e um termómetro, *C*, de modo que *A* pode trocar calor com *C* e *B* pode trocar calor com *C*, mas *A* não pode trocar calor com *B* (*A* e *B* estão separados por um isolador térmico, que no caso mais simples pode ser o ar). Passado algum tempo, tanto *A* como *B* estarão em equilíbrio térmico com *C*: o valor da temperatura registado pelo termómetro *C* não varia. Se, agora, retirarmos o isolador térmico que separa *A* e *B* e os deixarmos trocar calor, vemos que nada se altera em *A* ou em *B* – ou seja, que *A* e *B* estão em equilíbrio térmico um com o outro. Chegámos deste modo à *lei zero da Termodinâmica*, que passamos a enunciar:

Dois corpos em equilíbrio térmico com um terceiro estão em equilíbrio térmico entre si.

Um corolário desta lei é o seguinte: uma vez que o valor da temperatura registada pelo termómetro *C* também não se altera, conclui-se que *corpos em equilíbrio térmico uns com os outros têm todos a mesma temperatura*. É por esta razão que faz sentido usar um termómetro: na verdade, um termómetro mede a sua própria temperatura, mas, se estiver em equilíbrio térmico com um outro corpo qualquer, essa temperatura será a do corpo cuja temperatura queremos medir. Estamos, naturalmente, a admitir que a temperatura do corpo não se altera por estar em contacto com o termómetro.

Resulta daqui que podemos colocar corpos todos em equilíbrio térmico uns com os outros – logo, à mesma temperatura – se os pusermos contacto com um *banho térmico* ou *reservatório de temperatura*: um sistema suficientemente maior do que os outros corpos para que a sua temperatura não se altere, sejam quais forem as temperaturas iniciais dos corpos que com ele são colocados em contacto.

9.5. Termómetros e escalas de temperatura

Para transformar os dispositivos atrás referidos em termómetros úteis, é necessário calibrá-los, ou seja, fazer corresponder o valor da propriedade medida (comprimento da coluna de líquido, pressão, resistência, etc...) a um valor de temperatura. Esta escolha é arbitrária e leva às diferentes escalas de temperatura ditas *empíricas*.

Resumidamente, uma escala de temperatura define-se a partir de dois pontos fixos, aos quais se atribuem determinados valores da temperatura. Tomando como exemplo concreto um termómetro constituído por um tubo estreito com líquido, a escala dita de Celsius⁷³ é estabelecida da seguinte maneira (à pressão de 1 atm):

1. Mergulha-se o termómetro em gelo fundente. O comprimento da coluna de líquido corresponde ao valor 0 °C.
2. Mergulha-se o termómetro em água a ferver. O comprimento da coluna de líquido corresponde ao valor 100 °C.
3. Divide-se a diferença entre os comprimentos das colunas de líquido nos dois casos anteriores por 100: cada divisão desta escala é 1 grau Celsius (1 °C). É por esta razão que se diz uma escala *centígrada*.

Repare-se que se *definiu* uma temperatura de 0 °C como sendo a temperatura do gelo fundente, e de 100 °C como sendo a temperatura da água a ferver (ambas à pressão de 1 atm). É daqui que vem a arbitrariedade, uma vez que nada obriga a associar estes valores a estes estados físicos: por exemplo, a escala de Fahrenheit (°F) atribui ao ponto de fusão do gelo o valor 32 °F e ao ponto de ebulição da água o valor 212 °F. A tabela 9.1 resume algumas das principais escalas empíricas de temperatura. Note-se que os “tamanhos” dos graus nas diferentes escalas não são iguais: o “maior” é o grau Réaumur, o “menor” é o grau Fahrenheit.

Tabela 9.1. Principais escalas de temperatura empíricas.

Escala	Pontos fixos	Conversão para Celsius
Celsius (°C)	Fusão do gelo = 0 °C Ebulição da água = 100 °C	$[^{\circ}\text{C}] = [^{\circ}\text{C}]$
Fahrenheit (°F)	Fusão do gelo = 32 °F Ebulição da água = 212 °F	$[^{\circ}\text{C}] = \frac{5}{9}([^{\circ}\text{F}] - 32)$
Réaumur (°Ré)	Fusão do gelo = 0 °Ré Ebulição da água = 80 °Ré	$[^{\circ}\text{C}] = \frac{5}{4}[^{\circ}\text{Ré}]$

9.6. Termómetros de gás e a escala de Kelvin

As escalas de temperatura empíricas não são muito satisfatórias, uma vez que dependem das propriedades de uma substância específica (na maior parte dos casos a água). Idealmente, gostaríamos de definir uma escala de temperatura que não dependesse (ou dependesse o menos possível) das propriedades de alguma substância. Experimentalmente,

⁷³ A escala de temperatura Celsius é, possivelmente, a escala de temperatura centígrada mais utilizada em todo o mundo. Foi proposta pelo astrónomo sueco Anders Celsius (1701-1744).

verifica-se que a pressão dos gases a volume constante (contido num recipiente rígido) e baixa densidade varia linearmente com a temperatura (seja qual for a escala em que a temperatura é medida), desde que a densidade do gás seja suficientemente baixa:

$$p = aT + b, \quad (9.1)$$

Desta expressão conclui-se que a pressão do gás (*quase qualquer gás*) se anularia a uma temperatura $T = -b/a$ – que é a mesma para todos os gases, desde que a sua densidade seja suficientemente baixa. Note-se que esta temperatura não é fisicamente atingível, uma vez que os gases se liquefazem ou solidificam antes de a mesma ser atingida – é obtida *apenas* por extrapolação das curvas experimentais.) Um gás nestas condições diz-se um *gás ideal*; o ar à temperatura e pressão normais (20 °C e 1 atm) é, aproximadamente, um gás ideal. Ou seja, o gás ideal tem um comportamento universal que nos permite definir uma nova escala de temperatura, essencialmente independente das propriedades de qualquer substância específica. Em graus Celsius, esta temperatura é -273.15 °C, a qual define o zero da *escala de temperatura absoluta*, ou *escala de Kelvin*: 0 K = -273.15 °C. Este é o *zero absoluto* de temperatura, cuja unidade é o kelvin (símbolo K), que faz parte do SI de unidades. Um só ponto, porém, não chega para definir uma escala de temperatura, uma vez que nos falta o “tamanho” do kelvin. Para tal, tomou-se como referência a pressão e temperatura do ponto triplo da água – no qual água pode existir simultaneamente nas fases sólida, líquida e gasosa. A temperatura do ponto triplo da água é 0.01 °C; arbitrou-se que este ponto tem, na nova escala de Kelvin, a temperatura de 273.16 K. Logo, 1 K tem o mesmo “tamanho” do que 1 °C: entre o zero absoluto e o ponto triplo da água há tantos kelvins (273.15) como graus Celsius. A relação entre as escalas de Kelvin e Celsius é, portanto,

$$[\text{K}] = [^\circ\text{C}] + 273.15, \quad (9.2)$$

Exemplo 9.1

A temperatura de um corpo humano saudável é cerca de 37 °C. Expressar esta temperatura em: a) graus Fahrenheit; b) kelvin.

Resolução:

a) As escalas de Celsius e Fahrenheit estão relacionadas linearmente: se for x a temperatura em °C e y a temperatura em °F, tem-se que $y = mx + b$. Ora sabe-se que 32 °F correspondem a 0 °C, e 212 °F a 100 °C, donde

$$\begin{cases} y(x=0) = 32 \\ y(x=100) = 212 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 32 \\ 100m + b = 212 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 32 \\ m = \frac{9}{5} \end{cases},$$

Logo, tem-se que $y = (9/5)x + 32$ e a temperatura do corpo humano em graus Fahrenheit é, portanto, $y(x = 37) = 98.6$ °F.

- b) Para passar de uma temperatura em graus Celsius a uma temperatura em kelvin basta somar-lhe 273.15. logo:

$$T = 37 + 273.15 = 310.15 \text{ K}$$

9.7. Dilatação térmica

As dimensões dos corpos variam com a temperatura, sendo que a maior parte se dilatam quando aquecidos, e contraem quando arrefecidos. Disto são exemplos os carris nas vias férreas, ou os tabuleiros das pontes, onde são deixados espaços para permitir a sua dilatação sem problemas.

Começemos por considerar a variação das dimensões lineares de um corpo, por exemplo, o comprimento de um carril de caminho de ferro. Se for L_0 o comprimento do carril a uma dada temperatura T_0 , então se a temperatura passar a ser T , o comprimento passará a ser $L_0 + \Delta L$, com

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T, \quad (9.3)$$

onde $\Delta T = T - T_0$ e α é o *coeficiente de dilatação linear* do material de que é feito o corpo, expresso no SI em K^{-1} . Este resultado é válido se a variação de temperatura ΔT não for muito grande, digamos menor que 100 K. Para a maior parte dos materiais tem-se $\alpha > 0$, ou seja, as dimensões lineares aumentam – o corpo expande-se – ao ser aquecido. A tabela 9.2 colige valores de α para alguns materiais correntes.

Tabela 9.2. Coeficientes de dilatação linear de alguns materiais.

Material	α (K^{-1})
Alumínio	2.4×10^{-5}
Cobre	1.7×10^{-5}
Aço	1.2×10^{-5}
Vidro	$0.4 - 0.9 \times 10^{-5}$
Quartzo	0.04×10^{-5}

Exemplo 9.2

Uma fita métrica de aço, cujo comprimento a 20°C é exactamente 50.000 m, é usada para fazer medições num dia em que a temperatura é 25°C . a) Calcular o comprimento da fita a 25°C . b) Se, nas condições da alínea a), se medir com a fita métrica um comprimento de 34.252 m, qual é o verdadeiro valor desse comprimento?

Resolução:

- a) A variação do comprimento da fita é dada por

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T = 1.2 \times 10^{-5} \times 50.000 \times (25 - 20) = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Donde se segue que o comprimento da fita métrica a 25 °C é

$$L = L_0 + \Delta L = 50.000 + 3 \times 10^{-3} = 50.003 \text{ m}$$

- b) Como vimos na alínea anterior, a 25 °C o comprimento da fita aumentou ligeiramente, o que significa que o tamanho das suas divisões aumentou na mesma proporção. Deste modo, os comprimentos medidos com esta fita vão estar subestimados por um factor igual ao factor de dilatação linear da fita. Logo, o verdadeiro comprimento vai ser

$$\frac{50.003}{50.000} \times 34.252 = 34.254 \text{ m}$$

Como resultado da variação das dimensões lineares dos corpos, o seu volume também se altera com a temperatura. Se o volume for V_0 a uma dada temperatura T_0 , então se a temperatura passar a ser T , o volume passará a ser $V_0 + \Delta V$, com

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T, \quad (9.4)$$

onde β é agora o *coeficiente de dilatação volúmica* do material de que é feito o corpo, expresso no SI em K^{-1} . Tal como antes, este resultado é válido se a variação de temperatura ΔT não for muito grande, digamos menor que 100 K.

Note-se que os coeficientes α e β de materiais sólidos estão relacionados. Considere-se um cubo de material, de lado L_0 e volume $V_0 = L_0^3$, que sofre uma variação de temperatura dT ; o seu volume vai variar da quantidade

$$dV = \left. \frac{dV}{dT} \right|_{V=V_0} dT = \left. \frac{dV}{dL} \right|_{V=V_0} \frac{dL}{dT} dT = 3L_0^2 dL = 3\alpha L_0^3 dT = 3\alpha V_0 dT, \quad (9.5)$$

donde se segue que $\beta = 3\alpha$. Em geral, os coeficientes de dilatação volúmica dos líquidos são maiores que os dos sólidos.

9.8. Mecanismos de transferência de calor

Quando se coloca um corpo A em contacto com um outro corpo B a temperatura mais alta (por exemplo, uma colher fria numa chávena de café quente) o corpo A aquece e o corpo B arrefece. O que causa estas variações de temperatura é essencialmente uma transferência de *energia* de um corpo para outro. Se esta transferência se dever exclusivamente à diferença de temperatura entre os dois corpos, diz-se que a energia é transferida sob a forma de *calor*. Note-se que o calor, assim definido, é energia em trânsito e não pertence a nenhum dos corpos, ao contrário da temperatura, que caracteriza um dado corpo. Podemos fazer variar a temperatura de um corpo retirando-lhe ou fornecendo-lhe energia sob a forma de calor. Diz-se, por abuso de linguagem, que podemos variar a temperatura de um corpo retirando-lhe ou fornecendo-lhe calor.

Existem três mecanismos de transferência de calor entre corpos: *condução*, *convecção* e *irradiação*, que passamos agora a estudar.

9.8.1. Condução

A condução de calor ocorre quando os dois corpos a temperaturas diferentes estão em contacto. Uma descrição microscópica simplificada da condução é a seguinte: as partículas (átomos, moléculas ou iões) que constituem o corpo mais quente têm maior energia cinética que as do corpo mais frio. Ao serem colocados em contacto os dois corpos, as partículas do corpo mais quente interagem com (atraem e repelem) as do corpo mais frio, transmitindo-lhes parte desta energia cinética. Se, além disso, os electrões dos átomos que constituem os corpos estiverem fracamente ligados aos núcleos (electrões “livres”), como é o caso nos metais, o calor também pode ser transmitido através do movimento desses electrões, razão pela qual os metais são bons condutores de calor (além de o serem de electricidade, pela mesma razão).

O fluxo de calor H (calor transferido por unidade de tempo) entre dois corpos A e B , às temperaturas T_A e T_B , respectivamente, com $T_A > T_B$, em contacto através de um terceiro corpo (*vide* figura 9.1), é dado pela *lei de Fourier*:

$$H = \frac{dQ}{dt} = kS \frac{T_A - T_B}{L}, \quad (9.6)$$

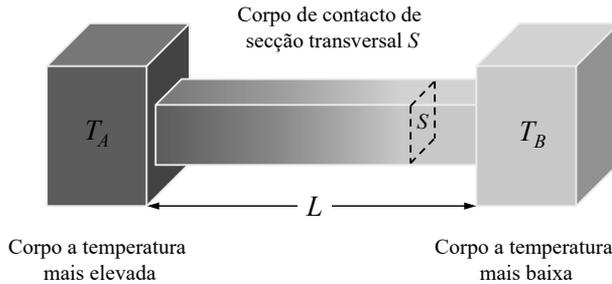


Figura 9.1. Transferência de calor por condução através de um corpo de contacto que liga os corpos A e B a temperaturas diferentes (supostas constantes): neste caso, $T_A > T_B$ e é transferido calor de A para B .

onde S é a área da secção transversal do corpo de contacto entre os dois corpos e L é o seu comprimento⁷⁴. A constante de proporcionalidade k mede a facilidade com que o calor transita de um corpo para o outro e diz-se a *condutividade térmica* do corpo de contacto. As unidades SI de H são $\text{J s}^{-1} = \text{W}$, logo as de k são $\text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$. Bons condutores de calor terão valores elevados da condutividade térmica. A tabela 9.3 colige as condutividades de alguns materiais.

⁷⁴ Repare-se que a lei de Fourier nesta forma só é válida se as temperaturas dos dois corpos em contacto permanecerem constantes, o que não é verdade em muitas situações práticas. O caso mais geral está fora do âmbito deste curso.

Tabela 9.3. Condutividades térmicas de alguns materiais.

Material	k ($\text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$)
Alumínio	205.0
Cobre	385.0
Prata	406.0
Betão	0.8
Cortiça	0.04
Gelo	1.6
Ar	0.024
Hidrogénio	0.14

9.8.2. Convecção

Convecção é a transferência de calor por intermédio de um fluido que circula entre os dois corpos a temperaturas diferentes (que podem inclusivamente ser duas outras porções do mesmo, ou de outro, fluido). Se a convecção for causada por diferenças de densidade devidas à expansão térmica do fluido, temos *convecção livre*, se for devida a um agente exterior, por exemplo uma bomba de água, a convecção diz-se *forçada*. Ao contrário do que sucede com a condução e irradiação, a convecção é um mecanismo de transferência de calor que envolve sempre transporte de matéria e, portanto, só ocorre em líquidos ou gases.

A convecção desempenha um papel extremamente importante tanto na natureza como em aplicações industriais. O tempo (meteorológico) é determinado, em grande medida, pela convecção livre na atmosfera. Tomemos como exemplo simples a formação da *brisa marítima* e da *brisa terrestre*. Nas regiões costeiras, durante o dia a terra aquece mais do que o mar (devido ao facto de o calor específico da água ser muito elevado), logo o ar junto ao solo está a temperatura mais alta do que o ar junto à superfície do mar. O ar mais quente é menos denso, por isso flutua no ar menos quente (portanto mais denso) à sua volta e sobe na atmosfera. Resulta daqui uma pressão atmosférica menor sobre a terra do que sobre o mar, o que leva a que sopra uma brisa do mar para a terra: a chamada brisa marítima. Durante a noite a situação inverte-se: a terra arrefece mais rapidamente do que o mar e a brisa terrestre sopra da terra para o mar.

Outros exemplos são a manutenção do balanço térmico global do planeta pela convecção nos oceanos, e da temperatura do corpo humano pela convecção forçada do sangue (em que a bomba é o coração). A convecção forçada é igualmente crucial em aparelhos como sistemas de aquecimento a água e motores de combustão interna.

A convecção é um fenómeno muito complexo e a sua modelação matemática é extremamente difícil., uma vez que depende de múltiplas variáveis como as propriedades térmicas e de escoamento do fluido, bem como a composição, temperatura e geometria dos corpos entre os quais é transferido calor. Um tratamento simples da convecção que escamoteia todas estas dificuldades consiste em considerar o fluxo de calor entre um

sólido de área S e um fluido que com ele se encontra em contacto. Verifica-se experimentalmente que

$$H = \frac{dQ}{dt} = C_c S (T_s - T_f), \quad (9.7)$$

onde T_s e T_f são, respectivamente, as temperaturas do sólido e do fluido (supostas constantes), e C_c é o *coeficiente de convecção*, que necessita de ser determinado, experimental ou numericamente, em cada caso de interesse. As unidades de C_c no SI são $\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2} \text{K}^{-1}$.

9.8.3. Irradiação

Irradiação é a transferência de calor entre corpos que não se encontram em contacto, sem necessidade de qualquer meio material interveniente, e devida à radiação electromagnética emitida pelos corpos. É graças à irradiação que nos chega o calor do Sol. Todos os corpos que se encontram a temperaturas acima do zero absoluto emitem (“irradiam”) radiação electromagnética, cuja composição depende da temperatura do emissor: à temperatura ambiente, a maior parte desta radiação é no domínio do infravermelho e, portanto, invisível⁷⁵. A resistência de uma torradeira, a cerca de $800\text{ }^\circ\text{C}$, já emite no vermelho, ao passo que a superfície do Sol, a cerca de $6000\text{ }^\circ\text{C}$, emite principalmente no amarelo. O fluxo de calor irradiado por um corpo de área superficial S à temperatura absoluta T (em kelvin!) é dado pela *lei de Stefan-Boltzmann*:

$$H = \frac{dQ}{dt} = eS\sigma T^4, \quad (9.8)$$

onde e é um parâmetro adimensional chamado emissividade ($0 < e < 1$), e σ é a *constante de Stefan-Boltzmann* cujo valor no SI é $5.670400 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. Note-se que o fluxo de calor irradiado aumenta com a quarta potência da temperatura absoluta do corpo irradiante, ou seja, cresce muito rapidamente com o aumento da temperatura.

Exemplo 9.3

Calcular a área do filamento de uma lâmpada de incandescência de 150 W , sabendo que a sua emissividade é 0.35 e que a sua temperatura de funcionamento é 2450 K , admitindo que toda a potência da lâmpada corresponde a radiação emitida.

Resolução:

Este problema trata de transferência de calor por irradiação. Utilizando a lei de Stefan-Boltzmann e identificando a potência da lâmpada com o fluxo de calor irradiado, tem-se

$$\begin{aligned} H = eS\sigma T^4 &\Rightarrow 150 = 0.35 \times S \times 5.670400 \times 10^{-8} \times 2450^4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow S &= 2.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 2.1 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

⁷⁵ É o caso, por exemplo, da maior parte da radiação emitida pela Terra, que tem uma temperatura média de cerca de $15\text{ }^\circ\text{C}$.

Um corpo cuja emissividade é igual a 1 diz-se um *emissor perfeito*. A lei de Stefan-Boltzmann afirma, então, que o fluxo de calor irradiado por um dado corpo é dada pela sua emissividade a multiplicar pelo fluxo de calor que seria irradiado por um emissor perfeito com a mesma área e à mesma temperatura – resultado este conhecido por *lei de Kirchhoff*.

Por conservação de energia, um emissor perfeito tem de ser também um receptor perfeito para que possa estar em equilíbrio a uma dada temperatura. Mais geralmente, qualquer corpo tem de ser igualmente bom emissor e receptor de energia electromagnética. O emissor/receptor perfeito é conhecido por *corpo negro* (por absorver toda a luz que nele incide). É por esta razão que pode ser desconfortável vestir roupas de cores escuras no verão: na ausência de vento, ou seja sem fenómenos de convecção associados: as roupas escuras absorvem grande parte da radiação que nelas incide e voltam a emitila em todas as direcções, sendo que aproximadamente metade desta emissão é dirigida ao nosso corpo, fazendo-nos “sentir calor”.

O corpo negro ocupa um lugar de destaque em Física, tendo estado na origem da Mecânica Quântica – a teoria que descreve o comportamento da matéria ao nível microscópico dos átomos e das moléculas. É possível deduzir a lei de Stefan-Boltzmann a partir da *lei de Planck da radiação do corpo negro*⁷⁶ e assim obter a constante de Stefan-Boltzmann em função das constantes fundamentais da natureza (*vide* Apêndice 1):

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}. \quad (9.9)$$

⁷⁶ Sobre a lei de Planck da radiação o do corpo negro *vide*, por exemplo, J. P. Casquilho e P. I. C. Teixeira, *Introdução à Física Estatística*, IST Press, Lisboa, 2011, p. 231.

PROBLEMAS

- 9.1. Imagine que coloca uma garrafa de refrigerante no frigorífico e que a sua temperatura baixa 10 K. Converta esta variação de temperatura:
- Para °C.
 - Para °F.
- 9.2. Dois copos de água, *A* e *B*, encontram-se inicialmente à mesma temperatura. Os copos são então aquecidos, de tal modo que a temperatura do copo *A* aumenta 10 °C e a temperatura do copo *B* aumenta 15 °F. Findo este processo, qual dos copos se encontra a temperatura absoluta mais elevada? Justifique.
- 9.3. A escala de Rankine é uma outra escala de temperatura absoluta: o zero absoluto corresponde a zero graus Rankine (0 °R). No entanto, ao contrário da escala de Kelvin, na qual um intervalo de um kelvin é igual a um intervalo de um grau Celsius, na escala de Rankine um intervalo de um grau Rankine é igual a um intervalo de um grau Fahrenheit. Determine a temperatura do ponto de fusão do gelo em graus Rankine.
- 9.4. Determine a temperatura do zero absoluto:
- Em °F.
 - Em °Re.
- 9.5. Determine a temperatura que é dada pelo mesmo valor numérico:
- Nas escalas de Celsius e de Fahrenheit.
 - Nas escalas de Celsius e de Réaumur.
 - Nas escalas de Kelvin e de Fahrenheit.
- 9.6. Um fio metálico tem comprimento 1.50 m a 20.0 °C. Quando o fio é aquecido a 420.0 °C, o seu comprimento aumenta 1.90 cm. Determine o coeficiente de dilatação linear do material de que é feito o fio.
- 9.7. Um rebite de alumínio utilizado na indústria aeronáutica destina-se a ser introduzido num orifício de diâmetro 4.500 mm. Para assegurar que o rebite não fica solto, o mesmo é produzido com um diâmetro superior ao do orifício e em seguida feito contrair mergulhando-o em dióxido de carbono sólido. Se o rebite entrar à justa no orifício à temperatura de -78 °C, qual deverá ser o seu diâmetro à temperatura de 20 °C? *Dado:* o coeficiente de dilatação linear do alumínio é $\alpha_{Al} = 2.4 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.
- 9.8. Enche-se completamente um recipiente de vidro, de 100 cm³ de capacidade, com mercúrio, à temperatura de 20 °C. Em seguida, eleva-se a temperatura do recipiente até 100 °C. Qual é o volume de mercúrio que vai extravasar do recipiente? *Dados:* o coeficiente de dilatação volúmica do mercúrio é $\beta_{Hg} = 18 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ e o coeficiente de dilatação volúmica do vidro é $\beta_{vid} = 1.2 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

- 9.9. Uma haste de aço com 50.0 cm de comprimento e secção recta circular liga um forno a 350 °C a um reservatório de água em ebulição (à pressão de 1 atm). Qual deverá ser o diâmetro da haste para que o fluxo de calor que a percorre seja 100 J/s? *Dado:* a condutividade térmica do aço é $k_{aço} = 50.2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.
- 9.10. Uma geleira de esferovite tem área total de 0.80 m² e paredes de espessura 2.0 cm. Se a geleira estiver cheia de gelo em fusão, qual será o fluxo de calor através das suas paredes num dia em que a temperatura exterior é 25 °C? *Dado:* a condutividade térmica da esferovite é $k_{esf} = 0.010 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.
- 9.11. A parede exterior de uma casa é composta por uma placa de espuma de poliuretano (lado de dentro) de espessura 2.5 cm, colada a uma placa de madeira (lado de fora) de espessura 3.0 cm. Se o interior da casa estiver a 20 °C e o exterior a -10 °C, determine:
- A temperatura no plano de junção entre as duas placas que constituem a parede.
 - O fluxo de calor, por unidade de área, através da parede.
- Dados:* a condutividade térmica da madeira é $k_{mad} = 0.080 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ e a condutividade térmica da espuma de poliuretano é $k_{pol} = 0.028 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.
- 9.12. Uma placa fina de metal tem uma superfície exposta à luz solar, que a aquece até uma temperatura de 60 °C. Determine o fluxo de calor, por unidade de área, da placa para o meio ambiente, que se encontra a 20 °C:
- Por convecção.
 - Por irradiação.
- Dados:* a emissividade da placa é $e = 0.5$ e o coeficiente de convecção entre essa superfície e o ar é $C_c = 50 \text{ W}^{-1} \text{ °C}^{-1}$.
- 9.13. Sabendo que a área total de um ser humano médio é 1.20 m², calcule a potência irradiada por um corpo humano com temperatura superficial de 30 °C. Compare com a potência que o mesmo ser humano recebe do ambiente, igualmente por irradiação, se a temperatura ambiente for 10 °C. Tome para a emissividade, tanto do ser humano como do ar, o valor $e = 1$.
- 9.14. Sabendo que o Sol irradia calor à taxa de $3.828 \times 10^{26} \text{ W}$ e que a temperatura à sua superfície é 5800 K, estime o raio desta estrela. Tome para a emissividade do Sol o valor $e = 1$.

CAPÍTULO 10

EQUAÇÕES DE ESTADO E PROPRIEDADES TÉRMICAS DA MATÉRIA

As propriedades térmicas da matéria descrevem o modo como os sistemas reagem a trocas de energia. Podemos estudá-las ao nível *macroscópico* – de que modo estão relacionadas as propriedades de larga escala da matéria, como o volume, a pressão e a temperatura – ou ao nível *microscópico* – quais são as velocidades, momentos lineares e energias cinéticas das partículas que constituem a matéria. Reveste-se de especial interesse relacionar as duas descrições, macroscópica e microscópica; por exemplo, como é que movimentos moleculares desordenados dão origem à pressão ou à variação de volume de um corpo ao ser aquecido? Tudo isto começaremos a estudar no presente capítulo.

10.1. Variáveis de estado e equações de estado

Como anteriormente se referiu, o estado termodinâmico de uma determinado sistema é descrito quantitativamente pelo conjunto dos valores das suas propriedades, como são, por exemplo, o seu volume, pressão, temperatura, composição e quantidade total de matéria que o constitui. Chama-se a estas grandezas macroscópicas *variáveis de estado*.

Vale a pena definir mais cuidadosamente algumas variáveis de estado frequentemente utilizadas. No capítulo anterior, encontrámos a *temperatura*, que é essencialmente uma medida de se dois sistemas estão, ou não, em equilíbrio térmico; se o estiverem, as suas temperaturas são iguais e não haverá transferência de calor de um para o outro se os dois forem colocados em contacto. Veremos adiante qual o significado microscópico da temperatura.

O *volume* de um sistema, V , é o espaço por ele ocupado. No caso de um gás, será o volume do recipiente que o contém.

A *pressão* de um sistema, p , é o valor da força por ele exercida sobre outro sistema, na direcção perpendicular à da superfície de contacto entre os dois sistemas, dividida pela área dessa superfície de contacto. Por exemplo, no caso de um balão cheio de gás, a pressão do gás no balão será igual ao valor da força que o gás exerce sobre o balão (e o faz ficar esticado) a dividir pela área do balão. A pressão é uma grandeza escalar com dimensões de força por unidade de área: no SI a sua unidade é o pascal (Pa): $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$. É, porém, comum utilizar outras unidades de pressão, como sejam a atmosfera (atm), o

milímetro de mercúrio (mmHg) ou o bar. Os factores de conversão entre as unidades de pressão referidas encontram-se listados na tabela 10.1. A pressão está para o equilíbrio mecânico como a temperatura está para o equilíbrio térmico: dois sistemas à mesma pressão, colocados em contacto, realizam trabalho total nulo um sobre o outro.

Tabela 10.1. Factores de conversão entre algumas unidades de pressão.

Pressão	Pa	atm	mmHg	bar
1 Pa	1	9.869×10^{-6}	7.501×10^{-3}	10^{-5}
1 atm	101325	1	760	1.0132
1 mm Hg	133.32	1.316×10^{-3}	1	1.333×10^{-3}
1 bar	10^5	0.98692	750.064	1

A *quantidade de matéria* de um sistema, n , é dada pelo número de moles de partículas (átomos, moléculas ou iões) que o constituem. Recorde-se que 1 mole de partículas contém um número de partículas igual ao número de Avogadro, $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. A relação entre o número de partículas de um sistema, N , e número de moles de partículas que o constituem é $n = N / N_A$.

A *massa molar* de uma substância, M , é a massa de uma mole de partículas que constituem a substância. Verifica-se, portanto, $M = m N_A$ com m a massa de uma partícula da substância.

Note-se que os valores das variáveis de estado de um dado sistema não são todos independentes entre si. Por exemplo, se aumentarmos a temperatura de uma garrafa de oxigénio a sua pressão também aumentará. O número necessário e suficiente de variáveis de estado independentes para caracterizar o estado termodinâmico de um sistema depende da complexidade do sistema, mas é em geral muito reduzido. O número de variáveis de estado independentes que permitem descrever completamente o estado termodinâmico de um sistema é determinado pela *regra das fases de Gibbs*,

$$v = c + 2 - f, \quad (10.1)$$

onde v representa o número de variáveis de estado independentes, c o número de constituintes ou espécies químicas distintas que formam o sistema e f o número de fases presentes. No caso de um sistema simples constituído por um gás puro e homogéneo o número de variáveis de estado independentes é, pela regra das fases de Gibbs, apenas duas. Podemos escolher neste caso, por exemplo, a pressão e a temperatura como variáveis de estado independentes e considerar o volume, bem como todas as restantes grandezas termodinâmicas, funções da pressão e da temperatura. Naturalmente que a escolha das duas variáveis de estado independentes para o estudo deste sistema simples poderia ter sido outra. Por exemplo, a temperatura e o volume.

Uma relação funcional entre as variáveis de estado de um determinado material diz-se a *equação de estado* do material. As equações de estado podem ser determinadas empiricamente, isto é, a partir de medições experimentais das variáveis de

estado, ou então deduzidas matematicamente a partir de modelos microscópicos desse material.

10.1.1. Equação de estado dos gases ideais

Talvez a equação de estado mais simples de todas seja a chamada equação de estado dos gases ideais, que foi descoberta a partir de medições efectuadas sobre gases a baixas densidades. Baseia-se nos seguintes factos experimentais:

- i. Se mantivermos constantes a pressão e a temperatura de um gás (por exemplo, encerrando uma determinada massa de gás num cilindro em contacto com um reservatório de temperatura), então o volume do gás é directamente proporcional ao número n de moles de moléculas (logo ao número N de moléculas) presentes no gás (*lei de Avogadro*):

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (10.2)$$

- ii. Se mantivermos a temperatura e o número de moles de moléculas do gás constantes, o volume do gás é inversamente proporcional à sua pressão (*lei de Boyle*):

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow p_1 V_1 = p_2 V_2. \quad (10.3)$$

- iii. Se mantivermos a pressão e o número de moles de moléculas do gás constantes, o volume do gás é directamente proporcional à sua temperatura absoluta (*lei de Charles-Gay Lussac*):

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (10.4)$$

- iv. Se mantivermos o volume e o número de moles de moléculas do gás constantes, a pressão do gás é directamente proporcional à sua temperatura absoluta (*lei de Amontons*):

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (10.5)$$

Estes quatro resultados podem ser resumidos na relação seguinte:

$$pV = nRT, \quad (10.6)$$

com R a chamada *constante dos gases ideais* cujo valor no SI é $R = 8.3144626 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. A equação (10.6) é conhecida por *equação de estado dos gases ideais*. Define-se operacionalmente um gás ideal (por vezes chamado *gás perfeito*) como um gás que satisfaz esta equação. A baixas pressões e temperaturas elevadas (muito acima do ponto de condensação), todos os gases se comportam, pelo menos aproximadamente, como gases ideais.

Exemplo 10.1

Considere um recipiente cheio de nitrogénio nas chamadas *condições de temperatura e pressão normais* (0 °C e 1 atm). Nestas condições, o nitrogénio comporta-se como um gás ideal. Determinar: a) o volume do recipiente para que contenha exactamente uma mole de moléculas de nitrogénio; b) A pressão do nitrogénio, se a sua temperatura se elevar para 40 °C; c) A massa volúmica do nitrogénio, em g cm⁻³, nas condições da alínea b). *Dado:* $M_{N_2} = 28.0 \text{ g mol}^{-1}$.

Resolução:

- a) Da equação de estado dos gases ideais vem (não esquecendo de converter a temperatura de °C para K e a pressão de atm para Pa):

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{1 \times 8.314472 \times 273.15}{1.013 \times 10^5} = 2.24 \times 10^{-2} \text{ m}^3.$$

- b) Utilizando o resultado da alínea anterior, tem-se (mais uma vez, não esquecendo de converter a temperatura de °C para K)

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{1 \times 8.314472 \times 313.15}{2.24 \times 10^{-2}} = 1.161 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

- c) No volume $V = 2.24 \times 10^{-2} \text{ m}^3 = 2.24 \times 10^4 \text{ cm}^3$ existe uma mole de moléculas de gás, com massa 28.0 g. Logo a massa volúmica do nitrogénio é

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{28.0}{2.24 \times 10^4} = 1.25 \times 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}.$$

10.1.2. Equação de estado de Van der Waals

A equação de estado do gás ideal pode ser deduzida de um modelo microscópico muito simples no qual se supõe que as partículas constituintes do gás são pontuais e não interagem entre si. Como vimos, esta equação descreve razoavelmente bem o comportamento dos gases e suas misturas a baixas densidades e/ou altas temperaturas (por exemplo, o ar à temperatura e pressão ambientes). Esta equação prevê, porém, que, se se aumentar indefinidamente a pressão a que está sujeito um gás, o seu volume diminuirá também indefinidamente, o que, claro está, não é realista, uma vez que as moléculas constituintes dos gases reais ocupam volume – não são pontuais. Seja então V_{min} o volume total ocupado pelas n moles de moléculas de um gás contido no volume V . Claramente este volume vai ser directamente proporcional ao número de moles, i.e., $V_{min} \propto n$. Se for b a constante de proporcionalidade, o volume acessível é, portanto, $V - V_{min} = V - nb$, e é este volume que deve substituir V na equação de estado. Por outro lado, as forças atractivas entre as moléculas levam a uma diminuição Δp da pressão que o gás exerce sobre as paredes do recipiente, diminuição esta devida ao menor momento linear de cada molécula e ao menor número de colisões das moléculas com as paredes. Se supusermos que cada uma destas contribuições é proporcional à densidade, virá que $\Delta p \propto (N/V)^2$. Tomando a constante de

proporcionalidade como sendo a/N_A^2 , tem-se $\Delta p = (a/N_A^2)(N/V)^2 = an^2/V^2$. Subtraindo Δp a p , obtém-se a *equação de estado de Van der Waals*:

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2} \quad \text{ou} \quad \left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT, \quad (10.7)$$

onde as constantes a e b são características de cada gás⁷⁷.

Se agora traçarmos as isotérmicas de Van der Waals, ou seja, o gráfico de p em função de V desta equação a uma série de temperaturas T (*vide* figura 10.1), verificaremos que, a altas temperaturas, estas são semelhantes às da equação do gás ideal. Existe, porém, uma temperatura T_c – dita *temperatura crítica* – abaixo da qual a curva $p(V)$ tem um ponto de inflexão. A temperaturas inferiores a T_c , a variação de p com V deixa de ser monótona decrescente – passa a existir um intervalo de V em que p aumenta com o aumento de V – ou seja, em que a compressibilidade do gás (grandeza esta definida adiante) é negativa. Este intervalo interpreta-se como correspondendo à região de coexistência de uma fase gasosa (com V maior, logo densidade mais baixa) e uma fase líquida (com V menor, logo densidade mais elevada).

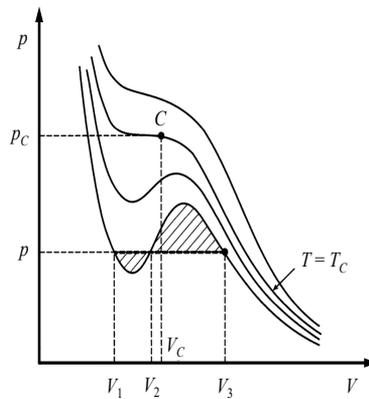


Figura 10.1. Isotérmicas de um gás de Van der Waals. Abaixo da temperatura crítica T_c as isotérmicas apresentam uma inversão de declive que não é física, uma vez que corresponde a uma compressibilidade negativa.

A equação de estado de Van der Waals pode ser deduzida rigorosamente pelos métodos da Física Estatística. A dedução é muito simples se admitirmos que as moléculas do gás se repelem, a curtas distâncias, como se fossem esferas rígidas (potencial repulsivo isotrópico e infinitamente íngreme), e que cada partícula se comporta como se sujeita a um potencial atractivo presente em todo o espaço e devido a todas as outras moléculas (aproximação de campo médio).

A equação de estado de Van der Waals não descreve quantitativamente bem a condensação dos gases reais. O seu mérito está em esclarecer o mecanismo qualitativo do

⁷⁷ A equação (10.7) com $a = 0$, ou seja incorporando apenas as repulsões entre moléculas, é conhecida por *equação de estado de Clausius*.

fenómeno da condensação, ao colocar em evidência os diferentes papéis desempenhados por repulsões e atrações entre moléculas. No raciocínio utilizado, está implícita a suposição de que o alcance das atrações é muito maior do que o das repulsões, o que é verdade na maior parte dos sistemas atômicos e moleculares (com a possível exceção do buckminsterfullereno).

Gráficos da pressão de uma substância em função do seu volume a temperatura constante, como os que constam da figura, constituem um *diagrama p-V*. Como veremos adiante, estes diagramas são particularmente úteis em Termodinâmica. A área compreendida entre uma qualquer curva num diagrama *p-V* (mesmo que não seja uma curva isotérmica) e o eixo horizontal, para um dado intervalo de volumes, representa o trabalho realizado pelo sistema durante a variação de volume correspondente.

10.2. Propriedades moleculares da matéria

A matéria é constituída por partículas (átomos ou moléculas) que interagem entre si (*vide* figura 10.2). A muito curtas distâncias, esta interacção é repulsiva e impede que duas partículas se sobreponham. A longas distâncias, a interacção é atractiva e de origem electrostática – deve-se a forças entre dipolos permanentes e/ou induzidos. O sólido é a fase estável a baixas temperaturas e densidades elevadas: o potencial de interacção tem um mínimo para uma distância bem definida entre duas partículas, logo a energia potencial total será mínima se as partículas estiverem dispostas num arranjo espacial periódico, perfeitamente regular – o sólido ideal. Como esta distância preferencial é da ordem das dimensões das partículas, tem-se que o sólido é uma fase de alta densidade. De modo análogo se conclui que o gás é a fase estável a altas temperaturas e baixas densidades, às quais a energia de interacção entre partículas é desprezável e a agitação térmica é máxima.

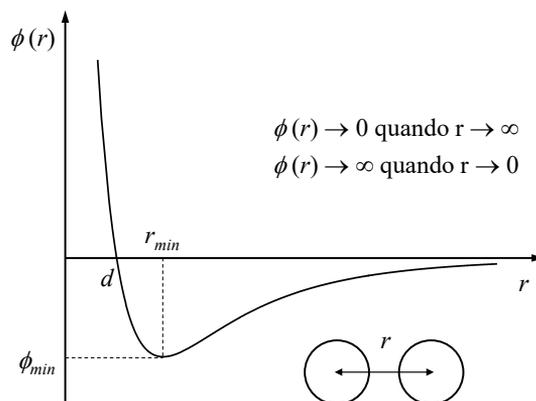


Figura 10.2. Forma genérica da energia potencial de interacção $\phi(r)$ entre partículas constituintes da matéria. A energia potencial é positiva para distâncias curtas ($r < d$) e negativa para distâncias superiores, tendendo para zero quando $r \rightarrow \infty$. Tem um valor mínimo, ϕ_{min} , quando a distância entre duas partículas é $r = r_{min}$. A força de interacção é igual ao simétrico do gradiente da energia potencial, $\vec{F}(r) = -\nabla\phi(r)$, logo é uma força repulsiva para $r < r_{min}$ e atractiva para $r > r_{min}$.

E quanto ao líquido? Claramente, trata-se de uma fase intermédia entre o sólido e o gás, na qual a energia interna⁷⁸ e a agitação térmica têm pesos comparáveis. Ou seja, o líquido resulta de um equilíbrio delicado entre o “carácter sólido” e o “carácter gasoso”, o que explica as suas singularidade e raridade: os líquidos são compactos (como os sólidos), mas desordenados (como os gases).

10.3. Modelo cinético-molecular de um gás ideal

A finalidade de qualquer teoria molecular é deduzir as propriedades macroscópicas da matéria a partir da sua estrutura atómica ou molecular. Isto é muito útil porque nos permite não só compreender o que já existe, como conceber novas substâncias com comportamentos desejáveis, sem ter de ir por tentativa e erro.

Na prática, uma teoria aplica-se sempre a um determinado modelo do material que pretendemos estudar. Um modelo é uma idealização – uma “caricatura” da realidade que preserva o que cremos serem as características essenciais do sistema sob estudo, mas deixando de fora complicações supérfluas. Claro que saber, em cada situação, o que é “essencial” e o que é “supérfluo” não é fácil, pelo que a construção de modelos com êxito não é tarefa simples...

Começemos com o modelo mais simples de todos, o gás ideal, que passamos a descrever em mais pormenor. Seja então um recipiente de volume V contendo N moléculas de gás ideal, cada uma com massa m .

1. As moléculas são supostas pontuais: as suas dimensões são muito mais pequenas do que as dimensões lineares do recipiente e do que a distância média entre moléculas.
2. As moléculas estão em movimento permanente devido à agitação térmica, movimento este governado pelas leis de Newton. Ocasionalmente, colidem com as paredes do recipiente: estas colisões são sempre elásticas.
3. As paredes do recipiente são perfeitamente rígidas e inamovíveis, tendo massa infinita (na prática, muito maior do que a soma das massas das moléculas do gás).

Da suposição 2 resulta que, quando uma molécula colide com a parede, as componentes da sua velocidade paralelas à parede mantêm-se inalteradas, e apenas a componente perpendicular à parede muda de sinal, mas não de valor. Consideremos, então, uma parede situada no plano Oyz e uma molécula que dela se aproxima vinda do lado positivo do eixo Ox : ao dar-se a colisão, v_y e v_z mantêm-se inalteradas e $-|v_x| \rightarrow |v_x|$. Então, nesta colisão, o valor da componente x do momento linear da molécula sofre uma va-

⁷⁸ Energia associada às interacções entre as partículas constituinte da matéria. Será definida mais rigorosamente no capítulo 11.

riação $\Delta p_x = m |v_x| - (-m |v_x|) = 2 m |v_x|$. Desprezando a força gravítica, esta variação do valor do momento linear vai ser igual ao valor do impulso sofrido pela molécula. Se for F o valor da força exercida pela parede sobre a molécula durante um intervalo de tempo dt durante o qual se dá uma colisão, ter-se-á que

$$Fdt = 2m|v_x|. \quad (10.8)$$

Note-se que, pela terceira lei de Newton, F é igualmente a intensidade da força exercida pela molécula ao colidir com a parede. O valor do impulso total exercido pelo gás sobre a parede do recipiente no intervalo de tempo dt será, então, a soma dos impulsos comunicados à parede por todas as moléculas do gás que com ela colidem nesse intervalo de tempo. Supondo, para simplificar, que todas as moléculas têm a mesma componente da velocidade, v_x , então só poderão colidir com a parede no intervalo de tempo dt as moléculas situadas numa camada de espessura $|v_x| dt$ situada junto à parede. Destas, poderão colidir com uma área S da parede todas as que se encontrarem, no início do intervalo dt , num volume $S |v_x| dt$ junto à parede (*vide* figura 10.3).

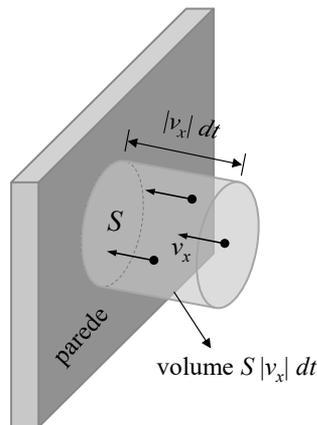


Figura 10.3. Para que uma molécula com componente v_x da sua velocidade perpendicularmente à parede colida com uma região da parede, de área S , num intervalo de tempo dt , tem de, no início do intervalo de tempo dt estar contida num volume $S |v_x| dt$ junto à parede.

Como o número de moléculas por unidade de volume (suposto uniforme no recipiente) é N/V , o número de moléculas no volume $S |v_x| dt$ é $(N/V) S |v_x| dt$, mas destas só cerca de metade atingem a parede, porque, de todas as moléculas contidas neste volume, cerca de metade aproximam-se da parede e cerca de metade afastam-se. Assim sendo, o impulso total transmitido à parede pelas colisões moleculares, no intervalo de tempo dt , é (em valor absoluto)

$$F_{total} dt = \frac{1}{2} \times \frac{N}{V} S |v_x| dt \times 2m |v_x| \Leftrightarrow F_{total} = \frac{NSmv_x^2}{V}. \quad (10.9)$$

A força por unidade de área, ou seja, a pressão exercida pelo gás na parede do recipiente, virá então

$$p = \frac{F_{total}}{S} = \frac{Nm v_x^2}{V}. \quad (10.10)$$

Supusemos atrás que todas as moléculas que embatem na área S da parede têm a mesma componente v_x da velocidade perpendicular à parede. Obviamente isto não é verdade, por isso devemos substituir v_x^2 pelo seu valor médio $\langle v_x^2 \rangle$. Finalmente, notemos que

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow \langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle \approx 3 \langle v_x^2 \rangle. \quad (10.11)$$

onde a última igualdade (aproximada) resulta de não haver direcções preferenciais de movimento. Juntando tudo isto, obtém-se, finalmente, que

$$p = \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{3V} \Leftrightarrow pV = \frac{1}{3} Nm \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} N \left(\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \right) = \frac{2}{3} K_{trans}, \quad (10.12)$$

onde K_{trans} é a energia cinética média de translação de todas as moléculas que constituem o gás. Comparando este resultado com a equação dos gases ideais, vem que

$$K_{trans} = \frac{3}{2} nRT. \quad (10.13)$$

Ou seja, a energia cinética média de translação de n moles de moléculas de um gás ideal é directamente proporcional à sua temperatura absoluta. Por outras palavras, a temperatura de um gás ideal está relacionada com a (é directamente proporcional à) energia cinética das moléculas do gás. A energia cinética média de translação por molécula é, então,

$$\frac{K_{trans}}{nN_A} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} k_B T = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle, \quad (10.14)$$

a qual depende apenas da temperatura, e não do volume ou do número de moléculas presentes, ou até da massa das moléculas. $k_B = R/N_A$ é a chamada *constante de Boltzmann* cujo valor no SI é $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$, constante esta que nos permite escrever a equação dos gases ideais na forma alternativa:

$$pV = nRT = \frac{N}{N_A} k_B N_A T = N k_B T. \quad (10.15)$$

Finalmente, podemos utilizar o resultado acima para definir uma *velocidade eficaz* ou *velocidade quadrática média* das moléculas de um gás ideal:

$$\frac{3}{2} k_B T = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \Rightarrow v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \quad (10.16)$$

onde $M = m N_A$ é, recorde-se, a *massa molar* do gás. Vemos assim que, embora num gás ideal a energia cinética média das moléculas apenas dependa da temperatura, o mesmo já não se passa com a sua velocidade, a qual depende também da sua massa: partículas mais leves movem-se mais rapidamente, como seria de esperar.

Exemplo 10.2

Determinar a temperatura à qual a velocidade quadrática média das moléculas de oxigénio é igual à das moléculas de hidrogénio a 10°C . *Dados:* $M_{\text{O}_2} = 32.0 \text{ g mol}^{-1}$ e $M_{\text{H}_2} = 2.0 \text{ g mol}^{-1}$.

Resolução:

Supondo que o oxigénio e o hidrogénio se comportam como gases ideais e utilizando a expressão (10.16) para v_{rms} , tem-se

$$\begin{aligned} v_{rms}(\text{O}_2) &= v_{rms}(\text{H}_2) \Rightarrow \frac{RT_{\text{O}_2}}{M_{\text{O}_2}} = \frac{RT_{\text{H}_2}}{M_{\text{H}_2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow T_{\text{O}_2} &= \frac{M_{\text{O}_2}}{M_{\text{H}_2}} T_{\text{H}_2} = \frac{32.0}{2.0} \times 283.15 = 4530.4 \text{ K}. \end{aligned}$$

10.4. Calor específico

Verifica-se experimentalmente que a quantidade de calor Q necessária para elevar a temperatura de um corpo de uma temperatura inicial T_1 a uma temperatura final T_2 é aproximadamente proporcional à diferença de temperaturas, $\Delta T = T_2 - T_1$, e à massa do corpo, m . O que é natural: levar uma panela de água da temperatura ambiente até à temperatura de ebulição requer mais calor do que ferver apenas um copo de água. Tem-se, portanto, que

$$Q = cm\Delta T, \quad (10.17)$$

onde a constante de proporcionalidade

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \quad (10.18)$$

diz-se o *calor específico* da substância; é uma propriedade intensiva característica da substância de que é feito o corpo e da sua temperatura. O calor específico de uma substância define-se, então, como a quantidade de calor necessária para elevar em 1 K a temperatura de 1 kg dessa substância; as suas unidades no SI são, portanto, $\text{J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$. Como ilustração, refira-se que o calor específico da água é, aproximadamente, $4186 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$, o que corresponde a $1 \text{ cal g}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Na verdade, a definição de caloria é a quantidade de calor necessária para elevar em 1°C a temperatura de 1 g de água líquida. A tabela 10.2 colige os calores específicos de algumas substâncias correntes.

Tabela 10.2. Calores específicos de alguns materiais a 20 °C.

Material	Calor específico (J K ⁻¹ kg ⁻¹)
Alumínio	910
Cobre	390
Etanol	2428
Sal das cozinhas (NaCl)	879
Chumbo	130
Água líquida	4186

Por vezes é mais conveniente trabalhar com o número de moles de uma substância do que com a sua massa. Define-se, assim, o *calor específico molar* de uma substância, C , como a quantidade de calor necessária para elevar de 1 K a temperatura de uma mole dessa substância. A relação entre c e C é simples:

$$Q = cm\Delta T = Mc \frac{m}{M} \Delta T = M cn \Delta T = Cn \Delta T \Rightarrow C = Mc = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}. \quad (10.19)$$

No caso de gases, ou de outros sistemas que sofram variações substanciais de volume ao variar-se a sua temperatura, é importante distinguir entre os calores específicos a *volume constante* ou a *pressão constante*: a grandeza que é mantida constante é indicada por um índice. Os calores específicos por unidade de massa a volume e pressão constante são, portanto, designados por c_v e c_p , e os calores específicos molares a volume e pressão constante por C_v e C_p , respectivamente.

Consideremos agora um gás ideal a volume constante, de modo que não pode trocar trabalho⁷⁹ com o exterior. Seja dQ a quantidade infinitesimal de calor que é necessária fornecer ao gás para que a sua temperatura sofra uma variação infinitesimal de temperatura dT . Por definição de calor específico molar a volume constante, tem-se

$$dQ = C_v n dT. \quad (10.20)$$

Em consequência da variação de temperatura dT , a energia cinética média das suas moléculas sofrerá também uma variação infinitesimal

$$dK_{trans} = \frac{3}{2} n R dT. \quad (10.21)$$

⁷⁹ Definiremos “trabalho” no contexto da Termodinâmica de modo mais rigoroso no capítulo 11. Por ora, limitar-nos-emos a notar que um sistema como o que estamos a considerar, composto por um gás encerrado num recipiente, realiza trabalho sobre a sua vizinhança (ou a vizinhança realiza trabalho sobre o sistema) quando o seu volume varia.

Como se admitiu que o gás não troca trabalho com o exterior, ter-se-á forçosamente que verificar $dQ = dK_{trans}$. Deste modo, igualando as expressões (10.20) e (10.21), deduz-se que o calor específico molar de um gás ideal a volume constante é

$$C_V = \frac{3}{2}R = 12.47 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad (10.22)$$

ou seja, é o mesmo para todos os gases ideais. Esta previsão está em bom acordo com a experiência para gases monoatômicos, mas não para outros. Esta discrepância vem do facto de termos suposto que toda a energia cinética das moléculas do gás é de natureza translacional. Todavia, gases compostos por moléculas mais complexas têm igualmente energias cinéticas rotacional e vibracional, resultantes dos modos rotacionais e vibracionais internos da molécula, logo é necessária mais energia para produzir uma dada variação da sua temperatura e, portanto, os seus calores específicos molares são maiores do que os do gás ideal monoatômico. Por exemplo, pode mostrar-se que, para um gás ideal diatômico, se tem

$$C_V = \frac{5}{2}R = 20.78 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \quad (10.23)$$

Exemplo 10.3

Dois cubos metálicos, um de alumínio e um de ferro, encontram-se inicialmente à mesma temperatura. São então aquecidos, fornecendo-se uma quantidade de calor Q a cada um. Qual dos dois cubos ficará a uma temperatura mais elevada se tiverem: a) a mesma massa; b) o mesmo volume? *Dados:* $c_{Al} = 910 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$, $c_{Fe} = 470 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$, $\rho_{Al} = 2.7 \text{ g cm}^{-3}$ e $\rho_{Fe} = 7.8 \text{ g cm}^{-3}$.

Resolução:

- Se os dois cubos tiverem a mesma massa, então ΔT é maior para o ferro do que para o alumínio, uma vez que $c_{Al} > c_{Fe}$. Logo o cubo de ferro terá temperatura final mais elevada.
- Se os dois cubos tiverem o mesmo volume, então a massa do cubo de ferro é $\rho_{Fe} / \rho_{Al} = 7.87/2.70 = 2.9$ vezes superior à massa do cubo de alumínio. Logo, se designarmos por m a massa do cubo de alumínio, teremos que

$$\Delta T_{Al} = \frac{Q}{910m} > \Delta T_{Fe} = \frac{Q}{470 \times 2.9m}$$

e, portanto, a temperatura final do cubo de alumínio é mais elevada.

10.5.* Distribuição de Maxwell-Boltzmann

Como se disse atrás, as moléculas de um gás (ideal ou não) a uma dada temperatura não têm todas velocidades com o mesmo valor. Para descrever esta situação, introduzimos a

função de distribuição dos valores da velocidade, $f(v)$. O significado desta função é o seguinte: se tivermos uma amostra de N moléculas, então a fracção dessas N moléculas que têm velocidades de valor compreendido entre v e $v + dv$ é dada por

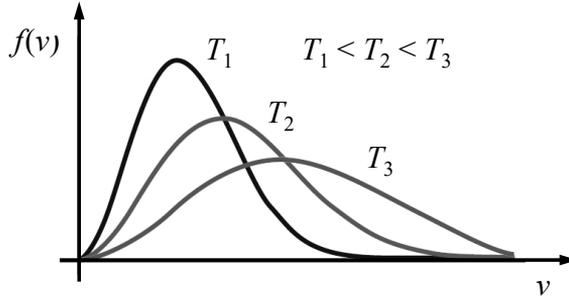


Figura 10.4. Distribuição de Maxwell-Boltzmann das velocidades das moléculas de um gás ideal, a três temperaturas diferentes. A baixas temperaturas, a distribuição tem um máximo muito pronunciado: a maior parte das moléculas tem velocidades próximas da velocidade mais provável. À medida que a temperatura aumenta, a velocidade mais provável aumenta, mas a altura do máximo diminui: a temperaturas elevadas, as moléculas têm muitas velocidades diferentes.

$$dN = N f(v) dv. \tag{10.24}$$

Por outras palavras, a probabilidade de que uma molécula tenha um valor da velocidade compreendido entre v e $v + dv$ é igual a $f(v) dv$. É possível mostrar, utilizando os métodos da Física Estatística, que $f(v)$ para um gás ideal é dada pela chamada *distribuição de Maxwell-Boltzmann* (vide figura 10.4):

$$f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B T} dv \tag{10.25}$$

Com base nesta função de distribuição, pode deduzir-se que a velocidade mais provável de uma partícula, a que corresponde o máximo da função de distribuição $f(v)$, é

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}. \tag{10.26}$$

Por outro lado, a velocidade média das partículas é

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_{mp} \tag{10.27}$$

e a velocidade quadrática média é

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v) dv} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_{mp}. \tag{10.28}$$

Esta última expressão corresponde ao resultado que obtivemos a partir da energia cinética de uma molécula.

PROBLEMAS

10.1. Uma garrafa de nitrogénio, com capacidade de 20.0 litros, contém 0.90 kg desse gás, à temperatura de 18 °C.

- Quantas moles de moléculas de nitrogénio contém a garrafa?
- Qual é a pressão do nitrogénio na garrafa?

Dado: a massa molar do nitrogénio é $M_{\text{N}_2} = 28.0 \text{ g mol}^{-1}$.

10.2. O hélio é um gás monoatômico, que a temperaturas não muito inferiores à temperatura ambiente se comporta como um gás ideal. Calcule:

- A energia cinética média de um átomo de hélio a 25 °C.
- A velocidade quadrática média de um átomo de hélio a 25 °C.
- O impulso que um átomo de hélio sofre ao colidir elasticamente com a parede do reservatório onde se encontra, à temperatura de 25 °C, supondo que o átomo de hélio incide perpendicularmente à parede.

Dado: a massa molar do hélio é $M_{\text{He}} = 4.0 \text{ g mol}^{-1}$.

10.3. Uma garrafa cheia de árgon encontra-se nas chamadas *condições de temperatura e pressão normais* (0 °C e 1 atm). Nestas condições, o árgon, cujas moléculas são monoatômicas, comporta-se como um gás ideal. Determine:

- O número de moles de árgon na garrafa, se a sua capacidade for 25 litros.
- A quantidade de calor necessária para elevar a temperatura do árgon até 60 °C.
- A pressão do árgon contido na garrafa, à temperatura de 60 °C.
- A massa volúmica do árgon nas condições da alínea c), em g cm^{-3} .

Dado: a massa molar do árgon é $M_{\text{Ar}} = 40.0 \text{ g mol}^{-1}$.

10.4. Determine a pressão de uma mole de dióxido de carbono (CO_2) contida num recipiente de volume 400 cm^3 à temperatura de 350 K, utilizando:

- A equação de estado dos gases ideais.
- A equação de estado de Van der Waals.

Dados: as constantes de Van der Waals do CO_2 são $a = 0.364 \text{ J m}^3 \text{ mol}^{-2}$ e $b = 4.27 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$

10.5. Considere um gás ideal monoatômico contido num recipiente. Inicialmente, a velocidade quadrática média das moléculas do gás é 200 m s^{-1} . Aumenta-se então a pressão e o volume do gás para o dobro dos seus valores iniciais, mantendo constante o número de moles de gás presentes. Qual passará a ser a velocidade quadrática média das moléculas do gás?

10.6. Duas moles de um gás ideal monoatômico à temperatura de 300 K estão encerradas num recipiente cúbico com aresta de comprimento 0.20 m.

- Qual é o valor da força que o gás exerce sobre uma face do cubo?
- Quanto tempo demora uma molécula a percorrer a distância entre duas faces opostas do cubo? Exprima o resultado em função da massa molar M .

- 10.7. Um corpo homogéneo de massa 200 g recebe uma quantidade de calor igual a 300 cal, em virtude do qual a sua temperatura se eleva de 20 °C para 70 °C. Determine o calor específico do corpo.
- 10.8. Considere dois cubos metálicos, um de alumínio e outro de cobre, ambos com massa 50 g. O cubo de alumínio está à temperatura ambiente, que admitimos ser 20 °C. O cubo de cobre é mergulhado em água em ebulição e fica à temperatura de 100 °C. Coloca-se então os dois cubos em contacto. Admitindo que, para intervalos de tempo relativamente curtos, os cubos apenas trocam calor entre si, determine a temperatura de equilíbrio que atingem. (*Nota:* é claro que, se esperar tempo suficiente, os cubos acabarão por atingir a temperatura ambiente. Este comentário aplica-se também aos dois problemas seguintes.)
- 10.9. Repita o problema anterior, mas para o caso em que a temperatura inicial do cubo de alumínio é 100 °C e a do cubo de cobre é 20 °C.
- 10.10. Considere o cubo de cobre a 100 °C do problema 10.8. Pretende-se arrefecê-lo mergulhando-o num recipiente com 0.5 kg de um certo líquido. Admitindo que, para intervalos de tempo relativamente curtos, só existem trocas de calor entre o cubo e o líquido, determine a temperatura de equilíbrio do sistema “cubo + líquido”, se o líquido for *i)* etanol, *ii)* água.
- 10.11. Determine a quantidade de calor necessária para aumentar em 20.0 K a temperatura de 3.5 moles de um gás ideal monoatômico, a volume constante.
- 10.12. Em condições de tempo muito frio, grande parte do calor perdido pelo corpo humano é despendido a aquecer o ar que respiramos. No que se segue, admita que o ar se comporta como um gás ideal, que a temperatura exterior é -20 °C e que a temperatura do corpo humano é 37 °C.
- Determine a quantidade de calor necessária para aquecer 0.5 l de ar (o volume de uma inspiração), inicialmente à temperatura exterior, até à temperatura do corpo humano.
 - Admitindo que o ar obedece à equação de estado dos gases ideais, qual passa a ser o volume de uma inspiração, uma vez aquecida até à temperatura do corpo humano, supondo que a pressão e o número de moléculas permanecem constantes?
 - Nas condições da alínea b), qual é a massa volúmica do ar?
 - Se se inspirar 20 vezes por minuto, qual será o consumo total de calor em 1 hora?
- Dados:* o calor específico do ar é $c_{ar} = 1020 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ e a massa volúmica do ar a -20 °C é $\rho_{ar} = 1.3 \text{ g dm}^{-3}$.
- 10.13. Imagine que dispõe de uma chaleira eléctrica para preparar o seu chá.
- Determine a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de um litro de água de 25 °C até 100 °C.

- b) Se a potência da chaleira for 750 W, quanto tempo demorará a água a aquecer, nas condições da alínea anterior?

Dados: o calor específico da água é $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4190 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ e a sua massa volúmica é $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

- 10.14.** Uma chávena de porcelana com massa 120 g encontra-se à temperatura de 20 °C. A chávena é então enchida com 200 cm³ de café à temperatura de 70 °C. Determine a temperatura do conjunto “chávena + café”, desprezando as trocas de calor entre o conjunto “chávena + café” e o meio ambiente, e supondo que a massa volúmica e o calor específico do café são iguais aos da água. *Dados:* o calor específico da água é $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4190 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ e a sua massa volúmica é $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; o calor específico da porcelana é $c_{\text{por}} = 1085 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

CAPÍTULO 11

PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

As leis da Termodinâmica governam as trocas de energia entre sistemas termodinâmicos. A sua validade muito geral e a sua independência da estrutura microscópica da matéria, tornam-nas extremamente poderosas e úteis na análise de muitos tipos de problemas, não só de Física fundamental como na Engenharia e até na Biologia. Neste capítulo ocupar-nos-emos da primeira lei Termodinâmica que, essencialmente, nos diz que a energia não pode ser criada nem destruída.

11.1. Processos termodinâmicos

Consideremos como exemplo de um sistema termodinâmico o milho de pipocas numa panela com tampa. Quando a panela é aquecida, é transmitida energia ao milho sob a forma de calor, por condução através das paredes da panela. À medida que os grãos de milho se expandem para formar pipocas, são violentamente propelidos em todas as direcções. Alguns deles embatem na tampa da panela, deslocando-a, ou seja, comunicam-lhe energia realizando trabalho sobre ela. Um processo como este, em que há alterações dos valores das variáveis de estado (pressão, temperatura, etc.) do sistema, diz-se um *processo termodinâmico*.

Os processos termodinâmicos podem ser *reversíveis* ou *irreversíveis*. Um processo reversível define-se como uma sequência de processos infinitesimais que resultam de variar muito pouco e lentamente os valores das variáveis de estado, e em que cada estado intermédio é um estado de equilíbrio. Processos termodinâmicos reversíveis são, portanto, processos quase-estáticos. Note-se que os processos reversíveis assim definidos são processos ideais mas dos quais alguns processos termodinâmicos reais se podem aproximar bastante bem. Todos os processos que não ocorram de forma quase-estática são processos irreversíveis. Uma classe particularmente importante de processos termodinâmicos são os chamados *processos cíclicos*, nos quais os estados inicial e final coincidem. Portanto, num processo cíclico, os valores das variáveis de estado de um sistema não sofrem alterações.

Um processo termodinâmico envolve normalmente trocas de energia entre o sistema e a vizinhança. Um sistema pode trocar energia com a vizinhança sob as formas de *calor*, Q , ou *trabalho*, W . Em Termodinâmica, trabalho é um modo de transferir energia que pode

ser descrito por um pequeno número de grandezas macroscópicas, por exemplo a pressão, o volume, a tensão e o comprimento. *Calor*, pelo contrário, é um modo de transferir energia que está associado à dinâmica dos constituintes microscópicos da matéria. Por outras palavras, calor é toda a energia em trânsito que não é trabalho.

Importa definir qual é o sinal destas trocas de energia. Adoptaremos a seguinte convenção, que se esquematiza na figura 11.1: se $Q > 0$, o sistema recebe calor da vizinhança (ou seja, flui energia da vizinhança para o sistema sob a forma de calor); se $W > 0$ o sistema realiza trabalho sobre a vizinhança (ou seja, flui energia do sistema para a vizinhança sob a forma de trabalho). Inversamente, se $Q < 0$, o sistema cede calor à vizinhança (ou seja, flui energia do sistema para a vizinhança sob a forma de calor); e se $W < 0$ é realizado trabalho sobre o sistema (ou seja, flui energia da vizinhança para o sistema sob a forma de trabalho).

Um sistema que não troca energia com a sua vizinhança diz-se um *sistema isolado*. Por outro lado, um sistema diz-se *fechado* se não trocar matéria com a sua vizinhança, caso contrário diz-se *aberto*.

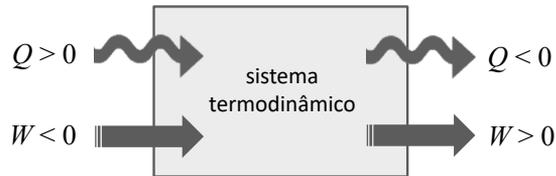


Figura 11.1. Convenção para os sinais da energia posta em jogo sob a forma de calor ou de trabalho num processo termodinâmico. O sentido das setas representa o sentido da troca de energia, i.e. da vizinhança para o sistema ou do sistema para a vizinhança.

11.2. Trabalho realizado em processos termodinâmicos

Consideremos, por simplicidade, um sistema termodinâmico constituído por um gás encerrado num cilindro munido de um êmbolo móvel, representado na figura 11.2⁸⁰. Este mecanismo pode encontrar-se, por exemplo, nos motores de combustão interna de muitos veículos automóveis ou em bombas de circulação de refrigerante em frigoríficos. Suponhamos que o êmbolo se desloca muito lentamente de uma distância dx (escolhemos o eixo Ox dirigido ao longo do eixo do cilindro, logo perpendicular ao êmbolo). Se for p a pressão do gás e S a área do êmbolo, a força exercida pelo gás sobre o êm-

⁸⁰ Este cálculo conduz ao chamado *trabalho hidrostático* ou *trabalho de fronteira móvel*, que está associado a variações de volume do sistema. É o tipo de trabalho de compreensão mais intuitiva e, historicamente, foi o primeiro a ser estudado. Além disso, está presente em muitos processos reais, nos quais não é possível eliminar variações de volume. Pode definir-se outros tipos de trabalho (por exemplo, o trabalho eléctrico, equação (6.9)) que não estão associados a variações de volume. Como veremos no capítulo 12, todos os trabalhos são equivalentes no sentido em que não são calor, pelo que nos restringimos aqui ao caso mais simples.

bolo terá valor $F = p S$. Logo, o trabalho infinitesimal realizado pelo sistema no deslocamento dx do êmbolo será,

$$dW = F dx = p S dx = p dV \quad (11.1)$$

onde V é o volume do gás. O trabalho total realizado quando o volume varia num processo quase-estático entre V_1 e V_2 virá, então,

$$W = \int_1^2 dW = \int_{V_1}^{V_2} p dV, \quad (11.2)$$

donde se conclui que o trabalho realizado neste processo é igual à área compreendida entre a curva $p = p(V)$ do sistema e o eixo dos V . Este trabalho vai ser positivo se realizado *pelo* sistema sobre a vizinhança, e negativo se realizado *sobre* o sistema pela vizinhança. Em geral, o trabalho realizado por ou sobre o sistema ao longo de um processo cíclico (isto é, em que o estado final é igual ao estado inicial) *não* é nulo.

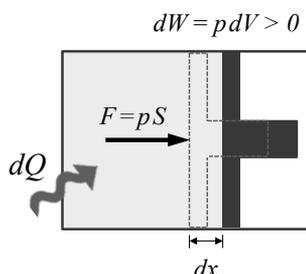


Figura 11.2. Esquema em corte de um sistema cilindro-êmbolo com secção recta de área S e que encerra um determinado gás à pressão p . Admitindo que o gás sofre um aquecimento, o êmbolo desloca-se de uma distância dx em resultado da força $F = p S$ exercida pelo gás sobre o êmbolo, pelo que o sistema realiza um trabalho infinitesimal $dW = F dx = p dV$ sobre a vizinhança (trabalho positivo). Caso o gás sofresse um arrefecimento, o êmbolo deslocar-se-ia em sentido contrário e o trabalho infinitesimal seria realizado pela vizinhança sobre o sistema (trabalho negativo).

Exemplo 11.1

Calcular o trabalho realizado durante a expansão isotérmica de: a) um gás ideal; b) um gás de Van der Waals.

Resolução:

a) Da equação de estado de um gás ideal tem-se $p = n R T / V$, de onde vem que

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Note-se que este resultado é independente das propriedades do gás: apenas depende da temperatura, do número de moles de gás presentes, e dos volumes inicial e final.

b) A equação de estado de um gás de Van der Waals é:

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2},$$

de onde vem que

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2} \right) dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V - nb} - an^2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} = \\ &= nRT \ln \frac{V_2 - nb}{V_1 - nb} + an^2 \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right). \end{aligned}$$

Note-se que, neste caso, o resultado obtido depende das propriedades do gás através das constantes a e b .

11.3. Primeira lei da Termodinâmica

Qualquer sistema é constituído por um ou mais tipos de matéria, a qual, por sua vez, é composta por átomos e moléculas. Os átomos e moléculas movem-se, devido à agitação térmica, e por isso possuem energia cinética. Por sua vez, esses mesmos átomos e moléculas também interagem (atraem-se e/ou repelem-se) mutuamente, logo possuem energia potencial de interacção. A soma das energias cinéticas e das energias potenciais de interacção de todos os átomos e moléculas que constituem um sistema chama-se a sua *energia interna*, U . Note-se que a energia interna não contém energias potenciais com origens exteriores ao sistema, como por exemplo a energia potencial gravítica, que é devida à interacção entre as partículas constituintes do sistema e a Terra. Como exemplo, considere-se um sistema constituído por duas esferas ligadas por uma mola, que é colocado inicialmente em movimento afastando as esferas de modo a distender a mola. A energia cinética das duas esferas, e a energia de deformação elástica da mola, devem-se exclusivamente a interacções entre os constituintes do sistema e contam para a sua energia interna; já a energia potencial gravítica do conjunto, devida ao facto de este se encontrar no campo gravítico terrestre, não conta, uma vez que se deve à interacção das esferas com a Terra, que é exterior ao sistema.

Sabemos que um sistema termodinâmico pode trocar energia com a sua vizinhança na forma de calor ou na forma de trabalho. Com as convenções de sinais atrás introduzidas, a variação de energia interna de um sistema termodinâmico é dada por

$$\Delta U = Q - W \Leftrightarrow Q = \Delta U + W, \quad (11.3)$$

relação esta que exprime a *primeira lei da Termodinâmica*.

A energia interna de um sistema é função exclusiva das suas variáveis de estado, ou seja, depende apenas do estado termodinâmico do sistema, e não do processo (caminho) pelo qual esse estado foi atingido. Diz-se, por isso, que a energia interna é uma *função de estado* do sistema. Um corolário importante é que, *num processo cíclico, a variação de energia interna é nula*, uma vez que os estados inicial e final são iguais.

Já o trabalho e o calor dependem, em geral, do caminho entre os estados inicial e final, sendo designados *funções de processo*. Este facto permite-nos reformular a primeira lei da Termodinâmica na forma do *princípio de equivalência entre calor e trabalho*. Sejam dois processos termodinâmicos que levam um sistema de um dado estado inicial a um dado estado final. O primeiro processo envolve a troca de calor Q_1 e trabalho W_1 entre o sistema e a sua vizinhança; o segundo processo envolve a troca de calor Q_2 e trabalho W_2 . Como os estados inicial e final são os mesmos em ambos os casos e a energia interna é uma função de estado, tem-se

$$\Delta U = Q_1 - W_1 = Q_2 - W_2 \Leftrightarrow Q_1 - Q_2 = W_1 - W_2, \quad (11.4)$$

Ou seja, uma diferença de calores é igual a uma diferença de trabalhos, logo calor e trabalho são equivalentes: calor pode transformar-se em trabalho e trabalho em calor. Veremos no capítulo 12 que estas transformações não são, no entanto, totalmente simétricas.

Exemplo 11.2

A sobremesa conhecida por *toucinho do céu* tem um conteúdo energético de cerca de 300 kcal/100 g. Imagine que, após consumir um destes doces, pretende perder as calorias assim adquiridas subindo escadas. Quantos andares terá de subir para o conseguir? *Dado:* 1 cal = 4.186 J.

Resolução:

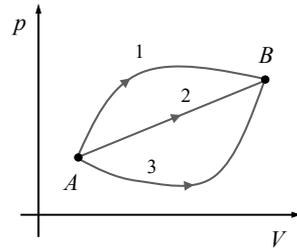
Consumir um toucinho do céu corresponde a um ganho de energia interna pelo seu corpo, sob a forma de calor. Subir escadas corresponde a um dispêndio (perda) de energia interna pelo seu corpo, sob a forma de trabalho. Para que a variação total da sua energia interna seja nula, o calor ganho tem de ser igual ao trabalho realizado, ou seja, $\Delta U = Q - W = 0 \Rightarrow W = Q$. Por sua vez, o trabalho realizado a subir escadas é o trabalho que tem de realizar para elevar o seu corpo até ao alto das escadas, ou seja, o trabalho que tem de realizar contra a força da gravidade, que o puxa para baixo. Logo, como vimos no capítulo 4, este trabalho vai ser igual à variação da energia potencial gravítica: $W = m g h$, onde m é a sua massa, g é a aceleração da gravidade, e h é a diferença entre as alturas a que se encontra antes e depois de subir as escadas. Segue-se, então, que, para um ser humano hipotético de 70 kg (não esquecer de converter as quilocalorias para joules):

$$Q = W = mgh \Rightarrow h = \frac{Q}{mg} = \frac{300 \times 10^3 \times 4.186}{70 \times 9.8} \approx 1831 \text{ m.}$$

Logo, um ser humano de 70 kg teria de subir 1831 m a pé para despender a energia adquirida ao consumir 100 g de toucinho do céu. Esta altura corresponde a mais de duas vezes a altura da torre Burj Khalifa no Dubai! Considerando que um andar de um edifício moderno corresponde a cerca de 3 m, isto significa que teria de subir a pé cerca de $1831/3 = 610$ andares. Uma alternativa menos cansativa seria pensar muito, durante um dia inteiro: o seu cérebro consome uma potência de cerca de 20 W, ou seja, aproximadamente 400 kcal/dia⁸¹.

Exemplo 11.3

Um sistema pode ser levado de um estado A para um estado B por três expansões quase-estáticas (caminhos) diferentes, 1, 2 e 3, representados no diagrama p - V da figura ao lado. a) Sobre qual dos caminhos é maior o trabalho realizado pelo sistema? E sobre qual dos caminhos é esse trabalho menor? b) Se $U_A < U_B$, sobre qual dos caminhos será maior o calor trocado entre o sistema e o ambiente?



c) Para o caminho indicado na alínea anterior, o sistema absorve ($Q > 0$) ou liberta ($Q < 0$) calor para o ambiente?

Resolução:

a) Sabe-se que o trabalho quase-estático realizado por um sistema termodinâmico é dado por

$$W = \int_{V_A}^{V_B} p dV .$$

Num diagrama p - V , este trabalho vai ser igual à área compreendida entre a curva $p = p(V)$ e o eixo horizontal (eixo dos V). Claramente, este integral é maior para o caminho 1 do que para os caminhos 2 ou 3.

b) Ao ir de A para B, o sistema realiza trabalho positivo, uma vez que $V_B > V_A$. Se $U_A < U_B$, vem que

$$\Delta U = U_B - U_A = Q - W > 0 .$$

Esta diferença é a mesma para todos os caminhos, porque só depende dos estados inicial e final (a energia interna é uma função de estado). Logo, o calor trocado entre o sistema e o ambiente é maior para o caminho 1 e é positivo.

c) Como se concluiu na alínea anterior, $Q > 0$, logo o sistema absorve calor do ambiente.

⁸¹ Note-se que resolvemos este exemplo admitindo que a ingestão do doce corresponde apenas a uma transferência de calor para a pessoa que o ingeriu, desprezando qualquer balanço de massas. Os processos reais de obtenção de energia a partir da ingestão de alimentos são muito mais complexos.

11.4. Principais tipos de processos termodinâmicos

Classificam-se a seguir os principais tipos de processos termodinâmicos com importância prática.

1. *Adiabático*. Num processo adiabático não há troca de calor entre o sistema e a sua vizinhança, logo $Q = 0$. Deste modo, neste tipo de processos a primeira lei da Termodinâmica escreve-se

$$\Delta U = -W. \quad (11.5)$$

Um exemplo de processo adiabático é a expansão do gás contido no cilindro que considerámos atrás, estando o cilindro envolvido por material isolador, de modo a não haver trocas de calor com o ambiente.

2. *Isocórico*. Um processo isocórico dá-se a *volume constante*, não havendo, portanto, realização de trabalho pelo ou sobre o sistema. Ter-se-á sempre $W = 0$, podendo o sistema trocar energia com a sua vizinhança apenas sob a forma de calor. A primeira lei da Termodinâmica neste tipo de processos escreve-se

$$\Delta U = Q. \quad (11.6)$$

Um exemplo de processo isocórico é o aquecimento de um gás contido numa garrafa rígida (desprezando a dilatação da garrafa): a pressão do gás aumenta com a temperatura.

3. *Isobárico*. Um processo isobárico dá-se a pressão constante. Em geral, $Q \neq 0$, $W \neq 0$ e $\Delta U \neq 0$, tendo-se que para um processo quase-estático

$$W = p(V_f - V_i). \quad (11.7)$$

onde V_i e V_f representam, respectivamente, os volumes inicial e final do sistema. Um exemplo de processo isobárico é o aquecimento de água num recipiente aberto num fogão: a pressão é a pressão atmosférica.

4. *Isotérmico*. Um processo isotérmico dá-se a *temperatura constante*. Qualquer transferência de calor para o sistema tem de ser compensada por trabalho realizado pelo sistema. Vice-versa, qualquer transferência de calor do sistema tem de ser compensada por trabalho realizado sobre o sistema. Um exemplo de processo isotérmico é a expansão do gás contido no cilindro que considerámos atrás (*vide* figura 11.2), estando o cilindro em contacto com um banho térmico (ou reservatório de calor), por exemplo um grande volume de água a uma determinada temperatura constante.

11.4.1. Aplicação da primeira lei da Termodinâmica a gases ideais

Um processo termodinâmico diz-se *infinitesimal* se resultar de alterações muito pequenas (variações infinitesimais) dos valores das variáveis de estado. Para um processo infinitesimal, a primeira lei da Termodinâmica escreve-se na forma⁸²

$$dU = dQ - dW \Leftrightarrow dQ = dU + dW . \quad (11.8)$$

No caso de um processo infinitesimal isocórico, a equação (11.8) escrever-se-á $dU = dQ$. Resulta então da equação (10.20) que

$$dU = C_V n dT . \quad (11.9)$$

É possível mostrar que a energia interna de um gás ideal depende apenas da temperatura, razão pela qual é legítimo aplicar a equação (11.9) a qualquer tipo de processo. Introduzindo as equações (11.1) e (11.9) na equação (11.8), obtém-se

$$dQ = C_V n dT + p dV . \quad (11.10)$$

Por outro lado, da equação de estado dos gases ideais, expressão (10.5), resulta

$$p dV + V dp = n R dT . \quad (11.11)$$

Utilizando a equação (11.11) para eliminar $p dV$ na equação (11.10), vem que

$$dQ = n(C_V + R) dT - V dp . \quad (11.12)$$

No caso de o processo ser isobárico verifica-se $dp = 0$, obtendo-se

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = n(C_V + R) \Leftrightarrow C_p \equiv \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = C_V + R , \quad (11.13)$$

onde C_p é o *calor específico molar a pressão constante*, Note-se que $C_p > C_V$, o que é intuitivamente razoável: se for transferido calor a um corpo a pressão constante, só uma parte desse calor é despendido a aumentar a temperatura do sistema; a outra parte transforma-se em trabalho realizado contra o exterior, fazendo variar o volume do corpo. Logo, para induzir uma dada elevação da temperatura de um corpo a pressão constante, é necessário fornecer-lhe mais calor do que seria para produzir a mesma elevação de temperatura a volume constante.

⁸² Como vimos atrás, calor e trabalho não são funções de estado, pelo que não deveríamos representar as suas variações infinitesimais – que dependem do caminho, e não apenas dos estados inicial e final – por dQ e dW . É frequente estas variações infinitesimais serem representadas na literatura por $\tilde{d}Q$ e $\tilde{d}W$. Não o faremos aqui, porém, para não sobrecarregar a notação.

Terminamos esta secção fazendo notar que, das expressões (10.22) e (11.9), se segue que a energia interna de um gás ideal monoatômico é dada por

$$U = \frac{3}{2}nRT + U_0 \quad (11.14)$$

onde U_0 é uma constante de integração que representa a energia interna do gás ideal no zero absoluto de temperatura. O valor desta constante não afecta os resultados da maior parte dos cálculos, razão pela qual podemos habitualmente igualá-la a zero. Trata-se de uma escolha de escala.

11.4.2. Processo adiabático num gás ideal

Resulta da equação de estado dos gases ideais, expressão (10.6), que, num processo isotérmico num gás ideal, se tem

$$pV = \text{const.} \quad (11.15)$$

Ou seja, num diagrama p - V , um processo isotérmico é representado por uma hipérbole. Iremos agora deduzir as relações entre a pressão, o volume e a temperatura num processo adiabático de um gás ideal. Uma possível realização física de um tal processo seria um gás encerrado num cilindro, com um êmbolo numa das extremidades, sendo as paredes e o êmbolo constituídas por materiais isolantes térmicos e movendo-se o êmbolo muito lentamente para fora ou para dentro.

Recorde-se que, num processo adiabático, não há troca de calor entre o sistema e a sua vizinhança, logo vem da equação (11.10) que

$$C_V n dT + p dV = 0. \quad (11.16)$$

Podemos utilizar a equação de estado dos gases ideais, expressão (10.6), para eliminar p , obtendo-se

$$C_V dT + \frac{RT}{V} dV = 0 \Leftrightarrow \frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = 0, \quad (11.17)$$

equação esta que pode ser integrada imediatamente, com o resultado

$$\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V = \text{const.} \Leftrightarrow TV^{R/C_V} = \text{const.} \quad (11.18)$$

$$\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V = \text{const.} \Leftrightarrow TV^{R/C_V} = \text{const.} \quad (11.18)$$

Definindo

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}, \quad (11.19)$$

como o *coeficiente de expansão adiabática* (onde utilizámos a equação (11.13)), a equação (11.18) pode escrever-se

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.} \quad (11.20)$$

Recorrendo, novamente, à equação de estado dos gases ideais, expressão (10.6), a equação (11.20) pode ser expressa numa das seguintes formas:

$$pV^{\gamma} = \text{const.} \quad \text{ou} \quad Tp^{1/\gamma-1} = \text{const.} \quad (11.21)$$

Para um gás ideal monoatómico, $C_V = 3R/2$, logo, neste caso, $\gamma = 5/3$. Para um gás ideal diatómico, $C_V = 5R/2$ e $\gamma = 7/5$. Note-se, contudo, que os calores específicos dos gases reais variam com a temperatura. Na tabela 11.1 encontram-se coligidos os valores dos calores específicos molares a volume constante de diversos gases a várias temperaturas e respectivos coeficientes de expansão adiabática.

Tabela 11.1. Valores de C_V e γ de diversos gases a várias temperaturas.

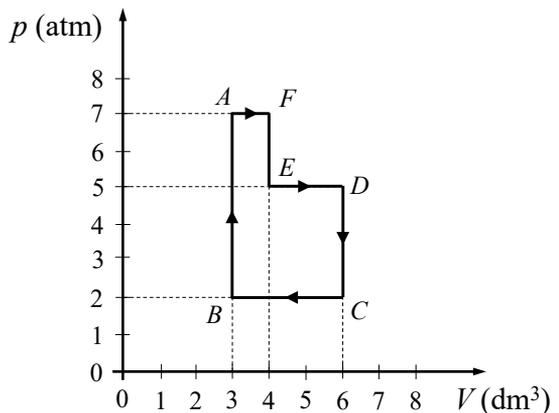
Gás	T (°C)	C_V (Jmol ⁻¹ K ⁻¹)	γ
Ar seco	0	20.631	1.403
	20	20.786	1.400
	100	20.734	1.401
Hidrogénio	-76	18.354	1.453
	20	20.279	1.410
	100	20.580	1.404
Hélio	20	12.598	1.660
Vapor de água	20	25.195	1.330
	100	25.662	1.324
	200	26.821	1.310
Dióxido de carbono	0	26.821	1.310
	20	27.715	1.300
	100	29.589	1.281
Monóxido de carbono	20	20.786	1.400
Oxigénio	-76	20.035	1.415
	20	20.786	1.400
	100	20.838	1.399
	200	20.943	1.397
Nitrogénio	15	20.580	1.404
Metano	20	20.279	1.410

PROBLEMAS

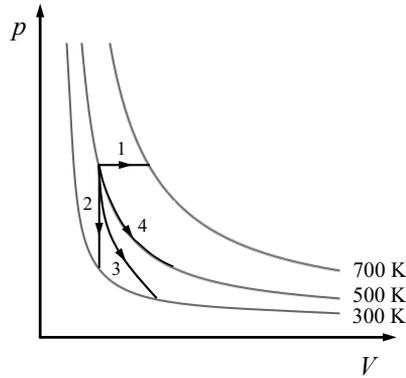
- 11.1. Duas moles de um gás ideal são aquecidas, a pressão constante, de $17\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $107\text{ }^{\circ}\text{C}$. Calcule o trabalho realizado pelo gás.
- 11.2. Cinco moles de um gás ideal são mantidas à temperatura constante de $45\text{ }^{\circ}\text{C}$. Calcule o trabalho realizado pelo gás se a sua pressão passar de 1 atm para 3 atm .
- 11.3. Diga, justificando, se é possível construir uma máquina térmica que, recebendo apenas calor à taxa de 1000 cal s^{-1} , tenha uma potência de 10 kW .
- 11.4. Quatro moles de um gás ideal monoatômico, inicialmente à temperatura de $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, sofrem uma expansão durante a qual o gás absorve 1200 J de calor e realiza um trabalho de 2000 J . Calcule:
- A variação de energia interna do gás.
 - A equação de estado de Van der Waals.
- 11.5. Um gás (não necessariamente ideal) contido num recipiente munido de um êmbolo sofre uma expansão, passando de um volume inicial $V_1 = 0.110\text{ m}^3$ para um volume final $V_2 = 0.320\text{ m}^3$. Para manter a pressão constante e igual a $p = 1.6 \times 10^5\text{ Pa}$ durante a expansão, é fornecida ao sistema uma quantidade de calor $Q = 1.05 \times 10^5\text{ J}$.
- Determine o trabalho realizado pelo gás durante a expansão.
 - Determine a variação da energia interna do gás.
 - As respostas às alíneas anteriores dependem do facto de o gás ser ou não ideal? Justifique.

- 11.6. Uma amostra de gás ideal sofre o conjunto de transformações representadas na figura ao lado, partindo do estado A e regressando ao mesmo estado A , cuja temperatura é $25\text{ }^{\circ}\text{C}$.

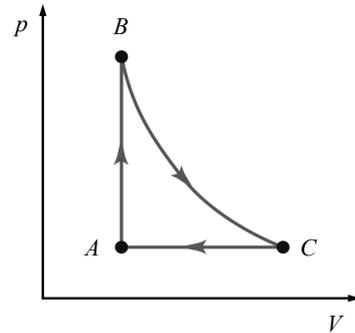
- Calcule o trabalho realizado sobre o gás na transformação cíclica global.
- Determine o calor absorvido pelo gás durante a transformação cíclica global.
- Calcule temperatura do gás no estado F .
- Averigüe se A e C estão sobre a mesma isotérmica.



- 11.7. Classifique os quatro processos representados no diagrama p - V da figura seguinte, indicando em quais deles há troca de calor e/ou trabalho entre o sistema e o ambiente.



- 11.8. Uma máquina térmica efectua o processo cíclico representado no diagrama p - V da figura ao lado. Neste processo são utilizadas duas moles de hélio, que pode ser tratado como um gás ideal. Sabe-se que as pressões nos estados A e B são $p_A = 1 \times 10^5$ Pa e $p_B = 3 \times 10^5$ Pa, respectivamente, que a temperatura no estado B é $T_B = 327$ °C e que o processo $B \rightarrow C$ é isotérmico.



- Classifique, justificando, os processos $A \rightarrow B$ e $C \rightarrow A$.
 - Determine a temperatura no estado A .
 - Determine os volumes do gás nos estados A e C .
 - Determine o calor trocado entre o gás e o ambiente durante a totalidade do processo. (*Sugestão*: recorde que o processo é cíclico, logo a variação da energia interna é zero.) O calor foi absorvido ou libertado pelo gás? Justifique.
- 11.9. Uma mole de hélio, inicialmente à temperatura de 20 °C, é aquecida a pressão constante até que o seu volume duplique. Considerando que o hélio se comporta como um gás ideal monoatômico, determine:
- A quantidade de calor fornecida ao gás, indicando que percentagem desse calor é armazenado como energia interna do gás.
 - O trabalho realizado pelo gás.
- 11.10. Uma mole de gás (não necessariamente ideal), inicialmente à temperatura absoluta T_1 e ocupando um volume V_1 , sofre um processo isobárico, passando a sua temperatura e volume a ser T_2 e V_2 , respectivamente.

- a) Deduza a expressão que dá a quantidade de calor trocada entre o sistema e o ambiente durante este processo em função da temperatura inicial e dos volumes inicial e final (e , porventura, de alguma propriedade do gás).
- b) Utilizando a expressão deduzida na alínea anterior, calcule o calor trocado entre uma mole de um gás ideal diatômico, inicialmente à temperatura de $10\text{ }^{\circ}\text{C}$, e o ambiente, quando o volume do gás passa de 30 dm^3 a 10 dm^3 à pressão constante de 1 atm . O gás absorve ou liberta calor?
- c) Determine a variação de energia interna do gás nas condições da alínea anterior.
- 11.11.** Num processo termodinâmico realizado à pressão constante de 1 MPa , fornece-se a um sistema uma quantidade de calor igual a 50 kcal . Qual é a variação de volume do sistema, sabendo que a sua energia interna se mantém constante?
- 11.12.** Mostre que, se um gás ideal sofre um processo adiabático que o leva do estado (p_1, V_1) ao estado (p_2, V_2) , é realizado o trabalho

$$W = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$$

CAPÍTULO 12

SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

Vimos no capítulo anterior que, para que a energia interna de um sistema termodinâmico varie, o sistema tem de trocar calor e/ou trabalho com a sua vizinhança. Calor e trabalho são, portanto, formas equivalentes de transferir energia. Em particular, se a energia interna do sistema permanecer constante (por exemplo, num processo cíclico), então o trabalho que o sistema realiza sobre a sua vizinhança tem de ser igual ao calor que o sistema recebe dessa mesma vizinhança. Não é, portanto, possível extrair trabalho de um sistema num processo cíclico sem lhe fornecer calor. Por outras palavras, não é possível realizar um *motor perpétuo de primeira espécie* – uma máquina hipotética capaz de realizar trabalho sem que lhe fosse fornecido calor. Veremos neste capítulo, porém, que a primeira lei não fornece uma descrição completa dos processos termodinâmicos, sendo necessário complementá-la com a segunda lei.

12.1. Segunda lei da Termodinâmica

A primeira lei da Termodinâmica diz-nos que não é possível criar nem destruir energia interna – esta apenas pode transitar de uns sistemas para outros, sob a forma de calor ou trabalho, que são equivalentes: trabalho pode transformar-se em calor, e calor em trabalho. No entanto, a primeira lei não impõe quaisquer limitações à conversão de trabalho em calor e vice-versa. Ora, verifica-se experimentalmente que esta conversão não é simétrica: é sempre possível transformar trabalho totalmente em calor, mas não é sempre possível transformar calor totalmente em trabalho. Efectivamente, pode-se sempre aquecer um corpo por fricção, seja qual for a sua temperatura inicial, sendo o calor por ele recebido exactamente igual ao trabalho mecânico sobre ele realizado. Também se pode sempre transformar a totalidade do trabalho eléctrico em calor – numa resistência, por efeito de Joule, como vimos no capítulo 7. Mas, se fosse possível transformar calor totalmente em trabalho, sem qualquer outro efeito, então poder-se-ia realizar uma máquina que extraísse calor dos corpos na sua vizinhança e com ele realizasse trabalho – um *motor perpétuo de segunda espécie*, uma vez que a energia térmica presente no meio ambiente é, para efeitos práticos, infinita. Por exemplo, um automóvel equipado com uma tal máquina conseguiria, espontaneamente, extrair calor da atmosfera circundante (arrefecendo-a!) e transformá-lo em trabalho mecânico, colocando-se em movimento sem necessidade de qualquer combustível.

A *segunda lei da Termodinâmica* exprime a impossibilidade de processos como este que, claro está, nunca ocorrem. Existem várias maneiras de a enunciar; um enunciado que reflecte directamente as considerações acima é o de Kelvin-Planck (1851):

*É impossível um processo cíclico cujo único resultado seja transformar em trabalho o calor extraído de uma fonte a temperatura uniforme (isto é, a mesma em todos os seus pontos)*⁸³.

Um outro enunciado particularmente transparente é o devido a Rudolf Clausius (1854):

É impossível a construção de um dispositivo que, por si só, isto é, sem intervenção do meio exterior, consiga transferir calor de um corpo para outro a temperatura mais elevada.

Por outras palavras, o enunciado de Clausius da segunda lei diz-nos que, se colocarmos em contacto um corpo quente e um corpo frio, o corpo quente arrefecerá e o corpo frio aquecerá, a menos que haja intervenção de um agente exterior. A segunda lei incorpora, portanto, um facto experimental incontroverso: diz-nos qual é o sentido “natural” dos processos termodinâmicos, ou seja, qual é o sentido em que se dão espontaneamente. Isto é, na verdade, extremamente difícil de compreender de um ponto de vista teórico, porque, em última análise, o comportamento da matéria é regido pelas leis de Newton, que não permitem atribuir um sentido ao tempo: as equações do movimento são as mesmas quer o tempo corra do passado para o futuro, quer do futuro para o passado.

Os enunciados de Kelvin-Planck e de Clausius afiguram-se ambos plausíveis, mas parecem pouco ter a ver um com o outro. Demonstraremos que são equivalentes em duas etapas: já a seguir, provaremos que uma violação do enunciado de Kelvin-Planck implica uma violação do enunciado de Clausius, ou seja, que o enunciado de Clausius implica o enunciado de Kelvin-Planck. No fim da secção seguinte, mostraremos que uma violação do enunciado de Clausius implica uma violação do enunciado de Kelvin-Planck, ou seja, que o enunciado de Kelvin-Planck implica o enunciado de Clausius.

Admitamos, então, que o enunciado de Kelvin-Planck é violado e que existe um processo cíclico cujo único resultado seja transformar integralmente em trabalho o calor extraído de uma fonte a temperatura constante T_1 . Nada nos impede de transformar esse trabalho integralmente em calor (por exemplo por fricção) e fornecê-lo a uma fonte a uma temperatura $T_2 > T_1$. Teremos assim realizado um dispositivo que, por si só, transfere calor de um corpo para outro a temperatura mais elevada, em violação do enunciado de Clausius.

⁸³ Note-se que é crucial que se exija que seja este o *único* resultado. Caso contrário, é possível converter uma dada quantidade de calor integralmente em trabalho. Pense-se na expansão isotérmica de um gás ideal: como a sua energia interna só depende da temperatura, é constante durante todo o processo, logo o calor absorvido pelo gás é transformado integralmente no trabalho que o mesmo realiza sobre a vizinhança contra a qual se expande. Mas, neste caso, a transformação de calor em trabalho não é o único resultado: uma vez que o gás se expande, os seus estados inicial e final não são iguais.

12.2. Ciclo de Carnot

Face à proibição de transformação integral de calor em trabalho encapsulada na segunda lei da Termodinâmica, faz sentido interrogarmo-nos: se não conseguimos converter 100 % de calor em trabalho, o que é o melhor que conseguimos? Qual é a máquina térmica, operando ciclicamente, mais eficiente de todas? Sabemos que, pelo enunciado de Kelvin-Planck da segunda lei da Termodinâmica, precisará de (no mínimo) duas fontes de calor, a temperaturas diferentes, para funcionar: uma *fonte quente*, ou simplesmente *fonte de calor*, a temperatura T_1 , e uma *fonte fria*, ou *sumidouro de calor*, a temperatura T_2 , tais que $T_1 > T_2$.

Mesmo assim, a pergunta parece de resposta impossível, uma vez que há inúmeras maneiras de combinar diferentes processos termodinâmicos de modo a constituir um ciclo. Façamos, porém, as seguintes considerações. Em primeiro lugar, *todos os processos realizados devem ser reversíveis*. Isto porque, pela segunda lei da Termodinâmica, qualquer processo irreversível – que siga o seu “sentido natural” – conduz a perdas de rendimento – a calor que não pode ser transformado novamente em trabalho na sua totalidade. Donde, *para que um processo que envolva trocas de calor entre a máquina e qualquer das fontes de calor tenha eficiência máxima tem que ser isotérmico*, encontrando-se a máquina à temperatura da fonte em questão. Isto porque a única maneira de garantir que um processo em que há trocas de calor entre dois sistemas seja reversível e tenha eficiência máxima é estarem os dois sistemas à mesma temperatura: o sentido do processo pode, assim, ser invertido alterando infinitesimalmente e em equilíbrio a temperatura de cada um dos sistemas. Pela mesma razão, *processos que levam a máquina da temperatura da fonte quente à da fonte fria, ou vice-versa, não devem envolver quaisquer trocas de calor entre a máquina e o ambiente, ou seja, devem ser adiabáticos*. Conclui-se, assim, que a máquina térmica de eficiência máxima é a que realiza apenas processos isotérmicos e adiabáticos.

O *ciclo de Carnot*, concebido por Sadi Carnot (1796-1832), é o ciclo mais simples que respeita estes requisitos: consiste em dois processos isotérmicos (às temperaturas T_1 , e T_2), e dois processos adiabáticos (de T_1 , para T_2 e de T_2 para T_1). Uma máquina térmica que executa um ciclo de Carnot diz-se uma *máquina de Carnot*. É possível demonstrar – não o faremos aqui – que todas as máquinas de Carnot têm o mesmo rendimento⁸⁴, seja qual for a sua constituição; e que esse rendimento é o máximo rendimento possível de uma máquina térmica operando entre as temperaturas T_1 , e T_2 ⁸⁵.

Consideremos, portanto, o caso particularmente simples em que a máquina de Carnot consiste num gás ideal – dito *fluido operante* ou *fluido de trabalho* da máquina térmica

⁸⁴ Grandeza que definiremos rigorosamente mais adiante e que mede a eficiência com que a máquina converte calor em trabalho.

⁸⁵ Estes resultados são conhecidos, respectivamente, por *segundo e primeiro teoremas de Carnot*. O leitor interessado pode consultar, por exemplo, J. Güémez, C. Fiolhais e M. Fiolhais, *Fundamentos de Termodinâmica do Equilíbrio*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1998.

– encerrado num cilindro munido de um êmbolo móvel, de modo a permitir variações de volume. Neste caso, o ciclo de Carnot é convenientemente representado num diagrama p - V (*vide* figura 12.1).

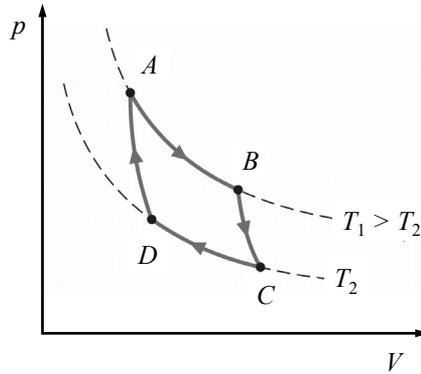


Figura 12.1. Representação em diagrama p - V de um ciclo de Carnot executado por uma máquina térmica constituída por um gás ideal encerrado num cilindro munido de um êmbolo móvel.

Admitamos que o ciclo se inicia no estado A , à temperatura T_1 da fonte quente (uma vez que se trata de um processo cíclico, é indiferente qual o ponto que tomamos para início do ciclo).

- $A \rightarrow B$:** o gás sofre expansão isotérmica, à temperatura T_1 , do volume V_A para o volume $V_B > V_A$. No diagrama p - V , este processo é representado por um segmento da isotérmica $pV = nRT_1$. Verifica-se $Q_{AB} > 0$ e $W_{AB} > 0$.
- $B \rightarrow C$:** o gás sofre expansão adiabática, do volume V_B e temperatura T_1 para o volume V_C e temperatura T_2 . Este processo é representado por um segmento de adiabática, $pV^\gamma = \text{const.}$ Verifica-se $Q_{BC} = 0$ e $W_{BC} > 0$.
- $C \rightarrow D$:** o gás sofre compressão isotérmica à temperatura T_2 , do volume V_C para o volume $V_D < V_C$. Este processo é representado por um segmento da isotérmica $pV = nRT_2$. Verifica-se $Q_{CD} < 0$ e $W_{CD} < 0$.
- $D \rightarrow A$:** o gás sofre compressão adiabática, do volume V_D e temperatura T_2 para o volume V_A e temperatura T_1 , completando o ciclo. Este processo é representado por um segmento de adiabática, $pV^\gamma = \text{const.}$ (onde a constante é diferente da do processo $B \rightarrow C$). Verifica-se $Q_{DA} = 0$ e $W_{DA} < 0$.

Resumindo, nesta realização do ciclo de Carnot, o gás ideal absorve calor da fonte quente à temperatura T_1 e fornece calor à fonte fria, à temperatura T_2 , trocando igualmente trabalho com o meio ambiente. Note-se que, uma vez que todos os processos são reversíveis, é possível fazer a máquina descrever o ciclo de Carnot em sentido inverso. Nesse caso, o gás ideal absorve calor da fonte fria à temperatura T_2 e fornece-o à fonte quente, à temperatura T_1 , designando-se a máquina por *frigorífico de Carnot*, que não trataremos em pormenor aqui.

A eficiência com que uma máquina térmica converte calor em trabalho é medida pelo seu *rendimento*, η , que é uma grandeza adimensional definida como a razão entre o trabalho realizado pela máquina sobre a vizinhança e o calor por ela absorvido da vizinhança:

$$\eta = \frac{W}{Q}. \quad (12.1)$$

Vamos agora calcular o rendimento de um ciclo de Carnot.

- Processos isotérmicos ($A \rightarrow B$ e $C \rightarrow D$): uma vez que o fluido operante é o gás ideal, cuja energia interna apenas depende da temperatura, tem-se que $\Delta U = 0$, logo, pela primeira lei da Termodinâmica, $Q = W$. Do exemplo 11.1 vem, então, que

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0 \quad (12.2)$$

e que

$$Q_{CD} = W_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0. \quad (12.3)$$

- Processos adiabáticos ($B \rightarrow C$ e $D \rightarrow A$): tem-se, evidentemente, que $Q_{BC} = Q_{DA} = 0$. Por outro lado, a variação de energia interna ao longo de todo o ciclo tem de ser nula, logo

$$Q_{AB} - W_{AB} + Q_{BC} - W_{BC} + Q_{CD} - W_{CD} + Q_{DA} - W_{DA} = 0,$$

donde

$$W_{BC} + W_{DA} = 0. \quad (12.4)$$

Ou seja, o trabalho realizado durante os processos adiabáticos é nulo.

Tem-se, assim, para o trabalho total realizado sobre a vizinhança e o calor total recebido durante o ciclo de Carnot:

$$W = W_{AB} + W_{CD} \quad \text{e} \quad Q = Q_{AB}. \quad (12.5)$$

Uma vez que o sistema vai de B para C e de D para A por processos adiabáticos e o fluido operante é um gás ideal, vem da equação (11.20) que

$$T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1} \quad \text{e} \quad T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1}. \quad (12.6)$$

Dividindo estas duas equações membro a membro, conclui-se que

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_D}{V_C}. \quad (12.7)$$

Introduzindo este resultado na equação (12.3), podemos reescrever as equações (12.5) na forma

$$W = nR(T_1 - T_2) \ln \frac{V_B}{V_A} \quad \text{e} \quad Q = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}. \quad (12.8)$$

de onde se segue que

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{W}{Q} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (12.9)$$

Ou seja, o rendimento de uma máquina de Carnot depende apenas da razão das temperaturas das fontes fria e quente, mas não de quaisquer outros pormenores da constituição da máquina (em particular, não depende da natureza do fluido operante). Por esta razão, o ciclo de Carnot pode ser utilizado para definir uma escala absoluta de temperatura, a qual se pode mostrar que coincide com a escala de Kelvin ou do termómetro de gás, introduzida no Capítulo 9⁸⁶.

Exemplo 12.1

Uma máquina de Carnot recebe 1000 J de uma fonte quente a 400 K, realiza trabalho, e cede calor a uma fonte fria a 300 K. Determinar o trabalho realizado pela máquina e a quantidade de calor cedido pela fonte fria.

Resolução:

Pela equação (12.9), o rendimento da máquina de Carnot é

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{300}{400} = 0.25.$$

O calor recebido da fonte quente é $Q = 1000$ J. Pela definição de rendimento, equação (12.1), vem que o trabalho realizado é $W = \eta_{\text{Carnot}} Q = 250$ J. Pela primeira lei da Termodinâmica, o calor cedido à fonte fria tem de ser o calor recebido pela máquina e não convertido em trabalho, ou seja, $1000 - 250 = 750$ J.

Terminamos esta secção com a demonstração que o enunciado de Kelvin-Planck implica o enunciado de Clausius. Para tal, mostraremos que uma violação do enunciado de Clausius implica uma violação do enunciado de Kelvin-Planck. Suponhamos então que, em contradição com o enunciado de Clausius, seja possível transferir uma determinada quantidade de calor Q , de uma fonte à temperatura T_2 , para outra fonte a uma temperatura $T_1 > T_2$, sem qualquer intervenção do meio exterior. Poderíamos então utilizar essa quantidade Q de calor para alimentar um ciclo de Carnot que produziria uma determinada quantidade de trabalho W . Uma vez que a fonte à temperatura T_1 primeiro receberia, mas logo em seguida forneceria, a quantidade de calor Q , não sofreria nenhuma

⁸⁶ Para mais pormenores *vide*, por exemplo, E. Fermi, *Termodinâmica*, Almedina, Coimbra, 1978.

alteração. Deste modo, o processo cíclico atrás descrito teria como único resultado a transformação em trabalho de uma dada quantidade de calor extraída de uma única fonte a temperatura uniforme, o que contradiz o enunciado de Kelvin-Planck.

12.3. Outros ciclos

O ciclo de Carnot tem um significado sobretudo conceptual: estabelece qual é o rendimento máximo de uma máquina térmica, e permite demonstrar a equivalência dos enunciados de Kelvin-Planck e de Clausius da segunda lei da Termodinâmica. Existem, porém, vários outros ciclos de interesse, não só teórico, mas sobretudo prático, visto serem modelos simplificados de diferentes máquinas correntes. Apresentam-se a seguir alguns exemplos.

12.3.1. Ciclo de Otto

O *ciclo de Otto* é uma aproximação ao modo de funcionamento de um motor a gasolina de quatro tempos⁸⁷. Consiste em dois processos adiabáticos e dois processos isocóricos, conforme ilustrado na figura 12.2. Mais uma vez, estamos a admitir que o fluido operante é um gás ideal, o que neste caso flagrantemente não é verdade, dado que a composição química da mistura gasosa num motor de combustão (o número de moles de cada componente presentes) sofre alterações durante o funcionamento do motor. No entanto, isto não altera o essencial da nossa análise.

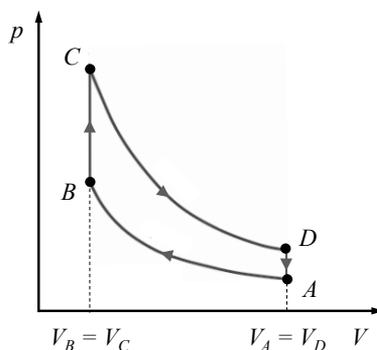


Figura 12.2. Representação em diagrama p - V de um ciclo de Otto executado por uma máquina térmica constituída por um gás ideal encerrado num cilindro munido de um êmbolo móvel.

Admitamos que o ciclo se inicia no ponto A do diagrama. Neste momento, é injectada no cilindro uma mistura de ar e gasolina vaporizada, que é o fluido operante e a que, por simplicidade, chamaremos simplesmente “gás”.

⁸⁷ Nicolaus Otto (1832-1891) construiu o primeiro motor a quatro tempos com velas de ignição efectivamente capaz de funcionar.

- A → B:** o gás sofre compressão adiabática do volume V_A até ao volume $V_B < V_A$. No diagrama p - V , este processo é representado por um segmento de adiabática, $pV^\gamma = \text{const.}$
- B → C:** dá-se a ignição (desencadeada, num motor real, pela faísca de uma vela) e o gás recebe calor, devido à combustão da gasolina, mantendo-se o seu volume constante e igual a V_B . Este processo é representado pelo segmento de recta vertical [BC].
- C → D:** o gás sofre expansão adiabática, do volume $V_C = V_B$ até ao volume $V_D > V_C$. Este processo é representado por um segmento de adiabática, $pV^\gamma = \text{const.}$ (onde a constante é diferente da do processo $A \rightarrow B$). Num motor real, este é o processo que, por exemplo, faz rodar a cambota do motor e que por sua vez induz o movimento das rodas de um automóvel.
- D → A:** o gás é expelido do cilindro para a atmosfera, sendo arrefecido até à temperatura ambiente, ao mesmo tempo que uma igual quantidade de gás, também à temperatura ambiente, é injectada no cilindro. Pode, portanto, dizer-se que o gás perdeu calor a volume constante. Este processo é representado pelo segmento de recta vertical [DA].

Vamos agora calcular o rendimento do ciclo de Otto. É mais fácil começar a análise pelos processos isocóricos.

- Processos isocóricos ($B \rightarrow C$ e $D \rightarrow A$): tem-se, evidentemente, $W_{BC} = W_{DA} = 0$. Por outro lado, uma vez que o fluido operante é o gás ideal, segue-se da equação (10.20) que

$$Q_{BC} = C_V n (T_C - T_B) > 0 \quad (12.10)$$

e que

$$Q_{DA} = C_V n (T_A - T_D) < 0. \quad (12.11)$$

- Processos adiabáticos ($A \rightarrow B$ e $C \rightarrow D$): tem-se, evidentemente, que $Q_{AB} = Q_{CD} = 0$. Por outro lado, a variação de energia interna ao longo de todo o ciclo tem de ser nula, logo

$$Q_{AB} - W_{AB} + Q_{BC} - W_{BC} + Q_{CD} - W_{CD} + Q_{DA} - W_{DA} = 0,$$

donde

$$W_{AB} + W_{CD} = Q_{BC} + Q_{DA}. \quad (12.12)$$

Ou seja, o trabalho realizado durante os processos adiabáticos é igual ao calor trocado durante os processos isocóricos.

Tem-se, assim, para o trabalho total realizado sobre a vizinhança e o calor total recebido durante o ciclo de Otto:

$$W = W_{AB} + W_{CD} \quad \text{e} \quad Q = Q_{BC}. \quad (12.13)$$

Das equações (12.10) a (12.13) vem então que (*exercício: verifique*)

$$\eta_{\text{Otto}} = \frac{W}{Q} = \frac{T_C - T_B + T_A - T_D}{T_C - T_B} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}. \quad (12.14)$$

Uma vez que o sistema vai de A para B e de C para D por processos adiabáticos e o fluido operante é um gás ideal, vem da equação (11.20) que

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad \text{e} \quad T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}. \quad (12.15)$$

Como $V_D = V_A$ e $V_C = V_B$, estas equações podem reescrever-se na forma

$$T_A = T_B \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} \quad \text{e} \quad T_D = T_C \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1}. \quad (12.16)$$

Introduzindo as equações (12.16) na equação (12.14), obtém-se

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - \frac{T_C \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} - T_B \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1}}{T_C - T_B} = 1 - \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}. \quad (12.17)$$

onde $r = V_A/V_B$ é a *taxa de compressão* do ciclo: é uma grandeza adimensional que mede o quanto o fluido operante é comprimido durante o ciclo (por exemplo, $r = 5$ significa que o fluido operante é comprimido, no processo $A \rightarrow B$, até $1/5$ do seu volume inicial).

Conclui-se, assim, que o rendimento do ciclo de Otto depende do coeficiente de expansão adiabática, γ , dado pela razão entre os calores específicos a pressão e a volume constante do fluido operante, bem como da taxa de compressão r . O rendimento é tanto maior quanto maior for a taxa de compressão, mas uma taxa de compressão mais elevada implica também uma temperatura mais elevada no final da compressão adiabática (ponto B), com conseqüente risco de explosão – em vez de ignição controlada – do fluido operante. Na prática, a maior taxa de compressão utilizada em motores a gasolina anda à volta de 10 a 13.

Por fim, note-se que o ciclo de Otto é apenas uma *idealização* do funcionamento de um motor a gasolina de quatro tempos. Num motor real, os processos não são reversíveis, existe atrito, dão-se perdas de calor para o exterior, o fluido operante não se comporta exactamente como um gás ideal, etc. Trata-se, porém, de uma idealização bastante útil.

12.3.2. Ciclo de Diesel

O *ciclo de Diesel* é uma aproximação ao funcionamento de um motor a gasóleo (“diesel”) de quatro tempos⁸⁸. Consiste em dois processos adiabáticos, um processo isocó-

⁸⁸ Concebido por Rudolf Diesel (1858-1913).

rico e um processo isobárico, conforme ilustrado na figura 12.3. As simplificações são essencialmente as mesmas que no caso do ciclo de Otto; em particular, tornaremos a admitir que o fluido operante é um gás ideal, o que, mais uma vez, flagrantemente não é verdade.

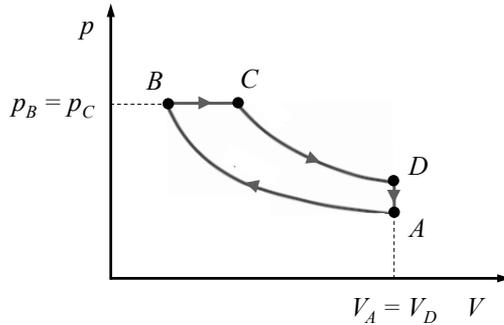


Figura 12.3. Representação em diagrama p - V de um ciclo de Diesel executado por uma máquina térmica constituída por um gás ideal encerrado num cilindro munido de um êmbolo móvel.

Admitamos que o ciclo se inicia no ponto A do diagrama. A principal diferença relativamente ao ciclo de Otto é que, neste momento, existe no cilindro apenas ar. No que se segue, porém, chamaremos quer ao ar, quer à mistura de ar e gasóleo vaporizado, simplesmente “gás”.

- $A \rightarrow B$: o gás sofre compressão adiabática do volume V_A até ao volume $V_B < V_A$. No diagrama p - V , este processo é representado por um segmento de adiabática, $pV^\gamma = \text{const.}$
- $B \rightarrow C$: é injectado gasóleo no cilindro, mantendo-se a pressão aproximadamente constante. Devido à elevada temperatura atingida durante a compressão adiabática, dá-se a ignição (sem necessidade de velas de *ignição*, embora muitos motores Diesel modernos utilizem velas de *aquecimento* para elevar ainda mais a temperatura) e o gás recebe calor. Este processo é representado pelo segmento de recta horizontal $[BC]$.
- $C \rightarrow D$: o gás sofre expansão adiabática, do volume $V_C = V_B$ até ao volume $V_D > V_C$. Este processo é representado por um segmento de adiabática, $pV^\gamma = \text{const.}$ (onde a constante é diferente da do processo $A \rightarrow B$). Num motor real, este é o processo que, por exemplo, faz rodar a cambota do motor e que por sua vez induz o movimento das rodas de um automóvel.
- $D \rightarrow A$: o gás é expelido do cilindro para a atmosfera, sendo arrefecido até à temperatura ambiente, ao mesmo tempo que uma igual quantidade de ar, também à temperatura ambiente, é injectada no cilindro. Pode, portanto, dizer-se que o gás perdeu calor a volume constante. Este processo é representado pelo segmento de recta vertical $[AD]$.

Vamos agora calcular o rendimento do ciclo de Diesel. É mais fácil começar a análise pelo processo isocórico.

- Processo isocórico ($D \rightarrow A$): tem-se, evidentemente, que o trabalho $W_{DA} = 0$. Por outro lado, uma vez que o fluido operante é o gás ideal, segue-se da equação (10.20) que

$$Q_{DA} = C_V n(T_A - T_D) < 0. \quad (12.18)$$

- Processo isobárico ($B \rightarrow C$): como veremos já a seguir, não é realmente necessário calcular W_{BC} explicitamente. Por outro lado, uma vez que o fluido operante é o gás ideal, segue-se da equação (11.13) que

$$Q_{BC} = C_p n(T_C - T_B) > 0. \quad (12.19)$$

- Processos adiabáticos ($A \rightarrow B$ e $C \rightarrow D$): tem-se, evidentemente, que $Q_{AB} = Q_{CD} = 0$. Por outro lado, a variação de energia interna ao longo de todo o ciclo tem de ser nula, logo

$$Q_{AB} - W_{AB} + Q_{BC} - W_{BC} + Q_{CD} - W_{CD} + Q_{DA} - W_{DA} = 0,$$

donde

$$W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} = Q_{BC} + Q_{DA}. \quad (12.20)$$

Ou seja, o trabalho realizado durante o processo isobárico e os processos adiabáticos é igual ao calor trocado durante os processos isobárico e isocórico.

Tem-se, assim, para o trabalho total realizado sobre a vizinhança e o calor total recebido durante o ciclo de Diesel:

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} \quad \text{e} \quad Q = Q_{BC}. \quad (12.21)$$

Das equações (12.18) a (12.21) vem então que

$$\eta_{\text{Diesel}} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}. \quad (12.22)$$

Tal como para o ciclo de Otto, também o rendimento do ciclo de Diesel depende do coeficiente de expansão adiabática, γ , dado pela razão entre os calores específicos a pressão e a volume constante do fluido operante.

Dado que a compressão adiabática (processo $A \rightarrow B$) se dá sem a presença de combustível no cilindro, é possível atingir temperaturas mais elevadas sem que haja ignição, e assim conseguir maiores rendimentos com um motor Diesel do que com um motor a gasolina. Tipicamente as taxas de compressão destes motores são da ordem de 15 a 20, precisando de ser fabricados com menores tolerâncias e de ser mais robustos do que os motores a gasolina.

12.3.3. Ciclo de Brayton-Joule

O ciclo de Brayton-Joule é muito semelhante ao ciclo de Diesel. Consiste em dois processos adiabáticos e dois processos isobáricos, conforme ilustrado na figura 12.4. O processo $D \rightarrow A$ ocorre fora do motor, portanto à pressão atmosférica.

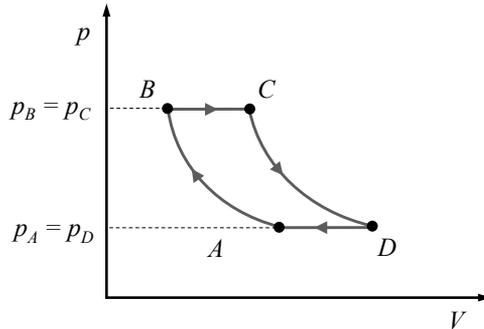


Figura 12.4. Representação em diagrama p - V de um ciclo de Brayton-Joule executado por uma máquina térmica constituída por um gás ideal encerrado num cilindro munido de um êmbolo móvel.

Vamos agora calcular o rendimento do ciclo de Brayton-Joule. É mais fácil começar a análise pelos processos isobáricos.

- Processos isobáricos ($B \rightarrow C$ e $D \rightarrow A$): como veremos já a seguir, não é realmente necessário calcular W_{BC} e W_{DA} explicitamente. Por outro lado, uma vez que o fluido operante é o gás ideal, segue-se da equação (11.13) que

$$Q_{BC} = C_p n (T_C - T_B) > 0 \quad (12.23)$$

e que

$$Q_{DA} = C_p n (T_A - T_D) < 0. \quad (12.24)$$

- Processos adiabáticos ($A \rightarrow B$ e $C \rightarrow D$): tem-se, evidentemente, que $Q_{AB} = Q_{CD} = 0$. Por outro lado, a variação de energia interna ao longo de todo o ciclo tem de ser nula, logo

$$Q_{AB} - W_{AB} + Q_{BC} - W_{BC} + Q_{CD} - W_{CD} + Q_{DA} - W_{DA} = 0,$$

donde

$$W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = Q_{BC} + Q_{DA}. \quad (12.25)$$

Ou seja, o trabalho realizado durante todo o ciclo é igual ao calor trocado durante os processos isobáricos.

Tem-se, assim, para o trabalho total realizado sobre a vizinhança e o calor total recebido durante o ciclo de Brayton-Joule:

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} \quad \text{e} \quad Q = Q_{BC}. \quad (12.26)$$

Das equações (12.23) a (12.26) vem então que

$$\eta_{BJ} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}. \quad (12.27)$$

resultado este idêntico ao do ciclo de Otto, equação (12.14). Vamos re-escrevê-lo em função das pressões em A e B. Uma vez que o sistema vai de A para B e de C para D por processos adiabáticos e o fluido operante é um gás ideal, vem da equação (11.21) que

$$T_A p_A^{1/\gamma-1} = T_B p_B^{1/\gamma-1} \quad \text{e} \quad T_C p_C^{1/\gamma-1} = T_D p_D^{1/\gamma-1}. \quad (12.28)$$

Como $p_D = p_A$ e $p_C = p_B$, estas equações podem reescrever-se na forma

$$T_A = T_B \left(\frac{p_B}{p_A} \right)^{1/\gamma-1} \quad \text{e} \quad T_D = T_C \left(\frac{p_B}{p_A} \right)^{1/\gamma-1}. \quad (12.29)$$

Introduzindo as equações (12.29) na equação (12.14), obtém-se

$$\eta_{BJ} = 1 - \frac{T_C \left(\frac{p_B}{p_A} \right)^{1/\gamma-1} - T_B \left(\frac{p_B}{p_A} \right)^{1/\gamma-1}}{T_C - T_B} = 1 - \left(\frac{p_B}{p_A} \right)^{1/\gamma-1}. \quad (12.30)$$

Mais uma vez, tal como sucede com os ciclos de Otto e de Diesel, também o rendimento do ciclo de Brayton-Joule depende do coeficiente de expansão adiabática, γ , do fluido operante.

12.3.4. Ciclo de Stirling

O *ciclo de Stirling* é uma aproximação ao modo de funcionamento de uma máquina de Stirling, um dispositivo inicialmente concebido para elevar água em minas. Consiste em dois processos isotérmicos e dois processos isocóricos, conforme representado na figura 12.5. É, portanto, semelhante ao ciclo de Otto,

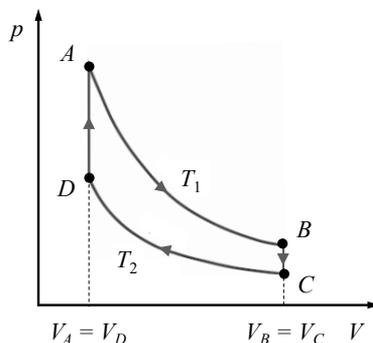


Figura 12.5. Representação em diagrama p - V de um ciclo de Stirling executado por uma máquina térmica constituída por um gás ideal encerrado num cilindro munido de um êmbolo móvel.

Admitamos, novamente, que o fluido operante é um gás ideal e que o ciclo se inicia no ponto *A* do diagrama.

- A → B:** o gás sofre expansão isotérmica, à temperatura da fonte quente, T_1 , do volume V_A até ao volume $V_B > V_A$. No diagrama p - V , este processo é representado por um segmento da isotérmica $pV = nRT_1$.
- B → C:** o gás é arrefecido a volume constante igual a V_B , da temperatura da fonte quente, T_1 , até à temperatura da fonte fria, $T_2 < T_1$. Este processo é representado pelo segmento de recta vertical $[BC]$.
- C → D:** o gás sofre compressão isotérmica, à temperatura da fonte fria, T_2 , do volume $V_C = V_B$ até ao volume $V_D = V_A$. Este processo é re-presentado por um segmento da isotérmica $pV = nRT_2$.
- D → A:** o gás é aquecido, a volume constante igual a $V_D = V_A$, da temperatura da fonte fria, T_2 , até à temperatura da fonte quente, T_1 . Este processo é representado pelo segmento de recta vertical $[AD]$.

Vamos agora calcular o rendimento do ciclo de Stirling. É mais fácil começar a análise pelos processos isocóricos.

- Processos isocóricos ($B \rightarrow C$ e $D \rightarrow A$): tem-se, evidentemente, que $W_{BC} = W_{DA} = 0$. Por outro lado, uma vez que o fluido operante é o gás ideal, segue-se da equação (10.20) que,

$$Q_{BC} = C_V n(T_2 - T_1) < 0 \tag{12.31}$$

e que

$$Q_{DA} = C_V n(T_1 - T_2) > 0. \tag{12.32}$$

- Processos isotérmicos ($A \rightarrow B$ e $C \rightarrow D$): uma vez que o fluido operante é o gás ideal, cuja energia interna apenas depende da temperatura, tem-se que $\Delta U = 0$, logo, pela primeira lei da Termodinâmica, $Q = W$. Do exemplo 11.1 vem, então, que

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0 \tag{12.33}$$

e que

$$Q_{CD} = W_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0. \tag{12.34}$$

Tem-se, assim, para o trabalho total realizado sobre a vizinhança e o calor total recebido durante o ciclo de Stirling:

$$W = W_{AB} + W_{CD} \quad \text{e} \quad Q = Q_{AB} + Q_{DA}. \tag{12.35}$$

Das equações (12.31) a (12.35) vem então que

$$\eta_{\text{Stirling}} = \frac{W}{Q} = \frac{nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} + nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}}{nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} + C_V n(T_1 - T_2)}. \quad (12.36)$$

Como $V_C = V_B$ e $V_D = V_A$, a equação anterior simplifica-se, resultando

$$\eta_{\text{Stirling}} = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \frac{R \ln \frac{V_B}{V_A}}{C_V \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) + R \ln \frac{V_B}{V_A}}. \quad (12.37)$$

Ou seja, o rendimento do ciclo de Stirling é igual ao rendimento do ciclo de Carnot, equação (12.9), multiplicado por um factor que é claramente menor do que 1, logo (como seria de esperar!) $\eta_{\text{Stirling}} < \eta_{\text{Carnot}}$. O rendimento do ciclo de Sterling depende das propriedades do fluido operante através do seu calor específico molar a volume constante,

Relativamente aos motores a gasolina (Otto) e gasóleo (Diesel), a máquina de Stirling tem a vantagem da simplicidade: não se dá combustão no interior da máquina, que pode, por isso, utilizar qualquer fonte de energia externa como fonte quente – por exemplo, luz solar ou calor obtido por combustão de biomassa. Por esta razão, tem havido, nos últimos anos, um renascer de interesse na máquina de Stirling, no âmbito da utilização de energias renováveis. Isto além do seu valor enquanto brinquedo didáctico para demonstração dos princípios da Termodinâmica.

12.3.5. Ciclo de Ericsson

O ciclo de Ericsson é muito semelhante ao ciclo de Sterling: consiste em dois processos isotérmicos e dois processos isobáricos, conforme representado na figura 12.6.

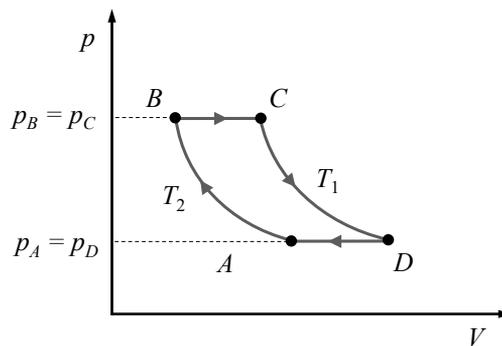


Figura 12.6. Representação em diagrama p - V de um ciclo de Ericsson executado por uma máquina térmica constituída por um gás ideal encerrado num cilindro munido de um êmbolo móvel.

Admitamos, novamente, que o fluido operante é um gás ideal e que o ciclo se inicia no ponto A do diagrama. A única diferença relativamente ao ciclo de Stirling está em que

os processos $B \rightarrow C$ e $D \rightarrow A$ são isobáricos e não isocóricos. Para os processos isotérmicos ($A \rightarrow B$ e $C \rightarrow D$) continuam a ser válidas as equações (12.33) e (12.34). Quanto aos processos isobáricos, uma vez que o fluido operante é o gás ideal, segue-se da equação (11.13) que

$$Q_{BC} = C_p n(T_2 - T_1) < 0 \quad (12.38)$$

e que

$$Q_{DA} = C_p n(T_1 - T_2) > 0. \quad (12.39)$$

Mais uma vez, a variação de energia interna ao longo de todo o ciclo tem de ser nula, logo

$$Q_{AB} - W_{AB} + Q_{BC} - W_{BC} + Q_{CD} - W_{CD} + Q_{DA} - W_{DA} = 0,$$

donde

$$W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = Q_{AB} + Q_{CD}. \quad (12.40)$$

Ou seja, o trabalho realizado durante todo o ciclo é igual ao calor trocado durante os processos isotérmicos – tal como sucede no ciclo de Sterling.

Tem-se, assim, para o trabalho total realizado sobre a vizinhança e o calor total recebido durante o ciclo de Ericsson:

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} \quad \text{e} \quad Q = Q_{AB} + Q_{DA}. \quad (12.41)$$

Das equações (12.33), (12.34) e (12.38) a (12.41) vem então que

$$\eta_{\text{Ericsson}} = \frac{W}{Q} = \frac{nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} + nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}}{nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} + C_p n(T_1 - T_2)}. \quad (12.42)$$

Como os processos $A \rightarrow B$ e $C \rightarrow D$ são isotérmicos, o fluido operante é um gás ideal e, além disso, $p_D = p_A$, e $p_C = p_B$, vem que

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{p_A}{p_B} \quad \text{e} \quad \frac{V_D}{V_C} = \frac{p_C}{p_D} = \frac{p_B}{p_A}. \quad (12.43)$$

Introduzindo estes resultados na equação (12.42), obtém-se

$$\eta_{\text{Ericsson}} = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \frac{R \ln \frac{p_A}{p_B}}{C_p \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) + R \ln \frac{p_A}{p_B}}. \quad (12.44)$$

Ou seja, o rendimento do ciclo de Ericsson é igual ao rendimento do ciclo de Carnot, equação (12.9), multiplicado por um factor que é claramente menor do que 1, logo $\eta_{\text{Ericsson}} < \eta_{\text{Carnot}}$, como seria de esperar. O rendimento do ciclo de Ericsson depende das propriedades do fluido operante através do seu calor específico molar a pressão constante, C_p . Finalmente, repare-se que a equação (12.44) pode obter-se da equação (12.37), que dá o rendimento do ciclo de Sterling, simplesmente substituindo C_V por C_p e V_B/V_A por p_A/p_B .

12.4. Entropia

A segunda lei da Termodinâmica é algo diferente das outras leis físicas que encontramos até agora, no sentido em que não é expressa através de uma equação; em vez disso, exprime uma impossibilidade. É, no entanto, possível dar-lhe forma matemática introduzindo uma nova variável de estado, a que se chamou *entropia*, S . A segunda lei da Termodinâmica pode então reformular-se como se segue:

Em qualquer sistema termodinâmico isolado (ou seja, cuja energia interna se mantém constante) a entropia nunca pode diminuir, tendo-se sempre $\Delta S \geq 0$. Logo, o estado de equilíbrio de um sistema isolado (ou seja, o estado para o qual ele tende se deixarmos passar tempo suficiente) é um estado de entropia máxima.

A entropia dá-nos, assim, o sentido “natural” dos processos termodinâmicos: abandonado a si mesmo, um sistema vai seguir o caminho que aumenta (ou, pelo menos, não diminui) a sua entropia. Isto pode parecer um pouco misterioso, mas tudo se torna mais claro se considerarmos a *interpretação microscópica da entropia*, como sendo, essencialmente, uma medida da desordem de um sistema físico. Uma vez que existem, regra geral, muitas mais maneiras de um sistema estar desordenado do que ordenado, ele tenderá naturalmente para o estado desordenado.

Para calcularmos a entropia, consideremos a expansão isotérmica infinitesimal de um gás ideal – para maior transparência e, como veremos, sem grande perda de generalidade. Fornecemos uma quantidade de calor dQ ao gás e permitimos que este se expanda apenas o suficiente para que a sua temperatura se mantenha constante. Uma vez que a energia interna de um gás ideal apenas depende da temperatura, a energia interna vai manter-se constante durante este processo, logo

$$dU = 0 \Rightarrow dQ = dW = pdV = \frac{nRT}{V}dV \Leftrightarrow \frac{dV}{V} = \frac{1}{nR} \frac{dQ}{T}. \quad (12.45)$$

Note-se agora que, após a expansão, o gás se encontra claramente num estado mais desordenado do que antes, uma vez que as suas moléculas dispõem de um volume maior onde vagar. Logo, a variação relativa de volume, dV/V , é uma medida da variação (neste caso aumento) da desordem do sistema, a qual é, portanto, proporcional a dQ/T .

Faz, então, sentido definir a variação infinitesimal de entropia, dS , num processo infinitesimal reversível, como

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (12.46)$$

Conclui-se desta expressão que a entropia é uma grandeza escalar, com dimensões de energia a dividir por temperatura e que as suas unidades SI são J K^{-1} . Interpretando a entropia como uma medida da desordem de um sistema termodinâmico, o significado da definição (12.46) é o seguinte: um sistema a temperatura elevada está já muito desordenado, por isso a adição a esse sistema de uma dada quantidade de calor vai desordená-lo menos (isto é, levar a um menor aumento da sua entropia) do que se a mesma quantidade de calor for adicionada a um sistema a temperatura mais baixa.

Num processo reversível não infinitesimal, a variação da entropia vai ser dada por

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \quad (12.47)$$

onde 1 e 2 designam os estados inicial e final, respectivamente. Repare-se que esta definição apenas nos permite calcular variações da entropia de um sistema termodinâmico, não o seu valor, o qual está, portanto, definido a menos de uma constante arbitrária (tal como sucede, por exemplo, com a energia potencial gravítica). A entropia, tal como a energia interna, é uma função de estado de um sistema termodinâmico, ou seja, depende apenas dos valores das variáveis de estado do sistema. Logo, todos os sistemas caracterizados pelos mesmos valores das variáveis de estado terão a mesma entropia. Mais, a entropia de todos os sistemas tende para o mesmo valor quando a sua temperatura absoluta tende para zero, resultado este que constitui a *terceira lei da Termodinâmica*.

Exemplo 12.2

Determinar a variação de entropia quando 1 kg de água líquida é aquecido de 10°C até 90°C . Dado: $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4190 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$.

Resolução:

Neste caso, a temperatura inicial é $T_1 = 10^\circ\text{C} = 283.15 \text{ K}$ e a temperatura final é $T_2 = 90^\circ\text{C} = 363.15 \text{ K}$. Pela definição de calor específico, vem que

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \Leftrightarrow dQ = mc dT$$

Substituindo na expressão para a variação de entropia, obtém-se

$$\Delta S = mc \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1} = 1 \times 4190 \times \ln \frac{363.15}{283.15} = 1042.6 \text{ J K}^{-1}$$

Concluimos este capítulo (e o livro) com a demonstração de um resultado clássico: a variação de entropia de um gás ideal. Das equações (10.5), (11.9) e (12.47) vem que

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} nC_V \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} nR \frac{dV}{V} = n \left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right). \quad (12.48)$$

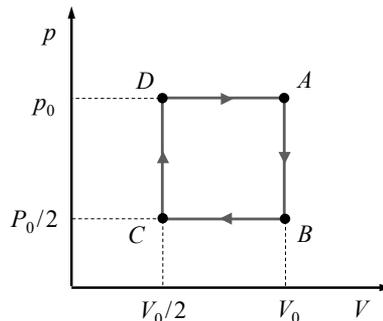
Utilizando as equações (10.6) e (11.12), é fácil mostrar que a equação (12.48) pode também ser escrita na forma

$$\Delta S = n \left(C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \right). \quad (12.49)$$

(*Exercício:* verifique.)

PROBLEMAS

- 12.1. Determine o rendimento máximo de uma máquina térmica que opera entre a temperatura ambiente (fonte fria) e $400\text{ }^{\circ}\text{C}$ (fonte quente), se a temperatura ambiente for:
- $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$.
 - $27\text{ }^{\circ}\text{C}$.
- 12.2. Uma máquina de Carnot recebe calor de uma fonte quente a 2000 K e cede calor a 1200 K a outra máquina de Carnot, a qual, por sua vez, cede calor a uma fonte fria a 600 K . Determine:
- O rendimento de cada uma das máquinas de Carnot, bem como o rendimento do conjunto das duas máquinas.
 - O trabalho realizado por cada máquina durante um ciclo se a fonte quente a 2000 K fornecer uma quantidade de calor igual a 700 J .
- 12.3. Uma mole de um gás ideal descreve um ciclo de Carnot entre as temperaturas de 300 K e 500 K . No processo isotérmico que se dá à temperatura da fonte quente, um volume inicial de 1 litro de gás é expandido até ocupar um volume de 4 litros. Determine o trabalho realizado durante um ciclo e as quantidades de calor trocadas entre o gás e cada uma das fontes.
- 12.4. Uma máquina térmica realiza o ciclo representado no diagrama p - V da figura abaixo, o qual consiste em dois processos isocóricos e dois processos isobáricos. O fluido operante é um gás ideal (não necessariamente monoatômico). Admita que, no ponto A , a temperatura é T_0 .



Determine:

- O trabalho realizado durante um ciclo e as quantidades de calor trocadas entre o gás e cada uma das fontes.
- A expressão do rendimento do ciclo. Se o fluido operante for um gás ideal diatômico, compare o rendimento deste ciclo com o de um ciclo de Carnot funcionando entre as mesmas temperaturas de fonte quente e de fonte fria (note que as temperaturas da fonte quente e da fonte fria são, respectivamente, as temperaturas mais alta e mais baixa atingidas durante o ciclo).

- 12.5. Pretende-se que uma máquina térmica tenha um rendimento de 40 % utilizando uma fonte quente à temperatura de 250 °C. Qual é a temperatura máxima da fonte fria que se pode utilizar para que este rendimento seja, em princípio, atingível?
- 12.6. Uma máquina a vapor realiza 6000 J de trabalho em cada ciclo, mas perde 578 J em atrito e cede 2 kcal de calor ao meio ambiente. Determine:
- A quantidade de calor que a fonte quente fornece à máquina em cada ciclo.
 - O rendimento da máquina.
- 12.7. Um motor de automóvel realiza um ciclo de Otto com taxa de compressão $r = 9$. Se a potência do motor (trabalho realizado a dividir pelo tempo em que é realizado) for 150 kW, qual é a quantidade de calor fornecida pelo combustível em 1 minuto? *Dado:* $\gamma = 1.4$.
- 12.8. Uma *máquina frigorífica* é um dispositivo que, mediante a absorção de trabalho, retira calor de uma fonte fria e cede-o a uma fonte quente. Define-se a eficiência de uma máquina frigorífica, K , como a razão entre o calor por ela retirado da fonte fria e o trabalho por ela absorvido. Um exemplo de máquina frigorífica é o *frigorífico de Carnot*, que realiza o ciclo de Carnot em sentido inverso ao representado na figura 12.1. Mostre que a eficiência de um frigorífico de Carnot é dada por

$$K_{\text{Carnot}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

onde T_1 e T_2 são as temperaturas da fonte quente e da fonte fria, respectivamente.

- 12.9. Considere uma máquina frigorífica operando entre as temperaturas de 210 K e 310 K. Sabe-se que a eficiência da máquina é metade da de um frigorífico de Carnot operando entre as mesmas duas temperaturas, e que, em cada ciclo, a máquina absorve 600 J da fonte fria. Determine a quantidade de calor cedida à fonte quente em cada ciclo.
- 12.10. Mostre que o rendimento do ciclo de Diesel, dado pela equação (12.22), se pode reescrever na forma

$$\eta_{\text{Diesel}} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{r_e^\gamma - 1}{r^{\gamma-1} (r_e - 1)}.$$

onde $r = V_A/V_B$ é a taxa de compressão e $r_e = V_C/V_B$ é a *taxa de expansão* ou *cutoff ratio*.

- 12.11. Considere uma máquina que realiza um ciclo de Brayton-Joule. A máquina admite ar à pressão de 1 atm, e tem rendimento 0.32. Qual é a pressão máxima atingida no seu interior? *Dado:* $\gamma = 1.4$.
- 12.12. Considere uma máquina de Stirling simples que opera entre as temperaturas ambiente (fonte fria, 15 °C) e a de uma chávena de chá acabado de fazer (fonte

quente, 80 °C). Qual deverá ser a taxa de compressão ($r = V_B/V_A$) desta máquina para que o seu rendimento seja 0.1? Admita que o fluido operante (ar) é um gás ideal diatômico.

12.13. Uma mole de uma substância, inicialmente à temperatura de 0 °C, é aquecida até 100 °C por três processos diferentes:

- i) Imersão num banho térmico à temperatura de 100 °C;
- ii) Imersão num banho térmico à temperatura de 50 °C até que seja atingido o equilíbrio térmico, seguidamente colocação em contacto com outro banho térmico à temperatura de 100 °C;
- ii) Imersão sucessiva em banhos térmicos com temperaturas de 30 °C, 60 °C e 100 °C, em cada caso até que seja atingido o respectivo equilíbrio.

Determine a variação de entropia associada a cada um destes processos.

Dado: $C_p = 25 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$.

12.14. Determine a variação de entropia associada à expansão isotérmica de n moles de um gás ideal, de um volume inicial V para um volume final $2V$.

12.15. A energia interna de um gás de Van der Waals é dada por

$$U_{\text{vdw}} = C_V nT - \frac{na}{V} + U_0.$$

onde U_0 é uma constante arbitrária.

- a) Determine a expressão da variação de entropia do gás de Van de Waals.
- b) Utilize o resultado da alínea a) para deduzir a expressão das adiabáticas do gás de Van der Waals.

12.16. Um balde contendo 5 kg de água à temperatura de 20 °C é posto fora de uma casa, de modo a arrefecer até à temperatura do exterior, que é 10 °C. Sabendo que o calor específico da água é: $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4190 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$, determine:

- a) A variação de entropia da água.
- b) A variação de entropia da atmosfera circundante.
- c) A variação de entropia total do universo. Que pode concluir?

APÊNDICE 1

CONSTANTES FÍSICAS FUNDAMENTAIS ⁸⁹

Constante	Símbolo	Valor ^(a)
Velocidade da luz no vácuo	c	$2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Permeabilidade magnética do vácuo	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$
Constante dielétrica do vácuo	ϵ_0	$8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
Constante gravitacional	G	$6.67384(80) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Constante de Planck	h	$6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Carga elementar	e	$1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$
Massa do electrão	m_e	$9.10938291(40) \times 10^{-31} \text{ kg}$
Massa do prótão	m_p	$1.672621777(74) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Massa do neutrão	m_n	$1.674927351(74) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Constante de Avogadro	N_A	$6.02214076 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.670367(13) \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Constante dos gases ideais	R	$8.3144626... \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

^(a) Os valores da velocidade da luz, das constantes de Planck, de Avogadro e de Boltzmann, e da permeabilidade magnética do vácuo são valores exactos. A constante dielétrica do vácuo relaciona-se com aquelas duas constantes pela relação $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$. Desta modo, ϵ_0 pode ser calculado com a precisão que se pretender. Relativamente às restantes constantes, os números entre parêntesis indicam a incerteza com que são conhecidos os últimos algarismos; por exemplo, o valor da massa do electrão $m_e = 9.10938291(40) \times 10^{-31} \text{ kg}$ significa que $m_e = (9.10938291 \pm 0.00000040) \times 10^{-31} \text{ kg}$.

⁸⁹ Fonte bibliográfica: National Institute of Standards and Technology (<http://physics.nist.gov/cuu>).

APÊNDICE 2

ALGUNS DADOS ASTRONÓMICOS⁹⁰

Corpo celeste	Massa (kg)	Raio ^(a) (m)	Raio Orbital ^(b) (m)	Período Orbital ^(c)	Período de rotação
Sol	1.99×10^{30}	6.96×10^8	—	—	37 d/26 d ^(d)
Mercúrio	3.30×10^{23}	2.44×10^6	5.79×10^{10}	88.0 d	58.7 d
Vénus	4.87×10^{24}	6.05×10^6	1.08×10^{11}	224.7 d	243 d
Terra	5.97×10^{24}	6.38×10^6	1.50×10^{11}	365.3 d	23 h 56 min
Lua	7.35×10^{22}	1.74×10^6	3.84×10^8	27.3 d	27.3 d
Marte	6.42×10^{23}	3.40×10^6	2.28×10^{11}	687.0 d	1.03 d
Júpiter	1.90×10^{27}	6.91×10^7	7.78×10^{11}	11.86 anos	0.409 d
Saturno	5.68×10^{26}	6.03×10^7	1.43×10^{12}	29.45 anos	0.426 d
Úrano	8.68×10^{25}	2.56×10^7	2.87×10^{12}	84.02 anos	0.451 d
Neptuno	1.02×10^{26}	2.48×10^7	4.50×10^{12}	164.8 anos	0.658 d
Plutão	1.31×10^{22}	1.15×10^6	5.91×10^{12}	247.9 anos	6.39 d

^(a) O “Raio” é o valor do raio equatorial do corpo celeste.

^(b) O “Raio orbital” é a distância média ao Sol, no caso dos planetas, e a distância média à Terra, no caso da Lua.

^(c) O “período orbital” refere-se ao período de translação em torno do Sol, no caso dos planetas, e ao período de translação em torno da Terra, no caso da Lua.

^(d) Sendo constituído por uma massa de gás ionizado (plasma), o Sol não é um corpo rígido, tendo um movimento de rotação nos pólos diferente do movimento de rotação no equador. O período de rotação nos pólos é de 37 dias enquanto que no equador é de 26 dias.

⁹⁰ Fonte bibliográfica: NASA Jet Propulsion Laboratory Solar System Dynamics Group (<http://ssd.jpl.nasa.gov>).

APÊNDICE 3

CONVERSÃO DE UNIDADES

A3.1. Sistema CGS

A designação do sistema de unidades CGS deriva das iniciais das suas unidades de base para a Mecânica: o centímetro, o grama e o segundo. Na tabela seguinte encontram-se os factores de conversão de unidades entre o sistema CGS e o sistema SI de algumas grandezas mecânicas.

Grandeza física	Unidade CGS (símbolo)	Factor de conversão CGS → SI
Comprimento	centímetro (cm)	$1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$
Massa	grama (g)	$1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$
Tempo	segundo (s)	—
Área	centímetro quadrado (cm ²)	$1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$
Volume	centímetro cúbico (cm ³)	$1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$
Velocidade	centímetro por segundo (cm s ⁻¹)	$1 \text{ cm s}^{-1} = 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$
Aceleração	centímetro por segundo quadrado (cm s ⁻²)	$1 \text{ cm s}^{-2} = 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$
Massa volúmica	grama por centímetro cúbico (g cm ⁻³)	$1 \text{ g cm}^{-3} = 10^3 \text{ kg cm}^{-3}$
Força	dine (dyn)	$1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$
Impulso de uma força	dine segundo (dyn s)	$1 \text{ dyn s} = 10^{-5} \text{ N s}$
Momento de uma força	dine centímetro (dyn cm)	$1 \text{ dyn cm} = 10^{-7} \text{ N m}$
Momento linear	grama centímetro por segundo (g cm s ⁻¹)	$1 \text{ g cm s}^{-1} = 10^{-5} \text{ kg m s}^{-1}$
Momento de inércia	grama centímetro quadrado (g cm ²)	$1 \text{ g cm}^2 = 10 \text{ kg m}^2$
Trabalho ou energia	erg (erg)	$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$
Potência	erg por segundo (erg s ⁻¹)	$1 \text{ erg s}^{-1} = 10^{-7} \text{ W}$
Pressão	bar (bar)	$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
Viscosidade	poise (P)	$1 \text{ P} = 10^{-1} \text{ Pa s}$

A3.2. Outros factores de conversão

Comprimento

$$1 \text{ fermi (fm)} = 10^{-15} \text{ m}$$

$$1 \text{ angstrom (Å)} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$1 \text{ polegada (in ou ")} = 0.0254 \text{ m}$$

$$1 \text{ pé (ft)} = 0.3048 \text{ m}$$

- 1 jarda (yd) = 0.9144 m
 1 milha (mi) = 1609.3 m
 1 unidade astronómica (UA) = 1.496×10^{11} m
 1 ano-luz (ly) = 9.46×10^{15} m
 1 parsec (pc) = 3.09×10^{16} m

Massa

- 1 unidade de massa atómica (u) = 1.66057×10^{-27} kg
 1 libra (lb) = 0.4536 kg
 Tempo
 1 ano (yr) = 3.156×10^7 s
 1 dia (d) = 8.640×10^4 s
 1 hora (h) = 3600 s
 1 minuto (min) = 60 s

Ângulo plano

- 1 grau (°) = 1.745×10^{-2} rad
 1 minuto (′) = 2.909×10^{-4} rad
 1 segundo (″) = 4.848×10^{-6} rad

Área

- 1 milha quadrada (mi²) = 2.590×10^6 m²
 1 pé quadrado (ft²) = 9.290×10^{-2} m²
 1 polegada quadrada (in²) = 6.452×10^{-4} m²

Volume

- 1 litro (l) = 1×10^{-3} m³
 1 pé cúbico (ft³) = 2.832×10^{-2} m³
 1 polegada cúbica (in³) = 1.639×10^{-5} m³
 1 galão (gal) = 4.546×10^{-3} m³ (sistema imperial britânico)
 1 galão (gal) = 3.785×10^{-3} m³ (sistema americano)

Velocidade

- 1 quilómetro por hora (km h⁻¹) = 2.778×10^{-1} m s⁻¹
 1 milha por hora (mi h⁻¹ ou m.p.h.) = 0.447 m s⁻¹
 Velocidade angular
 1 rotação por minuto (rot min⁻¹ ou r.p.m) = 1.047×10^{-1} rad s⁻¹
 1 rotação por hora (rot h⁻¹ ou r.p.h.) = 1.745×10^{-3} rad s⁻¹

Força

- 1 quilograma força (kgf) = 9.8 N
 1 libra força (lbf) = 4.448 N

Pressão

1 atmosfera (atm) = 101325 Pa

1 bar (bar) = 10^5 Pa

1 milímetro de mercúrio (mmHg) = 133.322 Pa

1 libra-força por polegada quadrada (psi) = 6894.757 Pa

Energia

1 electrão-volt (eV) = 1.602×10^{-19} J

1 unidade térmica britânica (BTU) = 1055 J

1 caloria (cal) = 4.186 J

1 watt-hora (Wh) = 3.6×10^3 J

1 quilowatt-hora (kWh) = 3.6×10^6 J

Potência

1 caloria por segundo (cal s^{-1}) = 4.186 W

1 cavalo vapor métrico (cv) = 735 W

1 cavalo vapor (hp) = 745.7 W

Conversão massa-energia

1 u = $931.5 \text{ MeV}/c^2$

APÊNDICE 4

ALFABETO GREGO

Nome da letra	Maiúscula	Minúscula	Nome da letra	Maiúscula	Minúscula
Alfa	Α	α	Nu	Ν	ν
Beta	Β	β	Csi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	Ómicron	Ο	ο
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Épsilon	Ε	ε	Ró	Ρ	ρ
Zeta	Ζ	ζ	Sigma	Σ	σ
Éta	Η	η	Tau	Τ	τ
Teta	Θ	θ	Upsilon	Υ	υ
Iota	Ι	ι	Fi	Φ	φ, ϕ
Kapa	Κ	κ	Qui	Χ	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Miu	Μ	μ	Ómega	Ω	ω

APÊNDICE 5

RELAÇÕES MATEMÁTICAS

A5.1. Geometria

Perímetro de uma circunferência de raio R : $P = 2\pi R$

Área de um círculo de raio R : $S = \pi R^2$

Área de uma superfície esférica de raio R : $S = 4\pi R^2$

Volume de uma esfera de raio R : $V = 4\pi R^3/3$

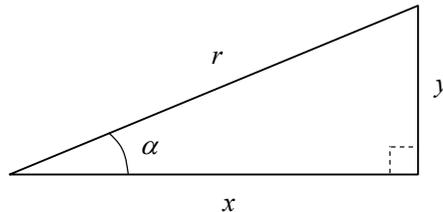
Área da superfície de um cilindro de raio R e altura h : $S = 2\pi R(R+h)$

Volume de um cilindro de raio R e altura h : $V = \pi R^2 h$

A5.2. Trigonometria

A.5.2.1. Funções trigonométricas

Considere-se o seguinte triângulo rectângulo:



Teorema de Pitágoras: $r^2 = x^2 + y^2$

Funções trigonométricas do ângulo a :

$\sin\alpha = y/r$; $\cos\alpha = x/r$; $\tan\alpha = y/x$; $\cot\alpha = x/y$

A.5.2.2. Identidades trigonométricas

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \pi/2) = \pm \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \pi/2) = \mp \sin\alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

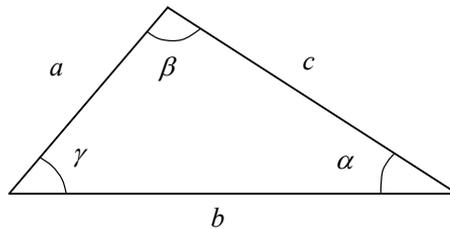
$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

A.5.2.3. Lei dos senos e lei dos co-senos

Considere-se o seguinte triângulo de ângulos α , β e γ opostos, respectivamente, aos lados a , b e c :



Lei dos senos: $\sin\alpha / a = \sin\beta / b = \sin\gamma / c$

Lei dos co-senos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$$

A5.3. Desenvolvimentos em série de Taylor

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \text{válido para todo o } x$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \text{válido para todo o } x \text{ (expresso em radianos)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \text{válido para todo o } x \text{ (expresso em radianos)}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \text{válido para } |x| < \pi/2$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \text{ v\u00e1lido para todo o } x$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \text{ v\u00e1lido para } |x| < 1$$

Para $x \ll 1$ s\u00e3o aceit\u00e1veis as seguintes aproxima\u00e7\u00f5es:

$$\begin{array}{ll} (1+x)^n \approx 1+nx & \sin x \approx x \\ e^x \approx 1+x & \cos x \approx 1 \\ \ln(1+x) \approx x & \tan x \approx x \end{array}$$

A5.4. Derivadas e primitivas

A.5.4.1. Derivadas e primitivas de fun\u00e7\u00f5es elementares

$f(u)$	df/dx	$f(x)$	$\int f(x)dx$
u^n	$nu^{n-1} du/dx$	x^n	$[x^{n+1}/n+1] + C \quad (n \neq -1)$
u^{-1}	$-(1/u^2) du/dx$	x^{-1}	$\ln x + C$
$\sin u$	$\cos u du/dx$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos u$	$-\sin u du/dx$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\tan u$	$\sec^2 u du/dx$	$\tan x$	$-\ln(\cos x) + C$
$\cot u$	$\csc^2 u du/dx$	$\cot x$	$\ln(\sin x) + C$
e^u	$e^u du/dx$	e^x	$e^x + C$
$\ln u$	$(1/u) du/dx$	$\ln x$	$\ln x - x + C$

A.5.4.2. Outras primitivas

$$\int \frac{a}{1+ax} dx = \ln(1+ax) + C$$

$$\int \frac{1}{a+bx} dx = \frac{1}{b} \ln(a+bx) + C$$

$$\int \frac{x}{a+bx} dx = \frac{1}{b^2} [a+bx - a \ln(a+bx)] + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \ln(\sqrt{a^2+x^2} + x) + C$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{x \sin ax}{a} + \frac{\cos ax}{a^2} + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{2} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{2} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$\int \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \sqrt{a^2 + x^2} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a + bx}} dx = \frac{2}{b} \sqrt{a + bx} + C$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} + C$$

$$\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx$$

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx$$

$$\int \tan ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sec ax) + C$$

$$\int a^{ax} dx = \frac{a^{ax}}{n \ln a} + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int x e^x dx = e^x (x-1) + C$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax-1) + C$$

$$\int \ln ax dx = x(\ln ax - 1) + C$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln x) + C$$

A.5.4.3. Integração por partes

$$\int_a^b u \frac{dv}{dx} dx = [uv]_a^b - \int_a^b v \frac{du}{dx} dx$$

A5.5. Coordenadas polares, esféricas e cilíndricas

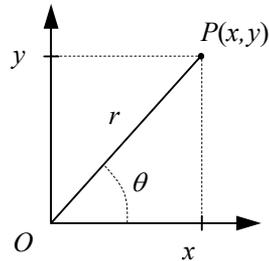
A.5.5.1. Coordenadas polares, (r, θ)

Relação entre (x, y) e (r, θ):

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Jacobiano da transformação (x, y) → (r, θ):

$$J \begin{pmatrix} x, y \\ r, \theta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$



Elemento de área: $dS = dx dy = r dr d\theta$

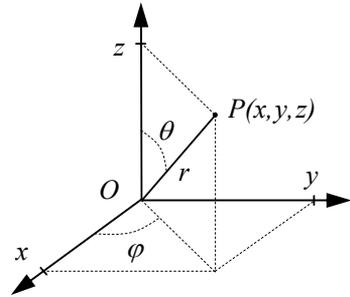
A.5.5.2. Coordenadas esféricas, (r, θ, φ)

Relação entre (x, y, z) e (r, θ, φ) :

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Jacobiano da transformação $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$:

$$J\left(\begin{matrix} x, y, z \\ r, \theta, \varphi \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r^2 \sin\theta$$



Elemento de volume: $dV = dx dy dz = r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$

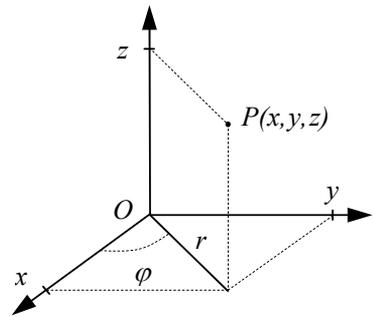
A.5.5.3. Coordenadas cilíndricas, (r, θ, φ)

Relação entre (x, y, z) e (r, φ, z) :

$$\begin{cases} x = r \cos\varphi \\ y = r \sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Jacobiano da transformação $(x, y, z) \rightarrow (r, \varphi, z)$:

$$J\left(\begin{matrix} x, y, z \\ r, \varphi, z \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = r$$



Elemento de volume: $dV = dx dy dz = r dr d\varphi dz$

BIBLIOGRAFIA

Física Geral

- P. M. Fishbane, S. Gasiorowicz and S. T. Thornton, *Physics for Scientists and Engineers*, 2nd edition, Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- D. Halliday, R. Resnick and J. Walker, *Fundamental of Physics*, 6th edition, John Wiley & Sons, New York, 2001.
- M. Alonso e E. J. Finn, *Física*. Escolar Editora, Lisboa, 2012.
- P. A. Tipler e G. Mosca, *Física para Cientistas e Engenheiros*, Vols. 1 e 2, 6.^a edição, LTC, São Paulo, 2009.
- H. Young and R. A. Freedman, *Sears and Zemansky's University Physics*, 11th edition, Addison Wesley, New York, 2004

Mecânica

- A. J. Silvestre e P. I. C. Teixeira, *Mecânica: Uma Introdução*, Coleção Trajectos Ciência, Gradiva, 5.^a edição, 3.^a edição Gradiva, 2021.
- A. P. French *Newtonian Mechanics*, M.I.T. Introductory Physics Series, W. W. Norton & Co., New York, 1971.
- D. Morin, *Introduction to Classical Mechanics with Problems and Solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- R. Feynman, R. B. Leighton and M. L. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1963.

Electromagnetismo

- D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd edition, Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- P. Lorrain and A. R. Corson, *Electromagnetism, Principles and Applications*, 2nd edition, W. H. Freeman and Company, New York, 1997.
- J. A. Edminister, *Circuitos Eléctricos*. McGraw-Hill, São Paulo, 1985.

Termodinâmica

- H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2nd edition, John Wiley & Sons, New York, 1985.
- E. Fermi, *Termodinâmica*, Almedina, Coimbra, 1978.

- J. Güémez, C. Fiolhais e M. Fiolhais, *Fundamentos de Termodinâmica do Equilíbrio*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1998.
- M. W. Zemansky and R. H. Dittman, *Heat and Thermodynamics*, 7th edition. McGraw-Hill, New York, 1997.

Grandezas e Unidades

- J. Valadares e J. M. Tavares, *Grandezas e Medidas*, 1.^a edição, Edições da Universidade Aberta, n.º 254, Universidade Aberta, Lisboa, 2002.
- G. Almeida, *Grandezas e Unidades Físicas, Sistema Internacional de Unidades*, 2.^a edição, Plátano Editora, Lisboa, 1997.
- The new International System of Units (SI)*, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, German National Metrology Institute, 2017.
- On the revision of the International System of Units (SI)*, draft resolution A – 26th meeting of the General Conference on Weights and Measures, Paris, 13-16 November 2018.
- The International System of Units (SI)*, draft of the 9th SI Brochure, Bureau International des Poids et Mesures, 2018.

Matemática

- S. K. Stein and A. Barcellos, *Calculus and Analytic Geometry*, 5th edition, McGraw-Hill, New York, 1992.
- D. W. Jordan and P. Smith, *Mathematical Techniques: an Introduction for the Engineering, Physical and Mathematical Sciences*, 4th edition, Oxford University Press, New York, 2008.
- M. R. Spiegel, *Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis*, 1st edition, Schaum's Outlines, McGraw-Hill, New York, 1959.
- D. A. Fleisch, *A Student's Guide to Vectors and Tensors*, 1st edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

Artigos citados no texto

- N. P. Linthorne and D. J. Everett, “Release Angle for Attaining Maximum Distance in the Soccer Throw-in”, *Sports Biomechanics* 5, 243-260 (2006).
- N. P. Linthorne, “A New Angle on Throwing”, *Physics World*, June 2006, pp. 29-30.
- P. Patrício, “The Hertz Contact in Chain Elastic Collisions”, *American Journal of Physics* 72, 1488-1491 (2004).

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Capítulo 1

- 1.1. $T^2L^3M^{-1}$; $m^3 kg^{-1} s^{-2}$ ou $N m^2 kg^{-2}$.
- 1.2. $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$.
- 1.3. $5.24 \times 10^{-16} \text{ kg}$.
- 1.4. $1.89 \times 10^{22} \text{ cm}^3$.
- 1.5. 0.12 au min^{-1} .
- 1.6. $9 \times 10^{49} \text{ átomos}$.
- 1.7. 158.3 kg s^{-1} .
- 1.8. 3.06 mm s^{-1} .
- 1.9. a) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$; $\|\vec{a}\| = 6.4$; $\|\vec{b}\| = 5.1$.
b) 6.4 unidades de comprimento.
c) $P(3, -1, 6)$.
- 1.10. a) $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; co-senos directores de \vec{a} : $-2/2\sqrt{2}$, $2/2\sqrt{2}$, 0; co-senos directores de \vec{b} : $1/\sqrt{14}$, $2/\sqrt{14}$, $-3/\sqrt{14}$.
b) $\sqrt{18}$.
c) $D(2, -1, 3)$.
d) $\|\vec{c}\| = \sqrt{54}$; $\vec{u}_c = -0.408\vec{i} + 0.816\vec{j} - 0.408\vec{k}$.
e) 49.1° .
- 1.11. 117.94 km.
- 1.12. $v_x = 5$, $v_y = 5.9$, $v_z = 14$; $(\vec{v} \wedge \vec{Ox}) = 71.79^\circ$, $(\vec{v} \wedge \vec{Oy}) = 68.36^\circ$.
- 1.13. -7 .
- 1.14. 96° .
- 1.15. 74.5° .
- 1.16. $\vec{PQ} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$; co-senos directores de \vec{PQ} : $1/3$, $2/3$, $-2/3$.
- 1.17. a) $1/\sqrt{14}$, $-2/\sqrt{14}$, $3/\sqrt{14}$.
b) 53.3° .
c) $\pm \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j} \pm \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{k}$.

d) -2.5.

1.18. $\sqrt{83}$ unidades de área.

1.19. 2 unidades de área; 90° .

1.20. 2.7 unidades de comprimento.

1.21. a) $\|\vec{v}\| = \sqrt{38}$, $(\vec{v} \wedge \vec{Ox}) = 71.1^\circ$, $(\vec{v} \wedge \vec{Oy}) = 35.8^\circ$, $(\vec{v} \wedge \vec{Oz}) = 119.1^\circ$.

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{74}$, $(\vec{u} \wedge \vec{Ox}) = 62.3^\circ$, $(\vec{u} \wedge \vec{Oy}) = 69.6^\circ$, $(\vec{u} \wedge \vec{Oz}) = 114.5^\circ$.

c) 121.3° .

Capítulo 2

2.1. $v_m = 62 \text{ m s}^{-1}$; $a_m = 38 \text{ m s}^{-2}$.

2.2. $x = 54 \text{ m}$; $v = 64 \text{ m s}^{-1}$; $a = 56 \text{ m s}^{-2}$.

2.3. a) 5 s.

b) -60 m; 100 m.

c) 18 m s^{-2} .

d) 136 m.

2.6. a) $v(t) = 18t^2 - 6t^4$; $x(t) = 6t^3 - 6t^5/5$.

b) 12.5 m.

c) 13.5 m s^{-1} .

d) 4.8 m s^{-1} .

e) -12 m s^{-2} .

2.7. 64.3 m; 66 m s^{-2} .

2.8. a) $v_m = 16 - 12 t_0 - 6 Dt$.

b) 4 m s^{-1} .

c) 0 e 2.67 s.

d) 10.7 m.

e) Não há, porque a aceleração é constante e diferente de zero (-12 m s^{-2}).

2.9. $v(t) = 30 + 2t - 4t^3$; $x(t) = 30t + t^2 - t^4$.

2.10. $v(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1}$.

2.11. a) $v(t) = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}$; $x(t) = x_0 + \frac{1}{k} \ln(1 + kv_0 t)$.

b) $v(x) = v_0 e^{-(x-x_0)}$.

2.12. a) 2 m s^{-4} .

b) $x(t) = t^4/6 - 9t + 13.5$.

2.13. a) -77 m s^{-1} .

b) 742.3 m.

2.15. a) $6 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$.

b) 0.245 m s^{-1} .

2.16. a) Troço $A \rightarrow B$: movimento retilíneo uniforme, no sentido negativo ($v < 0$).

Troço $B \rightarrow C$: movimento retilíneo uniformemente retardado, no sentido negativo ($v < 0$) com $a = +0.5 \text{ m s}^{-2}$.

Troço $C \rightarrow D$: movimento retilíneo uniformemente acelerado, no sentido positivo ($v > 0$) com $a = +4 \text{ m s}^{-2}$.

Troço $D \rightarrow E$: movimento retilíneo uniforme, no sentido positivo ($v > 0$).

b) Troço $A \rightarrow B$: $v = -1 \text{ m s}^{-1}$; $x(t) = -t$.

Troço $B \rightarrow C$: $v(t) = -2 + 0.5t$; $x(t) = 1 - 2t + 0.25t^2$.

Troço $C \rightarrow D$: $v(t) = -16 + 4t$; $x(t) = 29 - 16t + 2t^2$.

Troço $D \rightarrow E$: $v = 4 \text{ m s}^{-1}$; $x(t) = -21 + 4t$.

c) 9 m; 3 m.

2.17. a) $y = x$.

b) $\vec{v}(t) = 2(t-2)\vec{i} + 2(t-2)\vec{j} \text{ m s}^{-1}$; $v(t) = 2\sqrt{2}(t-2) \text{ m s}^{-1}$; $\vec{a}(t) = 2\vec{i} + 2\vec{j} \text{ m s}^{-2}$; $a = 2\sqrt{2} \text{ m s}^{-2}$.

c) $0 \leq t < 2 \text{ s}$: movimento retilíneo uniformemente retardado; $t > 2 \text{ s}$: movimento retilíneo uniformemente acelerado.

d) 18.4 m.

2.18. a) $\vec{v}(t) = (6t^2 - 6t)\vec{i} + (2t - 2)\vec{j} \text{ m s}^{-1}$.

b) $t = 1 \text{ s}$.

c) $\vec{a}(t) = (12t - 6)\vec{i} + 2\vec{j} \text{ m s}^{-2}$.

d) 0.5 s.

e) A aceleração nunca se anula na medida em que $a_y \neq 0$.

2.19. a) $y = x - 2\sqrt{x} + 1$.

b) 0.5 s.

c) $x = 16 \text{ m}$, $y = 9 \text{ m}$.

d) $a_t(t) = \frac{4t-2}{\sqrt{2t^2-2t+1}}$, $a_n(t) = \frac{2}{\sqrt{2t^2-2t+1}}$.

2.20. a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7$.

b) 1 s.

c) 1 m.

d) $\vec{u}_t(t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2-8t+5}}\vec{i} + \frac{2t-2}{\sqrt{4t^2-8t+5}}\vec{j}$.

e) $\vec{u}_n(t) = -\frac{2t-2}{\sqrt{4t^2-8t+5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{4t^2-8t+5}}\vec{j}$.

2.21. $\vec{v}(t) = 2\cos 2t\vec{i} + 2\sin 2t\vec{j} + \frac{3}{2}t^2\vec{k} \text{ m s}^{-1}$; $\vec{a}(t) = -4\sin 2t\vec{i} + 4\cos 2t\vec{j} + 3t\vec{k} \text{ m s}^{-2}$;
 $v(t=1) = 2.5 \text{ m s}^{-1}$; $a(t=1) = 5 \text{ m s}^{-2}$.

2.22. a) $\vec{v}(t) = 6\cos 2t\vec{i} + 2\sin 2t\vec{j} - 12e^{-3t}\vec{k} \text{ m s}^{-1}$;

$\vec{a}(t) = -12\sin 2t\vec{i} + 4\cos 2t\vec{j} + 36e^{-3t}\vec{k} \text{ m s}^{-2}$.

b) $v(t=0) = 13.4 \text{ m s}^{-1}$; $a(t=0) = 36.2 \text{ m s}^{-2}$.

- 2.23. a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ m s⁻².
 b) $\vec{v}(t) = (2t + 3)\vec{i} + (3t - 2)\vec{j}$ m s⁻¹.
 c) $\vec{r}(t) = (t^2 + 3t)\vec{i} + \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t\right)\vec{j}$ m.
- 2.24. a) $\vec{v}(t) = \left(2 + \frac{2}{3}\sin 3t\right)\vec{i} - 2e^{-3t}\vec{j} + \cos 3t\vec{k}$ m s⁻¹.
 b) $\vec{r}(t) = \left(2t - \frac{2}{9}\cos 3t\right)\vec{i} + \frac{2}{3}e^{-3t}\vec{j} + \frac{1}{3}\sin 3t\vec{k}$ m.
- 2.25. a) $9/\sqrt{13}$ m s⁻².
 b) $y = \frac{1}{24}x^2 + x$.
- 2.26. a) $v = \sqrt{8}$ m s⁻¹; $a = 2$ m s⁻².
 b) $a_t = \sqrt{2}$ m s⁻²; $a_n = \sqrt{2}$ m s⁻².
- 2.27. a) $\vec{r}(t) = (t^4 + 2t + 1)\vec{i} + (2t^2 + 2)\vec{j}$ m.
 b) $y = 2\sqrt{x}$.
- 2.28. a) $\vec{v}(t) = 4\cos t\vec{i} + 3\sin t\vec{j}$ m s⁻¹; $\vec{r}(t) = 4\sin t\vec{i} + (6 - 3\cos t)\vec{j}$ m.
 b) 3 m s⁻¹.
 c) $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1$.
- 2.29. a) $\vec{v}(t) = 0.5\vec{i} + 6t\vec{k}$ m s⁻¹; $a_t(t) = \frac{36t}{\sqrt{0.25 + 36t^2}}$ m s⁻²;
 $a_n(t) = \frac{3}{\sqrt{0.25 + 36t^2}}$ m s⁻².
 b) 60° .
- 2.30. a) Movimento curvilíneo uniformemente variado; $y = x^2/4$.
 b) $a_t = \sqrt{2}$ m s⁻²; $a_n = \sqrt{2}$ m s⁻²; $\rho = 4\sqrt{2}$ m.
- 2.31. a) $\vec{u}_t(t) = -0.6\sin 2t\vec{i} + 0.6\cos 2t\vec{j} + 0.8\vec{k}$.
 b) $\vec{u}_n(t) = -\cos 2t\vec{i} - \sin 2t\vec{j}$.
 c) 8.3 m.
- 2.32. a) 5 m s⁻¹.
 b) $a_t = 3\sqrt{2}$ m s⁻²; $a_n = 3\sqrt{2}$ m s⁻².
 c) $y = 3\sqrt[3]{x}$.
- 2.33. a) $a_t = 3\sqrt{2}/2$ m s⁻²; $a_n = \sqrt{2}/2$ m s⁻².
 b) $8\sqrt{2}$ m.
 c) 2.4 m.
- 2.34. a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$; é uma elipse centrada na origem dos eixos cartesianos, com semieixos 5 m e 2 m; como $\vec{r}(t=0) = 2\vec{j}$ m, o início do movimento ocorre no ponto de coordenadas $(0, 2)$ m.

- b) $\vec{v}(t) = -5\pi \cos\pi t \vec{i} - 2\pi \sin\pi t \vec{j}$ m s⁻¹. Como $\vec{v}(t=0) = -5\pi \vec{i}$, o movimento processa-se no sentido directo ou anti-horário.
- c) Como $\vec{a} = -\pi^2 \vec{r}$, a aceleração é sempre dirigida para a origem do referencial (centro da elipse).
- 2.35. a) $\vec{v} = 163.8\vec{i} - 32.3\vec{j}$ m s⁻¹; $\vec{r} = 2457\vec{i} + 618\vec{j}$ m; o projectil está a descer porque $v_y < 0$.
 b) 23.4 s.
 c) 3832.9 m.
- 2.36. a) 14.3 s.
 b) i. 423.8 m s⁻¹; ii. 412.1 m s⁻¹; iii. 5720 m.
- 2.37. a) 4.5 s.
 b) i. 423.8 m s⁻¹ (resultado idêntico ao obtido no problema anterior);
 ii. 412.1 m s⁻¹ (resultado idêntico ao obtido no problema anterior);
 iii. 1558.8 m
- 2.38. a) 212.75 m s⁻¹.
 b) 21.7 s.
 c) 577.3 m.
 d) 184.25 m s⁻¹.
- 2.39. a) 13.3 s.
 b) 1151.8 m.
 c) 327.6 m.
 d) 118.1 m s⁻¹; -42.8°.
 e) 765.3 m.
- 2.40. a) 10.1 s.
 b) 3030 m.
 c) 315.9 m s⁻¹.
 d) 315.1 m s⁻¹.
 e) $y = 500 - 5.44 \times 10^{-5} x^2$.
- 2.41. a) 3.45 s.
 b) 125.1 m.
 c) 14.6 m.
 d) 39 m s⁻¹.
 e) 36.25 m s⁻¹.
- 2.42. a) 4.45 s.
 b) 88.9 m.
 c) 41.6 m.
 d) 34.8 m s⁻¹; -55°.
- 2.43. a) 2.43 s.
 b) 5.2 m.
 c) $20.1\vec{i} - 9.8\vec{j}$ m s⁻¹; a bola embate na árvore na fase descendente do movimento porque, no momento do embate, $v_y < 0$.

- 2.44. 71.85° .
- 2.45. 4.34 m.
- 2.46. 75° .
- 2.47. 15° ou 75° .
- 2.48. $\rho = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g}$.
- 2.49. 75.2 m s^{-2} .
- 2.50. $\omega = 23 \text{ rad s}^{-1}$; $a = 10 \text{ rad s}^{-2}$; $x = 0.647 \text{ m}$, $y = 0.763 \text{ m}$.
- 2.51. $a_t = 3 \text{ m s}^{-2}$; $a_n = 12 \text{ m s}^{-2}$; $a = 12.37 \text{ m s}^{-2}$.
- 2.52. $\omega(t) = 40t^3 - 24t^2 + 16t \text{ rad s}^{-1}$; $\theta(t) = 10t^4 - 8t^3 + 8t^2 \text{ rad}$;
 $a_t(t=1) = 176 \text{ m s}^{-2}$; $a_n(t=1) = 2048 \text{ m s}^{-2}$.
- 2.53. 25 m.
- 2.54. 1 s.
- 2.55. a) $\omega(t) = 12t - 9 \text{ rad s}^{-1}$; $\theta(t) = 6t^2 - 9t + 14 \text{ rad}$.
 b) 30 m s^{-2} .
- 2.56. a) 5 rad s^{-2} .
 b) $a(t=0) = 0.5 \text{ m s}^{-2}$; $a(t=2) = 10.01 \text{ m s}^{-2}$.
- 2.57. a) 84.05 rad s^{-1} .
 b) 8.405 rad s^{-2} .
 c) 16.7 rotações.
- 2.58. a) $\omega_A = \omega_B/3$.
 b) $v_A = v_B/9$.
 c) $a_A = a_B/27$.
- 2.59. a) $x^2 + y^2 = 9$, trajetória circular centrada em na origem e de raio $R = 3 \text{ m}$; $P_0 = (0, -3) \text{ m}$.
 b) $\vec{v}(t) = -3\pi \cos \pi t \vec{i} + 3\pi \sin \pi t \vec{j} \text{ m s}^{-1}$; movimento processa-se no sentido retrógrado (horário) porque $\vec{v}_0 = -3\pi \vec{j} \text{ m s}^{-1}$.
- 2.60. a) O movimento é uniforme porque o valor da velocidade é constante, $v = \sqrt{2} \text{ m s}^{-1}$.
 b) $(0, -\sqrt{2})$.
 c) $\theta(t) = t - \pi/2 \text{ rad}$.
 d) $\pi/4 \text{ s}$.
- 2.61. a) Verifique que $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$.
 b) Deduza a expressão da aceleração e verifique que $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$.
 c) $x^2 + y^2 = a^2$, trajetória circular centrada em $(0, 0)$ e de raio $R = a$. Trata-se de um movimento circular uniforme.
- 2.62. a) $x^2 + y^2 = a^2$, trajetória circular centrada em $(0, 0)$ e de raio $R = a$.
 b) $v = ab \text{ m s}^{-1}$.
 c) $\theta(t) = bt \text{ rad}$.
 d) $a_t = 0$; $a_n = ab^2 \text{ m s}^{-2}$.
 e) $\vec{v} = -4b\vec{i} + 3b\vec{j} \text{ m s}^{-1}$; $v = 5b \text{ m s}^{-1}$.

- 2.63. Use a equação das velocidades angulares de um m.c.u.v.; use em seguida a relação $s = R\theta$ conjugada com a equação das posições angulares de um m.c.u.v..
- 2.64. a) $x(t) = 10 \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$ cm.
b) 1 s e 5 s.
- 2.65. a) $T = 10p$ s; $j_0 = 1$ rad.
b) 5×10^{-2} m s⁻².
c) $v_{max} = 0.6$ m s⁻¹; $a_{max} = 0.12$ m s⁻².
- 2.66. 2 s.
- 2.67. a) p s e $2p$ s.
b) $3p/4$ s e $7p/4$ s.
- 2.68. a) $x(t) = 0.1 \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ m.
b) $0.1p$ m s⁻¹.
- 2.69. a) 318.3 Hz.
b) 4 m s⁻¹.
c) 3.2 m s⁻¹.
- 2.70. a) $\sqrt{2}$ m.
b) $-\pi/4$ rad.
c) 1 rad s⁻¹.
- 2.71. a) $y = \frac{4}{3}x$.
b) $(-6, -8)$, $(6, 8)$.
c) Mostre que a norma do vector posição é uma função sinusoidal: $r = 10 \sin t$, com $r^2 = x^2 + y^2$.
d) 2π s.
- 2.72. a) $v_{max} = 3.77$ m s⁻¹; $a_{max} = 94.74$ m s⁻².
b) $v = 3.02$ m s⁻¹; $a = -56.85$ m s⁻².
- 2.73. a) 0.19 m.
b) 2.39 m s⁻¹.

Capítulo 3

- 3.1. $-8\vec{i} + 96\vec{k}$ dyn.
- 3.2. $\vec{v}(t) = \left(\frac{4}{3}\sin 3t + 2\right)\vec{i} + 2(2e^{3t} - 3)\vec{j} + (2\cos 3t - 1)\vec{k}$ m s⁻¹;
 $\vec{r}(t) = \left(-\frac{4}{9}\cos 3t + 2t + \frac{13}{9}\right)\vec{i} + \left(\frac{4}{3}e^{3t} - 6t + \frac{5}{3}\right)\vec{j} + \left(\frac{2}{3}\sin 3t - t - 2\right)\vec{k}$ m.
- 3.3. a) 11.4 s.
b) 231 m s⁻¹.

3.4. $F(x) = -m\omega^2 x$.

3.5. a) Mostre que a equação da trajectória é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

b) Mostre que $\vec{F}(t) = -m\omega^2 \vec{r}(t)$.

3.6. 148.5 N.

3.7. a) $\vec{v}(t) = (2t+2)\vec{i} + 4t\vec{j}$ m s⁻¹; $\vec{r}(t) = (t^2 + 2t)\vec{i} + 2t^2\vec{j}$ m.

b) $x^2 - xy - 2y + \frac{y^2}{4} = 0$.

3.8. a) $T_{AC} = 50$ N; $T_{BC} = 70.7$ N.

b) $T_{AC} = 25$ N; $T_{BC} = 43.3$ N.

3.9. $\theta = 30^\circ$; $T = 905$ N; $F = 452.5$ N.

3.10. $a = 2.9$ m s⁻²; $T = 0.14$ N.

3.11. a) 10 kg.

b) $a = 1.63$ m s⁻²; $T = 40.85$ N.

3.12. a) Movimento harmónico simples, porque $a = -kx/m$.

b) Efectue o cálculo.

3.13. a) 1.4 s.

b) $y_0 = -0.49$ m.

c) $y(t) = -0.49 + 0.5 \sin\left(4.47t - \frac{\pi}{2}\right)$ m.

3.14. a) 8.66 rad s⁻¹.

b) 0.73 s.

c) $x(t) = 0.176 \sin(8.67t - 0.367)$ m.

3.15. a) 101 Hz.

b) 6.32 m s⁻¹.

c) 5.10 m s⁻¹.

d) $F(x) = -m\omega^2 x$.

3.16. a) 2.72 m s⁻¹.

b) 6.79 m.

3.17. 27.7×10^3 km h⁻¹.

3.18. $T = 162$ N; $\theta = 43.4^\circ$.

Capítulo 4

4.1. a) 61.3 J.

b) 29.3 J.

c) 50.7 J.

d) 54.9 J.

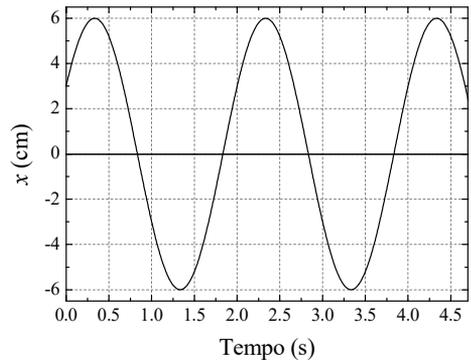
e) O trabalho realizado depende do percurso e por isso a força não é conservativa.

4.2. a) $P(t) = 13t^3/400$ erg s⁻¹.

b) 81.25 erg.

- 4.3. a) 3 J.
 b) 5 W.
 c) -3 J.
 d) 3 J.
- 4.4. a) 471.1 J.
 b) 471.1 J.
- 4.5. a) 1.93×10^5 N.
 b) 2.78×10^4 N.
- 4.6. $v^2/2mg$
- 4.7. a) $W = 2.82 \times 10^6$ J; $P_m = 9.4$ kW.
 b) $W = 9.26 \times 10^6$ J; $P_m = 31$ kW.
- 4.8. a) 7.2 J.
 b) 588 J.
 c) 595.2 J.
 d) 54.5 m s^{-1} .
- 4.9. 0.9 N.

4.10. a) $x(t) = 6 \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ cm}$



- b) 51.3 dyn.
 c) $K = 133.2$ erg; $U = 44.4$ erg.
- 4.11. a) $A = 6$ m; $T = 0.67$ s; $\omega = 3\pi \text{ rad s}^{-1}$; $j = \pi/2$ rad.
 b) $K(x) = \frac{(3\pi)^2}{2}(36 - x^2)$ J.
 c) $U(x) = \frac{(3\pi)^2}{2}x^2$ J.
- 4.12. a) 25.6 J.
 b) 12.8 J
 c) 12.8 J.
 d) $\frac{\pi}{4} + n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 e) $x = 0.28$ m; $v = 3.2 \text{ m s}^{-1}$.
- 4.13. 2820 J.
- 4.14. 26.5 J.

4.15. 0.09 m.

4.16. 0.25 m.

4.17. a) 6.38 m.

b) 6.17 m s⁻¹.

4.18. i) $\vec{F}(x, y) = -2Cxy^2\vec{i} - 2Cx^2y\vec{j}$; ii) $\vec{F}(x, y, z) = -Cyz\vec{i} - Cxz\vec{j} - Cxy\vec{k}$;

iii) $\vec{F}(x, y, z) = -2Cx\vec{i} - 2Cy\vec{j} - 2Cz\vec{k}$.

4.19. a) Mostre que $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$.

b) $U(x, y, z) = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + U_0$.

c) +163 J.

4.20. a) $F(r) = -\frac{V_0}{r} \left(1 + \frac{r_0}{r} \right) \exp\left(-\frac{r}{r_0} \right)$.

b) 3.92×10^3 N.

4.21. Uma vez que a força é central, não realiza trabalho, logo, pelo teorema do trabalho-energia, a energia cinética é constante. Como a massa é constante, a velocidade é também constante, e pode ser determinada igualando a expressão da força dada à expressão da força centrípeta num movimento circular uniforme. Conhecida da velocidade, pode-se calcular a energia cinética. Finalmente, a energia potencial determina-se integrando a expressão da força; a energia total é a soma das energias cinética e potencial.

4.22. 7.6×10^{28} J.

4.23. 494 m s⁻¹.

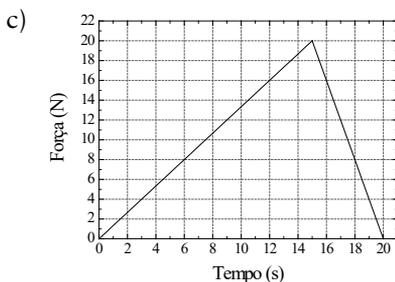
Capítulo 5

5.1. a) $4800\vec{i}$ N s.

b) $4860\vec{i}$ kg m s⁻¹.

5.2. a) 200 N s.

b) 20 N.



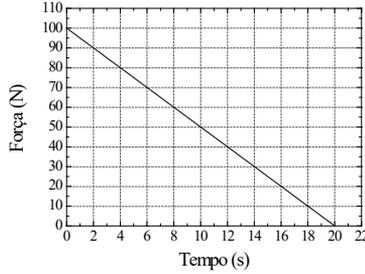
5.3. a) $\vec{J} = 56\vec{i}$ N s, $\Delta\vec{p} = 56\vec{i}$ kg m s⁻¹, $\vec{v} = 5.6\vec{i}$ m s⁻¹.

b) 10 s.

5.4. a) $22\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ kg m s⁻¹.

b) 11.3 m s⁻¹.

5.5. a) $J = 1000 \text{ N s}$.



b) 62.5 m s^{-1} .

5.6. a) $\vec{p}(t) = t^3 \vec{i} + 2 \left(\cos \frac{t}{2} - 1 \right) \vec{k} \text{ kg m s}^{-1}$.

b) $\vec{r}(t) = \frac{t^4}{4} \vec{i} + 2 \left(2 \sin \frac{t}{2} - t \right) \vec{k} \text{ m}$.

5.7. a) $\vec{F}(t) = 36 \vec{i} - 144 t \vec{j} \text{ N}$.

b) $\vec{p}(t) = (36t - 36) \vec{i} - 72t^2 \vec{j} + 18 \vec{k} \text{ kg m s}^{-1}$.

c) Efectue o cálculo.

5.8. a) $x = y^2 - 16$.

b) $-\frac{40}{3} \vec{i} \text{ N s}$.

5.9. a) $12 \vec{j} - 6 \vec{k} \text{ kg m s}^{-1}$.

b) $4 \vec{i} + 7 \vec{j} + 4 \vec{k} \text{ m s}^{-1}$.

5.10. $5.33 \vec{i} - 1.25 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$.

5.11. $v'_A = 2.47 v_A$; $\theta'_A = 52.6^\circ$.

5.12. $\vec{v}' = 3.67 \vec{i} + 3.14 \vec{j} \text{ km h}^{-1}$; $v' = 4.8 \text{ km h}^{-1}$, $\theta' = 40.5^\circ$.

5.13. $(133.3, -40.7, 16) \text{ m}$.

5.14. a) Após o choque ter-se-á $\vec{v}'_B = 0.595 \vec{i} - 0.423 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$; $v'_B = 0.73 \text{ m s}^{-1}$ e $\theta'_B = -35.4^\circ$.

b) $\vec{J}_A = -0.595 \vec{i} + 0.423 \vec{j} \text{ N s}$, $\vec{J}_B = -\vec{J}_A$.

c) $\Delta K_A = -0.0125 \text{ J}$, $\Delta K_B = 0.0266 \text{ J}$.

d) $\Delta K = \Delta K_A + \Delta K_B \neq 0$, logo o choque não é elástico.

5.15. $(175, 450, -420) \text{ m}$.

5.16. $70 \vec{i} + 180 \vec{j} - 168 \vec{k} \text{ m s}^{-1}$.

5.17. $\vec{v}'_1 = 11.7 \vec{i} + 11.7 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$; $\vec{v}'_2 = -1.76 \vec{i} + 6.4 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$.

5.18. $\vec{v} = 9.6 \vec{i} - 141.6 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$; $\vec{r} = 28.8 \vec{i} - 233.1 \vec{j} \text{ m}$.

5.19. a) $1000 \vec{i} - 167 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$.

b) $3.2 \times 10^6 \text{ J}$.

5.20. a) $\frac{v_p}{v'_p} = \sqrt{3}$; $\frac{v'_p}{v'_{Li}} = \frac{7}{2}$

b) São iguais, por conservação do momento linear total.

5.21. $v'_A = v_0 \sin \theta$; $v'_B = \frac{1}{2} v_0 \sin 2\theta$; $v'_C = v_0 \cos^2 \theta$.

- 5.22. $v'_A = 1.0 \text{ m s}^{-1}$, $v'_B = 0.87 \text{ m s}^{-1}$, $v'_C = 1.5 \text{ m s}^{-1}$.
- 5.23. $1.42\vec{i} - 0.625\vec{j} \text{ m s}^{-1}$.
- 5.24. a) $v'_B = 0.11 \text{ m s}^{-1}$; $\theta'_B = -27.25^\circ$.
 b) $\Delta\vec{v}_A = -0.25\vec{i} + 0.13\vec{j} \text{ m s}^{-1}$; $\Delta\vec{v}_B = 0.099\vec{i} + 0.051\vec{j} \text{ m s}^{-1}$;
 $\Delta\vec{p}_A = -0.05\vec{i} + 0.026\vec{j} \text{ kg m s}^{-1}$; $\Delta\vec{p}_B = -\Delta\vec{p}_A$.
- 5.25. a) 43.2 kN.
 b) 29.5 m s^{-2} .
 c) 75 s.
 d) $5.4 \times 10^3 \text{ m s}^{-2}$.
 e) 206.2 m s^{-2} .
- 5.26. 10867.5 kg.
- 5.27. a) 0.3 N.
 b) 0.29 W.
- 5.28. a) $1.5\vec{i} + 1.1\vec{j} + \vec{k} \text{ m s}^{-1}$.
 b) $15\vec{i} + 11\vec{j} + 10\vec{k} \text{ kg m s}^{-1}$.
- 5.29. $7.63 \times 10^5 \text{ J}$.
- 5.30. a) $\vec{r}_{CM}(t) = (3.2 + 0.6t)\vec{i} + (0.6 + 1.6t)\vec{j} \text{ m}$; $\vec{v}_{CM} = 0.6\vec{i} + 1.6\vec{j} \text{ m s}^{-1}$.
 b) $K = 12.5 \text{ J}$, $K' = 5.2 \text{ J}$.

Capítulo 6

- 6.1. a) $E_A = 225 \text{ N.C}^{-1}$; $E_B = 14400 \text{ N.C}^{-1}$; $E_C = 2475 \text{ N C}^{-1}$.
 b) $F = 2.304 \times 10^{-15} \text{ N}$.
- 6.2. Entre as cargas, a 4.1 cm da carga q_1 .
- 6.3. a) $V_A = -900 \text{ V}$; $V_B = 1929 \text{ V}$; $V_C = 0 \text{ V}$.
 b) $V_B - V_A = 2829 \text{ V}$.
 c) $U_{elec} = -7.2 \times 10^{-6} \text{ J}$.
- 6.4. a) $V_B = 4.84 \times 10^3 \text{ V}$.
 b) $\vec{E}_B = 9.79 \times 10^3 \vec{i} - 4.21 \times 10^3 \vec{j} \text{ V m}^{-1}$.
 c) $W_{\infty \rightarrow B} = -1.21 \times 10^{-2} \text{ J}$.
 d) $\vec{F}_B = 2.45 \times 10^{-2} \vec{i} - 1.05 \times 10^{-2} \vec{j} \text{ N}$.
- 6.5. a) $W = 0$.
 b) $W = 10^{-11} \text{ J}$.
 c) $W = -2.3 \times 10^{-11} \text{ J}$.
 d) $V = 4 \times 10^4 \text{ V}$.
- 6.6. a) $F_p = 5.3 \times 10^{-8} \text{ N}$.
 b) $E_p = 3.3 \times 10^{11} \text{ N C}^{-1}$; $V_p = 30.9 \text{ V}$.
 c) $v = 2.3 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$; $f = 4 \times 10^{15} \text{ Hz}$.
 d) $U_{elec} = -4.9 \times 10^{-18} \text{ J}$.

- 6.7. $U_{elec} = 4.8 \times 10^{-2} \text{ J}$.
- 6.8. $Q_{0.8} = 40 \text{ mC}$; $Q_{0.2} = 10 \text{ mC}$; $Q_{0.3} = 15 \text{ mC}$; $Q_{0.7} = 35 \text{ mC}$.
- 6.9. a) $C_{eq} = 10 \text{ mF}$
 b) $Q_{12} = 480 \text{ mC}$; $Q_1 = 80 \text{ mC}$; $Q_2 = 160 \text{ mC}$; $Q_3 = 240 \text{ mC}$; $Q_4 = 320 \text{ mC}$;
 $Q_5 = 400 \text{ mC}$; $Q_{18} = 720 \text{ mC}$; $V_{12} = V_{18} = 40 \text{ V}$, $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V_5 = 80 \text{ V}$.
 c) $U_{elec} = 7.2 \times 10^{-2} \text{ J}$.
- 6.10. a) $Q = 1.2 \times 10^{-3} \text{ C}$; $Q' = 2.4 \times 10^{-3} \text{ C}$; $V = 1200 \text{ V}$.
 b) $Q = 4 \times 10^{-4} \text{ C}$; $Q' = 8 \times 10^{-4} \text{ C}$; $V = 400 \text{ V}$.
- 6.11. a) $Q_1 = Q_2 = 6 \times 10^{-11} \text{ C}$, $V_1 = 6 \text{ V}$, $V_2 = 12 \text{ V}$.
 b) $U_{elec} = 5.4 \times 10^{-10} \text{ J}$.
 c) $Q_1 = 8 \times 10^{-11} \text{ C}$, $Q_2 = 4 \times 10^{-11} \text{ C}$, $V_1 = V_2 = 8 \text{ V}$.
 d) $d_1 = 2.78 \times 10^{-4} \text{ m}$, $d_2 = 5.56 \times 10^{-4} \text{ m}$.
- 6.12. $C = 2.3 \times 10^{-10} \text{ F}$; $\Delta U_{elec} = -3.5 \times 10^{-7} \text{ J}$.
- 6.13. a) $C_{eq} = 1 \text{ mF}$.
 b) $q = 9 \times 10^{-4} \text{ C}$.
 c) $V_{DB} = 398 \text{ V}$.
- 6.14. a) $V = 40 \text{ V}$.
 b) $U_{diel} = 0.2 \text{ J}$; $U_{ar} = 0.5 \text{ J}$.
 c) $W = 0.3 \text{ J}$.
- 6.15. a) $C_{eq} = \epsilon_r \epsilon_0 A / (d_1 + d_2)$; $U_{elec} = (1/2) C_{eq} V^2$.
 b) $C_{eq} = \epsilon_0 A / (d_1 / \epsilon_{r1} + d_2 / \epsilon_{r2})$; 2.55 pF .
 c) $Q = 255 \text{ pC}$; $V_1 = 80 \text{ V}$, $V_2 = 20 \text{ V}$.
- 6.16. a) $C = 8 \text{ pF}$.
 b) $Q_1 = 0.24 \text{ nC}$; $Q_2 = 0.56 \text{ nC}$.
- 6.17. a) $C = 7.1 \times 10^{-18} \text{ F}$.
 b) $V = 0.1 \text{ V}$.
 c) $Q = 7.1 \times 10^{-19} \text{ C}$.
 d) $U_{elec} = 3.5 \times 10^{-20} \text{ J}$.

Capítulo 7

- 7.1. a) $R = 1.53 \Omega$.
 b) $R = 0.095 \Omega$.
- 7.2. a) $R_1 = 1.03 \times 10^{-2} \Omega$, $R_2 = 2.05 \times 10^{-1} \Omega$.
 b) $I_2 = 0.125 \text{ mA}$.
 c) $W = 2.0 \times 10^{-5} \text{ J}$.
 d) $E_1 = 2.1 \times 10^{-5} \text{ V m}^{-1}$ e $E_2 = 1.4 \times 10^{-5} \text{ V m}^{-1}$.
- 7.3. a) $R = 0.18 \Omega$.
 b) $R = 7 \times 10^{-5} \Omega$.
- 7.4. a) $R = 21.8 \Omega$.

- b) $I = 5.5 \text{ A}$.
 c) $\dot{Q} = 157.7 \text{ cal s}^{-1}$.
 d) $P = 555 \text{ W}$.
- 7.5. a) 64.5 V e 1.67 W .
 b) 31.6 V e 1.67 W .
- 7.6. $I_1 = R_2 I_t / (R_1 + R_2)$, $I_2 = R_1 I_t / (R_1 + R_2)$.
- 7.7. $Q = 38.4 \text{ } \mu\text{C}$.
- 7.8. a) $I = 2 \text{ A}$.
 b) $I_4 = 1 \text{ A}$; $I_8 = 1 \text{ A}$; $I_6 = 0.66 \text{ A}$; $I_{12} = 0.33 \text{ A}$; $I_1 = 2 \text{ A}$.
 c) $V_{AB} = 6 \text{ V}$.
- 7.9. a) $R = 10 \text{ } \Omega$.
 b) $R = 7\text{ } \Omega \rightarrow I = 24 \text{ A}$; $V = 168 \text{ V}$; $R = 12\text{ } \Omega \rightarrow I = 6 \text{ A}$; $V = 72 \text{ V}$;
 $R = 3\text{ } \Omega \rightarrow I = 4 \text{ A}$; $V = 12 \text{ V}$; $R = 6\text{ } \Omega \rightarrow I = 2 \text{ A}$; $V = 12 \text{ V}$;
 $R = 10\text{ } \Omega \rightarrow I = 6 \text{ A}$; $V = 60 \text{ V}$; $R = 18\text{ } \Omega \rightarrow I = 4 \text{ A}$; $V = 72 \text{ V}$;
 $R = 9\text{ } \Omega \rightarrow I = 8 \text{ A}$; $V = 72 \text{ V}$.
- 7.10. a) $R_{eq} = 8 \text{ } \Omega$.
 b) $V_{XA} = 12 \text{ V}$.
- 7.11. a) $R_{eq} = 32 \text{ } \Omega$.
 b) $V = 20 \text{ V}$.
- 7.12. a) $R_{eq} = 8 \text{ } \Omega$.
 b) $V = 72 \text{ V}$.
- 7.13. $P = 27 \text{ W}$.
- 7.14. a) $R = 14 \text{ } \Omega$.
 b) 0.11 .
- 7.15. a) $I_1 = 0.38 \text{ A}$; $I_2 = 0.52 \text{ A}$; $I_3 = 0.14 \text{ A}$.
 b) $\eta_1 = 99.5\%$; $\eta_2 = 99.3\%$; $\eta_3 = 99.6\%$.
 c) $P_{R_1} = 0.58 \text{ W}$; $P_{R_2} = 0.43 \text{ W}$; $P_{R_3} = 1.62 \text{ W}$; $P_{R_4} = 0.54 \text{ W}$,
 $P_{R_5} = 0.039 \text{ W}$; $P_{R_6} = 0.059 \text{ W}$.
- 7.16. $I_1 = 0.5 \text{ A}$; $I_2 = 2 \text{ A}$; $I_3 = 2.5 \text{ A}$.
- 7.17. $I_1 = 0.29 \text{ A}$, $I_2 = 0.89 \text{ A}$, $I_3 = 1.18 \text{ A}$.
- 7.18. a) $V_g = 105 \text{ V}$; $V_M = 70 \text{ V}$.
 b) $I = 22 \text{ A}$.
- 7.19. a₁) $I = 1.5 \text{ A}$; a₂) $V_g = 18.5 \text{ V}$, $V_m = 11 \text{ V}$; a₃) $P_g = 30 \text{ W}$; a₄) $\eta_M = 73\%$.
 b₁) $I = 2.5 \text{ A}$; b₂) $V_g = 17.5 \text{ V}$, $V_m = 5 \text{ V}$; b₃) $P_r = 12.5 \text{ W}$; b₄) $P_g = 50 \text{ W}$.

Capítulo 8

- 8.1. $F = 4.8 \times 10^{-11} \text{ N}$, $F/F_g = 5.44 \times 10^{18}$.
- 8.2. a) $F = 2.48 \times 10^{-12} \text{ N}$, força horizontal e orientada de oeste para este.

- b) $\vec{B}_p = -3.3 \times 10^{-2} (\vec{i} + \vec{j})$ T.
- 8.3. a) $v = 3750 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
- 8.4. a) $\vec{B} = \pm 5.69 \times 10^{-5} \vec{j}$ T.
 b) $F_e = 9.1 \times 10^{-18}$ N.
 c) $T = 6.28 \times 10^{-7}$ s, $\nu = 1.59$ MHz.
 d) $W = 0$.
- 8.5. a) $B = 4 \times 10^{-5}$ T.
- 8.6. $B = 1.13$ mT.
- 8.7. $B = 3.4 \times 10^{-3}$ T.
- 8.8. a) $\varepsilon_{ind} = 8.55 \times 10^{-6}$ V.
 b) $I = 855 \mu\text{A}$.
- 8.9. $B = 0.21$ T.
- 8.10. a) $L = 10^{-3}$ H.
 b) $\varepsilon_{ind} = -1$ V.
- 8.11. a) $B = 2.6 \times 10^{-4}$ T.
 b) $\Phi_B = 1.85 \times 10^{-3}$ Wb.
 c) $L = 3.7 \times 10^{-4}$ H.
 d) $\varepsilon_{ind} = -7.4 \times 10^{-3}$ V.
- 8.12. a) $B = 5.0 \times 10^{-3}$ T.
 b) $B = 4.5 \times 10^{-3}$ T.
 c) $\Phi_B = 9.8 \times 10^{-3}$ Wb e $\Phi_B = 8.8 \times 10^{-3}$ Wb.
 d) $I = 0.02$ A.

Capítulo 9

- 9.1. a) -10 °C.
 b) -18 °F.
- 9.2. O copo A, porque 10 °C = 18 °F.
- 9.3. 491.67 °R.
- 9.4. a) -459.67 °F.
 b) -218.52 °Re.
- 9.5. a) -40 °C = -40 °F.
 b) 0 °C = 0 °Re.
 c) 574.59 K = 574.59 °F.
- 9.6. $\alpha = 3.17 \times 10^{-5}$ °C $^{-1}$.
- 9.7. 4.511 mm.
- 9.8. 1.35 cm 3 .
- 9.9. 7.1 cm.

- 9.10. 10 W.
9.11. a) $-1.1\text{ }^{\circ}\text{C}$.
b) 23.7 W m^{-2} .
9.12. a) 2 kW m^{-2} .
b) 349 W m^{-2} .
9.13. 575 W e 437 W.
9.14. $6.9 \times 10^8\text{ m} = 6.9 \times 10^5\text{ km}$.

Capítulo 10

- 10.1. a) 32.1.
b) $3.89 \times 10^6\text{ Pa}$.
10.2. a) $6.17 \times 10^{-21}\text{ J}$.
b) 1364 ms^{-1} .
c) $1.81 \times 10^{-23}\text{ N s}$.
10.3. a) 1.11 moles.
b) 834 J.
c) $1.236 \times 10^5\text{ Pa}$.
d) $1.784 \times 10^{-3}\text{ g cm}^{-3}$.
10.4. a) $7.28 \times 10^6\text{ Pa}$.
b) $5.87 \times 10^6\text{ Pa}$.
10.5. 400 ms^{-1} .
10.6. a) $2.49 \times 10^4\text{ N}$.
b) $2.31 \times 10^{-3} \sqrt{M}\text{ s}$ (se M estiver em kg mol^{-1}).
10.7. $c = 125.58\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$.
10.8. $44\text{ }^{\circ}\text{C}$.
10.9. $76\text{ }^{\circ}\text{C}$.
10.10. i) $21.3\text{ }^{\circ}\text{C}$.
ii) $20.7\text{ }^{\circ}\text{C}$.
10.11. 873 J.
10.12. a) 37.8 J.
b) 0.62 l.
c) 1.05 g dm^{-3} .
d) $4.5 \times 10^4\text{ J}$.
10.13. a) $3.143 \times 10^5\text{ J}$.
b) $419\text{ s} \approx 7\text{ min}$.
10.14. $63.3\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Capítulo 11

- 11.1. $W = 1497 \text{ J}$.
- 11.2. $W = -14530 \text{ J}$.
- 11.3. Não, porque violaria a primeira lei da Termodinâmica ao consumir, em um segundo, $1000 \text{ cal} = 4186 \text{ J}$ e realizar 10 kJ de trabalho.
- 11.4. a) $\Delta U = -800 \text{ J}$.
b) $T_f = 84 \text{ }^\circ\text{C}$.
- 11.5. a) $W = 3.36 \times 10^4 \text{ J}$.
b) $\Delta U = 7.14 \times 10^4 \text{ J}$.
c) Não dependem: apenas se utilizou a primeira lei da Termodinâmica, que é de aplicabilidade geral.
- 11.6. a) $W = 1114 \text{ J}$.
b) $Q = 1114 \text{ J}$.
c) $T_f = 397.53 \text{ K} = 124.38 \text{ }^\circ\text{C}$.
d) Não, porque $p_A V_A \neq p_C V_C$.
- 11.7. 1: isobárico (pressão constante); 2: isocórico (volume constante); 3: isotérmico (temperatura constante); 4: adiabático (não há trocas de calor entre o sistema e o meio ambiente).
- 11.8. a) *ab*: isocórico (volume constante); *ca*: isobárico (pressão constante).
b) 200.05 K .
c) $V_a = V_b = 3.33 \times 10^{-2} \text{ m}^3$; $V_c = 9.98 \times 10^{-2} \text{ m}^3$.
d) $Q = 4.31 \times 10^3 \text{ J} > 0$, logo o calor foi absorvido pelo gás.
- 11.9. a) $Q = 6093 \text{ J}$, dos quais 3656 J ($3/5 = 60 \%$) ficam armazenados como energia interna do gás.
b) $W = 2437 \text{ J}$.
- 11.10. a) $\Delta Q = C_p T_1 (V_2/V_1 - 1)$.
b) $Q = -5.493 \times 10^3 \text{ J} (< 0)$, logo o gás perde calor para o meio ambiente.
c) $\Delta U = -3467 \text{ J}$.
- 11.11. 0.2093 m^3 .
- 11.12. Utilizar a equação (11.2) e a primeira das equações (11.20).

Capítulo 12

- 12.1. a) 61% .
b) 55% .
- 12.2. a) $\eta_1 = 0.4$, $\eta_2 = 0.5$, $\eta_{\text{total}} = 0.7$.
b) $W_1 = 280 \text{ J}$, $W_2 = 210 \text{ J}$.
- 12.3. $W = 2305 \text{ J}$, $Q_{AB} = 5763 \text{ J}$, $Q_{CD} = -3458 \text{ J}$.
- 12.4. a) Trabalho realizado: $W = p_0 V_0 / 4$;

Calor recebido da fonte quente: $Q_{CD} + Q_{DA} = (nT_0 / 4)(C_v + 2C_p)$;

Calor cedido à fonte fria: $Q_{AB} + Q_{BC} = -(nT_0 / 4)(2C_v + C_p)$.

b) $\eta = R / (C_v + 2C_p)$.

No caso de o gás ideal ser diatômico, tem-se $\eta = 12/9 < \eta_{\text{Carnot}} = 3/4$.

12.5. $313.89 \text{ K} = 40.74 \text{ }^\circ\text{C}$.

12.6. a) 14950 J .

b) 40% .

12.7. $Q = 1.54 \times 10^7 \text{ J}$.

12.9. 1171 J .

12.11. 3.86 atm .

12.12. $r = \frac{V_B}{V_A} = 1.73$.

12.13. $\Delta S = -7.8 \text{ J K}^{-1}$ em todos os casos.

12.14. $\Delta S = n R \ln 2$

12.15. a) $\Delta S_{vdw} = n \left(C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2 - nb}{V_1 - nb} \right)$.

b) $\Delta S_{vdw} = 0 \Rightarrow T(V - nb)^{R/C_v} = \text{const.}$

12.16. a) $\Delta S_{\text{H}_2\text{O}} = -727.12 \text{ J K}^{-1}$.

b) $\Delta S_{\text{atm}} = 739.89 \text{ J K}^{-1}$.

c) $\Delta S_{\text{univ}} = 12.77 \text{ J K}^{-1}$. Conclui-se que a entropia do universo aumenta, logo o processo é irreversível.

O presente livro destina-se ao ensino de uma primeira disciplina de Física de cursos de ciências ou de engenharia, compreendendo o cânone da Física Clássica - Mecânica, Electromagnetismo e Termodinâmica — que um futuro cientista ou engenheiro deve dominar, e que poderá, eventualmente, aprofundar em disciplinas mais avançadas. Tem a sua génese na unidade curricular de “Física” que temos vindo a leccionar há vários anos no segundo semestre do primeiro ano da Licenciatura em Matemática Aplicada à Tecnologia e à Empresa do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa - ISEL. É, portanto, um livro marcadamente pedagógico, em que procurámos, sem prejuízo do rigor, que a exposição teórica fosse sempre acompanhada de exemplos que permitam uma mais fácil assimilação das diferentes matérias.

António Jorge Silvestre

É licenciado em Física pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (1989) e doutorado em Física, especialidade Física da Matéria Condensada, pela mesma Universidade (1997). Foi assistente (1994-1997), professor auxiliar (1997) e professor associado (1998-2001) do Instituto Superior de Transportes e Comunicações. É, desde 2001, professor coordenador do Departamento de Física do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa e, desde 2015, professor associado convidado do departamento de Física do Instituto Superior Técnico. É membro do Centro de Física e Engenharia de Materiais Avançados do Instituto Superior Técnico. Os seus interesses científicos incluem a deposição de filmes finos de óxidos funcionais por métodos químicos e físicos bem como a sua caracterização estrutural, óptica, eléctrica e magnética. Tem igualmente desenvolvido actividade de investigação em materiais nanoestruturados com potencial aplicação em fotocatalise para a degradação de poluentes orgânicos. Foi distinguido em vários anos com o *diploma de Excelência no Ensino* do Instituto Superior Técnico.

Paulo Ivo Cortez Teixeira

É licenciado (Universidade de Lisboa, 1987), mestre (Universidade de Lisboa, 1990), doutor (Universidade de Southampton, 1993) e agregado (Universidade de Lisboa, 2006) em Física. Fez pós-doutoramentos em Amesterdão (1993-1996), Cambridge (1996-1998), Leeds (1998-2000) e no Instituto Superior Técnico (2000-2001). Foi professor auxiliar na Faculdade de Engenharia da Universidade Católica (2001-2006) e é, desde 2006 docente no Departamento de Física do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, primeiro como professor adjunto (2006-2020) e actualmente como professor coordenador. É investigador do Centro de Física Teórica e Computacional da Universidade de Lisboa. Faz teoria e modelação de vários sistemas do âmbito da matéria condensada mole (cristais líquidos, espumas, polímeros, elastómeros e colóides). Ocasionalmente traduz livros de divulgação científica. É um dos primeiros *outstanding referees* da Sociedade Americana de Física (2008).

