



**HAL**  
open science

## Le Modèle de Cournot avec entrées aléatoires de firmes \*

Pierre Bernhard, Marc Deschamps

► **To cite this version:**

Pierre Bernhard, Marc Deschamps. Le Modèle de Cournot avec entrées aléatoires de firmes \*. Marc Deschamps; Thierry Martin. Cournot, économie et philosophie, Éditions Matériologiques, 2020, Economiques, 978-2-37361-262-2. hal-03547666

**HAL Id: hal-03547666**

**<https://hal.inria.fr/hal-03547666>**

Submitted on 28 Jan 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LE MODÈLE DE COURNOT AVEC ENTRÉES ALÉATOIRES DE FIRMES \*

Pierre BERNHARD  
UCA-INRIA Sophia Antipolis  
Marc DESCHAMPS  
CRESE, Université de Bourgogne-Franche Comté

## Introduction

Le nom de Cournot est aujourd'hui mondialement connu et, à l'instar de celui de Walras, il n'est aucune personne qui se soit un tant soit peu intéressée à la discipline économique qui ne l'ait, à un titre ou à un autre, aperçu au moins une fois. Ses apports majeurs concernent au moins : 1/ la fonction de demande, 2/ l'élasticité, 3/ le coût marginal, 4/ le monopole, 5/ l'oligopole, et 6/ la concurrence. De plus, même si la réception de son œuvre économique ne fut pas simple, rapide et directe, comme le démontre notamment Sigot, 2005, il est actuellement presque unanimement considéré, *a minima*, comme l'un des pères fondateurs de l'application de la méthode mathématique à l'analyse économique, de l'analyse en termes d'équilibre partiel et d'équilibre général, du paradigme néo-classique, ainsi qu'un précurseur du concept d'équilibre non-coopératif de Nash.

En matière d'économie, ses *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* publiées en 1838, alors qu'il n'a que 37 ans, sont sans conteste son œuvre maîtresse. Il y fait notamment figure de fondateur en étant le premier à proposer et analyser une typologie des formes de marché fondée sur le nombre d'offreurs. Il y prend comme point de départ le monopole (chap. V), passe par la « concurrence des producteurs » (*i.e* l'oligopole) (chap. VII) et va progressivement jusqu'à la « concurrence indéfinie » (Chap. VIII), ce que nous considérons aujourd'hui être la concurrence parfaite. Grâce à cela, il démontre que, dans le cadre qu'il a défini, au fur et à mesure que le nombre de firmes présentes sur un marché augmente, la quantité vendue par chacune d'elles diminue, les quantités totales échangées sur le marché augmentent, et le prix diminue, ce qui conduit, à la limite, aux résultats de la concurrence parfaite.

---

\* Cette contribution, bien qu'originale, s'inscrit dans le cadre d'un programme de recherche que nous poursuivons depuis plusieurs années et qui porte sur les arrivées aléatoires de joueurs dans les jeux dynamiques. A ce titre, nous reprenons ici certains éléments de notre document de travail "Cournot oligopoly with randomly arriving players" CRESE Working Paper n° 2016-14. Nous remercions Sylvain Béal, Mostapha Diss, Romain Biard et Céline Savard-Chambard pour leurs remarques et suggestions sur une première version. Nous remercions également Thierry Martin pour nous avoir, avec générosité et patience, aidé à mieux comprendre l'œuvre et les écrits philosophiques de Cournot. Nous restons naturellement seuls responsables des erreurs ou approximations qui pourraient subsister.

La force de cette analyse et en particulier de son modèle d'oligopole, repose selon nous aujourd'hui sur trois piliers. Premièrement il y a l'intérêt du modèle en lui-même, c'est-à-dire son intérêt pour traiter de marchés où les décisions de production sont prises avant les ventes. Cet intérêt est si vif qu'il appartient aujourd'hui au cœur du savoir des économistes en matière de concurrence imparfaite. Deuxièmement, comme l'ont démontré par exemple Kreps et Scheinkman, 1983, d'Aspremont, Dos Santos Ferreira et Gérard-Varet, 1991 ou Thépot, 1991, le modèle de Cournot couvre bien plus de cas que la seule concurrence par les quantités. Enfin, troisièmement, le modèle de Cournot est d'une utilité pratique forte, tant pour les personnes en charge des politiques de concurrence (*e.g.* Pil Choi et Nahm, 2016), que pour celles en charge des politiques commerciales (*e.g.* Head et Spencer, 2017) ou pour celles qui doivent concevoir des marchés (*e.g.* Bimpikis *et al.*, 2019).

N'étant ni historiens de la pensée, ni économètres, ni philosophes, il nous semble que le mieux que nous puissions faire pour lui rendre hommage ici consiste à montrer comment ses analyses continuent à stimuler la recherche théorique actuelle. A ce titre, ce chapitre a pour objectif de proposer une contribution à l'analyse du modèle d'oligopole de Cournot dans un contexte d'entrées aléatoires de firmes. Autrement dit, il s'agit d'étudier un cadre à la Cournot où personne (ni les agents, ni le modélisateur) ne sait combien de firmes seront réellement présentes à chaque pas de temps. Pour cela, tout du long, nous retiendrons les trois hypothèses suivantes : (a) le temps est discret, (b) les firmes (installées ou non) sont parfaitement identiques, et (c) il ne peut arriver sur le marché à chaque pas de temps qu'une seule nouvelle firme.

Le reste du chapitre est organisé de la manière suivante. Notre section 2 expose les deux contributions qui sont, à notre connaissance, les plus proches de notre thématique. La section 3 développe le modèle statique de Cournot dans le cas d'une fonction de demande inverse affine ( $P(Q) = a - bQ$ ), puis dans celui d'une fonction de demande isoélastique ( $P(Q) = aQ^{-1/\epsilon}$ ). La section 4 présente le modèle de l'oligopole de Cournot répété en horizon fini et en horizon infini. La section 5 traite du cas de l'oligopole dynamique de Cournot avec entrée certaine à chaque pas de temps. La section 6 analyse le cas de l'oligopole dynamique de Cournot avec entrée possible à chaque pas temps en distinguant les cas suivants : probabilité d'entrée constante, probabilité d'entrée variable exogène, et, en horizon infini, le cas d'une probabilité d'entrée variable endogène. Notre septième et dernière section conclut.

## Revue de la littérature

Il existe une très vaste littérature théorique portant sur l'oligopole de Cournot. Pourtant, à notre connaissance, la question de l'entrée aléatoire de concurrents dans ce contexte n'a reçu que peu d'attention. En effet, à l'exception de l'article de Kamien et Schwartz, 1975 et du document de travail de De Sinopoli *et al.*, 2020, nous n'avons pas trouvé d'autres références sur cette thématique. Nous présenterons successivement ces deux contributions en essayant de faire ressortir les éléments qui distinguent notre approche de celles-ci.

Constatant que l'étude de l'oligopole a progressé selon deux voies (le comportement des firmes et de leurs actions face à des rivaux existants, ainsi que le comportement des firmes face à des rivaux potentiels), Kamien et Schwartz, 1975 propose un modèle fondé sur Cournot qui essaye de relier celles-ci. A cette fin, ils proposent un modèle où les firmes installées se comportent à la Cournot et où les entrées des concurrents potentiels se font selon une variable aléatoire dont la distribution de probabilité est dépendante du prix de marché.

Afin de faire ressortir les éléments communs ainsi que les différences entre ce modèle et notre contribution, nous proposons le tableau comparatif suivant, où la première colonne cor-

respond aux douze éléments que nous comparons (*i.e.* question de recherche, temps, demande, firmes installées, entrantes potentielles, après l'entrée, coût d'entrée, arrivées, sortie, actualisation, stratégie des firmes installées à l'égard des entrantes, et aspect dynamique), la deuxième colonne correspond à l'article de Kamien et Schwartz, et la troisième colonne correspond à notre contribution.

TABLE 1 : Comparaison entre Kamien et Schwartz, 1975 et notre contribution

	<b>Kamien et Schwartz</b>	<b>Notre contribution</b>
<b>Question de recherche</b>	Oligopole de Cournot avec arrivées aléatoires	<i>Idem</i>
<b>Temps</b>	Continu	Continu (horizon fini et infini) + Discret
<b>Demande</b>	Stationnaire	<i>Idem</i>
<b>Firmes installées</b>	Identiques entre elles	<i>Idem</i>
<b>Firmes entrantes potentielles</b>	Identiques entre elles	<i>Idem</i>
<b>Après entrée</b>	L'entrante est indistinguishable des firmes installées auparavant	<i>Idem</i>
<b>Coût d'entrée</b>	Pas de coût d'entrée	Coût d'entrée fixe
<b>Arrivées</b>	Variable aléatoire dont la distribution dépend du prix de marché	Variable aléatoire exogène fixe + variable aléatoire dépendant du profit espéré
<b>Sortie</b>	Pas de sortie	<i>Idem</i>
<b>Actualisation</b>	Exponentielle	<i>Idem</i>
<b>Stratégies des firmes installées à l'égard des entrants</b>	Les firmes installées cherchent à dissuader l'entrée en manipulant les prix	Aucune
<b>Aspect dynamique</b>	Analyse d'une période type	Analyse du système dynamique complet

Au final il ressort de cette rapide comparaison qu'en dépit de nombreux éléments communs, le modèle de Kamien et Schartz est beaucoup mieux adapté s'il s'agit d'étudier les comportements stratégiques des firmes installées à l'égard des entrantes potentielles. En revanche, si la question concerne l'étude du profit espéré d'une firme installée dans un oligopole avec entrée aléatoire, notre modélisation nous semble mieux adaptée.

L'article de De Sinopoli *et al.*, 2020 s'inscrit dans la littérature des jeux à population incertaine qui ont été introduit par Myerson, 1998. L'idée centrale de cette dernière est de modéliser l'incertitude quant au nombre de joueurs en faisant l'hypothèse que le nombre de joueurs qui seront réellement sur le marché est le résultat d'un processus stochastique dont la distribution de probabilité et la moyenne sont connaissance commune. Au sein de cette classe de jeux, la sous-classe des jeux de Poisson (où le nombre de joueurs est une variable aléatoire suivant une distribution de Poisson de moyenne  $n$ ) est celle qui a fait l'objet de la plus grande attention.

Dans leur contribution De Sinopoli *et al.* caractérisent l'ensemble des équilibres d'un oligopole de Cournot ayant de telles propriétés. Ils mettent en particulier en évidence que, lorsque le coût marginal de production est nul, il existe un phénomène de surproduction en comparaison

du cas où l'oligopole de Cournot se réalise avec une population non-incertaine.

En dépit de la proximité de leur question de recherche avec la nôtre, notre modélisation diffère de la leur. En effet, chez nous, le nombre de joueurs peut varier au cours du temps et personne ne sait *ex ante* ce qu'il sera réellement à chaque période.

## L'oligopole statique de Cournot

Afin de présenter le modèle de l'oligopole de Cournot avec  $n$  firmes nous commencerons par donner les hypothèses et notations. Nous développerons ensuite le cas de la demande inverse affine ( $a - bQ$ ), puis celui de la demande inverse isoélastique ( $aQ^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ ).

### Hypothèses et notations

L'oligopole de Cournot est une modélisation des situations de concurrence en quantité entre  $n$  producteurs, numérotés par un indice entier  $i$  ou  $k \in \{1, \dots, n\}$ , produisant des produits homogènes (ou parfaitement substituables).

Chaque producteur  $i$ , choisit de façon indépendante la quantité  $q_i$  qu'il produit. Il n'a pas d'autre contrainte de production que  $q_i$  positif (ou nul). Il supporte un coût de production  $C(q_i)$ . Tous les producteurs recourant à la même technologie de production, ils ont donc tous la même fonction  $C(\cdot)$ . On notera  $Q = \sum_k q_k$  la production cumulée de tous les producteurs.

Le prix de vente du produit, unique sur le marché, est une fonction  $P(Q)$  décroissante de la production totale, appelée *courbe de demande inverse*. Ainsi, le profit du producteur  $i$  est

$$\pi_i = q_i P(Q) - C(q_i).$$

Un équilibre de Cournot, ou de Cournot-Nash, est un ensemble de productions  $\{q_1, \dots, q_n\}$  tel que chaque producteur maximise son profit sous l'hypothèse que ses concurrents ne changeront pas leur production par rapport à celle de cet équilibre. Étant donné le caractère symétrique de la situation décrite ici, puisque toutes les firmes sont identiques, les équilibres seront symétriques, et tous les producteurs produiront la même quantité de produits, notée  $q_n^*$  (où cette fois l'indice inférieur désigne le nombre de producteurs en concurrence).

En outre, et pour garder un cadre simple, nous nous restreindrons au cas où le *coût marginal* de production est une constante  $c$ , de sorte que le coût total de production, commun à tous les producteurs est *linéaire*, de pente  $c$  :

$$C(q) = cq.$$

Nous nous intéresserons aux productions individuelles  $q_n^*$ , aux profits individuels  $\pi_n^*$ , ainsi qu'à la production totale  $Q_n^*$  et au profit cumulé  $\Pi_n^*$  de tous les producteurs. En outre, nous considérerons des suites temporelles finies ou infinies d'équilibres avec un nombre croissant de producteurs. Nous noterons  $\bar{\pi}_n$  le profit cumulé dans le temps d'un producteur entré au pas de temps  $n$ , et, dans un cadre stochastique,  $\bar{\pi}_n^e$  son espérance mathématique. De même pour  $\Pi_n$ ,  $q_n$  et  $Q_n$  dont les cumulés espérés deviendront respectivement  $\bar{\Pi}_n^e$ ,  $\bar{q}_n^e$  et  $\bar{Q}_n^e$ .

### Le cas d'une fonction de demande inverse affine

Nous supposons que deux constantes  $a$  et  $b$  définissent la courbe de demande inverse comme

$$P(Q) = a - bQ.$$

On notera que cette formule n'a de sens que tant que  $Q < a/b$ . Pour  $Q \geq a/b$ , il faut prendre  $P(Q) = 0$ . En outre, on supposera toujours que le coût marginal de production est inférieur au prix de vente à consommation évanescence, faute de quoi les producteurs n'ont aucune incitation à produire, c'est-à-dire ici  $c < a$ .

On a alors

$$\pi_i = q_i(a - bQ) - cq_i = (a - c - b \sum_{k \neq i} q_k)q_i - bq_i^2.$$

En égalisant la dérivée de ce binôme à zéro, il vient que la *courbe de meilleure réponse* (ou fonction de réaction) est

$$q_i = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2} \sum_{k \neq i} q_k.$$

À l'équilibre où toutes les productions individuelles sont égales à un même  $q_n^*$ , on obtient (voir Annexe A.1) :

$$q_n^* = \frac{a - c}{(n + 1)b}, \quad Q_n^* = \frac{n}{n + 1} \frac{a - c}{b},$$

En reportant dans l'équation de la courbe de demande, on trouve

$$P_n^* = \frac{a}{n + 1} + \frac{n}{n + 1}c,$$

d'où

$$\pi_n^* = \pi_i(q_n^*) = \frac{1}{b} \left( \frac{a - c}{n + 1} \right)^2, \quad \Pi_n^* = \frac{n}{(n + 1)^2} \frac{(a - c)^2}{b}.$$

**Monopole** Le cas  $n = 1$  correspond à un monopole. Les quantités optimales y sont donc

$$q^* = Q^* = \frac{a - c}{2b}, \quad P^* = \frac{a + c}{2}, \quad \text{et} \quad \pi^* = \Pi^* = \frac{(a - c)^2}{4b}.$$

**Duopole** Le cas  $n = 2$  correspond au *duopole de Cournot*. Les quantités d'équilibre y sont donc

$$q_2^* = \frac{a - c}{3b}, \quad Q_2^* = \frac{2(a - c)}{3b}, \quad P_2^* = \frac{a}{3} + \frac{2}{3}c, \quad \text{et} \quad \pi_2^* = \frac{(a - c)^2}{9b}, \quad \Pi_2^* = \frac{2(a - c)^2}{9b}.$$

**Grand nombre de joueurs** Si le nombre  $n$  de joueurs tend vers l'infini, on voit que les productions individuelles tendent vers zéro tandis que la production totale tend vers  $(a - c)/b$ . Mais le fait le plus remarquable est que le prix de vente tend vers le coût marginal de production  $c$ , et donc que le profit, tant individuel que global, tend vers zéro. Il y a ainsi convergence vers la concurrence parfaite.

## Le cas d'une fonction de demande inverse isoélastique

Nous nous intéressons maintenant au cas où l'*élasticité-prix* de la demande est constante et égale à un nombre positif  $\varepsilon$ . C'est-à-dire où de petites variations,  $dP$  et  $dQ$ , de  $P$  et de  $Q$  sont reliées par la relation

$$\frac{dQ}{Q} = -\varepsilon \frac{dP}{P}.$$

Ceci conduit à la fonction de demande inverse suivante :

$$P = aQ^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

On notera que cette formule n'a de sens que si  $Q$  est *strictement* positive :  $Q > 0$ . Le profit du joueur  $i$  est alors

$$\pi_i = q_i(aQ^{-\frac{1}{\varepsilon}} - c)$$

qui n'est positif (pour tous les producteurs) qu'à condition que

$$Q < \left(\frac{a}{c}\right)^\varepsilon.$$

Nous nous limiterons partout à ce domaine dans la suite.

Des calculs un peu plus compliqués que les précédents (voir Annexe A.2) mènent aux conclusions suivantes :

Si  $\varepsilon > 1$ , la situation est simple, on trouve

$$\begin{aligned} q_n^* &= \frac{1}{n} \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{n\varepsilon} \right) \right]^\varepsilon, & Q_n^* &= \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{n\varepsilon} \right) \right]^\varepsilon, \\ P_n^* &= \frac{c}{1 - \frac{1}{n\varepsilon}}, \\ \pi_n^* &= \frac{a}{n^2\varepsilon} \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{n\varepsilon} \right) \right]^{\varepsilon-1} & \Pi_n^* &= \frac{a}{n\varepsilon} \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{n\varepsilon} \right) \right]^{\varepsilon-1} \end{aligned}$$

Si  $\varepsilon \leq 1$ , le problème n'est non dégénéré que si le nombre de producteurs est suffisamment grand, précisément si  $n > 1/\varepsilon$ . Pour  $n < 1/\varepsilon$ , les producteurs peuvent s'assurer tous un profit arbitrairement grand en utilisant des productions arbitrairement petites, ce qui fait tendre le prix vers l'infini. Pour  $n = 1/\varepsilon$ , la production d'équilibre de chaque joueur est zéro, pour un profit nul et un prix indéfini.

**Monopole** Pour  $n = 1$ , on est en situation de monopole. Le problème n'est non dégénéré que si  $\varepsilon > 1$ , et on a

$$q^* = Q^* = \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \right]^\varepsilon, \quad P^* = \frac{c}{1 - \frac{1}{\varepsilon}}, \quad \pi^* = \Pi^* = \frac{a}{\varepsilon} \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \right]^{\varepsilon-1}.$$

**Duopole** Le cas  $n = 2$  correspond au *duopole de Cournot*. À nouveau, le problème n'est non dégénéré que si  $\varepsilon > 1/2$ . Les quantités d'équilibre y sont donc

$$\begin{aligned} q_2^* &= \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{2\varepsilon} \right) \right]^\varepsilon, & Q_2^* &= \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{2\varepsilon} \right) \right]^\varepsilon, \\ P_2^* &= \frac{c}{1 - \frac{1}{2\varepsilon}}, \\ \pi_2^* &= \frac{a}{4\varepsilon} \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{2\varepsilon} \right) \right]^{\varepsilon-1} & \Pi_2^* &= \frac{a}{2\varepsilon} \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{2\varepsilon} \right) \right]^{\varepsilon-1} \end{aligned}$$

**Grand nombre de joueurs** Pour  $n \rightarrow \infty$ , comme précédemment, on voit que quelque soit l'élasticité, les productions individuelles tendent vers zéro, tandis que la production totale reste finie et non nulle, tendant vers  $(a/c)^\varepsilon$ . Et à nouveau il y a convergence vers la concurrence parfaite, avec le prix qui tend vers  $c$  et les profits, tant individuels que cumulé qui tendent vers zéro.

## L'oligopole répété de Cournot, avec un nombre fixe de producteurs

On peut particulariser au cas de l'oligopole de Cournot les théorèmes dits « Folk theorems » (parce qu'ils étaient connus des spécialistes avant qu'ils ne fussent publiés (Friedman, 1971), voir par exemple Mertens *et al.*, 2015, Béal et Gabuthy, 2018, Maschler *et al.*, 2016 et Dequiedt *et al.*, 2011). Ils concernent le profil de gain des joueurs en équilibre de Nash dans un jeu où un même jeu statique de base est répété, soit un grand nombre de fois, soit une infinité de fois. À chaque étape, ou pas de temps  $t$ , de cette suite temporelle de jeux, chaque joueur peut choisir sa stratégie  $q_i(t)$  en fonction des profils de stratégies  $q(s)$ ,  $s < t$  observés à toutes les étapes précédentes. Et on s'intéresse au gain total de chaque joueur cumulé au cours du jeu, noté  $\bar{\pi}_i$ .

Les *Folk theorems* affirment que sous certaines conditions, *tous les profils de gains* compris dans un certain domaine du plan  $\mathbb{R}^n$  peuvent être atteints par un équilibre de Nash. Ce domaine des profils de gains de Nash possibles est caractérisé par le fait qu'il soit *individuellement rationnel*, c'est-à-dire pire, pour aucun joueur, que le gain qu'il peut s'assurer contre toute défense; pour le problème étudié ici non-négatif pour tous les producteurs. En effet, un producteur peut toujours s'assurer un profit non-négatif en ne produisant pas. L'autre condition fait intervenir l'ensemble des profils *accessibles*, à savoir l'enveloppe convexe des profils de gains possibles dans le jeu statique d'origine. Nous posons donc la définition suivante :

**Définition 0.1** Nous appelons domaine accessible d'un jeu de Cournot l'enveloppe convexe des profils de gain possibles restreinte si nécessaire au quadrant non-négatif.

### Le cas général

#### En horizon fini

Pour le cas en horizon fini, nous ne considérerons que le cas où le profit de chaque producteur est défini par la moyenne arithmétique des profits à chaque étape, c'est-à-dire, à une renormalisation près, le cas où le coefficient d'actualisation  $r$  est pris égal à un. Notons  $\bar{\pi}_i$  le profit actualisé cumulé du producteur  $i$ . Soit donc

$$\bar{\pi}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \pi_i(q(t)), \quad \bar{\pi} = (\bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_n).$$

On dote le plan des  $\bar{\pi}$  (isomorphe à  $\mathbb{R}^n$ ) de la distance  $\ell_1$  ou  $\ell_\infty$ , indifféremment. Le théorème est alors le suivant :

**Theorem 0.2** Quelque soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $T_\varepsilon$  tel que, si  $T \geq T_\varepsilon$  quelque soit  $\hat{\pi}$  dans le domaine accessible, il existe un profil de gains en équilibre de Nash à une distance inférieure à  $\varepsilon$  de  $\hat{\pi}$ . (C'est à dire  $\sum_i |\bar{\pi}_i - \hat{\pi}_i| < \varepsilon$ , ou, indifféremment  $\max_i |\bar{\pi}_i - \hat{\pi}_i| < \varepsilon$ .)



## En horizon infini

On considère maintenant un jeu infiniment répété avec le critère, avec facteur d'actualisation  $r < 1$  considéré ailleurs dans ce chapitre, mais re-normalisé de la façon suivante :

$$\bar{\pi}_i = (1 - r) \sum_{t=1}^{\infty} r^t \pi_i(q(t)).$$

Le théorème est alors le suivant :

**Theorem 0.3** *Quelque soit  $\hat{\pi}$  strictement positif et appartenant au domaine accessible, il existe  $\varepsilon$  tel que si  $1 - r \leq \varepsilon$ , un équilibre de Nash du jeu répété existe avec  $\bar{\pi} = \hat{\pi}$ .*

## Domaine accessible

Il reste à caractériser le domaine accessible.

### Le cas d'une fonction de demande inverse affine

Nous nous plaçons dans le cas où  $P(Q) = a - bQ$ , et on rappelle que  $a > c$ . On a donc

$$\pi_i = q_i(a - c - bQ),$$

et en sommant

$$\Pi = Q(a - c - bQ).$$

On notera que  $0 \leq \Pi \leq \max_Q \{Q(a - c - bQ)\} = (a - c)^2/4b$ . On affirme

**Proposition 0.4** *Le domaine accessible de profils de profit pour la courbe de demande affine est  $\pi_i \geq 0$  pour tout  $i$  et  $\sum_i \pi_i \leq (a - c)^2/4b$ .*

*Preuve.* On a déjà vu que la condition est nécessaire. Réciproquement, Fixons un profil  $\pi$  satisfaisant les contraintes. Choisissons  $Q$  tel que  $Q(a - c - bQ) = \sum_i \pi_i$ . (Cette équation a deux racines positives. Les deux conviennent.) Et choisissons

$$q_i = \frac{\pi_i}{a - c - bQ}.$$

### Le cas d'une fonction de demande isoélastique

On a maintenant  $P(Q) = aQ^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ , et

$$\pi_i = q_i(aQ^{-\frac{1}{\varepsilon}} - c)$$

et en sommant

$$\sum_i \pi_i = \Pi = Q(aQ^{-\frac{1}{\varepsilon}} - c) \leq \frac{a}{\varepsilon} \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \right]^{\varepsilon-1} = \Pi_1^*.$$

Si  $\varepsilon > 1$ , on a donc

$$\Pi \leq \frac{a}{\varepsilon} \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \right]^{\varepsilon-1} = \Pi_1^*.$$

Par contre, si  $\varepsilon < 1$ , cette somme peut être rendue arbitrairement grande.

Un raisonnement analogue au précédent mène au résultat suivant :

**Proposition 0.5** *Le domaine accessible de profils de profit pour le cas isoélastique est  $\pi_i > 0$  pour tout  $i$  et, dans le cas  $\varepsilon > 1$ ,  $\sum_i \pi_i \leq \Pi_1^*$ .*

*Preuve.* Fixons un profil  $\pi$  satisfaisant les contraintes, choisissons  $Q$  tel que  $Q(aQ^{-\frac{1}{\varepsilon}} - c) = \sum_i \pi_i$ . Cette équation a toujours une solution positive puisque par le théorème de la valeur intermédiaire,  $Q(aQ^{-\frac{1}{\varepsilon}} - c)$  prend toutes les valeurs entre 0 (obtenue pour  $Q = (a/c)^\varepsilon$ ) et l'infini si  $\varepsilon < 1$  et entre 0 et  $\Pi_1$  si  $\varepsilon > 1$ . Et pour cette solution,  $aQ^{-1/\varepsilon} - c > 0$ . Et choisissons

$$q_i = \frac{\pi_i}{aQ^{-\frac{1}{\varepsilon}} - c}.$$

## L'oligopole dynamique de Cournot avec une entrée *certaine* à chaque pas de temps

Dans cette section nous considérons une situation d'oligopole de Cournot qui se renouvelle dans le temps et où, à chaque pas de temps, il y a l'arrivée d'une nouvelle firme. Autrement dit, il y a à la première étape  $n$  firmes, à la deuxième étape  $n + 1$  firmes, à la troisième étape  $n + 2$  firmes, etc. Nous distinguons le cas où l'horizon est fini et celui où l'horizon est infini, avec à chaque fois une demande affine ou une demande isoélastique.

Contrairement à ce qui était le cadre de décision dans la section précédente, nous supposons dans toute la suite qu'à chaque étape les joueurs ne considèrent que les gains de cette étape, et sont contraints d'utiliser une stratégie de production ne dépendant que des conditions propres à cette étape. (Donc indépendante des choix passés.)

Sans perte de généralité, nous ne traiterons que du cas où il n'y a qu'une seule firme au départ. En effet, la situation avec  $n$  firmes au départ est identique à celle du  $n$ -ème producteur entré de notre modèle. On se souviendra seulement que pour le cas isoélastique, si  $\varepsilon < 1$ , on ne peut pas démarrer avec moins de  $1/\varepsilon$  producteurs.

### Horizon fini

Nous considérons maintenant un monopole initial, mais avec le temps, des concurrents, tous identiques à la première firme installée, entrent sur le marché. Le modèle est en temps discret<sup>1</sup>  $t \in [1, T] \subset \mathbb{N}$ . Un concurrent entre à chaque pas de temps et, après chaque entrée d'un producteur, les prix et quantités produites s'équilibrent selon un oligopole de Cournot. Nous considérons ici le cas où  $T$  est fini.

Outre les stratégies d'équilibre en fonction du temps, nous examinons le profit cumulé actualisé au taux  $r$  de chaque producteur, suivant son rang d'entrée. On a donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  une stratégie d'équilibre  $q_n^*$  et un profit  $\pi_n^*$  au pas  $n$ , donnés par la section 2 de notre chapitre, et pour le joueur entré au pas  $n$  :

$$\bar{\pi}_n = \sum_{t=n}^T r^{t-n} \pi_t. \quad (1)$$

Pour le problème en horizon fini, il n'y a guère plus à en dire car cette expression s'évalue sans difficulté par une somme finie .

<sup>1</sup>Pour un traitement en temps continu, voir Bernhard et Deschamps, 2017.

## Horizon infini avec une courbe de demande inverse affine

Nous distinguons successivement le cas où il n'y a pas d'actualisation des profits, puis celui où il y a une actualisation au taux  $r$ .

**Sans actualisation** Si on omet l'actualisation (c'est-à-dire si on fait  $r = 1$  dans la formule (1)), en utilisant le résultat d'Euler concernant la série des inverses des carrés des nombres entiers (voir, par exemple, S.J. Patterson, 1988, p. 2)

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

on obtient alors

$$\bar{\pi}_n = \frac{(a-c)^2}{b} \sum_{t=n}^{\infty} \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{(a-c)^2}{b} \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) = \frac{(a-c)^2}{b} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right).$$

On a donc encore une formule qui s'évalue par un calcul fini explicite. Le monopoleur initial peut donc obtenir un profit  $(\pi^2/6 - 1)(a-c)^2/b \simeq 0,645(a-c)^2/b$ , et si on démarre avec un duopole (pour nous au temps  $t = 2$ ), les duopoleurs initiaux peuvent obtenir un profit de  $(\pi^2/6 - 5/4)(a-c)^2/b \simeq 0,395(a-c)^2/b$ .

**Avec actualisation** Nous prenons maintenant en considération le cas où  $r$  est strictement positif, mais bien sûr toujours inférieur à 1. La formule (1) devient

$$\bar{\pi}_n = \frac{(a-c)^2}{b} \sum_{t=n}^{\infty} \frac{r^{t-n}}{(t+1)^2} = \frac{(a-c)^2}{r^{n+1}b} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{r^k}{k^2}. \quad (2)$$

On peut remplacer l'évaluation d'une série infinie par le calcul d'une intégrale définie (typiquement, par la méthode des trapèzes, où on prendra  $\ln(1)/0 = 1$ ) grâce à la formule

$$\int_0^r -\frac{\ln(1-x)}{x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k^2}.$$

qui s'obtient en développant  $\ln(1-x)/x$  en série entière et en intégrant terme à terme. On obtient donc

$$\bar{\pi}_n = \frac{(a-c)^2}{br^{n+1}} \left[ \int_0^r -\frac{\ln(1-x)}{x} dx - \sum_{k=1}^n \frac{r^k}{k^2} \right]. \quad (3)$$

Typiquement, pour un taux d'actualisation  $r = 0,9$ , on trouve  $\bar{\pi}_1 = 0,494(a-c)^2/b$ , et si on démarre avec un duopole,  $\bar{\pi}_2 = 0,271(a-c)^2/b$ .

## Horizon infini avec une courbe demande isoélastique

Dans le cas de la demande isoélastique, il n'a pas de formule exacte en forme explicite, sauf dans le cas très particulier où  $\varepsilon = 1$ . Pour le cas général où  $\varepsilon \neq 1$ , on peut donner des bornes. On note

$$\varpi_n(\varepsilon) = \frac{a^\varepsilon c^{1-\varepsilon}}{\varepsilon n^2}$$

et on utilise les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \text{si } \varepsilon > 1, & \quad \pi_n^* < \varpi_n(\varepsilon), \\ \text{si } \varepsilon = 1, & \quad \pi_n^* = \frac{a}{n^2}, \\ \text{si } \varepsilon < 1 \text{ et } n > 1/\varepsilon, & \quad \pi_n^* > \varpi_n(\varepsilon). \end{aligned}$$

On utilise alors les mêmes expressions que précédemment pour la somme des  $1/n^2$  ou des  $r^n/n^2$  pour conclure, par exemple que

$$\begin{aligned} \text{si } \varepsilon = 1 \quad \text{et} \quad r = 1, & \quad \bar{\pi}_1 = \frac{a\pi^2}{6}, \\ \text{si } \varepsilon > 1 \quad \text{et} \quad r < 1, & \quad \bar{\pi}_1 < \frac{a^\varepsilon c^{1-\varepsilon}}{\varepsilon} \int_0^r \frac{-\ln(1-x)}{x} dx, \end{aligned}$$

et les autres estimations de façon analogue. Pour les évaluations de  $\bar{\pi}_n$  pour  $n$  assez grand (et si  $|\varepsilon|$  n'est pas trop petit), ces estimations sont raisonnablement précises et peuvent être utilisées pour décider d'entrer (ou non) sur ce marché (voir notre section).

## L'oligopole dynamique de Cournot avec une entrée *possible* à chaque pas de temps

Après avoir expliqué la manière dont nous modélisons l'entrée aléatoire (c'est-à-dire *possible*) d'une firme à chaque pas de temps d'un jeu dynamique, nous analysons successivement les cas où à chaque pas de temps une firme peut arriver selon : (a) une probabilité d'entrée constante, (b) une probabilité d'entrée variable exogène, et, (c) en horizon infini, selon une probabilité d'entrée endogène.

### Le cadre étudié

On considère maintenant le cas d'un marché où un concurrent *peut* (ou non) entrer à chaque pas de temps. L'entrée à chaque pas de temps n'est donc pas certaine. Nous faisons l'hypothèse que cette dernière est un événement aléatoire indépendant des entrées précédentes. Il faut donc distinguer le temps  $t$  du nombre de producteurs  $m(t)$  présents sur le marché au temps  $t$ . On désigne par  $t_n$  la date d'entrée du  $n$ -ième producteur. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t : t_n \leq t < t_{n+1}, \quad m(t) = n.$$

On identifie les producteurs par leur rang d'entrée. Le profit actualisé total du  $n$ -ième producteur entré (c'est-à-dire le profit actualisé qu'il obtiendra à la fin du jeu) est donc

$$\bar{\pi}_n = \sum_{t=t_n}^T r^{t-t_n} \pi_{m(t)}.$$

Comme  $m(t)$  est maintenant une variable aléatoire, il en va de même de  $\bar{\pi}_n$ . On se propose d'évaluer son espérance mathématique  $\bar{\pi}_n^e$ . La figure 1 représente l'arbre des événements possibles<sup>2</sup>. À chaque nœud, la branche haute est parcourue avec une probabilité  $p$  et la branche basse avec une probabilité  $1 - p$ .

<sup>2</sup>Cette figure correspond à la figure 1 de Bernhard et Deschamps, 2017.

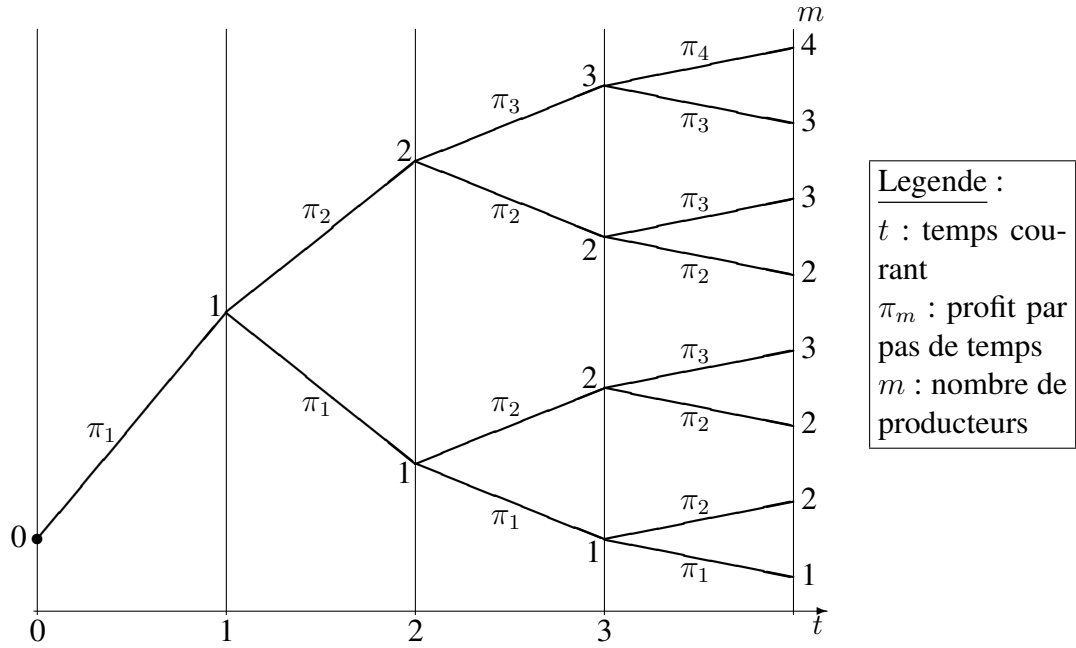


FIGURE 1 : L'arbre des événements

### Probabilité d'entrée constante

On admet d'abord que la probabilité d'entrée d'un concurrent à chaque pas de temps est une constante  $p$ . Le processus  $\{m(t)\}$  est donc un processus de Bernoulli. On aura besoin des coefficients combinatoires (ou coefficients du binôme)

$$\forall n > p \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

En outre, on introduit la notation  $\mathcal{D}_\nu$ , désignant un domaine du plan discret  $\mathbb{N}^2$ . Pour tout entier  $\nu$  (un intervalle de temps discret)

$$\mathcal{D}_\nu = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq \ell \leq k \leq \nu\}. \quad (4)$$

On peut alors en déduire le théorème 1 de Bernhard et Deschamps, 2017 :

**Theorem 0.6** *Le profit espéré du  $n$ -ième producteur arrivé est*

$$\bar{\pi}_n^e = \begin{cases} \sum_{(k,\ell) \in \mathcal{D}_{T-t_n}} [(1-p)r]^k \left(\frac{p}{1-p}\right)^\ell \binom{k}{\ell} \pi_{n+\ell} & \text{si } p < 1, \\ \sum_{k=0}^{T-t_n} r^k \pi_{n+k} & \text{si } p = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Nous donnons maintenant à la fois une nouvelle démonstration du théorème ci-dessus et un algorithme séquentiel pour calculer ce profit espéré.

**Algorithme séquentiel** Étant donné un entier  $k$ , soit  $v_\ell(k)$  la probabilité qu'exactly  $\ell$  producteurs arrivent pendant cet intervalle de temps. Pour un processus où un seul événement peut se produire à chaque pas, il n'y a que deux possibilités, incompatibles entre elles, pour qu'exactly  $\ell$  s'en soient produits jusqu'au pas  $k$  : soit il y en avait déjà  $\ell$  au pas  $k-1$  et il n'y en

a aucun nouveau au pas  $k$ , soit il y en avait exactement  $\ell - 1$  jusqu'au pas  $k$  et un événement s'est produit au pas  $k$ . On en déduit

$$v_\ell(k) = pv_{\ell-1}(k-1) + (1-p)v_\ell(k-1). \quad (6)$$

Mais on a aussi

$$\bar{\pi}_n^e = \sum_{t=t_n}^T r^{t-t_n} \mathbb{E}(\pi_{m(t)} | t_n), \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\pi_{m(t)} | t_n) = \sum_{\ell=0}^{t-t_n} v_\ell(t-t_n) \pi_{n+\ell}.$$

Donc, en posant  $t - t_n = k$ , il vient

$$\bar{\pi}_n^e = \sum_{k=0}^{T-t_n} \sum_{\ell=0}^k r^k v_\ell(k) \pi_{n+\ell}.$$

On définit alors  $w_\ell(k) = r^k v_\ell(k)$  pour obtenir

$$\bar{\pi}_n^e = \sum_{k=0}^{T-t_n} \sum_{\ell=0}^k w_\ell(k) \pi_{n+\ell} = \sum_{(k,\ell) \in \mathcal{D}_{T-t_n}} w_\ell(k) \pi_{n+\ell}. \quad (7)$$

Les  $w_\ell(k)$  peuvent être calculés par l'algorithme suivant, dont les deux premières lignes peuvent être lues comme une initialisation, la troisième comme l'application directe de la formule (6) :

$$\begin{aligned} w_0(0) &= 1, \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad w_{-1}(k) &= w_k(k-1) = 0, \\ \forall \ell \leq k, \quad w_\ell(k) &= rpw_{\ell-1}(k-1) + r(1-p)w_\ell(k-1), \end{aligned}$$

Et comme les  $\pi_m$  utilisés ici sont décroissants, donc la suite est bornée, on peut étendre ces résultats au cas en horizon infini.

Remarquons que cet algorithme peut aussi être déduit de la formule (5) en utilisant la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{k}{\ell} = \binom{k-1}{\ell-1} + \binom{k-1}{\ell}.$$

**Algorithme récursif** On peut déduire du développement précédent un algorithme récursif sur l'horizon  $T$  utile pour un calcul numérique du problème à horizon fini :

$$\bar{\pi}_n^e(T) = \bar{\pi}_n^e(T-1) + \sum_{\ell=0}^{T-t_n} w_\ell(T-t_n) \pi_{n+\ell},$$

initialisé avec  $\bar{\pi}_n^e(t_n) = \pi_n$  ou, de manière équivalente,  $\bar{\pi}_n^e(t_n - 1) = 0$ .

La figure 2 donne  $\bar{\pi}_1$  en fonction de  $T$  pour différentes valeurs de la probabilité d'entrée.<sup>3</sup> Le cas  $p = 1$  correspond évidemment au cas de la section précédente.

<sup>3</sup>Cette figure et la suivante sont reprises de Bernhard et Deschamps, 2017.

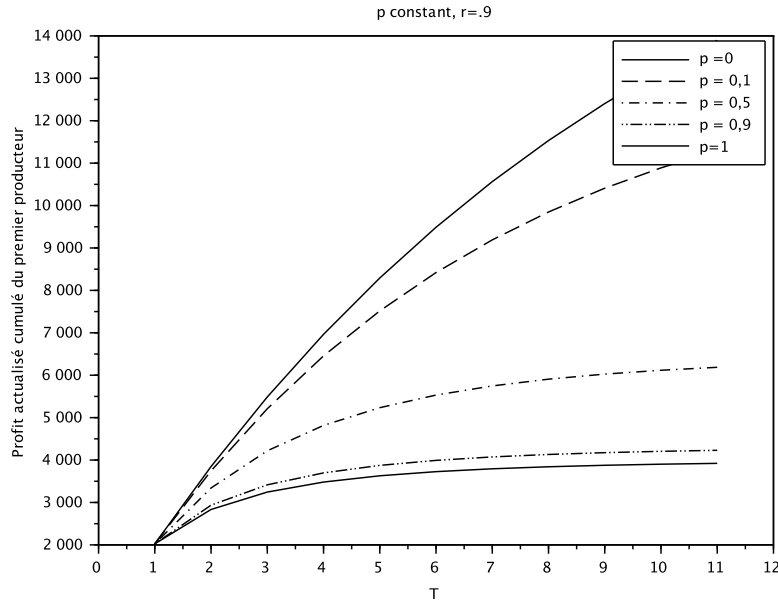


FIGURE 2 : Graphe de  $\bar{\pi}_1^e(T)$  en fonction de  $T$  pour  $p = 0, 0,1, 0,5, 0,9$ , et  $1$ , avec  $r = .9$ ,  $P = 100 - Q$ ,  $C(Q) = 10Q$

## Probabilité d'entrée variable exogène

Nous supposons ici qu'est donnée une suite  $\{p_m\}$  de probabilités d'arrivée d'un producteur de rang  $m$ , c'est-à-dire quand  $m-1$  producteurs sont déjà sur le marché. On peut facilement étendre à ce cas l'algorithme séquentiel. Introduisons la probabilité  $v_{n,m}(k)$  d'avoir  $m$  producteurs présents au temps  $t_n + k$  sachant qu'ils étaient  $n$  au temps  $t_n$ , et que  $w_{n,m}(k) = r^k v_{n,m}(k)$ . Nous remarquons que si les  $p_n$  se trouvent être constants et égaux à  $p$ , on retrouve  $w_{n,m}(k) = w_{m-n}(k)$ . L'équation (6) est maintenant remplacée par

$$v_{n,m}(k) = p_m v_{n,m-1}(k-1) + (1 - p_{m+1}) v_{n,m}(k-1),$$

et on obtient l'algorithme

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n,n}(0) &= 1, \\ \forall n, k, \quad w_{n,n-1}(k) &= w_{n,n+k}(k-1) = 0, \\ \forall n \leq m \leq n+k, \quad w_{n,m}(k) &= r p_m w_{n,m-1}(k-1) + r(1 - p_{m+1}) w_{n,m}(k-1). \end{aligned}$$

La formule (7) se généralise en

$$\bar{\pi}_n^e = \sum_{k=0}^{T-t_n} \sum_{\ell=0}^k w_{n,n+\ell}(k) \pi_{n+\ell} = \sum_{(k,\ell) \in \mathcal{D}_{T-t_n}} w_{n,n+\ell}(k) \pi_{n+\ell}. \quad (8)$$

## Probabilité d'entrée variable endogène, en horizon infini

Nous avons vu précédemment que la probabilité d'entrée d'un joueur devrait en fait dépendre de son profit espéré s'il entre effectivement. Il nous faut donc connaître  $\bar{\pi}_n^e$  pour

connaître  $p_n$ . L'algorithme ci-dessus ne peut donc pas être utilisé. Nous proposons ici une méthode permettant de traiter ce cas. Nous nous limitons pour plus de simplicité au cas en horizon infini.

On suppose maintenant que ce qui est donné est une fonction  $\phi$  donnant la probabilité d'entrée d'un producteur  $p_m = \phi(\bar{\pi}_m^e)$  en fonction de son profit espéré. On suppose aussi qu'il y a un coût d'entrée fixe  $F$  sur le marché, commun à tous les entrants potentiels. Et donc aussi que

$$\forall \bar{\pi} < F, \quad \phi(\bar{\pi}) = 0.$$

Le dernier joueur à entrer, de rang  $N$ , accumulera donc un profit  $\pi_N$  à chaque pas, soit au total  $\bar{\pi}_N^e = \pi_N / (1 - r)$ . Ceci permet de déterminer  $N$  par les inégalités

$$\pi_{N+1} < (1 - r)F \leq \pi_N.$$

Ainsi, nous pouvons déterminer  $N$  et  $\bar{\pi}_N^e$ .

Nous écrivons aussi le profit  $\bar{\pi}_n$  en fonction des temps d'arrivée  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , comme la somme des profits accumulés entre ces deux instants et le profit accumulé à partir du temps  $t_{n+1}$ , tous des variables aléatoires :

$$\bar{\pi}_n = \sum_{t=t_n}^{t_{n+1}} r^{t-t_n} \pi_n + r^{t_{n+1}-t_n} \bar{\pi}_{n+1}.$$

Or, nous avons d'une part, par définition

$$\bar{\pi}_n^e = \mathbb{E}(\bar{\pi}_n \mid t_n)$$

et d'autre part, d'après la formule des espérances emboîtées :

$$\mathbb{E}(\bar{\pi}_{n+1} \mid t_n) = \mathbb{E}_{t_{n+1}} [\mathbb{E}(\bar{\pi}_{n+1} \mid t_{n+1})] = \mathbb{E}_{t_{n+1}} [\bar{\pi}_{n+1}^e(t_{n+1})],$$

ce qui nous permet d'obtenir :

$$\bar{\pi}_n^e = \sum_{t_{n+1}=t_{n+1}}^{\infty} (1 - p_{n+1})^{t_{n+1}-t_n-1} p_{n+1} \left[ \sum_{t=t_n}^{t_{n+1}} r^{t-t_n} \pi_n + r^{t_{n+1}-t_n} \bar{\pi}_{n+1}^e(t_{n+1}) \right]. \quad (9)$$

Après quelques calculs (voir Annexe Annexe B) on obtient enfin

$$\bar{\pi}_n^e = \frac{1}{1 - (1 - p_{n+1})r} (\pi_n + p_{n+1}r \bar{\pi}_{n+1}^e). \quad (10)$$

Ce qui donne donc un algorithme rétrograde, à initialiser à  $\bar{\pi}_N^e$  pour calculer tous les  $\bar{\pi}_n$ .

La figure 3 donne le graphe de  $\bar{\pi}_n^e$  en fonction de  $n$  pour une probabilité d'entrée  $p_n = 1 - F/\bar{\pi}_n^e$ .

## Conclusion

Notre chapitre, en appliquant notre modélisation (Bernhard et Deschamps, 2017) à l'oligopole de Cournot, permet d'élargir le champ de comparaison de celui-ci à d'autres contextes. Nous proposons ci-dessous deux illustrations numériques du type de comparaison qu'il peut permettre de réaliser. Nous avons choisi de donner les productions  $\bar{q}$  et  $\bar{Q}$  (respectivement d'un



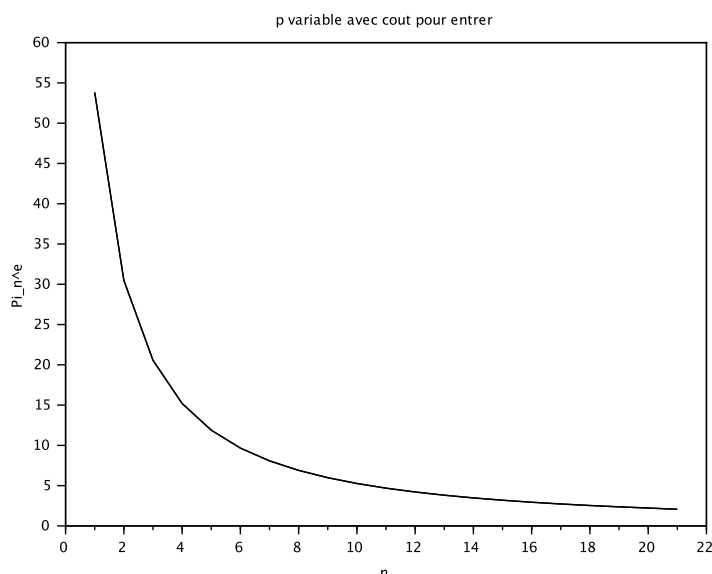


FIGURE 3 : Profit espéré en fonction du rang d'entrée pour le problème en horizon infini,  $p_n = 1 - F/\bar{\pi}_n^e$ , avec  $r = .9$ ,  $P = 100 - Q$ ,  $C(Q) = 10Q$ ,  $F = 160$ .

producteur et de tous les producteurs) et profits  $\bar{\pi}$  et  $\bar{\Pi}$  espérés cumulés sur 11 périodes, ainsi qu'un prix moyen équivalent calculé comme

$$\tilde{P} = \frac{\bar{\Pi}}{\bar{Q}} + c.$$

Pour effectuer ces illustrations numériques nous ferons les hypothèses suivantes :

- Pas d'actualisation<sup>4</sup> :  $r = 1$ ,
- Fonction de coût total identique :  $C(Q) = 10Q$ ,
- Fonction de demande :
  - affine :  $P(Q) = 100 - Q$ ,
  - isoélastique :  $P(Q) = 100Q^{-\frac{1}{\varepsilon}}$  avec  $\varepsilon = 0.6$ ,
- Nombre de périodes : 11 périodes au total (*i.e.* 10 périodes avec entrée certaine ou probable),
- Deux situations initiales :  $n_1 = 2$  et  $n_1 = 10$ .

Les deux tables ci-dessous donnent les résultats numériques calculés.

Cependant, évidemment, notre modélisation actuelle comporte un certains nombre de limites qui peuvent, selon les contextes, rendre celle-ci peu appropriée, voire inopérante. Sans prétendre à l'exhaustivité, nous souhaiterions mettre en évidence cinq d'entre elles.

<sup>4</sup>Pour pouvoir estimer un prix moyen équivalent sans avoir à actualiser des productions

TABLE 2 : Cas avec  $n_1 = 2$  firmes au départ.

$n_1 = 2$	Demande affine					Demande isoélastique				
	Entrée	$\bar{q}$	$\bar{Q}$	$\bar{\pi}$	$\bar{\Pi}$	$\tilde{P}$	$\bar{q}$	$\bar{Q}$	$\bar{\pi}$	$\bar{\Pi}$
Sans	330	660	9 900	19 800	40	7,473	14,95	373,6	747,3	59,72
$p = 0,1$	293,2	696,8	8 045	18 347	36,33	7,908	19,99	269,2	580,4	39,03
$p = 0,5$	204,2	785,8	4 276	14 101	27,94	7,109	29,80	109,1	300,3	20,07
$p = 0,9$	159,2	830,8	2 824	11 502	23,84	5,925	33,64	65,84	208,5	16,20
Certaine	151,2	838,8	2 599	11 010	23,13	5,680	34,26	59,85	194,4	15,67

TABLE 3 : Cas avec  $n_1 = 10$  firmes au départ.

$n_1 = 10$	Demande affine					Demande isoélastique				
	Entrée	$\bar{q}$	$\bar{Q}$	$\bar{\pi}$	$\bar{\Pi}$	$\tilde{P}$	$\bar{q}$	$\bar{Q}$	$\bar{\pi}$	$\bar{\Pi}$
Sans	90	900	736,4	7 364	18,18	3,925	39,25	7,851	78,51	12,00
$p = 0,1$	86,42	903,6	681,3	7 096	17,85	3,773	39,46	7,195	74,88	11,90
$p = 0,5$	74,80	915,2	518,3	6 214	16,79	3,276	40,10	5,318	63,46	11,58
$p = 0,9$	66,27	923,7	414,3	5 550	16,01	2,907	40,56	4,171	55,41	11,37
Certaine	64,48	925,5	394,2	5 409	15,84	2,830	40,65	3,954	53,75	11,32

La première est liée au fait que les stratégies des firmes installées, ainsi que celles des firmes entrantes, n'ont aucune influence sur la demande. Tout ce que nous saurions faire actuellement pour éviter d'avoir une demande identique à chaque pas de temps serait d'introduire un aléa exogène sur celle-ci. Il serait pourtant évidemment intéressant d'avoir une demande qui varie en fonction du nombre de firmes présentes sur le marché. Dans le même ordre de limite, ni le nombre de firmes installées, ni le nombre d'entrants n'affectent les coûts de production dans notre cadre actuel.

La deuxième limite tient au fait que toutes nos firmes (installées ou non) sont identiques : ce sont des clones les unes des autres. Autrement dit, il n'y a aucune asymétrie entre les firmes, ce qui revient à exclure les brevets ou les frictions dans l'adoption des mêmes techniques de production, l'image de marque ou la qualité, ainsi que toutes les formes de distinction institutionnelles qui pourraient exister. Avec Romain Biard, nous essayons actuellement de dépasser cette limite en introduisant des types d'entrants et des types de firmes installées.

La troisième limite est celle relative à notre hypothèse de connaissance commune du processus stochastique concernant l'entrée sur le marché. Nous ne voyons pas pour l'heure de moyen pour contourner cette hypothèse.

La quatrième limite est l'absence de possibilité de sortie du marché, tant pour les firmes installées que pour celles qui arrivent ensuite.

Enfin, cinquième limite, nous calculons une série d'équilibres statiques et non un équilibre dynamique.

Dans Bernhard et Deschamps, 2020 nous proposons certains éléments de réponse à ces deux dernières limites, en particulier en utilisant le modèle d'oligopole de Cournot.

L'élan, l'inspiration et le cadre donnés par Cournot vont donc continuer longtemps !

## Annexe A Oligopole de Cournot

### Fonction de demande inverse affine

Nous sommes dans le cadre du paragraphe , avec  $n$  joueurs. Le profit du joueur  $i$  est

$$\pi_i = q_i(P(Q) - c) = q_i \left( a - b \sum_{k=1}^n q_k - c \right).$$

La variable  $q_i$  apparaît deux fois dans cette formule, une fois explicitement en premier terme, et une fois dissimulée dans la somme en  $k$ , comme son terme  $k = i$ . Ainsi, la dérivée est

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = a - bQ - c - bq_i.$$

On a donc  $n$  équations en égalant les  $n$  dérivées partielles, pour  $i = 1, \dots, n$ , à zéro. Mais comme on cherche une solution symétrique où tous les  $q_i$  sont égaux à un même  $q^*$ , et donc où  $Q = Q^* = nq^*$ . On a donc une unique équation à résoudre :

$$a - c - (n + 1)bq^* = 0,$$

d'où

$$q_n^* = \frac{a - c}{(n + 1)b}, \quad Q_n^* = \frac{n}{n + 1} \frac{a - c}{b}.$$

Les autres grandeurs  $P_n^*$ ,  $\pi_n^*$  et  $\Pi_n^*$  s'obtiennent trivialement en y reportant ces formules pour  $q$  et  $Q$ .

### Demande isoélastique

Dans le contexte du paragraphe . On a donc

$$\pi_i = q_i \left[ a \left( \sum_{k=1}^n q_k \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} - c \right].$$

Comme précédemment on dérive par rapport aux deux occurrences de  $q_i$  :

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = aQ^{-\frac{1}{\varepsilon}} - c - q_i a \frac{1}{\varepsilon} Q^{-\frac{1}{\varepsilon}-1} = aQ^{-\frac{1}{\varepsilon}} \left( 1 - \frac{q_i}{\varepsilon Q} \right) - c = 0.$$

On cherche une solution symétrique, soit avec  $Q = nq$  :

$$aQ^{-\frac{1}{\varepsilon}} \left( 1 - \frac{q}{n\varepsilon q} \right) - c = 0,$$

ou

$$Q^{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{n\varepsilon} \right). \quad (11)$$

Cette forme montre à l'évidence que si  $n\varepsilon < 1$ , cette solution n'est pas recevable, puisque  $Q$  doit nécessairement être positif. Examinons de plus près cette question.

Le rapport  $q_i/Q$  est compris entre 0 et 1. Pour  $n$  joueurs, si un de ces rapports est inférieur à  $1/n$ , un autre au moins doit être supérieur à  $1/n$ , conduisant pour ce producteur à une dérivée

partielle négative. Le minimum du  $\max_i \{q_i/Q\}$  est obtenu quand tous les  $q_i$  sont égaux, et tous ces rapports valent  $1/n$ . Donc, si  $\varepsilon < 1/n$  une au moins des dérivées partielles  $\partial\pi_i/\partial q_i$  est toujours négative. Il ne peut donc pas y avoir d'équilibre de Nash intérieur, et tous les  $q_i = 0$  n'est pas une option possible puisque alors  $Q = 0$ , ce que ce modèle exclut. Donc, pour  $n < 1/\varepsilon$  il n'y a pas d'équilibre de Nash. En outre, prenons alors tous les  $q_i$  égaux à un même  $q$ . On a alors, pour tout  $i$  :

$$\pi_i = an^{-\frac{1}{\varepsilon}}q^{1-\frac{1}{\varepsilon}} - cq$$

qui tend vers l'infini quand  $q$  tend vers zéro.

Si  $n = 1/\varepsilon$  tant que  $q_i/Q \geq 1/n$ , on a  $\partial\pi_i/\partial q_i < 0$ , donc le producteur  $i$  est incité à produire moins, l'équilibre est atteint quand tous les  $q_i$  sont nuls, donc  $Q$  aussi, et le prix n'est pas défini, une situation que nous considérons encore comme dégénérée.

Examinons la concavité des  $\pi_i$ . On a

$$\frac{\partial^2\pi_i}{\partial q_i^2} = -\frac{a}{\varepsilon}Q^{-1-\frac{1}{\varepsilon}} \left[ 2 - \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{q_i}{Q} \right].$$

Si  $\varepsilon > 1$ ,  $1 + 1/\varepsilon < 2$  et comme  $q_i/Q \leq 1$ , cette dérivée seconde est bien négative. Si  $\varepsilon < 1$ , mais  $n > 1/\varepsilon$ , pour  $q_i/Q = 1/n$ , on a encore  $2 - (1 + 1/\varepsilon)/n > 0$  et donc la dérivée seconde négative, validant l'équilibre de Nash symétrique déduit de la formule (11).

Repartons de la formule (11). On élève à la puissance  $\varepsilon$  pour obtenir

$$Q_n^* = \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{n\varepsilon} \right) \right]^\varepsilon, \quad q_n^* = \frac{1}{n} \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{n\varepsilon} \right) \right]^\varepsilon, \quad P_n^* = \frac{c}{1 - \frac{1}{n\varepsilon}}.$$

Donc,

$$\pi_n^* = \frac{1}{n} \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{n\varepsilon} \right) \right]^\varepsilon \left( \frac{c}{1 - \frac{1}{n\varepsilon}} - c \right) = \frac{1}{n} \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{n\varepsilon} \right) \right]^\varepsilon \left( \frac{a}{n\varepsilon} \frac{c}{1 - \frac{1}{n\varepsilon}} \right),$$

soit enfin

$$\pi_n^* = \frac{a}{n^2\varepsilon} \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{n\varepsilon} \right) \right]^{\varepsilon-1} \quad \text{et} \quad \Pi_n^* = \frac{a}{n\varepsilon} \left[ \frac{a}{c} \left( 1 - \frac{1}{n\varepsilon} \right) \right]^{\varepsilon-1}.$$

## Annexe B Démonstration de la formule (10)

On part de la formule (9)

$$\bar{\pi}_n^e = \sum_{t_{n+1}=t_n+1}^{\infty} (1 - p_{n+1})^{t_{n+1}-t_n-1} p_{n+1} \left[ \sum_{t=t_n}^{t_{n+1}} r^{t-t_n} \pi_n + r^{t_{n+1}-t_n} \bar{\pi}_{n+1}^e(t_{n+1}) \right].$$

La somme sur  $t$  intérieure peut être écrite explicitement pour obtenir

$$\bar{\pi}_n^e = \sum_{t_{n+1}=t_n+1}^{\infty} (1 - p_{n+1})^{t_{n+1}-t_n-1} p_{n+1} \left[ \frac{1 - r^{t_{n+1}-t_n}}{1 - r} \pi_n + r^{t_{n+1}-t_n} \bar{\pi}_{n+1}^e(t_{n+1}) \right].$$

Substituons  $t$  pour l'indice muet de sommation  $t_{n+1}$ , et développons en

$$\bar{\pi}_n^e = \frac{p_{n+1}}{1-p_{n+1}} \left[ \left( \sum_{t=t_{n+1}}^{\infty} (1-p_{n+1})^{t-t_n} - \sum_{t=t_{n+1}}^{\infty} [(1-p_{n+1})r]^{t-t_n} \right) \frac{\pi_n}{1-r} + \sum_{t=t_{n+1}}^{\infty} [(1-p_{n+1})r]^{t-t_n} \bar{\pi}_{n+1}^e \right].$$

Retrouvant alors encore des sommes de puissance, on a

$$\bar{\pi}_n^e = \frac{p_{n+1}}{1-p_{n+1}} \left[ \left( \frac{1-p_{n+1}}{p_{n+1}} - \frac{(1-p_{n+1})r}{1-(1-p_{n+1})r} \right) \frac{\pi_n}{1-r} + \frac{(1-p_{n+1})r}{1-(1-p_{n+1})r} \bar{\pi}_{n+1}^e \right].$$

ou encore

$$\bar{\pi}_n^e = \left( 1 - \frac{p_{n+1}r}{1-(1-p_{n+1})r} \right) \frac{\pi_n}{1-r} + \frac{p_{n+1}r}{1-(1-p_{n+1})r} \bar{\pi}_{n+1}^e.$$

ou, finalement, la formule (10) :

$$\bar{\pi}_n^e = \frac{1}{1-(1-p_{n+1})r} (\pi_n + p_{n+1}r \bar{\pi}_{n+1}^e).$$

## Bibliographie

- BÉAL S. ET GABUTHY Y. *Théorie des jeux coopératifs et non coopératifs*, De Boeck, 2018.
- BERNHARD P. ET DESCHAMPS M., Dynamic equilibrium in games with randomly arriving players, *Dynamic Games and Applications*, to appear 2020.
- BERNHARD P. ET DESCHAMPS M., On dynamic games with randomly arriving players, *Dynamic Games and Applications*, 2017, 7 (3), 360–385.
- BIMPIKIS K., EHSANI S. ET ILKILIÇ R. Cournot competition in networked markets, *Management Science*, 2019, 65 (6), 2467–2481.
- COURNOT, A. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, tome VIII de ses œuvres complètes, G. Jorland (ed), Vrin et CNRS, 1980.
- D'ASPROMONT C., DOS SANTOS FERREIRA R. ET GÉRARD-VARET L-A. Pricing schemes and Cournotian equilibria, *American Economic Review*, 1991, 81(3), 666–673.
- DEQUIEDT V., DURIEU, J. ET SOLAL PH. *Théorie des jeux et applications*, Economica, 2011.
- DE SINOPOLI F., KÜNSTLER CH., MERONI C. ET PIMIENTA C. Poisson-Cournot games, *Discussion Paper School of Economics*, University of New South Wales, n° 2020-07 2020,.
- FRIEDMAN J. A non-cooperative equilibrium for supergames, *Review of Economic Studies*, 1971, 38, 1–12.
- HEAD K. ET SPENCER B. Oligopoly in international trade : rise, fall and resurgence, *Canadian Journal of Economics*, 2017, 50 (5), 1414–1444.
- KAMIEN M. ET SCHWARTZ N. Cournot oligopoly with uncertain entry, *Review of Economic Studies*, 1975, 42 (1), 125–131.
- KREPS D. ET SCHEINKMAN J. Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes, *Bell Journal of Economics*, 1983, 14 (2), 326–337.
- MASCHLER M., SOLAN E. ET ZAMIR S. *Game theory*, Cambridge University Press, 2016.

- MERTENS, JEAN-FRANÇOIS AND SORIN, SYLVAIN AND ZAMIR, SHMUEL, *Repeated Games*, Econometric Society monographs 55, Cambridge University Press, 2015.
- MYERSON R. Population uncertainty and Poisson games, *International Journal of Game Theory*, 1998, 27 (3), 375–392.
- PATTERSON, S. *Introduction to the Riemann Zeta-Function*, Cambridge Studies in advanced mathematics 14, Cambridge University Press, 1988.
- PIL CHOI J. ET NAHM J. Merger simulation in an open economy, *Hitotsubashi Journal of Economics*, 2016 57 (1), 53–66.
- SIGOT, N. La réception de l'œuvre économique de Cournot, in TH. MARTIN, *Actualité de Cournot*, Vrin, 2005, 125–149.
- THÉPOT J. Cournot et Bertrand peuvent coexister, *Revue Économique*, 1991, 42 (6), 997–1012.