



Universidad de Sevilla
Escuela Politécnica Superior de Sevilla



Trabajo Fin de Grado en Ingeniería Mecánica. Curso
2020/2021.

Estudio del efecto de la fricción en el movimiento de proyectiles y osciladores.

Realizado por: Manuel Jesús García Luna

Supervisado por: Dr. Bernardo Sánchez-Rey
Dra. Niurka R. Quintero

Mayo 2021

Índice general

1. Introducción.	3
2. Estudio de la fuerza de rozamiento viscoso en el MAS.	7
3. La fuerza de rozamiento entre superficies.	17
4. Estudio del tiro parabólico con rozamiento.	27
5. Aplicación práctica del tiro parabólico con rozamiento.	31
6. Conclusiones.	35
7. Apéndice. Programas.	37
Bibliografía	40

Capítulo 1

Introducción.

El rozamiento es un fenómeno que si bien en la vida diaria pasa desapercibido, en la ingeniería es crucial. Desde elevar una carga usando poleas hasta el vuelo de un avión, el rozamiento está presente como forma de disipación de energía condicionando y limitando cual es la solución óptima. Por tanto, su estudio no es trivial y se remonta varios siglos atrás.

Es ya en el siglo XV, con Leonardo da Vinci, con quien vemos el primer escrito acerca de este fenómeno. Da Vinci ya dedujo las leyes que determinan el movimiento de un bloque rectangular que desliza sobre una superficie horizontal, sin embargo este estudio pasó desapercibido.

No es hasta dos siglos después, en 1699, cuando Guillaume Amontons enuncia sus conclusiones al respecto, a saber, que la fuerza de rozamiento se opone al movimiento, que la fuerza de rozamiento es proporcional a la fuerza normal que ejerce el plano sobre el cuerpo y que el rozamiento no depende del área de contacto. Amontons realizó varios experimentos en los que medía la fuerza necesaria para acercar dos cuerpos para distintos niveles de carga, forma y planos sobre los que se apoyaban. Algunos materiales sobre los que realizó su estudio fueron el cobre, la madera y el hierro, para los que probó distintas combinaciones de carga y a los que untaba con grasa de cerdo fundida, que por aquel entonces era el lubricante que se usaba para reducir la fricción y el desgaste. Amontons descubrió que la resistencia debida a la fricción cuando las superficies están lubricadas con grasa de cerdo fundida es la misma para distintos materiales, llegando a reducirse como máximo hasta un tercio de la fuerza normal. Definió así la fuerza de rozamiento como la fuerza necesaria que hay que aplicar sobre un cuerpo para que este supere las rugosidades superficiales. Para superficies rígidas estipuló que la fuerza de rozamiento era proporcional al peso del objeto. Para el caso de las superficies no rígidas concluyó que el rozamiento que experimenta

un cuerpo es proporcional al desplazamiento del mismo, similar al coeficiente de elasticidad de los muelles.

Más tarde, en el siglo XVIII, Charles Augustin Coulomb llevó a cabo varios experimentos a petición de la *Académie Royale des Sciences* con la premisa de encontrar leyes y datos sobre la fricción en un entorno más práctico. Los materiales que estudió fueron los empleados en las máquinas de la época como la madera de roble, pino y olmo, los metales, concretamente el hierro y el cobre, así como los contactos de materiales heterogéneos como el de madera-metal. Coulomb realizó más de cien experimentos, llegando a hacer más de mil mediciones, entre las cuales a veces podría haber dilatados tiempos de espera de semanas solo para obtener resultados válidos.

Dependiendo de los experimentos, algunos respaldaban las leyes de Amontons y en otros descubrió que por ejemplo, el coeficiente de rozamiento es independiente de la velocidad de deslizamiento para una amplia variedad de condiciones de deslizamiento. Estos ensayos le sirvieron para constatar que las leyes propuestas por Amontons eran insuficientes. Es por ello que propuso nuevas interpretaciones físicas como la dependencia de la fricción de la cohesión superficial, la deformación superficial o el entrelazamiento de las fibras de madera para explicar varios resultados. A pesar de todo esto, Coulomb no llegó a introducir ningún coeficiente de fricción teórico ni redactó ninguna ley universal en lo referente a la fricción. La teoría que él desarrolló se basaba en resultados empíricos, permitiendo así su discusión sobre el uso de la relación entre la fuerza normal y la de rozamiento propuestos anteriormente.

El primer enfoque matemático relativo a la fricción fue llevado a cabo por Bernard Forrest de Bélidor en 1737 y más tarde por Leonhard Euler en 1750. Bélidor propone modelar las asperezas superficiales como esferas unidas a las dos superficies en contacto. A través de este planteamiento concluyó que la relación entre la fuerza de rozamiento y la normal es independiente del número de asperezas superficiales. Este modelo, gracias a su gran simplicidad, ha sido ampliamente usado en el campo de la tribología hasta hace poco.

Euler, basándose en la resistencia geométrica teórica de las interacciones de las asperezas piramidales entre dos superficies, desarrolla un enfoque más analítico y acuña los términos de fricción estática y fricción dinámica. De esta forma Euler fue el primero en establecer los términos de coeficiente de rozamiento y ángulo de rozamiento que usamos hoy en día. Para más información consúltese [4].

Tras este breve resumen de los fundamentos del rozamiento desde que se

concebieron hasta varios siglos después, es el objetivo de este trabajo fin de estudios ahondar en algunos aspectos más concretos. De esta forma en el capítulo 2 se estudiará un tipo diferente de rozamiento al presentado a lo largo de esta introducción, el viscoso, aplicado al movimiento de un oscilador armónico simple. En el capítulo 3 se retomará el estudio del oscilador armónico pero ahora sometido a la influencia del rozamiento superficial. Posteriormente, en el capítulo 4, se verá el efecto del rozamiento viscoso pero ahora aplicado a un proyectil. Finalmente en el capítulo 5 se ilustrará una aplicación práctica de lo aprendido en el capítulo anterior como es la influencia del rozamiento en la propagación de los virus. También se ha incluido un apéndice en el que se recogen todos los programas utilizados en las simulaciones numéricas a lo largo de esta memoria.

Capítulo 2

Estudio de la fuerza de rozamiento viscoso en el MAS.

En el movimiento Armónico Simple (MAS) amortiguado contamos con una partícula de masa m que puede desplazarse a lo largo de un eje, sobre la que actúan una fuerza elástica y otra de rozamiento, además de la fuerza normal y la fuerza de gravedad. La fuerza de rozamiento considerada es la debida al contacto entre la partícula y el fluido circundante y la fuerza de rozamiento entre las superficies de contacto se desprecia. Definimos la constante elástica como $k = m\omega_0^2$, siendo ω_0 la frecuencia natural del oscilador, y el coeficiente de amortiguación como $2m\gamma$, siendo γ el grado de amortiguación. Mediante la aplicación de la segunda ley de Newton obtenemos la siguiente expresión:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -2m\gamma \frac{dx}{dt} - m\omega_0^2 x(t). \quad (2.1)$$

Si la dividimos entre m y reordenamos sus términos obtenemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0. \quad (2.2)$$

La expresión (2.2) es la ecuación diferencial ordinaria (EDO) del MAS amortiguado. Así, al ser una EDO lineal de segundo orden, la solución general contiene dos constantes que suelen expresarse en función de un desplazamiento y velocidad iniciales x_0 y v_0 (condiciones iniciales).

Para obtener la solución $x(t)$ de la ecuación (2.2) usaremos una variable compleja $z(t)$ tal que $x(t)$ es su parte real, $x(t) = \text{Re}[z(t)]$. A su vez $z(t)$ también

8CAPÍTULO 2. ESTUDIO DE LA FUERZA DE ROZAMIENTO VISCOSO EN EL MAS.

satisface la ecuación (2.2), es decir

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z(t) = 0, \quad (2.3)$$

donde $z(t) \in \mathbb{C}$. Suponemos una solución de la forma $z(t) = e^{-i\omega t}$, donde ω es una constante a determinar. Si la derivamos y la sustituimos en la expresión (2.3) obtenemos:

$$(-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2)e^{-i\omega t} = 0. \quad (2.4)$$

De la expresión (2.4) podemos obtener dos valores de la constante ω , siendo estos:

$$\omega_{\pm} = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (2.5)$$

De esta forma llegamos a una solución con frecuencias complejas:

$$z(t) = e^{-i\omega_{\pm} t}, \quad (2.6)$$

Observamos que para cada valor de ω_0 y de γ existen dos frecuencias posibles ω_+ y ω_- . Para cualquiera de ellas, la expresión (2.6) nos garantiza una solución específica.

Separando la parte real y la imaginaria en la frecuencia $\omega = \omega_R + i\omega_I$, la solución $z(t)$ se reescribe como:

$$z(t) = e^{-i\omega t} = e^{\omega_I t} e^{-i\omega_R t}, \quad (2.7)$$

o sea que podemos separar la parte real y la imaginaria en la función compleja $z(t)$, que se expresa como:

$$z(t) = R(t)e^{i\theta(t)}, \quad (2.8)$$

donde tanto el módulo $R(t) = e^{\omega_I t}$ como el argumento $\theta(t) = -\omega_R t$ son funciones del tiempo. Concluimos así que la parte real de la frecuencia, ω_R , determina la frecuencia angular y la parte imaginaria, ω_I , determina si la amplitud crece (amplificación) o disminuye (amortiguación) con el tiempo.

A continuación realizamos un análisis más detallado y estudiamos como varían gráficamente ω_{\pm} en función de γ y ω_0 .

En la figura 2.1, representamos la parte imaginaria de $\omega \equiv \omega_{\pm}$ [ver (2.5)] en función de su parte real. Al variar γ y mantener ω_0 constante, distinguimos dos regímenes:

- 1a. Si $\gamma < \omega_0$: $Im[\omega] = -\gamma$ y $Re[\omega] = \pm\omega_0\sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}$. Estas funciones están representadas por las curvas negra (signo +) y azul (signo -) de la figura 2.1.

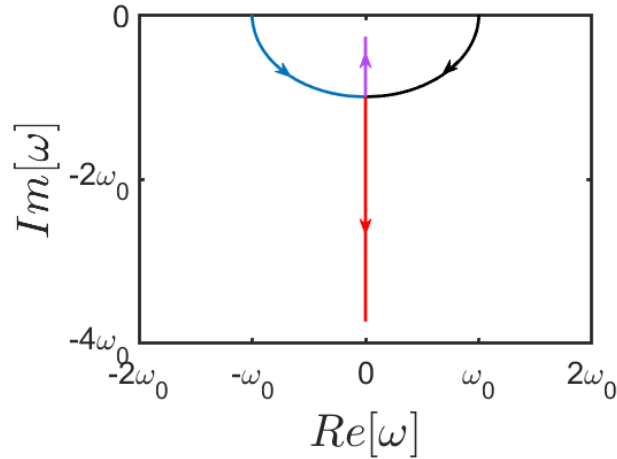


Figura 2.1: Representación de $Im[\omega]$ versus $Re[\omega]$, $\omega \equiv \omega_{\pm}$, para γ variable y ω_0 fija.

- 1b. Si $\gamma \geq \omega_0$: , $Im[\omega] = -\gamma \pm \omega_0 \sqrt{(\gamma/\omega_0)^2 - 1}$ y $Re[\omega] = 0$. Este es el caso de las dos líneas verticales de color violeta (signo +) y roja (signo -).

En la figura 2.2, representamos $Im[\omega]$ en función de $Re[\omega]$, sin embargo ahora se fija el valor de γ y se varía el de ω_0 . Se observan también dos regímenes:

- 2a. Cuando $\omega_0 \leq \gamma$, entonces $Im[\omega] = -\gamma \pm \gamma \sqrt{1 - (\omega_0/\gamma)^2}$ y $Re[\omega] = 0$. Las partes positiva y negativa están representadas por las dos líneas verticales violeta y verde, respectivamente.
- 2b. Cuando $\omega_0 > \gamma$, entonces $Im[\omega] = -\gamma$ y $Re[\omega] = \pm \gamma \sqrt{(\omega_0/\gamma)^2 - 1}$. Estas funciones están representadas por las dos líneas horizontales de la figura 2.2, donde con los colores negro y naranja se distinguen la rama positiva y negativa, respectivamente, de estas funciones.

Cada una de estas curvas de las figuras 2.1 y 2.2 están relacionadas con movimientos específicos de la partícula. Así, teniendo en cuenta lo anteriormente descrito podemos concluir que existen tres comportamientos claramente diferenciados:

- Para $\gamma = 0$, es decir, amortiguamiento nulo, las frecuencias son reales. Lo que corresponde con un movimiento armónico simple, cuyas oscilaciones tienen una frecuencia igual a la frecuencia natural del oscilador. Este caso se corresponde con los puntos $(\pm\omega_0, 0)$ en la figura 2.1.
- Si se fija ω_0 y se incrementa γ en el intervalo $\gamma \in [0, \omega_0)$, tanto ω_+ como ω_- se desplazan hacia abajo en el plano complejo de la figura 2.1 siguiendo

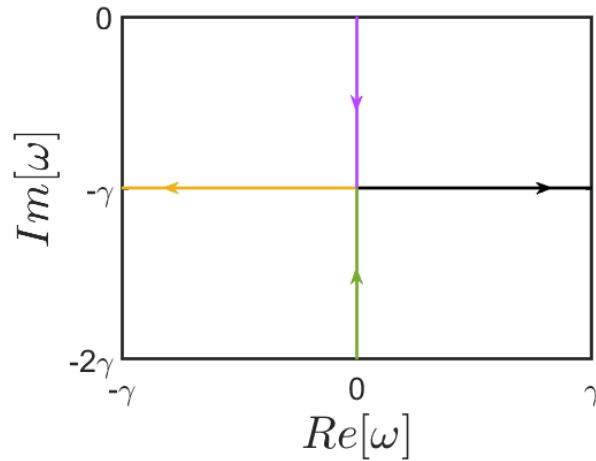


Figura 2.2: Representación de $Im[\omega]$ versus $Re[\omega]$, $\omega \equiv \omega_{\pm}$, para γ fija y ω_0 variable.

la forma de un arco de circunferencia. Como la parte imaginaria de ω_{\pm} es negativa, y la parte real diferente de cero, el movimiento oscilatorio será amortiguado. Es el caso sub-amortiguado. Este comportamiento también se obtiene al fijar γ , y variar $\omega_0 > \gamma$ y es el que se observa en la línea horizontal de la figura 2.2.

- Para $\gamma \geq \omega_0$ las frecuencias son puramente imaginarias y corresponden a movimientos que decaen sin oscilar (caso sobre-amortiguado). Estos casos están representados en las líneas verticales de las figuras 2.1 y 2.2.

Veamos cómo es la solución de nuestro modelo en cada uno de los regímenes anteriores. Podemos escribir una solución genérica como la superposición lineal de la solución obtenida anteriormente (2.6), o sea:

$$z(t) = \psi_+ e^{-i\omega_+ t} + \psi_- e^{-i\omega_- t}, \quad (2.9)$$

donde ψ_+ y ψ_- son parámetros complejos independientes a determinar. Para la obtención de la solución del movimiento armónico simple amortiguado seleccionamos solo la parte real de la función (2.9). En la expresión (2.5) en función del término interior de la raíz se dan tres posibilidades, las cuales se describen a continuación:

- Caso sub-amortiguado ($\gamma < \omega_0$). Si definimos

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (2.10)$$

la solución $x(t) = \text{Re}[z(t)]$ se simplifica y se escribe de la siguiente manera:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \text{Re}[\psi_+ e^{-i\Omega t} + \psi_- e^{i\Omega t}] = e^{-\gamma t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)], \quad (2.11)$$

donde $A = \text{Re}[\psi_+ + \psi_-]$ y $B = \text{Im}[\psi_+ - \psi_-]$. Tanto A como B son parámetros independientes reales, que dependen de las condiciones iniciales, por lo que esta es una solución del problema general del movimiento armónico simple sub-amortiguado. La ecuación (2.11) se suele escribir como:

$$x(t) = C e^{-\gamma t} \cos(\Omega t + \phi), \quad (2.12)$$

siendo $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $\phi = -\arctan\left(\frac{B}{A}\right)$. Un ejemplo gráfico de este tipo de movimiento es el representado en la figura 2.3, donde la amplitud de las oscilaciones decrece con el tiempo a razón de la envolvente $\pm C e^{-\gamma t}$. La frecuencia de oscilación es Ω , que es ligeramente menor que la natural, ω_0 .

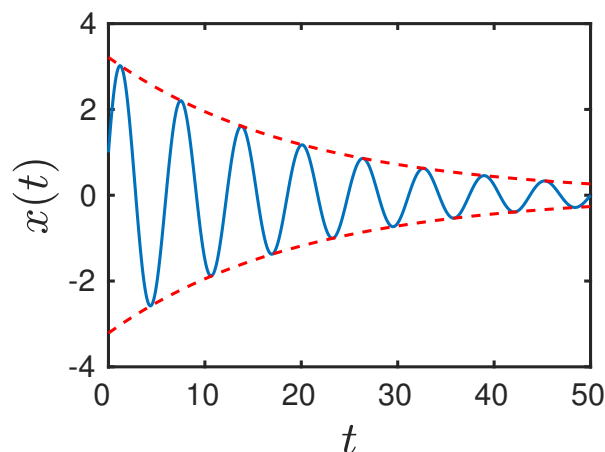


Figura 2.3: Caso sub-amortiguado. Evolución de la posición de una partícula [(2.12)]. Oscilaciones en régimen sub-amortiguado para $\gamma = 0,05\text{s}^{-1}$, $\omega_0 = 1\text{s}^{-1}$, y con las siguientes condiciones iniciales: $x_0 = 1\text{m}$ y $v_0 = 3\text{m/s}$.

- Caso sobre-amortiguado ($\gamma > \omega_0$). La raíz en la expresión (2.5) es imaginaria, por lo que definimos el siguiente parámetro:

$$\Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \rightarrow \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = i\Gamma, \quad (2.13)$$

donde ahora $0 < \Gamma < \gamma$ es real. En este caso, la solución queda de la

siguiente forma:

$$x(t) = \text{Re}[\psi_+ e^{(-\gamma+\Gamma)t} + \psi_- e^{(-\gamma-\Gamma)t}] = C_+ e^{-(\gamma-\Gamma)t} + C_- e^{-(\gamma+\Gamma)t}, \quad (2.14)$$

donde $C_{\pm} = \text{Re}[\psi_{\pm}]$. La solución es igual a la superposición de dos términos que decrecen exponencialmente con el tiempo de ratios $(\gamma - \Gamma)$ y $(\gamma + \Gamma)$ respectivamente. El ratio de decaimiento mayor, $(\gamma + \Gamma)$, está asociado con decaimientos rápidos, por lo que para tiempos $t \gg 1/(\gamma + \Gamma)$ dicho término se vuelve irrelevante, y se realiza la siguiente aproximación:

$$x(t) \approx C_+ e^{-(\gamma-\Gamma)t}. \quad (2.15)$$

De esta manera y de forma genérica la representación gráfica del caso sobre-amortiguado es la de la figura 2.4, donde el ratio de decaimiento marcado en rojo corresponde a la expresión (2.15). Observando la curva, puede llamarnos la atención el crecimiento que experimenta la misma al principio, pues la expresión (2.14) se compone de dos términos exponenciales negativos. Esto será tratado más adelante junto con la solución del problema al tener en cuenta los valores iniciales.

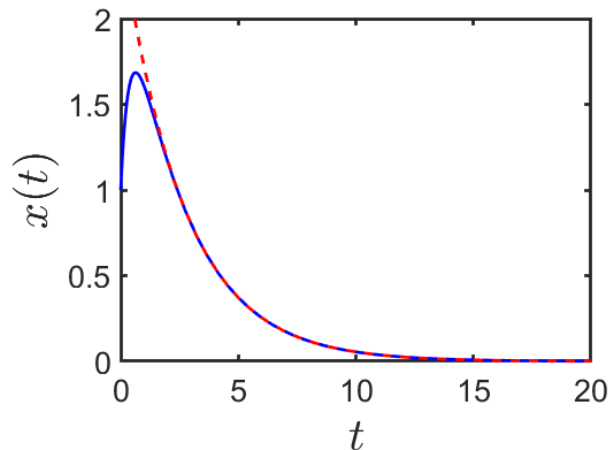


Figura 2.4: Caso sobre-amortiguado. Evolución de la posición de una partícula [(2.14)]. La posición de la partícula decae a cero para tiempos aproximadamente mayores que la unidad. Los parámetros utilizados son $\gamma = 1,50\text{s}^{-1}$, y $\omega_0 = 1\text{s}^{-1}$, y las condiciones iniciales son $x_0 = 1\text{ m}$ y $v_0 = 3\text{ m/s}$.

En la figura 2.5 se puede apreciar que a mayor amortiguación (γ), el decaimiento en el tiempo de $x(t)$ es más lento. Esto, que puede resultar un poco anti-intuitivo a primera vista, es lógico pues se debe a que a mayor coefi-

ciente de amortiguación, mayor es la fuerza de rozamiento que le impide al cuerpo volver a la posición de equilibrio ($x = 0$), prolongando así el tiempo que tarda en alcanzarla.

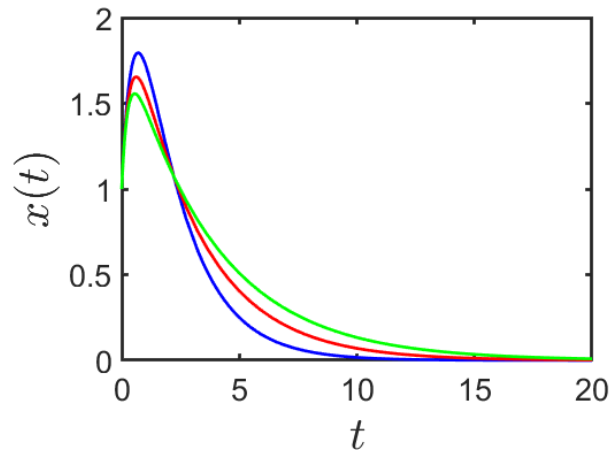


Figura 2.5: Evolución de la partícula en el caso sobre-amortiguado. Comparación de la ecuación (2.14) para distintos valores de γ , $1,2s^{-1}$ (azul), $1,6s^{-1}$ (rojo) y $2s^{-1}$ (verde) con $\omega_0 = 1s^{-1}$, $x_0 = 1m$ y $v_0 = 3m/s$.

- Caso de amortiguamiento crítico ($\gamma = \omega_0$). Bajo esta condición ω es única y la expresión (2.9) puede simplificarse. Se obtiene:

$$z(t) = (\psi_+ + \psi_-)e^{-\gamma t}, \quad (2.16)$$

donde solo hay un parámetro complejo independiente por lo que no es una solución general. Podemos escribir la solución general de la siguiente forma, indicando su primera y segunda derivada:

$$z(t) = F(t)e^{-\gamma t}, \quad (2.17)$$

$$\frac{dz}{dt} = [F(t)' - \gamma F(t)]e^{-\gamma t}, \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = [F(t)'' - 2\gamma F(t)' + \gamma^2 F(t)]e^{-\gamma t}, \quad (2.19)$$

donde $F(t)$ es una función dependiente del tiempo desconocida. Sustituimos estos resultados en la expresión (2.2), obteniendo:

$$F(t)'' + F(t)(\omega_0^2 - \gamma^2) = 0. \quad (2.20)$$

Teniendo en cuenta que $\gamma = \omega_0$, calculamos finalmente $F(t)$, que es un

polinomio de grado uno:

$$F(t) = At + B, \quad (2.21)$$

siendo A y B dos parámetros a determinar. Ahora sí podemos escribir una solución general de la siguiente forma:

$$z(t) = (At + B)e^{-\gamma t}. \quad (2.22)$$

Esta expresión si contiene dos parámetros independientes y por tanto sí es solución general. Observamos que el ratio de decaimiento es γ , que es el mismo que el del caso sub-amortiguado, pero mayor que el del decaimiento a tiempos largos del caso sobre-amortiguado $\gamma - \Gamma$. Así podemos concluir que la solución del caso de amortiguamiento crítico es la solución no oscilatoria que decae con mayor rapidez a cero. Esta característica se aprecia en la figura 2.6, donde para un mismo valor de ω_0 y distintos de γ las curvas de los casos sub-amortiguado y sobre-amortiguado tienden a la del caso crítico.

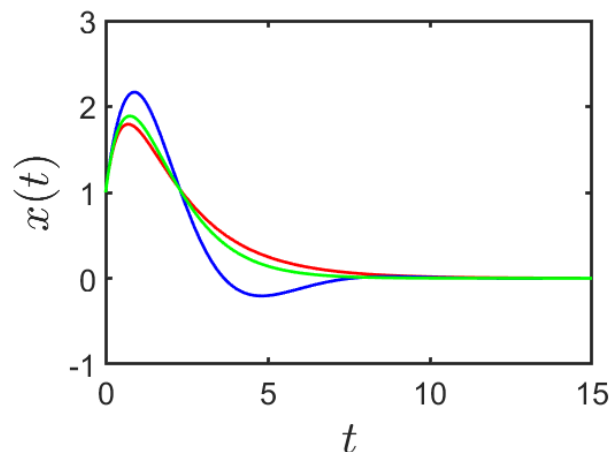


Figura 2.6: Comparación de los distintos regímenes en el MAS amortiguado: sub-amortiguado (azul, $\gamma = 0,6s^{-1}$ y $\omega_0 = 1$), sobre-amortiguado (rojo, $\gamma = 1,2s^{-1}$ y $\omega_0 = 1$) y crítico (verde, $\gamma = 1s^{-1}$ y $\omega_0 = 1$). Para las condiciones iniciales $x_0 = 1m$, $v_0 = 0,5m/s$.

Una vez analizados los distintos casos lo único que nos falta para definir la solución es determinar los parámetros independientes. Normalmente, en el campo de la mecánica, estos parámetros son calculados a través de las condiciones iniciales. De esta manera teniendo en cuenta la posición y la velocidad iniciales, $x(0)$, y $v(0)$, respectivamente, en la solución (2.9) podemos plantear la siguiente

ecuación matricial:

$$(\mathbf{A})(\Psi) = (\mathbf{B}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\omega_+ & -i\omega_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Siempre que no nos encontremos en el caso de amortiguamiento crítico, o sea $\omega_0 \neq \gamma$, la matriz (\mathbf{A}) tiene inversa, lo que permite encontrar los parámetros ψ_+ y ψ_- . Su expresión matricial es igual a:

$$\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \frac{1}{i(\omega_+ - \omega_-)} \begin{pmatrix} -i\omega_- x_0 - v_0 \\ i\omega_+ x_0 + v_0 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Finalmente, si $0 \leq \gamma < \omega_0$, la solución $x(t) = \text{Re}[z(t)]$ de la ecuación (2.2) puede ser expresada como:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[x_0 \cos(\Omega t) + \frac{\gamma x_0 + v_0}{\Omega} \sin(\Omega t) \right], \quad (2.25)$$

donde $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Si $\gamma = 0$ estamos en el caso no amortiguado y las oscilaciones tienen una amplitud constante y una frecuencia $\Omega = \omega_0$. Mientras que si $0 < \gamma < \omega_0$ las oscilaciones de frecuencia Ω se atenúan debido al amortiguamiento.

Para el caso sobre-amortiguado, o sea $\gamma > \omega_0$ simplemente se realiza el cambio $\Omega \rightarrow i\Gamma = i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, se emplea las relaciones entre las funciones trigonométricas y las hiperbólicas en la expresión (2.25), y se obtiene la solución:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[x_0 \cosh(\Gamma t) + \frac{\gamma x_0 + v_0}{\Gamma} \sinh(\Gamma t) \right]. \quad (2.26)$$

Si se simplifica esta expresión, obtenemos:

$$x(t) = \left(\frac{x_0}{2} + \frac{\gamma x_0 + v_0}{2\Gamma} \right) e^{-(\gamma-\Gamma)t} + \left(\frac{x_0}{2} - \frac{\gamma x_0 + v_0}{2\Gamma} \right) e^{-(\gamma+\Gamma)t}. \quad (2.27)$$

Es con esta expresión con la que, ahora sí, podemos explicar porqué en la gráfica del MAS sobre-amortiguado se puede dar un crecimiento inicial en la posición (ver figura 2.4). Esto se debe a que, debido a las condiciones iniciales utilizadas en la figura 2.4, el primer término en la expresión (2.27) es una exponencial decreciente positiva, sin embargo el segundo es una exponencial creciente negativa, de modo que la superposición de ambas funciones produce el crecimiento inicial de la posición hasta su valor máximo. Evidentemente lo acusado que pueda llegar a ser el crecimiento es determinado por la velocidad inicial, siendo

inexistente para cuando esta es cero y prácticamente vertical para valores elevados. De cualquier forma, siempre que se tomen valores reales de x_0 y v_0 , la solución exacta existe para todo t . Para más detalle, consúltese [5].

Capítulo 3

La fuerza de rozamiento entre superficies.

En el capítulo anterior se ha estudiado la influencia del rozamiento existente entre un cuerpo y el medio, sin embargo no se ha considerado el que se produce debido al contacto entre superficies, que es de gran importancia en la industria de la mecánica. Concretamente nos ceñiremos al caso del movimiento armónico simple, del que ya se habló en la introducción de este documento.

Así, consideramos un bloque de masa m , que descansa sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con el plano horizontal, y que está conectado a un muelle de constante elástica k como se muestra en la figura 3.1:

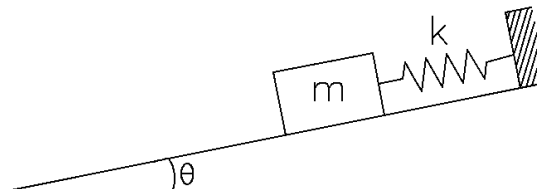


Figura 3.1: Oscilador armónico sobre una superficie rugosa inclinada.

Tomando como positivo el sentido ascendente del plano inclinado aplicamos la segunda ley de Newton.

Teniendo en cuenta el sentido del desplazamiento del bloque obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - mg \sin(\theta) - \mu mg \cos(\theta), \quad (3.1)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - mg \sin(\theta) + \mu mg \cos(\theta), \quad (3.2)$$

donde x es la distancia que hay entre el bloque y la longitud natural del muelle. En este sistema la expresión (3.1) se corresponde al movimiento ascendente, la (3.2) al descendente y μ es el coeficiente de rozamiento de la superficie. Con el fin de simplificar las expresiones anteriores definimos un nuevo parámetro α_{\pm} o aceleración constante efectiva:

$$\alpha_{\pm} = \mu g \cos(\theta) \pm g \sin(\theta). \quad (3.3)$$

De esta forma podemos reescribir las ecuaciones (3.1) y (3.2), obteniendo:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + m\alpha_+ = 0, \quad (3.4)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx - m\alpha_- = 0. \quad (3.5)$$

Resolvemos estas ecuaciones realizando el cambio de variable $X(t) = x(t) + \frac{m\alpha_{\pm}}{k}$ y teniendo en cuenta que la solución para el MAS sin rozamiento es de la forma $A \cos(\omega_0 t + \delta)$:

$$x(t) = B \cos(\omega_0 t + \delta_1) - \frac{\alpha_+}{\omega_0^2}, \quad (3.6)$$

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t + \delta_2) + \frac{\alpha_-}{\omega_0^2}, \quad (3.7)$$

donde B , C , δ_1 y δ_2 son constantes a determinar mediante la posición y la velocidad al inicio de cada semi-ciclo. Uno de los resultados derivados de las expresiones (3.6) y (3.7) es que la frecuencia ω_0 no depende del coeficiente de rozamiento, siendo su valor $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Esto choca con lo que vimos en el capítulo 2, donde al modelar la influencia de la resistencia viscosa comprobamos que el rozamiento si afecta a la frecuencia de oscilación. Por ejemplo para el caso sub-amortiguado esta toma el valor $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Esto se debe a que consideramos que la fuerza de rozamiento, en este caso, no es proporcional a la velocidad sino a la fuerza normal.

Continuando con nuestro análisis, ahora determinaremos los puntos en los que el cuerpo se detiene. Esto se produce cada vez que el bloque alcanza la distancia máxima en ambos sentidos. Así la primera parada se produce al final de la primera semioscilación en $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$. Para nuestro caso suponemos que el muelle se encontraba comprimido una determinada distancia inicial $x(0) = X_0$ respecto a la longitud natural del muelle por lo que el movimiento comenzará en sentido descendente. Además consideramos que parte del reposo por lo que la velocidad inicial es cero, $v(0) = 0$. De esta forma la dinámica está definida por la ecuación de descenso (3.7). Derivándola obtenemos la expresión para la

velocidad con la que desciende el cuerpo:

$$v_1(t) = -C\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta_2), \quad (3.8)$$

donde el subíndice 1 indica que se trata del primer semi-ciclo. Teniendo en cuenta la condición inicial de velocidad, $v(0) = 0$, determinamos el valor de δ_2 :

$$\delta_2 = 0. \quad (3.9)$$

Considerando ahora que $x(t) = 0$ en la ecuación (3.7) calculamos el valor de C :

$$C = X_0 - \frac{\alpha_-}{\omega_0^2}. \quad (3.10)$$

Con estos datos podemos derivar la expresión (3.8) para obtener la ecuación de la aceleración y así definir completamente la dinámica del cuerpo en el primer semi-ciclo como:

$$x_1(t) = \left(X_0 - \frac{\alpha_-}{\omega_0^2} \right) \cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha_-}{\omega_0^2}, \quad (3.11)$$

$$v_1(t) = - \left(X_0 - \frac{\alpha_-}{\omega_0^2} \right) \omega_0 \sin(\omega_0 t), \quad (3.12)$$

$$a_1(t) = - \left(X_0 - \frac{\alpha_-}{\omega_0^2} \right) \omega_0^2 \cos(\omega_0 t), \quad (3.13)$$

para el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t_1$, donde t_1 es el instante en el que la velocidad se vuelve cero indicando el cambio de sentido en el movimiento. A partir de ese instante el cuerpo comienza a ascender y se inicia la segunda semiosciliación, $\frac{\pi}{\omega_0} \leq t \leq t_2$, por tanto usamos la expresión (3.6). De forma similar a como hicimos anteriormente, derivamos la ecuación (3.6) para obtener la expresión de la velocidad durante el ascenso:

$$v_2(t) = -B\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta_1). \quad (3.14)$$

Para el inicio del segundo ciclo la velocidad inicial es cero pues es cuando se produce el cambio de sentido en el movimiento. De esta forma despejamos el valor de δ_1 :

$$\delta_1 = 0. \quad (3.15)$$

Para determinar el parámetro B calculamos la distancia al comienzo del segundo

semi-ciclo que determinamos tomando $t = \frac{\pi}{\omega_0}$ en la expresión (3.7):

$$x_1\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -\left(X_0 - \frac{2\alpha_-}{\omega_0^2}\right). \quad (3.16)$$

Igualando este resultado con la expresión (3.6) obtenemos el valor de B :

$$B = \left(X_0 - \frac{2\alpha_-}{\omega_0^2} - \frac{\alpha_+}{\omega_0^2}\right). \quad (3.17)$$

Con estos resultados podemos definir, del mismo modo a como se hizo durante el descenso, la dinámica del cuerpo durante el ascenso de la segunda semioscilación:

$$x_2(t) = \left(X_0 - \frac{2\alpha_-}{\omega_0^2} - \frac{\alpha_+}{\omega_0^2}\right) \cos(\omega_0 t) - \frac{\alpha_+}{\omega_0^2}, \quad (3.18)$$

$$v_2(t) = -\left(X_0 - \frac{2\alpha_-}{\omega_0^2} - \frac{\alpha_+}{\omega_0^2}\right) \omega_0 \sin(\omega_0 t), \quad (3.19)$$

$$a_2(t) = -\left(X_0 - \frac{2\alpha_-}{\omega_0^2} - \frac{\alpha_+}{\omega_0^2}\right) \omega_0^2 \cos(\omega_0 t), \quad (3.20)$$

para el intervalo $\frac{\pi}{\omega_0} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Repetiendo este proceso varias veces para las siguientes semioscilaciones nos damos cuenta de que podemos expresar la dinámica para el n -ésimo medio ciclo como:

$$x_n(t) = \left[X_0 - \frac{\alpha_-}{\omega_0^2} - (n-1) \frac{\alpha_- + \alpha_+}{\omega_0^2}\right] \cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha_- [1 - (-1)^n] - \alpha_+ [1 + (-1)^n]}{2\omega_0^2}, \quad (3.21)$$

$$v_n(t) = -\left[X_0 - \frac{\alpha_-}{\omega_0^2} - (n-1) \frac{\alpha_- + \alpha_+}{\omega_0^2}\right] \omega_0 \sin(\omega_0 t), \quad (3.22)$$

$$a_n(t) = -\left[X_0 - \frac{\alpha_-}{\omega_0^2} - (n-1) \frac{\alpha_- + \alpha_+}{\omega_0^2}\right] \omega_0^2 \cos(\omega_0 t), \quad (3.23)$$

para un intervalo $\frac{\pi(n-1)}{\omega_0} < t < \frac{\pi n}{\omega_0}$, siendo $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. De forma similar, podemos establecer las expresiones para el n -ésimo medio ciclo de un sistema que parta del reposo con el muelle elongado una cierta distancia X_0 . Obtenemos así las siguientes expresiones:

$$x_n(t) = \left[-X_0 + \frac{\alpha_+}{\omega_0^2} + (n-1) \frac{\alpha_- + \alpha_+}{\omega_0^2}\right] \cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha_- [1 + (-1)^n] - \alpha_+ [1 - (-1)^n]}{2\omega_0^2}, \quad (3.24)$$

$$v_n(t) = - \left[-X_0 + \frac{\alpha_+}{\omega_0^2} + (n-1) \frac{\alpha_- + \alpha_+}{\omega_0^2} \right] \omega_0 \sin(\omega_0 t), \quad (3.25)$$

$$a_n(t) = - \left[-X_0 + \frac{\alpha_+}{\omega_0^2} + (n-1) \frac{\alpha_- + \alpha_+}{\omega_0^2} \right] \omega_0^2 \cos(\omega_0 t). \quad (3.26)$$

Observando las ecuaciones (3.6) y (3.7) nos damos cuenta que el bloque se detiene en las posiciones para las que el coseno vale ± 1 . Dichas posiciones se pueden calcular con la siguiente expresión:

$$X_n = \left(X_0 - \frac{2n\mu g \cos(\theta)}{\omega_0^2} + \frac{g \sin(\theta)}{\omega_0^2} [1 - (-1)^n] \right) (-1)^n, \quad (3.27)$$

$$X_n = \left(-X_0 + \frac{2n\mu g \cos(\theta)}{\omega_0^2} + \frac{g \sin(\theta)}{\omega_0^2} [1 - (-1)^n] \right) (-1)^n. \quad (3.28)$$

Hay que tener en cuenta que las expresiones planteadas hasta ahora dependen del número de iteraciones n , pues cuando este alcanza cierto valor la trayectoria en vez de continuar decreciendo comienza a crecer. Esto es algo que sabemos que no es físicamente posible sin que apliquemos nuevas fuerzas sobre el cuerpo. Ello se debe a que, como se dijo al inicio de este capítulo, la amplitud (en valor absoluto) disminuye a razón constante por lo que a partir de cierto ciclo cuando estamos muy próximos a la posición de equilibrio el papel de dicha disminución se invierte y comienza a aumentar la amplitud. Este comportamiento se corresponde con el que experimenta un objeto bajo los efectos de resonancia donde su amplitud crece indefinidamente.

Es por esto que necesitamos definir los factores que hacen que el cuerpo se detenga definitivamente. Para ello debemos hacer una distinción respecto al coeficiente de rozamiento, separándolo en estático y dinámico. De esta forma, el coeficiente con el que hemos estado tratando hasta ahora se corresponde con el coeficiente dinámico y será el estático el que nos permitirá calcular cuando el cuerpo vuelve al reposo.

Para ello debemos aplicar una condición tal que nos permita determinar si el cuerpo permanece en reposo o no. Dicha condición será la de fuerza de rozamiento máxima. Los puntos candidatos en los que debemos aplicarla son en aquellos en los que la velocidad es cero. De esta forma contamos con dos posibilidades, al final del movimiento de ascenso y al final del de descenso. Así, establecemos las siguientes condiciones:

$$\mu_e g \cos(\theta) \geq \omega_0^2 |x| + g \sin(\theta), \quad (3.29)$$

$$\mu_e g \cos(\theta) \geq \omega_0^2 |x| - g \sin(\theta), \quad (3.30)$$

donde la expresión (3.29) corresponde al inicio del descenso y la (3.30) al inicio del ascenso. Al comprobar que la inecuación correspondiente se cumple para el valor de x en el que se encuentre en reposo podemos saber si el cuerpo continúa en reposo o si por el contrario vuelve a oscilar.

De esta forma podemos representar las ecuaciones (3.21), (3.22) y (3.23) obteniendo las siguientes gráficas:

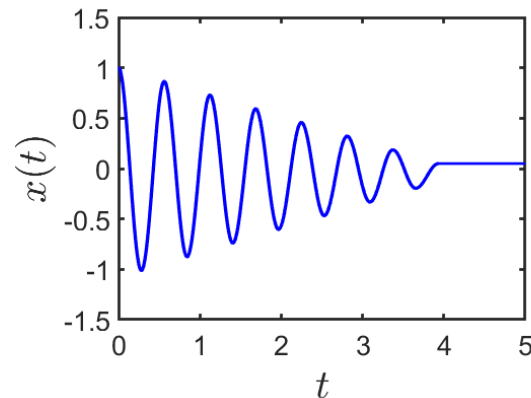


Figura 3.2: Trayectoria de un cuerpo de masa $m = 4\text{ kg}$ sobre una superficie inclinada $\theta = \frac{\pi}{6}\text{ rad}$, conectado a un resorte de constante elástica $k = 500\text{ N/m}$, que se encuentra comprimido $X_0 = 1\text{ m}$, con coeficiente de rozamiento dinámico $\mu = 0,5$ y coeficiente de rozamiento estático $\mu_e = 0,55$ para $n = 14$ iteraciones.

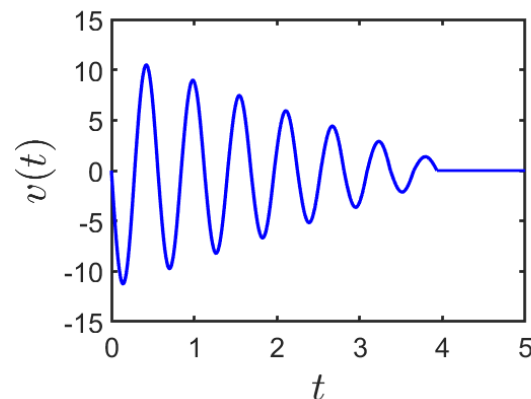


Figura 3.3: Velocidad de un cuerpo de masa $m = 4\text{ kg}$ sobre una superficie inclinada $\theta = \frac{\pi}{6}\text{ rad}$, conectado a un resorte de constante elástica $k = 500\text{ N/m}$, que se encuentra comprimido $X_0 = 1\text{ m}$, con coeficiente de rozamiento dinámico $\mu = 0,5$ y coeficiente de rozamiento estático $\mu_e = 0,55$ para $n = 14$ iteraciones.

Para la representación de estas gráficas se ha implementado un programa que puede consultarse en el capítulo 7. En la figura 3.2 observamos que el cuerpo se detiene finalmente a los 3,93s para una distancia $x = 0,049\text{ m}$ respecto a

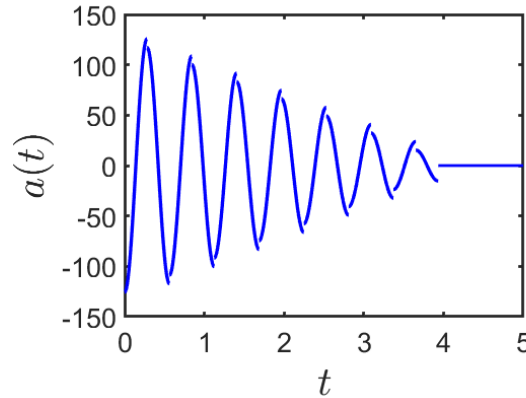


Figura 3.4: Aceleración de un cuerpo de masa $m = 4\text{ kg}$ sobre una superficie inclinada $\theta = \frac{\pi}{6}\text{ rad}$, conectado a un resorte de constante elástica $k = 500\text{ N/m}$, que se encuentra comprimido $X_0 = 1\text{ m}$, con coeficiente de rozamiento dinámico $\mu = 0,5$ y coeficiente de rozamiento estático $\mu_e = 0,55$ para $n = 14$ iteraciones.

la longitud natural del resorte, es decir el muelle está comprimido. Es interesante notar que en la gráfica 3.4 la aceleración experimenta unas discontinuidades de salto finito al final de cada semioscilación hasta que el cuerpo se detiene finalmente. Esto se debe a los cambios de sentido de la velocidad que provocan un gradiente de aceleración muy elevado.

El análisis realizado hasta ahora se puede abordar también desde el punto de vista de la energía. Para ello partimos del teorema de las fuerzas vivas, que establece la variación en la energía cinética como la suma del trabajo de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo:

$$\Delta E_c = W_{Fr} + W_e + W_{mg}, \quad (3.31)$$

siendo ΔE_c la variación de la energía cinética, W_{Fr} el trabajo de la fuerza de rozamiento, W_e el trabajo de la fuerza elástica y W_{mg} el trabajo de la fuerza gravitatoria. Sustituyendo el valor de cada término obtenemos:

$$\frac{1}{2}mv_n^2 = -\mu mg \cos(\theta)|x_n - x_{0n}| - mg \sin(\theta)x_n + mg \sin(\theta)x_{0n} - \frac{1}{2}kx_n^2 + \frac{1}{2}kx_{0n}^2, \quad (3.32)$$

donde el subíndice $0n$ indica el valor del término correspondiente al inicio de dicha semioscilación. El término $\frac{1}{2}mv_{0n}^2$ se ha obviado pues al inicio de cada semi-ciclo la velocidad es cero. Si consideramos que el cuerpo desciende y reor-

ganizando los términos, obtenemos:

$$\mu mg \cos(\theta)x_{0n} + mg \sin(\theta)x_{0n} + \frac{1}{2}kx_{0n}^2 = mg \sin(\theta)x_n + \frac{1}{2}kx_n^2 + \frac{1}{2}mv_n^2 + \mu mg \cos(\theta)x_n. \quad (3.33)$$

Observando la expresión (3.33) nos percatamos de que los términos a la izquierda son constantes, agrupamos así los términos gravitatorio y elástico para definir la constante E_{m0n} , que representa la energía mecánica del sistema al inicio de cada semioscilación. De esta forma, si consideramos $v_n = 0$ podemos determinar los puntos en los que el cuerpo se detiene durante los tramos de descenso resolviendo la siguiente ecuación cuadrática:

$$\frac{1}{2}kx_n^2 + mg[\sin(\theta) - \mu \cos(\theta)]x_n - E_{m0n} + \mu mg \cos(\theta)x_{0n} = 0. \quad (3.34)$$

De la misma forma que hemos desarrollado estas expresiones para el descenso, para el ascenso del cuerpo resulta:

$$\frac{1}{2}kx_n^2 + mg[\sin(\theta) + \mu \cos(\theta)]x_n - E_{m0n} - \mu mg \cos(\theta)x_{0n} = 0. \quad (3.35)$$

Las soluciones de estas ecuaciones coinciden con las de las ecuaciones (3.27) y (3.28). Notar que las dos raíces que obtenemos de resolver las expresiones (3.34) y (3.35) son las posiciones de reposo previa ($n - 1$) y la de dicho semiciclo (n).

Si establecemos la expresión de la energía mecánica para un instante determinado:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mg \sin(\theta), \quad (3.36)$$

podemos representar la evolución de la energía hasta que el cuerpo se detiene, como observamos en la figura 3.5. Notar que la energía no vale cero cuando el cuerpo se detiene finalmente sino que tiene un valor superior a cero aunque gráficamente no se aprecie. Esto es consecuencia de la energía gravitatoria y elástica ya que el muelle puede quedar deformado y por tanto el cuerpo acaba desplazado respecto al origen, haciendo que ambas energías sean distintas de cero.

Con estos resultados, no es difícil diseñar un experimento para determinar el coeficiente de rozamiento de una superficie. Para ello contamos con un bloque cuya posición inicial X_0 es conocida. Soltamos el bloque, dejando que comience su descenso por el plano y contabilizamos el tiempo que transcurre hasta que se detiene. También se puede contar el número de medios ciclos que, si bien en

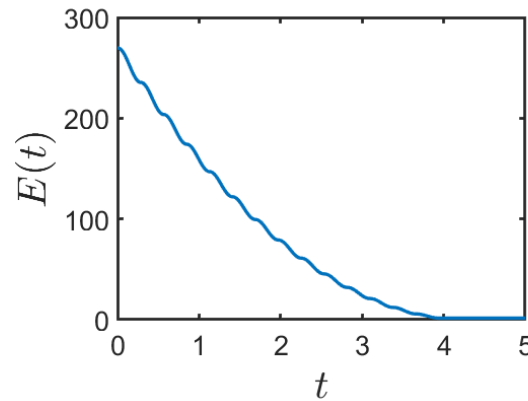


Figura 3.5: Energía de un cuerpo de masa $m = 4\text{ kg}$ sobre una superficie inclinada $\theta = \frac{\pi}{6}\text{ rad}$, conectado a un resorte de constante elástica $k = 500\text{ N/m}$, que se encuentra comprimido $X_0 = 1\text{ m}$, con coeficiente de rozamiento dinámico $\mu_d = 0,5$ y coeficiente de rozamiento estático $\mu_e = 0,55$ para $n = 15$ iteraciones.

conjunto con el tiempo total transcurrido resulta redundante, puede servir para verificar la expresión:

$$T = \frac{n\pi}{\omega_0}. \quad (3.37)$$

Para un número par de semi-oscilaciones podemos expresar la distancia final d , que va desde el punto inicial hasta el punto donde se detiene finalmente, como:

$$d = \frac{2n\mu g \cos(\theta)}{\omega_0^2} = \frac{2\mu g T \cos(\theta)}{\pi\omega_0}. \quad (3.38)$$

De forma similar, para un número impar de semi-oscilaciones tenemos:

$$d = 2X_0 - \frac{2g \sin(\theta)}{\omega_0^2} - \frac{2n\mu g \cos(\theta)}{\omega_0^2}. \quad (3.39)$$

Realizamos varias mediciones para distinto número de semi-oscilaciones o para diferentes valores de θ . Con estos datos podemos determinar el coeficiente de rozamiento mediante la pendiente de una gráfica d vs $\frac{2ng \cos(\theta)}{\omega_0^2}$. Para un valor impar de n representamos $2X_0 - \frac{2g \sin(\theta)}{\omega_0^2} - d$ vs $\frac{2ng \cos(\theta)}{\omega_0^2}$. La pendiente de dicha gráfica es el valor de μ .

La independencia del coeficiente de rozamiento de la fuerza normal se suele asumir en estudios introductorios. Esta suposición se puede validar mediante este ensayo, concretamente a través de la linealidad de la gráfica obtenida. Esto es, cuanto más lineal sea la tendencia, más correcta es la suposición de esta premisa. Para más información consúltese [1].

Capítulo 4

Estudio del tiro parabólico con rozamiento.

En el capítulo 2 vimos como afecta una fuerza de rozamiento viscosa a una partícula que describe un movimiento armónico simple. Con la intención de estudiar como la fuerza de rozamiento afecta a otros sistemas se plantea ahora el caso del tiro parabólico. El movimiento parabólico es algo que encontramos en nuestra vida cotidiana, también en los deportes y que se ha convertido en pieza importante de disciplinas científicas como la balística.

Partimos así considerando un cuerpo de masa m que es lanzado y sobre el que actúan su peso y una fuerza de rozamiento que modelizamos como:

$$\vec{D} = -b\vec{v}, \quad (4.1)$$

donde b es una constante que depende de las propiedades del objeto (tamaño, forma ...) y v es su velocidad. Las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir de la segunda ley de Newton. Dado que el movimiento descrito es bidimensional es necesario su aplicación en los dos ejes. En el eje x se cumple que:

$$D_x = ma_x, \quad (4.2)$$

por tanto,

$$-bv_x = m \frac{dv_x}{dt}. \quad (4.3)$$

Si integramos en el tiempo entre los límites $t = 0$ y t , y en la velocidad entre la velocidad inicial v_0 y v_x se obtiene la siguiente expresión simplificada:

$$v_x(t) = v_{0x} e^{-\frac{bt}{m}}. \quad (4.4)$$

Una vez obtenida la expresión de la velocidad, podemos integrar la ecuación (4.4) para obtener la coordenada $x(t)$ del vector posición:

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{b} v_{0x} (1 - e^{-\frac{bt}{m}}). \quad (4.5)$$

De forma análoga realizamos el mismo procedimiento en el eje y , donde finalmente se obtienen las siguientes expresiones:

$$-bv_y - mg = m \frac{dv_y}{dt}, \quad (4.6)$$

$$v_y(t) = \frac{1}{b} [e^{-\frac{bt}{m}} (bv_{0y} + mg) - mg], \quad (4.7)$$

$$y(t) = y_0 + \frac{m}{b} \left[\left(v_{0y} + \frac{mg}{b} \right) (1 - e^{-\frac{bt}{m}}) - gt \right]. \quad (4.8)$$

Observemos que para tiempos largos la velocidad en x tiende a cero y la velocidad en y se vuelve constante:

$$v_y(t) = -\frac{mg}{b}. \quad (4.9)$$

Esto se debe a que el valor de la componente en y de la fuerza de rozamiento aumenta hasta igualarse con el peso y dado que entonces no actúa ninguna fuerza neta la aceleración es nula, haciendo la velocidad constante a partir de ese momento.

El caso modelado, con la aproximación de la fuerza de rozamiento como $\vec{D} = -b\vec{v}$, es característico de las resistencias viscosas, como la que podría sufrir una partícula pequeña al desplazarse por un fluido espeso. Esta resistencia surge de las colisiones de las partículas del fluido con el cuerpo que lo atraviesa.

Si comparamos gráficamente el tiro parabólico con y sin rozamiento vemos que la diferencia es evidente. En la figura 4.1 se representa la trayectoria de una partícula que se mueve en el campo gravitatorio sin rozamiento y con rozamiento para determinados valores de los parámetros m y b y de las condiciones iniciales.

En la imagen 4.1 está marcado el punto para un mismo instante, $t = 1,2s$, en ambas trayectorias. La principal diferencia es su asimetría respecto al punto de máxima altura además de que a partir de dicho punto el descenso es mucho más brusco en la trayectoria con rozamiento. Para más detalle consúltese [2].

Una vez analizada la dependencia de la posición y la velocidad del tiempo, puede llamarnos la atención como sería su comportamiento si consideramos la masa como otra variable. Conforme la masa del cuerpo aumenta el efecto del rozamiento es cada vez menor, hasta el punto de que su comportamiento

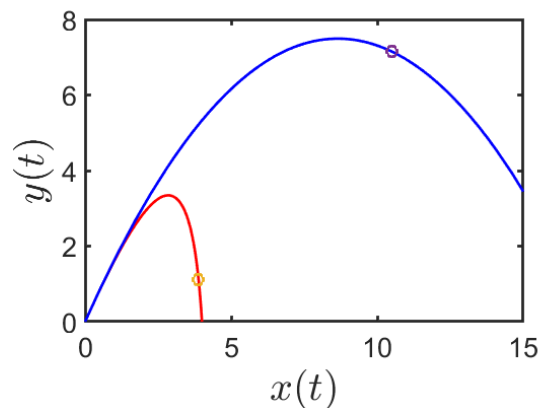


Figura 4.1: Comparación de la trayectoria de un tiro parabólico con rozamiento (rojo) y sin rozamiento (azul) para $x_0 = 0m$, $y_0 = 0m$, $v_{0x} = 7m/s$, $v_{0y} = 12,124m/s$, $m = 0,002kg$ y $b = 0,0033N \cdot s/m$.

se aproxima al obtenido en un caso sin rozamiento. En la figura 4.2 se puede observar esta tendencia, si bien no se ha continuado representado más curvas para mayores valores de m por sencillez. En torno a $m = 1kg$ las dos trayectorias se vuelven indistinguibles.

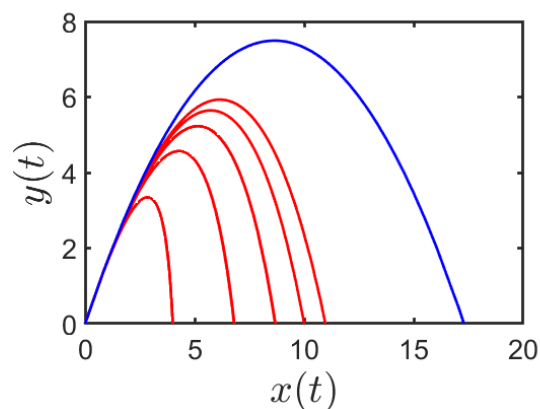


Figura 4.2: Comparación de la trayectoria de un tiro parabólico con rozamiento (rojo) y sin rozamiento (azul) para $x_0 = 0m$, $y_0 = 0m$, $v_{0x} = 7m/s$, $v_{0y} = 12,124m/s$ y $b = 0,0033N \cdot s/m$. Los valores de masa, en orden de menor a mayor alcance, son $m_1 = 0,002kg$, $m_2 = 0,004kg$, $m_3 = 0,006kg$, $m_4 = 0,008kg$ y $m_5 = 0,01kg$.

Esta “ausencia de rozamiento” se observa claramente en las expresiones de las velocidades (4.4) y (4.7), donde si sustituimos la función exponencial por su desarrollo de Maclaurin y consideramos $\frac{bt}{m} \ll 1$ debido al elevado valor de la

masa obtenemos:

$$v_x(t) \approx v_{0x} \left(1 - \frac{bt}{m}\right) \approx v_{0x}, \quad (4.10)$$

$$v_y(t) \approx \frac{-mg}{b} \left(1 - 1 + \frac{bt}{m}\right) + v_{0y} \left(1 - \frac{bt}{m}\right) \approx -gt + v_{0y}, \quad (4.11)$$

que son las expresiones de la velocidad para un tiro parabólico sin rozamiento. De forma análoga, podemos hacer lo mismo con las expresiones de la posición:

$$x(t) \approx x_0 + \frac{m}{b} v_{0x} \left(1 - 1 + \frac{bt}{m}\right) \approx x_0 + v_{0x} t, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} y(t) &\approx y_0 + \frac{m}{b} \left[\left(v_{0y} + \frac{mg}{b}\right) \left(1 - 1 + \frac{bt}{m} - \frac{b^2 t^2}{2m^2}\right) - gt \right] \approx \\ &\approx y_0 + v_{0y} \left(1 - \frac{b^2 t^2}{2m^2}\right) - \frac{gt^2}{2} \approx y_0 + v_{0y} t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Como cabía de esperarse, las ecuaciones para la posición también son las mismas que las del caso sin rozamiento.

Sin embargo, hay que resaltar que para periodos de tiempo largos el efecto previamente descrito empieza a equilibrarse dada la relación de cociente que tienen m y t (ver figura 4.3). De esta forma podemos concluir que para valores elevados de masa se consigue obviar el efecto del rozamiento pero este vuelve cuando se alcanza un determinado tiempo crítico, t_c .

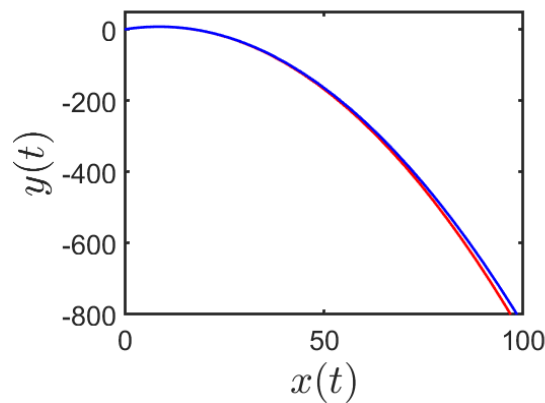


Figura 4.3: Comparación de la trayectoria de un tiro parabólico con rozamiento (rojo) y sin rozamiento (azul) para $x_0 = 0m$, $y_0 = 0m$, $v_{0x} = 7m/s$, $v_{0y} = 12,124m/s$, $m = 1kg$ y $b = 0,0033N \cdot s/m$. Esta trayectoria es la trazada durante los primeros 10s de vuelo.

Capítulo 5

Aplicación práctica del tiro parabólico con rozamiento.

En el año de 2020 se dio una noticia que impactó a toda la comunidad internacional. Lo que empezó considerándose como una simple neumonía en Wuhan (China) resultaría ser un nuevo tipo coronavirus, el SARS-CoV-2, que comenzaba a propagarse por el resto de países. Ante el auge de contagios, los distintos países afectados empezaron a optar por diversas medidas, siendo una común la del distanciamiento social. Esto se debe a la capacidad de los virus de transmitirse por el aire gracias a las gotitas de saliva que producimos al toser, estornudar, hablar etc. Así, manteniendo una determinada distancia x entre personas se puede reducir el riesgo de contagio en la población. Es el objetivo de este capítulo el cálculo de dicha distancia, haciendo uso del conocimiento del tiro parabólico y del efecto de la fricción.

En el capítulo anterior se supuso que la fuerza de rozamiento es linealmente proporcional a la velocidad, no obstante esto no es cierto si el objeto alcanza velocidades elevadas. Existen diversos modelos, para nuestro caso usaremos uno que establece una relación con la velocidad algo más compleja en la que además se considera el efecto del medio sobre el cuerpo con mayor detalle. De esta forma la expresamos como:

$$\vec{F}_r = - \left(\frac{\pi d^2 \rho_a}{8} \right) C_d(v) v \vec{v}, \quad (5.1)$$

donde $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ y C_d es el coeficiente de resistencia aerodinámica adimen-

sional, el cual puede modelarse a través del número de Reynolds:

$$C_d = \frac{24}{Re(v)} \left(1 + \frac{\sqrt{Re(v)}}{9,06} \right), \quad (5.2)$$

siendo Re el numero de Reynolds, que depende de la velocidad v , la densidad del aire ρ_a , el diámetro d y la viscosidad del medio η :

$$Re = \frac{\rho_a v d}{\eta}. \quad (5.3)$$

De esta forma, aplicamos la segunda ley de Newton en los ejes x e y :

$$m \frac{dv_x}{dt} = - \left(\frac{\pi d^2 \rho_a}{8} \right) C_d(v) v v_x, \quad (5.4)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad (5.5)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - \left(\frac{\pi d^2 \rho_a}{8} \right) C_d(v) v v_y, \quad (5.6)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y. \quad (5.7)$$

El sistema formado por las ecuaciones (5.4)-(5.7) no es lineal y tampoco resoluble analíticamente por lo que debe resolverse numéricamente.

Es necesario definir las propiedades de las gotitas de saliva que transportan las infecciones respiratorias, para ello nos basamos en los resultados arrojados por el artículo *Anatomy of sneeze ejecta* [3]. En dicho artículo se establece que las gotitas son esféricas y que su diámetro oscila entre 1mm y $160\mu\text{m}$ y que la velocidad inicial es de unos 14m/s , dirección horizontal. Como datos de partida contamos con $g = 9,8\text{m/s}^2$, $v_0 = 14\text{m/s}$, $x(0) = 0\text{m}$, $y(0) = 2\text{m}$, $\eta = 1,85 \cdot 10^{-5}\text{N} \cdot \text{s/m}^2$, $\rho_a = 1,29\text{kg/m}^3$ y la densidad de la saliva $\rho_s = 1000\text{kg/m}^3$. Para la resolución del sistema de ecuaciones (5.4)-(5.7) se ha optado por utilizar el método de Runge-Kutta de orden 4 (para más detalle consúltese el capítulo 7).

Una vez resuelto el sistema obtenemos que la gotita de 1mm tiene un alcance de $3,45\text{m}$ y un tiempo de vuelo de $0,9\text{s}$ mientras que la de $160\mu\text{m}$ tiene un alcance de $0,32\text{m}$ y un tiempo de vuelo de $4,24\text{s}$. Como se puede observar en la figura 5.1, la gotita de $160\mu\text{m}$ experimenta un cambio muy brusco en su trayectoria. Con intención de observar como una trayectoria como la de la gotita de 1mm pasa a una como de la de $160\mu\text{m}$ se ha representado la solución para un diámetro de $500\mu\text{m}$ a modo de caso intermedio. Para este nuevo diámetro, cuyo tiempo de vuelo de $1,23\text{s}$, vemos que empieza a exhibir el mismo comportamien-

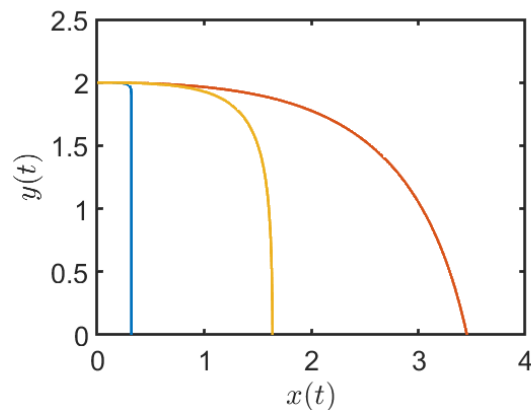


Figura 5.1: Representación de la solución del sistema 5.4 5.7 para unas gotitas de diámetros 1 mm (rojo), $160\mu\text{m}$ (azul) y $500\mu\text{m}$ (naranja).

to que la de $160\mu\text{m}$ si bien el cambio en este caso no es tan brusco. Observando la evolución de la velocidad de la gotita de $160\mu\text{m}$ en la figura 5.2 vemos que tras pasar un determinado tiempo, $1,81\text{s}$ para v_x y $1,48\text{s}$ para v_y , estas se vuelven constantes con $v_x = 0\text{m/s}$ y $v_y = -0,48\text{m/s}$, lo que propicia el cambio tan drástico en la evolución de su trayectoria. Para el caso de $500\mu\text{m}$ evidentemente estos tiempos serán mayores por lo que si suponemos que continúan con su descenso, v_x se vuelve constante a los $2,4\text{s}$ y v_y a los $1,67\text{s}$.

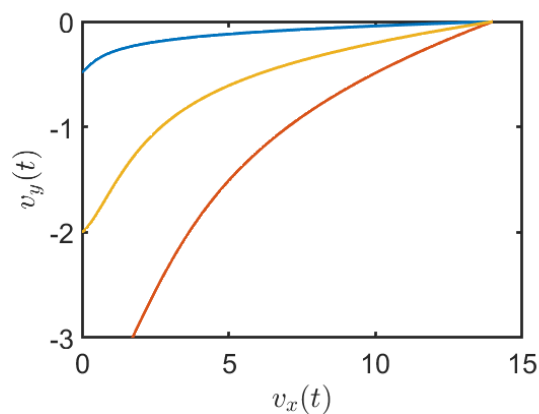


Figura 5.2: Representación de las velocidades de las gotitas de diámetro 1 mm (rojo), $500\mu\text{m}$ (naranja) y $160\mu\text{m}$ (azul).

A modo de pequeño inciso podemos modelar la trayectoria de las gotitas con las expresiones deducidas en el apartado del tiro parabólico del capítulo anterior. Sin embargo solo con un rápido vistazo a la figura 5.3 observamos que el resultado es muy distinto. Las trayectorias para los dos diámetros son coincidentes, con un tiempo de vuelo de $0,66\text{s}$ y un alcance de $8,29\text{m}$. Esto deja patente

la importancia de elegir un modelo adecuado para las simulaciones, pues esta solución difiere bastante de la obtenida con la aproximación presentada en este capítulo.

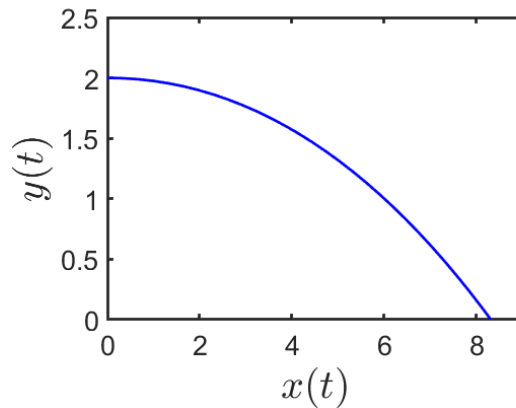


Figura 5.3: Representación de la trayectoria de las gotita de diámetros 1 mm y $160\mu\text{m}$.

Con estos resultados podemos ver que la distancia mínima de seguridad entre personas ha de ser $3,45\text{ m}$. Si bien cuando el tamaño de la gotita es menor su alcance también lo es, a partir de los $5\mu\text{m}$ entramos en la categoría de aerosoles, para los cuales las expresiones que se han desarrollado en este capítulo dejan de ser correctas. Esto se debe a que entra en juego el comportamiento browniano de las partículas permitiendo que puedan mantenerse en el aire por largos periodos de tiempo, no obstante, los estornudos y toses no suelen generar una cantidad suficiente de estas como para que se pueda considerar un efecto importante.

Capítulo 6

Conclusiones.

Lo expuesto a lo largo de esta memoria permite arribar a las siguientes conclusiones:

- Relativo al estudio de la fuerza de rozamiento viscoso en el MAS.

Se ha demostrado que al considerar la fuerza de rozamiento viscosa como dependiente de la velocidad nos podemos encontrar con tres posibilidades en el comportamiento del sistema, a saber, caso sub-amortiguado, sobre-amortiguado y amortiguamiento crítico, donde cada caso queda definido por el grado de amortiguamiento (γ) y la frecuencia natural del oscilador (ω_0). Esto desemboca en una amplitud que decrece de forma exponencial y una frecuencia del sistema que depende del grado de amortiguación. También se ha mostrado que los números complejos juegan un papel importante en la resolución de las ecuaciones que definen el movimiento armónico aunque finalmente solo consideremos como solución su parte real. Un ejemplo de este tipo de sistemas oscilatorios es el de los amortiguadores en vehículos.

- Relativo a la fuerza de rozamiento entre superficies en el MAS.

Se consideró la fuerza de rozamiento como proporcional a la fuerza normal que ejerce la superficie sobre el cuerpo. De esta forma, nos encontramos con un análisis que resultó estar lejos de ser trivial pues nos encontramos con un sistema de ecuaciones que debemos resolver por partes. En contraste con el caso del amortiguamiento viscoso se demostró que para este tipo de sistemas la amplitud decrece de forma lineal y que su frecuencia no depende del coeficiente de rozamiento. Además se vio que para este análisis es necesario determinar si en los puntos de retorno el cuerpo continua en reposo o vuelve a oscilar, esto se hizo considerando el coeficiente

de rozamiento tanto estático como dinámico pues de lo contrario el modelo matemático no se corresponde con el comportamiento real. Este desarrollo también es útil desde un punto de vista empírico, pues se puede emplear para el cálculo de coeficientes de fricción entre superficies. Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que podemos encontrar en los pistones neumáticos.

- Relativo al estudio del tiro parabólico con rozamiento.

Modelándose la fuerza de rozamiento como viscosa, es decir, proporcional a la velocidad, se estudió el comportamiento de proyectiles pequeños dejando patente sus diferencias con el tiro parabólico sin rozamiento. Así, se concluyó que después de cierto tiempo de vuelo la componente en x de la velocidad se vuelve constante y que su componente en y disminuye de forma constante. De este hecho se deduce también que en dicho instante la trayectoria del proyectil se convierte en un movimiento de caída libre. Estudiando el efecto de la masa en la dinámica del proyectil se llegó a la conclusión de que es posible hacer que el proyectil se comporte como si no sufriera los efectos del rozamiento durante cierto periodo de tiempo, tras el cual el efecto del rozamiento vuelve a hacerse patente.

- Relativo a la aplicación práctica del tiro parabólico con rozamiento

Con los conocimientos adquiridos sobre el rozamiento y los tiros parabólicos se decidió aplicarlos a un tema de actualidad como es la pandemia del SARS-CoV-2. De esta forma se estudió el alcance que tendría una gotita de saliva expulsada por una persona, pues el virus las utiliza como medio de propagación. Se concluye así que la distancia de seguridad entre personas ha de ser de mínimo $3,45m$. En este análisis no se consideró el comportamiento browniano de partículas de pequeño diámetro.

Capítulo 7

Apéndice. Programas.

El siguiente programa calcula la posición, velocidad, aceleración y energía mecánica de un cuerpo que describe un MAS donde la fuerza de rozamiento es superficial. Usado en el capítulo 3.

```
function [POS,VEL,ACC,E]=dinamica(g,mue,mud,teta ,m,k,x0 ,T,M)
%g=gravedad, mue=coef. roz. estatico, mud=coef. roz. dinamico,
  teta=angulo del plano, m=masa, k=constante el stica, x0=
  posicion inicial, T=numero de iteraciones y M=numero de
  particiones en cada semi-ciclo
w=sqrt(k/m);
a1=mud*g*cos(teta)+g*sin(teta);
a2=mud*g*cos(teta)-g*sin(teta);
%Discretiza el tiempo
tiempo=[0:pi/w/M:T*pi/w];
for n=1:T
    %Calcula la posicion
    pos((n-1)*M+1:n*M)=(x0-a2/w^2-(n-1)*(a2+a1)/w^2)*cos(w*
        tiempo((n-1)*M+1:n*M))+(a2*(1-(-1)^n)-a1*(1+(-1)^n)
        )/(2*w^2);
    %Calcula la velocidad
    vel((n-1)*M+1:n*M)=-((x0-a2/w^2-(n-1)*(a2+a1)/w^2)*w*sin
        (w*tiempo((n-1)*M+1:n*M)));
    %Calcula la aceleracion
    acc((n-1)*M+1:n*M)=-((x0-a2/w^2-(n-1)*(a2+a1)/w^2)*w^2*
        cos(w*tiempo((n-1)*M+1:n*M)));
    %Comprueba si permanece en reposo al final del
    descenso
    if (-1)^n<0
        if abs(pos(n*M)) <=((mue*g*cos(teta)+g*sin(teta)
            )/w^2)
            pos(n*M+1:T*M)=pos(n*M);
            vel(n*M+1:T*M)=0;
```

```

                                acc(n*M+1:T*M)=0;
                                break
                            end
                            %Comprueba si permanece en reposo al final del ascenso
                        else
                            if pos(n*M) <=((mue*g*cos(teta)-g*sin(teta))/w
                                ^2)
                                pos(n*M+1:T*M)=pos(n*M);
                                vel(n*M+1:T*M)=0;
                                acc(n*M+1:T*M)=0;
                                break
                            end
                        end
                    end
                end
                POS=[x0 pos];
                VEL=[0 vel];
                ACC=[0 acc];
                E=[1/2*k*x0^2+m*g*sin(teta)*x0 1/2*m*vel.^2+1/2*k*pos.^2+m*g*
                    sin(teta)*pos];
            end

```

El siguiente programa expresa de forma implícita la ecuación diferencial que modela la componente x de la velocidad de un proyectil. Usado en el capítulo 5.

```

function [Vx]=rozraynoldsxmod(d,m,denair,ro,vx,vy)
    %Ecuacion de la velocidad en el eje x
    %d=diametro, m=masa, denair=densidad del aire, ro=viscosidad
    del aire
    v=sqrt(vx^2+vy^2);
    Re=denair*v*d/ro;
    Cd=(24/Re)*(1+(sqrt(Re)/9.06))^2;
    Vx=-((pi*d^2*denair)/(8*m))*Cd*v*x*v;
end

```

El siguiente programa expresa de forma implícita la ecuación diferencial que modela la componente y de la velocidad de un proyectil. Usado en el capítulo 5.

```

function [Vy]=rozraynoldsymod(d,m,denair,ro,vx,vy)
    %Ecuacion de la velocidad en el eje y
    %d=diametro, m=masa, denair=densidad del aire, ro=viscosidad
    del aire
    g=9.8;
    v=sqrt(vx^2+vy^2);
    Re=denair*v*d/ro;
    Cd=(24/Re)*(1+(sqrt(Re)/9.06))^2;
    Vy=-g-((pi*d^2*denair)/(8*m))*Cd*v*y*v;

```


end

El siguiente programa ejecuta el método de Runge-Kutta de orden 4 para las ecuaciones diferenciales de la velocidad en los ejes x e y de un proyectil. Dichas EDO están modeladas por los dos programas anteriores, representadas en los datos de entrada como F y G para las componentes x e y respectivamente. De esta forma los datos de salida son la posición (X e Y), velocidad (vX y vY) y tiempo (T) para el intervalo $[a, b]$ y número de nodos (Nk) dados. Usado en el capítulo 5.

```

function [X,Y,vX,vY,T]=rungekuttamod(F,G,x0,y0,vx0,vy0,a,b,Nk)
  %Calculo del paso
  h=(b-a)/Nk;
  %Primeros terminos de los vectores solucion
  vX(1)=vx0;
  vY(1)=vy0;
  X(1)=x0;
  Y(1)=y0;
  T(1)=a;
  h2=h/2;
  h6=h/6;
  for k=1:Nk-1
    %Calculo de los coeficientes
    %Primer paso
    f1x=vX(k);
    g1y=vY(k);
    f1=F(vX(k),vY(k));
    g1=G(vX(k),vY(k));
    %Segundo paso
    f2x=vX(k)+h2*f1;
    g2y=vY(k)+h2*g1;
    f2=F(vX(k)+h2*f1,vY(k)+h2*g1);
    g2=G(vX(k)+h2*f1,vY(k)+h2*g1);
    %Tercer paso
    f3x=vX(k)+h2*f2;
    g3y=vY(k)+h2*g2;
    f3=F(vX(k)+h2*f2,vY(k)+h2*g2);
    g3=G(vX(k)+h2*f2,vY(k)+h2*g2);
    %Cuarto paso
    f4x=vX(k)+h*f3;
    g4y=vY(k)+h*g3;
    f4=F(vX(k)+h*f3,vY(k)+h*g3);
    g4=G(vX(k)+h*f3,vY(k)+h*g3);
    %Calculo de la solucion en el punto k
    X(k+1)=X(k)+h6*(f1x+2*f2x+2*f3x+f4x);
  
```

```
Y(k+1)=Y(k)+h6*(g1y+2*g2y+2*g3y+g4y);
```

```
vX(k+1)=vX(k)+h6*(f1+2*f2+2*f3+f4);
```

```
vY(k+1)=vY(k)+h6*(g1+2*g2+2*g3+g4);
```

```
T(k+1)=T(k)+h;
```

```
end
```

```
end
```

Bibliografía

- [1] C. Barrat and George L. Strobil *Sliding friction and the harmonic oscillator*.
- [2] David Halliday, Robert Resnick et al *Física 1, capítulo 4*.
- [3] Renato Álvarez-Nodarse, Francisco J. Esteban y Niurka R. Quintero, *Las matemáticas y la covid-19*, La Gaceta de la RSME, Vol. 24 (2021), Núm. 1, Págs. 91–109 (B. E. Scharfman, A. H. Techet, J. W. M. Bush y L. Bourouiba, *Visualization of sneeze ejecta: steps of fluid fragmentation leading to respiratory droplets*, United States 2016).
- [4] Yannick Desplanques *Amontons-Coulomb Friction Laws, A Review of the Original Manuscript*, SAE Int. J. Mater. Manf. 8(1):98-103, 2015.
- [5] Y. D. Chong Research Group, *Complex Oscillations*, Singapore 2016.