

DETERMINACIÓN PROBABILÍSTICA DE CRECIMIENTO DE GRIETAS EN FATIGA CON CARGAS ALEATORIAS INCLUYENDO EFECTOS DE SECUENCIAJ. Zapatero¹ y J. Domínguez²

1 Área de Ciencia de Materiales e Ingeniería Metalúrgica
 Dpto. de Ingeniería Civil y de Materiales
 E.T.S.I.I. de Málaga, Plaza del Ejido s/n, 29013 MÁLAGA
 2 Dpto. de Ingeniería Mecánica. E.S. de Ingenieros.
 SEVILLA

Resumen. En este trabajo se presenta un modelo estadístico de análisis de crecimiento de grieta en fatiga con cargas aleatorias, que tiene en cuenta los efectos de secuencia. El modelo define e incorpora una tensión de cierre equivalente, que incluye en la ley de crecimiento a través del factor de intensidad de tensiones efectivo. Esta tensión de cierre equivalente es obtenida para cada proceso, por medio de la función de densidad de probabilidad de picos $p(S)$ del proceso aleatorio, de las propiedades del material y de la geometría de la probeta. El modelo fue aplicado al análisis del crecimiento de grieta con cargas aleatorias a dos aleaciones de aluminio: 2024-T351 y 2219-T851. Las estimaciones de crecimiento de grieta obtenidas están próximas a los resultados experimentales y a las obtenidas mediante una simulación ciclo a ciclo.

Abstract. A model for the statistical analysis of crack growth under random loading that includes the loading sequence effect is presented. The model defines and incorporates an equivalent closure stress that is included in the fatigue crack growth law via the effective stress intensity factor. The equivalent closure stress for each loading process is obtained from the probability density function of peaks $p(S)$ in the random loading process, the properties of the material and the specimen geometry. The model was applied to the analysis of crack growth life under random loading on sheets of two different aluminum alloys: 2024-T351 and 2219-T851. The crack-growth lifetimes thus obtained were consistent with experimental data and with the results obtained by using a cycle-by-cycle simulation scheme.

1. INTRODUCCIÓN

Los mayoría de los sistemas mecánicos estas sometidos durante su funcionamiento a cargas irregulares o de tipo aleatorio. La aplicación continuada de estas cargas, puede llevar al crecimiento de grietas existentes que pueden desembocar en el fallo del sistema. La estimación del tiempo que tarda en crecer una grieta por fatiga, es una necesidad en el diseño de elementos sometidos a cargas variables en el tiempo. Estas estimaciones se realizan mediante modelos que se ajustan con datos obtenidos en ensayos con cargas de amplitud constante. La extrapolación de la validez de estos modelos para su uso en determinaciones de vida de elementos sometidos a cargas aleatorias, no es una tarea fácil.

Por un lado, los efectos de secuencia cambian el comportamiento de los ciclos posteriores a la aplicación de una sobrecarga, ya sea ésta de tracción o de compresión. Por otra parte, la aplicación de cargas de tipo aleatorio, impide el conocimiento real de las tensiones que tienen lugar en cada momento, pudiendo ser solamente estimadas estadísticamente.

La aparición de una sobrecarga de tracción durante la aplicación de una carga de amplitud constante, produce una disminución de la velocidad de crecimiento de grieta (retardo) en los ciclos posteriores a la sobrecarga. Lo contrario ocurre, si la carga aplicada es de valor inferior al mínimo de los ciclos de amplitud constante, en este caso se produce un aumento de la velocidad de crecimiento (aceleración), en los ciclos posteriores a la aplicación de esta carga, aunque la duración y la magnitud de este efecto suele ser inferior al de retardo [1]. Ambos efectos se pueden combinar produciendo situaciones muy diversas que dependen de: la geometría de las cargas, de los valores máximo y mínimo aplicados, de R , del estado de tensiones, del espesor de la probeta, de la microestructura, etc. [2-5]. Como se ve, en cargas de tipo aleatorio, es fundamental el conocimiento de los efectos de secuencia y su utilización en los modelos de cálculo de la vida de crecimiento de grieta.

Se han hecho muchos intentos para tener en cuenta el efecto de secuencia, entre los que destacan los modelos propuestos por Wheeler [6] y por Willenborg [7] y los basados en el concepto de cierre de grieta de Elber [8]. Estos últimos son los que proporcionan mejores

estimaciones de la vida de crecimiento de grieta. Basados en esta idea se introducen los conceptos de ΔS_{eff} o ΔK_{eff} como las magnitudes que producen el crecimiento de la grieta.

La definición de las cargas, cuando estas son de naturaleza aleatoria o casi aleatoria, es otro problema que añade incertidumbre a la estimación de la vida de crecimiento. Estas cargas pueden estar definidas mediante un registro que recoge una secuencia de picos y valles, o a través de una definición estadística mediante parámetros que caracterizan el proceso de carga a que está sometido el sistema. En el primer caso, el registro debe ser representativo del proceso de carga. La obtención de una historia de cargas representativa de un proceso es una tarea compleja y larga [9-13], que implica el manejo y procesamiento de gran cantidad de datos, el registro obtenido, sin embargo, será uno de los muchos que pueden representar al mismo proceso. La utilización de distintos registros igualmente representativos del mismo proceso, puede llevar a obtener vidas muy distintas [14-16], tanto en ensayos como en estimaciones con distintos modelos de cálculo.

Si la definición de las cargas se hace estadísticamente, la elección de los parámetros depende del tipo de carga a la que el sistema esté sometido. Cuando la historia de carga es altamente irregular, los grandes picos pueden producir retardos en el crecimiento y la secuencia de aplicación de los ciclos de carga, puede influir grandemente en la vida del sistema.

Si los efectos de secuencia son pequeños, la vida de fatiga se puede estimar mediante alguna aproximación simple. Una de las aproximaciones más sencillas, consiste en considerar un ciclo de carga de amplitud constante como equivalente al proceso de carga, éste se obtendría a partir de la estadística de picos o rangos [17] y se aplicaría a cualquiera de los modelos de velocidad de crecimiento de grieta basados en la mecánica de fractura elástica lineal. También se puede obtener la vida mediante modelos estadísticos, por integración directa de la ley de crecimiento, utilizando simples parámetros estadísticos [18], como nivel de tensión equivalente, distribución de rangos de carga, nivel de carga media etc.

Cuando los efectos de secuencia son grandes, el orden de aplicación de las cargas es importante y los procesos vistos en el párrafo anterior dejan de tener validez. En estos casos, la determinación mediante modelos ciclo a ciclo es el proceso más ampliamente aceptado para la determinación de la vida de crecimiento de grieta. Este proceso de cálculo como se ha visto antes, necesita disponer de un registro de cargas determinado con una secuencia dada, la vida obtenida con éste registro puede ser muy distinta a la obtenida con otro registro con distinta secuencia pero estadísticamente idénticos [15]. No obstante, son varios los modelos de simulación ciclo a ciclo que considerando los efectos de secuencia han sido

propuestos [20-22]. El inconveniente de estos modelos es el gran consumo de tiempo y en algunos casos la dificultad de aplicación.

Además de los modelos ciclo a ciclo, se han propuesto otros modelos estadísticos que tienen en cuenta los efectos de secuencia. En estos modelos, se intenta mediante una aproximación global evitar la simulación ciclo a ciclo. Algunos de estos modelos permiten estimar además de la vida, parámetros estadísticos del proceso, como el de Ditlevsen y Sobczyk [23] que estima la distribución de probabilidad de la longitud de grieta, o como el de Arone [24] que estima la vida media para una longitud de grieta final con un nivel de fiabilidad determinado. Sin embargo, estos modelos presentan algunas dificultades. El modelo de Sobczyk no ha sido verificado experimentalmente y los parámetros son difíciles de determinar. El modelo de Arone, es solamente aplicable a un tipo de carga muy específica y su extensión a casos más generales es compleja.

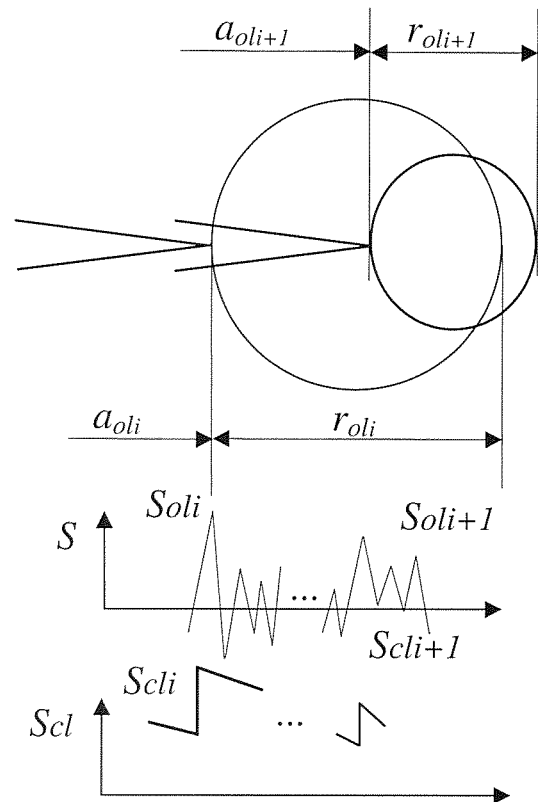


Figura 1. Representación esquemática de los cambios supuestos en la tensión de cierre con los ciclos de carga.

Un modelo de alcance más general es el propuesto por Veers y Van Den Avyle [25], determinan la vida media esperada pero no la dispersión u otro parámetro estadístico de la misma. El modelo considera un efecto de retardo, utilizando una tensión media de cierre, función de la obtenida mediante ensayos de amplitud constante y del tipo de la historia de carga implicada. El modelo ha sido aplicado a procesos aleatorios gaussianos de banda estrecha, siendo fácil su implementación. Sin embargo,

carece de un criterio para definir la tensión de cierre en función de las características del proceso de carga, y su determinación ha de ser experimental individualmente para cada material y espectro de carga.

El modelo que se presenta, es una nueva aproximación para la determinación de la vida de crecimiento de grieta bajo cargas de amplitud variable, teniendo en cuenta los efectos de secuencia. La estimación de la vida, se realiza a partir de la función de densidad de probabilidad (*fdp*) de los picos de carga y de una tensión de cierre equivalente, obtenida a partir de la estadística del proceso de cargas, de las propiedades del material y de la geometría de la probeta. A partir de esta tensión de cierre equivalente y a través de los valores efectivos de intensidad de tensiones, se obtiene la vida de crecimiento de grieta. El modelo ha sido contrastado mediante la aplicación del mismo a diversos casos de cargas aleatorias, con distintos anchos de banda, nivel de tensión y material. La validez del modelo, se ha comprobado comparando las estimaciones de vida dadas por el mismo, con valores experimentales obtenidos en ensayos con los mismos procesos de carga, y con resultados de simulación ciclo a ciclo.

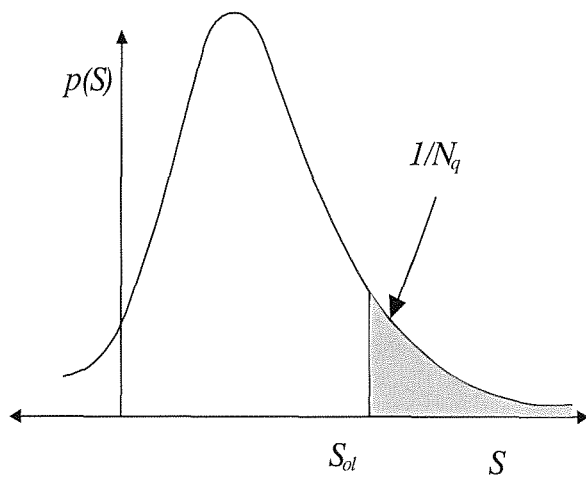


Figura 2. Función de densidad de probabilidad de picos mostrando los parámetros usados en la ecuación (2)

2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

El modelo de cálculo propuesto, se basa en la determinación de una tensión de cierre equivalente, siendo ésta estimación, por tanto, el objetivo principal del modelo.

A efectos del análisis del crecimiento de grietas por fatiga, una sobrecarga puede considerarse como una carga de valor suficientemente alto como para producir efectos apreciables en los ciclos posteriores a la aplicación de la misma. Este efecto es debido a la variación en la tensión

de cierre producida, por el aumento de plastificación en el frente de grieta, manteniéndose su influencia hasta que la grieta más la plasticidad asociada al ciclo de carga en curso salga de la zona plástica creada por la sobrecarga, continuando el crecimiento a la misma velocidad que antes de aparecer la sobrecarga. Esto en el caso de cargas de amplitud constante. En procesos aleatorios de carga en los que los altos picos de carga son el resultado del mismo proceso que el resto de picos, las sobrecargas están distribuidas en el tiempo de forma más o menos de uniforme. En estos casos, el efecto de la sobrecarga se mantendrá hasta que aparezca otra, de magnitud similar o mayor que la anterior. La nueva sobrecarga incrementará nuevamente la tensión de cierre cancelando el efecto de la sobrecarga previa e introduciendo un nuevo efecto de cierre. Es decir, cambiará nuevamente el comportamiento de los ciclos subsiguientes. En la figura 1 se muestra un esquema de como sería este comportamiento. Una sobrecarga S_{oli} produce una zona plástica de tamaño r_{oli} , y como consecuencia un aumento de la tensión de cierre. De manera que los ciclos posteriores de carga, tienen que hacer crecer a la grieta dentro del material plastificado haciendo al mismo tiempo que la tensión de cierre vaya disminuyendo lentamente. El efecto se mantendrá hasta que la zona plástica de una sobrecarga $S_{ol(i+1)}$ sobrepase a la producida por la sobrecarga anterior, es decir, hasta que se cumpla la expresión:

$$a_{ol(i+1)} + r_{ol(i+1)} > a_{oli} + r_{oli} \quad (1)$$

donde a_{oli} es la longitud de grieta en el momento de la sobrecarga S_{oli} , y r_{oli} el tamaño de la zona plástica producido por esa sobrecarga.

La *fdp* de los picos de carga $p(s)$ de un proceso aleatorio definido estadísticamente puede ser obtenida fácilmente. Suponiendo que las sobrecargas están distribuidas uniformemente en el tiempo y que sus valores no son muy diferentes, dada una sobrecarga $S_{o,i}$ se puede estimar estadísticamente el número medio de ciclos, N_q , que tardará en repetirse esta sobrecarga. Este valor será la inversa de la probabilidad de que aparezca un pico de tensión de valor igual, o mayor a S_{ol} , figura 2. La frecuencia de repetición de una sobrecarga será por tanto:

$$N_q = \frac{1}{\int_{S_{ol}}^{\infty} p(S) dS} \quad (2)$$

El modelo propuesto se basa en la determinación de una tensión de cierre equivalente (S_{cleq}), tal que, suponiendo que ésta actúa durante todo el proceso produciendo una velocidad de crecimiento media, igual a la velocidad de crecimiento media obtenida en el caso real. Esta tensión de cierre equivalente, será la que se utilice para la determinación de la vida de crecimiento de grieta por fatiga. S_{cleq} es estimada a partir de: Las sobrecargas del

proceso, de su frecuencia de aparición, de la tensión de cierre que produce, de la variación de esta tensión de cierre durante el crecimiento posterior y del número de ciclos durante los cuales el efecto de la sobrecarga se mantiene. Es decir, la determinación de la tensión de cierre equivalente es función de la estadística del proceso de cargas y del tipo de material.

Por otra parte, se supone que la sobrecarga que controla fundamentalmente el proceso de crecimiento, será aquella que sus efectos duren exactamente el tiempo que tarda en repetirse, definida esta frecuencia de aparición probabilísticamente como se vio arriba, ecuación (2). Para conseguir este objetivo se necesita conocer o definir una serie parámetros. Por una parte, es necesario determinar la tensión de cierre producida por la aplicación de una sobrecarga, también, es necesario definir como será la variación de esta tensión de cierre en los ciclos subsiguientes a la aplicación de la sobrecarga, hasta salir de la zona de influencia de la misma. Esto último, implica la estimación de un radio medio plástico (r_x), que se supone asociado a la grieta durante el crecimiento dentro de la zona de influencia de la sobrecarga, figura 3.

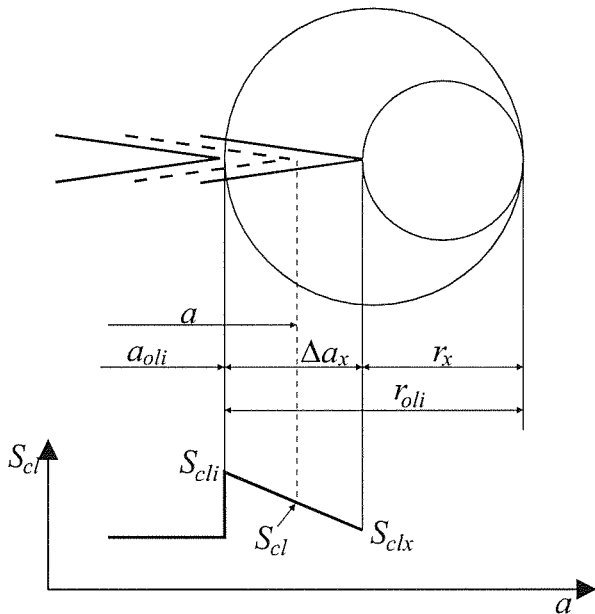


Figura 3. Variación de la tensión de cierre entre sobrecargas supuesta en el modelo y definición de los parámetros usados en la ecuación (4)

Con este planteamiento, la determinación de la tensión de cierre equivalente se obtendrá mediante un proceso iterativo que consistirá en, a) fijar una sobrecarga y determinar la frecuencia de repetición de la misma (N_q), b) determinar el número de ciclos (N_p) que tarda la grieta más r_x en alcanzar el extremo de la zona plástica creada por la sobrecarga, c) repetir este proceso iterativo hasta que ambos valores sean iguales. Las estimaciones de N_p y N_q se realizarán a partir de la distribución estadística de los picos de carga. La implementación del proceso descrito se

realizará siguiendo los pasos e hipótesis que a continuación se describen.

1) Se supone que en un instante t_i actúa una sobrecarga S_{qi} , cuya frecuencia esperada de aparición es N_{qi} ciclos, estimados por la ecuación (2).

2) Es necesario determinar el valor de la tensión de cierre S_{cli} producida inmediatamente después de S_{qi} . Se supone que esta tensión de cierre, es la misma que produciría una carga de amplitud constante con los mismos máximo y mínimo de la sobrecarga. La determinación de la misma se realiza por medio de alguna de las expresiones analíticas desarrolladas por diversos autores [26], para la determinación del parámetro U :

$$U = \frac{\Delta S_{eff}}{\Delta S} = \frac{S_{max} - S_{cli}}{S_{max} - S_{min}} = f(R, S_{max}, \sigma_y) \quad (3)$$

donde $S_{max}=S_{qi}$ y S_{min} son el valor máximo y mínimo de del ciclo considerado como sobrecarga, $R=S_{min}/S_{max}$, y σ_y el límite elástico del material.

3) Durante el crecimiento de la grieta hasta salir de la zona de influencia de la sobrecarga, S_{qi} , la tensión de cierre $S_{cl}(a)$, se supone que varía linealmente entre S_{cli} y S_{clx} , figura3, es decir:

$$S_{cl}(a) = S_{cli} + \frac{S_{clx} - S_{cli}}{\Delta a_x} (a - a_{oli}) \quad (4)$$

donde $S_{cl}(a)$ es la tensión de cierre para cualquier longitud de grieta entre a_{oli} y $a_{oli}+\Delta a_x$, Δa_x es el incremento de longitud de grieta entre dos sobrecargas, y S_{clx} es la tensión de cierre inmediatamente antes de que aparezca la nueva sobrecarga con una longitud de grieta de: $a_{oli}+\Delta a_x$.

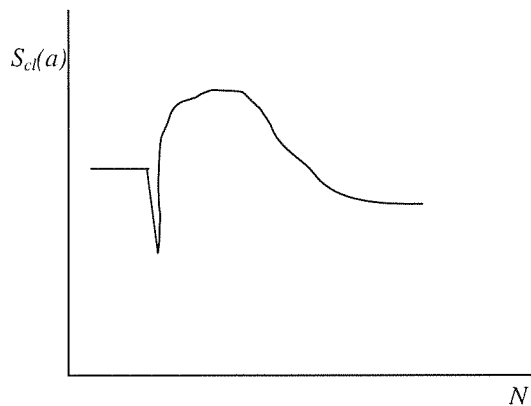


Figura 4. Variación real de la tensión de cierre.

La evolución real de la tensión de cierre, es más compleja que la que se supone en este modelo. La ley de variación depende de varios parámetros, tales como el nivel de tensión de la sobrecarga, los picos y valles de tensión que siguen a la sobrecarga, el número de sobrecargas aplicadas y el estado de tensión (tensión o deformación plana o un estado intermedio) [27,28]. La variación real de la tensión

de cierre, experimenta primeramente una fuerte disminución de la misma inmediatamente después de la aplicación de la sobrecarga, seguida por un rápido aumento hasta un valor máximo y una evolución continua hasta la estabilización, figura 4.

La utilización de una ley como la de la figura 4, supone introducir una mayor complejidad en el modelo haciendo difícil la aproximación con seguridad de la evolución de la tensión de cierre en cada caso. La variación lineal adoptada permite una fácil implementación, estando además muy próxima a la evolución existente en el caso de condiciones de deformación plana [27].

Una vez establecido estos criterios, es necesario todavía definir la tensión de cierre que se supone habrá inmediatamente antes de aparecer la nueva sobrecarga, S_{clx} , para poder definir la evolución lineal que se ha supuesto. El valor de esta sobrecarga final, será la producida por un ciclo de carga S_x que además genera una zona plástica que alcanza el extremo de la zona plástica creada anteriormente por la sobrecarga, figura 3. Seleccionado un valor S_x , el final de la zona de influencia de la sobrecarga se producirá cuando se cumpla:

$$a_{oli} + r_{oli} = a_{oli} + \Delta a_x + r_x \tag{5}$$

donde r_x es el radio de la zona plástica producida por S_x , y $a_x = a_{oli} + \Delta a_x$.

El valor S_x debe de ser la tensión que se estaba aplicando al sistema en el momento en que la grieta alcanzaba la longitud a_x , es decir justo en el ciclo anterior de que se aplique la siguiente sobrecarga. Lógicamente, este valor es desconocido en cada caso, el valor que se adopte en el modelo debe de ser un valor representativo del proceso de cargas. En este caso se ha tomado la raíz media cuadrática de los picos de carga, $S_x = S_{rms}$.

La influencia de tomar este u otro valor sobre la tensión de cierre equivalente será analizada posteriormente.

4) Definidos el valor de S_x y la evolución de la tensión de cierre, es necesario determinar el número de ciclos que, con estas hipótesis, tardará el proceso antes de que una nueva sobrecarga cancele los efectos de la previa. Si se conoce la longitud de la grieta cuando aparece la nueva sobrecarga, sería fácil determinar el número de ciclos N_{pi} sobre los que una sobrecarga S_{qi} ejerce su acción. La longitud de grieta en ese momento, se puede obtener como: $a_{oli} + \Delta a_x = a_{oli} + r_{oli} - r_x$, determinándose por tanto N_{pi} a partir de la siguiente expresión:

$$N_{pi} = \int_{a_{oli}}^{a_{oli} + r_{oli} - r_x} \frac{da}{\int_{S_{cl}(a)}^{\infty} F(S - S_{cl}(a), a) p(S) dS} \tag{6}$$

donde $S_{cl}(a)$ es el valor de la tensión de cierre definida previamente, $F(S - S_{cl}(a), a)$ es la ecuación de velocidad de crecimiento de grieta, y a_{oli} , r_{oli} y r_x han sido definidos previamente en la figura 3. El valor de N_{pi} así obtenido dependerá del S_x seleccionado, sin embargo, la influencia de esta tensión es pequeña debido a los efectos de compensación en la obtención de S_{cleq} , como se mostrará posteriormente.

Los valores de N_{qi} y N_{pi} , han sido obtenidos mediante dos aproximaciones diferentes, N_{qi} , se ha obtenido mediante consideraciones estadísticas, mientras que N_{pi} , lo ha sido mediante simulación de crecimiento de grieta por fatiga. Si el número de ciclos N_{pi} , que se necesitan para eliminar el efecto de la sobrecarga, es superior a la frecuencia de repetición de la misma, (N_{qi}) quiere decir que la tensión S_{qi} actuando como una sobrecarga, volverá a repetirse antes de terminar su efecto. En caso contrario, el retardo producido por la sobrecarga desaparecería antes de su repetición sin que se hubiera producido una sobrecarga de magnitud igual o mayor que S_{qi} , por tanto, la nueva sobrecarga será una tensión más pequeña que la considerado anteriormente (S_{qi}), la que actuaría como sobrecarga. Aquella sobrecarga que cumpla la condición de repetirse, justo cuando sus efectos han terminado, será la que tenga mas probabilidades de ejercer fundamentalmente su efecto sobre el crecimiento. Esta sobrecarga S_{ol} , cumplirá la condición $N_{pi} = N_{qi}$. La estimación de S_{ol} , se realiza fácilmente mediante un proceso iterativo repitiendo los escalones 1 a 4.

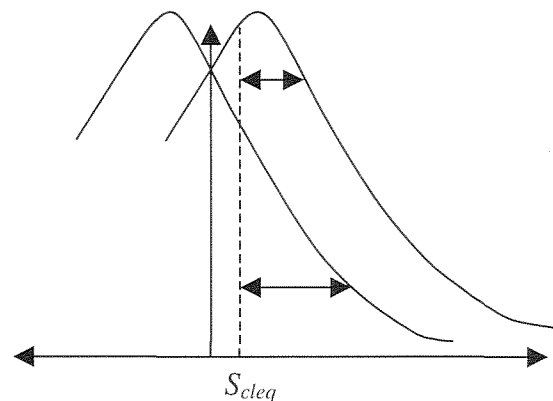


Figura 5. Función de densidad de probabilidad de picos (p_{max}) y valles (p_{min}), para un proceso aleatorio gaussiano.

5) Una vez calculado S_{ol} , la tensión de cierre equivalente S_{cleq} se obtendrá, como la tensión de cierre constante que en el proceso de crecimiento tarde el mismo numero de ciclos N_{pi} , en crecer la grieta entre a_{oli} y $a_{oli} + r_{oli} - r_x$. S_{cleq} se determinará como aquel que cumpla la condición:

$$N_{pi} = \int_{a_{oli}}^{a_{oli}+r_{gli}-r_x} \frac{da}{\int_{S_{cleq}}^{\infty} F(S - S_{cleq}, a) p(S) dS} \quad (7)$$

donde $F(S - S_{cleq}, a)$ es una expresión cualquiera de la ecuación de velocidad de crecimiento.

6) El proceso anterior se repite para distintas longitudes de grieta obteniéndose un valor de la tensión de cierre equivalente función de a , $S_{cleq}(a)$.

7) Después de estimar la tensión de cierre equivalente $S_{cleq}(a)$, la vida de crecimiento de una grieta desde una longitud inicial a_0 hasta una longitud final a_f , de un elemento sometido a una carga irregular cuya f_{pd} de picos es conocida, se puede calcular como:

$$N = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{\int_{S_{cleq}(a)}^{\infty} F(S - S_{cleq}(a), a) p_{max}(S) dS - \int_{S_{cleq}(a)}^{\infty} F(S - S_{cleq}(a), a) p_{min}(S) dS} \quad (8)$$

donde $p_{max}(s)$ y $p_{min}(s)$ son la f_{dp} de picos y valles respectivamente, figura 5, las cuales se suponen que son simétricas con respecto al valor medio de carga.

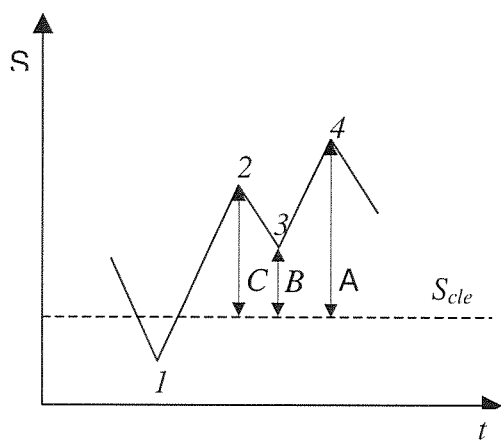


Figura 6. Representación esquemática de una secuencia de tensiones con un valle por encima de la tensión de cierre.

La segunda integral del denominador se incluye para corregir el efecto de los rangos de carga cuyo valor mínimo es superior a la tensión de cierre, figura 6. Esta aproximación es similar a la propuesta por Newman [29], para el proceso de simulación ciclo a ciclo. Newman propone que el incremento de la grieta producido por el rango de tensión entre S_3 y S_4 , Figura 6, será:

$$\Delta a|_1 = F(S_4 - S_{cleq}, a) - F(S_3 - S_{cleq}, a) \quad (9)$$

Esta ecuación fue propuesta para los casos en que $S_{min} > S_{cl}$, y que el valor máximo del ciclo actual fuera superior al valor más alto producido desde que la carga cruzó la

tensión de cierre S_{cl} . En el modelo se extiende esta propuesta a todos los casos en que $S_{min} > S_{cl}$.

La aproximación anterior supone aproximar $(A-B)^m$ como $(A^m - B^m)$. Para $m > 1$, siempre $A^m > (A^m - B^m) > (A-B)^m$. De esta forma, aún sin llegar a considerar exactamente los rangos efectivos reales $(A-B)^m$, estamos en una situación intermedia más próxima a los rangos efectivos producidos, que si solamente se tienen en cuenta los picos. El resultado de esta corrección sigue siendo conservativo, pero aproximándose más a la realidad del proceso. Este efecto del modelo, será tanto más acusado cuanto mayor sea el ancho de banda del espectro del proceso utilizado.

3. APLICACIÓN DEL MODELO. ENSAYOS

La comprobación de la bondad del modelo se realizó aplicándolo a varios tipos de cargas aleatorias, niveles de tensión y con dos aleaciones de Aluminio: 2024-T351 y 2219-T851. Los resultados fueron comparados con las vidas de crecimiento de grieta obtenidas mediante ensayos, y con las estimaciones obtenidas mediante simulación ciclo a ciclo. Dos tipos de probetas y material fueron utilizados, designándose para su identificación $G1$ y $G2$. A continuación se especifican las características de los ensayos con cada uno de los grupos.

3.1 Grupo $G1$.

El material utilizado con este grupo de ensayos fue la aleación de Aluminio 2024-T351. Todos los análisis, tanto en ensayos como con simulaciones ciclo a ciclo fueron realizados sobre probetas "Compact Tension" (CT) de 50 mm de ancho y 12 mm de espesor.

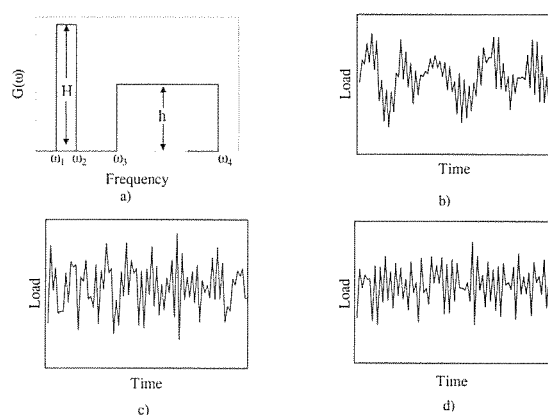


Figura 7. a) función de densidad espectral para las cargas nominales, b) historia de carga para el proceso tipo A, c) historia de carga para el proceso tipo B, d) historia de carga para el proceso tipo D.

Para analizar el comportamiento en el crecimiento de grieta de esta aleación, se han utilizado cinco procesos de carga aleatorios estacionarios gaussianos con diferentes anchos de banda. Los procesos de carga son definidos por su carga media y su densidad espectral de potencia (dep),

$G(\omega)$. La forma de la *dep* se muestra en la figura 7a, son procesos bimodales y unimodales, obteniéndose distintos anchos de banda para distintos valores de las frecuencias ω_a a ω_d , y de la relación H/h . Los cinco procesos diferentes se han designado A a E.

Para analizar el efecto del nivel de carga y la habilidad del modelo para estimar las vidas de crecimiento de grieta, se han utilizado entre tres y cuatro niveles de carga para cada uno de los procesos de ancho de banda distinto, caracterizados por el valor de la raíz media cuadrática del componente variable. En total 18 procesos aleatorios estacionarios gaussianos distintos fueron definidos. La carga media utilizada fue la misma en todos los casos e igual a 4830 N. Las desviaciones estándar para cada nivel, P1, P2, P3 y P4 fueron 1078, 637, 521 y 348 N, respectivamente. Todos los casos mostrados en la tabla 1, fueron simulados mediante un proceso ciclo a ciclo y comparados con las estimaciones del modelo. No obstante, solamente se realizaron ensayos con los registros del nivel P1 para los casos A, B, C y E, y para el nivel P2 los casos que se muestran en la tabla 1, (A, C y E), todos ellos fueron comparados con las predicciones del modelo propuesto.

En la tabla 1 se dan las características y los valores de los parámetros para cada tipo de espectro y nivel de carga. También se recogen los factores de irregularidad, ε , obtenido para proceso ensayado. Los parámetros $P1_{RMS}$, $P2_{RMS}$, $P3_{RMS}$, y $P4_{RMS}$, representan la raíz media cuadrática de los picos de carga para cada caso. El parámetro ε , representa la frecuencia de cruces de la media con pendiente positiva, a la frecuencia de picos. El valor de ε varía entre cero y uno, aumentando a medida que disminuye el ancho de banda.

Tabla 1. Parámetros de los espectros de carga para el grupo G1.

	A	B	C	D	E
ω_a	5.0	5.0	10.0	5.0	7.0
ω_b	15.0	25.0	20.0	40.0	27.0
ω_c	80.0	30.0	25.0	-	-
ω_d	130.0	60.0	75.0	-	-
H/h	6.67	2.0	2.0	-	-
ε	0.64	0.7	0.77	0.8	0.85
$P1_{RMS}$ (N)	5792.0	5870.0	5958.0	5988.0	6056.0
$P2_{RMS}$ (N)	5395.0	-	5500.0	-	5560.0
$P3_{RMS}$ (N)	5292.0	5331.0	5370.0	5390.0	5419.0
$P4_{RMS}$ (N)	5135.0	5165.0	5194.0	5204.0	5223.0

En la figura 7b, 7c y 7d, se muestran algunos registros típicos de los procesos A, C y E, en la figura se puede ver los distintos perfiles que muestra cada proceso.

La *fdp* de los picos de carga para procesos aleatorios estacionarios gaussianos, se puede obtener directamente *dep* usando la siguiente expresión [30]:

$$p(S) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \sqrt{1-\varepsilon^2} \exp\left[-\left(\frac{S^2/2\sigma^2}{1-\varepsilon^2}\right)\right] + \frac{S \varepsilon}{2\sigma^2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{S \varepsilon}{\sigma \sqrt{2(1-\varepsilon^2)}}\right)\right] \exp\left(\frac{-S^2}{2\sigma^2}\right) \quad (11)$$

donde S es la tensión aplicada, σ la desviación típica del proceso, $\operatorname{erf}()$ la función de error de Gauss y ε el parámetro definido anteriormente.

La función $f(R, S_{max}, \sigma_y)$, definida en la ecuación (3), para determinar la tensión de cierre en la aleación de Aluminio 2024-T351, fue una propuesta por Schijve [26] para este mismo material, la expresión utilizada ha sido:

$$U = \frac{\Delta K_{eff}}{\Delta K} = 0.55 + 0.35R + 0.1R^2 \quad (12)$$

3.2 Grupo G2

Las historias de carga, los datos y los resultados de los ensayos para el grupo G2 fueron tomadas de la literatura. La probeta usada en los ensayos con este grupo fue la probeta grieta central (CCT), de 6.35 mm de espesor. [31]. El material utilizado fue la aleación de Aluminio 2219-T851. Se utilizaron 4 procesos de carga distintos con dos o tres niveles de carga para cada uno, obteniéndose en total 11 registros de carga, siendo designadas por M81 a M92. En la tabla 2 se recogen algunos parámetros característicos de las historias como: factor de irregularidad, ε , valor medio de los picos de tensión S_{min} , raíz media cuadrática de los picos $(S_{max})_{RMS}$, y su desviación estándar $\sigma_{S_{max}}$.

Tabla 2. Parámetros característicos de las historias de carga del grupo G2.

Historia de carga	ε	$\sigma_{S_{max}}$ (MPa)	S_{mean} (MPa)	$(S_{max})_{RMS}$ (MPa)
M-81	0.812	28.85	45.74	71.2
M-82	0.812	43.27	68.60	106.8
M-83	0.812	57.70	91.41	142.4
M-84	0.859	26.47	32.04	56.7
M-85	0.859	39.70	48.05	85.0
M-86	0.859	52.93	64.07	113.5
M-88	0.963	26.58	43.22	66.8
M-89	0.963	35.44	57.63	89.0
M-90	0.77	28.71	40.24	65.5
M-91	0.77	43.07	60.37	98.5
M-92	0.77	57.43	80.50	131.3

La ecuación usada para obtener la tensión de cierre producida por las sobrecargas para la aleación de Aluminio 2219-T851, se tomo de los resultados experimentales obtenidos por Bell [32].

3.3 Ensayos

Para el grupo *G1* se realizaron ensayos para cuatro anchos de banda distintos ($\epsilon = 0.64, 0.7, 0.77$ y 0.85) y dos niveles de carga (*P1* y *P2*), excepto para el ancho de banda $\epsilon = 0.7$, que solamente se realizaron ensayos para el nivel de carga más alto *P1*. Para cada proceso definido por el ancho de banda se generaron 20 registros de carga. Cada uno de estas historias de carga estaba formado por 25000 ciclos. Cada historia de carga fue generada numéricamente [33] a partir de la *dep*, y cada registro es representativo del mismo proceso de carga. Los ensayos se realizaron en una máquina servohidráulica de lazo cerrado, aplicando el registro repetidamente hasta que la grieta alcanzará una longitud definida en el ensayo [16], el crecimiento de la grieta fue seguido mediante un equipo de caída de potencial de corriente alterna (ACPD). La vida de crecimiento se tomó como el número de ciclos necesarios para hacer crecer una grieta desde una longitud inicial $a_0=15$ mm hasta una longitud final $a_f = 25$ mm.

Para el grupo *G2* los resultados experimentales fueron tomados de la literatura.

3.4 Simulaciones

A efectos de determinación de la bondad del modelo, se han comparado sus estimaciones con las obtenidas mediante simulación ciclo a ciclo. El modelo elegido para esta comparación ha sido el modelo de Newman [21], implementado en el paquete de software FASTRAN II [34].

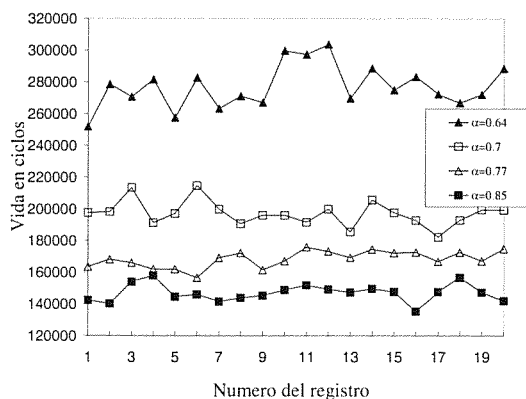


Figura 8. Evolución de los resultados de ensayos para el grupo *G1* y nivel de carga *P1*.

Para el grupo *G1* se simularon los 18 casos que se recogen en la tabla 1, cinco anchos de banda diferentes y cuatro niveles de carga. Para los casos que fueron ensayados la simulación se realizó con los mismos registros utilizados en los ensayos. El modelo propuesto, determina la vida de crecimiento a partir de los parámetros estadísticos de la historia de cargas, obteniéndose un valor de vida considerado como vida medio del proceso de cargas. Tanto

de la simulación ciclo a ciclo como los ensayos se obtiene una vida para cada registro de cargas, pudiendo estimarse además, la dispersión debida al propio registro de cargas (simulación ciclo a ciclo) o al registro y al material (ensayos). Las comparaciones realizadas para estudiar el comportamiento del modelo, han de realizarse con los valores medios de simulaciones y ensayos.

Como ecuación de crecimiento se ha utilizado la propuesta por Newman [21]. El ajuste de los parámetros de la ecuación de crecimiento, a utilizar tanto en FASTRAN II, como en el modelo, se realizó con datos de ensayos de amplitud constante obtenidos previamente por los autores [35,36]. El factor de constricción utilizado en el modelo de simulación ciclo a ciclo de Newman, para tener en cuenta el estado de tensiones (tensión o deformación plana), fue $\alpha = 1.5$, este valor se tomó por ser el que mejor ajustaba los datos de crecimiento de amplitud constante [36].

Para el caso *G2*, los resultados obtenidos por Newman en la simulación ciclo a ciclo se utilizaron a efectos de comparación tanto con los ensayos como con los estimados por el modelo. Los parámetros de la ecuación de crecimiento usados en el modelo estadístico, en este caso se tomaron de la literatura [21], el factor de constricción en este caso fue propuesto por Newman e igual a $\alpha = 1.6$.

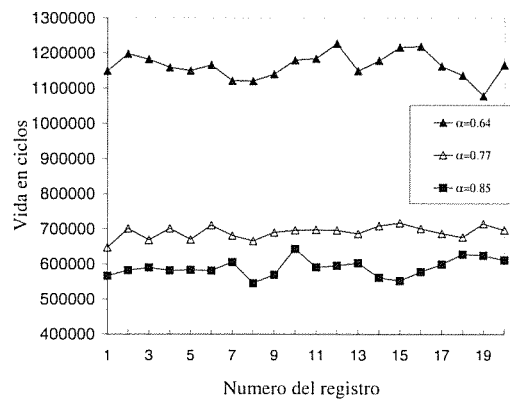


Figura 9. Evolución de los resultados de ensayos para el grupo *G1* y nivel de carga *P2*.

4. RESULTADOS

En las figuras 8 y 9 se recogen los resultados de los ensayos realizados (*G1*) para los distintos anchos de banda y niveles de tensión. En las figuras se puede ver la evolución de los resultados para los distintos registros de un mismo proceso, donde se puede observar la dispersión de los vidas de crecimiento. Como también se ve en las figuras, la vida media para cada nivel de tensión está muy influenciado por el ancho de banda.

En la figura 10 se muestra la comparación de los resultados de los ensayos realizados N_E con las

estimaciones del modelo propuesto N_S , para el grupo de ensayos *G1*, con los niveles de carga *P1* y *P2*. El valor tomado para comparación en los ensayos, es la media de la vidas de los 20 ensayos realizados para cada ancho de banda y nivel de carga. El modelo solamente estima una duración para cada ancho de banda y nivel de carga, dado que utiliza valores estadísticos. Las relaciones N_S/N_E , excepto para los casos de banda más ancha cuyos valores son, 0.63 y 0.66, todas los demás están entre 0.8 y 0.9.

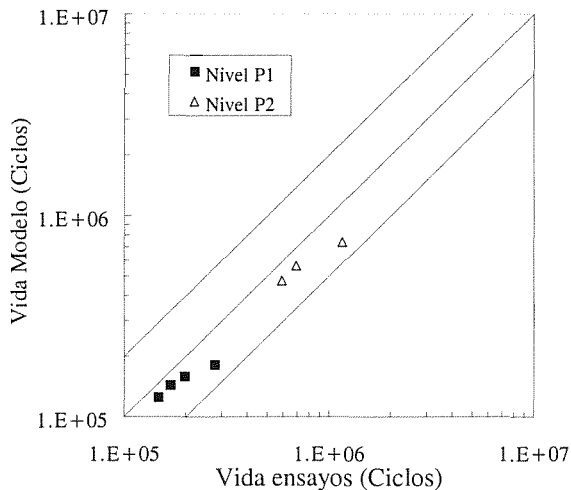


Figura 10. Comparación de los resultados de los ensayos para el grupo *G1* y las estimaciones del modelo propuesto.

En La figura 11, se muestran las comparaciones del modelo con las simulaciones ciclo a ciclo del modelo de Newman N_N , para el mismo grupo de ensayos *G1*. Los valores de la simulación utilizados son valores medios, obtenidos de la misma que se ha comentado anteriormente para los ensayos. Las relaciones N_S/N_N , en este caso están entre 1.1 y 1.7. Como se ve el modelo estima más vida que el modelo de Newman, para el factor de constricción utilizado ajustando con datos de amplitud constante.

En la figura 12, se comparan los resultados experimentales, N_E , con los obtenidos por Newman [21] usando el modelo de simulación ciclo a ciclo, N_N , y los obtenidos con el modelo estadístico, N_S , para las once historias de carga definidas para el grupo *G2*. Las relaciones N_S/N_E , excepto en dos casos específicos esta entre 0.7 y 1.4.

5. DISCUSIÓN

5.1 grupo *G1*

Como se ha dicho anteriormente el modelo estadístico no permite estimar la variabilidad de los resultados, por tanto las comparaciones se realizarán con valores medios de ensayos o de simulaciones ciclo a ciclo. Como se puede ver de la figura 10 los resultados del modelo estiman en general muy bien la vida media de los ensayos

independientemente del nivel de carga. Las predicciones del modelo son siempre conservativas, no observándose influencia significativa del nivel de tensiones. Las relaciones N_S/N_E son similares para los mismos anchos de banda, estando esta relación entre 0.8 y 0.9 para todos los procesos excepto para la banda más ancha, en este caso N_S/N_E disminuye a 0.63 y 0.66. Se puede decir que el modelo estima bastante bien la vida de crecimiento para procesos aleatorios estacionarios de gauss, tanto para los casos donde el efecto de secuencia es grande [16], nivel de carga alto, como para niveles de carga donde los efectos de secuencia son menores, nivel *P2*.

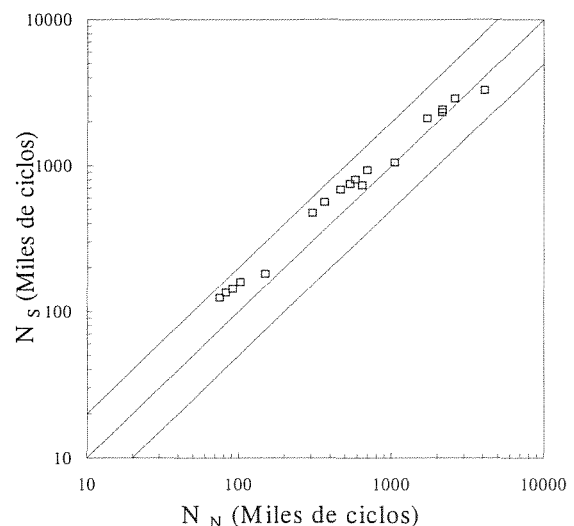


Figura 11. Comparación de las estimaciones del modelo con las obtenidas mediante simulación ciclo a ciclo.

Solamente para procesos de banda muy ancha (proceso *A* tabla 1), la estimación de la tensión de cierre equivalente es algo inferior a la real. En estos casos, la aproximación supuesta de una variación lineal de la tensión de cierre mientras duran los efectos de una sobrecarga produzca más error que cuando la banda es más estrecha. Para procesos con anchos de banda grandes, son muchos los ciclos de muy pequeña amplitud que apenas influyen en el crecimiento (figura 7b), por lo que la variación de la tensión de cierre con el número de ciclos será más suave que la que se ha supuesto de forma lineal. Por otra parte, la tensión media cuadrática de los picos tomada como el valor de S_x , subestima el valor de la tensión que cancela el efecto de las sobrecargas, es probable que esta tensión sea superior al valor previsto, pues únicamente los ciclos altos son los que contribuyen al crecimiento. Por otra parte, la determinación de r_x y S_{clx} se obtienen a partir de un valor de R suponiendo que el ciclo S_x es simétrico con respecto a la media del proceso. Esta estimación supone un error tanto mayor cuanto mayor es el ancho de banda. No obstante, las estimaciones del modelo para anchos de banda más estrechos ($\varepsilon < 0.7$), son bastante buenas.

Las simulaciones ciclo a ciclo mediante el modelo de Newman, permiten obtener un valor de vida para cada registro de carga, a partir de estos datos es posible determinar la dispersión de la vida suministrada por el modelo de simulación. Este modelo, además, necesita definir el factor de constricción que representa el estado de tensiones a que está sometida la probeta, la definición de este factor (α) influye fuertemente en las predicciones de la vida obtenidas por el modelo.

El uso de distintos factores de constricción (α) en el modelo de Newman, permite obtener en algunos casos vidas medias muy similares a las obtenidas en los ensayos. No obstante, en estos casos la dispersión fue muy superior a la mostrada por los resultados experimentales. Basado en un estudio de los autores realizado sobre el modelo, para determinar la facilidad del mismo para estimar las vidas de crecimiento de grieta con los mismos procesos utilizados en este estudio [36], se optó por tomar como factor de constricción $\alpha = 1.5$, debido a que con este valor se obtiene una dispersión similar a la obtenida en los ensayos. También con este valor del factor de constricción es con el que se consigue mejor ajuste con ensayos de amplitud constante.

El modelo de Newman predice siempre la tendencia de los ensayos individuales, además, es generalmente aceptado que este modelo proporciona estimaciones suficientemente aceptables de la vida de fatiga, sirviéndonos para determinar la eficacia del modelo estadístico para otros niveles de carga. Como se observa en la figura 11, el modelo propuesto estima en general más vida que el modelo de simulación, estando siempre las relaciones N_S/N_N entre 1.0 y 1.67, excepto para un caso que es 0.81. Las estimaciones del modelo están muy próximas a las obtenidas por simulación, siendo en general no conservadoras, hay que tener en cuenta sin embargo, que tanto uno como otro modelo son conservadores comparados con los datos experimentales, lo que hace que el modelo estime vidas medias ligeramente mejores que la simulación.

A medida que el nivel de carga va siendo más pequeño, las estimaciones del modelo se van haciendo más conservadoras con respecto a la simulación, en estos casos, el efecto de los ciclos próximos al umbral comienzan a tener un papel más prominente. Estos ciclos sin embargo, son tratados de distinta forma por cada modelo. La simulación ciclo a ciclo considera la variación del umbral con cada ciclo de carga en función de R , el modelo estadístico, por el contrario, supone un valor medio a lo largo de todo el crecimiento, pequeñas variaciones en este valor medio pueden producir diferencias cuando los niveles de tensión son pequeños, y un gran número de ciclos están próximos a este valor.

El efecto de la variación de la tensión de cierre con el nivel de tensión, parece que sea más significativa. El modelo de Newman considera el efecto de la relación

tensión máxima/límite elástico sobre la relación *tensión de cierre/tensión máxima*, asumiendo que esta relación se incrementa cuando disminuye la relación *tensión máxima/límite elástico*. Este efecto sin embargo no está incluido en el modelo al determinar la tensión de cierre mediante la expresión dada en la ecuación (12). Según esto, cuando el nivel de carga va siendo más pequeño la relación S_{clN}/S_{clS} se incrementa y como consecuencia la relación N_S/N_N disminuye.

Los procesos y registros utilizados, se supone que las sobrecargas están distribuidas igualmente en el tiempo, la estimación de las vidas de crecimiento se obtienen a partir de la función de densidad de probabilidad de los picos de carga. Con la misma *fdp* de picos y valles, el modelo predice las mismas vidas independientemente de la secuencia producida, el modelo considera los efectos de las sobrecargas pero siempre supone que éstas están distribuidas de forma regular. Sin embargo en algunos procesos las sobrecargas están distribuidas de forma altamente irregular. Por otra parte, la simulación ciclo a ciclo es capaz de estimar las diferencias de vida debido a la secuencia. La influencia por tanto de este factor sobre el error cometido por el modelo estadístico, es estudiado comparando las vidas obtenidas aplicando la simulación ciclo a ciclo a historias de carga con las mismas *fdp* pero agrupados los picos con distinta secuencia.

Para estimar el error del modelo estadístico con historias de carga aleatoria cuyas sobrecargas estén repartidas de forma altamente irregular, se modificaron todos los registros utilizados previamente variando la secuencia de los picos más altos de cada registro. Se tomaron los cinco picos más altos y se aplicaron consecutivamente, con esta modificación la *fdp* de los picos sigue siendo la misma por lo que el modelo predice la misma vida, sin embargo los ensayo o la simulación ciclo a ciclo con estos registros, obtiene distintos resultados para cada secuencia. Se estimó con estas historias de carga modificadas la vida de crecimiento mediante simulación ciclo a ciclo, para los niveles de carga $P1$, $P3$ y $P4$, las diferencias de vida media encontradas con respecto a los valores originales fueron menores del 8% para cualquier *fdp*. Para los niveles de carga más pequeños, las diferencias de vida estimada fueron muy pequeñas. Esta pequeña diferencia permite afirmar, que el modelo estadístico proporciona estimaciones de vida razonablemente aceptables para este tipo de procesos aleatorios, incluso cuando las sobrecargas están distribuidas de forma altamente irregular. Sin embargo, esta conclusión no se puede extender a cualquier proceso aleatorio o material sin un análisis previo.

Para estimar la influencia de las sobrecargas sobre la vida, se eliminaron de cada historia de carga los cinco picos más altos. Simulados nuevamente ciclo a ciclo estos registros se encontraron diferencias de vida media de alrededor del 30%. Esta reducción de la vida al eliminar las cinco sobrecargas de mayor magnitud, sugiere que, para este tipo de procesos aleatorios estacionarios en los que las

sobrecargas son inherentes al proceso, el efecto de las sobrecargas es significativo pero no excesivamente marcado.

5.2 Grupo G2

En la figura 12 se recogen los resultados del grupo G2. Como se puede ver en esta figura las estimaciones obtenidas con el modelo estadístico N_S , están muy próximas a los resultados experimentales [21], N_E , excepto en dos casos que se comentarán posteriormente. La comparación con las estimaciones de la simulación, son similares a las obtenidas con el grupo G1. La relación N_S/N_N está entre 0.9 y 1.4 en todos los casos, excepto en los dos mismos comentados anteriormente, donde la relación de vidas está próximo a 0.25.

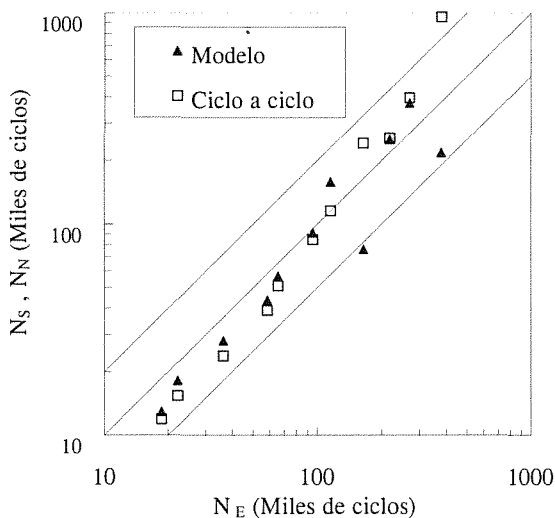


Figura 12. Comparación de las estimaciones del modelo (N_S), con la simulación ciclo a ciclo (N_N), y con los resultados de los ensayos (N_E).

Los dos casos en los que las diferencias entre N_S y N_E fueron mayores que el resto, son las correspondientes al mismo proceso de carga (ensayos M88 y M89), obtenidas al multiplicar la misma secuencia de cargas por un coeficiente diferente. Esta historia de cargas contenía solamente 300 ciclos que fueron repetidos hasta el fallo. Esta registro tan corto, produce un efecto de secuencia artificial cada 300 ciclos que no puede estar incluido en el modelo estadístico, dado que este considera procesos estacionarios con historias de carga muy largas. Teniendo en cuenta la distribución de picos en esta historia de cargas, el modelo estima un número de ciclos entre cargas $N_{pi}=N_q$ ecuaciones (2) y (6), de 8000 ciclos para el M88 y 4500 ciclos para el M89. Según lo anterior, el modelo, basado en la distribución estadística, supone la ocurrencia de una sobrecarga cada 8000 o 4500 ciclos, mientras que en los ensayos o en las simulaciones ciclo a ciclo el

número de ciclos entre sobrecargas es de 300 ciclos, lo que producirá un efecto de retardo más marcado que si se utilizara una historia de carga más larga del mismo proceso aleatorio.

6. CONCLUSIONES

1. A la vista de los resultados se puede concluir, que el modelo propuesto permite estimar la vida de crecimiento de grieta basado en parámetros estadísticos del proceso de carga aleatorio y en las características del material.
2. El modelo proporciona estimaciones de vida muy próximas a la vida media esperada en los ensayos, al menos para los procesos y materiales estudiados. Sin embargo, no permite estimar la dispersión de la vida como resultado de ensayar distintos registros representativos de un mismo proceso aleatorio.
3. Para el material y proceso aleatorio estacionario estudiados en el grupo G1, donde las sobrecargas son inherentes al proceso de carga, el reagrupar las sobrecargas para obtener una distribución de forma irregular, las diferencias de estimación de vida entre el modelo y la simulación ciclo a ciclo son despreciables.
4. Debe de realizarse un análisis cuidadoso del efecto de seleccionar S_x para cualquier tipo de carga y material.
5. Las conclusiones anteriores no deben de extender para cualquier tipo de carga y material, sin un análisis previo.

7. REFERENCIAS

- [1] B. Budiansky, J.W. Hutchinson Journal of Applied Mechanics. Vol 45, 1978, pp. 267-276
- [2] R.I. Stephens D.K. Chen, B.W. Hom., "Fatigue Crack Growth with Negative Stress Ratio Following Single Overloads in 2024-T3 and 76075-T6 Aluminum Alloys." Fatigue Crack Growth Under Spectrum Loads. ASTM STP 595, 1976, pp. 27-40
- [3] T.H. Topper, M.T. Yu, Int. J. Of Fatigue, Vol 7, 1985, pp. 159-164
- [4] R. Marissen, K.H. Trautman, H. Novack, Engng. Fracture Mech. Vol 19, 1984, 863-879.
- [5] J.C. Millan, R.M.N. Pelloux, Fatigue Crack Propagation, ASTM STP 415, 1967, pp. 505-535.
- [6] O.E. Wheeler, "Spectrum Loading and Crack Growth".

ANALES DE MECANICA DE LA FRACTURA VOL. 16 (1999)

- Journal of Basic Engineering, Vol 94, 1972, pp. 181-186.
- [7] J.D. Willemborg R.M. Engle, H. A. Wood, "A Crack Growth Retardation Model Using an Effective Stress Intensity Concept." AFFDL-TM-FBR. 71-1, 1971.
- [8] W. Elber, "The Significance of Fatigue Crack Closure", Damage Tolerance in Aircraft Structures, ASTM STP 486, 1971, pp.230-242.
- [9] W. Schütz, Fatigue Disegn, (Ed. J.Solin, G. Marquis, A. Siljander, S. Spila), ESIS 16, Mech. Eng. Publ., 1993, pp. 1-17.
- [10] J.M. Potter, R.T. Watanabe, (Eds), Development of Fatigue Loading Spectrum, ASTM STP 1006, 1989.
- [11] D. Broek, The Practical Use of Fracture Mechanics. Kluwer Academic Publishers. 1989.
- [12] W. Schütz, P.Heuler, Fatigue 87 (ED. R.O. Ritchie, E.A. Starke) EMAS, 1987, pp. 479-494.
- [13] J. Dominguez, "Fatigue Crack Growth Under Variable Amplitude Loading.". Handbook of Fatigue Crack Propagation in Metallic Structures, 1994, 955-997.
- [14] J. Dominguez, J. Zapatero, L. Bohorquez. "Effect of the Length of the Random Load on History on the Fatigue Life Statistics." Fracture Behaviour and Design of Materials and Structures. (Eds),EMAS, 1991,pp.1427-1434
- [15] J. Dominguez, J. Zapatero. "Effect of the Loading Spectrum and History Length on Fatigue Life Distribution under Random Loading ". Engineering Fracture Mechanics, Vol. 42, n 6. 1992. pp. 925-933.
- [16] Dominguez, J., Zapatero, J. and Pascual, J., "Effect of load histories on scatter of fatigue crack growth in aluminun alloy 2024-T351." Engng Fracture Mech., 1997, 56, 65-76.
- [17] Hudson, C. M., "A root-mean-square approach for predicting fatigue crack growth under random loading." Methods and models for predicting fatigue crack growth under random loading, ASTM STP 748, Eds., J. B. Chang and C. M. Hudson. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1981, pp. 41-52.
- [18] Zapatero, J. and Domínguez, J., "A statistical approach to fatigue life predictions under random loading." Int. J. Fatigue, 1990, 12, 107-114.
- [19] Veers, P. S., Winterstein S. R., Nelson D. V. and Cornell C. A., "Variable-amplitude load models for fatigue damage and crack growth." Development of fatigue loading spectra, ASTM STP 1006, Eds., J. M. Potter and R. T. Watanabe. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1989, pp. 172-197.
- [20] Johnson, W.S., "Multi-parameter yield zone model for predicting spectrum crack growth." Methods and models for predicting fatigue crack growth under random loading, ASTM STP 748, Eds., J. B. Chang and C. M. Hudson. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1981, pp. 85-102.
- [21] Newman, J. C. Jr., "A crack closure model for predicting fatigue crack growth under random loading." Methods and models for predicting fatigue crack growth under random loading, ASTM STP 748, Eds., J. B. Chang and C. M. Hudson. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1981, pp. 53-84.
- [22] Wang, G. S. and Blom, A. F., "A strip model for fatigue crack growth predictions under general load conditions." Engng Fracture Mech., 1991, 40, 507-533.
- [23] Ditlevsen, D. and Sobczyk, K., "Random fatigue crack growth with retardation." Engng Fracture Mech., 1986, 24, 861-878.
- [24] Arone, R., "Fatigue crack growth under random overloads superimposed on constant-amplitude cyclic loading." Engng Fracture Mech., 1986, 24, 223-232.
- [25] Veers, P. S. and Van Den Avyle, J. A., "Fatigue crack growth from narrow-band gaussian spectrum loading in 6063 Aluminum alloy." Advances in Fatigue Lifetime Predictive Techniques, ASTM STP 1122, Eds. M. R. Mitchell and R. W. Landgraf. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1992, 191-213.
- [26] Schijve, J., "Some formulas for crack opening stress level." Engng Fracture Mech., 1981, 14, 461-465.
- [27] Fleck, N., "Influence of Stress State on Crack Growth Retardation." Basic Questions in Fatigue: Volume I, ASTM STP 924, Eds. J. T. Fong and R. J. Fields. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1988, 157-183.
- [28] Shuter, D. M. and Geary, W., "Some Aspects of Fatigue Crack Growth Retardation Behaviour Following Tensile Overloads in a Structural Steel." Fatigue Fract. Engng Mater. Struct., 1996, 19, 185-199.
- [29] Newman, J. C. Jr. , "Prediction of Fatigue Crack Growth under Variable-Amplitude and Spectrum Loading Using a Closure Model." Design of Fatigue and Fracture Resistant Structures, ASTM STP 761, Eds. P. R. Abelkis and C. M. Hudson. American Society for Testing and Materials, 1982, pp. 255-277.
- [30] Bendat, J.S., "Probability functions for random responses: Predictions of peaks fatigue damage, and catastrophic failures." NASA, Contract report 33,1964.

[31] Chang, J. B., "Round-robin crack growth predictions on center-cracked tension specimens under random spectrum loading." *Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth under Random Loading*, ASTM STP 748, Eds., J. B. Chang and C. M. Hudson. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1981, pp. 3-40.

[32] Bell, P. D. and Creager, M., "Crack growth analysis for arbitrary spectrum loading." AFFDL-TR, 1974, 74-129.

[33] Shinozuka, M., "Applications of digital simulation of gaussian random processes." *Random Excitation of Structures by Earthquakes and Atmospheric Turbulence*, Ed., H. Parkus. Springer-Verlag, Berlin, 1977, pp. 201-237.

[34] Newman, J. C. Jr, "FASTRAN II-A fatigue crack growth structural analysis program." NASA Tech. Memorandum 104159, NASA Langley Research Center, Hampton, VA, 1992.

[35] Lapetra, C., Mayo, J. and Dominguez, J., "The randomness of fatigue crack growth under constant-amplitud loads." *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, 1996, 17, 589-600.

[36] Zapatero, J., Moreno, B. and Dominguez, J., "On the use of the strip-yield model to predict fatigue crack growth under irregular loading." *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, 1997, 20, 759-770.