

## PREDICCIÓN DE VIDA EN COMPONENTES CON GRADIENTE DE TENSIONES: ENTALLAS Y FATIGA POR FRETTING

C. Navarro, J. Vázquez, J. Domínguez

Departamento de Ingeniería Mecánica y de los Materiales (Universidad de Sevilla),  
Avda. De Los Descubrimientos, s/n,  
41092 Sevilla. España  
E-mail: [cnp@us.es](mailto:cnp@us.es)

### RESUMEN

La fatiga en componentes con entalla y la fatiga por fretting son dos fenómenos diferentes pero tienen en común la existencia de un gradiente de tensiones. En estos casos la predicción de la vida a fatiga se suele realizar mediante modelos que consideran el proceso como superposición de una fase de iniciación de la grieta y otra de propagación. El problema que se plantea es definir la longitud que tiene la grieta en el instante en que termina una fase y comienza otra. El modelo empleado en este artículo combina las dos fases, sin definir a priori la separación entre ambas. En la fase de propagación se utiliza una ley de Paris modificada con un umbral de crecimiento que depende de la longitud de grieta. En la fase de iniciación se utiliza una curva  $S-N$  modificada donde se le ha restado el número de ciclos de propagación. El modelo propuesto se aplica a un conjunto de ensayos tanto de fretting con contacto esférico y cilíndrico como de probetas entalladas para comprobar la validez del modelo a la hora de predecir la vida a fatiga en distintas condiciones.

### ABSTRACT

Fatigue in notched specimens and fretting fatigue are two different phenomena but they have in common the existence of a stress gradient. In these cases life prediction is usually done with models that consider the process as a superposition of an initiation and propagation phase. The problem is to define the crack length where one phase finishes and the other begins. The model employed in this paper combines both phases without defining a priori the separation between them. In the propagation phase a crack length dependent growth threshold is introduced in the Paris law. On the other hand, the  $S-N$  curve used in the initiation phase is modified by subtracting the propagation cycles. The proposed model is applied to a group of fretting fatigue tests in spherical and cylindrical contact as well as in tests with notched specimens to check the validity of the model in predicting life in different conditions.

**PALABRAS CLAVE:** Estimación de vida, Entallas, Fretting.

### 1. INTRODUCCIÓN

La fatiga en componentes con entalla y la fatiga por fretting son dos fenómenos muy comunes en la práctica. No hay pieza que no tenga una variación en su geometría, es decir, una entalla. Por otro lado, la fatiga por fretting se puede dar prácticamente en cualquier máquina o estructura, aunque no siempre es el causante de las fracturas que se producen [1]. Este fenómeno puede aparecer cuando dos elementos entran en contacto y se produce una fricción entre ellos debido a las fuerzas variables aplicadas. Su efecto es crear una concentración de tensiones en la zona de contacto que provoca una iniciación temprana de las grietas. En la fatiga por fretting existe además la complicación de tener un estado multiaxial de tensiones más complejo y con una variación no proporcional de las mismas. Sin embargo, los dos fenómenos tienen en común la existencia de un gradiente de tensiones. Este hecho hace plausible la utilización de un mismo modelo de predicción de vida en ambas situaciones.

En el proceso de fatiga se suelen distinguir dos fases: iniciación de la grieta y propagación de la misma. La principal dificultad de combinar ambas fases es decidir dónde termina una y empieza la otra, es decir, qué longitud  $a_i$  se considera que tiene la grieta al iniciar la fase de propagación. En los modelos que combinan ambas fases, esta separación, longitud de iniciación,  $a_i$ , se suele definir a priori en función de cuál sea el tamaño de grieta más pequeño detectable, de cómo esté definida la curva  $S-N$ , escogiendo la longitud de iniciación que mejor ajuste los resultados experimentales, etc. Además, hay diversas formas de modelar la fase de iniciación en cuanto a dónde y cómo evaluar las tensiones.

La importancia de una fase frente a otra depende de muchos factores. En algunas situaciones, por ejemplo, en probetas lisas o en componentes entallados con baja concentración de tensiones, en fatiga a alto número de ciclos se puede despreciar la propagación frente a la iniciación. Sin embargo, una consecuencia de tener un alto gradiente de tensiones es que la fase de iniciación

se produce con mayor rapidez. En algunos casos, si la entalla genera una alta concentración de tensiones y el nivel de tensiones es suficientemente alto, se pueden obtener resultados aceptables incluso despreciando la duración de la fase de iniciación. Por esta razón, en fatiga en entallas y fatiga por fretting es conveniente utilizar un modelo que sea capaz de combinar las fases de iniciación y propagación.

Existen muchos modelos de predicción de vida donde combinan ambas fases [2-5]. En este artículo se propone un modelo para la estimación de vida que tiene la particularidad de que combina las fases de iniciación y propagación sin definir a priori cuándo termina una y empieza la otra. La separación entre una y otra se obtiene de la aplicación del modelo. Este modelo es una mejora sobre otros propuestos anteriormente por los autores y que sólo se aplicó a la fatiga por fretting [6-8].

A continuación se presentarán los datos de los ensayos que se emplearán para la contrastación del modelo. Los casos considerados han sido fretting con contacto esférico y cilíndrico y probetas con entalla circular. Posteriormente se hará una descripción del modelo de predicción propuesto y se presentarán los resultados obtenidos. Finalmente, se comprobará la bondad del modelo a la hora de predecir la vida a fatiga en distintas condiciones.

**2. ENSAYOS**

El esquema de los ensayos de fretting modelados se muestra en la figura 1. Inicialmente, sobre los elementos de contacto, se aplica una fuerza normal, constante,  $N$ . Posteriormente se aplica sobre la probeta la fuerza axial variable,  $P$ , que provoca una tensión axial nominal,  $\sigma$ . La rigidez,  $K$ , del soporte de los elementos de contacto hace que aparezca como resultado una fuerza tangencial,  $Q$ , también variable.

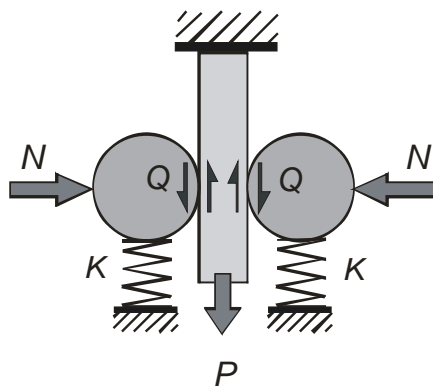


Figura 1. Esquema del montaje de un ensayo de fretting.

Los ensayos de fatiga por fretting con contacto esférico analizados fueron realizados por los autores sobre la aleación de aluminio 7075 T651 donde el contacto se producía entre una esfera de radio  $R = 100$  mm y una superficie plana. Los datos de fuerzas aplicadas y

número de ciclos de rotura pueden ser consultados en [8]. Las propiedades de los materiales empleados en todos los ensayos se muestran la tabla 1. Los ensayos de fretting con contacto cilíndrico fueron realizados sobre el aluminio 2024 T351 donde además de diversas combinaciones de fuerzas también se empleaban distintos radios de cilindro [2]. Los ensayos sobre entallas fueron realizados por los autores sobre una aleación de aluminio 2024 T3. La geometría del espécimen era una placa de 4 mm de espesor y 50 mm de ancho con un agujero en el centro de 4 mm de diámetro, figura 2. Los ensayos se realizaron con un coeficiente de asimetría de las cargas de  $R = 0$ . Los valores de las fuerzas máximas aplicadas, tensión nominal basada en la sección neta, tal como se muestra en la figura 2, y el número de ciclos hasta el fallo se muestran en la tabla 2. Las propiedades de fatiga de este material se han obtenido de [9] y las de crecimiento de grieta de [10].

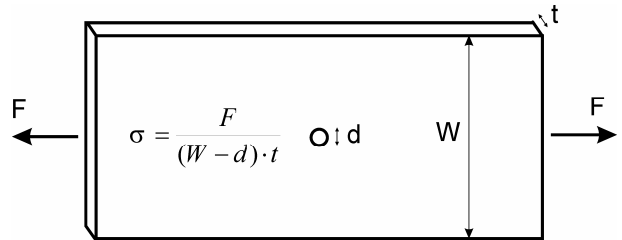


Figura 2. Esquema de la probeta entallada..

Tabla 1. Propiedades de los materiales empleados en los ensayos.

	7075 T651	2024 T351	2024 T3
$E$ (GPa)	71	74.1	71
$\nu$	0.33	0.33	0.33
$\sigma_u$ (MPa)	572	470	505
$\sigma_y$ (MPa)	503	310	375
$C$	$8.83 \cdot 10^{-11}$	$6.53 \cdot 10^{-11}$	$2.22 \cdot 10^{-11}$
$n$	3.322	3.387	3.545
$\Delta K_{th}$ (MPa m <sup>0.5</sup> )	2.1	2.1	2.5
$\Delta \sigma_{FL}$ (MPa)	169	230	207
$\sigma'_f$ (MPa)	1610	714	835
$b$	-0.1553	-0.078	-0.096
$\mu$	1.27	0.65	-
Tamaño grano $2l_0$ ( $\mu$ m)	50	50	50
$R$ (mm)	100	127 - 229	-
Geometría	fretting esférico	fretting cilíndrico	entalla

Una diferencia importante en estos tres tipos de ensayos es el nivel de tensiones que aparece en el punto de máxima tensión en cada uno de ellos y el gradiente. La figura 3 muestra la amplitud de la tensión normal perpendicular al camino que sigue la grieta en dos ensayos para cada uno de los tres tipos distintos que se están analizando. En cada geometría se han escogido los

que producen la tensión más alta y más baja en la superficie, como muestra representativa de los ensayos analizados. Se puede observar que con las geometrías empleadas en la fatiga por fretting se producen las tensiones y los gradientes más altos, especialmente en contacto esférico. La importancia de la fase de iniciación depende del modelo que se utilice, pero si se usa el mismo, esto implicará que la iniciación en fretting sea mucho más rápida que en la probeta entallada.

Tabla 2. Fuerzas, tensiones y número de ciclos hasta el fallo en los ensayos con probetas entalladas.

Ensayo	Fuerza max. (N)	Tensión (MPa)	Ciclos
1	22080	120	5 10 <sup>6</sup> *
2	25760	140	541410
3	25760	140	2.98 10 <sup>6</sup>
4	25760	140	5 10 <sup>6</sup> *
5	31280	170	99341
6	31280	170	111070
7	34960	190	64366
8	34960	190	85604
9	38640	210	38950
10	38640	210	38276

\* Ensayo interrumpido

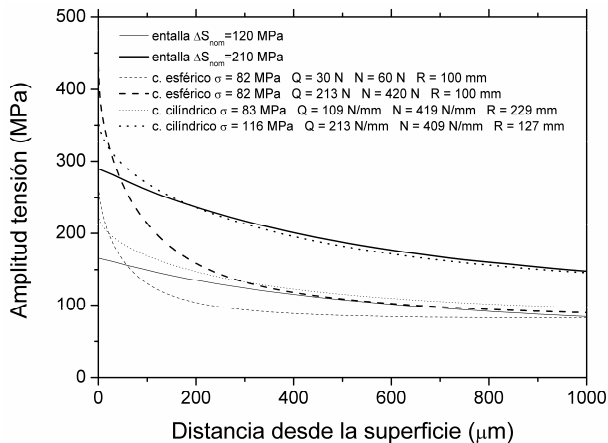


Figura 3. Amplitud de las tensiones en función de la distancia a la superficie.

### 3. MODELO

El modelo utilizado para la predicción de vida está basado en otro propuesto por los autores [6] y tiene la característica de que combina las fases de iniciación y de propagación. Cada fase se analiza por separado de forma que al final se obtienen dos curvas. Una proporciona el número de ciclos que tarda en propagarse una grieta desde cada longitud  $a$  hasta la rotura utilizando la mecánica de la fractura ( $a - N_p$ ). Para ello se integra la ley de crecimiento desde cada longitud de grieta,  $a$ , hasta la rotura. La otra curva proporciona el número de ciclos necesarios para que se genere una grieta de longitud  $a$  ( $a - N_i$ ) y se calculará a partir de las tensiones a lo largo del camino que sigue la grieta y de una curva de fatiga  $S-N$  que se detallará más

adelante. La suma de estas dos curvas daría la vida total en función de qué valor se tome de la longitud de grieta que separa las fases de iniciación y propagación. Tal como se muestra en artículos previos [6,11], estas dos curvas muestran que cerca de la superficie domina el proceso de iniciación y lejos de ella el de propagación, de forma que el nexo entre las dos se encuentra en el mínimo de la curva de vida total descrita anteriormente. Por esta razón y porque además es el valor más conservativo, se toma como solución el mínimo de la curva.

Para la fase de propagación se emplea la mecánica de la fractura, tomando como longitud inicial una longitud genérica,  $a$ . La ley de crecimiento utilizada trata de modelar también el crecimiento de grietas pequeñas dado que la longitud de iniciación definida puede ser del orden de micras. La forma de hacerlo es introduciendo un umbral de crecimiento modificado en función de la longitud de grieta [8]:

$$\frac{da}{dN} = C \left( \Delta K^n - \left( \Delta K_{th\infty} \cdot \left( \frac{a^f}{a^f + a_0^f - l_0^f} \right)^{1/2f} \right)^n \right) \quad (1)$$

En la ecuación (1)  $\Delta K_{th\infty}$  es el umbral de crecimiento de grieta larga,  $f$  es un parámetro que de forma general se toma igual a 2.5 [12],  $l_0$  es la distancia típica hasta la primera barrera microestructural y  $a_0$  es la llamada constante de El Haddad que viene definida por la expresión

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{th\infty}}{\Delta \sigma_{FL}} \right)^2 \quad (2)$$

donde  $\Delta \sigma_{FL}$  es el límite de fatiga. El factor que multiplica al umbral de crecimiento de grieta larga en la ecuación (1) proviene de la aproximación teórica al diagrama de Kitagawa-Takahashi, en el que se representa la tensión umbral en función de la longitud de grieta. Se han ensayado otras formas de tener en cuenta el crecimiento de grietas pequeñas [8,13], siendo la mostrada en la ecuación (1) la que mejor se ajusta a los resultados experimentales de fatiga por fretting.

El modelo presentado en este artículo analiza la fase de iniciación basándose en el trabajo de McClung et al. [14] para entallas. El primer paso consiste en la obtención de una curva de fatiga,  $S - N|_a$ , en probetas lisas y sin fretting que proporcione el número de ciclos necesario para generar una grieta de longitud  $a$  en función de la tensión aplicada. Para cada nivel de tensiones,  $S_j$ , el número de ciclos de esta curva,  $N_{S_j a}$ , se obtiene a partir de la ecuación:

$$N_{S_j a} = N_{fS_j} - N_p(a) = N_{fS_j} - \int_a^{a_f} \frac{da}{f(a)} \quad (3)$$

Donde  $N_{fS_j}$  es el número de ciclos hasta el fallo obtenido en un ensayo de fatiga simple con tensión  $S_j$ ,  $a$  es la longitud de grieta,  $a_f$  es la longitud a la que se produce la fractura y  $f(a)$  es la ley de crecimiento, que en este caso se utilizará la ecuación (1).

Estas curvas,  $S - N|_a$ , a las que se hará referencia como curvas de iniciación, se presentan en la figura 4 para cuatro casos distintos: fractura total, generación de una grieta de 100, 50 y 10 micras para el aluminio 7075 T651. Como cabría esperar, cuando disminuye el nivel de tensiones aumenta la fracción de vida dedicada a la iniciación.

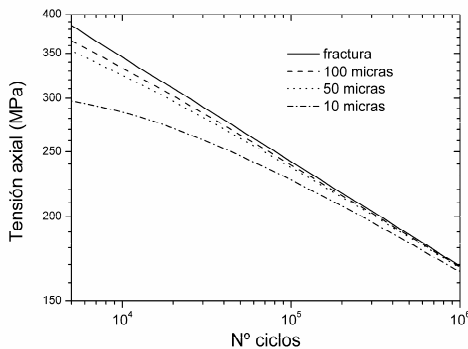


Figura 4. Curvas S-N de iniciación para la generación de distintas longitudes de grieta en el aluminio 7075 T651 en fatiga simple.

En el caso de que se estuviera aplicando el modelo a un ensayo de fatiga simple, para cada longitud de grieta,  $a$ , se calcularía el número de ciclos para generar una grieta de dicha longitud introduciendo la tensión aplicada en la curva  $S - N|_a$  anteriormente obtenida. En el caso de una pieza con un gradiente de tensiones como se produce en el fretting o en una probeta entallada, se puede aplicar el mismo proceso aunque con algunas modificaciones y advertencias. En estos casos la tensión disminuye rápidamente con la profundidad, desde un máximo en la superficie, figura 3. En función de dónde se evalúen las tensiones dentro de la zona de interés la vida de iniciación será una u otra. En función de los resultados obtenidos en otros trabajos [7], la opción que se toma es calcular la tensión media entre la superficie y la longitud de grieta  $a$ , y con esta tensión entrar en la curva  $S - N|_a$  y obtener el número de ciclos necesario para generar una grieta de longitud  $a$ . Evidentemente, al usar una tensión media esto será un cálculo aproximado que tiene asociado un cierto error, tanto mayor cuanto mayor sea la zona sobre la que se calcula la tensión media. Esta opción significa que se está haciendo la hipótesis de que a igual valor medio de tensión en la zona, igual número de ciclos para iniciar la grieta de esa longitud.

En la fase de iniciación es necesario introducir un criterio de fatiga multiaxial debido al carácter de las

tensiones, principalmente en fatiga por fretting, en este caso se empleará el de Fatemi-Socie [15].

De esta forma se obtienen las dos curvas mencionadas y representadas en la figura 5 para un ensayo concreto de fretting fatiga con contacto esférico donde la tensión axial es  $\sigma = 110$  MPa, la fuerza tangencial  $Q = 29$  N y la normal  $N = 70$  N. El mínimo se toma como la vida a fatiga y el punto donde se produce el mínimo se toma como la longitud de iniciación. Este modelo se puede comparar con otros donde se define a priori la longitud a partir de la cual se toma propagación. Aplicar dicho modelo sería el equivalente a entrar en la gráfica de la figura 5 con una longitud de grieta  $a$  preestablecida obteniéndose una vida de iniciación y de propagación. La ventaja del modelo propuesto es que es más conservativo y no hay que tomar una decisión sobre cuándo termina una fase y empieza la otra. En la gráfica también se observa que la vida estimada varía poco para un rango determinado de la longitud de iniciación. La extensión de esta zona aproximadamente plana es diferente para cada ensayo y suele ser más pequeña cuando la amplitud de las tensiones cerca de la superficie es menor, como en los ensayos analizados de fretting con contacto cilíndrico o con entalla.

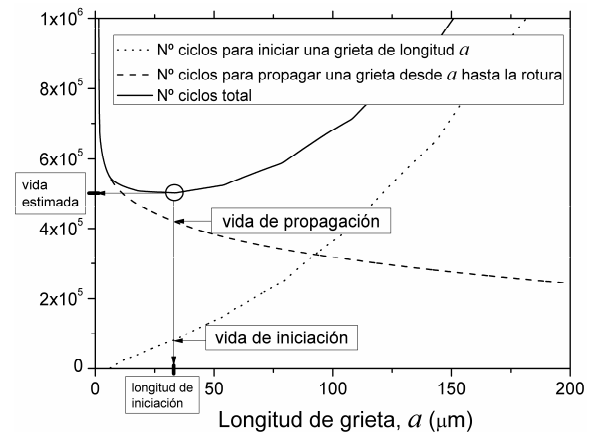


Figura 5. Aplicación del modelo de predicción a un ensayo de fretting con contacto esférico.

#### 4. RESULTADOS

Los resultados de aplicar el modelo propuesto a los tres grupos de ensayos se muestra en la figura 6 donde se representa la vida estimada frente a la real.

La mayor parte de las estimaciones se encuentran en una banda de 2x alrededor de los valores reales, lo cual indica que el modelo propuesto puede ser válido para casos y situaciones muy distintas. En contacto cilíndrico y en entallas el resultado es excesivamente conservativo para vidas cortas. Los resultados mejorarían en esta zona si se considerara que inicialmente la grieta no es pasante en estos casos sino semielíptica.

Hay dos ensayos con contacto esférico con una duración de 850000 y  $2.3 \cdot 10^6$  ciclos cuyas vidas estimadas son del orden de  $40 \cdot 10^7$  ciclos y que por lo

tanto rebasan la escala del gráfico y no aparecen en la figura 6. La razón de unas vidas estimadas tan altas es que el factor de intensidad de tensiones se acerca mucho al umbral tal como se define en la ecuación (1). Por eso, variaciones muy pequeñas del umbral de crecimiento tienen una gran influencia sobre la vida estimada en los ensayos con vidas altas. Este hecho hace que sea difícil la predicción de vida por encima de  $10^6$  ciclos teniendo en cuenta la disparidad de valores para el umbral de crecimiento que se encuentra en la literatura. Además, se da la circunstancia de que el material analizado, aleación de aluminio, no tiene un límite de fatiga definido y por lo tanto tampoco debe tener un umbral de crecimiento definido. Sin embargo, sí parece necesario introducir dicho umbral para poder reproducir los resultados con vidas por encima de  $10^6$  ciclos, porque de no hacerlo estas vidas se subestiman.

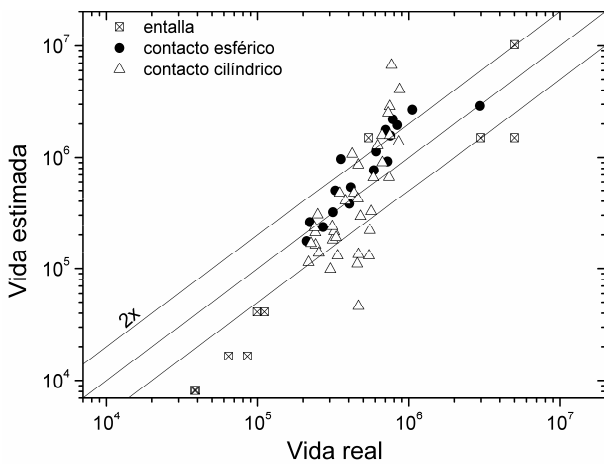


Figura 6. Vidas estimadas frente a las reales en probetas entalladas y en fretting.

Además de las vidas estimadas se puede analizar el valor de la longitud de iniciación obtenida en los distintos ensayos así como el tanto por ciento de vida dedicado a la iniciación o a la propagación, figuras 7 y 8 respectivamente.

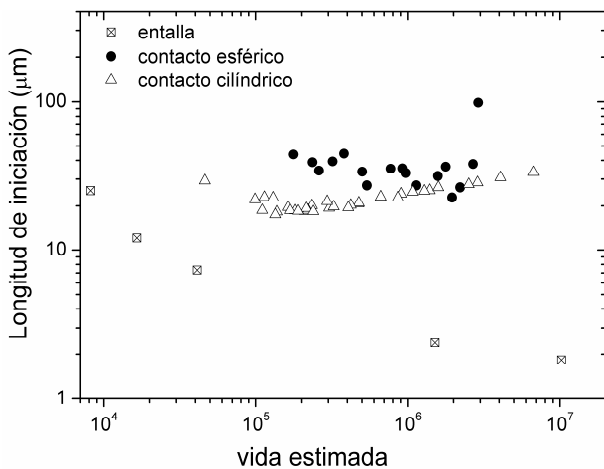


Figura 7. Longitud de iniciación frente a la vida real.

La figura 7 muestra que en los ensayos analizados la separación entre iniciación y propagación se produce en el mismo rango de valores para todos los casos, entre 10 y 40 micras. Esto es importante si se tiene en cuenta la diversidad tan grande que hay en el nivel y gradiente de tensiones en estos ensayos. Los valores son algo menores en fretting con contacto cilíndrico que con esférico, además, no se observa una clara tendencia o relación en función de la vida a fatiga. En el caso de la entalla sí se observa una tendencia decreciente cuando aumenta la vida.

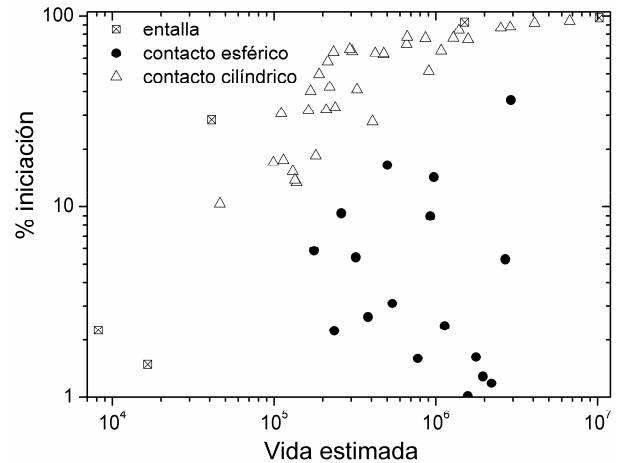


Figura 8. Porcentaje de la vida de iniciación frente a la vida total real.

La figura 8 muestra la proporción de vida empleada en iniciar una grieta, según se obtiene en este modelo de predicción. Se puede observar que mientras que en la probeta entallada y en el contacto cilíndrico la vida de iniciación aumenta con el número de ciclos, llegándose a valores en torno al 99%, en contacto esférico no hay una tendencia tan clara. Donde sí se puede observar una relación en fatiga por fretting es entre la fracción de vida dedicada a la iniciación y el cociente  $\sigma_{max}/\sigma_{nominal}$  [11], es decir, la concentración de tensiones.

Estos resultados se muestran en la figura 9. En los ensayos de fretting  $\sigma_{nominal}$  es la amplitud de la tensión axial aplicada a la probeta y en la entalla es la amplitud de la tensión lejos de la entalla, tal como se define en la figura 2. En ambos casos  $\sigma_{max}$  es la amplitud de la tensión en la superficie. La figura muestra cómo prácticamente todos los puntos forman una banda donde la relación entre la fase de iniciación y la concentración de tensiones es potencial, de forma que cuanto mayor es la concentración de tensiones menor es el porcentaje de vida empleada en la iniciación, a excepción de algún ensayo. Evidentemente, la concentración de tensiones tal como se ha definido no es el único parámetro que influye en la proporción de vida de iniciación a la vista de la dispersión en los resultados. Por ejemplo, en el caso de la entalla analizada, el concentrador de tensiones es siempre el mismo pero hay una variación del porcentaje de vida de iniciación. En este caso se observa en la figura 8 que la vida de la probeta, y por lo

tanto el nivel de tensiones, es el factor que está influyendo en la vida de iniciación.

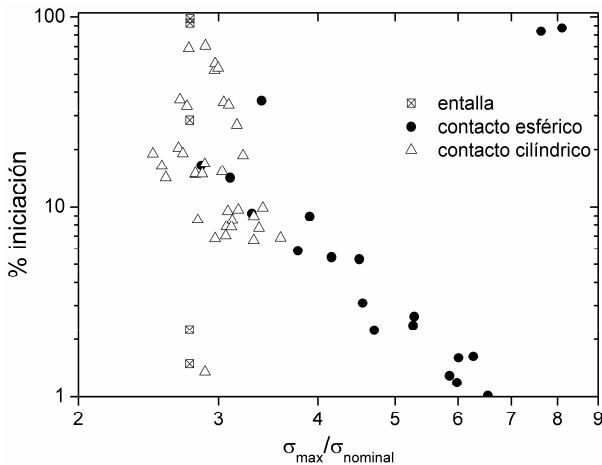


Figura 9. Porcentaje de la vida de iniciación frente al cociente entre la tensión máxima y la nominal.

## 5. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un modelo de predicción de vida que combina las fases de iniciación y propagación sin tener que definir a priori dónde termina una fase y empieza la otra. El modelo de predicción está enfocado a situaciones donde haya un gradiente de tensiones, como la fatiga por fretting o las entallas.

Este modelo de predicción de vida se ha aplicado a tres grupos de ensayos muy distintos entre sí, fretting esférico y fretting cilíndrico y entallas, obteniéndose buenos resultados en general, aunque peores en cilíndrico.

Los resultados muestran que la vida de iniciación puede ser muy diferente de un ensayo a otro y que no se puede despreciar a priori ninguna de las dos fases, iniciación y propagación. Esto hace que este modelo sea muy útil y robusto.

Las estimaciones muestran que cuanto mayor sea la concentración de tensiones menor será la vida de iniciación. La misma influencia tiene el nivel de tensiones.

La longitud de grieta estimada que separa las fases de iniciación y propagación es muy similar en el conjunto de ensayos analizados.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Ministerio de Educación y Ciencia la financiación de la investigación a través del proyecto DPI2007-66995-C03-01.

## REFERENCIAS

[1] R.B. Waterhouse, T.C. Lindley. *ESIS Publication* 18. MEP, London, 1994.

[2] M.P. Szolwinski, T.N. Farris. "Observation, analysis and prediction of fretting fatigue in 2024-T351 aluminum alloy". *Wear* 221, pp.24-36, 1998.

[3] J.A. Araújo, D. Nowell. "The effect of rapidly varying contact stress fields on fretting fatigue". *Inter. Journal of Fatigue* 24, pp.763-775, 2002.

[4] C.D. Lykins, S. Mall, V.K. Jain. "Combined experimental-numerical investigation of fretting fatigue crack initiation". *International Journal of Fatigue* 23, pp.703-711, 2001.

[5] N.E. Dowling. "Notched member fatigue life predictions combining crack initiation and propagation". *Fatigue of Engng. Mater. and Struct* 2, pp.129-138, 1979.

[6] C. Navarro, M. García, J. Domínguez. "A procedure for estimating the total life in fretting fatigue". *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 26, pp.459-468, 2003.

[7] C. Navarro, S. Muñoz, J. Domínguez. "Influencia de la longitud de iniciación en las predicciones de vida a fatiga por fretting". *Anales de Mecánica de la Fractura* 25, pp.554-559, 2008.

[8] S. Muñoz, C. Navarro, J. Domínguez. "Application of fracture mechanics to estimate fretting fatigue endurance curves". *Engineering Fracture Mechanics* 74, pp.2168-2186, 2007.

[9] A. Fatemi, A. Plaseied, A.K. Khosrovaneh, D. Tanner. "Application of bi-linear log-log S-N model to strain-controlled fatigue data of aluminum alloys and its effect on life predictions". *Inter. Journal of Fatigue* 27, pp.1040-1050, 2005.

[10] Fatigue Crack Growth Computer Program, NASA/FLAGRO, L.B. Johnson Space Center, JSC-22267, 1986.

[11] C. Navarro, S. Muñoz, J. Domínguez. "On the use of multiaxial fatigue criteria for fretting fatigue life assesment". *Inter. J. Fatigue* 30, pp.32-44, 2008.

[12] C. Vallellano, J. Domínguez, A. Navarro. "On the estimation of fatigue failure under fretting conditions using notch methodologies". *Fatigue Fract Engng Mater Struct.* 26, pp.469-478, 2003.

[13] C. Navarro, S. Muñoz, J. Domínguez. "Crack evolution in fretting fatigue with spherical contact", *Journal of Strain Analysis* (en revision).

[14] R.C. McClung, W.L. Francis, S.J. Hudak Jr. "A new approach to fatigue life prediction based on nucleation and growth", *9<sup>th</sup> International Fatigue Congress*, Atlanta, mayo 2006.

[15] A. Fatemi, D. Socie. "A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading". *Fatigue and Fract of Engng Mater and Struct* 11, pp.145-165, 1988.