

中学校数学におけるピタゴラス数に関する実践授業

—原始ピタゴラス数について—

伊藤 隆・高橋智之

群馬大学教育実践研究 別刷

第39号 11～17頁 2022

群馬大学共同教育学部 附属教育実践センター

中学校数学におけるピタゴラス数に関する実践授業 —原始ピタゴラス数について—

伊藤 隆¹⁾・高橋 智之²⁾

1) 群馬大学共同教育学部数学教育講座

2) 群馬大学共同教育学部附属中学校

Educational Practice related to Pythagorean number in Junior High School Mathematics —Primitive Pythagorean Number—

Takashi ITOH¹⁾, Tomoyuki TAKAHASHI²⁾

1) Department of Mathematics, Cooperative Faculty of Education, Gunma University

2) Junior High School Attached to Cooperative Faculty of Education, Gunma University

キーワード：三平方の定理、ピタゴラス数、原始ピタゴラス数、背理法

Keywords : Pythagoras Theorem, Pythagorean Number, Primitive Pythagorean Number, Indirect Proof

(2021年10月24日 受理)

1. はじめに

ピタゴラス数とは、中学校3年生で学習する「三平方の定理（ピタゴラスの定理）」において、直角三角形の3辺の長さが、斜辺の長さを c 、他の2辺の長さを a 、 b としたときに、

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たす自然数の3つ組 (a, b, c) のことをいう。

ピタゴラス数として、よく知られているものは、 $(3, 4, 5)$ や $(5, 12, 13)$ がある。これ以外の例として、 $(6, 8, 10)$ 、 $(12, 16, 20)$ や $(10, 24, 26)$ があげられるが、ピタゴラス数は定数倍してもピタゴラス数であることから、構成法としてはこれらは、本質的ではない。そこで、 (a, b, c) の最大公約数が1である組を『原始ピタゴラス数』と呼ぶ。原始ピタゴラスの例を10個挙げることは、一般に自明ではないと思われる。

本実践では『すべての原始ピタゴラス数』を求める公式を導くことを目標とする。

原始ピタゴラス数を求める公式は、次節の「2. 授業の概要」の中で述べるが、その証明として少なくとも次の3つの方法が知られている。

- (A) 背理法を用いた初等整数論的方法。
- (B) 単位円周上の有理点を直線との交点として求める方法。
- (C) ガウスの整数 $= \{a + bi \mid a, b \text{ 整数}\}$ を用いた方法。

(B) は、三角関数をパラメーターを用いて表すことから、高校生が理解できる方法である。(C) は、大学カリキュラムの代数（整数論等）の知識を必要とすることから、大学生に適した方法である。

ここでは、生徒たちの実態として、中学校3年生で平方根の学習時に「 $\sqrt{2}$ が無理数であること」を背理

法を利用して証明していることから、中学校段階で方法（A）の学習が可能であり、実践を通して原始ピタゴラス数についての理解を深めることができると考えた。

準備として「互いに素」という用語を中学校では学習しないため、事前に生徒たちには指導した。また、定理の証明を生徒が自分で書くことについては難易度が高いため、予め5つのStepで証明を示したプリントを配付し授業を始めた。

本実践は、主に「原始ピタゴラスの定理1の証明」と「原始ピタゴラスの定理2（定理1の逆）の証明」及び「原始ピタゴラス数の作成」の2時間で実施した。対象とした生徒は、群馬大学附属中学校3年生136名である。1時間目の授業を（コロナ禍のため）一斉のオンライン講義形式で伊藤がパワーポイントを使用して担当した。後日、2時間目の授業を高橋が通常の4クラスで担当した。

2. 授業の概要

まず、授業で扱った教材とその扱いに関する手立てについて述べる。

2時間構成で行った授業について、それぞれの時間についての、事前の考察や実際の生徒の反応を記述する。

1時間目「原始ピタゴラスの定理1の証明」

授業の導入部分では、この講義の1か月ほど前に学習した「三平方の定理」の学習で紹介程度にとどめた「ピタゴラス数」についての詳しい説明を行った。(3, 4, 5) や (5, 12, 13)、(7, 24, 25) など、生徒たちも知っているピタゴラス数に興味が高まった様子だった。

次に、ピタゴラス数はいくつあるのかと問われ、それほど多くないと考えていた生徒も、相似な直角三角形を想像すれば先に挙げた数の組の定数倍だけでも無限に存在することに気が付いた。そこで、ピタゴラス数を定数倍する前の「 $a^2 + b^2 = c^2$ 」を満たす自然数（ a, b, c ）の中でも、最大公約数が1である組を『原始ピタゴラス数』と定義し、その数の組はどの程度あるのかを予想しながら授業を進めた。

そして、最初に挙げた3つのピタゴラス数で気が付

いたことを確認したところ、後半の2つの数（ b と c ）について、常に差が1であることに気づき、原始ピタゴラス数を見つけるアイデアの一つとして図1のような考え方で、ピタゴラス数を見つけられることがわかった。

アイデアの一つ

$$(2n + 1) + n^2 = (n + 1)^2$$

・ $2n + 1$ が自然数 k の2乗

$(2n + 1 = k^2)$ ならば

$$k^2 + n^2 = (n + 1)^2 \text{ となり}$$

$(k, n, n + 1)$ はピタゴラス数になる。

・ k は奇数である。(背理法)

図1 b と c の差が1である場合

次に、 $(2n + 1) + n^2 = (n + 1)^2$ の式において、 $(2n + 1)$ に具体的な数を代入することで、その規則性を再確認し、この式で原始ピタゴラス数を作れることが理解できた様子であった。

さらに図1に現れる k が奇数であることの証明を背理法を用いて行った。

$$(2n + 1) + n^2 = (n + 1)^2$$

例えば

$$2n + 1 = 3^2 \text{ ならば } n = 4$$

$$2n + 1 = 5^2 \text{ ならば } n = 12$$

$$2n + 1 = ?^2 \text{ ならば } n = ?$$

$$2n + 1 = ?^2 \text{ ならば } n = ?$$

図2 具体的な数を代入して考察

ここで、原始ピタゴラス数はこの後半の2つの数（ b と c ）の差が1のものしかないのだろうか、また、それは有限なのか無限なのかという問いから、実はこの法則以外にも原始ピタゴラス数を求める法則はあり、その数は無限にあることを伝えると、多くの生徒は驚きを感じている様子であった。

その後、どのようにすればそれを証明できるかを考

えた。

原始ピタゴラス数を求めるには、次の定理を証明する必要がある。

定理1

原始ピタゴラス数 (a, b, c) は、

(1) m と n は互いに素

(2) $m > n$

(3) m, n の偶奇は異なる

を満たす自然数 m, n を用いて次のように表せる。

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

ただし a, b は入れ替えてもよい。

図3 原始ピタゴラス数の定理1

原始ピタゴラス数を求める定理の証明にあたっては、背理法を何度も利用し、手順が複雑であるため、5つのStepに分けて丁寧に指導を行った。

Step 1として、次の証明を行った。

定理1の証明

Step 1

$a^2 + b^2 = c^2$ で a, b, c の最大公約数が1のとき

a を奇数, b を偶数としてよい。(背理法)

(このとき c は奇数である)

図4 定理1の証明【Step 1】

命題の否定に慣れていない生徒が多いため、今回の命題を否定すると以下の2つになることを指導し、証明を行った。

「 $a^2 + b^2 = c^2$ で a, b, c の最大公約数が1のとき、 a と b は共に偶数にはならない、また、 a と b は共に奇数にはならない」

どちらも、奇数を $2n-1$ 、偶数を $2n$ などと表すことは中学2年生で既習のため容易に理解できた様子が見えたと。

続いてStep 2の証明を行った。

この証明も命題を否定することから指導し、「 $c+b$,

Step 2

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)$$

と因数分解すると

$c+b$ と $c-b$ は、ともに奇数である。(背理法)

$c+b$ と $c-b$ は互いに素である。(背理法)

図5 定理1の証明【Step 2】

「 $c-b$ はともに奇数である」ことは理解できた生徒が多かった様子であったが、「 $c+b, c-b$ は互いに素である」については、普段考えることのない概念だったため理解するのに時間がかかった様子であった。

続いてStep 3、Step 4の証明を行った。

Step 3

$$a^2 = (c+b)(c-b) \text{ において}$$

自然数 s, t を用いて

$$c+b = s^2, c-b = t^2 \text{ と表せる。}$$

(大事なポイント)

s と t はともに奇数である。
($c+d, c-d$ が奇数よりOK)

s と t は互いに素である。
($c+d, c-d$ が互いに素よりOK)

図6 定理1の証明【Step 3】

Step 4

$$m = \frac{s+t}{2}, n = \frac{s-t}{2}$$

とおくと

$$m > n$$

m, n の偶奇は異なる (背理法)

m, n は互いに素である (背理法)

図7 定理1の証明【Step 4】

この証明に関しては、ほとんどの生徒がその内容を把握することができない様子であった。特に、Step 3

の「 $a^2 = (c+b)(c-b)$ において、自然数 s, t を用いて $c+b=s^2, c-b=t^2$ と表せる」ことと Step 4 の「 $m = \frac{s+t}{2}, n = \frac{s-t}{2}$ とおく」という部分で、生徒たちは急に出てきた変数 s や t に戸惑い、また、なぜそのようにおくのか理解できていなかった。この後の考察にも示したが、オンラインではなく、現地にいて質問ができれば、「このように変数をおくとうまく証明ができるから」と指導したり、具体的な数字を使ってこれらの意味するところを説明したりするという指導ができれば、生徒たちの理解はもっと深まったことであろうと推測される。

最後に Step 5 の証明を行った。

Step 5

$s = m + n, t = m - n$ であり

$c + b = s^2, c - b = t^2$ を用いて計算すると

$$c = m^2 + n^2, b = 2mn$$

$$a^2 = (m^2 - n^2)^2$$

である。 $a = m^2 - n^2$ も OK.

図8 定理1の証明【Step 5】

この証明に関しては、代入して計算をすることで結論が得られるため、ほとんどの生徒が意欲的に取り組み、理解できていた。

その後、1時間目の伊藤の授業後に、分からない部分を知りたい生徒を集めて、密にならないように配慮して疑問解決の時間をもった。すると、そこに参加した生徒たちは自分の分からなかった部分を積極的に質問し解決していった。特に、上記に示した Step 3, 4 が理解や把握ができなかった部分ではあるが、文字で説明されるだけでは分かりづらそうにしていた生徒も、具体的な数を用いて説明されることで理解した様子が見えられた。

以上のように、1時間目に関しては一斉のオンライン講義形式であったため、質問をしたくても質問ができなかったことから、授業内容に関して、「難しい」または「非常に難しい」と答える生徒が97% (130人) であった。また、これまでの数学の学習では、数学の内容について、ここまで抽象的に考えることはほとん

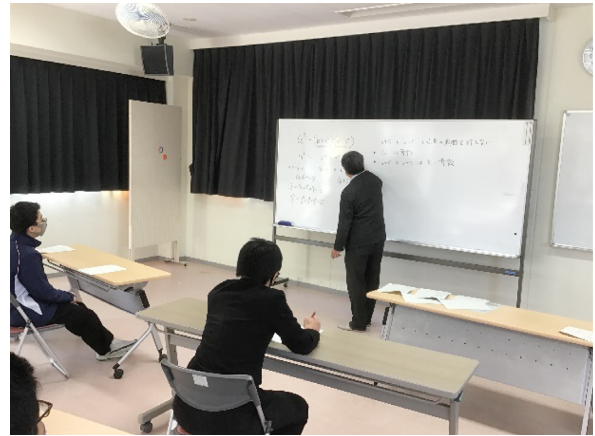


図9 授業後の疑問解決時間の様子

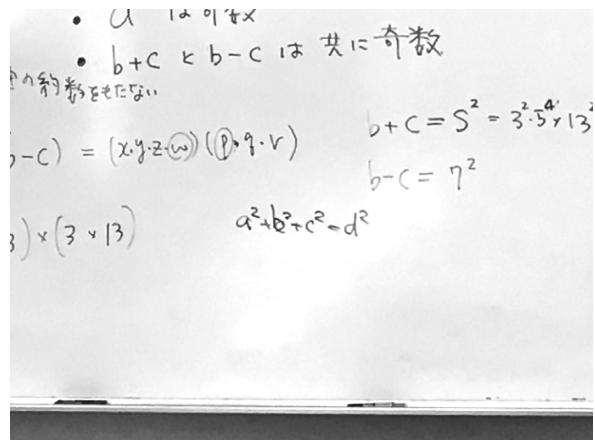


図10 具体的な数で解説している板書

どしてきていないので、背理法という証明方法は丁寧に行わないと中学生には、かなり理解が難しい内容であると感じた。そこで、2時間目では、具体的な数を用いて証明を説明したり、原始ピタゴラスの定理を用いて、具体的な問題を解決したりしていくことで、理解を深められるようにしようと考えた。

2時間目「原始ピタゴラスの定理2 (定理の逆)の証明」

2時間目は高橋が各クラスで「原始ピタゴラス数の定理の逆」の証明をし、証明された公式を利用して自ら原始ピタゴラス数を作るという課題で実践を行った。

定理1において、今まで学習してきた演繹法による証明と違い、背理法による証明は想定したよりも生徒になじみが薄かったため、1時間目終了後に行った「疑問解決の時間」で出た個別の質問で有益なものを全体に指導することから始め、1時間目を理解できなかった生徒も本時のスタートラインに立たせた。

定理2 [定理1の逆](再掲)

(1) m と n は互いに素である

(2) $m > n$

(3) m, n の偶奇は異なる

を満たす自然数 m, n を用いて

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

とおくと、 (a, b, c) は原始ピタゴラス数になる。

ただし a, b は入れ替えてもよい。

図11 原始ピタゴラス数の定理2

定理2は2つのStepに分けて証明を行った。

定理2の証明

Step1

$a^2 + b^2 = c^2$ であることは、次の計算からわかる。

$$\begin{aligned} & (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= (m^4 - 2m^2n^2 + n^4) + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \end{aligned}$$

図12 定理2の証明【Step1】

Step1に関しては、代入して計算すれば中学生にも容易に理解できるものであったため、分からない生徒には分かった生徒が教える形をとり、全員が導けるようにすることで、取り組みやすく、分かるという実感をもたせることができた。

続いてStep2の証明を行った。

Step2

a, b, c の最大公約数は1である。

(背理法による証明)

a, b が互いに素であることを示せば十分である。

a と b が素数 d を約数に持つとする
 $m^2 - n^2 = dk, \quad 2mn = dl$
 とおける。

図13 定理2の証明【Step2】

ただし、Step2に関しては、「奇数の約数には必ず奇数がある」と一言で言っても、普段そのように奇数を捉えている生徒は多くないことから、1時間目の反省を踏まえ、例としていくつか奇数をあげさせ、それら全ての奇数が奇数を約数にもつことを示したり、変数 d や k, l, p などについても、それらをしっかりと定義したりしてから証明を進めた。できるだけ具体的な数を利用して「素数」「偶数」「奇数」「約数」などの用語を丁寧に扱って1行ずつ丁寧に説明をしたため、証明を理解できている様子が見えかけた。

最後に、「原始ピタゴラスの定理1の証明」と「原始ピタゴラスの定理2（定理の逆）の証明」をしたため、「原始ピタゴラスの定理」を証明できたことを確認して、実際に原始ピタゴラス数を自分で作らせることで、その価値を実感させようと考えた。以下のような表を作り原始ピタゴラス数を作るための m と n に対する条件を確認して、条件に当てはまるように数を選択して自分で原始ピタゴラス数を作った。その際、条件を無視して作るとどうなるのか考えた生徒から「条件を無視すると原始ピタゴラス数にならない」という発言があった。

原始ピタゴラス数を作ってみよう!

ルール
 ① m, n は互いに素
 ② $m > n$
 ③ m, n の偶奇は異なる

ルールを破ると
 原始ピタゴラス数にならない

m	4	13	156	8	10	13	
n	3	10	73	7	13	7	
a	$m^2 - n^2$	7	69	19007	23	-69	120
b	$2mn$	24	260	22776	69	260	182
c	$m^2 + n^2$	25	269	29665	80	269	210

図14 原始ピタゴラス数を実際に求め、考察している様子

また、授業後のアンケートでも「理解できた」「思ったよりも理解できた」と答える生徒が78% (105人)であったことから、中学生の段階では抽象的な問題を解決するためには、具体的な数を利用して理解しながら慣れていくことが大切であることがうかがえた。

3. 考察

ピタゴラス数についての理解を深めることを目的として行った2時間の実践であったが、授業後の生徒の感想からもその効果を実感することができた。当たり

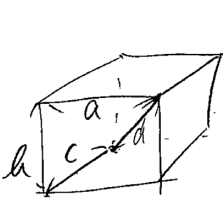
前のように計算をしていたピタゴラスの定理について、改めて考えるきっかけを得たことは、生徒たちにとって更に学習意欲を高めたり、新しい定理を探そうとする生徒が現れたりする結果にもつながった(図15)。

数の授業で当たり前のようにあったピタゴラスの定理を見つけた方法、仕組みを、背理法を中心に証明しながら理解を深められたので良かった。後半が少し難しかったけど、とても充実した授業だった。高校の勉強は、生かせる部分は生かしていきたい。

今まで当たり前のように「三平方の定理」だの「3,4,5の直角三角形」だの聞いてきたが、それらの証明はサラッと触れただけで詳しく考えたことがありませんでした。今回の証明を通して改めて思考者にこんなことをやっている数学者の皆さまを尊敬すると同時に理解を深めることができました。

中学には少し難しい内容だったかもしれませんが、丁寧に順序を踏まえてから説明して下さった伊藤様、ありがとうございます。さらさらと活躍を祈っております。

今日の授業はピタゴラスの定理についてでした。ピタゴラスの定理は以前から知っていたのですが、どうして成り立つのか証明されたことがなかったため、今日の授業はとても楽しく、役に立つものでした。



$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$
も成立させる。
整数の組(a, b, c, d)は存在するのよ

図15 授業後の生徒の感想 I

ただ、図15からもわかるように、定理1の証明が困難であったり、理解に時間がかかったりする生徒が多かった。特に1時間目の伊藤の授業についてはオンラインで行ったことで、都度質問することができず、証明の背理法以外の部分でも、なぜそうなるのかが理解できないという意見が多かった。

また、中学で扱う証明は演繹的に行うものがほとん

(C+b)と(C-b)が互いに素であることの証明はまだ理解し切れていません。

$(C+b) \cdot (C-b)$ は素数 d の約数 d ($d > 1$) として

$$\left. \begin{aligned} 2c &= (C+b) + (C-b) \\ 2b &= (C+b) - (C-b) \end{aligned} \right\} \rightarrow C, b \text{ は } d \text{ の約数 にもなる}$$

$a^2 = c^2 - b^2$ より a も d の約数 にもなる \rightarrow 矛盾

理解が追いついていません。特にこの部分です。そもそもこれが合っているかも分かりません。

・全体的に文字がたぐい出てきて頭がこんがらかった。

・「互いに素」の考えが難しかった。

Step 3 の $c=3$ の時も詳しく探りにかかった。

背理法は 7900 。難しくは 10000 まで。

本質は簡単です。

ピタゴラスの定理は $c=1$ の場合、 $a=0$ 。

図16 授業後の生徒の感想 II

どのため、今回の証明のように、背理法を多く利用したり、「 $m = \frac{s+t}{2}$ 、 $n = \frac{s-t}{2}$ とおくとうまく証明ができる」などとして証明をすすめたりすることに対して理解に苦しむ部分が多くみられた。実際に、中学生は具体から抽象へと思考することが多いため、授業後に行った疑問解決の時間に、具体的な数を用いて説明をすることで多くの生徒が理解できたことから、そのような手順で思考することが生徒にとって理解しやすいことが実感できた。

ただし、生徒が今後も数学を学んでいく過程で、演繹法以外の証明方法を利用することが増えていくことを考えると、今回のように何度も背理法を利用する証明に触れておくことは中学3年生にとっては有益だったと考える。実際に図17のように背理法について興味をもった生徒がいたことから有効であったと考えられる。

今日はピタゴラスの定理をしっかりと学ぶことができた。授業でサラッと触れた点、一気にわかった。今日、少し理解できたかと思う。背理法という考え方を初めて知ったので、他の場面でも背理法はどのように使われているのか気になりました。これから学習に今回の体験を生かしていきたいと思います。

図17 授業後の生徒の感想 III

(質問への回答) 図15の中の質問『 $a^2+b^2+c^2=d^2$ を成立させる整数の組 (a, b, c, d) は存在するのか』は、興味深い。授業後の疑問解決時間(図9、図10)においても、同じ質問があった。時間の制限もあり、その構成法はさらに複雑になるが、解答は『存在する』であると説明するに留めた。参考までに、これに対する解答を以下、整数の個数が $n+1$ 個の一般的な場合で与える [文献4参照]。

$a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2=b^2$ を満たす最大公約数が1である $n+1$ 個の整数の組 $(a_1, a_2, \dots, a_n, b)$ は次のStep (1) ~ (3) で全て構成出来る。

Step (1) 最大公約数が1である n 個の数

x_1, x_2, \dots, x_n を任意に与える。

Step (2) $2x_1x_n, 2x_2x_n, \dots, 2x_{n-1}x_n$ と

$x_n^2-x_1^2-x_2^2-\dots-x_{n-1}^2$ と

$x_n^2+x_1^2+x_2^2+\dots+x_{n-1}^2$ の最大公約数 d を求める。

Step (3)

$a_1 = 2x_1x_n \div d, a_2 = 2x_2x_n \div d, \dots, a_{n-1} = 2x_{n-1}x_n \div d,$

$a_n = (x_n^2-x_1^2-x_2^2-\dots-x_{n-1}^2) \div d$

$b = (x_n^2+x_1^2+x_2^2+\dots+x_{n-1}^2) \div d$ とおく。

Step 3 で得られた $(a_1, a_2, \dots, a_n, b)$ が求める $n+1$ 個の整数の組である。

$n=2$ の場合が、授業で行った方法と同値である。

生徒の質問の $n=3$ の例として、例えば $x_1=1, x_2=2, x_3=3$ とおくと $2x_1x_3=6, 2x_2x_3=12, x_3^2-x_1^2-x_2^2=4, x_3^2+x_1^2+x_2^2=14, d=2$ であることから $(a_1, a_2, a_3, b) = (3, 6, 2, 7)$ は $3^2+6^2+2^2=7^2$ を満たすことが確認できる。また、簡便に例を見つける方法として $3^2+4^2=5^2$

と $5^2+12^2=13^2$ を利用すると $3^2+4^2+12^2=13^2$ が得られる。さらに図1、2のアイデアを用いると $3^2+4^2+12^2+84^2=85^2$ なども見つけられる。

おわりに

ピタゴラスの定理は、数と図形、図形と数量をつなぐ数学の基本となる定理の一つである。中学校の学習指導要領でも「三平方の定理は直角三角形の3辺の長さの関係を表しており、数学において重要な定理であり、測量分野でも用いられるなど活用される範囲が極めて広い定理である。指導に当たっては、ただ単に様々な図形の性質を証明することの延長として三平方の定理を扱うのではなく、直角三角形だからこそ成り立つ関係の美しさに触れられるような工夫と配慮が望まれる。」と書かれており、ピタゴラスの定理について理解を深めることは、数学をより深く探求していくことにつながると考える。

内容としては中学生にとっては難易度が高かったが、疑問解決の時間の生徒の反応から、オンラインではなく対面式の講義であればもっと多くの生徒が理解できたのではないかと考える。

この稿が、現職の中学校、高等学校の教員の方々にも、三平方の定理に関する内容を扱う際に、その指導の一助となれば幸いである。

参考文献

1. 文部科学省：中学校学習指導要領解説 数学編 (2018) 日本文教出版
2. 新版 数学の世界3 大日本図書 平成27年
3. 足立恒雄：改訂新版 類体論へ至る道 (2010) 日本評論社
4. L.J. Mordell: Diophantine Equations (1969) (Pure and applied mathematics 30) Academic Press

(いとう たかし・たかはし ともゆき)

