早稲田社会科学総合研究　社会科学部創設50周年記念号（2022年3月）

契約を伴うマッチング理論：近年の動向と課題

戸　田　　学

1　本稿の目的

経済学の中で、近年、最も目覚ましい発展を遂げた分野の一つは「メカニズム・デザイン」である。とりわけ、1997年に実施された全米研修医マッチングプログラムの制度改正に貢献した「マッチング理論」の研究は今なお、多くの研究者の関心をひいている。特に、Hatfield and Milgrom［23］により提案された「契約を伴うマッチングモデル」は、その一般的な設定ゆえに広い範囲の問題に応用され多数の興味深い結果が得られている。マッチング理論は、1962年の Gale and Shapley［18］の論文が発端であるが、この論文は男女の結婚問題を題材にして主に1対1マッチングの場合を考察し、その後の発展の基礎となった。Gale-Shapley モデルを給与支払を含むように一般化して労働市場のモデルを考えたのが Kelso and Crawford［25］である。

そして給与のみならずさまざまな雇用条件を潜在的に含むように Kelso-Crawford モデルを抽象化して得られたものが Hatfield-Milgrom モデルに他ならない。しかし Hatfield and Milgrom［23］の論文には、仮定の一部が十分に明示的でないとの批判があり、また軽微な誤りも指摘されている。公開後、それらを巡って、さまざまな研究者たちによる検討が加えられることになったが[1)]、その経緯は若干わかりにくい。

たとえば、一部の論文は、その要約とおぼしきものが学術誌に掲載されてはいるが、完全な原稿は未刊行のままである。また、［23］における条件を緩和した類似条件がその後、多数提案されているが、そのきっかけとなったのは原論文に含まれていた軽微な誤りである。しかし、それが軽微なゆえに、なぜ誤りであるのかを理解するのは意外に難しい。そして［23］以降に提案された類似条件についての事情も複雑である。類似条件を最初に提案したのは、Hatfield and Kojima［21］であるが、この論文にも多数の誤りがあるとの指摘

1）［23］で採用された条件はいずれも選択理論の文献では古くから知られていたものでありマッチング理論の最近の研究者たちはそれらに無知であったとの指摘もある。これについては、Chambers and Yenmez［13］を見よ。しかし、Hatfield and Milgrom［23］は、彼らの採用した条件が Sen［35］によるものであることを述べているので、この指摘は必ずしも妥当ではないと思われる。

もある[2)]。その指摘の当否はともかく一連の研究を細部に至るまで正しく把握するのは決して容易ではない。さらに、この分野について、ある程度まとまった日本語による解説は、ほとんど存在しない[3)]。

既述のように、Hatfield-Milgrom モデルは Kelso-Crawford モデルの一般化を意図したものであったはずなのだが、彼らの仮定の下では、実は両者が本質的に同等であることが後に判明している。すなわち、Hatfield-Milgrom モデルを前提に、そこから Kelso-Crawford タイプのモデルを構築すると両者における結果が同じになることを示すことができる。それでは、Hatfield-Milgrom モデルが Kelso-Crawford モデルの厳密な一般化となるのは、どのような場合なのか、という問いが生じるが、それこそが近年の研究における主要テーマの一つであった。多くの研究が複雑に関連しているので、それらを適切に整理することがこの分野の理解にとって不可欠である。

本稿では、契約を伴うマッチングモデルの基本形を与え、そこにおける基礎的な事項を証明付きで示すことにより今後の学習と研究の手引きとなるべきものを提供しようと思う。対象とする読者は、学部上級生、大学院生、および、この分野の専門家、非専門家を問わない研究者である。

ただし、タイトルには「近年の動向」とあるが、[23] 以降に書かれた文献を漏れなく引用して、それらの論点をまとめるということではない。初学者にとってわかりやすいものになるように取捨選択を行う。まず議論を「1 対多マッチング」の場合に限り「多対多マッチング」に関する研究には一切言及しない。 Ostrovsky [30] らによる「サプライ・チェーン」のモデルについても触れることはない[4)]。マッチング理論は、数学的には室田一雄らにより開拓された離散凸解析[5)]と深い関連があることが知られているが、それについても言及することは避ける。Fleiner らによるマトロイド・マッチングの研究[6)]についても述べない。 Hatfield-Milgrom モデルの応用として、カップルマッチング、制約条件付マッチングなど多くの興味深い例があり、それらこそが、このモデルの有用性の証明でもあるが、ここでは理論的な事項にのみ焦点を絞り、応用については別の機会に譲ることにしたい。さらには、ごく最近、より一般的な枠組みで、これまでに提案された条件を統一的に特徴付ける研究が行われているが、そうした最新の研究についても割愛せざるを得ない。

2） Aygün and Sönmez [10]。しかし、彼らの指摘は Hatfield and Kojima [21] の貢献を著しく損なうというようなものではない。
3） 田村 [3] には、Kelso-Crawford モデルについての記述、Adachi [6] についての記述、ならびに、Hatfield-Milgrom モデルを多対多マッチングに一般化した場合についての記述がある。また、Kelso-Crawford モデルについては、その詳しい解説が、岡谷 [1] の第 4 章にある。
4） 田村 [4] には、離散凸解析によるサプライ・チェーンモデルの分析がある。
5） 田村 [3]、室田 [5] を見よ。
6） 例えば、Fleiner [17] を見よ。

2　モデルと定義

契約を伴うマッチング問題とは、互いに異なるグループに所属する参加者から構成される社会において、一方のグループの参加者が他方のブループの参加者の誰と、どのような契約を結ぶのかについて考えることである。このような問題には、きわめて多くの具体例が存在するが、各事例に個別な文脈に依存せず、なるべく一般的かつ抽象的にモデル化して、汎用性に富んだ理論を構築するのがここでの目的である。しかし、あまりに形式化しすぎても、わかりにくくなるので、以下では、前節で述べた全米研修医マッチング問題を念頭に医学部卒後研修を目的に配属先の病院を選ぼうとする新卒医師と彼らを研修医として採用しようとする研修病院を例にしながら説明する。

新卒医師の集合を $D=\{d_1,\cdots,d_n\}$、研修病院の集合を $H=\{h_1,\cdots,h_m\}$ とする。さらに、X を非空な有限集合とし、X から $D\times H$ の上への関数が与えられているとする。任意の $x\in X$ に対し、その関数の値を $(x_D,x_H)\in D\times H$ と書くことにしよう。x_D と x_H は、いずれも x の関数（single-valued function）なので、$x_D\neq x'_D$ ならば、$x\neq x'$ であり、$x_H\neq x'_H$ ならば、$x\neq x'$ である。このとき、集合 X を契約集合とよぶ。ここで、$x\in X$ は実行可能な雇用契約の１つを表し、x_D と x_H は、それぞれ契約 x の当事者たる医師と病院を表していると解釈する。もちろん、$x\neq y$ であっても、$x_D=y_D$ かつ $x_H=y_H$ となることもある。この場合、x と y は同じ医師と同じ病院との間で交わされる異なる内容の雇用契約ということになる。関数 $x\to x_D$ 及び $x\to x_H$ は、それぞれ D 及び H の上への関数なので、任意の $d\in D$ と $h\in H$ に対し、

$$X_d=\{x\in X\mid x_D=d\}$$
$$X_h=\{x\in X\mid x_H=h\}$$

と定義すれば、$X_d\neq\emptyset$ かつ $X_h\neq\emptyset$ である。また明らかに、$\{X_d\}_{d\in D}$ は、集合 X の分割であり、同様に $\{X_h\}_{h\in H}$ も、集合 X の分割になっている。

さらに、任意の部分集合 $X'\subset X$ と任意の $d\in D$ 及び $h\in H$ に対し、$X'_d=X'\cap X_d$ かつ $X'_h=X'\cap X_h$ と定義する。すると、$X'_d=\emptyset$ ないし $X'_h=\emptyset$ となることも許容して、$\{X'_d\}_{d\in D}$ は、集合 X' の分割であり、同様に $\{X'_h\}_{h\in H}$ も、集合 X' の分割になっている。今後の議論のために、次のような記号も定義しておこう。すなわち、$X'\subset X$ に対し、

$$D(X')=\{d\in D\mid \text{ある } x\in X' \text{ が存在して } d=x_D\}$$
$$H(X')=\{h\in H\mid \text{ある } x\in X' \text{ が存在して } h=x_H\}$$

とする。すなわち、$D(X')$ と $H(X')$ は、X' に含まれるいずれかの契約に関わりのある医師と病院の集合を表している。

任意の $d\in D$ は、集合 $X_d\cup\{\emptyset_d\}$ の上に強順序 $\succ_d$ を持つと仮定する。ただし、ここで、$\emptyset_d$ は、医師 d が H の中のどの病院とも雇用契約を結ばずにいる状態を意味するものとし

よう。便宜上、$d \neq d'$ ならば、$\emptyset_d \neq \emptyset_{d'}$ とする。また、$x, x' \in X_d \cup \{\emptyset_d\}$ に対し、$x \succ_d x'$ であるか、$x = x'$ であるかのいずれかであるとき、$x \succeq_d x'$ と書くことにする。

任意の $X' \subset X$ に対し、$C_d(X') \in X'_d \cup \{\emptyset_d\}$ を、$X'_d \cup \{\emptyset_d\}$ における $\succ_d$ の最大元とする。強順序を仮定しているので最大元は一意的に定まる。このように定義された関数 $C_d : 2^X \to X \cup \{\emptyset_d\}$ を医師 d の選択関数とよぶ。任意の $D' \subset D$ に対し、$C_{D'}(X') = \cup_{d \in D'} \{C_d(X')\}$ と定義する。また、$R_d(X') = X'_d \setminus \{C_d(X')\}$ と定める。これは、任意の $X' \subset X$ に対し、$R_d(X') \subset X'_d$ となるような部分集合を与える関数であり、医師 d の棄却関数とよばれる。任意の $D' \subset D$ に対し、$R_{D'}(X') = \cup_{d \in D'} R_d(X')$ と定義する。

任意の $h \in H$ は、部分集合 $X' \subset X$ に対し、$C_h(X') \subset X'_h$ となるような関数 $C_h : 2^X \to 2^X$を持つと仮定する。これを病院 h の選択関数とよぶ。ここで、$x, x' \in C_h(X')$ かつ $x_D = x'_D$ ならば、$x = x'$ が成り立つものとする。この条件を満たすとき、選択関数 C_h はユニタリであるという。任意の $H' \subset H$ に対し、$C_{H'}(X') = \cup_{h \in H'} C_h(X')$ と定義する。また、$R_h(X') = X'_h \setminus C_h(X')$ とする。これを病院 h の棄却関数という。任意の $H' \subset H$ に対し、$R_{H'}(X') = \cup_{h \in H'} R_h(X')$ と定義する。

任意の $d \in D$ に対し、$\{C_d(X')\} \cup R_d(X') = X'_d$ であり、任意の $h \in H$ に対し、$C_h(X') \cup R_h(X') = X'_h$ であるから、$C_D(X') \cup R_D(X') = X'$ かつ $C_H(X') \cup R_H(X') = X'$ が成り立つ。すなわち、$C_D(X') = X' \setminus R_D(X')$ かつ $C_H(X') = X' \setminus R_H(X')$ となる。

定義 1. 部分集合 $X' \subset X$ が配分であるとは、$x, x' \in X'$ に対し、$x_D = x'_D$ ならば $x = x'$ となるときをいう。すると、$d \in D(X')$ ならば、$x'_D = d$ となるような $x' \in X'$ は一意的に定まるので、それを x'_d とし、$d \in D \setminus D(X')$ ならば、$x'_d = \emptyset_d$ と定義する。配分 X' は、このように定義される D から $X \cup \{\emptyset_d \mid d \in D\}$ への関数 $d \to x'_d$ と同一視できる。すなわち、配分 X' は、各医師に対して（$\emptyset_d$ も含めて）1つの契約を指定するような1対1関数とみなすことができる。

定義 2. 配分 $X' \subset X$ が、個別合理的であるとは、$C_D(X') = C_H(X') = X'$ となるときをいう。

部分集合 $X' \subset X$ に対し、$C_H(X') = X'$ であるからといって、X' は配分であるとは限らない。

例 1. $D = \{d_1\}$、$H = \{h_1, h_2\}$ とし、$X = \{x^1, x^2\}$ とする。$x^1_D = x^2_D = d_1$ とし、$x^1_H = h_1$、$x^2_H = h_2$ とする。すると、$X_{h_1} = \{x^1\}$ であり、$X_{h_2} = \{x^2\}$ となる。$C_{h_1}(\{x^1\}) = \{x^1\}$ とし、$C_{h_2}(\{x^2\}) = \{x^2\}$ とする。すると、明らかに $C_H(X) = X$ である。ところが、$x^1 \neq x^2$ であるにもかかわらず、$x^1_D = x^2_D = d$ であるので、X は配分ではない。

しかしながら、部分集合 $X' \subset X$ が $C_D(X') = X'$ を満たすなら、$C_D(X') = \{C_d(X') \mid d \in D(X')\} = X'$ となるので、$x, x' \in X'$ ならば、$x = C_d(X')$ かつ $x' = C_{d'}(X')$ となるような $d, d' \in D(X')$ が存在する。各 $d \in D(X')$ に対し、$C_d(X')$ は一意的に定まるので、$x_D = x'_D$

ならば、$d = d'$ であり、したがって、$x = x'$ でなければならない。すなわち、$C_D(X') = X'$ ならば、X' は配分である。ゆえに、個別合理性の条件 $C_D(X') = C_H(X') = X'$ を満たすような部分集合 $X' \subset X$ はつねに配分である。

定義 3. 配分 X' が部分集合 $X'' \subset X$ によってブロックされるとは、ある $h \in H$ が存在して、$X'' \neq C_h(X')$ であり、

$$X'' = C_h(X' \cup X'') \subset C_D(X' \cup X'')$$

となるときをいう。

上の定義の第 2 条件が $X'' \subset X'_h$ となるような X'' に対して成り立つならば、$X' \cup X'' = X'$ となるので、$X'' = C_h(X' \cup X'') = C_h(X')$ となり、定義の第 1 条件が成り立たない。したがって、配分 X が X'' によってブロックされるならば、必ず $X'' \setminus X'_h \neq \emptyset$ でなければならない。逆に、第 2 条件を満たすような X'' で、$X'' \setminus X'_h \neq \emptyset$ となるようなものが存在したなら、明らかに $X'' \neq C_h(X')$ である。ゆえに、定義 3 は、以下のような定義と同値である。

定義 4. 配分 X' が部分集合 $X'' \subset X$ によってブロックされるとは、ある $h \in H$ が存在して $X'' \setminus X'_h \neq \emptyset$ であり、

$$X'' = C_h(X' \cup X'') \subset C_D(X' \cup X'')$$

となるときをいう。

配分 X' が X'' によってブロックされるなら、C_h がユニタリであることから、X'' も配分である。そこで、$d \in D(X'')$ に対し、$X''_d = \{x''_d\}$ とし、$X'_d = \{x'_d\}$ とするなら（ただし、ここで、$x'_d = \emptyset_d$ となることもある）、$x''_d \in C_d(\{x'_d, x''_d\})$ となるので、$x'_d \neq x''_d$ ならば、$x''_d \succ_d x'_d$ でなければならない。

定義 5. 配分 X' が、ペア $(d, h) \in D \times H$ によってブロックされるとは、$x''_D = d$、$x''_H = h$ となるような $x'' \notin X'$ が存在し、$k = \{d\}, h$ に対し、

$$x'' \in C_k(X' \cup \{x''\})$$

となるときをいう。

個別合理的な配分 X' が x'' を通じて、ペア $(d, h) \in D \times H$ によりブロックされるとしよう。そのとき、$X'' \equiv C_h(X' \cup \{x''\})$ と定義すると、C_h がユニタリであることから、X'' は配分である。明らかに、$X' \cup X'' = X' \cup \{x''\}$ である。そこで、$Z \equiv X'' \setminus \{x''\}$ とすると、任意の $d' \in D(Z)$ に対し、$z''_D = d'$ となるような $z'' \in Z$ は一意的に存在し、$Z \subset X'$ なので、$z'' \in X'$ となる。X' も配分であったから、$x'_D = d'$ となるような $x' \in X'$ は一意的に定まるので、$z'' = x'$ でなければならない。すなわち、$d' \in D(Z)$ に対し、$X'_{d'} = X''_{d'}$ である。ゆえに、$X'' \setminus X' = \{x''\} \neq \emptyset$ であり、

$$X'' = C_h(X' \cup X'') \subset C_D(X' \cup X'')$$

となる。以上から、X' をブロックするようなペアが存在すれば、X' をブロックするような部分集合 X'' が存在することが示された。

定義 6. 配分 X' が安定であるとは、個別合理性を満たし、さらに、定義3ないし定義4の意味においてブロックされないときをいう。

定義 7. 配分 X' がペア安定であるとは、個別合理性を満たし、さらに、いかなるペア (d, h) によってもブロックされないときをいう。

すでに示したことから、次の命題は自明である。

命題 1. 配分 X' が安定ならば、ペア安定である。

さらに安定性の別表現を与えておく。

定義 8. 配分 X' が部分集合 $X'' \subset X$ によってブロックされるとは、ある $h \in H$ に対し、$X'' \subset X_h \setminus X'_h$ であり、

$$X'' \subset C_h(X' \cup X'')$$
$$X'' \subset C_D(X' \cup X'')$$

となるときをいう。個別合理的な配分 X' が安定であるとは、この意味においてブロックされないときをいう。

定義8はそれに先行する定義と同値である。実際、個別合理性を満たす配分 X' が、定義4の意味で X'' によりブロックされたとする。すると、ある $h \in H$ に対し、$X'' \setminus X'_h \neq \emptyset$ かつ $X'' = C_h(X' \cup X'') \subset C_D(X' \cup X'')$ となる。そこで、$Z'' = X'' \setminus X'_h$ とすると、明らかに $Z'' \subset X_h \setminus X'_h$ かつ $Z'' \subset X'' = C_h(X' \cup X'')$ となる。また、定義から、$X' \cup Z'' = X' \cup (X'' \setminus X'_h) = X' \cup X''$ となるのも自明である。したがって、$Z'' \subset X_h \setminus X'_h$ かつ $Z'' \subset C_h(X' \cup Z'')$ であり、さらに、$Z'' \subset X'' \subset C_D(X' \cup X'') = C_D(X' \cup Z'')$ となるので、X' は Z'' により、定義8の意味でブロックされる。ゆえに、定義8の意味で安定な配分は、定義4の意味でも安定でなければならない。

逆に、個別合理的な配分 X' が X'' により、定義8の意味でブロックされるとしよう。そこで、$Z'' = C_h(X' \cup X'')$ とする。これより、$Z'' \subset X' \cup X''$ なので、$X' \cup Z'' \subset X' \cup X''$ である。また、$X'' \subset Z''$ であることから、$X' \cup X'' \subset X' \cup Z''$ となる。したがって、$X' \cup X'' = X' \cup Z''$ でなければならない。ゆえに、$Z'' = C_h(X' \cup Z'')$ が成り立つ。また、$X'' \subset Z''$ なので、$Z'' = X'' \cup (Z'' \setminus X'')$ となる。定義8より、$X'' \subset C_D(X' \cup Z'')$ である。さらに、$X' \cup X'' = X' \cup Z''$ であることから、$Z'' \setminus X'' \subset X'$ となる。したがって、任意の $d \in D(Z'' \setminus X'')$ に対し、$X'_d = X'_d \cup Z''_d$ が成り立つ。X'_d は個別合理的だから、$X'_d = C_d(X'_d)$ である。よって、$(Z'' \setminus X'')_d \subset X'_d = C_d(X'_d) = C_d(X'_d \cup Z''_d)$ でなければならない。すなわち、$Z'' \setminus X'' \subset C_D(X' \cup Z'')$ が成り立つ。以上から、$Z'' = X'' \cup (Z'' \setminus X'') \subset C_D(X' \cup Z'')$ が示された。これは、X' が定義4の意味でブロックされることになる。ゆえに、定義4の意味で安定ならば、定義8の意味でも安定でなければならない。

3 棄却対象からの独立性と安定配分の特徴付定理

さて、そこで安定配分を特徴付ける条件を与えることにしよう。そのために、病院の選択関数に対して「棄却対象からの独立性[7]」とよばれる、追加的な仮定を導入する。

定義 9. 選択関数 C_h が棄却対象から独立であるとは、任意の $X' \subset X$ と任意の $z \notin X'$に対し、

$$z \notin C_h(X' \cup \{z\}) \Rightarrow C_h(X') = C_h(X' \cup \{z\})$$

となることである。

棄却対象からの独立性は次のように述べることもできる。

定義 10. 選択関数 C_h が棄却対象から独立であるとは、任意の $X' \subset X$ と任意の $Z \subset X' \setminus C_h(X')$ に対し、

$$C_h(X') = C_h(X' \setminus Z)$$

となることである。

まず、定義10から定義9が導かれることを示そう。$X' \subset X$ かつ $z \notin X'$ とし、$z \notin C_h(X' \cup \{z\})$ とする。すると、$\{z\} \subset (X' \cup \{z\}) \setminus C_h(X' \cup \{z\})$ であるから、定義10において、$Z = \{z\}$ とし、さらに X' を $X' \cup \{z\}$ におきかえれば、$C_h(X') = C_h(X' \cup \{z\})$ をえるので、定義9が導かれる。

逆に、定義9から定義10を導こう。そこで、$X' \subset X$ かつ $Z \subset X' \setminus C_h(X')$ とする。$Z = \{z_1, z_2, \cdots, z_k\}$ としよう。すると、明らかに $X' = (X' \setminus Z) \cup \{z_2, \cdots, z_k\} \cup \{z_1\}$ であるから、$z_1 \notin C_h((X' \setminus Z) \cup \{z_2, \cdots, z_k\} \cup \{z_1\})$ である。したがって、定義9より、$C_h(X') = C_h((X' \setminus Z) \cup \{z_2, \cdots, z_k\})$ となる。次に、z_2 について同様に考えれば、$C_h(X') = C_h((X' \setminus Z) \cup \{z_3, \cdots, z_k\})$ となる。これを繰り返せば、$C_h(X') = C_h(X' \setminus Z)$ をえる。

さらに同値な定義として、以下のようなもの[8]を採用することもできる。

定義 11. $X' \subset X$ と $X'' \subset X'$ に対し、$C_h(X') \subset X'' \subset X'$ ならば、$C_h(X') = C_h(X'')$ となるとき、選択関数 C_h は棄却対象から独立であるという。

同値性を示すために、まず、定義10から定義11を導こう。定義10を仮定して、$C_h(X') \subset X'' \subset X'$ であるとする。すると、$X' \setminus X'' \subset X' \setminus C_h(X')$ であるから、定義10より、$C_h(X') = C_h(X' \setminus (X' \setminus X'')) = C_h(X'')$ となる。よって、定義11が成り立つ。次に逆を示すために、定義11を仮定して、$Z \subset X' \setminus C_h(X')$ であるとする。そこで、$X'' \equiv X' \setminus Z$ とすると、定義から、$C_h(X') \subset X' \setminus Z \subset X'$ となる。ゆえに、定義11から、$C_h(X') =$

7) この条件はマッチング理論の欧文文献のほとんどで irrelevance of rejected contract とよばれている。直訳すれば「拒否された契約からの独立性」ということだが、選択関数についての一般的な条件としては、なるべく文脈に依存しない用語がより適切と考え、ここではこのようによぶことにする。実際、Aizerman and Aleskerov [8] では、the condition of independence of outcast of options（候補から除外された対象からの独立性条件 ）とよばれている。

8) この条件はすでに Chernoff [14] で導入されている。

$C_h(X' \setminus Z)$ となり、定義 10 が得られる。

注 1. 定義から、任意の $X' \subset X$ に対し、$C_h(X') \subset X'_h$ であった。したがって、$X' \setminus X'_h \subset X' \setminus C_h(X')$ である。ゆえに、棄却対象からの独立性が満たされているなら、$C_h(X') = C_h(X'_h)$ となる。すなわち、$X', X'' \subset X$ に対し、$X'_h = X''_h$ であれば、$C_h(X') = C_h(X'')$ である。言いかえれば、C_h は、h に関わる契約部分にのみ依存し、他の病院がどのような契約を選べるかには依存しない。

さて、契約集合の部分集合のペア (X_D, X_H) に対して、次の式が成り立つとしよう。

$$\begin{aligned} X_D &= X \setminus R_H(X_H) \\ X_H &= X \setminus R_D(X_D) \end{aligned} \tag{1}$$

すると以下の定理が成り立つ。

定理 1. すべての選択関数 C_h が棄却対象からの独立性を満たすとする。すると、式 (1) を満足するような (X_D, X_H) に対し、$X' = X_D \cap X_H$ は安定配分となる。

証明. 定義と式 (1) から、

$$X' = X_D \cap X_H = X_D \cap (X \setminus R_D(X_D)) = X_D \setminus R_D(X_D) = C_D(X_D)$$

$$X' = X_D \cap X_H = (X \setminus R_H(X_H)) \cap X_H = X_H \setminus R_H(X_H) = C_H(X_H)$$

となる。第 1 式から、X' は配分である。よって、任意の $d \in D$ に対して、$x'_D = d$ となる $x' \in X'$ が一意的に存在するので、それを x'_d と書くなら、$x'_d \succeq_d \emptyset_d$ となることは明らかである。ゆえに、$C_D(X') = X'$ が成り立つことがわかる。

また、任意の $h \in H$ に対し、$(X_H)_h = C_h(X_H) \cup R_h(X_H)$ となることは自明なので、棄却対象からの独立性より、$X'_h = C_h(X_H) = C_h(C_h(X_H)) = C_h(X'_h)$ が成り立つ。したがって、$X' = C_H(X')$ となる。以上で、X' が個別合理性を満たすことが示された。

次に、X' をブロックする X'' が存在しないことを示そう。そのために、$X'' \subset C_D(X' \cup X'')$ となるような X'' を考える。すると、X'' は配分であるから、任意の $d \in D$ (X'') に対し、$x''_D = d$ となる $x'' \in X''$ が一意的に存在するので、それを x''_d としよう。同様に $x'_D = d$ となるような一意的な $x' \in X'$ を x'_d とする。すると、$x''_d = C_d(\{x'_d, x''_d\})$ なので、$x''_d \succeq_d x'_d$ となる。すでに示したように $X' = C_D(X_D)$ であるから、$x'_d = C_d(X_D)$ である。よって、$x''_d \in X_D$ であれば $x''_d = C_d(X_D) = x'_d$ でなければならない。したがって、$X'' \cap X_D \subset C_D(X_D)$ が成り立つ。ゆえに、

$$X'' \cap R_D(X_D) = X'' \cap X_D \cap R_D(X_D) \subset C_D(X_D) \cap R_D(X_D) = \emptyset$$

である。すなわち、$X'' \subset X \setminus R_D(X_D) = X_H$ となる。仮に、ある $h \in H$ に対して、

$$X'' = C_h(X' \cup X'')$$

となったとする。$X'_h = C_h(X_H)$ なので、$X_H \setminus (X'_h \cup X'') \subset X_H \setminus X'_h = X_H \setminus C_h(X_H)$ となることから、棄却対象からの独立性を用いると

$$X'_h = C_h(X_H) = C_h(X'_h \cup X'') = C_h(X' \cup X'')$$

となることがわかる。したがって、$X''=X'_h$ でなければならない。ところが、X' は個別合理的なので、$X'_h=C_h(X')$ である。ゆえに、$X''=C_h(X')$ が成り立つことから、X'をブロックするような X'' は存在しない。

さらに、定理1の逆も成り立つ。

定理 2. すべての選択関数 C_h が棄却対象からの独立性を満たすとする。すると、安定配分 X' に対し、式 (1) を満たすような (X_D, X_H) が存在して、$X'=X_D \cap X_H$ となる。

証明. 安定配分を X' とする。任意の $d \in D(X')$ に対して、$x'_D=d$ となるような $x' \in X'$ が存在する。それを x'_d と書くことにしよう。そこで、任意の $d \in D(X')$ に対し、

$$X^+_d=\{x \in X_d \mid x \succeq_d x'_d\}$$
$$X^-_d=\{x \in X_d \mid x'_d \succeq x\}$$

と定義する。さらに、

$$X_H=\bigcup_{d \in D(X')} X^+_d, \quad X_D=\bigcup_{d \in D(X')} X^-_d$$

とする。すると、$(X_H \setminus X', X', X_D \setminus X')$ が X の分割になることは明らかである。さてそこで、ある $h \in H$ に対し、$X'' \equiv C_h(X_H) \neq X'_h=C_h(X')$ であったとしよう。定義から、$X'' \subset X_H$ であり、また、$X' \subset X_H$ も明らかである。ゆえに、$X_H \setminus (X' \cup X'') \subset X_H \setminus X''=X_H \setminus C_h(X_H)$ なので、棄却対象からの独立性より、$X''=C_h(X' \cup X'')$ が成り立つ。また、C_h はユニタリなので、X'' も配分である。したがって、$X''=\{x''_d \mid d \in D(X'')\}$ と表すことができる。$X'' \subset X_H$ であったから、X_H の定義から、任意の $d \in D(X'')$ に対し、$x''_d \succeq_d x'_d$ が成り立つ。すなわち、$X''=C_h(X'_h \cup X'') \subset C_D(X' \cup X'')$ となる。これは、X' が安定であることに矛盾する。ゆえに、任意の $h \in H$ に対して、$C_h(X_H)=X'_h$ でなければならない。すなわち、$C_H(X_H)=X'$ となる。よって、

$$X \setminus R_H(X_H)=X \setminus (X_H \setminus C_H(X_H))=X \setminus (X_H \setminus X')=X_D$$

が成り立つ。次に、X^-_d の定義から、任意の $d \in D$ に対して、$C_d(X^-_d)=x'_d$ が成り立つので、$C_D(X_D)=X'$ となる。ゆえに、

$$X \setminus R_D(X_D)=X \setminus (X_D \setminus C_D(X_D))=X \setminus (X_D \setminus X')=X_H$$

をえる。以上で、(X_D, X_H) が、式 (1) を満たすことが示された。最後に、(X_D, X_H) の定義から、$X_D \cap X_H=X'$ となることは自明である。

定理 1 と定理 2 をまとめると次のようになる。これは、Gale and Shapley [18] のモデルにおいて Adachi [6] が与えた安定配分の特徴付け定理を契約を伴うマッチングモデルへと拡張したものである。

定理 3. すべての選択関数 C_h が棄却対象からの独立性を満たすならば、X' が安定配分となるための必要十分条件は、

$$X_D=X \setminus R_H(X_H)$$

$$X_H = X \setminus R_D(X_D)$$

となるような $(X_D, X_H) \subset X \times X$ が存在して、$X' = X_D \cap X_H$ が成り立つことである。

注 2. 定理 1 の証明において、(X_D, X_H) が定理 3 の条件を満たすとき、$X' = X_D \cap X_H$ に対し、$X' = C_D(X_D) = C_H(X_H)$ が成り立つことを示した。この事実は後の議論に必要になる。

定理 3 は棄却対象からの独立性が仮定されない場合には成り立たない。これは、Aygün and Sönmez [9] によって指摘されたものである。

例 2. $D = \{d_1, d_2\}$、$H = \{h\}$ とし、$X = \{x, x', y, y'\}$ とする。さらに、$x_D = x'_D = d_1$、$y_D = y'_D = d_2$ とし、$X_h = X$ とする。

$$x \succ_{d_1} x' \succ_{d_1} \emptyset_{d_1},\ y' \succ_{d_2} y \succ_{d_2} \emptyset_{d_2}$$

とする。また、h については、$|X'| = 1$ ならば、$C_h(X') = X'$ であり、$|X'| \geq 3$ ならば、$C_h(X') = \emptyset$ とする。すると、$|X_H| = 1$ ならば、$R_H(X_H) = \emptyset$ なので、$X_D \equiv X \setminus R_H(X_H) = X$ となる。ゆえに、$C_D(X_D) = \{x, y'\}$ だから、$R_D(X_D) = \{x', y\}$、したがって、$X \setminus R_D(X_D) = \{x, y'\} \neq X_H$ なので、定理 3 の条件を満たすような (X_D, X_H) は存在しない。

次に、$|X_H| = 3$ ならば、$C_H(X_H) = \emptyset$ なので、$R_H(X_H) = X_H$ となる。ゆえに $X_D \equiv X \setminus R_H(X_H) = X \setminus X_H$ であるから、$|X_D| = 1$ となる。したがって、$C_D(X_D) = X_D$ となる。ゆえに $R_D(X_D) = \emptyset$ なので、$X \setminus R_D(X_D) = X \neq X_H$ となる。よって、このときも定理 3 の条件を満たすような (X_D, X_H) は存在しない。

$X_H = X$ ならば、$C_H(X_H) = \emptyset$ であるから、$R_H(X_H) = X$ ゆえに、$X_D \equiv X \setminus R_H(X_H) = \emptyset$。したがって、$C_D(X_D) = \emptyset$ なので、$R_D(X_D) = \emptyset$。したがって、$X \setminus R_D(X_D) = X = X_H$ となる。すなわち、$(X_D, X_H) = (\emptyset, X)$ は定理 3 の条件を満足する。

$|X'| = 2$ となるような X' については、以下のように定義する。

X'	$C_h(X')$	$R_h(X')$	$X'' \equiv X \setminus R_h(X')$	$C_D(X'')$	$R_D(X'')$	$X \setminus R_D(X'')$
$\{x, x'\}$	$\{x\}$	$\{x'\}$	$\{x, y, y'\}$	$\{x, y'\}$	$\{y\}$	$\{x, x', y'\}$
$\{x, y\}$	$\{x, y\}$	$\emptyset$	$\{x, x', y, y'\}$	$\{x, y'\}$	$\{x', y\}$	$\{x, y'\}$
$\{x, y'\}$	$\{y'\}$	$\{x\}$	$\{x', y, y'\}$	$\{x', y'\}$	$\{x, y\}$	$\{x', y'\}$
$\{x', y\}$	$\{x'\}$	$\{x'\}$	$\{x, y, y'\}$	$\{x, y'\}$	$\{y\}$	$\{x, x', y'\}$
$\{x', y'\}$	$\{x', y'\}$	$\{x'\}$	$\{x, y, y'\}$	$\{x, y'\}$	$\{y\}$	$\{x, x', y'\}$
$\{y, y'\}$	$\{y\}$	$\{x'\}$	$\{x, y, y'\}$	$\{x, y'\}$	$\{y\}$	$\{x, x', y'\}$

すると、$|X_H| = 2$ となるような X_H に対し、(X_D, X_H) が定理 3 の条件を満たすことはない。したがって、定理 3 の条件が満たされるのは、$(X_D, X_H) = (\emptyset, X)$ のときに限られるが、このとき、$X' = X_D \cap X_H = \emptyset$ となり、X' は、任意の一点集合によってブロックされるので安定ではない。

上の例において、$X' = \{x, x'\}$ とし、$z = y$ とすれば、$z \notin X'$ である。さらに、$X' \cup \{z\} =$

$\{x, x', y\}$ なので、定義から $C_h(X' \cup \{z\}) = \emptyset$ である。ゆえに、$z \notin C_h(X' \cup \{z\})$ となる。ところが、$C_h(X') = \{x\}$ なので、$C_h(X') \neq C_h(X' \cup \{z\})$ となって棄却対象からの独立性が満たされない。したがって、棄却対象からの独立性が満たされないような場合には、定理 3 の条件は安定配分であるための十分条件であるとは必ずしもいえない。

さらに、この例において安定配分は $X' = \{x, y\}$ または $X' = \{x', y'\}$ の 2 つに限られる。まず、$|X'| \geq 3$ であるような X' は個別合理的ではない。また、$\{x, y\}$ と $\{x', y'\}$ 以外で $|X'| = 2$ となるようなものも同様である。さらに、$X' = \{x\}$ と $X' = \{y\}$ は、$X'' = \{x, y\}$ によりブロックされる。$X' = \{x'\}$ と $X' = \{y'\}$ は、$X'' = \{x', y'\}$ によりブロックされる。

$X' = \{x, y\}$ と $X' = \{x', y'\}$ が個別合理的であることは明らかである。また、$X'' \subset X$ で、$X' \cup X'' \neq X'$ ならば、$|X' \cup X''| \geq 3$ であるから、$C_h(X' \cup X'') = \emptyset$ となる。したがって、これら 2 つをブロックするような X'' は存在しない。以上で、$X' = \{x, y\}$ と $X' = \{x', y'\}$ の 2 つのみが安定配分であることがわかる。

しかし、すでに確認したように、定理 3 の条件を満たすような (X_D, X_H) は $(\emptyset, X)$ だけなので、$X_D \cap X_H = \{x, y\}$ あるいは $X_D \cap X_H = \{x', y'\}$ となるような (X_D, X_H) は存在しない。すなわち、定理 3 の条件は必ずしも安定配分が存在することの必要条件とはならない。

4　代替性と安定配分の存在定理

前節の例から、安定配分の存在にとって棄却対象からの独立性は必要条件ではない。しかし、この条件は安定配分が存在するための十分条件の一部として重要である。以下では、安定配分が存在するための十分条件について考える。まず、新たな条件を導入する。

定義 12. 選択関数 C_h が代替性を満たすとは、$Y \subset X$ かつ $x, z \in X \setminus Y$ で、

$$z \notin C_h(Y \cup \{z\}) \text{ かつ } z \in C_h(Y \cup \{x, z\})$$

となるようなものが存在しないときをいう[9)]。

代替性は、次の 2 つの条件のそれぞれと同値である。

(1) $Z_1 \subset Z_2 \subset X$ ならば $Z_1 \cap C_h(Z_2) \subset C_h(Z_1)$ となる[10)]。

(2) $Z_1 \subset Z_2 \subset X$ ならば $R_h(Z_1) \subset R_h(Z_2)$ となる。

9）　いくつかの文献では、代替性の定義において、$x, z \in X \setminus Y$ ではなく単に $x, z \in X$ としているものもある。形式的には後者の方が強い要求であるが、事実上どちらでも同じになる。なぜなら、任意の $Y \subset X$ と任意の $x, z \in X$ に対し、$Y \cup \{z\} \subset Y \cup \{x, z\}$ となるのは自明なので、代替性から条件 (2) が成り立つことにより、$R_h(Y \cup \{z\}) \subset R_h(Y \cup \{x, z\})$ となる。したがって、$z \in C_h(Y \cup \{z\})$ かつ $z \in C_h(Y \cup \{x, z\})$ となることはない。

10）　この条件は 1954 年の Chernoff [14] によって初めて導入されたといわれている。Suzumura [36]、Aizerman and Aleskerov [8] を見よ。それゆえ、Suzumura [36] はこれを Chernoff の公理とよんでいる。ただし、それが定着した用語であるかどうかは定かではない。Aizerman and Aleskerov [8] は、同じ条件を heritage condition（遺産条件）とよんでいる。

まず、代替性から条件（1）を導く。$Z_1 \subset Z_2 \subset X$ として、$z \in Z_1 \cap C_h(Z_2)$ としよう。$Z_1 = Z_2$ ならば、$C_h(Z_2) = C_h(Z_1)$ なので、$z \in C_h(Z_1)$ であることは自明である。そこで、$\emptyset \neq Z_2 \setminus Z_1 = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ としよう。

もし条件（1）が成り立たないなら、$z \notin C_h(Z_1)$ となる。このとき $Y_1 = Z_1 \setminus \{z\}$ とすると、明らかに $x_1, z \in X \setminus Y_1$ であり、$Y_1 \cup \{z\} = Z_1$ なので、$z \notin C_h(Y_1 \cup \{z\})$ となる。したがって、代替性から、$z \notin C_h(Y_1 \cup \{x_1, z\}) = C_h(Z_1 \cup \{x_1\})$ でなければならない。さらに、$Y_2 = Y_1 \cup \{x_1\}$ とすると、$x_2, z \in X \setminus Y_2$ であり、$Y_2 \cup \{z\} = Z_1 \cup \{x_1\}$ なので、$z \notin C_h(Y_2 \cup \{z\})$ となる。ゆえに、代替性から、$z \notin C_h(Y_2 \cup \{x_2, z\}) = C_h(Z_1 \cup \{x_1, x_2\})$ である。以下、同様にして、$z \notin C_h(Z_1 \cup \{x_1, \cdots, x_k\}) = C_h(Z_2)$ となるが、これは $z \in Z_1 \cap C_h(Z_2)$ に矛盾する。したがって、$z \in C_h(Z_1)$ でなければならない。

次に、条件（1）から代替性を導く。条件（1）を仮定し、$Y \subset X$ かつ $x, z \in X \setminus Y$ に対し、$z \in C_h(Y \cup \{x, z\})$ が成り立つものとする。ここで、$Z_1 = Y \cup \{z\}$ かつ $Z_2 = Y \cup \{x, z\}$ とすると、$z \in C_h(Z_2)$ であり、かつ $z \in Z_1$ なので、条件（1）より、$z \in C_h(Z_1) = C_h(Y \cup \{z\})$ となる。すなわち、代替性が満たされなければならない。

以上で、代替性と条件（1）との同値性が示されたので、次は、条件（1）と（2）の同値性を示そう。条件（1）を仮定して、$Z_1 \subset Z_2$ となるとき、$z \in R_h(Z_1)$ であったとする。すると、$z \in (Z_1)_h \subset (Z_2)_h$ となっている。もし、$z \notin R_h(Z_2)$ ならば、$z \in Z_1 \cap C_h(Z_2)$ なので、条件（1）より、$z \in C_h(Z_1)$ となる。これは、$z \in R_h(Z_1)$ に矛盾。よって、$z \in R_h(Z_2)$ となり、条件（2）が成り立つ。逆に、条件（2）を仮定して、$Z_1 \subset Z_2$ となるとき、$z \in Z_1 \cap C_h(Z_2)$ とする。すると、$z \in (Z_2)_h$ だから、$z_H = h$ である。したがって、$z \in Z_1$ より、$z \in (Z_1)_h$ となる。もし、$z \notin C_h(Z_1)$ ならば、定義から $z \in R_h(Z_1)$ なので、条件（2）より、$z \in R_h(Z_2)$ となるが、これは $z \in C_h(Z_2)$ に矛盾する。ゆえに、$z \in C_h(Z_1)$ となって条件（1）が成り立つ。

これらの同値条件のうち、数学的にシンプルなのは、条件（2）であろう。すなわち、棄却関数の値が集合の包含関係に関して単調であることを要請している。解釈するのもやさしい。集合 Z_1 に含まれる契約の中で z が選ばれなかった場合、Z_1 にどのような契約が追加されたとしても z が選ばれることはないということである。言い換えれば、もし Z_1 において選ばれなかった z が、新たな契約が追加されたことにより選ばれるのならば、z と新たな契約とは互いに補完関係にあるといえるだろう。代替性はそのような補完関係が成り立たないことを意味している。代替性が満たされるとき、安定性とペア安定性は同値になる。まずは、これを確認しておこう。

命題 2. すべての選択関数 C_h が代替性を満たすならば、配分 X' が安定であることとペア安定であることは同値である。

証明. 安定性からペア安定性が導かれることはすでに示した。そこで、配分 X' がペア安

定であるとする。仮に $h \in H$ と $X'' \neq C_h(X')$ が存在して、$X'' = C_h(X' \cup X'') \subset C_D(X' \cup X'')$ となったとしよう。$x'' \in X'' \setminus C_h(X')$ を選び、$d = x''_D$ とする。$x'' \in C_D(X' \cup X'')$ なので、$x'' \in C_d(X' \cup X'')$ であるが、$(X' \cup X'')_d = \{X'_d, x''\}$ であるから、$x'' \in C_d(X' \cup X'') = C_d(X' \cup \{x''\})$ である。次に、$x'' \notin C_h(X' \cup \{x''\})$、すなわち、$x'' \in R_h(X' \cup \{x''\})$ であるとする。明らかに $X' \cup \{x''\} \subset X' \cup X''$ なので、代替性から、$x'' \in R_h(X' \cup \{x''\}) \subset R_h(X' \cup X'')$ となる。これは、$x'' \in X'' = C_h(X' \cup X'')$ に矛盾する。したがって、$x'' \in C_h(X' \cup \{x''\})$ でなければならない。以上から、X' は x'' を通じて、h と d によりブロックされる。これは、X' がペア安定であることに矛盾するので、ペア安定であれば安定であることが示された。

代替性が満たされない場合には、安定配分が存在するとは限らない。この場合、それぞれ単独では採用されないような契約でも、それらが複数組み合わされると採択されることがある。つまり、複数の契約の間に正の外部性が働くとみなされる。外部性下ではブロッキングの可能性が増えるので、安定配分（コア配分）が存在しにくくなることは、よく知られている。

例 3. $H = \{h_1, h_2\}$ とし、$D = \{d_1, d_2, d_3\}$ とする。また、$X = \{x, x', y, y', z, z'\}$ とする。ここで、$x_D = x'_D = d_1$、$y_D = y'_D = d_2$、$z_D = z'_D = d_3$ であり、$x_H = y_H = z_H = h_1$、$x'_H = y'_H = z'_H = h_2$ であるとしよう。すなわち、$X_{d_1} = \{x, x'\}$、$X_{d_2} = \{y, y'\}$、$X_{d_3} = \{z, z'\}$ であり、$X_{h_1} = \{x, y, z\}$、$X_{h_2} = \{x', y', z'\}$ である。

$x' \succ_{d_1} x \succ_{d_1} \emptyset_{d_1}$、$y' \succ_{d_2} y$、$z \succ_{d_3} z'$ とする。さらに、C_{h_1} と C_{h_2} は次のように与えられるとする。

$X'_{h_1} \subset X_{h_1}$	$C_{h_1}(X'_{h_1})$	$X'_{h_2} \subset X_{h_2}$	$C_{h_2}(X'_{h_2})$
$\{x\}$	$\{x\}$	$\{x'\}$	$\{x'\}$
$\{y\}$	$\{y\}$	$\{y'\}$	$\{y'\}$
$\{z\}$	$\emptyset$	$\{z'\}$	$\{z'\}$
$\{x, y\}$	$\{x, y\}$	$\{x', y'\}$	$\{x', y'\}$
$\{x, z\}$	$\{x, z\}$	$\{x', z'\}$	$\{x', z'\}$
$\{y, z\}$	$\{y, z\}$	$\{y', z'\}$	$\{y', z'\}$
$\{x, y, z\}$	$\{x, z\}$	$\{x', y', z'\}$	$\{x', z'\}$

$X' = X'_{h1} \cup X'_{h2} \subset X$ とすると、$X'_{h1} = \{z\}$、$X'_{h1} = X_{h1}$、$X'_{h2} = X_{h2}$ となるような場合は、個別合理性が満たされない。$X'_{h1} = \{x\}$ であるような配分は、$z' \in X'_{h2}$ であるならば、$X'' = \{x, z\}$ によりブロックされる。なぜなら、まず、$C_{h1}(X' \cup X'') = C_{h1}(\{x, z\}) = \{x, z\} = X''$ となる。また、$X'_{d3} = \{z'\}$、$X''_{d3} = \{z\}$、$X'_{d1} = X''_{d1} = \{x\}$ であり、$z \succ_{d3} z'$ となるからである。$z' \notin X'_{h2}$ の場合も、$X'_{d3} = \{\emptyset_{d3}\}$、$X''_{d3} = \{z\}$ で、$z \succ_{d3} \emptyset_{d3}$ であるから、X'' が X' をブロックする。$X'_{h1} = \{y\}$ であるような配分も、$X'' = \{y, z\}$ とによりブロックされることが同様に

して示される。

次に、$X'_{h1}=\{x,y\}$ とする。このときは、$X'_{h2}=\{z'\}$ であるか、$X'_{h2}=\emptyset$ のいずれかである。後者は $X''=\{z'\}$ によりブロックされるのは明らかである。前者は、$X''=\{x,z\}$ とすれば、C_{h1} $(X'\cup X'')=C_{h1}$ $(\{x,y,z\})=\{x,z\}=X''$ であり、$X'_{d3}=\{z'\}$ なので、$z\succ_{d3}z'$ より、X' は X'' にブロックされることがわかる。

$X'_{h1}=\{x,z\}$ とする。すると、$X'_{h2}=\{y'\}$ ないし $X_{h2}=\emptyset$ である。後者は $X''=\{y'\}$ でブロックされる。前者は、$X''=\{x',y'\}$ とすれば、C_{h2} $(X'\cup X'')=C_{h2}$ $(\{x',y'\})=\{x',y'\}=X''$ となり、また、$x'\succ_{d1}x$ となることから、X' は X'' にブロックされる。

$X'_{h1}=\{y,z\}$ とする。このときは、$X'_{h2}=\{x'\}$ または $X'_{h2}=\emptyset$、後者は、$X''=\{x'\}$ でブロックされる。前者は、$X''=\{x',y'\}$ とすると、C_{h2} $(X'\cup X'')=C_{h2}$ $(\{x',y'\})=\{x',y'\}=X''$ となり、また、$y'\succ_{d2}y$ となることから、X' は X'' にブロックされる。

最後に $X'_{h1}=\emptyset$ とする。すると X'_{h2} が一点集合となるような場合は、常に X''_{h2} が 2 つの要素からなるような X'' によってブロックされる。よって、$|X'_{h2}|=2$ としてよい。$X'_{h2}=\{x',y'\}$ ならば、$X''=\{x',z'\}$ とすれば、C_{h2} $(X'\cup X'')=C_{h2}$ $(\{x',y',z'\})=\{x',z'\}=X''$ となり、$z'\succ_{d3}\emptyset_{d3}$ なので、X' は X'' にブロックされる。$X'_{h2}=\{y',z'\}$ ならば、$X''=\{x',z'\}$ とすれば同様に X'' が X' をブロックする。最後に $X'_{h2}=\{x',z'\}$ とする。このとき、$X'_{d2}=\emptyset_{d2}$ となっているので、$X''=\{y\}$ とすれば、X'' は X' をブロックする。以上で、この例には安定配分が存在しないことがわかる。

選択関数 C_{h1} について、C_{h1} $(\{z\})=\emptyset$ であり、C_{h1} $(\{x,z\})=\{x,z\}$ となっているが、これは $Y=\emptyset$ とするなら、$z\notin C_{h1}$ $(Y\cup\{z\})$ でありながら、$z\in C_{h1}$ $(Y\cup\{x,z\})$ となることを意味する。すなわち、選択関数 C_{h1} は代替性を満たさない。しかしながら、C_{h1} と C_{h2} のいずれもが棄却対象からの独立性を満たすことは簡単に確かめることができる。(なお、この例は、Roth and Sotomayor [33] の Example 2.7 を本稿のモデルに適合するように書き直したものである。)

上の例は安定配分の存在にとって選択関数の代替性が重要であることを示唆しているが、代替性が満たされたからといって安定配分が常に存在するとは限らない。これは以下の反例をみるとわかる。

例 4. $H=\{h\}$ とし、$D=\{d_1,d_2\}$ とする。また、$X=\{x,x',y\}$ であり、$X_{d1}=\{x,x'\}$、$X_{d2}=\{y\}$ とする。さらに、$X_h=X$ である。医師の選好は、$x\succ_{d1}x'\succ_{d1}\emptyset_{d1}$ であり、$y\succ_{d2}\emptyset_{d2}$ であるとする。病院 h の選択関数 C_h は次のように与えられる。

$C_h(\{x\})=\{x\}$	$C_h(\{x,x'\})=\{x\}$	$C_h(\{x,x',y\})=\emptyset$
$C_h(\{x'\})=\{x'\}$	$C_h(\{x,y\})=\{y\}$	
$C_h(\{y\})=\{y\}$	$C_h(\{x',y\})=\{x'\}$	

すると、$|X'| \geq 2$ となるような X' はすべて個別合理性を満たさないので、それらは安定ではない。そこで、$|X'| \leq 1$ となるような X' について考えよう。$X' = \{x\}$ ならば、$X'' = \{y\}$ とすると、$X'' = \{y\} = C_h(\{x, y\}) = C_h(X' \cup X'')$ であり、かつ、$y \succ_{d2} \emptyset_{d2}$ なので、X' は X'' によってブロックされる。$X' = \{x'\}$ ならば、$X'' = \{x\}$ とすれば、同様にして X' が X'' によりブロックされることがわかる。$X' = \{y\}$ ならば、$X'' = \{x'\}$ が X' をブロックする。最後に、$X'' = \emptyset$ の場合は、$X'' = \{x\}$ が X' をブロックする。以上から、安定配分が存在しないことが示された。この例における選択関数 C_h は明らかに代替性を満たしている。しかし、棄却対象からの独立性は満たされない。たとえば、$Y = \{x', y\}$ とすると、$x \notin C_h(\{x, x', y\}) = C_h(Y \cup \{x\})$ であるが、$C_h(Y) = C_h(\{x', y\}) = \{x'\} \neq \emptyset = C_h(Y \cup \{x\})$ となるので棄却対象からの独立性の条件に違反している。（この例は、Aygün and Sönmez [9] にもとづくものである。）

さて、例 3 と例 4 は、棄却対象からの独立性と代替性のどちらか一方でも満たされない場合、安定配分が存在しない可能性があることを示している。しかし、これらの 2 条件が同時に満たされるならば、安定配分が存在することが知られている。これを定理として述べておこう。

定理 4. すべての選択関数 C_h が棄却対象からの独立性と代替性を満たすならば安定配分が存在する。

証明. 集合 X のすべての部分集合からなる集合族を Σ とし、その直積集合 $\Sigma \times \Sigma$ の上に次のような半順序 $\geq$ を定義する。すなわち、$(X_D, X_H), (X'_D, X'_H) \in \Sigma \times \Sigma$ に対し、

$$(X_D, X_H) \geq (X'_D, X'_H) \quad \Longleftrightarrow \quad X_D \supset X'_D \quad \text{かつ} \quad X_H \subset X'_H$$

とする。すると半順序集合 $(\Sigma \times \Sigma, \geq)$ は有限束[11] となる。実際、$(X_D, X_H), (X'_D, X'_H) \in \Sigma \times \Sigma$ に対し、

$$(X_D, X_H) \wedge (X'_D, X'_H) = (X_D \cap X'_D, X_H \cup X'_H)$$
$$(X_D, X_H) \vee (X'_D, X'_H) = (X_D \cup X'_D, X_H \cap X'_H)$$

と定義すれば、$(X_D, X_H) \wedge (X'_D, X'_H) \leq (X_D, X_H)$、$(X'_D, X'_H) \leq (X_D, X_H) \vee (X'_D, X'_H)$ となることは直ちにわかる。さらに、$(\hat{X}_D, \hat{X}_H) \leq (X_D, X_H)$、$(X'_D, X'_H) \leq (\check{X}_D, \check{X}_H)$ ならば、$\hat{X}_D \subset X_D \subset \check{X}_D$ かつ $\hat{X}_D \subset X'_D \subset \check{X}_D$ であり、また、$\hat{X}_H \supset X_H \supset \check{X}_H$ かつ $\hat{X}_H \supset X'_H \supset \check{X}_H$ であるから、$\hat{X}_D \subset X_D \cap X'_D$ 及び $X_D \cup X'_D \subset \check{X}_D$ であり、また $\hat{X}_H \supset X_H \cup X'_H$ 及び $X_H \cap X'_H \supset \check{X}_H$ である。すなわち、$(\hat{X}_D, \hat{X}_H) \leq (X_D, X_H) \wedge (X'_D, X'_H)$ かつ $(X_D, X_H) \vee (X'_D, X'_H) \leq (\check{X}_D, \check{X}_H)$ となる。したがって、$(\Sigma \times \Sigma, \geq)$ は有限束である。そこで、$\Sigma \times \Sigma$ からそれ自身への関数 F を以下のように定義しよう。まず、$F_1 : \Sigma \to \Sigma$ 及び $F_2 : \Sigma \to \Sigma$ を

$$F_1(X') = X \setminus R_H(X')$$

11）　半順序集合と束の定義は Birkhoff [12] を参照。

$$F_2(X') = X \setminus R_D(X')$$

と定義し、$F(X_D, X_H) = (F_1(X_H), F_2(F_1(X_H)))$ と定義する。そこで、$(X'_D, X'_H) \leq (X''_D, X''_H)$ としよう。すると、$X''_H \subset X'_H$ なので選択関数 C_h の代替性から、$R_H(X''_H) \subset R_H(X'_H)$ となる。ゆえに、$F_1(X'_H) = X \setminus R_H(X'_H) \subset X \setminus R_H(X''_H) = F_1(X''_H)$ となる。

次に、$Z'_H \equiv F_1(X'_H) \subset F_1(X''_H) \equiv Z''_H$ であることが示されたので、任意の $d \in D$ と任意の $z' \in Z'_H$ に対して、$C_d(Z''_H) \succeq_d z'$ が成り立つ。したがって、$R_d(Z'_H) \subset R_d(Z''_H)$ となる。ゆえに、$R_D(Z'_H) \subset R_D(Z''_H)$ が成り立つ。これより、

$$F_2(F_1(X''_H)) = X \setminus R_D(Z''_H) \subset X \setminus R_D(Z'_H) = F_2(F_1(X'_H))$$

を得る。以上から、$F(X'_D, X'_H) = (F_1(X'_H), F_2(F_1(X'_H))) \leq (F_1(X''_H), F_2(F_1(X''_H))) = F(X''_D, X''_H)$ となることが示された。すなわち、$\Sigma \times \Sigma$ からそれ自身への関数 F は半順序 $\geq$ に関し同調（isotone）である。有限束が完備束であることは明らかである。ゆえに、F は完備束からそれ自身への同調関数である。そのような関数は不動点を持つので[12]、$(X_D, X_H) \in \Sigma \times \Sigma$ が存在して、$(X_D, X_H) = F(X_D, X_H)$ となる。すなわち、$F_1(X_H) = X \setminus R_H(X_H) = X_D$ となり、さらにこれから、$X_H = F_2(F_1(X_H)) = F_2(X_D) = X \setminus R_D(X_D)$ が成り立つ。まとめると、

$$X_D = X \setminus R_H(X_H)$$
$$X_H = X \setminus R_D(X_D)$$

を満たすような (X_D, X_H) が存在することになる。そこで、$X = X_D \cap X_H$ とすると、定理 1 より、X は安定配分である。

また、F の不動点集合を$\mathcal{F}$とすると、$(\mathcal{F}, \leq)$ は完備束となることが知られている[13]。したがって、任意の部分集合 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ には上限 $(\check{X}_D, \check{X}_H) \in \mathcal{F}'$ と下限 $(\hat{X}_D, \hat{X}_H) \in \mathcal{F}'$ が存在する。すなわち、任意の $(X_D, X_H) \in \mathcal{F}'$ に対し、

$$(\hat{X}_D, \hat{X}_H) \leq (X_D, X_H) \leq (\check{X}_D, \check{X}_H)$$

となる。そこで、$\hat{X} = \hat{X}_D \cap \hat{X}_H$ とし、$\check{X} = \check{X}_D \cap \check{X}_H$ とする。さらに、$X' = X_D \cap X_H$ とする。注 2 より、$\hat{X} = C_D(\hat{X}_D)$、$X = C_D(X_D)$、$\check{X} = C_D(\check{X}_D)$ であり、定義から、$\hat{X}_D \subset X_D \subset \check{X}_D$ となることより、任意の $d \in D$ に対し、$\hat{X}_d = C_d(\hat{X}_D) \preceq_d C_d(X_D) = X_d \preceq_d C_d(\check{X}_D) = \check{X}_d$ となる。

そこで、配分 X' と X'' に対し、$X' \succeq_D X''$ となるのは、すべての $d \in D$ に対し、$X'_d \succeq_d X''_d$ が成り立つことであるとして、配分の集合上に半順序を定義しよう。すると、上の事実は安定配分の集合がこの半順序 $\succeq_D$ に関して完備束になることを示している。さらに、

---

12)　これはタルスキの不動点定理として有名な結果である。これについては、Birkhoff [12]、Tarski [37]、Echenique [15] などを参照せよ。

13)　この事実は、やはり Tarski [37] などで示されている。ただし、注意すべきは、$(\mathcal{F}, \leq)$ は $(\Sigma \times \Sigma, \leq)$ の部分束ではない。すなわち、(X'_D, X'_H) と (X''_D, X''_H) が不動点であったとしても、$(X'_D \cup X''_D, X'_H \cap X''_H)$ あるいは $(X'_D \cap X''_D, X'_H \cup X''_H)$ が不動点である保証はない。束の部分集合が同じ半順序について束ではあるが部分束ではないとき、束部分集合という。したがって、不動点集合は束部分集合ではあるが部分束とは限らない。

安定配分 X' と X'' とに対して、$X'' \succeq_D X'$ としよう。もし、ある $h \in H$ に対し、$C_h(X' \cup X'') \cap X''_h \neq \emptyset$ となるなら、$X'' \succeq_D X'$ より、$X''_h \subset C_D(X' \cup X'')$ が成り立つことから、X' は $C_h(X' \cup X'') \cap X''_h$ によりブロックされることになる。これは、X' の安定性に矛盾する。したがって、安定配分同士に $X'' \succeq_D X'$ という関係が成り立つなら、すべての $h \in H$ に対し、$X''_h \subset R_h(X' \cup X'')$ となる。ゆえに、棄却対象からの独立性から、すべての $h \in H$ に対し、$C_h(X' \cup X'') = X'_h$ が成り立つ。すなわち、$C_H(X' \cup X'') = X'$ でなければならない。そこで、配分 X' と X'' とに対し、$C_H(X' \cup X'') = X'$ となるとき、$X' \succeq_H X''$ とすることで半順序 $\succeq_H$ を定義すれば、安定配分 X' と X'' とに対し、次のような関係が成り立つことになる。

$$X'' \succeq_D X' \quad \Longleftrightarrow \quad X' \succeq_H X''$$

このことから、安定配分の集合は半順序 $\succeq_H$ に関しても完備束となり、$\succeq_H$ についての上限と下限は、それぞれ、$\succeq_D$ についての下限と上限に対応することになる。

5　存在のための必要条件

前節では棄却対象からの独立性と代替性の下で安定配分の存在を示した。さらにこれら 2 つの条件のうち、どちらか一方でも満たされないと、必ずしも安定配分が存在しないこともわかっている。それならば、この 2 条件は安定配分が存在するための必要条件になるのかどうか、ということが問題になるだろう。しかし、すでに例 2 において、選択関数は代替性を満たし、かつ安定配分が存在するにもかかわらず、棄却対象からの独立性は満たされていない。したがって、代替性の下でも棄却対象からの独立性は安定配分が存在することの必要条件にはならない。さらに、棄却対象からの独立性が満たされていたとしても、同様に代替性が安定配分が存在することの必要条件ではないことが、Hatfield and Kojima [19] により示されている。それは次の例を見ればわかる。

例 5. $H = \{h\}$、$D = \{d_1, d_2\}$ とする。さらに、$X = \{x, x', y\}$ とし、$x_D = x'_D = d_1, y_D = d_2$、$X_h = X$ とする。C_h は以下のようなものであるとしよう。

すなわち、X' が一点集合ならば、$C_h(X') = X'$ であり、$C_h(\{x, x'\}) = \{x\}$、$C_h(\{x, y\}) = \{x, y\}$、$C_h(\{x', y\}) = \{x'\}$、$C_h(\{x, x', y\}) = \{x, y\}$ とする。さらに、$x \succ_{d_1} x' \succ_{d_1} \emptyset_{d_1}$、$y \succ_{d_2} \emptyset_{d_2}$ とする。すると、$y \in R_h(\{x', y\})$ であるが、$y \notin R_h(\{x, x', y\})$ となることから、C_h は代替性を満たさない。部分集合 $X' \subset X$ のうち、$X' = \{x, x'\}$、$X' = \{x', y\}$、$X' = X$ は個別合理性を満たさないので安定配分とはならない。また、$X' = \{x\}$、$X' = \{x'\}$、$X' = \{y\}$ は、すべて $X'' = \{x, y\}$ によってブロックされる。最後に $X' = \{x, y\}$ とすれば、これが唯一の安定配分となることがわかる。

ゆえに前節において仮定された 2 条件は安定配分が存在するための十分条件ではあっ

ても必要条件ではない。したがって安定配分が依然として存在するように少なくともどちらかの条件を緩和する余地が残ることになる。実際、Hatfield and Milgrom [23] 以降、安定配分の存在を維持しつつ代替性条件をいかに弱めるかについて研究が行われてきた。それらについては後の節に譲ることにして、ここではそのような研究の限界がどこにあるのかについてのみ述べておこう。

定義 13. 選択関数 C_h が弱代替性を満たすとは、$X' \subset X'' \subset X$ であるような X' と X'' に対し、任意の $x', x'' \in X''$ について、$x'_D = x''_D$ ならば $x' = x''$ が成り立つとき、$R_h(X') \subset R_h(X'')$ となることである。

すなわち、ユニタリな部分集合に対してのみ棄却関数が同調であるとき、選択関数は弱代替的であると定義する。すると、次の結果が得られる。

命題 3. 病院の集合 H に、2 つ以上の要素が含まれていて、少なくとも 1 つの $h \in H$ に対し、選択関数 C_h は弱代替性を満たさないとする。さらに $h' \neq h$ となるような少なくとも 1 つの $h' \in H$ に対し、$D(X_{h'}) = D$ とする。すると、安定配分が存在しないような問題を構成することができる[14)]。

証明. C_h が弱代替性を満たさないとすると、ある $X' \subset X$ と $y \in X \setminus X'$ に対し、$x \in R_h(X') \setminus R_h(X' \cup \{y\})$ となるような x が存在し、しかも、このとき、任意の $z, z' \in X' \cup \{y\}$ に対し、$z_D = z'_D$ ならば $z = z'$ が成り立つ。さて、ここで、一般性を失わずに $X' = X'_h$ と仮定してよい。仮に、$y \notin C_h(X' \cup \{y\})$ ならば、棄却対象からの独立性から、$C_h(X' \cup \{y\}) = C_h(X')$ となるので、$x \in C_h(X')$ となり矛盾。したがって、$x, y \in C_h(X' \cup \{y\})$ となる。C_h はユニタリであるから、$d_1 \equiv x_D \neq y_D \equiv d_2$ となる。すると、$D = D(X_{h'})$ であったから、$x'_D = d_1$、$y'_D = d_2$ となるような $x', y' \in X_{h'}$ が存在する。そこで、h' の選択関数 $C_{h'}$ を任意の $Z' \subset X$ に対し、$Z' \cap \{x', y'\} = \emptyset$ ならば $C_{h'}(Z') = \emptyset$、$x' \in Z'$ ならば $C_{h'}(Z') = \{x'\}$、$x' \notin Z'$ かつ $y' \in Z'$ ならば $C_{h'}(X') = \{y'\}$ と定義する。医師 d_1 は、すべての $z \neq x, x'$ に対し、

$$x \succ_{d_1} x' \succ_{d_1} \emptyset_{d_1} \succ_{d_1} z$$

であるとし、医師 d_2 は、すべての $z' \neq y, y'$ に対し、

$$y' \succ_{d_2} y \succ_{d_2} \emptyset_{d_2} \succ_{d_2} z'$$

であるとする。また、$d \in D(X') \setminus \{d_1\}$ であるような医師 d にとって、$x'_D = d$ となるような $x' \in X'$ のみが個別合理的な契約であると仮定し、さらに、それ以外のすべての医師 d は $\emptyset_d$ を最も好ましいと考えていると仮定しよう。以上のようにして定義される問題において安定配分が存在しないことを示す。

そこで、仮に X'' が安定配分であるとする。まず、$y' \in X''$ と仮定する。すると、$X''_{h'} =$

14) Hatfield and Milgrom [23] では弱代替性を代替性に代えても、この命題が成り立つと主張されているが、Hatfield and Kojima [19] は、それが誤りであり正しくは弱代替性でなければならないことを示した。

$\{y'\} = X''_{d_2}$ となる。ゆえに、$x', y \notin X''$ でなければならない。したがって、X'' はすべての医師にとって個別合理的でなければならないから、$X''_h \subset X'$ となる。すると、X'' の安定性から、$X''_h = C_h(X'') = C_h(X')$ となる。したがって、$x \notin X''$ でなければならないが、このとき、X'' は h' と d_1 とにより $Z'' = \{x'\}$ を通じてブロックされる。ゆえに、このような X'' が安定配分となることはない。

次に、$y' \notin X''$ と仮定する。すると個別合理性から、$X''_{d_2} = \{y\}$ であるか、$X''_{d_2} = \emptyset_{d_2}$ であるかのいずれかである。後者の場合、X'' は $\{y'\}$ を通じて、h' と d_2 によってブロックされる。したがって、$X''_{d_2} = \{y\}$ となる。このとき、$X''_{h'} = \{x'\}$ であるか、$X''_{h'} = \emptyset$ であるかのいずれかであるが、後者の場合、X'' は $\{y'\}$ を通じて h' と d_2 によってブロックされる。したがって、$X''_{h'} = \{x'\}$ でなければならない。すると、$X''_h \subset X' \cup \{y\}$ であるが、$x \in C_h(X' \cup \{y\})$ であったから、X'' は、$X' \cup \{y\}$ によりブロックされる。ゆえに、X'' が安定配分となることはない。以上から、命題が証明された。

注 3. 命題 3 の証明において、弱代替性の条件、すなわち、$z, z' \in X' \cup \{y\}$ について、$z_D = z'_D$ ならば $z = z'$ となるということが、どこでどのように用いられているのか、一見するとわかりにくい。実は、この条件は、$x \in R_h(X')$ となるとき、同時に、$z_D = x_D = d_1$ となるような $z \in C_h(X')$ が存在しないことを保証するために用いられている。仮にそのような z が存在したとすると、$X''_h = C_h(X')$ が成り立たなくなり証明の前半部分の議論が正しくなくなるからである。これが命題 3 が代替性の下では成り立たないことの理由でもある。

命題 3 は、弱代替性が満たされないような選択関数に対し、どの医師とも契約を結ぶことのできるような病院が他に少なくとも 1 つあれば安定配分を持たないような問題が構成できることを示している。すなわち、安定配分の存在を一般的に保証するには選択関数の弱代替性がそのための必要条件にきわめて近いということになるだろう。ところが次の例が示すように弱代替性は安定配分が存在するための十分条件にはならない。したがって、安定配分が存在するための必要十分条件は代替性と弱代替性の間のどこかにあるはずである。最近、そのような条件を見いだそうとする研究が行われているが、ここでは触れないでおく。

例 6. これは、Hatfield and Kojima [20] の Example 2 と同じものである。まず、$D = \{d_1, d_2, d_3\}$、$H = \{h, h'\}$ とし、$X = \{x, x', y, y^*, z, z^*, z'\}$ とする。$X_{d_1} = \{x, x'\}$、$X_{d_2} = \{y, y^*\}$、$X_{d_3} = \{z, z^*, z'\}$ とし、$X_h = \{x, y, y^*, z, z^*\}$ かつ $X_{h'} = \{x', z'\}$ とする。医師の選好順序は、$x' \succ_{d_1} x$、$y \succ_{d_2} y^*$、$z^* \succ_{d_3} z \succ_{d_3} z'$ であるとする。病院 h の選択関数 C_h は、以下のように与えられる。すなわち、X_h の部分集合族の上に次のような順序が与えられており、任意の $X'_h \subset X_h$ に対し、$C_h(X'_h)$ は、X'_h の部分集合のうちその順序に照らして最も順位の高いものとする。その順序を $\succ_h$ とすれば、

$$\{x, y, z\} \succ_h \{y^*\} \succ_h \{z^*\} \succ_h \{x, z\} \succ_h \{y, z\} \succ_h \{x, y\} \succ_h \{x\} \succ_h \{z\} \succ_h \{y\}$$

であり、ここに載っていない部分集合 X'_h に対しては、$\emptyset \succ_h X'_h$ であるとする。また、病院 h' の選択関数 $C_{h'}$ も、$\{z'\} \succ_{h'} \{x'\} \succ_{h'} \emptyset \succ_{h'} \{x', z'\}$ となるような順序によって与えられるとする。まず、$X'_{h'}$ に含まれる契約は x' と z' のみであるが、$x'_D = d_1$、$z'_D = d_3$ なので、$C_{h'}$ が弱代替性を満たすのは明らかである。次に、X_h において、$y_D = y^*_D = d_2$ かつ $z_D = z^*_D = d_3$ である。ゆえに、$X'' \subset X_h$ となるような部分集合が、$x', x'' \in X''$ に対し、$x'_D = x''_D$ ならば $x' = x''$ となるためには、y と y^* あるいは z と z^* を同時に含むことはない。ゆえに、$|X''| = 4$ ならば、そうはならない。また、$|X''| = 1$ となるような X'' も考える必要はない。また、$|X''| = 2$ となるような X'' に対し、$\emptyset \neq X' \subset X''$ ならば $|X'| = 1$ であるが、定義から $R_h(X') = \emptyset$ なので、弱代替性は自明に成り立つ。したがって、考慮しなければならないのは、$|X''| = 3$ のときである。しかし、$X'' = \{x, y, z\}$ ならば、$X' \subset X''$ に対し、$R_h(X') = \emptyset$ なので、このときも自明である。したがって、考えなければいけないもので $X' \subset X''$ かつ $X' \neq X''$ となるのは、次のものである。

X'	X''	$R_h(X')$	$R_h(X'')$
$\{x, y\}$	$\{x, y, z^*\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{x, z^*\}$	$\{x, y, z^*\}$	$\{z^*\}$	$\{z^*\}$
$\{y, z^*\}$	$\{x, y, z^*\}$	$\{z^*\}$	$\{z^*\}$
$\{x, y^*\}$	$\{x, y^*, z\}$	$\{y^*\}$	$\{y^*\}$
$\{y^*, z\}$	$\{x, y^*, z\}$	$\{y^*\}$	$\{y^*\}$
$\{x, y^*\}$	$\{x, y^*, z^*\}$	$\{y^*\}$	$\{y^*, z^*\}$
$\{x, z^*\}$	$\{x, y^*, z^*\}$	$\{z^*\}$	$\{y^*, z^*\}$
$\{z^*, y^*\}$	$\{x, y^*, z^*\}$	$\{z^*, y^*\}$	$\{y^*, z^*\}$

いずれの場合も、$R_h(X') \subset R_h(X'')$ が成り立つから、C_h は弱代替性を満たしている。しかし、例えば、$X' = \{x, y^*, z\}$ とし、$X'' = \{x, y, y^*, z\}$ とすると、$R_h(X') = \{x, z\}$ であるが、$R_h(X'') = \{y^*\}$ となって代替性は満たされない。

さて、この例において安定配分が存在しないことを示すのだが、まず、$\{z^*\} \succ_h X'_h$ となるような X' は、$\{z^*\}$ を通じて d_3 と h とによってブロックされる。そこで、$X'_h = \{y^*\}$ と $X''_h = \{x, y, z\}$ の場合のみを考えればよい。前者は後者を通じて h 及び d_1、d_2、d_3 によってブロックされる。また、後者は $\{x'\}$ を通じて h と d_1 によってブロックされる。したがって、安定配分は存在しない。

6　2条件の意味

前節で見たように、棄却対象からの独立性と代替性は安定配分が存在するための十分条件ではあるが、必要条件よりは、はるかに強い仮定である。そこで、安定配分の存在を保

証するようなより弱い条件を探索することになるのだが、それは後の節に譲ることにして、ここでは、この 2 条件の意味を明らかにしておこう。すでに脚注にも示されているが、代替性は、1954 年の Chernoff［14］により初めて導入されたものであり、棄却対象からの独立性も同じく Chernoff［14］の中に登場している。まず、棄却対象からの独立性と代替性が同時に満たされること[15] は、次の経路独立性と同値であることが Chambers and Yenmez［13］によって指摘されている。

定義 14. 選択関数 C_h が経路独立性を満たすとは、任意の $X', X'' \subset X$ に対し、

$$C_h(X' \cup X'') = C_h(X' \cup C_h(X'')) = C_h(C_h(X') \cup X'')$$

となるときをいう。

上の経路独立性は Plott［31］によるものであるが、さらに、この条件は以下の条件と同値である。以下の条件は Plott［31］によれば、Arrow［11］の 120 ページの中で語られているものだとされている。

定義 15. 選択関数 C_h が、アローの意味の経路独立性を満たすとは、任意の $X', X'' \subset X$ に対し、

$$C_h(X' \cup X'') = C_h(C_h(X') \cup C_h(X''))$$

となるときをいう。

経路独立性とアローの意味の経路独立性が同値であることは、経路独立性が棄却対象からの独立性と代替性の 2 条件と同値になることが示されれば、ただちにしたがうので、まずは経路独立性と 2 条件との同値性を先に示そう。最初に 2 条件から経路独立性が成り立つことを示す。$X', X'' \subset X$ に対し、$C_h(X' \cup X'') = C_h(X' \cup C_h(X''))$ を示せば十分である。明らかに $X' \cup C_h(X'') \subset X' \cup X''$ であるから、代替性から、$R_h(X' \cup C_h(X'')) \subset R_h(X' \cup X'')$ である。すなわち、$C_h(X' \cup X'') \subset C_h(X' \cup C_h(X''))$ が成り立つ。ところが、これは、$C_h(X' \cup X'') \subset C_h(X' \cup C_h(X'')) \subset X' \cup X''$ であるから、棄却対象からの独立性の定義 11 より、$C_h(X' \cup X'') = C_h(X' \cup C_h(X''))$ が成り立つ。

逆に、経路独立性から棄却対象からの独立性と代替性を導く。まず、$C_h(X') \subset X'' \subset X'$ とする。すると、$C_h(X') \cup X'' = X''$ であり、$X' \cup X'' = X'$ であるから、$C_h(X'') = C_h(C_h(X') \cup X'') = C_h(X' \cup X'') = C_h(X')$ となるので、定義 11 より棄却対象からの独立性が成り立つ。次に、$X' \subset X''$ とする。$X'' = X' \cup (X'' \setminus X')$ であるから、$C_h(X'') = C_h(X' \cup (X'' \setminus X')) = C_h(C_h(X') \cup (X'' \setminus X')) \subset C_h(X') \cup (X'' \setminus X')$ となる。ゆえに、$C_h(X'') \cap X' \subset C_h(X')$ となるので、代替性の同値条件 (1) より、代替性が成り立つ。

さらに経路独立性とアローの意味での経路独立性の同値性を示そう。経路独立ならば、$C_h(X' \cup X'') = C_h(C_h(X') \cup X'')$ であるが、経路独立ならば棄却対象からの独立性が満た

15） この条件を同時に満たすような選択関数を Matskin and Lehmann［26］は、coherent とよんでいる。

されるので、$C_h(C_h(X') \cup X'') = C_h(C_h(X') \cup C_h(X''))$ が成り立つ。ゆえに、アローの意味の経路独立性が得られる。棄却対象からの独立性を用いれば、その逆も成り立つのは明らかである。

以上で、2 条件と経路独立性が同値となることがわかった。これは、Hatfield and Milgrom [23] の条件が選択理論においてよく知られた条件に他ならないことを示している。Aygün and Sönmez [9] は、この 2 条件から、さらに次のような顕示選好の強公理が導けることを示しているが、これも決して新規なものではない。

定義 16. 選択関数 C_h が顕示選好の強公理を満たすとは、以下のような相異なる部分集合 $X^1, X^2, \cdots, X^k \subset X$ と $Y^1, Y^2, \cdots, Y^k \subset X$ が存在しないときをいう。すなわち、$1 \leq \ell \leq k$ に対し、$Y^\ell = C_h(X^\ell)$ であり、$1 \leq \ell \leq k-1$ に対し、$Y^\ell \subset X^\ell \cap X^{\ell+1}$ であり、さらに $Y^k \subset X^k \cap X^1$ となるようなものである。

上の定義で、$\ell = 1$ とすると、$Y^1 \subset X^1 \cap X^2$ であり、$\ell = 2$ のとき、$Y^2 = C_h(X^2)$ である。すなわち、Y^1 は X^2 の部分集合であるが、X^2 を選択肢の集合とした場合、選ばれるのは Y^1 ではなく、$Y^2 = C_h(X^2)$ である。このとき、Y^2 は Y^1 よりも顕示選好されるといい、$Y^2 \succ_r Y^1$ と書くことにしよう。このように定義される選好関係 $\succ_r$ がサイクルを持たないことが顕示選好の強公理に他ならない。

定理 5. 選択関数 C_h が棄却対象からの独立性と代替性を満たすならば、顕示選好の強公理を満たす。

証明. 定義 16 の条件を満たすようなものが存在したとする。そこで、$\overline{X} = \bigcup_{\ell=1}^k X^\ell$、$\overline{Y} = \bigcup_{\ell=1}^k Y^k$ かつ $\underline{Y} = \bigcap_{\ell=1}^k Y^k$ とする。さらに、X^1 と Y^1 を $X^{k+1} = X^1$、$Y^{k+1} = Y^1$ と見なして表わそう。すると、$x \in \overline{X} \setminus \overline{Y}$ ならば、$x \in X^\ell \setminus Y^\ell$ となるような ℓ が存在する。すなわち、$x \in X^\ell \setminus C_h(X^\ell)$ であり、また定義から、$X^\ell \subset \overline{X}$ なので、代替性から、$x \notin C_h(\overline{X})$ となる。次に、$x \in \overline{Y} \setminus \underline{Y}$ ならば、$x \in Y^\ell \setminus Y^{\ell+1}$ となるような ℓ が存在する。これは、k についての帰納法を用いて示される。$k-1$ の場合に成り立つとして、$x \in \overline{Y} \setminus \underline{Y} = (\bigcup_{\ell=1}^{k-1} Y^\ell \cup Y^k) \setminus (\bigcap_{\ell=1}^{k-1} Y^\ell \cap Y^k)$ とする。すると、$x \in \bigcup_{\ell=1}^{k-1} Y^\ell$ かつ $x \notin Y^k$ であるか、$x \in Y^k$ かつ $x \notin \bigcup_{\ell=1}^{k-1} Y^\ell$ であるかのいずれかである。前者の場合は、$x \in \bigcup_{\ell=1}^{k-1} Y^\ell \setminus \bigcap_{\ell=1}^{k-1} Y^\ell$ となるから、帰納法の仮定から、$x \in Y^\ell \setminus Y^{\ell+1}$ となるような $\ell \leq k-1$ が存在する。後者の場合、$x \in Y^k \setminus Y^1$ となり、$Y^{k+1} = Y^1$ としていたので、$x \in Y^k \setminus Y^{k+1}$ が成り立つ。したがって、$Y^\ell \subset X^\ell \cap X^{\ell+1}$ であったから、$x \in Y^\ell \setminus Y^{\ell+1} \subset X^{\ell+1} \setminus Y^{\ell+1} = X^{\ell+1} \setminus C_h(X^{\ell+1})$ となる。よって、代替性から、$x \notin C_h(\overline{X})$ がしたがう。以上から、$x \in \overline{X} \setminus \underline{Y}$ ならば、$x \notin C_h(\overline{X})$ となる。すなわち、$C_h(\overline{X}) \subset \underline{Y}$ が成り立つ。すると、任意の $\ell \leq k$ に対し、$C_h(\overline{X}) \subset \underline{Y} \subset Y^\ell \subset X^\ell \subset \overline{X}$ となるので、棄却対象からの独立性から、$Y^\ell = C_h(X^\ell) = C_h(\overline{X})$ とならなければならない。これは、$Y^1, Y^2, \cdots, Y^k$ がすべて等しいことになって矛盾である。したがって、顕示選好の強公理が成り立つことが示された。

さて、選択関数 C_h が顕示選好の強公理を満たすならば、Richter［32］による古典的な結果から、C_h は次のように合理化できることになる。

定理 6. 選択関数 C_h が棄却対象からの独立性と代替性を満たすならば、X_h のすべての部分集合からなる集合 Σ_h 上に定義された強い選好順序 $\succ_h$ が存在して、任意の $X' \subset X$ に対し、

$$C_h(X') = \underset{\succ_h}{\operatorname{argmax}} \{X_h'' \in \Sigma_h \mid X_h'' \subset X_h'\}$$

となる。さらに、$\succ_h$ は Σ_h 上の効用関数 u^h によって表すことができる。

医師 $d \in D$ の選好順序 $\succ_d$ も $X_d \cup \{\emptyset_d\}$ 上で定義される効用関数 u^d で表すことができるから、Hatfiled-Milgrom モデルは、参加者の効用関数の集合 $\{u^d \mid d \in D\} \cup \{u^h \mid h \in H\}$ を与えることで定義できる。

7　給与支払を伴うマッチングモデル

Hatfield-Milgrom モデルと Kelso-Crawford モデルの関係について議論するために、本節では、Kelso-Crawford モデルを多少アレンジして定義する。しかしながらモデルの基本な性質はオリジナルとほぼ変わらない。また可能な限り記号はこれまでのものをそのまま流用する。

任意の $d \in D \cup \{\emptyset\}$ と $h \in H \cup \{\emptyset\}$ に対し、S_d^h は、非負実数からなる非空な有限集合とする。ただし、$h = \emptyset$ または $d = \emptyset$ のときは、$S_d^h = \{0\}$ とする。さらに、$d \in D$ かつ $h \in H$ については、一般性を失うことなく、$K_d^h \geq 0$ を整数とし、$S_d^h = \{0, 1, 2, \cdots, K_d^h\}$ と仮定してよい。以下では、$d \in D$ に対し、$S_d = \prod_{h \in H} S_d^h$ とし、また、$h \in H$ と任意の $\emptyset \neq D' \subset D$ に対し、$S_{D'}^h = \prod_{d \in D'} S_d^h$ と定義する。

ここで、$s_d^h \in S_d^h$ は、研修病院 h が新卒医師 d に支払うことができる給与水準の 1 つであると解釈する。このような給与水準の集合 S_d^h が非負実数からなる有限集合として与えられていることになる。こうした S_d^h の集まりは、事実上、Hatfield-Milgrom モデルにおける契約集合の特殊ケースと見なせる。すなわち、Hatfield-Milgrom モデルにおける契約集合 X に対し、$X_d^h \equiv \{x \in X \mid g_H(x) = h, g_D(x) = d\}$ と定義すれば、これは、研修病院 h と新卒医師 d との間で交わすことが可能な契約の集合を表しているが、S_d^h は、給与に関する契約に限って、X_d^h の内容を具体的に示したものと考えることができるからである。これについては後に詳述する。

任意の $d \in D$ は、任意の $h \in H \cup \{\emptyset\}$ に対し、S_d^h 上に実数値関数 $v_h^d(\cdot)$ を持つとする。これを医師 d の効用関数という。ただし、$v_\emptyset^d(0) = 0$ とする。

任意の $h \in H$ は、任意の $D' \subset D$ に対し、$S_{D'}^h$ 上に実数値関数 $v_{D'}^h(\cdot)$ を持つとする。これを病院 h の効用関数という。ただし、$v_\emptyset^h(0) = 0$ とする。

以下のような仮定を導入する。すなわち、

(1) $s_d^h, \hat{s}_d^h \in S_d$ に対し、$s_d^h < \hat{s}_d^h$ ならば $v_h^d\,(s_d^h) < v_h^d(\hat{s}_d^h)$.

(2) $s_d^h, \hat{s}_d^h \in S_d$ に対し、$s_d^h < \hat{s}_d^h$ ならば $v_d^h\,(s_d^h) > v_d^h(\hat{s}_d^h)$.

(3) $s = K_d^h$ ならば、$v_d^h(s) < 0$.

そこで、$S = \{S_d^h \mid h \in H \cup \{\emptyset\}, d \in D \cup \{\emptyset\}\}$、$v^D = \{v_h^d \mid d \in D, h \in H \cup \{\emptyset\}\}$、$v^H = \{v_{D'}^h \mid h \in H, D' \subset D\}$ とする。このようにして与えられる（S, v^D, v^H）を、給与支払を伴うマッチングモデルとよぶ。

定義 17. 給与支払を伴うマッチングモデル（S, v^D, v^H）において、H 上で定義され D の部分集合を値に持つような関数 μ で、$h \neq h'$ ならば、$\mu(h) \cap \mu(h') = \emptyset$ となるようなものをマッチングという。マッチング μ と $d \in D$ に対し、$d \in \mu(h)$ となるような h を $\mu(d)$ と定義する。そのような h が存在すれば、マッチングの定義から、それは必ず一意的に決まる。また、そのような h が存在しない場合には、$\mu(d) = \emptyset$ と定義する。

あるマッチング μ に対し、非負実数ベクトル $s = \{s_d^h \mid d \in D, h \in H\}$ が存在して、$d \in \mu(h)$ ならば、$s_d^h \in S_d^h$ であり、それ以外の場合は、$s_d^h = 0$ となるとき、（μ, s）は配分とよばれる。また、$h \in H$ と非負実数ベクトル $s^h = \{s_d^h \mid d \in D\}$ に対し、$D' \subset D$ とすれば、$s_{D'}^h = \{s_d^h \mid d \in D'\}$ と定義する。

定義 18. 配分（μ, s）が個別合理的であるとは、任意の $d \in \mu(h)$ に対し、

$$v_h^d\,(s_d^h) \geq 0 = v_\emptyset^d(0)$$

かつ、任意の $h \in H$ に対し、$D' = \mu(h)$ とするなら、いかなる $D'' \subset D'$ に対しても、

$$v_{D'}^h\,(s_{D'}^h) \geq v_{D''}^h\,(s_{D''}^h)$$

が成り立つときをいう。

定義 19. ペア（$d, h) \in D \times H$ が配分（μ, s）をブロックするとは、ある $\hat{s}_d^h \in S_d^h$ に対し、$v_h^d(\hat{s}_d^h) > v_{\mu(d)}^d\,(s_d^{\mu(d)})$ であり、かつ、$D' = \mu(h)$ とすると、$d \in D'' \subset D' \cup \{d\}$ となる D'' が存在して、

$$v_{D''}^h\,(\hat{s}_d^h, s_{D'' \setminus \{d\}}^h) > v_{D'}^h\,(s_{D'}^h)$$

となるときをいう。個別合理的で、いかなるペアにもブロックされないような配分を安定配分という。

注 4. Kelso and Crawford [25] では、個別合理性はより弱い条件になっている一方、ブロッキングはより強い条件で定義されている。しかし本稿の仮定の下では両者に本質的な違いはない。Kelso and Crawford [25] では、すべての $d \in D$ と $h \in H$ に対し、$S_d^h = \mathbb{R}_+$ とされている。すなわち、可能な給与水準の集合は非負実数すべてであると仮定されている。しかし、給与の支払額が無限に大きくなると、いずれは個別合理性に抵触するような仮定が設けられているので、事実上、可能な給与水準の集合は上に有界であると仮定されているに等しい。また、そのような上限は一般に d と h に依存するから、S_d^h が共通であるとい

う仮定も本質的な差ではない。さらに、給与を改定するときには決められた単位ごとに変更されることを前提としている。これも、事実上、可能な給与水準は離散的すなわち整数値を取ると仮定するのと同等である。したがって形式的な差を除けば、本節の給与支払を伴うマッチングモデルは、Kelso-Crawford モデルと本質的に同じものである。

さて、$h \in H$ に対し、$s^h = \{s_d^h \in S_d^h \mid d \in D\}$ が与えられているとしよう。このとき、任意の $D'' \subset D$ に対して、

$$v_{D'}^h\,(s_{D'}^h) \geq v_{D''}^h\,(s_{D''}^h)$$

となるような $D' \subset D$ を s^h における h の需要とよび、そのようなものの 1 つを $D^h(s^h)$ と書くことにする。ここで、$d \in D^h(s^h)$ ならば、$v_d^h(s_d^h) \geq 0$ となることを仮定する。

また、もし $\bar{d} \notin D^h(s^h) = D'$ であったとする。当然、$D' \subset D \setminus \{\bar{d}\}$ であり、D' の定義から、任意の $D'' \subset D \setminus \{\bar{d}\}$ に対して、$v_{D'}^h\,(s_{D'}^h) \geq v_{D''}^h\,(s_{D''}^h)$ が成り立つ。すなわち、s^h において、$\bar{d}$ が採用されないのであれば、$\bar{d}$ を除外しても $D^h(s^h)$ の最適性は維持されるという意味で、一種の棄却対象からの独立性が満たされている。

さて、そこで、次のような定義を導入しよう。

定義 20. 病院 $h \in H$ の需要が粗代替性を満たすとは、$s^h \leq \hat{s}^h$ に対して、$d \in D^h(s^h)$ が、$s_d^h = \hat{s}_d^h$ を満たしているなら、$d \in D^h(\hat{s}^h)$ となるときをいう。

すなわち、病院 h が直面している給与ベクトル s^h の要素がすべての労働者について減少することなく一部の労働者については増加して、$\hat{s}^h$ になったとする。すると、s^h において病院 h が雇用したいと考えていた医師 d に関し、その給与水準に変化がないなら、$\hat{s}^h$ においても以前と同様、その医師を雇用したいと考えるというのが粗代替性である。これは需要理論あるいは一般均衡理論などにおいて、ある商品の価格が不変のまま、それ以外の商品の価格が増加ないし不変であったならば、その商品に対する需用量が減少することはないという周知の粗代替性条件[16)]と同種のものである。

このようにして定義された給与支払を伴うマッチングモデルに対し、契約集合 X を次のように定義する。

$$X = \{\,(h, d, s) \mid s \in S_d^h\}$$

そして、任意の $x = (h, d, s) \in X$ に対し、$g_H(x) = h$ かつ $g_D(x) = d$ とする。すると、任意の $\bar{h} \in H$ と $\bar{d} \in D$ に対し、$X_{\bar{h}} = \{\,(\bar{h}, d, s) \mid d \in D, s \in S_d^{\bar{h}}\}$ であり、$X_{\bar{d}} = \{\,(h, \bar{d}, s) \mid h \in H, s \in S_{\bar{d}}^h\}$ である。任意の $x, x' \in X_{\bar{d}}$ に対し、$(h, s) \in H \times S_{\bar{d}}^h$、$(h', s') \in H \times S_{\bar{d}}^{h'}$ が存在して、$x = (h, \bar{d}, s)$、$x' = (h', \bar{d}, s')$ となるから、$x \succ_{\bar{d}} x'$ を $u_h^{\bar{d}}\,(s) > u_{h'}^{\bar{d}}\,(s')$ で定義すれば、$X_{\bar{d}}$ 上に選好順序を導くことができる。さらに、$X'_{\bar{h}} \subset X_{\bar{h}}$ に対し、$D' = D(X'_{\bar{h}}) \subset D$ とすれ

16)　粗代替性は Mosak［29］によって初めて導入された。粗代替性が経済学一般にどのような含意を持つかについては、簡潔な記述が McKenzie［28］にある。粗代替性が顕示選好理論と一定の関係を持つことについては Mas-Colell, Whinston and Green［27］を見よ。

ば、$d' \in D'$ に対し、$\overline{S}^{\bar{h}}_{d'} \subset S^{\bar{h}}_{d'}$ が存在して、$X'_{\bar{h}} = \{(\bar{h}, d', s) \mid d' \in D', s \in \overline{S}^{\bar{h}}_{d'}\}$ となる。そこで、任意の $d' \in D'$ に対し、$\bar{s}^{\bar{h}}_{d'} = \min\{s^{\bar{h}}_{d'} \in \overline{S}^{\bar{h}}_{d'}\}$ と定義し、$d' \notin D'$ に対しては、$\bar{s}^{\bar{h}}_{d'} = K^{\bar{h}}_{d'}$ とする。そして、$\bar{s}^{\bar{h}} = \min\{\bar{s}^{\bar{h}}_{d'} \mid d' \in D\}$ における $\bar{h}$ の需要 $D^{\bar{h}}(\bar{s}^{\bar{h}})$ を考える。このとき、$C_{\bar{h}}(X'_{\bar{h}}) = \{(\bar{h}, d, \bar{s}^{h}_{d}) \mid d \in D^{\bar{h}}(\bar{s}^{h})\}$ と定義する。すると、需要が粗代替性を満たすならば、このように定義された選択関数は代替性を満たすことを示そう。

仮に、$(\bar{h}, d', s') \in R_{\bar{h}}(X'_{\bar{h}})$ であるが、ある $(\bar{h}, d'', s'') \notin X'_{\bar{h}}$ が存在して、$(\bar{h}, d', s') \notin R_{\bar{h}}(X'_{\bar{h}} \cup \{(\bar{h}, d'', s'')\})$ となったとする。$(\bar{h}, d'', s'') \notin X'_{\bar{h}}$ なので、$d'' \notin D' = D(X'_{\bar{h}})$ である。したがって、定義から、$\bar{s}^{\bar{h}}_{d''} = K^{\bar{h}}_{d''}$ である。次に、もし、$(\bar{h}, d'', s'') \notin C_{\bar{h}}(X'_{\bar{h}} \cup \{(\bar{h}, d'', s'')\})$ ならば、需要についてすでに確認した「棄却対象からの独立性」より、$C_{\bar{h}}(X'_{\bar{h}} \cup \{(\bar{h}, d'', s'')\}) = C_{\bar{h}}(X'_{\bar{h}})$ となり矛盾。ゆえに、$(\bar{h}, d'', s'') \in C_{\bar{h}}(X'_{\bar{h}} \cup \{(d'', s'')\})$ である。そこで、$\hat{s}^{\bar{h}}$ を $\bar{s}^{\bar{h}}$ と同様な手続きで、$X''_{\bar{h}} \equiv X'_{\bar{h}} \cup \{(\bar{h}, d'', s')\}$ から定まる給与ベクトルとすると、明らかに $\hat{s}^{\bar{h}} \leq \bar{s}^{\bar{h}}$ であり、$\hat{s}^{\bar{h}}_{d'} = \bar{s}^{\bar{h}}_{d}$、$\hat{s}^{\bar{h}}_{d''} = s'' < K^{\bar{h}}_{d''} = \bar{s}^{\bar{h}}_{d''}$ が成り立つ。仮定から、$(\bar{h}, d', s') \notin R_{\bar{h}}(X''_{\bar{h}})$ なので、$d' \in D^{\bar{h}}(\hat{s}^{\bar{h}})$ である。そこで粗代替性を用いると、$d' \in D^{\bar{h}}(\bar{s}^{\bar{h}})$ となるが、これは、$(\bar{h}, d', s') \in R_{\bar{h}}(X'_{\bar{h}})$ に矛盾。よって、$C_{\bar{h}}$ の代替性が示された。

したがって給与支払を伴うマッチングモデルは契約を伴うマッチングモデルへ変換することができて、需要が粗代替性を満たすならば契約を伴うマッチングモデルでは代替性が満たされることになる[17)]。代替性（と棄却対象からの独立性）が満たされる場合、契約を伴うマッチングモデルには安定配分が存在するが、安定配分から上で示したようなやり方で給与ベクトルとそれに伴うマッチングを定義すれば、それが給与支払を伴うマッチングモデルの安定配分になることは容易に示すことができる。以上から、次の結果が示されたことになる。

定理 7. 粗代替性を満たす給与支払を伴うマッチングモデルには安定配分が存在する。

以上で、給与支払を伴うマッチングモデルが契約を伴うマッチングモデルに帰着できることを示した。以下では、その逆を示す。すなわち、契約を伴うマッチングモデルを給与支払を伴うマッチングモデルへと変換し、オリジナルのモデルの代替性から粗代替性が導かれることを証明する。この証明のアイディアは Echenique［16］によるものである。

まず、契約を伴うマッチングモデルが与えられているとする。ただし、すべての選択関数は棄却対象からの独立性と代替性を満たすと仮定するので、参加者全員が効用関数を持つことになる。そこで、任意の $h \in H$ と $d \in D$ に対し、$X^h_d = \{x \in X \mid x_H = h, x_D = d\}$ と定義する。契約 $x \in X^h_d$ に対し、$u^h(\{x'\}) > u^h(\{x\})$ かつ $u^d(x') > u^d(x)$ となるような $x' \in X^h_d$ が存在しないとき、x は X^h_d におけるパレート契約であるという。そして、X^h_d におけるパレート契約全体の集合を X^h_d のパレートフロンティアとよび、$\hat{X}^h_d$ としよう。かならず、

17） Hatfield and Milgrom［23］は、需要の粗代替性と変換後の選択関数の代替性が同値であることを示している。

$\hat{X}_d^h$ は非空な有限集合となる。しかも、$x, x' \in \hat{X}_d^h$ に対し、$u^d(x) < u^d(x')$ ならば $u^h(\{x\}) > u^h(\{x'\})$ となることも自明である。そこで、$\hat{X}_d^h$ の要素 x を $u^d(x)$ の値が小さい順に 1 から $|\hat{X}_d^h|$ までの整数に対応付けることにする。そして、$K_d^h = |X_d^h| + 1$ として、$S_d^h = \{1, 2, \cdots, K_d^h\}$ と定義しよう。このようにして、給与支払を伴うマッチングモデルにおける $S = \{S_d^h | h \in H \cup \{\emptyset\}, d \in D \cup \{\emptyset\}\}$ が得られたことになる。

そこで、$s < K_d^h$ となる $s \in S_d^h$ に対し、s に対応付けられている $\hat{X}_d^h$ の要素を x^s とする。任意の $d \in D$ に対し、$v_h^d(s) = u^d(x^s)$ と定義しよう。また、$s = K_d^h$ のときには、それよりも小さい番号に対応する $v_h^d(\cdot)$ のいかなる値よりも大きい数字を選び、$v_h^d(s)$ の値とする。次に、任意の $h \in H$ と $D' \subset D$ に対し、$s_{D'}^h = \{s_d^h \in S_d^h | d \in D'\}$ となる給与ベクトルが与えられているとしよう。 このとき、$\hat{D}' = \{d' \in D' | s_{d'}^h \neq K_{d'}^h\}$ とし、$v_{D'}^h(s^h) = u^h(\{x^s \in X |$ ある $d' \in \hat{D}'$ に対し $s = s_{d'}^h\})$ と定義する。

このようにして得られる給与支払を伴うマッチングモデル (S, v^H, v^D) において、需要が粗代替性を満たすことが示される。実際、s^h における需要を $D^h(s^h) = D'$ とする。一般性を失わずに、すべての $d' \in D'$ に対し、$s_{d'}^h < K_{d'}^h$ としてよい。任意の $d \in D$ に対し、s_d^h に対応する $\hat{X}_d^h$ の要素が存在すれば、そのようなもの全体からなる集合を $X(s^h)$ とする。同様に、$d' \in D'$ に対し、$s_{d'}^h$ に対応する $\hat{X}_{d'}^h$ の要素のすべてからなる集合を $X'(s^h)$ としよう。すると、需要の定義から、任意の $X'' \subset X(s^h)$ に対し、$u^h(X'(s^h)) > u^h(X'')$ である。次に、$s^h \leq \hat{s}^h$ となるような任意の $\hat{s}^h$ に対応する $\hat{X}_d^h$ の要素のすべてからなる集合を $X^+(s^h)$ とする。明らかに、$X(s^h) \subset X^+(s^h)$ である。仮に、$\hat{x}_d^h \in X^+(s^h) \setminus X(s^h)$ であれば、$\hat{x}_d^h$ は $s_d^h < \hat{s}_d^h$ となるような $\hat{s}_d^h$ に対応付けられている。すると、s_d^h に対応付けられている契約を x_d^h とするなら、$u^h(\{x_d^h\}) > u^h(\{\hat{x}_d^h\})$ である。したがって、$\hat{x}_d^h \in R_h(\{x_d^h, \hat{x}_d^h\})$ となる。$\{x_d^h, \hat{x}_d^h\} \subset X^+(s^h)$ なので、代替性から、$\hat{x}_d^h \in R_h(X^+(s^h))$ でなければならない。すなわち、$C_h(X^+(s^h)) \subset X(s^h)$ となることがわかる。ゆえに、$C_h(X^+(s^h)) = C_h(X(s^h)) = X'(s^h)$ である。言い換えれば、s^h における需要に対応する契約集合 $X'(s^h)$ は $X^+(s^h)$ における u^h の最大元である。

そこで、$s^h \leq \hat{s}^h$ とする。仮に、$d \in D^h(s^h)$ であり、$s_d^h = \hat{s}_d^h$ であるが、$d \notin D^h(\hat{s}^h)$ であったとしよう。したがって、$\hat{s}_d^h$ に対応する契約を $\hat{x}_d^h$ とすれば、$\hat{x}_d^h \notin X'(\hat{s}^h) = C_h(X(\hat{s}^h)) = C_h(X^+(\hat{s}^h))$ である。明らかに $X^+(\hat{s}^h) \subset X^+(s^h)$ であるから、代替性から、$\hat{x}_d^h \notin C_h(X^+(s^h)) = C_h(X(s^h)) = X'(s^h)$ となる。また、$s_d^h = \hat{s}_d^h$ なので、s_d^h に対応する契約を x_d^h とすれば、$x_d^h = \hat{x}_d^h$ でなければならない。よって、$x_d^h \notin X'(s^h)$ となるので $d \notin D(X'(s^h)) = D^h(s^h)$ である。これは矛盾であるから、需要 $D^h(s^h)$ が粗代替性を満たすことが示された。

8　集計需要法則、僻地病院定理、戦略耐性

本節では、安定配分についてより豊富な構造を得ることを目的に選択関数についての新たな条件を導入しよう。

定義 21. 選択関数 C_h が集計需要法則[18]を満たすとは、$X' \subset X''$ ならば、$|C_h(X')| \leq |C_h(X'')|$ となるときをいう。

すなわち、選択肢が増えるならば選択集合に含まれる要素の数が減少することはないということである。この条件と代替性が仮定されると棄却対象からの独立性が成り立つ。まずは、これを証明しよう。

命題 4. 選択関数 C_h が代替性と集計需要法則を満たすならば、棄却対象からの独立性も満たされる。

証明. 部分集合 $Y \subset X$ と $z \notin Y$ に対し、$z \notin C_h(Y \cup \{z\})$ であるとする。任意の $x \in C_h(Y \cup \{z\})$ に対し、$x \neq z$ であるから、$x \in Y$ でなければならない。ゆえに、代替性の条件（1）より、$x \in C_h(Y)$ である。したがって、$C_h(Y \cup \{z\}) \subset C_h(Y)$ が示されたことになる。ところが集計需要法則より、$|C_h(Y)| \leq |C_h(Y \cup \{z\})|$ なので、$C_h(Y \cup \{z\}) = C_h(Y)$ でなければならない。すなわち、棄却対象からの独立性が満たされる。

上の命題から、代替性と集計需要法則が満たされているのであれば、安定配分の特徴付定理ならびに安定配分の存在、さらには安定配分の集合が完備な束部分集合になることがいえる。さらに以下で示すような追加的な性質が成り立つ。

定理 8. 選択関数が代替性と集計需要法則を満たすとし、X' と X'' を安定配分とする。すると、すべての $d \in D$ に対し、$|X'_d| = |X''_d|$ が成り立ち、また、すべての $h \in H$ に対し、$|X'_h| = |X''_h|$ が成り立つ。

証明. X' が安定ならば、定理 3 の条件を満たす (X'_D, X'_H) が存在して、$X' = X'_D \cap X'_H$ となり、さらには $C_D(X'_D) = C_H(X'_H) = X'$ となる。また、定理 3 の条件を満たす (X_D, X_H) の集合は完備な束部分集合である。したがって、この集合の上限を $(\check{X}_D, \check{X}_H)$ とすれば、$\check{X} = \check{X}_D \cap \check{X}_H$ は安定配分であり、$C_D(\check{X}_D) = C_H(\check{X}_H) = \check{X}$ であるとともに、上限であることから、$X'_D \subset \check{X}_D$ かつ $X'_H \supset \check{X}_H$ である。よって、任意の $d \in D$ に対し、選択関数 $C_d(\cdot)$ の値は選択肢の集合が非空であればつねに 1 点集合であるから、$|X'_d| = |C_d(X'_D)| \leq |C_d(\check{X}_D)| = |\check{X}_d|$ となる。さらに集計需要法則から、任意の $h \in H$ に対し、$|\check{X}_h| = |C_h(\check{X}_H)| \leq |C_h(X'_H)| = |X'_h|$ となる。ゆえに、

$$\sum_{d \in D} |X'_d| \leq \sum_{d \in D} |\check{X}_d| \quad \text{かつ} \quad \sum_{h \in H} |\check{X}_h| \leq \sum_{h \in H} |X'_h|$$

18）　これは、The Law of Aggregate Demand の訳である。

となるが、医師が合意した契約の総数は病院が合意した契約の総数に等しいので、$\sum_{d\in D}|X'_d| = \sum_{h\in H}|X'_h|$ かつ $\sum_{d\in D}|\check{X}_d| = \sum_{h\in H}|\check{X}_h|$ である。したがって、

$$\sum_{d\in D}|X'_d| \leq \sum_{d\in D}|\check{X}_d| = \sum_{h\in H}|\check{X}_h| \leq \sum_{h\in H}|X'_h| = \sum_{d\in D}|X'_d|$$

となるので、任意の $d\in D$ と $h\in H$ に対し、$|X'_d| = |\check{X}_d|$ かつ $|X'_h| = |\check{X}_h|$ となる。これが任意の安定配分 X' について成り立つので、X' と X'' が安定ならば、任意の $d\in D$ と $h\in H$ に対し、$|X'_d| = |\check{X}_d| = |X''_d|$ かつ $|X'_h| = |\check{X}_h| = |X''_h|$ である。

したがって、ある安定配分においてどの病院とも契約を結べないような医師は、すべての安定配分においても契約を結ぶことはできない。逆に、ある安定配分において、いずれかの病院に採用された医師が、別の安定配分では配属先を見つけることができないということはない。また、各病院が安定配分において結ぶことのできる契約数はつねに同じである。結んだ契約の数は採用した医師の人数であるから、各病院が採用する医師の数はどの安定配分でも一定であるということになる。仮にある安定配分において採用定員に満たない医師しか採用できないのであれば、すべての安定配分において同じ数だけの医師不足が発生することを意味する。これを理由に定理 8 は、僻地病院定理（Rural Hospital Theorem）とよばれている。ある安定配分において医師があまり行きたがらない僻地の病院で医師不足が発生する場合、安定配分の範囲でその不足を解消することはできないからである。さらに、定理 8 の応用として、以下のような結果が知られている。

まず、すべての参加者の選好順序のリストに対して、1 つの配分を与えるような関数をメカニズムとよぼう。そして、任意に選んだ $d\in D$ に対し、d 以外のすべての参加者の選好順序を所与として、d の選好順序が $\succ_d$ であるときに、d が受け取る契約を x とする。もし、d のみが別の選好順序 $\succ'_d$ に変更したとき、d の受け取る契約を x' とすると、つねに、$x \succeq_d x'$ となるなら、メカニズムは戦略耐性を持つという。

注 5. 戦略耐性は英語では strategy-proofness であるが、最近の日本語文献では耐戦略性と訳されることが多い[19]。確かに water-proofness には、耐水性あるいは防水性という訳語が当てられている。（実際は、water-resistance と water-proofness に応じて、耐水性と防水性に分けて訳されることが多い。）耐水、耐火、または防水、防火のようにそれ自体が意味を持つのであれば、このようによぶことに問題はないが、「耐戦略」という言葉は日本語には存在しない。したがって、耐戦略性という用語は日本語としては不適切である。ただし、耐溶剤性、耐薬品性という用語が一部では用いられているようである。耐溶剤、耐薬品といった表現は日常的には、ほぼ使われないので同じく不適切ではあるが、それらが溶剤あるいは薬品の侵食に対して抵抗性があるという意味であろうことは耐水、耐火と

19）　strategy-proofness を耐戦略性と訳したのは [2] が最初ではないかと思われる。

いう用語法からして、ある程度類推できる。それに比べて「耐戦略」が具体的にどのような状況を指すのかを推測するのはきわめて難しい。したがって、本稿では、薬剤耐性という用語に倣って、耐戦略性ではなく、戦略耐性という訳語を用いる。薬剤耐性とよぶのは同じく「耐薬剤」だと意味が不明瞭になるためであろう。もちろん、どのような用語であれ、それが何を意味するのかは学術用語として新たに定義されなければならない。しかし繰り返しになるが、薬剤も戦略も耐性もすべて日本語であるが、耐薬剤、耐戦略はどちらも日本語ではない。翻訳の際、新たな造語を用いることもありえなくはないが、既存の単語の組み合わせのみで足りる場合、なるべくそれは控えるべきである。

さて、与えられた選好順序の全リストに対して、半順序 $\succeq_D$ に関する安定配分集合の上限 $\check{X}$ を D−最適配分とよぶ。つねに D−最適配分を対応させるようなメカニズムを D−最適メカニズムという。すると、D−最適メカニズムについて、次の命題が成り立つことは、ほぼ明らかである。

命題 5. 棄却対象からの独立性と代替性を仮定する。D−最適配分を $\check{X}$ とし、ある $d \in D$ に対し、$\check{X}_d = \{\check{x}\} \neq \emptyset_d$ とする。このとき、d の選好順序が次のようなものであったとしよう。

$$x_1 \succ_d x_2 \succ_d \cdots \succ_d x_n \succ_d \check{x} \succ_d \emptyset_d$$

すなわち、$\check{x}$ は d にとって上位から $(n+1)$ 番目の契約であり、しかも個別合理的な契約の中で最もランクの低いものである。そこで、d のみが選好順序を以下のように変えたとする。

$$\check{x} \succ'_d \emptyset_d$$

すなわち、$\check{x}$ のみが d にとって唯一の個別合理的な契約であるとする。すると、この場合の D−最適な安定配分 $\check{X}'$ に対し、$\check{X}'_d = \{\check{x}\}$ が成り立つ。

証明. 変化後において、$\check{X}$ が安定でなかったならば、ある $h \in H$ と d に対し、$x'_H = h$ かつ $x'_D = d$ となる契約が存在して、$x' \in C_h(\check{X} \cup \{x'\})$ かつ $x' \succ_d \check{x}$ とならなければならない。しかし、変化後は $\check{x}$ のみが d にとって唯一の個別合理的な契約なので、これは矛盾である。よって、$\check{X}$ は変化後も安定配分である。変化後の D−最適配分 $\check{X}'$ は、すべての医師にとって他の安定配分と比べて同じか、さもなくばより望ましいものであるから、特に $d \in D$ に対しては、$\check{X}'_d = \{\check{x}\}$ でなければならない。

この結果を踏まえて次の定理が得られる。

定理 9. 代替性と集計需要法則を仮定する。D−最適配分を $\check{X}$ とし、ある $d \in D$ に対し、$\check{X}_d = \{\check{x}\} \neq \emptyset_d$ とする。このとき、d の選好順序が次のようなものであったとしよう。

$$x_1 \succ_d x_2 \succ_d \cdots \succ_d \check{x}_n \succ_d \check{x} \succ_d \emptyset_d$$

d の選好順序のみが、

$$y_1 \succ'_d y_2 \succ'_d \cdots \succ'_d y_m \succ'_d \check{x} \succ'_d y_{m+1} \succ'_d \cdots \succ'_d y_M$$

となるような任意の $\succ'_d$ になった場合、そのときの D−最適配分を $\check{X}'$とすれば、$\check{X}'_d = \{\check{x}'\}$ に対し、$\check{x}' \succeq'_d \check{x}$ となる。

証明. 命題 5 より、仮に、d の選好順序が、$\check{x} \succ'_d \emptyset_d$ となるようなものであった場合、D−最適配分において d の得る契約は $\check{x}$ である。したがって、定理 8 より、すべての安定配分において d は必ず契約 $\check{x}$ を得ていなければならない。したがって、d に対し、$X'_d = \{\emptyset_d\}$ となるような配分 X' は安定配分ではない。そのことは、d の選好順序が、

$$y_1 \succ'_d y_2 \succ'_d \cdots \succ'_d y_m \succ'_d \check{x} \succ'_d \emptyset_d$$

となるようなものであったとしても同じである。したがって、この場合におけるすべての安定配分 X' に対し、$X' = \{x'\}$ とすれば、$x' \succ'_d \check{x}$ となる。また、この場合におけるすべての安定配分は、d の選好順序が、

$$y_1 \succ'_d y_2 \succ'_d \cdots \succ'_d y_m \succ'_d \check{x} \succ'_d y_{m+1} \succ'_d \cdots \succ'_d y_M$$

となるようなものであったとしても安定である。したがって、この場合の D−最適配分を $\check{X}'$とし、$\check{X}'_d = \{\check{x}'\}$ とすると、$\check{x}' \succeq'_d \check{x}$ が成り立つ。

定理 9 は、任意の $d \in D$ に対し、その本来の選好順序が、

$$y_1 \succ'_d y_2 \succ'_d \cdots \succ'_d y_m \succ'_d \check{x} \succ'_d y_{m+1} \succ'_d \cdots \succ'_d y_M$$

のようなものであったとき、もし選好順序を偽ることで、$\check{x}$ を手にいれたとしても、それは本来の選好順序で得られる D−最適配分における契約と同じか、さもなくば、さらに劣ったものに過ぎないということを意味している。すなわち、D−最適メカニズムが戦略耐性を満たすことが示されたことになる。

9 双方代替性、単方代替性、累積提案過程

前節までで、代替性に加えて棄却対象からの独立性あるいは集計需要法則が満たされる場合に限り、Hatfield-Milgrom モデルの持つ基本的な性質を、ほぼすべて網羅したことになる。しかし、第 7 節で述べたように、この場合の Hatfield-Milgrom モデルは本質的に Kelso-Crawford タイプのモデルと同等である。したがって、Hatfield-Milgrom モデルが Kelso-Crawford モデルと異なったものであるためには、少なくとも代替性と棄却対象からの独立性の 2 条件のどちらかが緩和されなければならない。棄却対象からの独立性条件は選択の合理性にとって、ほぼ不可欠な条件である。そこで、代替性を緩和することを考える。しかし、すでに第 5 節で見たように弱代替性まで弱めてしまうと一般に安定配分の存在を保証することができない。よって、代替性よりも弱いが弱代替性よりも強いもので、なおかつ一般的に安定配分の存在を保証できるような条件を探すことになる。以下の条件は、そのようなものの一つである。

定義 22. 選択関数 C_h が双方代替性[20)] を満たすとは、部分集合 $Y \subset X$ と $x, z \in X \setminus Y$ と

が、$x_D, z_D \notin D(Y)$ を満たすとき、$z \in R_h(Y \cup \{z\})$ ならば $z \in R_h(Y \cup \{x, z\})$ が成り立つことをいう。

Hatfield and Kojima [21] は、選択関数が棄却対象からの独立性と双方代替性を満たすならば安定配分が存在することを示している。そのために彼らは次で述べるようなアルゴリズムを定義している。これは累積提案過程とよばれるものである。

ステップ (1) 医師の 1 人を適当に選び $d_1 \in D$ とする。X_{d_1} の中で d_1 にとって個別合理的なもののうちベストな契約を x^1 とし、$x^1_H = h_1$ としよう。（もしそのような契約が存在しなければ d_1 は取り除いて別の d_1' を選ぶ。）病院 h_1 は、$x^1 \notin C_h(\{x^1\})$ ならば、この契約を保持し、$x^1 \notin C_h(\{x^1\})$ ならばこれを棄却する。そして、$A_{h_1}(1) = \{x^1\}$ とし、$h \neq h_1$ に対しては、$A_h(1) = \emptyset$ と定義する。

ステップ (t) ステップ $t-1$ において、いかなる病院にも契約を保持されていない医師の 1 人を適当に選び $d_t \in D$ とする。ステップ $t-1$ 以前で拒否された以外の個別合理的な契約の中で d_t にとってベストなものを x^t とし、$x^t_H = h_t$ としよう。（もしそのような契約が存在しなければ、d_t を取り除き別の d_t' を選ぶ。）病院 h_t は、$C_{h_t}(A_{h_t}(t-1) \cup \{x_t\})$ に含まれる契約を保持し、$R_{h_t}(A_{h_t}(t-1) \cup \{x_t\}) \cup \{x_t\}$ に含まれるものは、すべて拒否する。そして、$A_{h_t}(t) = A_{h_t}(t-1) \cup \{x_t\}$ とし、$h \neq h_t$ に対しては、$A_h(t) = A_h(t-1)$ と定義する。

すべての契約は高々1度しか提案されず契約集合 X も有限集合なので、このアルゴリズムは有限回で終了する。すなわち、すべての医師に対し、その提案がいずれかの病院に保持されているか、あるいは個別合理的な契約がすべて拒否されてしまうかのいずれかである。終了時点を T としよう。そして、$A_H(T) \equiv \bigcup_{h \in H} A_h(T)$ とし、アルゴリズムの出力を $C_H(A_H(T)) = \bigcup_{h \in H} C_h(A_h(T))$ とする。アルゴリズムの出力は、選択関数に特に条件がなければ安定配分とは限らないだけでなく、そもそも配分ですらないこともある。なぜなら、$A_h(t)$ は t の増加に伴って非減少であるから、以前に拒否した契約も $A_h(T)$ の中にはすべて残っている。したがって、以前すでに h に拒否されて別の病院に採用されている医師との契約がアルゴリズムの終了時点 T において、再び選択集合 $C_h(A_h(T))$ に含まれる可能性は特に条件が仮定されなければ排除されないからである。そのことを一応、

20) 双方代替性は bilateral substitutes の訳であり、また後に導入する単方代替性は unilateral substitutes の訳である。bilateral と unilateral には、それぞれ「双方向（の）」と「単方向（の）」という訳語を辞書の中に見い出すことができるが、「双方」はまだしも、後者を「単方」とするのには異論があると思う。unilateral の訳語を他に辞書に求めるなら、単側、片側、片務などがある。それに合わせて、bilateral を双側、両側、総務などとすることもできなくはない。しかし、「側」を用いると、two-side、single-side と混同されてしまう可能性がさらに大きいし、片務と総務は、実際の数学的定義からはまったく乖離してしまう。将来、より適切な訳語が定着することは否定しないが、本稿では消去法で、このような訳語を使うことにする。

例を使って確かめておこう。

例 7. $H=\{h, h'\}$、$D=\{d, d'\}$ とし、$X=\{x, x', y\}$ とする。また、$X_h=\{x, y\}$、$X_{h'}=\{x'\}$、$X_d=\{x, x'\}$、$X_{d'}=\{y\}$ とする。医師 d の選好順序は、$x \succ_d x' \succ_d \emptyset_d$ であり、医師 d' は、$y \succ_{d'} \emptyset_{d'}$ とする。一方、病院 h は次のような選好順序に基づく選択関数を持つとする。すなわち、$\{x, y\} \succ_h \emptyset \succ_h \{x\} \succ_h \{y\}$ であるとする。病院 h' については、$\{x'\} \succ_{h'} \emptyset$ とする。累積提案過程の出力は医師の選び方に依存する。まず、d を最初に選ぼう。すると、契約 x が病院 h に提案される。これは個別合理的でないので拒否され、$A_h(1)=\{x\}$、$A_{h'}(1)=\emptyset$ となり、$C_h(A_h(1))=C_{h'}(A_{h'}(1))=\emptyset$ となる。次に、再び、d を選ぶと、契約 x' が病院 h' に提案される。すると、$A_h(2)=\{x\}$、$A_{h'}(2)=\{x'\}$ となり、$C_h(A_h(2))=\emptyset$、$C_{h'}(A_{h'}(2))=\{x'\}$ である。次に選ばれるのは、d' に限られるので、契約 y が病院 h に提案される。したがって、$A_h(3)=\{x, y\}$、$A_{h'}(3)=\{x'\}$ であり、よって、$C_h(A_h(3))=\{x, y\}$、$C_{h'}(A_{h'}(3))=\{x'\}$ となる。すべての医師はいずれかの病院と契約を交わすことになるから、アルゴリズムは停止し、$X' \equiv C_h(A_h(3)) \cup C_{h'}(A_{h'}(3))=\{x, y, x'\}$ がアルゴリズムの出力となる。すると、$x \neq x'$ で、$x_D=x'_D=d$ であるから、これは配分ではない。

次に、最初に選ぶ医師を d' としてみよう。すると、契約 y が病院 h に提案される。これは個別合理的でないので拒否され、$A_h(1)=\{y\}$、$A_{h'}(1)=\emptyset$ かつ $C_h(A_h(1))=C_{h'}(A_{h'}(1))=\emptyset$ となる。次に選ばれるのは、d に限られるので、契約 x' が病院 h' に提案される。これは保持されて、$A_h(2)=\{y\}$、$A_{h'}(2)=\{x'\}$ となり、アルゴリズムは停止して、$X' \equiv C_h(A_h(2)) \cup C_{h'}(A_{h'}(2))=\{x'\}$ が出力となる。これは、d、d'、h とにより、$X''=\{x, y\}$ を通じてブロックされるので安定ではない。

この例において、$Y=\emptyset$ とおくと、$x \notin C_h(Y \cup \{x\})=C_h(\{x\})=\emptyset$ であり、$x_D, y_D \notin D(Y)$ であるが、$x \in C_h(Y \cup \{x, y\})=C_h(\{x, y\})=\{x, y\}$ となるので、双方代替性が満たされない。

注 6. 下で証明する定理 10 によれば棄却対象からの独立性と双方代替性が仮定されると累積提案過程の出力は安定配分となる。また、このとき、Hirata and Kasuya [24] は累積提案過程の出力は医師の選び方に依存しないことを示している。

Hatfield and Kojima [21] は、選択関数が棄却対象からの独立性と双方代替性を満たすならば累積提案過程の出力が安定配分となることを示した。ここでは、それを粗ましAygün and Sönmez [10] にしたがって証明する。

定理 10. 選択関数が棄却対象からの独立性と双方代替性を満たすならば、累積提案過程の出力は安定配分である。

証明. まず、次の主張を示す。

主張. 任意の $h \in H$ に対し、$z_H=h$ となるような $z \in X$ を任意に選ぶ。すると、$z \in R_h(A_h(t-1))$ かつ $z_D \notin D(C_h(A_h(t-1))$ ならば、$z \in R_h(A_h(t))$ となることが、すべて

の $t \geq 2$ に対して成り立つ。

主張の証明． 最初に、$A_h(t{-}1) = A_h(t)$ ならば主張は自明である。次に、$A_h(t) \neq A_h(t{-}1)$ とすると、アルゴリズムの定義から、ある $z' \in X$ に対し、$A_h(t) = A_h(t-1) \cup \{z'\}$ となる。最初に、$z'_D = z_D$ の場合を考えよう。仮に、$z \in C_h(A_h(t))$ ならば、C_h はユニタリであると仮定しているので、$z' \notin C_h(A_h(t))$ である。すると、棄却対象からの独立性より、$C_h(A_h(t)) = C_h(A_h(t-1))$ となるから、$z \in C_h(A_h(t-1))$ となるが、これは矛盾。したがって、$z \in R_h(A(t))$ でなければならない。次に、$z'_D \neq z_D$ の場合を考える。そこで、

$$Y = A_h(t-1) \setminus \{y \in X \mid y_D \in \{z_D, z'_D\}\}$$

と定義する。z'_D が t 時点で h に z' を提案しているということは、$z'_D \notin D(C_h(A_h(t{-}1)))$ であることを意味している。また、仮定から、$z_D \notin D(C_h(A_h(t-1)))$ である。すなわち、$C_h(A_h(t-1)) \cap \{y \in X \mid y_D \in \{z_D, z'_D\}\} = \emptyset$ でなければならない。したがって、$A_h(t-1)$ に含まれる要素の中で $\{y \in X \mid y_D \in \{z_D, z'_D\}\}$ の要素はすべて $t-1$ 時点で h によって棄却されてしまう。ゆえに、棄却対象からの独立性より、$C_h(A_h(t-1)) = C_h(Y \cup \{z\})$ となる。仮定から、$z \notin C_h(A_h(t-1)) = C_h(Y \cup \{z\})$ であり、Y の定義から、$z_D, z'_D \notin D(Y)$ なので、双方代替性より、$z \notin C_h(Y \cup \{z, z'\})$ となる。さてそこで、主張が成り立たないとして、$z \in C_h(A_h(t))$ であると仮定しよう。$z \notin C_h(A_h(t-1))$ であったから、$C_h(A_h(t)) \neq C_h(A_h(t-1))$ でなければならない。ところが、$A_h(t) = A_h(t-1) \cup \{z'\}$ なので、もし $z' \notin C_h(A_h(t))$ ならば、棄却対象からの独立性から、$C_h(A_h(t)) = C_h(A_h(t-1))$ となってしまう。これは矛盾であるから、$z, z' \in C_h(A_h(t))$ となる。すると、選択関数がユニタリであることから、$C_h(A_h(t))$ は、z と z' 以外に Y の要素を含まないことになる。ゆえに、棄却対象からの独立性を用いれば、$z, z' \in C_h(Y \cup \{z, z'\})$ となる。しかし、すでに、$z \notin C_h(Y \cup \{z, z'\})$ であることを示したので、これも矛盾である。よって、$z \in R_h(A_h(t))$ が示された。

以上で、主張が示されたので定理の証明を続けよう。まず、アルゴリズムの出力 X' が配分であることを示すために、任意の $t \geq 1$ に対し、$X'(t) = C_H(A_H(t)) = \cup_{h \in H} C_h(A_h(t))$ とし、すべての $X'(t)$ が配分となることを t に関する数学的帰納法で示そう[21)]。まず、$t = 1$ の場合は明らかである。そこで、$X'(t-1)$ が配分であることを仮定して、$X'(t)$ を考えよう。アルゴリズムの定義から、ある $h' \in H$ に対してのみ、$A_{h'}(t) \neq A_{h'}(t-1)$ であり、それ以外の $h \in H$ に対しては、$A_h(t) = A_h(t-1)$ である。よって、任意の $h \neq h'$ に対し、$C_h(A_h(t)) = C_h(A_h(t-1))$ である。仮に、$X'(t)$ が配分でなければ、$z_D = z'_D$ であるが、$z \neq z'$ となるような $z, z' \in X'(t)$ が存在する。もし、$z_H, z'_H \neq h'$ ならば、

21） Hatfield and Kojima［21］及び Aygün and Sönmez［10］は X' が配分となることは、主張から導かれる自明な結論のように書いているが詳細に議論するなら本稿におけるようなものになる。同様の議論は、Hatfield, Kominers, and Westkampt［22］にも含まれている。

$z, z' \in X'(t-1)$ となるが、これは $X'(t-1)$ が配分であることに矛盾する。したがって、$z_H = h'$ であるか、$z'_H = h'$ であるかのいずれかでなければならない。ただし、$z_H = z'_H = h'$ とすると、$z, z' \in C_{h'}(A_{h'}(t))$ となるが、これは選択関数がユニタリであることに矛盾する。よって、z_H と z'_H が同時に h' と等しくなることはない。一般性を失わずに、$z'_H = h'$ かつ $z_H = h \neq h'$ としよう。すでに確認したように、$C_h(A_h(t)) = C_h(A_h(t-1))$ であるから、$z \in C_h(A_h(t-1))$ となる。したがって、もし $z' \in C_{h'}(A_{h'}(t-1))$ であるなら、これは $z, z' \in X(t-1)$ となって、$X(t-1)$ が配分であることに矛盾する。ゆえに、$z' \in R_{h'}(A_{h'}(t-1))$ でなければならない。一方、$z' \in X'_{h'}(t) = C_{h'}(A_{h'}(t))$ を仮定していたので、主張から、$z'_D \in D(C_{h'}(A_{h'}(t-1))$ でなければならない。すなわち、$z'' = z'_D = z_D$ となるような $z'' \in C_{h'}(A_{h'}(t-1))$ が存在する。しかし、これは $z, z'' \in X'(t-1)$ を意味することになり、再び、$X'(t-1)$ が配分であることに矛盾する。ゆえに、$X'(t)$ は配分でなければならない。したがって、アルゴリズムの出力 X' も配分となることがわかる。

さらに、医師は常に個別合理的な契約を病院側に提案していることは自明なので、以上から、$C_D(X') = X'$ が成り立つ。また、$X' = \cup_{h \in H} C_h(A_h(T))$ であったから、棄却対象からの独立性より、$C_H(X') = X'$ となることも明らかである。

次に、$h \in H$ と $X'' \subset X$ が存在して、$X'' \neq C_h(X')$ かつ

$$X'' = C_h(X' \cup X'') \subset C_D(X' \cup X'')$$

となったとしよう。X' の定義と個別合理性から、$X'_h = C_h(X') = C_h(A_h(T))$ である。また、$X'' \subset C_D(X' \cup X'')$ より、任意の $x \in X''$ に対して、$d = x_D$ とすれば、

$$x \succeq_d X'_d$$

となる。したがって、任意の契約 $x \in X''$ は累積提案過程において提案されることになるので、$X'' \subset A_h(T)$ でなければならない。ゆえに、

$$X'' = C_h(X' \cup X'') = C_h(C_h(A_h(T)) \cup X'')$$

となる。$X'' \subset A_h(T)$ であったから、$C_h(A_h(T)) \subset C_h(A_h(T)) \cup X'' \subset A_h(T)$ となるので、棄却対象からの独立性より、

$$X'' = C_h(C_h(A_h(T)) \cup X'') = C_h(A_h(t)) = C_h(X')$$

が成り立つ。ところが、これは $X'' \neq C_h(X')$ に矛盾するので、X' が安定配分であることが示された。

選択関数が双方代替性と棄却対象からの独立性を満たすならば、安定配分が存在することがわかったが、しかし、このとき必ずしも安定配分の集合が半順序 $\succeq_D$ に関して上限を持つとは限らないことが次の例をみるとわかる。

例 8. $H = \{h, h'\}$、$D = \{d, d'\}$ とし、$X = \{x, \bar{x}, z, \bar{z}, z'\}$ とする。また、$X_h = \{x, \bar{x}, z, \bar{z}\}$、$X_{h'} = \{z'\}$、$X_d = \{x, \bar{x}\}$、$X_{d'} = \{z, \bar{z}, z'\}$ とする。医師の選好順序は、$\bar{x} \succ_d x \succ_d \emptyset_d$ かつ $z \succ_{d'} z' \succ_{d'} \bar{z} \succ_{d'} \emptyset_{d'}$ とする。病院 h の選択関数は、$\{x, z\} \succ_h \{\bar{z}\} \succ_h \{\bar{x}\} \succ_h \{x\} \succ_h \{z\} \succ_h \emptyset$ となるよ

うな選好順序を元に定義されるとし、病院 h' の選択関数は、$z' \succ_{h'} \emptyset$ となるような選好順序により与えられるとする。

ここで、$C_h(\{\bar{x}, z\}) = C_h(\{x, \bar{x}\}) = \{\bar{x}\}$ であるが、$C_h(\{x, \bar{x}, z\}) = \{x, z\}$ であり、また、$C_h(\{\bar{z}, x\}) = C_h(\{\bar{z}, z\}) = \{\bar{z}\}$ であるが、$C_h(\{\bar{z}, x, z\}) = \{x, z\}$ であるので、このようなときに代替性が満たされていない。しかし、いずれの場合にも、双方代替性は満たされている。さて、まず $X' = \{x, z\}$ は安定である。X' が個別合理的であることは選好順序から明らかであるし、$X' = X'_h$ が h にとって最も好ましい部分集合であるから、これをブロックする可能性があるとすれば、病院 h' が関係しなければならないが、$\{z'\}$ のみが h' にとって個別合理的な選択肢である。ところが、$z'_D = d'$ は、$X'_{d'} = z$ を z' より好むので、X' がブロックされることはない。次に、$\overline{X}' = \{\bar{x}, z'\}$ も安定である。もし、これをブロックするとすれば、h は $\{x, z\}$ ないし $\{\bar{z}\}$ を配分されなければならない。しかし、前者は d にとっては、より好ましくないものであるし、後者は d' にとって、より好ましいものではない。また、h' は唯一の個別合理的な契約を得ているので、h' を通じて $\overline{X}'$ がブロックされることはない。そして、以上の 2 つのみが安定配分である。医師 d にとって、$\overline{X}'_d = \bar{x} \succ_d x = X'_d$ であるが、医師 d' にとっては、$X'_{d'} = z \succ_{d'} z' = \overline{X}'_{d'}$ となるので、D−最適な安定配分は存在しない。さらに、選択関数は集計需要法則を満たしているが、僻地病院定理は成り立たない。なぜなら、安定配分 X' において、$X'_{h'} = \emptyset$ であるが、一方の安定配分 $\overline{X}'$ においては、$\overline{X}'_{h'} = \{z'\}$ となるからである。また、X' が選ばれているときに、医師 d が、$\bar{x} \succ_d \emptyset_d x$ となるような選好順序に変えた場合、$\overline{X}'$ が唯一の安定配分となるので、これにより d の得る契約は以前よりも望ましいものになる。一方、$\overline{X}'$ が選ばれているときに、医師 d' が $z \succ_{d'} \emptyset_{d'} z' \succ_{d'} \bar{z}$ となるような選好順序に変えたとすると、X' が唯一の安定配分であり、これにより d' の得る契約は以前よりも望ましいものになる、したがって、定義域にこのような例が含まれるならば、安定配分をもたらすようなメカニズムで戦略耐性を満たすものは存在しない。

したがって、安定配分が存在するだけでなく、Hatfield and Milgrom [23] におけるような安定配分の性質を得るには双方代替性よりも強い条件が必要になる。 Hatfield and Kojima [21] はそのようなものでなおかつ代替性よりも弱い条件を見つけている。

定義 23. 選択関数 C_h が単方代替性を満たすとは、任意の部分集合 $Y \subset X$ に対し、$x, z \in X \setminus Y$ かつ $z_D \notin D(Y)$ となるとき、$z \in R_h(Y \cup \{z\})$ ならば $z \in R_h(Y \cup \{x, z\})$ が成り立つことをいう。

定義から、単方代替性を満たす選択関数が双方代替性を持たすことは明らかである。したがって、棄却対象からの独立性と単方代替性の下で安定配分が存在することになる。さらに、この仮定の下では D−最適な安定配分が存在する。以下、それを示すことにしよう。

定理 11. すべての選択関数が棄却対象からの独立性と単方代替性を満たすとする。このとき、累積提案過程において一度拒否された契約が、それ以降のステップで、再度採用されることはない。

証明. 病院 h が以前拒否した契約 z を再度採用することがあるものとして、そのような事態が発生する、もっとも初期の時点を t' とする。定義から、z は $t < t'$ となるような t 時点において拒否されていたはずである。すると、$(t-1)$ 時点ですでに z は病院 h によって保持されていたか、あるいは t 時点で新たに提案されたかのいずれかである。前者の場合、選択関数はユニタリであったから、$(t-1)$ 時点において、z の他に z_D が関係する契約は病院 h によって保持されることはない。後者の場合、$(t-1)$ 時点において、z_D が関係する契約が病院 h によって保持されてたならば、t 時点において、z が提案されることがないのはアルゴリズムの定義から明らかである。したがって、どちらの場合でも、$(t-1)$ 時点で z 以外に z_D が関係する契約が h によって保持されていることはない。ゆえに、t 時点においても、z 以外に z_D が関係する契約が h によって保持されることはない。なぜなら、$(t-1)$ 時点には、そのような契約はすべて拒否されていたのだから、もし t 時点でそのうち１つでも採用されるとすれば、t' の定義に矛盾するからである。よって、$z_D \notin D(C_h(A_h(t)))$ となる。また、$z \in A_h(t) \setminus C_h(A_h(t))$ であったから、棄却対象からの独立性から、

$$z \notin C_h(C_h(A_h(t)) \cup \{z\})$$

となる。明らかに、$C_h(A_h(t)) \cup \{z\} \subset A_h(t')$ なので、単方代替性から、$z \notin C_h(A_h(t'))$ でなければならないが、これは z が t' 時点で再度採用されることに矛盾する。

定理 12. すべての選択関数が棄却対象からの独立性と単方代替性を満たすとする。このとき、累積提案過程で得られる安定配分は D−最適である。

証明. どの安定配分 X'' に対しても、$z'' \in X''$ となるような契約が累積提案過程において拒否されることはないということを示せばよい。なぜなら累積提案過程で得られる契約よりも望ましい契約はすべて拒否されなければならないからである。仮に、そのような z'' が、$h = z''_H$ によって、初めて t 時点において拒否されたとする。そこで、$Y = C_h(A_h(t))$ とおくと、棄却対象からの独立性を用いれば $z'' \notin Y = C_h(Y \cup \{z''\})$ となる。定理 11 から、$z'' \notin D(Y)$ である。安定配分に含まれる契約が初めて拒否される時点が t であるから、$d' \in D(Y)$ に対し、$Y_{d'} \succeq_{d'} X''_{d'}$ でなければならない。なぜなら、仮に、$X''_{d'} \succ_{d'} Y_{d'}$ ならば、$Y_{d'} \in A_h(t)$ なので、アルゴリズムの定義から、すでに $X''_{d'}$ は t 時点以前に拒否されていなければならない。これは t の定義に矛盾するからである。

さて、$z'' \notin C_h(Y \cup \{z''\})$ かつ $z''_D \notin D(Y)$ で、$Y \cup \{z''\} \subset Y \cup X''$ であるから、単方代替性から、$z'' \notin C_h(Y \cup X'')$ でなければならない。しかし、そのとき、$C_h(Y \cup X'')$ は X'' をブロックすることになる。これは X'' の安定性に矛盾するので、定理が証明された。

さらに、集計需要法則が満たされるなら単方代替性の下でも僻地病院定理が成り立つ。

定理 13. 選択関数が棄却対象からの独立性、単方代替性と集計需要法則を満たすならば、X' と X'' を安定配分とすると、任意の $d \in D$ と $h \in H$ に対し、$|X'_d| = |X''_d|$ かつ $|X'_h| = |X''_h|$ が成り立つ。

証明. すでに定理の条件の下で D–最適な安定配分 $\overline{X}$ が存在することは示されている。そこで、X' を任意の安定配分とし、次のような部分集合を定義しよう。

$$A(X') = \{x \in X \mid d = x_D \text{ に対し } x \succeq_d C_d(X')\}$$

すると、X' の安定性から、$C_H(A(X')) = X'$ でなければならない。一方、$\overline{X}$ は D–最適なので、$A(\overline{X}) \subset A(X')$ となる。ゆえに、集計需要法則より、$|\overline{X}_h| = |C_h(A(\overline{X}))| \leq |C_h(A(X'))| = |X'_h|$ である。他方、$\overline{X}$ は D–最適であるから、X' において、いずれかの病院と契約を交わしている医師は、$\overline{X}$ でも同じでなければならない。すなわち、任意の $d \in D$ に対し、$|X'_d| \leq |\overline{X}_d|$ である。したがって、

$$\sum_{h \in H} |\overline{X}_h| \leq \sum_{h \in H} |X'_h| \quad \text{かつ} \quad \sum_{d \in D} |X'_d| \leq \sum_{d \in D} |\overline{X}_d|$$

となるが、

$$\sum_{h \in H} |\overline{X}_h| = \sum_{d \in D} |\overline{X}_d| \quad \text{かつ} \quad \sum_{h \in H} |X'_h| = \sum_{d \in D} |X'_d|$$

なので、すべての $d \in D$ と $h \in H$ に対し、$|X'_d| = |\overline{X}_d|$ かつ $|X'_h| = |\overline{X}_h|$ でなければならない。

僻地病院定理が成り立つことから、第 9 節での議論と同様にして、棄却対象からの独立性、単方代替性、集計需要法則の下で、D–最適メカニズムが戦略耐性を持つことを示すことができる。

10　代替性と単方代替性および双方代替性との関係

代替性より単方代替性は弱い条件であり、さらにそれよりも弱い条件が双方代替性であることは定義から明らかである。そこで本節では、後の 2 条件が最初の条件よりもどの程度弱い要求であるのかを示すことにしよう。まず、代替性と単方代替性の関係について議論するために、Hatfield and Kojima [21] は、次のような条件を導入した。

定義 24. 選択関数 C_h がパレート分離的であるとは、$x_D = x'_D$ かつ $x_H = x'_H$ となるような任意の契約 $x \neq x'$ に対し、ある $Y \subset X$ が存在して、$x \in C_h(Y \cup \{x, x'\})$ となるのであれば、すべての $Y' \subset X$ に対し、$x' \notin C_h(Y' \cup \{x, x'\})$ が成り立つことをいう。

すなわち、病院 h にとって、x と x' が同一の医師との間の異なる契約であったとすると、$Y \cup \{x, x'\}$ において x が選ばれているなら、どんな Y' に対しても、x' が $Y' \cup \{x, x'\}$

の中から選ばれることはない。言いかえれば、x の x' に対する「優位性」が確認できるような機会があれば、別の機会にそれが翻されることはないということである。すると次のような結果が得られる。（つまり、代替性と単方代替性との差はパレート分離性で特徴付けることができる。）

定理 14. 棄却対象からの独立性の下で、選択関数が代替性を満たすための必要十分条件は、それが単方代替性とパレート分離性を満たすことである。

証明. 代替性から単方代替性がしたがうのは自明なので同時にパレート分離性が成り立つことを示そう。$x_D = x'_D$ となるような $x \neq x'$ に対し、Y が存在して、$x \in C_h(Y \cup \{x, x'\})$ となったとする。もし、$x \notin C_h(\{x, x'\})$ ならば、$\{x, x'\} \subset Y \cup \{x, x'\}$ だから、代替性から、$x \notin C_h(Y \cup \{x, x'\})$ となって矛盾。したがって、$x \in C_h(\{x, x'\})$ である。すると、C_h はユニタリなので、$x' \notin C_h(\{x, x'\})$ となる。ここで代替性を再び用いれば、任意の $Y' \subset X$ に対して、$x' \notin C_h(Y' \cup \{x, x'\})$ となるので、パレート分離性が示されたことになる。

逆に、単方代替性とパレート分離性を仮定する。そこで、$x, y \in X \setminus Y$ かつ $x \notin C_h(Y \cup \{x\})$ としよう。もし、$x_D \notin D(Y)$ ならば単方代替性から、$x \notin C_h(Y \cup \{x, y\})$ となる。次に、$x_D \in D(Y)$ の場合を考える。もし、$x_D \notin D(C_h(Y \cup \{x, y\})$ ならば、$Y(x_D) = \{y \in Y | y_D = x_D\}$ とすると、$Y(x_D) \subset R_h(Y \cup \{x, y\})$ である。したがって、$Y' = Y \setminus Y(x_D)$ とすると棄却対象からの独立性から、$C_h(Y \cup \{x, y\}) = C_h(Y' \cup \{x, y\})$ となる。すると $x \notin C_h(Y' \cup \{x, y\})$ で、$x_D \notin Y'$ だから、単方代替性から $x \notin C_h(Y' \cup \{x, y\}) = C_h(Y \cup \{x, y\})$ となる。最後に $x_D \in D(C_h(Y \cup \{x, y\})$ の場合を考えよう。すると、$x' \in C_h(Y \cup \{x, y\})$ となるような x' が存在して、$x'_D = x_D$ となる。そこで、パレート分離性を用いると、$x \notin C_h(Y \cup \{x, y\})$ が成り立つ。以上で、C_h が代替性を満たすことが示された。

さらに、単方代替性と双方代替性との関係を示すために、Afacan and Turhan [7] は、以下のような定義を導入した。

定義 25. 選択関数 C_h が D–分離的であるとは、任意の $Y \subset X$ と $x, z, z' \in X \setminus Y$ に対し、$x_D \neq z_D = z'_D$ かつ $x_D \notin D(C_h(Y \cup \{x, z\})$ ならば、$x_D \notin D(C_h(Y \cup \{x, z, z'\})$ となるときをいう。

定理 15. 棄却対象からの独立性の下で、選択関数が単方代替性を満たすための必要十分条件は、それが双方代替性と D–分離性を満たすことである。

証明. 単方代替性から双方代替性がしたがうのは明らかなので、D–分離性が成り立つことを示そう。そこで $x, z, z' \in X \setminus Y$ かつ $x_D \neq z_D = z'_D$、$x_D \notin D(C_h(Y \cup \{x, z\})$ とする。$Y' = Y \setminus \{x' \in Y | x'_D = x_D$ かつ $x' \neq x\}$ と定義する。すると棄却対象からの独立性から、$C_h(Y \cup \{x, z\}) = C_h(Y' \cup \{x, z\})$ である。定義より、$x_D \notin D(Y' \cup \{z\})$ であり、また、$x \notin C_h(Y' \cup \{x, z\})$ であったから、単方代替性より、$x \notin C_h(Y' \cup \{x, z, z'\})$ となる。仮に、$x \in C_h(Y \cup \{x, z, z'\})$ ならば、C_h はユニタリであるから、$x' \neq x$ かつ $x'_D = x_D$ となるような x' は、すべ

て $x' \notin C_h(Y \cup \{x, z, z'\})$ である。よって、棄却対象からの独立性から、$C_h(Y \cup \{x, z, z'\}) = C_h(Y' \cup \{x, z, z'\})$ となる。ところが、$x \notin C_h(Y' \cup \{x, z, z'\})$ であったから、これは矛盾である。したがって、$x \notin C_h(Y \cup \{x, z, z'\})$ でなければならない。次に、$x' \neq x$ かつ $x'_D = x_D$ となるような $x' \in Y$ を任意に選び、$Y'' = Y \setminus \{x'\} \cup \{x\}$ と定義しよう。定義から、$Y'' \cup \{x', z\} = Y \cup \{x, z\}$ であるから、$x'_D = x_D \notin D(C_h(Y'' \cup \{x', z\})$ である。したがって、すでに x と Y について考察したのと同じ方法を適用することにより、$x' \notin C_h(Y'' \cup \{x', z, z'\}) = C_h(Y \cup \{x, z, z'\})$ であることがわかる。ゆえに、$x_D \notin D(C_h(Y \cup \{x, z, z'\})$ でなければならない。

逆に、双方代替性と D–分離性から、単方代替性が得られることを示そう。そこで、$Y \subset X$ と $x \in X$ が、$x_D \notin D(Y)$ かつ $x \notin C_h(Y \cup \{x\})$ であるとしよう。まず、$z_D \notin D(Y)$ となるような z に対しては、双方代替性から、$x \notin C_h(Y \cup \{x, z\})$ が成り立つ。そこで、$z_D \in D(Y)$ とする。すると、$z'_D = z_D$ となるような $z' \in Y$ が存在するので、$Y' = Y \setminus \{z'\}$ とすれば、$Y = Y' \cup \{z'\}$ である。したがって、$x \notin C_h(Y' \cup \{x, z'\})$ となる。仮定から、$x_D \notin D(Y)$ であったから、結局、$x \notin D(C_h(Y' \cup \{x, z'\})$ でなければならない。ゆえに、D–分離性から、$x_D \notin D(C_h(Y' \cup \{x, z, z'\})$ となる。明らかに、$Y' \cup \{x, z, z'\} = Y \cup \{x, z\}$ なので、$x_D \notin D(C_h(Y \cup \{x, z\})$ であるから、$x \notin C_h(Y \cup \{x, z\})$ がしたがう。

すると、定理 14 と定理 15 より、次の結果は明らかである。

定理 16. 棄却対象からの独立性の下で、選択関数が代替性を満たすための必要十分条件は、それが双方代替性、パレート分離性、D–分離性を満たすことである。

11　今後の課題

以上で、契約を伴うマッチングモデルにおける基礎的な事項は、おそらくかなりの部分を網羅したことになるだろう。このモデルが本質的に Kelso-Crawford モデルによってカバーされないようなものであるためには、少なくとも選択関数が単方代替性か、あるいはそれよりも弱い条件を満たすような場合である。しかし、同時に安定配分の存在がつねに保証されるためには弱代替性よりも強い条件が必要である。したがって、問題は、そのような条件の下で少なからぬ応用がありえるかどうかである。もし、そうでなければ、この研究は単に理論上の意義しか持たないだろう。幸いなことに少なからぬ応用が存在している。例えば、アメリカの陸軍士官学校を終了した幹部候補生が兵役義務をどのような部署で過ごすかという問題などが含まれる。兵役義務を終えてそのまま軍隊に残る者もいる一方、民間へ就職する者もいる。軍隊への残留率を高い水準で維持する目的で義務期間を終えた後も数年間、軍隊に所属することに同意すれば義務期間における所属部署への配属を希望にしたがって優遇するといった仕組みが存在している。この場合、各部署の選択関数

は一般に代替性を満たさないが、単方代替性を満たすことが Sönmez and Switzer［34］によって示されている。それ以外にも、日本の研修医マッチング市場における地域定員の存在やオーバーブッキングが発生した際にキャンセルを条件にした航空機の座席のアップグレードの問題など、様々な応用があり得ることが知られている。

これまでに得られた理論研究の応用とは別に、さらに単方代替性よりも弱い条件で安定配分の存在を保証できるようなものを探索する研究も行われており、それに伴い、どれほど応用範囲が広がるのかが今後の課題になるだろう。

（本研究は科研費（16K03561）の助成を受けたものである。）

参考文献

［1］岡谷良二，「集団形成の経済理論」2015 年，成文堂.

［2］坂井豊貴，藤中裕二，若山琢磨，「メカニズムデザイン―源配分制度の設計とインセンティブ」2008 年，ミネルヴァ書房.

［3］田村明久，「離散凸解析とゲーム理論」2009 年，朝倉書店.

［4］田村明久，「安定結婚からサプライチェーンネットワークの安定性へ」オペレーションズ・リサーチ 2013 年 6 月号，pp. 325－331.

［5］室田一雄，「離散凸解析」2001 年，共立出版.

［6］Adachi, Hiroyuki, “On a Characterization of Stable Matchings”, 2000, Economics Letters, vol. 68（1）, pp. 43－49.

［7］Afacan, Mustafa Oğuz and Bertan Turhan, “On Relationships between Substitutes Conditions”, 2014, Sabanci University working paper.

［8］Aizerman, Mark and Fuad Aleskerov, “Theory of Choice”, 1995, North-Holland.

［9］Aygün, Orhan and Tayfun Sönmez, “Matching with Contracts: The Critical Role of Irrelevance of Rejected Contracts”, 2012, Boston College working paper.

［10］Aygün, Orhan and Tayfun Sönmez, “The Importance of Irrelevance of Rejected Contracts in Matching under Weakened Substitutes Conditions”, 2012, Boston College working paper.

［11］Arrow, Kenneth, Joseph, “Social Choice and Individual Values 2nd. Edition”, 1963, John Wiley and Sons.

［12］Birkhoff, Garrett, “Lattice Theory”, 1948, American Mathematical Society.

［13］Chambers, Christopher P. and M. Bumin Yenmez, “Choice and Matching”, 2013, unpublished.

［14］Chernoff, Herman, “Rational Selection of Decision Functions”, 1954, Econometrica, vol. 22（4）, pp. 422－443.

［15］Echenique, Federico, “A Short and Costructive Proof of Tarski's Fixed-Point Theorem”, 2005, International Journal of Game Theory, vol. 33（2）, pp. 215－218.

［16］Echenique, Federico, “Contracts versus Salaries in Matching”, 2012, American Economic Review, vol. 102（1）, pp. 594－601.

［17］Fleiner, Thomás, “A Matroid Generalization of the Stable Matching Polytope”, 2001, in “Integer Programming and Combinatorial Optimization”, Springer-Verlag, pp. 105－114.

［18］Gale, David and Lloyd Stowell Shapley, “College Admissions and the Stability of Marriage”, 1962, American Mathematical Monthly, vol. 69, pp. 9－15.

［19］Hatfield, John William and Fuhito Kojima, “Matching with Contracts: Comments”, 2008, American Economic Review, vol. 98（3）, pp. 1189－1194.

［20］Hatfield, John William and Fuhito Kojima, “Web Appendix for “Matching with Contracts:

Corrigendum", 2007, https://assets.aeaweb.org/assets/production/articles-attachments/aer/data/june08/20070593_app.pdf

[21] Hatfield, John William and Fuhito Kojima, "Substitutes and Stability for Matching with Contracts", 2010, Journal of Economic Theory, vol. 145, pp. 1704–1723.

[22] Hatfield, John William, Scott Duke Kominers, and Alexander Westkamp. "Stability, Strategy-Proofness, and Cumulative Offer Mechanisms", 2015, Harvard University, Working Paper.

[23] Hatfield, John William and Paul Robert Milgrom, "Matching with Contracts", American Economic Review, 2005, vol. 95 (4), pp. 913–935.

[24] Hirata, Daisuke and Yusuke Kasuya, "Cumulative Offer Process is Order-independent", 2014, Economics Letters, vol. 124 (1), pp. 37–40.

[25] Kelso, Alexander and Vincent Paul Crawford, "Job Matching, Coalition Formation, and Gross Substitutes." Econometrica, 1982, vol. 50 (6), pp. 1483–14504.

[26] Matskin, Aron and Daniel Lehmann, "General Matching: Lattice Structure of the Set of Agreements", 2009, unpublished.

[27] Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green, "Microeconomic Theory", 1995, Oxford University Press.

[28] McKenzie, Lionel Wilfred, "Gross Substitutes", 2008, in The New Palgrave Dictionary of Economics, Macmillan.

[29] Mosak, Jacob Louis, "General Equilibrium Theory in International Trade", 1944, The Principia Press.

[30] Ostrovsky, Michael, "Stability in Supply Chain Networks", American Economic Review, 2008, vol. 98 (3), pp. 897–923.

[31] Plott, Charles Raymond, "Path Independence, Rationality, and Social Choice", 1973, Econometrica, vol. 41 (6), pp. 1075–1091.

[32] Richter, Marcel Kessel, "Revealed Preference Theory", 1966, Econometrica, vol. 34 (3), pp. 635–645.

[33] Roth, Alvin Elliot and Marilda Antonia de Oliveira Sotomayor, "Two-sided Matching, A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis." Cambridge University Press, 1990.

[34] Sönmez, Tayfun and Tobias B. Switzer, "Matching with (Branch-of-Choice) Contracts at the United States Military Academy", 2013, Econometrica, vol. 18 (2), pp. 451–488.

[35] Sen, Amartya, "Collective Choice and Social Welfare", 1970, Holden-Day.

[36] Suzumura, Kotaro, "Rational Choice, Collective Decisions, and Social Welfare", 1983, Cambridge University Press.

[37] Tarski, Alfred, "A Lattice Theoretical Fixedpoint Theorem and Its Applications," 1955, Pacific Journal of Mathematics, vol. 5, pp. 285–309.