



ESTIMACIÓN DEL PERFIL RADIAL DE VELOCIDAD AXIAL EN LECHOS FIJOS DE BAJA RELACIÓN DT/DP

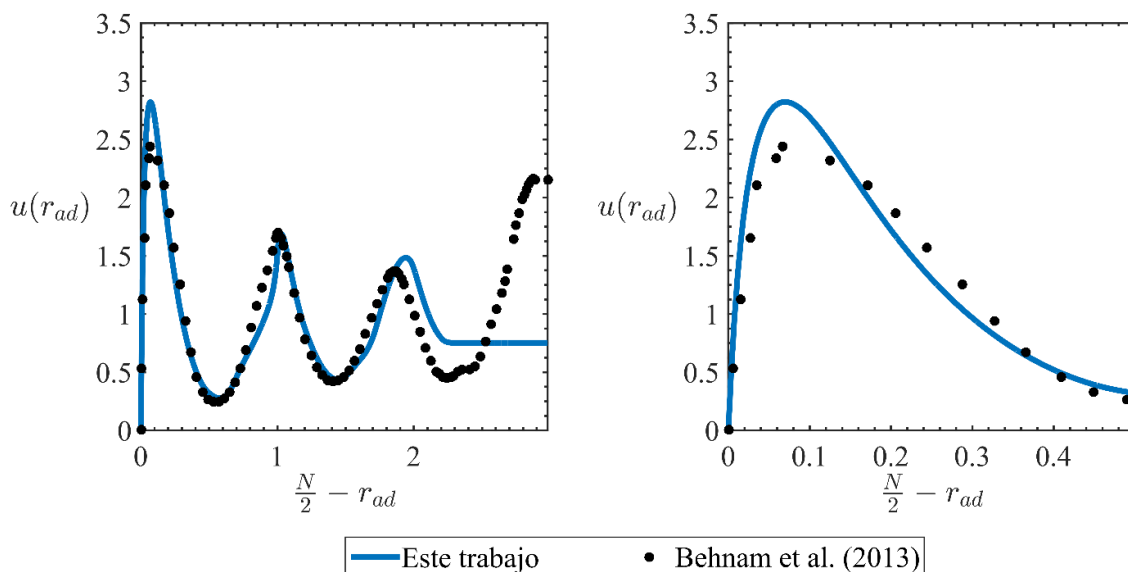
Carlos D. Luzi^{1,2*}, Néstor J. Mariani^{1,2}, Oscar. M. Martínez^{1,2}, Guillermo F. Barreto^{1,2}

¹ PROIRQ, Departamento de ingeniería química, Facultad de ingeniería, UNLP, La Plata, Argentina.

² Centro de Investigación y Desarrollo en Ciencias Aplicadas Dr. J.J. Ronco (CINDECA) (CONICET-CIC-UNLP), 47 N° 257, (B1900 AJK), La Plata, Argentina.

* Autor Corresponsal: carlos.luzi@ing.unlp.edu.ar

Resumen Gráfico



Resumen

Los reactores multitubulares rellenos con catalizador de tipo granular en el interior de los tubos normalmente presentan una relación de diámetro de tubo a diámetro de pastilla, N , entre 5 y 10, por lo que la pared del tubo ejerce una notable influencia sobre la distribución del relleno. Esto genera un perfil radial de porosidad que promueve un perfil radial en la velocidad axial del fluido. Una alternativa frecuentemente empleada para estimar tal perfil consiste en resolver la llamada ecuación de Brinkman extendida, disponiendo del perfil radial de porosidad e introduciendo una viscosidad efectiva. Las correlaciones disponibles para esta última resultan aplicables solo en un acotado intervalo de números de Reynolds. En adición, la formulación en sí no considera el área específica local de las pastillas, $a_v(r)$, para establecer las resistencias al flujo impuestas por el relleno, sino una relación en términos de la porosidad local. Consecuentemente, los perfiles de velocidad obtenidos no resultan realistas para Re_p elevados.

En el presente trabajo, se propone una serie de modificaciones a la ecuación extendida de Brinkman, orientada a lechos rellenos de esferas de un único tamaño con $5 \leq N \leq 10$. El empleo explícito de $a_v(r)$ y la propuesta de una expresión para la viscosidad efectiva que conduce a valores acotados y razonables para altos Re_p , permite una estimación del perfil radial de velocidad consistente con datos experimentales y resultados de simulaciones mediante CFD disponibles en bibliografía.

Abstract

Multitubular reactors with tubes packed with catalytic pellets usually present a tube to particle diameter ratio, N , between 5 and 10 and thus the tube wall exerts a considerable effect on the particle distribution. Then, a radial porosity profile arises that generates a radial profile in the axial velocity of the fluid. A widespread alternative for estimating such a velocity profile is to solve the so-called extended Brinkman equation, using an available radial porosity profile and introducing an effective viscosity. Literature correlations available for the latter are applicable only in a limited range of Reynolds numbers. In addition, the formulation itself does not consider the local specific area of the pellets, $a_v(r)$, to establish the flow resistance imposed by the packing, but uses instead an expression in terms of the local porosity. Consequently, the predicted velocity profiles are not realistic for high Re_p numbers.

In the present contribution, it is proposed a series of modifications to the extended Brinkman equation for beds filled with spheres of uniform size presenting $5 \leq N \leq 10$. The explicit use of $a_v(r)$ and a novel expression for the effective viscosity, which leads to bounded and reasonable values for high Re_p , allow a tight estimation of the radial velocity profile consistent with experimental data and simulation results achieved using CFD.

Palabras Claves: Lechos fijos; perfil radial de velocidad axial; perfil radial de porosidad; área específica local de pastilla.

Keywords: Fixed-bed; radial velocity profile on axial direction; radial porosity profile; Particle local surface area.

1. Introducción

Los reactores de lecho fijo son ampliamente utilizados en la industria de procesos. En particular, cuando la operación requiere del simultáneo intercambio de energía, se emplean reactores multitubulares (tipo intercambiadores de calor de tubo y coraza) rellenos usualmente con catalizador granular de formas convencionales. Esto da lugar a diseños con bajas relaciones $N = d_T/d_p$, siendo común que la misma se sitúe entre 5 y 10.

Debido a la fuerte dependencia de las reacciones químicas con la temperatura y su comportamiento no-lineal, la simulación y diseño de este tipo de reactores debe frecuentemente realizarse empleando modelos con un alto grado de detalle. En este sentido, el empleo de modelos bidimensionales, tanto pseudo-homogéneos como heterogéneos (2D), ha sido ampliamente discutido en la bibliografía y aún hoy se siguen estudiando sus alcances (una revisión general sobre el modelado de reactores de lecho fijo puede encontrarse en [1]; mientras que el problema de transporte radial de energía fue revisado por Dixon [2]). En adición, para bajos valores de N , se tiene una importante influencia de la pared del tubo en la distribución de las pastillas dentro del lecho, lo que ocasiona variaciones radiales en el perfil de velocidad axial, que deben ser tenidas en cuenta. De hecho, muchos de los modelos bidimensionales intentan reconocer tales variaciones (e.g., [3–5]). Recientemente, Dixon llevó a cabo una simulación detallada mediante CFD (Computational Fluid Dynamics) del reformado de metano con vapor de agua, para un lecho de esferas con $N = 5.96$ y considerando un tubo con 807 pastillas [6]. El autor comparó los resultados obtenidos

mediante CFD con los correspondientes a los modelos uni y bidimensionales heterogéneos, distinguiendo para el modelo bidimensional el caso con perfiles de porosidad y velocidad uniformes o variables en la coordenada radial, r . Se desprende de la comparación que, para la aplicación allí estudiada, solo el modelo bidimensional con propiedades variables en r permite obtener resultados cuantitativamente razonables.

Puede concluirse entonces que, si se pretende simular el comportamiento de reactores de lecho fijo con bajos valores de N , resultará deseable disponer de una herramienta que permita evaluar el perfil radial de velocidad axial, en particular, en la región cercana a la pared del recipiente, donde se producen las variaciones de mayor significación. Teniendo en cuenta dicho objetivo, en este trabajo se aborda la resolución de la ecuación de Brinkman extendida, a la cual se le introducen una serie de modificaciones que posibilitan la obtención del perfil radial de velocidad axial para cualquier Re_p , con un significativo grado de concordancia cuando se lo compara frente a simulaciones de CFD y a valores experimentales, para lechos rellenos de esferas de un único tamaño con $5 \leq N \leq 10$. Asimismo, la alternativa aquí presentada arroja resultados superadores respecto a las existentes en la bibliografía.

2. Planteo del problema y antecedentes

Disponiendo de la información del perfil radial de porosidad, una alternativa frecuentemente empleada para estimar en forma sencilla el perfil radial de velocidad axial es mediante la denominada ecuación de Brinkman extendida. Considerando que el perfil de velocidad está desarrollado, dicha ecuación presenta la forma:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{1}{\varepsilon(r)r} \frac{d}{dr} \left(\eta^{ef} r \frac{dv}{dr} \right) - F_p(r, v) \quad (1)$$

$$\begin{cases} v(d_r / 2) = 0 \\ \frac{dv}{dr}(0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

donde v es la velocidad axial superficial, $F_p(r, v)$ tiene en cuenta la resistencia ofrecida por las pastillas, conteniendo los términos asociados a los efectos viscosos (Darcy) y a los inerciales (Forchheimer) y η^{ef} es una viscosidad efectiva, que se puede interpretar como la suma de la viscosidad molecular y la llamada viscosidad turbulenta. La alternativa más difundida [3,7–9], aunque netamente empírica, es emplear la ecuación de Ergun aplicada a nivel local para expresar $F_p(r, v)$ según:

$$F_p(r, v) = f_1(r)v + f_2(r)v^2 \quad (3a)$$

$$f_1(r) = 150 \frac{\eta_F [1 - \varepsilon(r)]^2}{d_p^2 \varepsilon^3(r)} \quad (3b)$$

$$f_2(r) = 1.75 \frac{\rho [1 - \varepsilon(r)]}{d_p \varepsilon^3(r)} \quad (3c)$$

junto con una expresión para η^{ef} en función del número de Reynolds, Re_p , definido como:

$$Re_p = \rho \langle v \rangle d_p / \eta_F \quad (4)$$

Dichas funcionalidades de η^{ef} con el Re_p responden a la necesidad de disminuir el valor del máximo de velocidad en las proximidades a la pared [e.g. ,7].

En particular, para su aplicación en lechos de esferas Giese y col. [7] propone el empleo de las Ec. (1-3) (sin la porosidad afectando al término de disipación viscosa), empleando el perfil de porosidad medido experimentalmente y para la viscosidad efectiva la Ec. (5), ajustada para un lecho relleno con esferas perfectas:

$$\eta^{ef} / \eta_F = 2 \exp[3.5 \cdot 10^{-3} Re_p] \quad (5)$$

Alternativamente, Bey y Eigenberger [8] consideran una expresión en términos de la velocidad intersticial, que solo se diferencia en el término de disipación viscosa respecto de la Ec. (1) (tomando $\varepsilon(r)dv_i(r)/dr$, con $v_i(r)$ la velocidad intersticial, en lugar de $d[\varepsilon(r)v_i(r)]/dr$. Para el perfil de porosidad, tienen en cuenta una expresión que reconoce dos zonas, una de “pared” donde $\varepsilon(r)$ varía con r^2 y una región central donde $\varepsilon(r)$ depende de una función sinusoidal amortiguada. Para la viscosidad efectiva en lechos rellenos con esferas, emplean una función ajustada dada por:

$$\eta^{ef} / \eta_F = 1 + (7 \cdot 10^{-6} N + 2 \cdot 10^{-5}) Re_p^2 \quad (6)$$

Finalmente, en el modelo bidimensional pseudo-homogéneo propuesto por Winterberg y col. [3], se requiere de una estimación del perfil de velocidad. Para su estimación, los autores plantean la ecuación de Brinkman en la misma forma dada en [7], pero con dos variantes. La primera y más significativa, corresponde al empleo de una función tipo “alisada” para la porosidad, dada por la Ec. (7). Según los autores, tal perfil de porosidad permite una estimación razonable del perfil de velocidad hasta la posición del primer máximo desde la pared. La segunda, es el uso de la expresión para la viscosidad efectiva correspondiente a esferas deformadas [7], Ec. (8), en lugar de esferas perfectas.

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_0 \left\{ 1 + 1.36 \exp \left[-\frac{5}{2} \left(\frac{d_T - 2r}{d_p} \right) \right] \right\} \quad (7)$$

$$\eta^{ef} / \eta_F = 2 \exp[2 \cdot 10^{-3} \text{Re}_p] \quad (8)$$

donde ε_0 corresponde a la porosidad en el interior del lecho. Como veremos, ninguna de las anteriores propuestas permite obtener resultados razonables para un amplio rango de números de Reynolds.

3. Expresión adimensionalizada para la ecuación de Brinkman y modificaciones propuestas.

En primer lugar, adimensionalizamos la Ec. (1) y las correspondientes condiciones de contorno con:

$$u = v / \langle v \rangle,$$

$$r_{ad} = r / d_p,$$

$$N = d_T / d_p,$$

$$\eta^* = \eta^{ef} / \eta_F,$$

$$\kappa = \frac{(dp/dz)}{(dp/dz)_E}$$

$$F_p^*(r_{ad}, u) = \frac{\eta_F \langle v \rangle}{d_p^2} F_p(r, v),$$

donde:

$$\langle v \rangle = \frac{8}{d_T^2} \int_0^{d_T/2} v(r) r dr,$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_E = -\frac{\eta_F \langle v \rangle}{d_p^2} (\bar{f}_1^* + \text{Re}_p \bar{f}_2^*), \quad \bar{f}_1^* = 150 \frac{(1-\bar{\varepsilon})^2}{\bar{\varepsilon}^3}, \quad \bar{f}_2^* = 1.75 \frac{(1-\bar{\varepsilon})}{\bar{\varepsilon}^3}.$$

siendo κ una medida de la permeabilidad del lecho respecto de la permeabilidad predicha por la ecuación de Ergun.

Con ello, resulta:

$$\frac{1}{\varepsilon(r_{ad}) r_{ad}} \frac{d}{dr_{ad}} \left(\eta^* r_{ad} \frac{du}{dr_{ad}} \right) = F_P^*(r_{ad}, u) - \kappa (\bar{f}_1^* + \text{Re}_p \bar{f}_2^*) \quad (9)$$

$$\begin{cases} u(N/2) = 0 \\ \frac{du}{dr_{ad}}(0) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Definida la funcionalidad $F_P^*(r_{ad}, u)$, el valor de se debe evaluar iterativamente, exigiendo que el perfil obtenido con la Ec. (9) y las respectivas condiciones de contorno verifiquen:

$$\frac{8}{N^2} \int_0^{N/2} u(r_{ad}) r_{ad} dr_{ad} = 1 \quad (11)$$

En el presente trabajo se considera la función de distribución de centros de pastillas, $\sigma(r_C)$, propuesta por Mariani y col. [10], para la determinación de los valores locales de la porosidad y el área por unidad de volumen total o área específica (que surgirá a partir de la corrección introducida en la Sección 3.2), requiriendo como único parámetro el valor de N . En adición, se propone tomar $F_P^*(r_{ad}, u)$ basado en la expresión de Ergun aplicada localmente, pero con dos correcciones respecto al caso usual. Todos estos aspectos se discuten en las Secciones siguientes.

3.1. Porosidad y área específica locales a partir de la distribución de centros de pastillas

La estructura de los lechos fijos rellenos al azar con esferas de un único tamaño se puede caracterizar por la distribución de centros de pastillas. La misma es definida por una función de densidad, $\sigma(r_C)$, tal que $2\pi \sigma(r_C) r_C dr_C$ representa el número de centros de pastillas por unidad de longitud de lecho entre r_C y $r_C + dr_C$, siendo r_C la distancia del centro de la pastilla medida desde el eje de un cilindro de radio r .

La distribución de centros puede ser modelada como una serie de zonas tipo “pulso” o uniformes, en lugar de una función continua. En este sentido, $\sigma(r_C)$ puede ser concebida como el aporte de una serie de M zonas de alta concentración de centros de pastillas, separadas por espacios con contribuciones despreciables, según:

$$\sigma(r_c) = \sum_{j=1}^M \sigma_j(r_c) \quad (12)$$

En particular, un modelo de este tipo fue presentado en [10], describiendo la distribución radial hasta una distancia de aproximadamente dos diámetros de pastilla medidos desde la pared del recipiente. Dicha función considera un total de cuatro zonas, como se describen en la Figura 1. La primera zona considera la capa en contacto con la pared, modelada en forma de un pulso por ser altamente ordenada, mientras que las tres restantes se modelan como un escalón. La segunda zona reconoce la muy pequeña fracción ubicada muy cerca de un diámetro de pastilla desde la pared, como consecuencia de imperfecciones en la primera capa. La tercera corresponde a la identificación de una capa con un alto grado de orden, aunque más difusa que la primera, y finalmente, la cuarta zona que se extiende hasta el centro del lecho, asumiendo que a partir de misma el ordenamiento resulta completamente aleatorio.

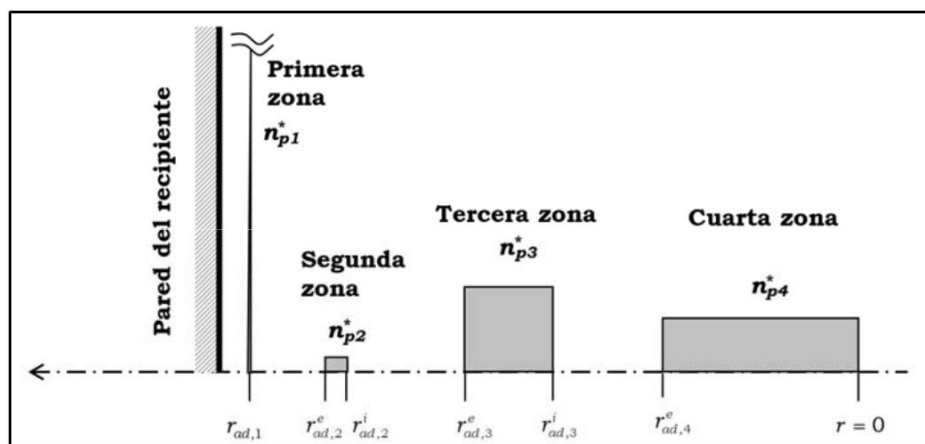


Figura 1: esquema del modelo de la distribución de centros [10].

Conocida la porosidad global del lecho ($\bar{\varepsilon}$), el número total de pastillas por unidad de longitud de lecho, n_{pT}^* (adimensionalizado con d_p) y el número de pastillas por unidad de longitud de cada una de las zonas indicadas en la Figura 1, pueden calcularse según:

$$n_{pT}^* = \frac{3}{2}(1 - \bar{\varepsilon})N^2 \quad (13)$$

$$n_{p1}^* = \pi G_1 / \arcsin\left[\frac{(3/4)^{1/2}}{N-1}\right] \quad (14)$$

$$n_{p2}^* = 0.106 n_{p1}^* \quad (15)$$

$$n_{p3}^* = \pi G_3 / \arcsin \left[\frac{(3/4)^{1/2}}{N-2x_W-1} \right] \tag{16}$$

$$n_{p4}^* = n_{pT}^* - \sum_{j=1}^3 n_{pj}^* \tag{17}$$

Para estimar la porosidad global, en este trabajo se empleó la expresión que se transcribe a continuación propuesta en [10]:

$$\bar{\varepsilon} = 0.375 + 0.355 / N \tag{18}$$

mientras que los coeficientes G_1 y G_3 , así como las posiciones de las zonas (x) necesarias para utilizar las Ecs. (13)-(17) se reportan en la Tabla 1.

Definida la función de distribución de centros de pastillas, se pueden obtener todas las propiedades geométricas del lecho considerando diferentes conjuntos de magnitudes geométricas que surgen de la intersección entre una esfera y una superficie cilíndrica. Los detalles de la formulación se pueden consultar en [10,11].

Tabla 1: coeficientes para el cálculo de $\sigma(r_C)$ [10], siendo $x = N/2 - r_{ad}$.

G_1	G_3	x_1	x_2^e	x_2^i	x_3^e	x_3^i	x_4^e	x_W
0.825	0.710	0.5	1	1.1	1.209	1.486	1.735	0.894

En especial, se pueden obtener la porosidad local, $\varepsilon(r)$, y el área específica local, $a_v^*(r_{ad})$. Ambas variables se muestran en la Figura 2.A y 2.B, respectivamente. En este punto es interesante resaltar que, aun cuando a nivel promedio en el lecho se verifica que $6(1-\bar{\varepsilon}) = d_p \bar{a}_v = \bar{a}_v^*$, esto no se cumple a nivel local, como se aprecia en la Figura 2.B, en la cual se comparan los valores de $a_v^*(r_{ad})$ frente a $6[1-\varepsilon(r_{ad})]$. De hecho, el término $6[1-\varepsilon(r_{ad})]$ tiende a cero cuando nos aproximamos a la pared ($r_{ad} \rightarrow N/2$), mientras que $a_v^*(N/2)$ es definitivamente distinto de cero, aproximándose a un valor cercano a tres. Este último aspecto se retoma en la siguiente Sección.

3.2. Primera corrección: área local

Como fuera señalado en la Sección 2, la alternativa más difundida es emplear la ecuación de Ergun aplicada a nivel local para expresar $F_P^*(r_{ad}, u)$, Ecs. (3.a)-(3.c), que, en términos adimensionales se expresan:

$$F_P^*(r_{ad}, u) = u [f_1^*(r_{ad}) + \text{Re}_p f_2^*(r_{ad}) u] \tag{19.a}$$

$$f_1^* = 150 \frac{[1 - \varepsilon(r_{ad})]^2}{\varepsilon^3(r_{ad})} \quad (19.b)$$

$$f_2^* = 1.75 \frac{[1 - \varepsilon(r_{ad})]}{\varepsilon^3(r_{ad})} \quad (19.c)$$

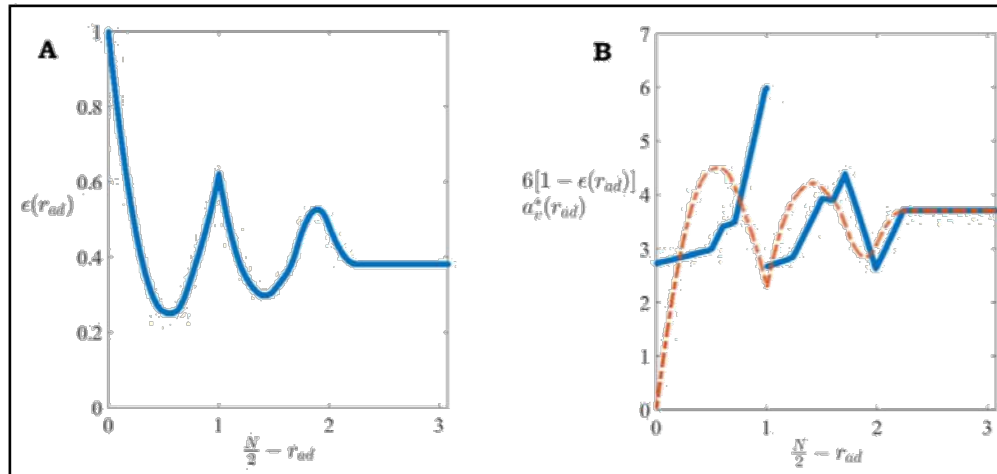


Figura 2: Propiedades del lecho en función de la distancia desde la pared medida en d_p para $N = 6.15$, empleando la función de distribución de centros de pastillas [10]. Izquierda: porosidad del lecho. Derecha: área local por unidad de volumen, a_v^* (línea llena azul) y $6[1 - \varepsilon(r_{ad})]$ (línea punteada roja).

No obstante, si interpretamos que en la ecuación de Ergun los términos proporcionales a $(1 - \bar{\varepsilon})$ están asociados en realidad al área específica, deberíamos reescribir los mismos según:

$$f_1^* = \frac{25 [a_v^*(r_{ad})]^2}{6 \varepsilon^3(r_{ad})} \quad (20)$$

$$f_2^* = \frac{1.75 a_v^*(r_{ad})}{6 \varepsilon^3(r_{ad})} \quad (21)$$

En virtud de lo discutido en la Sección 3.1, es esperable que la dependencia de $F_P^*(r_{ad}, u)$ con la posición radial sea significativamente diferente al considerar explícitamente el área específica local en lugar del término $6[1 - \varepsilon(r_{ad})]$. En este sentido, en la Figura 3 se muestran los perfiles de velocidad obtenidos para distintos valores del número de Reynolds, empleando $a_v^*(r_{ad})$ (curva azul llena) como única modificación o utilizando en su lugar $6[1 - \varepsilon(r_{ad})]$ (curva roja punteada), ambas de acuerdo a la función $\sigma(r_c)$, y considerando en ambos casos $\eta^* = 1$.

Se puede apreciar que el empleo de $a_v^*(r_{ad})$ hace que la velocidad en las cercanías a la pared no crezca abruptamente a medida que Re_p aumenta. En particular, para $Re_p = 5000$, resulta

$u_{max} = 6.41$ para el caso en que se considera $6 [1-\varepsilon(r_{ad})]$, mientras que con $\alpha_v^*(r_{ad})$ se predice un valor de $u_{max} = 3.29$.

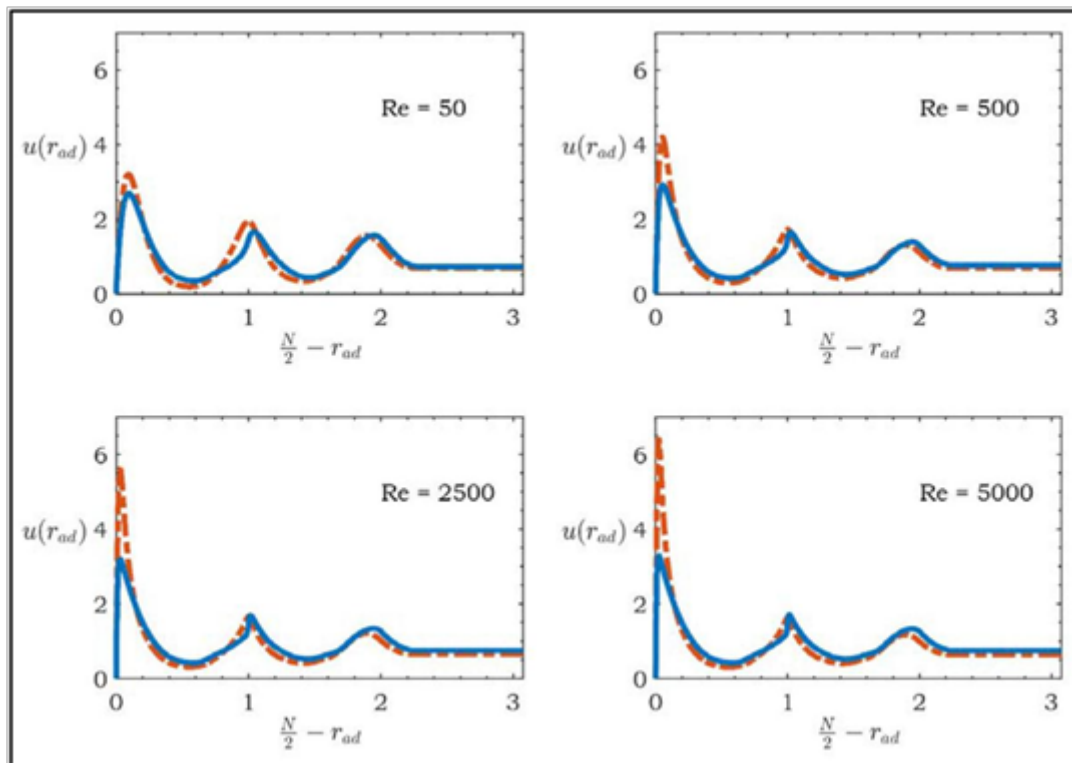


Figura 3: perfiles radiales de velocidad axial para $N = 6.15$ y diferentes valores de Reynolds, empleando $6 [1-\varepsilon(r_{ad})]$ (línea punteada roja) o $\alpha_v^*(r_{ad})$ (línea llena azul) y considerando en ambos casos la viscosidad del fluido ($\eta^* = 1$).

3.3. Segunda corrección: resistencia al flujo a medio diámetro de pastilla desde la pared

En general, para $N > 5$ la porosidad local es el resultado de arreglos con mayor o menor grado de ordenamiento e imperfecciones que generan huecos (de mayor tamaño) y tienden a romper dicho ordenamiento. Hacia el centro del lecho, aunque aún con huecos de gran tamaño, la disposición de las partículas se caracteriza por tender a ser mayoritariamente aleatoria, especialmente a medida que N aumenta. Por el contrario, el efecto de la pared contribuye a generar arreglos muy ordenados y compactos para las pastillas que están en contacto con la misma (primera capa), a menos de las mencionadas imperfecciones. Los huecos generados por tales imperfecciones presentarán una influencia relevante en el valor de la porosidad local, pero no en el flujo, dado que se trata de zonas prácticamente estancas [12].

Tales imperfecciones se pueden apreciar en la Figura 4 [4], en la cual se proyectaron sobre la pared del tubo las pastillas con centro entre $(N-1)/2 \geq r_{ad} \geq N/2-1$ para $N = 5.04$, de acuerdo a la distribución de pastillas predicha con el algoritmo propuesto en [13]. Se puede observar

que para $r_{ad} = (N-1)/2$ (a medio diámetro de pastilla de la pared), existe una importante cantidad de arreglos de tipo triangulares compactos (tipo A), con muy baja porosidad (para un arreglo triangular perfecto y sin considerar los efectos de curvatura, se tiene $\varepsilon_A = 0.0931$ en $r_{ad} = (N-1)/2$). También se pueden distinguir arreglos que se asemejan a cuadros compactos (tipo B, con $\varepsilon_B = 0.215$) y algunos huecos de gran tamaño, que pueden aproximarse por arreglos pentagonales (no compactos) con las pastillas en cada vértice (tipo C, con $\varepsilon_C = 0.315$). Por otro lado, la porosidad mínima, a aproximadamente medio diámetro de pastilla desde la pared, alcanza valores de $\varepsilon_{min} = 0.25$. Recordando que para cualquier posición r_{ad} , $\varepsilon(r_{ad})$ es el resultado de promediar la fracción de huecos sobre toda la superficie cilíndrica de radio r_{ad} , podemos interpretar el mínimo de porosidad en $r_{ad} \approx (N-1)/2$ como un promedio ponderado de las diferentes contribuciones mencionadas.

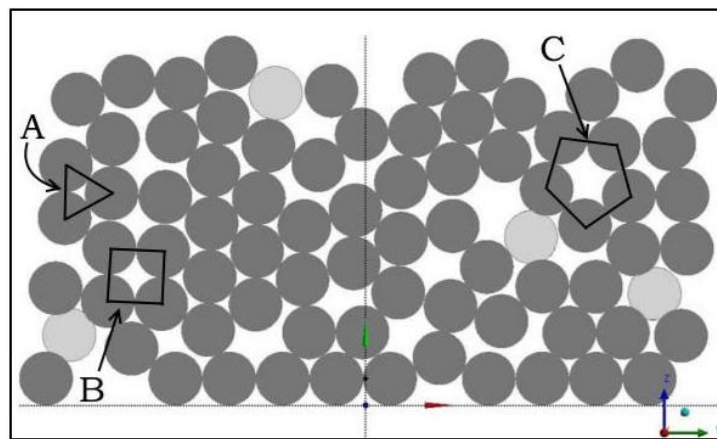


Figura 4: proyección de esferas con centros entre $(N-1)/2 \geq r_{ad} \geq N/2-1$ en el plano, de acuerdo al algoritmo propuesto descrito en [13] para $N = 5.04$. Los círculos oscuros representan pastillas que se encuentran tocando la pared (centro en $r_{ad} = (N-1)/2$ y los círculos claros corresponden a pastillas con centro cercano a $r_{ad} = N/2-1$.

Considerando lo discutido en el párrafo anterior, podemos razonar que los arreglos más compactos generarán una mayor resistencia al flujo que la reflejada por un valor promedio de porosidad local. Esto explica la fuerte disminución de la velocidad a una distancia cercana a medio diámetro de pastilla de la pared, observada tanto experimentalmente [7] como mediante la simulación por CFD [6,14,15]. A fin de tener en cuenta tal efecto sin recurrir a una formulación compleja, se propone modificar los términos en $F_P^*(r_{ad}, u)$, según:

$$f_1^* = \frac{25}{6} \frac{[a_v^*(r_{ad})]^2}{[\varepsilon^3(r_{ad}) - 0.008]} \quad (22)$$

$$f_2^* = \frac{1.75}{6} \frac{a_v^*(r_{ad})}{[\varepsilon^3(r_{ad}) - 0.008]} \quad (23)$$

La elección del coeficiente 0.008 responde a la necesidad de aumentar el peso relativo asociado a los términos inversamente proporcionales a $\varepsilon^3(r_{ad})$ en la cercanía al mínimo de porosidad. En este sentido, se puede reconocer que el coeficiente corresponde a 0.2^3 , lo que cualitativamente puede interpretarse como que cualquier arreglo con porosidad local en $r_{ad} \approx (N-1)/2$ menor o muy cercana a 0.2 presentaría una fuerte resistencia al flujo, comportándose como una zona prácticamente estanca.

3.4. Tercera corrección: viscosidad turbulenta

En la Sección 2 se mencionaron tres alternativas para la estimación de la viscosidad efectiva (Ecs. 5, 6 y 8) empleada por otros autores.

Las dos expresiones propuestas por Giese y col. [7], Ecs. (5) y (8), fueron ajustadas originalmente para $Re_p < 600$. Ambas poseen un comportamiento cualitativamente equivalente, el cual resulta inadecuado, dado que a bajos Reynolds predicen $\eta^* = 2$ en lugar de $\eta^* = 1$ (para que η^{ef} pueda ser interpretado como una viscosidad efectiva, debe retomarse el valor de la viscosidad molecular en ausencia de efectos de turbulencia). Por otro lado, si se extrapolan cualquiera de dichas expresiones a $Re_p > 600$, rápidamente se obtienen valores muy elevados de η^* , especialmente para $Re_p > 1000-2000$ (según la expresión). En este punto, cabe destacar que en la determinación de los parámetros del modelo propuesto por Winterberg y col. [3], los autores ajustan datos experimentales obtenidos para $Re_p > 1000$, llegando a $Re_p = 2740$, empleando las Ecs. (7) y (8).

En adición, la expresión propuesta en [8], Ec. (6), fue ajustada para aproximadamente $3.5 < N < 11$ y $72 < Re_p < 1300$. Si bien la misma conduce a un valor adecuado a bajos Reynolds, también fracasa a elevados valores del mismo (para $N = 11$ y $Re_p = 1300$, se obtiene $\eta^* = 165$). En adición, la Ec. (6) incorpora una dependencia directa de η^* con N , aumentando con el incremento de N , la cual no parece razonable.

La Figura 5 muestra el comportamiento de las tres expresiones mencionadas pudiendo observarse lo discutido en los párrafos anteriores; asimismo, se incluye la alternativa presentada en este trabajo, que se discute a continuación. Para formularla, en primer lugar, se exige que $\eta^* = 1$ para bajos valores de Re_p , así como en las cercanías a la pared, a fin de respetar desde un punto de vista cualitativo, la existencia de la subcapa laminar para una distancia suficientemente próxima a la pared. Para satisfacer $\eta^* = 1$ en ambas condiciones de una manera sencilla, se tomó una funcionalidad de η^* con $u Re_p$ en lugar de solo con Re_p ,

considerando que $u \rightarrow 0$ sobre la pared. Esto genera una dependencia de η^* con r_{ad} que debe ser tenida en cuenta en la formulación de Brinkman. Adicionalmente, a los fines de obtener un comportamiento razonable, se exigió que la influencia de la viscosidad turbulenta fuese aproximadamente un 10% para $Re_p < 200$ si $u=1$ y que a altos valores de Re_p la dependencia de η^* con Re_p se torne lineal. La expresión final propuesta es:

$$\eta^* = [1 + (u Re_p / 400)^2]^{1/2} \quad (24)$$

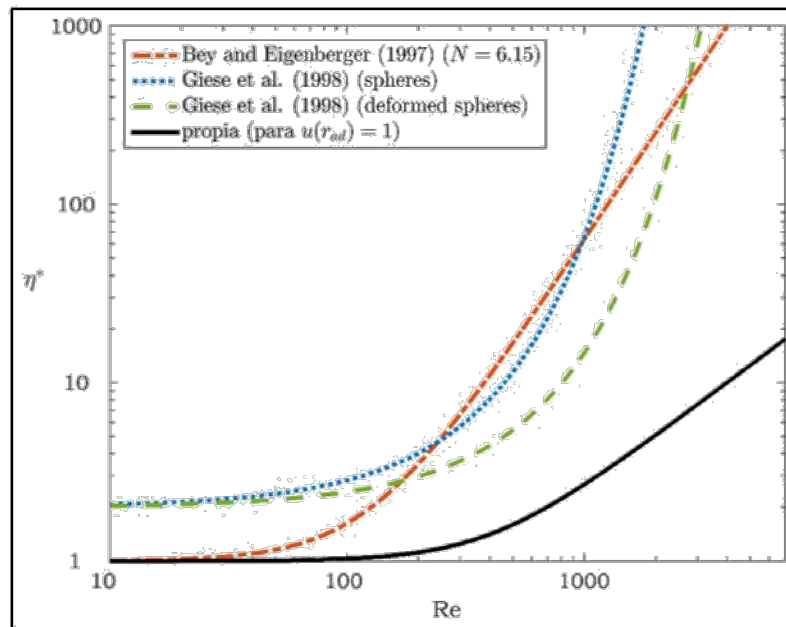


Figura 5: diferentes alternativas consideradas para η^* .

Naturalmente, la variación de η^* con r_{ad} seguirá la forma de los perfiles de velocidad, alcanzando un valor máximo cercano a 35 para $N = 6.15$ y $Re_p = 5000$, considerando los perfiles de velocidad obtenidos en el presente trabajo. En contraposición, para $Re_p = 5000$, empleando las Ecs. (5), (6) y (8) se obtiene $\eta^* = 7.97 \cdot 10^7$, $\eta^* = 1.58 \cdot 10^3$ y $\eta^* = 4.41 \cdot 10^4$, respectivamente.

3.5. Expresión final

Con las tres correcciones discutidas en los apartados 3.2 a 3.4, la ecuación final a resolver resulta:

$$\frac{1}{\varepsilon(r_{ad}) r_{ad}} \frac{d}{dr_{ad}} \left(\eta^* r_{ad} \frac{du}{dr_{ad}} \right) = u [f_1^*(r_{ad}) + Re_p f_2^*(r_{ad}) u] - \kappa (\bar{f}_1^* + Re_p \bar{f}_2^*) \quad (25)$$

$$f_1^* = \frac{25}{6} \frac{[a_v^*(r_{ad})]^2}{[\varepsilon^3(r_{ad}) - 0.008]} \quad (26)$$

$$f_1^* = \frac{25}{6} \frac{[a_v^*(r_{ad})]^2}{[\varepsilon^3(r_{ad}) - 0.008]} \quad (27)$$

$$f_2^* = \frac{1.75}{6} \frac{a_v^*(r_{ad})}{[\varepsilon^3(r_{ad}) - 0.008]} \quad (28)$$

$$\eta^* = [1 + (u \text{Re}_p / 400)^2]^{1/2} \quad (29)$$

donde κ debe evaluarse iterativamente hasta verificar que

$$\langle u \rangle = \frac{8}{N^2} \int_0^{N/2} u(r_{ad}, \kappa) r_{ad} dr_{ad} = 1 \quad (30)$$

En este punto es importante resaltar que, de disponer los perfiles radiales de porosidad y área de sólido por unidad de volumen, $\varepsilon(r_{ad})$ y $a_v^*(r_{ad})$, ya sea por vía experimental o numérica, los mismos podrían utilizarse para resolver las Ecs. (25) a (30). No obstante, la propuesta dada aquí empleando las funciones $\varepsilon(r_{ad})$ y $a_v^*(r_{ad})$ descritas por [10], como fuera discutido en la Sección 3.1, permite plantear el problema con la relación N y el número de Reynolds como únicos parámetros.

4. Comparación con las formas empleadas por otros autores

En esta Sección se comparan los resultados alcanzados con la propuesta realizada en el presente trabajo frente a dos de las alternativas descritas en la Sección 2 [3,7], para $N = 6.15$ y diferentes valores de Re_p .

Para la comparación con [7] se considera el perfil de porosidad obtenido a partir de la función de distribución de centros de pastillas (Sección 3.1). Para la evaluación de la alternativa propuesta en [3] se emplea la Ec. (7), estimando la porosidad en el centro del lecho, 0, a partir de la misma función de distribución de centros de pastillas. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 6.

En primer lugar, si nos limitamos a valores de Re_p menores que 500, podemos notar que tanto la propuesta de Winterberg y col. [3] como la de Giese y col. [7] predicen una velocidad máxima en la cercanía a la pared muy similar tanto en magnitud como en posición, mientras que con la presente propuesta se obtiene un máximo algo superior (aproximadamente 18% más alto que el obtenido por Giese y col. [7] y posicionado ligeramente más cerca de la pared. Cabe destacar que la propuesta presentada en este trabajo se comporta cualitativamente similar a la dada en [7]. Por el contrario, en virtud de la forma exponencial decreciente para estimar $\varepsilon(r_{ad})$, la alternativa dada en [3] solo captura el primer máximo relativo de velocidad, pero lógicamente no capta el primer mínimo desde la pared (situado muy aproximadamente a medio diámetro de pastilla), obteniendo un perfil de tipo alisado para $u(r_{ad})$ luego del máximo.

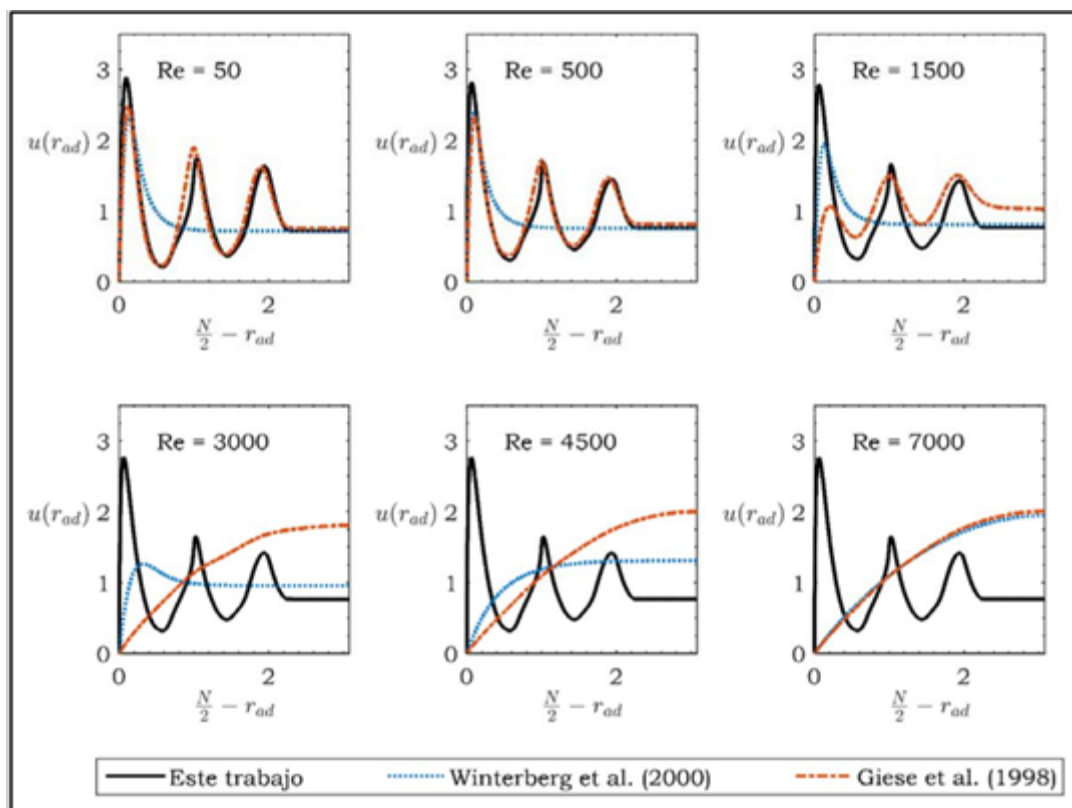


Figura 6: perfiles de velocidad obtenidos mediante la ecuación de Brinkman para $N = 6.15$ y diferentes valores del número de Reynolds. Curva negra llena: propuesta realizada en el presente trabajo; curva azul punteada: Winterberg y col.[3]; curva roja de trazos: Giese y col.[7].

Cuando se aumenta el Re_p , el aumento desmedido de η^* en el caso de la formulación de Giese y col. [7], comienza a generar distorsiones inadmisibles en el perfil de velocidad predicho (ver perfiles para Re_p 1500 en la Figura 6). No obstante, es menester recordar que en el trabajo original el ajuste se realizó para $Re_p < 600$, por lo que, en el rango de trabajo propuesto por los

autores, su alternativa resulta adecuada desde el punto de vista de la obtención de los perfiles de velocidad.

En forma similar, para $Re_p = 1500$, la propuesta de Winterberg y col. [3] ya presenta problemas (notar que $u_{max} \approx 2$, valor que resulta muy inferior a los observados experimentalmente o por CFD –ver Sección 5–), aun cuando el rango de trabajo corresponde a $Re_p \leq 2740$, de acuerdo a los datos empleados por los autores para realizar el ajuste de los parámetros del mismo.

A muy altos valores de Re_p , prevalece el efecto de η^* , comportándose en forma prácticamente equivalente a la dada por Giese y col. [7]. Por el contrario, la forma propuesta en este trabajo predice un perfil de velocidad con una mayor dependencia a bajos Reynolds, pudiendo apreciarse que el primer máximo de velocidad disminuye ligeramente con el incremento del Re_p . A altos valores del Re_p , los perfiles de velocidad resultan independientes del mismo. Esto se puede verificar fácilmente teniendo en cuenta que a altos valores de Re_p :

$$F_p^*(r_{ad}, u) = u[f_1^*(r_{ad}) + Re_p f_2^*(r_{ad})u] \rightarrow Re_p f_2^*(r_{ad})u^2,$$

$$\eta^* = [1 + (u Re_p / 400)^2]^{1/2} \rightarrow u Re_p / 400$$

con lo que la Ec. (25) a altos Re_p se reduce a:

$$\frac{1}{400 \varepsilon(r_{ad}) r_{ad}} \frac{\partial}{\partial r_{ad}} \left[u r_{ad} \frac{\partial u}{\partial r_{ad}} \right] = f_2^*(r_{ad})u^2 - \kappa \bar{f}_2^* \quad (31)$$

Veremos en la Sección 5 que los resultados de CFD disponibles actualmente predicen un comportamiento cualitativamente similar al variar el Re_p .

5. Comparación contra datos experimentales y de CFD

En esta Sección se comparan las predicciones de la formulación propuesta frente a datos experimentales y de CFD de perfiles radiales de velocidad axial obtenidos de la bibliografía.

5.1. Datos experimentales

En las Figuras 7, 8 y 9 se comparan los perfiles de velocidad obtenidos a partir de la Ec. (25) contra los datos experimentales de Bey y Eigenberger [8], Giese y col. [7] y Krischke [16], respectivamente.

Se puede apreciar en la Figura 7 que el perfil resultante de la Ec. (25) se aparta notablemente de los datos experimentales reportados en [8], obtenidos mediante la técnica de anemometría de hilo caliente (hot wire anemometry). No obstante, debe aclararse que debido a que la técnica utilizada no permite la medida directa dentro del lecho, los autores extrapolaron los datos obtenidos justo a la salida del lecho, siendo dicha extrapolación cuestionable en cuanto a su exactitud [15].

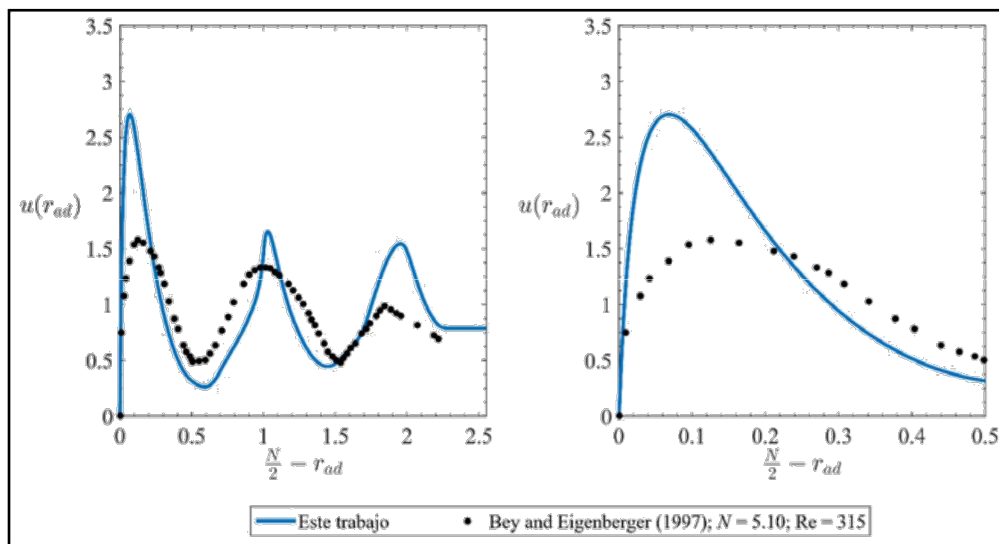


Figura 7: Comparación contra datos experimentales de Bey y Eigenberger [8], para $N = 5.1$ y $Re_p = 315$.

Por el contrario, la resolución de la Ec. (25) arroja resultados que predicen razonablemente bien tanto los datos reportados en [7] (Figura 8) como los informados en [16] (Figura 9). Cabe destacar que ambos juegos de datos fueron obtenidos mediante técnicas que permiten la medición en el interior del lecho. En el primer caso, empleando un método basado en la técnica de velocimetría láser Doppler y midiendo en dos posiciones axiales (promediado angularmente). En el segundo caso, utilizando anemometría láser Doppler, midiendo en dos posiciones angulares diferentes, pero cada una promediada en sentido axial, siendo este último procedimiento presumiblemente más confiable. Para ambos casos se predice adecuadamente la posición del primer máximo y mínimo de velocidad desde la pared, aunque se sobreestiman ligeramente los valores del primer máximo de velocidad, siendo menor la diferencia con los datos reportados en [16].

Adicionalmente, en ambos casos se puede apreciar la fuerte disminución de la velocidad en la región próxima a medio diámetro de pastilla medida desde la pared, tal como fuera discutido en la Sección 3.3 y que diera lugar a la incorporación del factor 0.008 en los términos de f_1^* y f_2^* (ver Ecs. 22 y 23).

Se puede concluir que, de acuerdo a los datos experimentales de Giese y col. [7] y Krischke [16], la formulación dada por la Ecs. (25) a (30) resulta satisfactoria como herramienta predictiva de los perfiles radiales de velocidad axial.

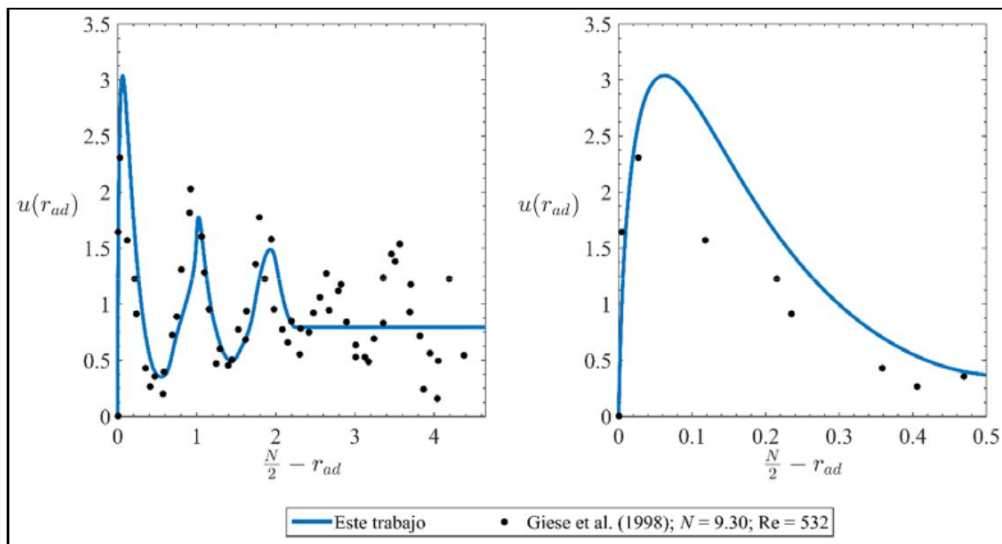


Figura 8: Comparación contra datos experimentales de Giese y col.[7], para $N = 9.3$ y $Re_p = 532$.

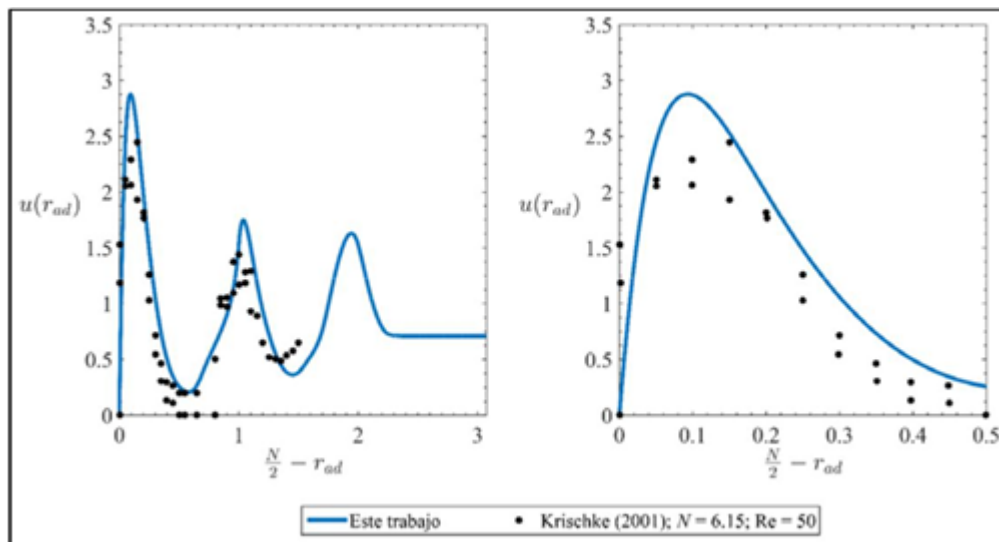


Figura 9: Comparación contra datos experimentales de Krischke [16], extractados de [15], para $N = 6.15$ y $Re_p = 50$.

5.2. Resultados de CFD

Si bien existe una gran cantidad de trabajos en los cuales se evalúan perfiles de velocidad en lechos fijos con pastillas esféricas mediante CFD, son pocos aquellos en los cuales se determina el perfil radial de velocidad axial. En este sentido, podemos mencionar los trabajos de Behnam y col. [14], Dixon [6], Eppinger y col.[12] y Freund y col. [15]. En adición, se dispone del perfil de velocidad para $Re_p = 1000$ y $N = 5$, obtenido en nuestro grupo de trabajo mediante CFD [17], empleando el software ANSYS Fluent.

En particular, en la Figura 10 se muestra el perfil de velocidad obtenido por Asensio [17] ($N = 5$, $Re_p = 1000$) y en la Figura 11 los perfiles de velocidad extractados de [12] ($N = 7$, $Re_p = 100$ y $Re_p = 1000$), graficando simultáneamente los perfiles estimados con las Ecs. (25) a (30). El resto de los perfiles fueron también analizados, pero no se muestran aquí a fin de limitar la extensión del presente trabajo. Los resultados obtenidos son similares en todos los casos, como se discutirá a continuación y el lector interesado puede solicitar los gráficos a los autores. Excepto para los datos obtenidos por Eppinger y col. [12], en todos los demás casos se sobreestima el valor del máximo de velocidad en las cercanías de la pared, aunque la máxima desviación no supera el 17%. Por el contrario, el valor predicho del máximo de velocidad por las Ecs.(25) a (30) resulta aproximadamente 10% inferior que el reportado en [12]. Por otro lado, el primer mínimo local desde la pared aún resulta superior al obtenido mediante CFD, a excepción de los datos de Freund y col. [15] donde resulta menor. No obstante, se puede concluir que la presente formulación predice razonablemente bien los perfiles obtenidos por CFD, especialmente en la región comprendida desde la pared hasta un diámetro de pastilla desde la misma.

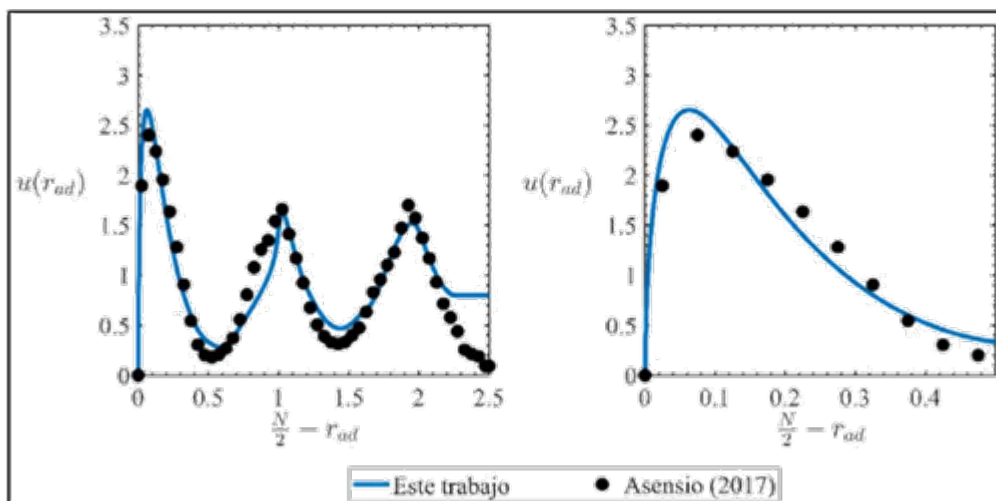


Figura 10: Comparación contra datos obtenidos mediante CFD [17], para $N = 5$ y $Re_p = 1000$.

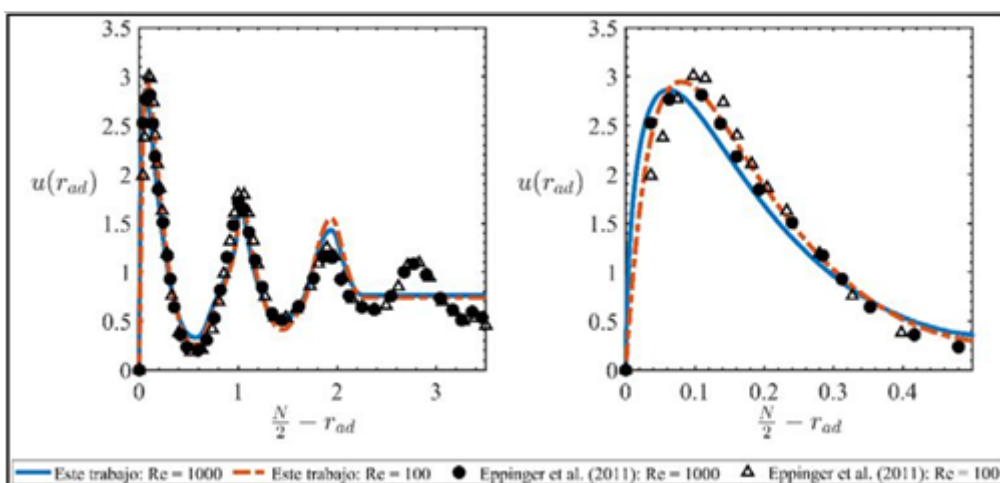


Figura 11: Comparación contra datos obtenidos por CFD [12], para $N = 7$ y $Re_p = 100$ y 1000 .

Por otro lado, un parámetro de interés es la relación entre la velocidad promedio en la zona cercana a la pared, u_W , definida entre $r_{ad} = (N-1)/2$ y $r_{ad} = N/2$, y la velocidad promedio en el resto del lecho, u_C (con r_{ad} entre 0 y $(N-1)/2$). Dicha relación permite obtener una medida del “bypass” que se genera sobre la zona de la pared del tubo y es empleada en algunos modelos bidimensionales (ver, por ejemplo, Asensio y col. [4]), que reconocen explícitamente un comportamiento distinto en la región de pared. Disponiendo del perfil radial de velocidad axial, esta relación puede calcularse según:

$$u_W = \frac{8}{2N-1} \int_{(N-1)/2}^{N/2} u(r_{ad}) r_{ad} dr_{ad} \quad (32)$$

$$u_C = \frac{8}{(N-1)^2} \int_0^{(N-1)/2} u(r_{ad}) r_{ad} dr_{ad} \quad (33)$$

Para los datos de CFD reportados en [15], que no cubren la totalidad del radio del tubo, la relación u_W/u_C puede estimarse teniendo en cuenta las relaciones entre las áreas de cada zona, según:

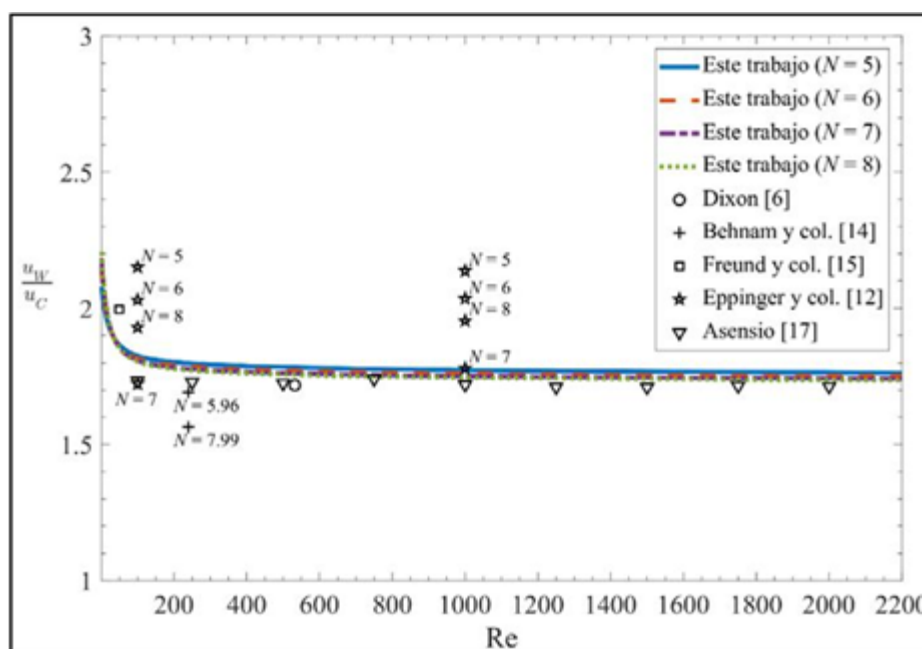
$$\frac{u_W}{u_C} = \frac{(N-1)^2 u_W}{N^2 - (2N-1)u_W} \quad (34)$$

En la Figura 12 se muestra la relación u_W/u_C en función del número de Re_p para diferentes valores de N , de acuerdo al perfil de velocidad estimado con las Ecs. (25) a (30). En adición, se muestran los valores calculados a partir de los perfiles de velocidad reportados en bibliografía mediante CFD, así como también de los calculados por esta misma vía en nuestro grupo de trabajo [17].

Se puede observar que, si exceptuamos los datos de Eppinger y col. [12], los valores obtenidos por CFD presentan una ligera dispersión, quedando acotados al rango 1.5-2 (considerando todos los datos, el rango se extiende solo hasta 2.15). Tal dispersión podría explicarse teniendo en cuenta los diferentes algoritmos empleados por los autores para la determinación de la estructura del relleno, que predicen lechos más o menos compactos según el caso.

En general, se puede concluir que la presente formulación captura razonablemente bien el comportamiento de la relación u_W/u_C . En particular, se observa una muy buena concordancia con los valores calculados por Asensio [17], con errores menores al 5.2% para $Re_p > 100$. En

adición, los datos disponibles de CFD para diferentes números de Reynolds e igual valor de N [12,17], muestran que la relación u_W/u_C resulta prácticamente independiente de Re_p . Esta tendencia se logra reproducir mediante los perfiles obtenidos con las Ecs. (25) a (30). Esta tendencia se logra reproducir mediante los perfiles obtenidos con las Ecs. (25) a (30). Por ejemplo, para $N = 5$, la formulación presentada en este trabajo predice que u_W/u_C varía solo entre 1.83 y 1.76 en el rango de Re_p entre 100 y 3000 (i.e., solo un 4%). En adición, se obtiene que, a los fines prácticos, u_W/u_C resulta independiente de N para $5 \leq N \leq 10$ y $Re_p > 50$, debido presumiblemente a la invariabilidad de la función de distribución de centros de pastilla empleada con la relación N .



Figura

12:

Relación u_W/u_C en función del Re_p , para diferentes valores de N .

6. Limitaciones

Para finalizar, es menester señalar algunas limitaciones que posee la presente propuesta, tal como ha sido descrita hasta aquí. Manteniendo el empleo de la función de distribución de centros de pastillas, $\sigma(r_C)$, dada en [10], la aplicabilidad de las Ecs. (25) a (30) queda limitada a $N \geq 5$. Si se quiere analizar algún sistema con un valor menor de N , se requerirá de una nueva función de distribución de centros de pastillas o de la evaluación numérica de la porosidad y del área específica a partir de la descripción geométrica del lecho.

Por otro lado, la propuesta actual no contempla la aplicación para geometrías de pastillas que no sean esféricas. Nuevamente, tal problema podría evitarse, pero requeriría de la evaluación numérica de la porosidad y del área específica, a partir de la descripción geométrica del

lecho. En estos casos, una formulación de dichas propiedades a partir de una función de distribución sería presumiblemente impráctica, dado que para geometrías diferentes se deberá considerar el aporte de todas las orientaciones de las pastillas.

Finalmente, para muy bajos números de Reynolds ($Re_p < 1$) se predicen valores de velocidad máxima relativamente elevados en comparación con los escasos datos disponibles de CFD para tal condición [e.g. ,12]. Este aspecto se vuelve más problemático al aumentar la relación N . En este sentido, se realizaron análisis para $N = 50$ y $Re_p < 1$, encontrando un valor máximo de u aproximadamente igual a 4. No obstante, estas situaciones son de muy poca importancia práctica. En primer lugar, por los muy bajos valores de Re_p . En segundo lugar, porque para valores de N superiores a 20, la influencia del perfil radial de velocidad axial será en general poco significativa.

7. Conclusiones

En este trabajo se analizó el empleo de la ecuación de Brinkman extendida para la estimación de los perfiles radiales de velocidad axial en lechos fijos rellenos de esferas. En primer lugar, se propuso el empleo de la función de distribución de centros de pastillas descrita en [10], que, entre otras propiedades, permite la obtención de la porosidad y del área específica locales. En este sentido, se discutió que al considerar el área específica local, $a_v(r)$, en lugar del término $6[1-\varepsilon(r)]/d_p$, se logra mantener acotada en valores razonables la velocidad máxima en las cercanías a la pared, obteniéndose valores de máximos de $u = v/\langle v \rangle$ cercanos a 3. La razón principal se debe a la diferencia de comportamiento entre $a_v(r)$ y $6[1-\varepsilon(r)]/d_p$, especialmente en la región delimitada hasta un diámetro de pastilla desde la pared del tubo, dado que el valor numérico de estos términos solo se asemeja hacia el centro del lecho (siendo igual a nivel promedio en todo el lecho).

Otro aspecto de significación en la presente formulación es la expresión empleada para la estimación de la viscosidad efectiva. En este sentido, las alternativas más difundidas predicen valores de η^* diferentes de 1 para $Re_p \rightarrow 0$ y/o valores muy elevados a altos números de Reynolds. La expresión finalmente utilizada se basó, por un lado, en respetar el límite a $Re_p \rightarrow 0$, y por el otro, en obtener una funcionalidad que presente un crecimiento moderado con el Re_p a altos valores del mismo. Cabe destacar que la forma final propuesta permite predecir que la forma de los perfiles radiales de velocidad es independiente del Re_p cuando $Re_p \gtrsim 250$. Como consecuencia, también lo es la relación u_W/u_C , aunque a los fines prácticos, esta última puede considerarse independiente para $Re_p > 50$.

Con estas modificaciones, es posible emplear la ecuación de Brinkman extendida para cualquier número de Reynolds, aunque se sugiere no emplearla por debajo de $Re_p = 10$. En contraposición, a elevados Re_p , las formulaciones disponibles en bibliografía predicen una muy escasa circulación del fluido en la zona cercana a la pared, con $u_w/u_c \rightarrow \sim 0.24$, mientras que con la formulación presentada en este trabajo se obtiene $u_w/u_c \rightarrow \sim 1.75$.

Finalmente, se compararon los perfiles obtenidos frente a datos experimentales y de CFD, pudiendo comprobarse que la presente formulación predice con razonable precisión los perfiles de velocidad, especialmente, en la región cercana a la pared del tubo, la cual resulta de especial interés en sistemas con valores de N bajos.

Cabe destacar que la formulación propuesta admite aún posibilidades de mejora. En primer lugar, se debe recordar que para la obtención de todos los perfiles mostrados en el presente trabajo se empleó la función de distribución propuesta por Mariani y col. para la estimación de $\varepsilon(r)$ y $a_v(r)$ [10]. Dicha función de distribución supone la existencia de cuatro zonas, siendo tres de ellas definidas por una función escalón. Existe la posibilidad de mejorar el ajuste de la función de distribución mediante funciones de forma general, que permitan obtener representaciones aún más precisas de $\varepsilon(r)$ y $a_v(r)$. En segundo lugar, se podría intentar ajustar los parámetros intervinientes en las Ecs. (25) a (30) a partir de los datos disponibles de CFD (o generando nuevos), pudiendo con ello mejorar la predicción de los perfiles de velocidad. De todas maneras, se debe resaltar que la presente propuesta permite una estimación cualitativa y cuantitativamente muy aceptable, siendo solo necesario conocer el número de Reynolds y el valor de N .

Agradecimientos

Los autores agradecen el aporte financiero de las siguientes instituciones ANPCyT- MINCyT (PICT'15 - 3546), CONICET (PIP 0018) y UNLP (PID I226). Néstor J. Mariani, Osvaldo M. Martínez y Guillermo. F. Barreto son investigadores del CONICET, Carlos. D. Luzi es becario del CONICET.

Nomenclatura

$a_v(r)$	Área de pastilla local por unidad de volumen total o área específica local.
a_v^*	Área específica local adimensional ($d_p a_v(r)$).
d_p	Diámetro de la pastilla.
d_T	Diámetro del tubo.
\bar{f}_1^*	Factor de Darcy asociado a la ecuación de Ergun.

\bar{f}_2^*	Factor de Forchheimer asociado a la ecuación de Ergun.
$f_1(r)$	Factor de Darcy asociado a $F_p(r, v)$.
$f_2(r)$	Factor de Forchheimer asociado a $F_p(r, v)$.
f_1^*	Factor de Darcy adimensional asociado al término local $F_p^*(r_{ad}, u)$
f_2^*	Factor de Forchheimer adimensional asociado al término local $F_p^*(r_{ad}, u)$.
$F_p(r, v)$	Factor que tiene en cuenta la resistencia al flujo ofrecida por las pastillas, incluyendo los efectos viscosos (Darcy) y los inerciales (Forchheimer).
F_p^*	Factor F_p adimensional
N	Relación entre el diámetro del tubo y el diámetro de pastilla.
p	Presión.
$(dp/dz)_E$	Caída de presión en sentido axial de acuerdo a la ecuación de Ergun.
r	Coordenada radial.
r_{ad}	Coordenada radial adimensional.
r_c	Distancia del centro de la pastilla desde el eje de un cilindro de radio r .
Re_p	Número de Reynolds ($\rho \langle v \rangle d_p / \eta$)
u	Velocidad superficial ($v / \langle v \rangle$)
$\langle u \rangle$	Velocidad superficial, promediada sobre toda la sección transversal
z	Coordenada axial.
Símbolos griegos	
$\varepsilon(r)$	Porosidad local.
$\bar{\varepsilon}$	Porosidad global del lecho.
$\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C$	Porosidad de los diferentes arreglos “ideales” identificados a medio diámetro de pastilla desde la pared y sin considerar los efectos de curvatura (Sección 3.3).
ε_0	Porosidad en el interior del lecho empleada en la Ec. (7).
η^{ef}	Viscosidad efectiva.
η_F	Viscosidad molecular.
η^*	Viscosidad efectiva adimensional (η^{ef} / η_F).
κ	Relación entre la caída de presión predicha por el modelo y la determinada de acuerdo a Ergun.
ρ	Densidad del fluido.
$\sigma(r_c)$	Función de densidad de centros de pastillas.

Referencias

- [1] H.A. Jakobsen, Packed Bed Reactors, in: Chem. React. Model., Springer, 2008: pp. 953–984.

- [2] A.G. Dixon, Fixed bed catalytic reactor modelling-the radial heat transfer problem, *Can. J. Chem. Eng.*, **2012**, 90, 507–527. doi:10.1002/cjce.21630.
- [3] M. Winterberg, E. Tsotsas, A. Krischke, D. Vortmeyer, A simple and coherent set of coefficients for modelling of heat and mass transport with and without chemical reaction in tubes filled with spheres, *Chem. Eng. Sci.*, **2000**, 55, 967–979. doi:10.1016/S0009-2509(99)00379-6.
- [4] D.A. Asensio, M.T. Zambon, G.D. Mazza, G.F. Barreto, Heterogeneous Two-Region Model for Low-Aspect-Ratio Fixed-Bed Catalytic Reactors. Analysis of Fluid-Convective Contributions, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **2014**, 53, 3587–3605. doi:10.1021/ie403219q.
- [5] B. Legawiec, D. Zió/klkowski, Mathematical simulation of heat transfer within tubular flow apparatus with packed bed by a model considering system inhomogeneity, *Chem. Eng. Sci.*, **1995**, 50, 673–683. doi:10.1016/0009-2509(94)00451-V.
- [6] A.G. Dixon, Local transport and reaction rates in a fixed bed reactor tube: Endothermic steam methane reforming, *Chem. Eng. Sci.*, **2017**, 168, 156–177. doi:10.1016/j.ces.2017.04.039.
- [7] M. Giese, K. Rottschäfer, D. Vortmeyer, Measured and modeled superficial flow profiles in packed beds with liquid flow, *AIChE J.* 44 (1998) 484–490. doi:10.1002/aic.690440225.
- [8] O. Bey, G. Eigenberger, Fluid flow through catalyst filled tubes, *Chem. Eng. Sci.*, **1997**, 52, 1365–1376. doi:10.1016/S0009-2509(96)00509-X.
- [9] J. Maußner, A. Pietschak, H. Freund, A new analytical approximation to the extended Brinkman equation, *Chem. Eng. Sci.*, **2017**, 171, 495–499. doi:10.1016/j.ces.2017.06.005.
- [10] N.J. Mariani, W.I. Salvat, O.M. Martínez, G.F. Barreto, Packed bed structure: Evaluation of radial particle distribution, *Can. J. Chem. Eng.*, **2002**, 80, 186–193. doi:10.1002/cjce.5450800202.
- [11] N.J. Mariani, O.M. Martínez, G.F. Barreto, Computing radial packing properties from the distribution of particle centers, *Chem. Eng. Sci.*, **2001**, 56, 5693–5707. doi:10.1016/S0009-2509(01)00295-0.
- [12] T. Eppinger, K. Seidler, M. Kraume, DEM-CFD simulations of fixed bed reactors with small tube to particle diameter ratios, *Chem. Eng. J.*, **2011**, 166, 324–331. doi:10.1016/j.cej.2010.10.053.
- [13] W.I. Salvat, N.J. Mariani, G.F. Barreto, O.M. Martínez, An algorithm to simulate packing structure in cylindrical containers, *Catal. Today.*, **2005**, 107–108, 513–519. doi:10.1016/j.cattod.2005.07.108.
- [14] M. Behnam, A.G. Dixon, M. Nijemeisland, E.H. Stitt, A new approach to fixed bed radial heat transfer modeling using velocity fields from computational fluid dynamics simulations, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **2013**, 52, doi:10.1021/ie4000568.
- [15] H. Freund, T. Zeiser, F. Huber, E. Klemm, G. Brenner, F. Durst, G. Emig, Numerical simulations of single-phase reacting flows in randomly packed fixed-bed reactors and experimental validation, *Chem. Eng. Sci.* **2003**, 58, 903–910. doi:10.1016/S0009-2509(02)00622-X.

- [16] A. Krischke, Modelling and experimental investigation of transport processes in a through flow packed bed (Modellierung und experimentelle Untersuchung von Transportprozessen in durchströmten Schüttungen), Ludwig-Maximilian University of Munich, **2001**.
- [17] D.A. Asensio, Modelado de reactores de lecho fijo de baja relación de aspecto asistido por Fluidodinámica Computacional (CFD), Universidad Nacional de La Plata, **2017**.