ALGORITMO ITERATIVO PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE UNA SEÑAL A PARTIR DE UN MUESTREO ALEATORIO

Erika Porten†, Juan Miguel Medina‡ y Marcela Morvidone†

†*Centro de Matemática Aplicada, Universidad Nacional de San Martín, 25 de Mayo y Francia, San Martín, Buenos Aires, Argentina, erikaporten@gmail.com, mmorvidone@unsam.edu.ar*
‡*Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Buenos Aires e Instituto Argentino de Matemática "A.P. Calderón" -CONICET, Paseo Colón 850, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina, jmedina@fi.uba.ar*

Resumen: En este artículo presentaremos un método iterativo para la reconstrucción de señales, no necesariamente de banda limitada, a partir de un muestreo irregular tomado de manera aleatoria por un proceso de Poisson.

Palabras clave: *muestreo aleatorio, integral estocástica, proceso de Poisson*
2000 AMS Subject Classification: 94A20 - 60H05

1. INTRODUCCIÓN

El teorema clásico de Shannon-Whittaker permite reconstruir una señal de banda limitada a partir de un muestreo regular. Sin embargo, en la práctica es de difícil aplicación ya que no siempre se cuenta con muestras equiespaciadas, así aparecen distintas alternativas como las que involucran un muestreo aleatorio [3], [4], [5], [6]. Siguiendo esa línea, en un trabajo anterior [1] presentamos un método, denominado *directo*, que permite aproximar una señal, no necesariamente de banda limitada, a partir de un muestreo irregular $f(t_k)$ con instantes $\{t_k\}$ elegidos mediante un proceso de Poisson de parámetro λ. En esta oportunidad propondremos un método iterativo que nos permite mejorar dicha aproximación en cada iteración. Luego compararemos los resultados de ambos métodos.

2. INTEGRAL ESTOCÁSTICA

Antes de introducir el método iterativo recordemos algunas definiciones y propiedades que vamos a necesitar más adelante [2].

Definición 1 *Medida estocástica*
Sea A un boreliano de $\mathbb{R}$ y $\mathcal{X} = \{t_k\}$ la sucesión de instantes de muestreo elegidos mediante un proceso de Poisson de parámetro λ. Definimos la medida estocástica

$$M(A) = \#\{t_k \in A\} = \sum_{t_k \in \mathcal{X}} \delta_{t_k}(A) \quad \textit{donde} \quad \delta_{t_k}(A) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad t_k \in A \\ 0 & \textit{si} \quad t_k \notin A \end{cases}$$

Definición 2 *Integral estocástica*
Sea $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ podemos definir la integral estocástica de la siguiente manera:

$$\int_{\mathbb{R}} f \, dM = \sum_{t_k \in \mathcal{X}} f(t_k).$$

Estas integrales son variables aleatorias con la siguiente propiedad:

Propiedad 1 (i) $\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} f \, dM\right) = \lambda \int_{\mathbb{R}} f \, dt$. $\qquad (ii)$ $Var\left(\int_{\mathbb{R}} f \, dM\right) = \lambda \int_{\mathbb{R}} f^2 \, dt.$

3. MUESTREO ALEATORIO

3.1. MÉTODO DIRECTO

En el siguiente teorema introducimos el operador de muestreo aleatorio S_λ y probamos una cota en probabilidad para el error de reconstrucción en términos de la norma L^∞.

Teorema 1 *(ver [1]) Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ y $\mathcal{X} = \{t_k\}$ un muestreo aleatorio realizado mediante un proceso de Poisson de parámetro λ, definimos:*

$$S_\lambda(f/\mathcal{X})(x) = \frac{1}{\lambda}\sum_{t_k\in\mathcal{X}} f(t_k)k(x-t_k) = \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} f(t)k(x-t)\,dM(t),$$

con $k = \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_A)$, donde $|A| < \infty$. Entonces

$$P\left(||S_\lambda(f/\mathcal{X}) - f||_{L^\infty} > \epsilon\right) \le \frac{|A|||f||_{L^2}}{\sqrt{\lambda}\epsilon} + \frac{1}{\epsilon}\int_{A^c} |\widehat{f}|\,d\xi.$$

Análogamente al espacio de funciones de banda limitada, se puede definir:

Definición 3 *Si $|A| < \infty$, definimos $S_A = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}) : \widehat{f} = 0 \text{ en } A^c\right\}$.*

Si consideramos señales en S_A podemos mejorar la cota para el error de aproximación obtenida en el Teorema 1, como mostramos a continuación:

Teorema 2 *Si $f \in S_A$, entonces $P(||S_\lambda(f|\mathcal{X}) - f||_{L^\infty} > \epsilon) \le \dfrac{|A|^2||f||^2_{L^2}}{\epsilon^2\lambda}$.*

Para demostrar el Teorema 2 necesitamos los siguientes lemas, que son consecuencia de la Propiedad 1.

Lema 1 *Si $f \in S_A$ entonces $E\left(||S_\lambda(f|\mathcal{X}) - f||^2_{L^2}\right) = \dfrac{||k||^2_{L^2}||f||^2_{L^2}}{\lambda}$.*

Lema 2 *Si $f \in S_A$ entonces $S_\lambda(f|\mathcal{X}) \in S_A$ con probabilidad 1.*

Prueba. (del Teorema 2)

$$E\left(||S_\lambda(f/\mathcal{X}) - f||^2_\infty\right) \le |A|E\left(||S_\lambda(f/\mathcal{X}) - f||^2_{L^2}\right) = \frac{|A|^2||f||^2_{L^2}}{\lambda},$$

luego

$$P(||S_\lambda(f|\mathcal{X}) - f||_{L^\infty} > \epsilon) \le \frac{|A|^2||f||^2_{L^2}}{\epsilon^2\lambda}.$$

□

3.2. Algoritmo iterativo

Ahora estamos en condiciones de introducir el algoritmo iterativo.

Definición 4 *Dada una sucesión $\{\mathcal{X}_n\}_n$ de procesos de Poisson independientes de parámetro λ, definimos $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ por:*

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_n = f_{n-1} + \gamma S_\lambda(f - f_{n-1}|\mathcal{X}_n). \end{cases} \tag{1}$$

Lema 3 *Dada $f \in S_A$, se cumple que*

$$E\left(||f - \gamma S_\lambda(f|\mathcal{X})||^2_{L^2}\right) = \left[(1-\gamma)^2 + \frac{\gamma^2||k||^2_{L^2}}{\lambda}\right]||f||^2_{L^2}.$$

Finalmente, estudiamos el error de reconstrucción y la convergencia del algoritmo.

Teorema 3 *Sea $f \in S_A$, $\{\mathcal{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de procesos de Poisson independientes de parámetro $\lambda > 0$ y sea f_n definida como antes, entonces*

$$E\left(||f_n - f||_{L^2}^2\right) \leq \delta_\lambda(\gamma)^n ||f||_{L^2}^2,$$

donde $\delta_\lambda(\gamma) = (1-\gamma)^2 + \gamma^2 \dfrac{||k||_{L^2}^2}{\lambda}$.

Prueba. Lo demostraremos por inducción. Para $n = 0$ es trivial. Supongamos que vale para $n-1$ y veamos que vale para n. Observemos primero que

$$f - f_n = f - f_{n-1} - \gamma\, S_\lambda(f - f_{n-1}|\mathcal{X}_n).$$

Llamando $f - f_{n-1} = g_{n-1}$, se tiene

$$\begin{aligned} E\left(||f - f_n||_{L^2}^2\right) &= E\left(E\left(||f - f_n||_{L^2}^2 | \mathcal{X}_1 \cdots \mathcal{X}_{n-1}\right)\right) = E\left(E\left(||g_{n-1} - \gamma S_\lambda(g_{n-1}|\mathcal{X}_n)||_{L^2}^2 | \mathcal{X}_1 \cdots \mathcal{X}_{n-1}\right)\right) \\ &= E\left(E_{\mathcal{X}_n}\left(||g_{n-1} - \gamma\, S_\lambda(g_{n-1}|\mathcal{X}_n)||_{L^2}^2\right)\right) = \delta_\lambda(\gamma)\, E\left(||g_{n-1}||_{L^2}^2\right), \end{aligned}$$

luego, por hipótesis inductiva: $E\left(||g_{n-1}||_{L^2}^2\right) = E\left(||f - f_{n-1}||_{L^2}^2\right) \leq \delta_\lambda(\gamma)^{n-1} ||f||_{L^2}^2$, con lo cual

$$E\left(||f - f_n||_{L^2}^2\right) \leq \delta_\lambda(\gamma)\, \delta_\lambda(\gamma)^{n-1} ||f||_{L^2}^2 \leq \delta_\lambda(\gamma)^n ||f||_{L^2}^2.$$

□

Corolario 1 *Si $f \in S_A$ entonces existe γ_0 tal que* $E\left(||f_n - f||_{L^2}^2\right) \leq \delta_\lambda(\gamma_0)^n ||f||_{L^2}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Prueba. Notar que δ_λ alcanza su valor mínimo en γ_0 y $\delta_\lambda(\gamma_0) = \frac{||k||_{L^2}^2}{\lambda + ||k||_{L^2}^2} < 1$.

□

Teorema 4 *Si $f \in S_A$ entonces* $P\left(||f_n - f||_{L^\infty} > \epsilon\right) \leq \frac{|A| ||f||_{L^2}^2}{\epsilon^2} \left(\frac{||k||_{L^2}^2}{\lambda + ||k||_{L^2}^2}\right)^n.$

Prueba.

$$\begin{aligned} P\left(||f_n - f||_{L^\infty} > \epsilon\right) &\leq \frac{E\left(||f_n - f||_{L^\infty}^2\right)}{\epsilon^2} \leq \frac{E\left(|A| ||\hat{f}_n - \hat{f}||_{L^2}^2\right)}{\epsilon^2} \\ &\leq \frac{|A| \delta_\lambda(\gamma)^n ||f||_{L^2}^2}{\epsilon^2} = \frac{|A| ||f||_{L^2}^2}{\epsilon^2} \left(\frac{||k||_{L^2}^2}{\lambda + ||k||_{L^2}^2}\right)^n \end{aligned}$$

□

3.3. Comparación entre los métodos directo e iterativo

Hasta aquí probamos que tomando un λ suficientemente grande podemos hacer una buena reconstrucción, tanto con el método directo como con el método iterativo. Veamos qué valor debe tomar λ en cada caso si queremos que el error sea menor a 10^{-2}. Para eso tomaremos $||f|| = ||k||_2^2 = |A| = 1$ y $\epsilon = 10^{-3}$ y comparemos los dos métodos propuestos.

3.3.1. Método directo

Para que se cumpla $P(||f - S_\lambda(f|\mathcal{X})||_{L^\infty} > \epsilon) \leq \frac{|A|^2 ||f||^2}{\epsilon^2 \lambda} \leq \frac{10^6}{\lambda} < 10^{-2}$ debemos tomar $\lambda > 10^8$, es decir, más de 10^8 muestras.

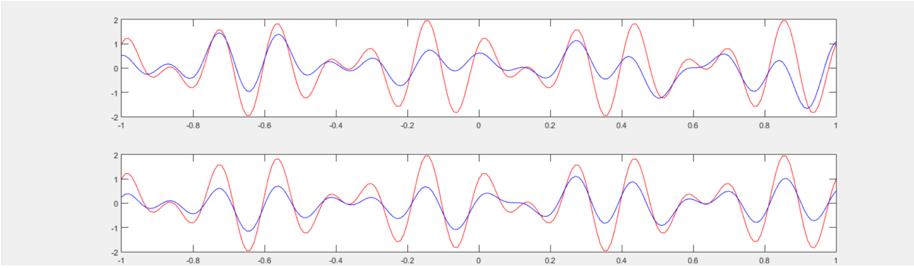

Figura 1: Señal original f en rojo, señal recuperada $S_\lambda(f)$ en azul, para $\lambda = 20, 100$

3.3.2. Método iterativo

Para que se cumpla $P\left(||f_n - f||_{L^\infty} > \epsilon\right) \leq 10^6 \left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^n < 10^{-2}$ basta tomar $\lambda > 10^2$ y $n = 4$, con lo cual se necesitarían aproximadamente $n\lambda \approx 10^2 \times 4 = 400$ muestras.

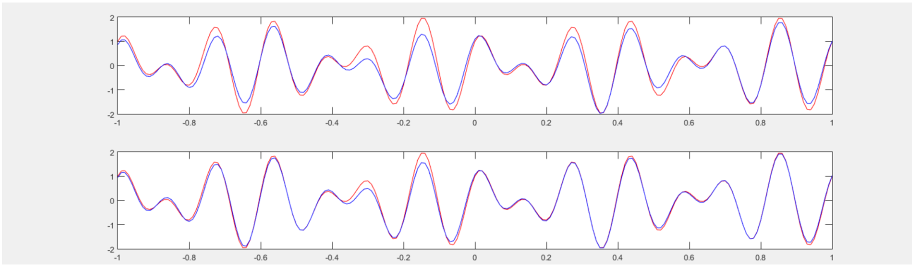

Figura 2: Señal original f en rojo, señales recuperadas f_3 y f_6 en azul, para $\lambda = 20$

4. Conclusiones y trabajo futuro

Hemos presentado un algoritmo iterativo para reconstruir una señal a partir de un muestreo aleatorio realizado según un proceso de Poisson. Concluímos que este método necesita una cantidad de muestras considerablemente menor a la que precisa el método directo para reconstruir una señal con un determinado error. En el futuro planeamos evaluar el funcionamiento de este algoritmo en un problema de técnicas de interrogación no destructivas para materiales compuestos altamente heterogéneos.

Agradecimientos

E. Porten y M. Morvidone fueron parcialmente subsidiadas por SOARD-AFOSR bajo Grant FA9550-14-1-0276 y Grant FA9550-18-1-0523. Juan M. Medina fue parcialmente subsidiado por CONICET y Universidad de Buenos Aires, proyecto UBACyT 20020170100266BA.

Referencias

[1] E. Porten, J. M. Medina, M. Morvidone, *Reconstruccin de la transformada de Radon a partir de una muestra aleatoria*, MACI VI (2017)

[2] I.I, Gikhman, and A.V. Skorokhod, *Introduction to the Theory of Random Processes*, Dover Books on Mathematics, 1996.

[3] A. Papoulis, *Probability, Radom Variables and Stochastic Processes,* McGraw-Hill, First Edition, 1977.

[4] F.J. Beutler and O.A.Z. Leneman, *Random Sampling of Random Processes: stationary Point Processes*, Information and Control, Vol. 9, (1966), pp. 325-346.

[5] E. Masry, *Poisson Sampling and Spectral Estimation of Continuous-Time Processes*, IEEE Trans. on Information Theory, Vol. It-24, 2 (1978), pp. 173-183.

[6] F. Marvasti, M. Analoui and M. Gamshadzahi, *Recovery of Signals from Nonuniform Samples Using Iterative Methods*, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 39, 4 (1991), pp. 872-878.