

## APLICACIÓN DE SEÑALES ANALÍTICAS PARA EL ANÁLISIS MODAL DE SISTEMAS ELÁSTICOS CONTINUOS CON DISIPACIÓN LINEAL HISTERÉTICA

### APPLICATION OF ANALYTIC SIGNALS FOR THE MODAL ANALYSIS OF CONTINUOUS ELASTIC SYSTEMS WITH HYSTERETIC LINEAR DISSIPATION

Adriano Trono<sup>a,b</sup>, José A. Inaudi<sup>b</sup> y Federico Pinto<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) – CONICET, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sársfield 1611, 5016 Córdoba, Argentina. [idit@fcfyn.edu.ar](mailto:idit@fcfyn.edu.ar), <http://www.inv.idit.uncor.edu/>*

<sup>b</sup>*FCEFN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sársfield 1611, 5016 Córdoba, Argentina. [depestructuras@fcefn.unc.edu.ar](mailto:depestructuras@fcefn.unc.edu.ar), <http://www.efn.unc.edu.ar>*

**Palabras clave:** Disipación Lineal Histerética, Señales Analíticas, Sistemas Continuos.

**Resumen.** La modelación de la disipación de energía juega un papel importante en la estimación de la respuesta dinámica de suelos y estructuras. En este trabajo se analiza un modelo fenomenológico similar al de Kelvin-Voigt en el que el disipador viscoso es reemplazado por un disipador lineal histerético que permite que la energía disipada por ciclo en el elemento no dependa de la magnitud de la frecuencia de su deformación, lo que es representativo del comportamiento observado en geomateriales. Se presenta el análisis en el dominio del tiempo de una columna de suelo con amortiguamiento lineal histerético conectada a un disipador viscoso en la base que representa la impedancia de la roca base. Se resuelve la ecuación integro diferencial del sistema continuo en términos de señales analíticas de desplazamiento y de carga; la técnica, que convierte el problema en una ecuación diferencial de coeficientes complejos, permite obtener los modos analíticos y polos complejos en espacio de estado, y diagonalizar el sistema en ecuaciones diferenciales de primer orden. Dado que estos modelos presentan polos con parte real positiva, para la integración de estas coordenadas modales se utiliza la técnica de reversión del tiempo propuesta por Inaudi et al., *Earthq Eng Struct D.*, 25, 529-545 (1996).

**Keywords:** Hysteretic Linear Dissipation, Analytic Signals, Continuous Systems.

**Abstract.** Energy dissipation plays an important role in estimating the dynamic response of soils and structures. A phenomenological model similar to Kelvin-Voigt model is proposed in which the viscous damper is replaced by a hysteretic linear damper that models energy dissipation per cycle independent of element deformation frequency. This is representative of the behavior observed in geomaterials. The analysis in the time domain of a soil column with hysteretic linear damping connected to a viscous damper at the base that represents the base-rock impedance is presented. The integral differential equation of the continuous system is solved using complex-valued differential equations in terms of analytic signals of displacement and load. Analytical expressions of modes and poles are obtained and the diagonalization of the system in first-order differential equations is illustrated. A reversal time technique for positive real part poles of the model is applied for numerical integration of modal coordinates (Inaudi et al., *Earthq Eng Struct D.*, 25, 529-545 (1996)).

## 1. INTRODUCCIÓN

Si bien la disipación de energía por fricción material es un fenómeno no lineal, es usual que se utilicen modelos lineales en etapas de diseño para predecir el comportamiento dinámico de suelos y estructuras. Lo habitual es considerar el amortiguamiento histerético en el dominio de la frecuencia mediante un disipador lineal viscoso cuyo coeficiente se define inversamente proporcional a la frecuencia de excitación para eliminar la dependencia de la frecuencia de la energía disipada por ciclo, lo que deriva en la utilización de un módulo de rigidez complejo. Inaudi y Makris (1996) presentan una alternativa de solución analítica en el dominio del tiempo; el disipador lineal histerético puntual en el que la fuerza disipativa es proporcional a la transformada de Hilbert del desplazamiento. Trono y Pinto (2018) proponen una solución aproximada para sistemas continuos en el dominio del tiempo basada en una formulación débil con pseudo-modos obtenidos mediante un rastreo de polos temporales en el plano complejo para cumplir las condiciones de borde con el disipador que se utiliza en el dominio de las frecuencias; la constante viscosa es variable e inversamente proporcional al módulo del polo. El rastreo de polos es costoso y los pseudo – modos no verifican ortogonalidad estricta para diagonalizar el sistema. Para superar esta propuesta, se plantea reemplazar el disipador viscoso del modelo fenomenológico de Kelvin – Voigt por el disipador lineal histerético modelado en el dominio del tiempo de Inaudi y Makris (1996), lo que permite considerar el amortiguamiento material en la formulación fuerte del sistema continuo y obtener expresiones analíticas de los polos y modos. A través de la transformada de Hilbert esta ecuación integro – diferencial se convierte en una ecuación diferencial ordinaria en términos de señales analíticas de desplazamiento y de carga.

Se aborda un caso con amortiguamiento no-clásico de utilidad en la ingeniería sísmica: una columna de suelo homogéneo conectada a un disipador viscoso en la base con desplazamiento impuesto en el extremo del disipador (ver Figura 1). Mediante el planteo de condiciones de borde se obtienen los modos de vibración natural y los polos y a través de dos descomposiciones modales sucesivas y de la formulación en espacio de estado se obtienen las ecuaciones desacopladas de primer orden que permiten arribar a la solución analítica del sistema en el dominio del tiempo. Dado que estos modelos presentan polos con parte real positiva, para la integración numérica de sus correspondientes coordenadas modales se utiliza la transformación de reversión del tiempo propuesta por Inaudi y Makris (1996).

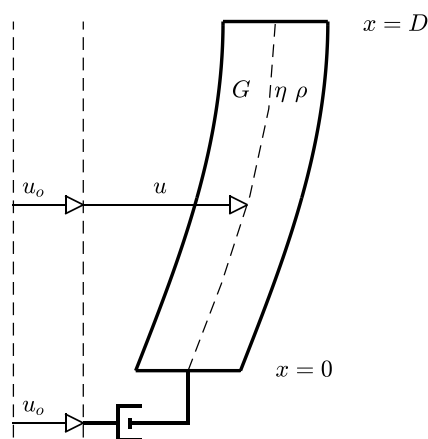


Figura 1: Columna de suelo conectada a disipador viscoso lineal de base.

## 2. TRANSFORMADA DE HILBERT Y SEÑALES ANALÍTICAS

La función  $\hat{u}(t) = H[u(t)]$  es llamada transformada de Hilbert de  $u(t)$  si para todo tiempo  $t$ :

$$\hat{u}(t) = H[u(t)] = \lim_{a \rightarrow \infty} P \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{-u(\tau)}{t-\tau} d\tau = u(t) * \left( \frac{-1}{t\pi} \right) \quad (1)$$

donde el operador  $*$  es utilizado para denotar convolución entre funciones y

$$P \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{-u(\tau)}{t-\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-a}^{t-\varepsilon} \frac{-u(\tau)}{t-\tau} d\tau + \int_{t+\varepsilon}^a \frac{-u(\tau)}{t-\tau} d\tau \right) \quad (2)$$

es llamado valor principal de Cauchy alrededor de  $\tau = t$  en la integral.

Una señal compleja cuya transformada de Fourier es nula en frecuencias negativas es denominada señal analítica. Para crear una señal analítica a partir de una señal real se le resta la transformada de Hilbert de la misma multiplicada por  $i = \sqrt{-1}$ :

$$u_a = u - i H[u] = u + i \left( u * \left( \frac{1}{\pi t} \right) \right) \quad (3)$$

Esta definición será de utilidad para transformar ecuaciones integro-diferenciales en señales reales de desplazamientos a ecuaciones diferenciales ordinarias en señales analíticas de desplazamientos.

## 3. MODELO MECÁNICO EQUIVALENTE

En la Figura 1 se presenta el modelo mecánico equivalente a una columna de suelo sobre roca base sometida a vibraciones de corte por movimiento sísmico impuesto. La rigidez dinámica de la roca base equivale a la de un disipador viscoso lineal conectado en la base y de constante  $c_u = \rho_b V_b$ , donde  $\rho_b$  es la densidad de la roca y  $V_b$  es la velocidad de propagación de ondas de corte de la roca. Con el objeto de incorporar efectos de sitio, las aceleraciones sísmicas medidas sobre afloramiento rocoso se imponen en el extremo exterior del disipador viscoso (Schnabel et al., 1972). En la práctica habitual el amortiguamiento material en suelos es considerado en el dominio de las frecuencias mediante un disipador lineal viscoso cuyo coeficiente se impone inversamente proporcional a la frecuencia de excitación para eliminar la dependencia de la energía disipada por ciclo con la frecuencia. Para poder obtener la respuesta del sistema continuo con amortiguamiento material en el dominio del tiempo mediante análisis modal se propone utilizar el modelo fenomenológico de Kelvin Voigt reemplazando el disipador viscoso por un disipador lineal histerético (Inaudi y Makris, 1996). La tensión de corte horizontal del suelo  $\tau$  es:

$$\tau = G \frac{\partial u}{\partial x} + S_h H \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right] = G \frac{\partial u}{\partial x} + S_h \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \quad (4)$$

Donde  $G$  es el módulo de corte del suelo,  $S_h$  es el coeficiente de fricción histerética y  $u$  es el desplazamiento relativo al extremo del disipador de base (Figura 1). Se presenta la formulación fuerte del sistema sometido a aceleraciones impuestas en el extremo del disipador viscoso de base en términos de desplazamientos relativos:

$$G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S_h \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - \rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \rho \frac{d^2 u_o}{dt^2} \quad (5)$$

donde  $u_o$  es el desplazamiento impuesto en el extremo del disipador de base. Multiplicando la transformada de Hilbert de la expresión (5) por  $-i$  y sumando este resultado a (5) se obtiene la ecuación diferencial en coeficientes complejos en términos de señales analíticas:

$$(G + i S_h) \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2} = \rho \frac{d^2 u_{o_a}}{dt^2} \quad (6)$$

Donde  $u_a = u - i\hat{u}$  es la señal analítica del desplazamiento y  $u_{o_a} = u_o - i\hat{u}_o$  es la señal analítica del movimiento impuesto en el extremo del disipador de base.  $G^* = G + i S_h$  es conocido como módulo de corte complejo.

#### 4. SOLUCIÓN HOMOGÉNEA

Mediante el método de separación de variables se propone la solución homogénea de la Ec. (5) como  $u_h = e^{s_n t} e^{\lambda_n x}$  donde  $s_n$  y  $\lambda_n$  son los números complejos polo y número de onda respectivamente. La solución homogénea implica resolver los modos naturales de vibrar del sistema esquematizado en la Figura 1 con desplazamiento restringido en el extremo exterior del disipador viscoso. Se transforma la solución homogénea propuesta en señal analítica (solución homogénea de la Ec. (6)):

$$u_{h_a} = e^{\lambda_n x} (e^{s_n t} - i H(e^{s_n t})) \quad (7)$$

A partir de la propiedad  $\frac{d}{dt}(H(u)) = H\left(\frac{du}{dt}\right)$  se tiene  $\frac{\partial^2 u_{h_a}}{\partial t^2} = s_n^2 u_{h_a}$ . Reemplazando (7) en la ecuación homogénea de (6) se obtiene la ecuación característica y la relación entre el polo y el número de onda:

$$(G + i S_h) \lambda_n^2 - \rho s_n^2 = 0 \rightarrow \lambda_n = \pm s_n \sqrt{\frac{\rho}{G + i S_h}} = \pm \frac{s_n}{V_S^*} \quad (8)$$

Para un polo  $s_n$  dado existen dos posibles números de onda  $\pm \lambda_n$ .  $V_S^* = \sqrt{\frac{G + i S_h}{\rho}}$  se conoce como velocidad de propagación de ondas de corte compleja.

##### 4.1 Condiciones de borde

Se presentan las condiciones de corte nulo en superficie libre y de equilibrio entre la tensión del disipador y el esfuerzo de corte en la base:

$$G \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_D + S_h \left( \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right|_D \right) = 0 \quad (9)$$

$$\left( G \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0 + S_h \left( \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right|_0 \right) \right) - c_u \dot{u}_{(0)} = 0 \quad (10)$$

Donde  $D$  es el espesor del estrato de suelo. Calculando las señales analíticas de ambos miembros de Ec. (9) y Ec. (10) de obtienen las condiciones de borde en términos de señales analíticas de desplazamiento:

$$G \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_D + S_h \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Big|_D \right) - i \left( G \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Big|_D - S_h \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_D \right) \right) = 0 \rightarrow (G + i S_h) \frac{\partial u_{ha}}{\partial x} \Big|_D = 0 \quad (11)$$

$$(G + i S_h) \frac{\partial u_{ha}}{\partial x} \Big|_0 - c_u \frac{\partial u_{ha}}{\partial t} \Big|_0 = 0 \quad (12)$$

En base a la función espacial  $\phi_n = (C_1 e^{\lambda_n x} + C_2 e^{-\lambda_n x})$ , a la Ec. (11) dividida por  $(G + i S_h) \lambda_n$  y a la condición de la Ec. (12) se construye el sistema de ecuaciones de condiciones de borde:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_n D} & -e^{-\lambda_n D} \\ (G + i S_h) \lambda_n - c_u s_n & -(G + i S_h) \lambda_n - c_u s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

## 4.2 Polos y números de onda

Para que exista solución no trivial, el determinante de la matriz del sistema (Ec. (13)) debe ser nulo:

$$e^{\lambda_n D} (-(G + i S_h) \lambda_n - c_u s_n) + e^{-\lambda_n D} ((G + i S_h) \lambda_n - c_u s_n) = 0 \quad (14)$$

A partir de Ec. (8) se deduce que  $(G + i S_h) \lambda_n = s_n \rho V_S^*$ . Dividiendo Ec. (14) por  $s_n \lambda_n$ :

$$e^{\lambda_n D} (-\rho V_S^* - c_u) + e^{-\lambda_n D} (\rho V_S^* - c_u) = 0 \quad (15)$$

Recordando que  $c_u = \rho_b V_b$  y reordenando Ec. (15) se tiene:

$$e^{2\lambda_n D} = \frac{\alpha_z - 1}{\alpha_z + 1} = M \quad (16)$$

Donde  $\alpha_z = \frac{\rho V_S^*}{\rho_b V_b}$  es la relación de impedancias entre el suelo y la roca base, y  $M$  es una constante compleja que caracteriza los números de onda y las formas modales. Para simplificar la notación se expresa al número complejo  $M$  en términos de su módulo  $|M|$  y fase  $\theta_M$ :

$$M = |M| e^{(\theta_M + 2\pi n)i}, \quad n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Igualando Ec. (16) y Ec. (17) puede despejarse el enésimo número de onda:

$$\lambda_n = \frac{\ln|M| + i(\theta_M + 2\pi n)}{2D}, \quad n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

A partir de los números de onda pueden obtenerse los polos temporales:

$$s_n = \lambda_n V_S^* \quad (19)$$

A partir del sistema (13), definiendo  $C_1 = 1$  se obtiene  $C_2 = M$ . Finalmente se normalizan los modos tal-que tomen valor-unitario en superficie libre ( $x = D$ ):

$$\phi_n = \frac{e^{\lambda_n x} + M e^{-\lambda_n x}}{e^{\lambda_n D} + M e^{-\lambda_n D}} = \frac{e^{\lambda_n x} + M e^{-\lambda_n x}}{2 e^{\lambda_n D}} \quad (20)$$

En la **Figura 2** se muestran los modos y polos analíticos obtenidos a partir de Ec.(19) y Ec. (20) para el caso estudiado por **Trono et al. (2015)**. Se observa que los polos se ubican sobre una recta en el plano complejo y que algunos de ellos tienen parte real positiva. Se trata de un caso de amortiguamiento no-clásico debido a la presencia del disipador viscoso en la base, y por este motivo la recta donde se ubican los polos se encuentra desplazada del origen hacia las abscisas negativas (**Inaudi y Trono, 2019**). Los pares de modos con polos cuyos son módulos son similares tienen formas modales similares en su parte real, con amplitudes cambiadas de signo en la base, e idénticas y cambiadas de signo en toda la altura en su parte imaginaria.

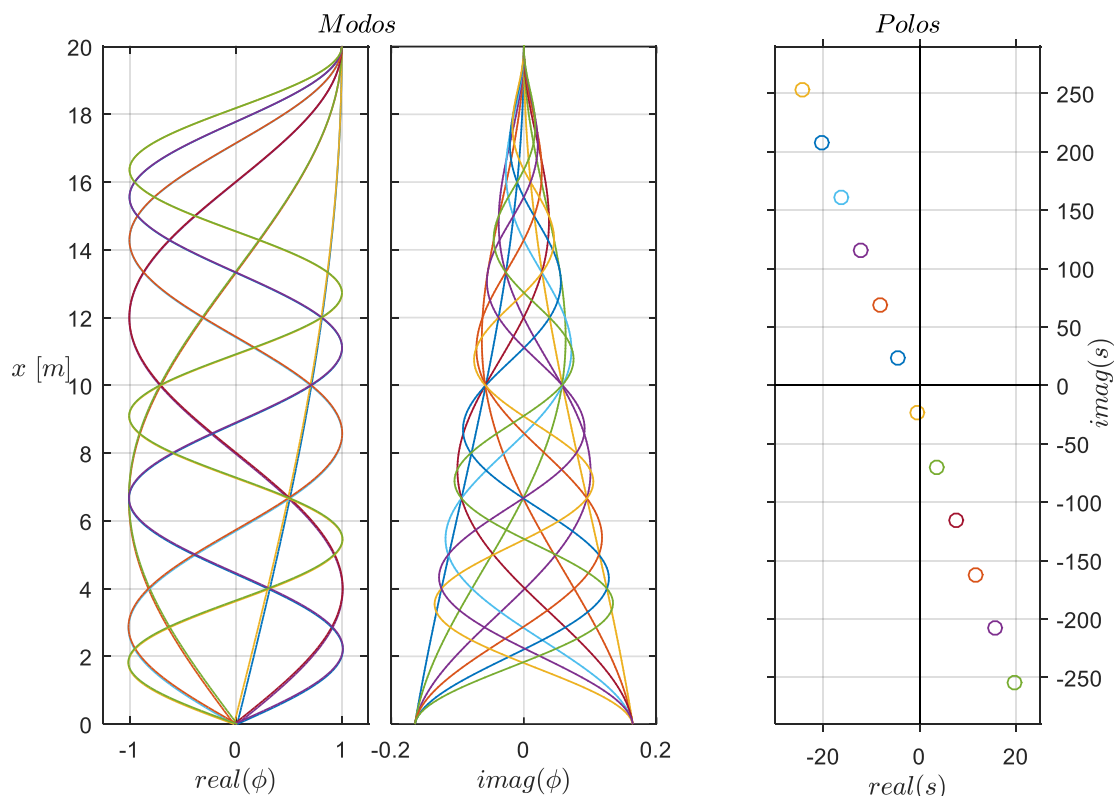


Figura 2: Modos del sistema columna de suelo-roca y ubicación de los polos en el plano complejo.

### 5. SUPERPOSICIÓN MODAL

Se expresa a la solución particular de Ec. (6) como combinación lineal de los modos obtenidos:

$$u_a = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n q_n \tag{21}$$

donde  $\phi_n$  es el modo natural y  $q_n$  la coordenada modal (señal analítica). Reemplazando Ec. (21) en la ecuación diferencial de la Ec. (6), multiplicando por el modo  $\phi_m$  e integrando en toda la altura del perfil se tiene:

$$\sum_n \int_0^D \phi_m G(1 + i 2\xi) \frac{\partial^2(\phi_n)}{\partial x^2} dx q_n - \sum_n \int_0^D \phi_m \rho \phi_n dx \frac{d^2 q_n}{dt^2} = \int_0^D \phi_m \rho \frac{d^2 u_{0a}}{dt^2} dx \tag{22}$$

Integrando por partes la primera sumatoria del primer miembro:

$$\int_0^D \phi_m G(1 + i 2\xi) \frac{\partial^2(\phi_n)}{\partial x^2} dx = \left[ \phi_m G(1 + i 2\xi) \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right]_0^D - \int_0^D \frac{\partial \phi_m}{\partial x} G(1 + i 2\xi) \frac{\partial \phi_n}{\partial x} dx \quad (23)$$

Por condiciones de borde en  $x = 0$  y  $x = D$  (Ec. (11) y Ec. (12)):

$$\begin{aligned} - \sum_n \phi_{m(0)} c_u \phi_{n(0)} \dot{q}_n - \sum_n \int_0^D \frac{\partial \phi_m}{\partial x} G(1 + i 2\xi) \frac{\partial \phi_n}{\partial x} dx q_n \\ - \sum_n \int_0^D \phi_m \rho \phi_n dx \frac{d^2 q_n}{dt^2} = \frac{d^2 u_{0a}}{dt^2} \int_0^D \phi_m \rho dx \end{aligned} \quad (24)$$

Se trunca la solución propuesta en Ec. (21) considerando  $N$  modos naturales del sistema. Multiplicando Ec. (24) por  $(-1)$ :

$$M_{mn} \ddot{q}_n + C_{mn} \dot{q}_n + K_{mn} q_n = P_m \quad (25)$$

$$\begin{aligned} C_{mn} = \phi_{m(0)} c_u \phi_{n(0)}; K_{mn} = \int_0^D \frac{\partial \phi_m}{\partial x} G(1 + i 2\xi) \frac{\partial \phi_n}{\partial x} dx; P_m = - \frac{d^2 u_{0a}}{dt^2} \int_0^D \phi_m \rho dx, \\ M_{mn} = \int_0^D \phi_m \rho \phi_n dx \end{aligned} \quad (26)$$

### 5.1 Espacio de estado y diagonalización del sistema

Se expresa el sistema de la Ec. (25) en forma equivalente a través de  $2N$  ecuaciones de primer orden:

$$A_M \dot{x} + A_K x = B P \quad (27)$$

$$A_M = \begin{bmatrix} -K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M \end{bmatrix}; \quad A_K = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & K \\ K & \mathbf{C} \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \end{bmatrix} \quad (28)$$

Donde  $\mathbf{0}$  e  $I$  son matriz de ceros e identidad de  $N \times N$ , respectivamente. Se propone la solución homogénea del sistema de la Ec. (27):

$$x_h(t) = \psi_j e^{\beta_j t} \quad (29)$$

Donde  $\beta_j$  es el polo correspondiente al vector propio  $\psi_j$ . Reemplazando en Ec. (27) se arriba al problema generalizado de valores y vectores propios:

$$[A_M \beta_j + A_K] \psi_j = \mathbf{0} \quad (30)$$

De los  $2N$  vectores propios  $\psi_j$ , una cantidad  $N$  de vectores propios están asociados a los valores propios  $\beta_j = s_n$  obtenidos en la Ec. (19) y son de la siguiente forma:

$$\psi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n \\ s_n \varphi_n \end{bmatrix} \quad (31)$$

Con  $\varphi_n^T = [0_1 \ 0_2 \ \dots \ 0_{n-1} \ 1_n \ 0_{n+1} \ \dots \ 0_N]$ . El subíndice del número indica la posición donde se encuentra dicho número en el vector. Se utilizan los vectores  $\psi_n$  para realizar el siguiente cambio de base:

$$x = \Psi y \quad (32)$$

Donde  $\Psi$  es la matriz de vectores propios  $\psi_n$  del sistema ( $2N \times N$ ) e  $y$  es el vector de la nueva base de coordenadas ( $N$  filas). Reemplazando Ec. (32) en Ec. (27) y pre-multiplicando por la matriz  $\Psi^T$ :

$$\Psi^T \mathbf{A}_M \Psi \dot{y} + \Psi^T \mathbf{A}_K \Psi y = \Psi^T \mathbf{B} P \quad (33)$$

Las propiedades de ortogonalidad de los modos  $\psi_n$  y  $\psi_m$  (con  $n \neq m$ ) respecto de las matrices simétricas  $\mathbf{A}_M$  y  $\mathbf{A}_K$  demuestran que el sistema de la Ec. (33) es diagonal y que sus ecuaciones escalares son de la siguiente forma:

$$\psi_n^T \mathbf{A}_M \psi_n \dot{y}_n + \psi_n^T \mathbf{A}_K \psi_n y_n = \psi_n^T \mathbf{B} P \quad (34)$$

Despejando la derivada temporal de la coordenada modal:

$$\dot{y}_n = -\frac{\psi_n^T \mathbf{A}_K \psi_n}{\psi_n^T \mathbf{A}_M \psi_n} y_n + \frac{\psi_n^T \mathbf{B} P}{\psi_n^T \mathbf{A}_M \psi_n} \quad (35)$$

Suponiendo momentáneamente al sistema vibrando libremente ( $P = 0$ ) en el modo  $n$ , de Ec. (29) y Ec. (32) surge que la solución homogénea de la coordenada modal es  $y_{n_h} = e^{s_n t}$ . Esta solución homogénea  $y_{n_h}(t)$  reemplazada en Ec. (35) (con  $P = 0$ ) permite obtener:

$$s_n = -\frac{\psi_n^T \mathbf{A}_K \psi_n}{\psi_n^T \mathbf{A}_M \psi_n} \quad (36)$$

A partir de Ec. (31) se tiene que  $\psi_n^T \mathbf{A}_M \psi_n = -K_{nn} + s_n^2 M_{nn}$  y  $\psi_n^T \mathbf{B} P = s_n P_n$ . De Ec. (28), Ec. (31) y Ec. (32) se deduce que  $y_n = q_n$ . Haciendo  $N \rightarrow \infty$  el sistema se desacopla en infinitas ecuaciones diferenciales modales asociadas a cada polo temporal:

$$\dot{q}_n = s_n q_n + \frac{s_n P_n(t)}{-K_{nn} + s_n^2 M_{nn}} \quad (37)$$

Donde  $K_{nn}$ ,  $M_{nn}$  y  $P_n(t)$  se calculan a partir de Ec. (26).

## 5.2 Integración numérica de ecuaciones modales

Para realizar la integración numérica de las ecuaciones modales cuyos polos temporales  $s_m$  tienen parte real positiva Inaudi y Makris (1996) proponen un cambio de variables a través de la transformación de reversión del tiempo  $r = -t$  y de la función:

$$\tilde{q}_m(r) = q_m(t). \quad (38)$$

Derivando  $q_m(t)$  respecto del tiempo:

$$\dot{q}_m = \frac{dq_m}{dt} = \frac{d\tilde{q}_m}{dr} \frac{dr}{dt} = -\frac{d\tilde{q}_m}{dr} \quad (39)$$

Se multiplica Ec. (37) por  $(-1)$  y a partir de Ec. (39) y Ec. (38):

$$\frac{d\tilde{q}_m}{dr} = -s_m \tilde{y}_m - \frac{s_m P_{m(-r)}}{-K_{mm} + s_m^2 M_{mm}} \quad (40)$$



El cambio de variable reversión del tiempo permite transformar a las ecuaciones modales inestables en estables para la integración numérica que se realiza avanzando en  $r$ , es decir en reversa del tiempo  $t$ .

Las condiciones iniciales no pueden ser especificadas debido a que el sistema mecánico es no – causal (Crandall, 1963) estable. Para el caso de señales de entrada de duración finita la respuesta se anticipa al inicio de la carga y decrece asintóticamente a cero para tiempos posteriores a su finalización. Se presentan las condiciones conocidas en el tiempo para las formulaciones de Ec. (5) y Ec. (6) en términos de desplazamientos y señales analíticas de desplazamiento:

$$u_{(x,t \rightarrow -\infty)} = u_{(x,t \rightarrow \infty)} = 0 \quad , \quad \dot{u}_{(x,t \rightarrow -\infty)} = \dot{u}_{(x,t \rightarrow \infty)} = 0 \quad (41)$$

$$u_{a(x,t \rightarrow -\infty)} = u_{a(x,t \rightarrow \infty)} = 0 \quad , \quad \dot{u}_{a(x,t \rightarrow -\infty)} = \dot{u}_{a(x,t \rightarrow \infty)} = 0 \quad (42)$$

Por ser finita en el tiempo la señal de aceleraciones impuestas, la señal analítica de entrada satisface las siguientes condiciones:

$$u_{o_a(t \rightarrow \infty)} = u_{o_a(t \rightarrow -\infty)} = 0 \quad (43)$$

A partir de Ec. (21) y Ec. (42) pueden escribirse las condiciones conocidas para las coordenadas modales:

$$q_{n(-\infty)} = q_{n(\infty)} = 0 \quad , \quad \dot{q}_{n(-\infty)} = \dot{q}_{n(\infty)} = 0 \quad (44)$$

La señal analítica  $u_{o_a}$  comienza antes y termina después que la señal real  $u_o$ . Debido a que la respuesta se anticipa al inicio de la carga y para poder aproximar numéricamente las condiciones expresadas en Ec. (42), Ec. (43) y Ec. (44) se agrega tiempo de integración con anterioridad y posterioridad a la ocurrencia de la señal real de entrada. A partir de la nueva señal real de entrada (con aceleraciones nulas en correspondencia con el dominio temporal agregado) se calcula numéricamente la señal analítica de entrada. Pueden suponerse sin demasiada pérdida de precisión las siguientes condiciones en señales analíticas:

$$P_n(t) = 0, t < t_0, \quad P_n(t) = 0, t > t_f \quad (45)$$

$$q_n(t_0) = 0 \quad , \quad q_n(t_f) = 0 \quad (46)$$

Donde  $t_0$  y  $t_f$  son los tiempos de inicio y final de la nueva analítica de excitación y del dominio de integración numérica. Las expresiones de la Ec. (46) se utilizan como condiciones iniciales de las ecuaciones modales estables e inestables respectivamente.

Ya obtenidas las coordenadas modales por integración numérica se reutiliza la Ec. (35) o se multiplica Ec. (40) por  $-1$  para computar la primera derivada según si la parte real del polo es negativa o positiva. De Ec. (28), Ec. (29) y Ec. (31) surge que  $\ddot{q}_n = s_n \dot{q}_n$ .

Una vez resuelta la formulación fuerte de la Ec. (6) en señales analíticas, la parte real (Re) de dicha solución es la solución de la ecuación diferencial de la Ec. (5). Los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en la altura del perfil de suelos se obtienen de:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Re(\phi_n q_n) ; \dot{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Re(\phi_n \dot{q}_n) ; \ddot{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Re(\phi_n \ddot{q}_n) \quad (47)$$

## 6. CONCLUSIONES

En la práctica habitual los sistemas continuos con disipación histerética se resuelven en el dominio de las frecuencias y la no-linealidad del suelo se considera a través de métodos lineales equivalentes. La respuesta dinámica del modelo mecánico de columna de suelo sometido a aceleraciones de base es utilizada para imponer condiciones de borde naturales sobre modelos de elementos finitos del sitio. Para ello es necesario obtener la respuesta en varios puntos del perfil de suelos, lo que incrementa el tamaño de las matrices de rigidez dinámica que a su vez deben ser invertidas para cada frecuencia discreta, implicando un costo computacional significativo.

Este trabajo presenta como alternativa la solución analítica en el dominio del tiempo del sistema continuo con disipación histerética. Se obtienen las formas modales, las frecuencias naturales y los números de onda del sistema mecánico equivalente suelo-roca. A través de dos descomposiciones modales sucesivas y de la formulación en espacio de estado se plantean ecuaciones modales independientes de primer orden que pueden integrarse numéricamente con bajo costo computacional.

Programas como Matlab, Scilab y Python tienen herramientas para calcular las señales analíticas de una señal en forma numérica, por lo que estos conceptos matemáticos no habituales para la ingeniería sísmica no significan un obstáculo para la implementación del método de superposición modal. Los desplazamientos y velocidades necesarios para la aplicación de condiciones de borde sobre modelos del sitio pueden ahora obtenerse resolviendo ecuaciones modales independientes y evaluando las funciones modales en los puntos de interés.

La presencia de disipación viscosa en el sistema con amortiguamiento histerético determina que algunos polos tengan parte real negativa cuando en ausencia de amortiguamiento viscoso muestran parte real positiva.

Como línea de investigación futura se abordará la integración numérica en el dominio del tiempo mediante técnicas de linealización con elementos histeréticos lineales que permitirían abordar problemas no lineales en los que los parámetros mecánicos del suelo dependan de la amplitud de la deformación y podrían aplicarse a casos con coeficientes de fricción histerética variables en el tiempo y promediados por estrato de suelo.

## REFERENCIAS

- Inaudi, J.A., Makris, N., Time-domain analysis of linear hysteretic damping, *Earthquake engineering and structural dynamics*, 25, 529-545 (1996).
- Inaudi, J.A. y Trono A., Linear hysteretic damping in discrete and continuum parameter models: time and frequency domain analysis. *Publicación en curso*, 2019.
- Trono, A., Pinto F., Alternativas de modelación de interacción dinámica suelo-estructura considerando disipación de energía por radiación de ondas y no-linealidad material. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, Vol XXXVI, págs 995-1004, 2018.
- Schnabel, P., Seed H. B., Lysmer J. Modification of seismograph records for effects of local soil conditions. *Bulletin of the seismological Society of America*, 62(6) 1649-1664, 1972.
- Trono, A., Pinto F., Prato, C.A., Evaluación de respuesta sísmica de estructuras masivas fundadas superficialmente, *Revista Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales*, 9084:28155-1,2015a.
- Crandall. S.H, Dynamic response of systems with structural damping. *Air, Space, and Instruments*, McGraw-Hill, New York, 1963.