



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Trabajo de Tesis Doctoral: Física de hadrones y de
plamas de quarks y gluones desde la dualidad AdS/CFT**

Tesista: Lic. David Gustavo Jorrin

Director/a: Dr. Martín Schvellinger

Codirector/a:

Año: 2018

Resumen

En esta Tesis se investigan propiedades de dos sistemas físicos cuyo denominador común es que su dinámica responde a la interacción fuerte, cuyo lagrangiano es el de la Cromodinámica Cuántica, pero que debido a que ambos sistemas se estudian en el régimen de acoplamiento fuerte, no es posible la utilización de las técnicas de la teoría de perturbaciones en el contexto de la Teoría Cuántica de Campos Relativista (TCC). Esto ofrece un escenario adecuado y muy interesante para el empleo de las técnicas basadas directamente en la dualidad entre las Teorías de Yang-Mills (TYM) por un lado, y la supergravedad (SUGRA) y la Teoría de Supercuerdas (TSC), por otro. Primeramente se investiga la estructura de glueballs de la Teoría de Yang-Mills supersimétrica (SYM) con $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías y grupo de gauge $SU(N_c)$ en 3+1 dimensiones, así como de mesones escalares de la teoría de gauge en 3+1 dimensiones con $\mathcal{N} = 2$ supersimetrías. Eso se desarrolla en el contexto de la dispersión inelástica profunda (DIS) de leptones cargados por glueballs y mesones. Se calculan los tensores hadrónicos mediante el uso de sus correspondientes descripciones holográficas duales. Se desarrollan cálculos a *one-loop* en supergravedad del tipo IIB. En ambos casos se obtuvo un resultado central que consiste en que las expansiones en $1/N_c$, por un lado, y en potencias de Λ^2/q^2 , donde Λ es el *cut-off* IR de la TYM, mientras que q es el tetraimpulso transferido por el fotón virtual desde un leptón al hadrón (en el proceso DIS), por otro, no conmutan. Eso da como resultado que en el caso de los mesones escalares la comparación de los momentos de menor orden de las funciones de estructura mejoran sustancialmente el nivel de acuerdo con resultados desde *Lattice* QCD al considerar el límite de altas energías y luego el límite $1 \ll N_c$. En particular, para el pión los cálculos previos a nivel árbol cuya diferencia con *Lattice* QCD es del orden del 10%, con los resultados de esta Tesis a nivel *one-loop* llegan al orden de aproximación del 1,27%. Asimismo, se obtuvieron nuevas relaciones del tipo de Callan-Gross. La segunda clase de sistemas fuertemente acoplados investigados corresponde a plasmas de quarks y gluones generados en colisiones ultra-relativistas de iones pesados en el *Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC, Broohaven, USA)* y en el *Large Hadron Collider (LHC, CERN, Suiza)*. Para el caso de las colisiones de iones de Au-Au y de Pb-Pb, en esta Tesis se desarrollan simulaciones numéricas considerando la descripción holográfica dual del plasma, desde la supergravedad del tipo IIB, en el caso de un agujero negro del tipo Schwarzschild asintóticamente AdS_5 , considerando todas las correcciones en α'^3 , donde $\alpha' = l_s^2$ es decir el cuadrado de la longitud de la cuerda fundamental, a partir de la TSC del tipo IIB. Con esto se han obtenido curvas correspondientes a la emisión de fotones en dichos procesos y se ha comparado estos resultados directamente con resultados de los experimentos observando un mejor ajuste del espectro. Se obtuvieron coeficientes del flujo anisotrópico para colisiones de Au-Au en el rango de centralidad 0-20% y 20-40% en el mismo orden que los perturbativos indicando que posiblemente sea otras fuentes no consideradas que resuelven la tensión con los datos experimentales .

Publicaciones

Las contribuciones originales de esta Tesis están basadas en los siguientes trabajos:

[1] D. Jorin, N. Kovensky and M. Schvellinger, “Towards $1/N$ corrections to deep inelastic scattering from the gauge/gravity duality,” *JHEP* **1604** (2016) 113, [arXiv:1601.01627 [hep-th]]. *45 pp.*

[2] D. Jorin, N. Kovensky and M. Schvellinger, “Deep inelastic scattering off scalar mesons in the $1/N$ expansion from the D3D7-brane system,” *JHEP* **1612** (2016) 003, [arXiv:1609.01202 [hep-th]]. *44 pp.*

[3] D. Jorin and M. Schvellinger, “Holographic photo-production in heavy ion collisions at finite coupling,” trabajo en preparación.

Índice general

Resumen	II
1. Objetivos y generalidades	1
I Fundamentos teóricos	5
2. Teorías de Yang-Mills más allá del límite planar	6
2.1. La teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM	6
2.1.1. Operadores	7
2.2. La expansión en $1/N_c$ y el límite planar	9
3. El proceso de dispersión inelástica profunda (DIS)	13
3.1. Cinemática del DIS	13
3.2. Sección eficaz a partir de los tensores leptónico y hadrónico	15
3.3. Funciones de estructura para blancos hadrónicos escalares	17
4. La dualidad entre TYM y supergravedad y teorías de supercuerdas	18
4.1. La correspondencia AdS/CFT	19
4.2. Correspondencia campo/operador y expansión en diagramas de Witten en $1/N_c$	21
4.3. Extensión considerando temperatura finita	23
5. Modelo de D3D7-branas y mesones escalares	25
5.1. El sistema D3-D7	25
6. Plasma de quarks y gluones generado en colisiones de iones pesados	29
6.1. Sistema de coordenadas y observables hadrónicos relevantes	30
6.2. Comparación de QCD y $\mathcal{N} = 4$ SYM a temperatura finita	33
II Contribuciones originales	34
7. Correcciones en $1/N_c^2$ de las funciones de estructura de glueballs	35
7.1. Expansión del producto de operados en DIS	36
7.2. Expansión en $1/N_c$ y supergravedad a <i>one-loop</i>	37
7.3. Cálculo de DIS holográfico para $N_c \rightarrow \infty$	38
7.4. Cálculo de los diagramas de Witten en supergravedad con dos estados intermedios	46
7.4.1. Reglas de selección de los vértices de interacción	48
7.4.2. Vértices de interacción y el diagrama más relevante	50
7.5. Resultados de las funciones de estructura	54

7.5.1. Consideraciones generales	54
7.5.2. Integrales angulares y resultados de las funciones de estructura	58
7.6. Estados intermedios de multipartículas en supergravedad del tipo IIB	61
7.7. El límite planar <i>vs</i> el límite de altas energías	63
7.8. Análisis de las funciones de estructura	64
8. Mesones escalares en la expansión $1/N_c$	65
8.1. Resultados previos en el límite de $N_c \rightarrow \infty$	66
8.2. Derivación de los vértices de interacción en supergravedad	68
8.3. Expansión en $1/N_c$ y análisis de los diagramas dominantes	71
8.4. Cálculo de la función de estructura longitudinal	78
8.5. Comparación con resultados de <i>Lattice</i> QCD	80
8.6. Funciones de estructura y relación de Callan-Gross	82
9. Plasmas de quarks y gluones fuertemente acoplados	84
9.1. Fotoemisión	85
9.2. Simulaciones numéricas	87
9.2.1. Condiciones iniciales	88
9.2.2. Módulo hidrodinámico	90
9.2.3. Módulo de <i>hadronización</i> y dinámica posterior	92
9.2.4. Observables hadrónicos	93
9.2.5. Módulo de emisión de fotones	96
9.3. Descripción holográfica dual	98
9.4. Cálculo holográfico de la tasa de fotoemisión de $\mathcal{N} = 4$ SYM a temperatura finita	99
9.4.1. Cálculo holográfico en el límite $\lambda \rightarrow \infty$	100
9.4.2. Corrección en λ finito	101
9.5. Tasa de fotoemisión a NLO perturbativa	103
9.6. Resultados y discusión	104
10. Conclusiones	111
Apéndices	114
A. Integrales de funciones de Bessel dobles y triples	115
B. Propiedades básicas de los armónicos esféricos	117
C. Integrales de productos de funciones de Bessel para cálculos aplicados a mesones escalares	119

Capítulo 1

Objetivos y generalidades

Las teorías de Yang-Mills son muy importantes en la descripción de la física de partículas constituyendo el núcleo del Modelo Estándar de la física de partículas. Las interacciones fuertes son modeladas desde primeros principios a partir de la cromodinámica cuántica, en inglés *Quantum ChromoDynamics* (QCD) que es una teoría de campos propuesta al comienzo de los años 70 para entender la estructura de los bariones y mesones. En QCD las interacciones vienen dadas por campos de Yang-Mills asociados a una simetría de gauge $SU(3)$, llamados gluones, y transforman en la representación adjunta del grupo de gauge. Los grados de libertad fermiónicos son los quarks y están definidos en la representación fundamental del grupo de gauge. Todos estos campos poseen una carga asociada a dicha simetría denominada carga de color.

La cromodinámica cuántica posee una propiedad fundamental de las interacciones fuertes denominada libertad asintótica: las interacciones se debilitan a medida que consideramos escalas de energía mayores. En el límite de altas energías los grados de libertad (quarks y gluones) se encuentran débilmente acoplados permitiendo realizar expansiones perturbativas en la constante de acoplamiento de QCD, g_{YM} . Estas técnicas enmarcadas en la teoría de renormalización requieren que g_{YM} mucho menor que 1 y han permitido predecir con mucha precisión distintos observables [4]. Sin embargo para escalas de energía más bajas el acoplamiento es fuerte y el desarrollo perturbativo deja de tener sentido. En esta escala se conocen fenómenos muy interesantes como el confinamiento de color, que no se pueden estudiar hasta ahora desde primeros principios.

Existen distintas formas de estudiar teorías cuánticas de campos fuertemente acopladas como por ejemplo QCD. Se han desarrollado métodos computacionales denominados QCD en la red (*Lattice QCD*), en los cuales se discretiza el espacio y se calculan desde primeros principios observables importantes de teorías cuánticas de campos fuertemente acopladas [5, 6, 7, 8, 9, 10]. Poseen como desventaja perder la información analítica y que aún no se puede introducir correctamente los grados de libertad fermiónicos ni calcular observables a tiempo real. De todas formas en esta Tesis se toman simulaciones de QCD en la red como datos sólidos para contrastar con determinados observables de los que no se dispone de datos experimentales. Por ejemplo el caso de los momentos de la función de estructura F_2 del pión.

Por otro lado existen teorías efectivas como por ejemplo el modelo de Skyrme [11, 12], modelos de multiskyrmiones [13], el Ansatz de Callan-Klebanov [14], el modelo de la bolsa del MIT [15], el modelo de Nambu-Jona-Lasinio [16], la teoría de perturbaciones quirales [17, 18], la teoría de perturbaciones quirales de bariones pesados [19], la expansión en $1/N_c$ [20, 21] entre otros modelos efectivos que pueden predecir correctamente ciertos observables bajo ciertas hipótesis pero pierden su carácter de fundamental al no poder derivarse de primeros principios, es decir, desde QCD.

Un marco teórico que presentaremos para estudiar teorías de gauge fuertemente acopladas

se desarrolló desde 1997 a partir del trabajo fundacional de Maldacena [22]. En sus trabajos Maldacena propuso una dualidad entre teorías de gauge fuertemente acopladas definidas en un espacio-tiempo plano de 4 dimensiones y teorías de cuerdas débilmente acopladas definidas en un espacio-tiempo de 10 dimensiones. Esta dualidad denominada AdS/CFT o dualidad Gravedad/Gauge permite, a partir de un diccionario bien establecido, calcular observables de teorías de campos fuertemente acopladas a partir de teorías de cuerdas en el límite de supergravedad (bajas energías)¹. Por esta razón se dice que corresponde a una dualidad de acoplamientos fuertes/débiles. A pesar de que aún no existe una demostración matemática completa y por lo tanto continúa siendo una conjetura, esta dualidad ha superado con éxito a lo largo de 20 años una enorme cantidad de pruebas desde supergravedad, la teoría de cuerdas y la teoría cuántica de campos. Este enfoque es el que consideraremos en esta Tesis para estudiar ciertas propiedades de sistemas físicos cuya dinámica es controlada por QCD fuertemente acoplada.

La dualidad AdS/CFT permite estudiar la teoría de Yang-Mills con grupo de gauge $SU(N_c)$ supersimétrica $\mathcal{N} = 4$ SYM fuertemente acoplada a partir de supergravedad IIB en un espacio $AdS_5 \times S^5$, que en ciertos aspectos importantes, especialmente a temperatura finita, tiene algunas similitudes con QCD. Para que el límite de bajas energías de la teoría de cuerdas se pueda considerar tenemos que tomar el límite planar de la teoría de gauge de modo tal que $1 \ll \lambda \ll N_c$ donde λ es la constante de 't Hooft y N_c el rango de grupo de gauge. Bajo estas hipótesis se han obtenido con éxito muchas características comunes de estos sistemas en procesos de altas energías. Pero tenemos que tener presente que para QCD el rango del grupo de gauge es $N_c = 3$ y el acoplamiento λ puede tomarse grande pero no infinito en procesos de interés. Por esta razón el objetivo de esta Tesis es explorar en el contexto de la dualidad AdS/CFT correcciones a los límites de $N_c \rightarrow \infty$ y $\lambda \rightarrow \infty$ con el fin de obtener modelos duales holográficos más realistas y poder comparar con datos experimentales o con aquellos provenientes de simulaciones de *Lattice QCD* y *Lattice SYM*.

La primera parte de esta Tesis está destinada a revisar los temas teóricos relevantes que servirán como marco para los desarrollos originales en los siguientes capítulos. En el Capítulo 2 se estudia la teoría de SYM $\mathcal{N} = 4$, se da una breve introducción de la expansión de 't Hooft en el límite de N_c grande. En el Capítulo 3 estudiamos el proceso de dispersión inelástica profunda, incluyendo la definición de las funciones de estructura y sus convenciones de notación. En el Capítulo 4 se motiva cómo estudiar teorías de gauge fuertemente acopladas en el régimen $1 \ll \lambda \ll N_c$ a partir de la correspondencia AdS/CFT. Se introduce el diccionario holográfico para $\mathcal{N} = 4$ SYM a temperatura cero y temperatura finita. Luego en el Capítulo 5 se introducen Dp-branas de sabor en los modelos holográficos para generar mesones y en el Capítulo 6 se comentarán generalidades del plasma de quarks y gluones y las colisiones de iones pesados.

En la segunda parte, en los Capítulos 7 y 8 se estudian las correcciones en $1/N_c$ de procesos de dispersión inelástica profunda utilizando modelos holográficos propuestos por Polchinski y Strassler [23]. Desde el punto de vista de la teoría de cuerdas esto corresponde a una expansión en el género de la hoja de mundo (*genus* del *worldsheet*) y en el límite de bajas energías se calcula mediante diagramas de Witten en supergravedad. Primero se consideran el cálculo de funciones de estructura de glueballs a temperatura cero, obteniendo propiedades interesantes. Luego consideramos mesones escalares aprovechando que se dispone de datos de *Lattice QCD* para comparar. Se obtuvieron las funciones estructuras y se logró ajustar con mayor precisión los momentos asociados a las funciones de estructura que en el caso de $N_c \rightarrow \infty$ para piones.

Finalmente en el Capítulo 9 se estudia el plasma de quarks y gluones formado en colisiones de iones pesados ultrarelativistas, que corresponde a QCD a temperatura finita. Se simuló la evolución del plasma con modelos hidrodinámicos efectivos, estudiando cómo se modifica el

¹En principio también puede pensarse en sentido inverso, es decir que una teoría cuántica de campos en acoplamiento débil es dual a una teoría de cuerdas en acoplamientos fuerte.

espectro de fotones térmicos al incluir tasas de fotoemisión holográficas con correcciones en α' (constante de acoplamiento λ finita) y posteriormente corrección en $1/N_c^2$. Estos resultados se compararon directamente con datos experimentales de RHIC y LHC. Los resultados originales de la presente Tesis se describen en detalle en los trabajos [1, 2, 3]. En la figura 1.1, se muestra esquemáticamente la estructura y los principales resultados originales presentados a lo largo de las páginas que siguen.

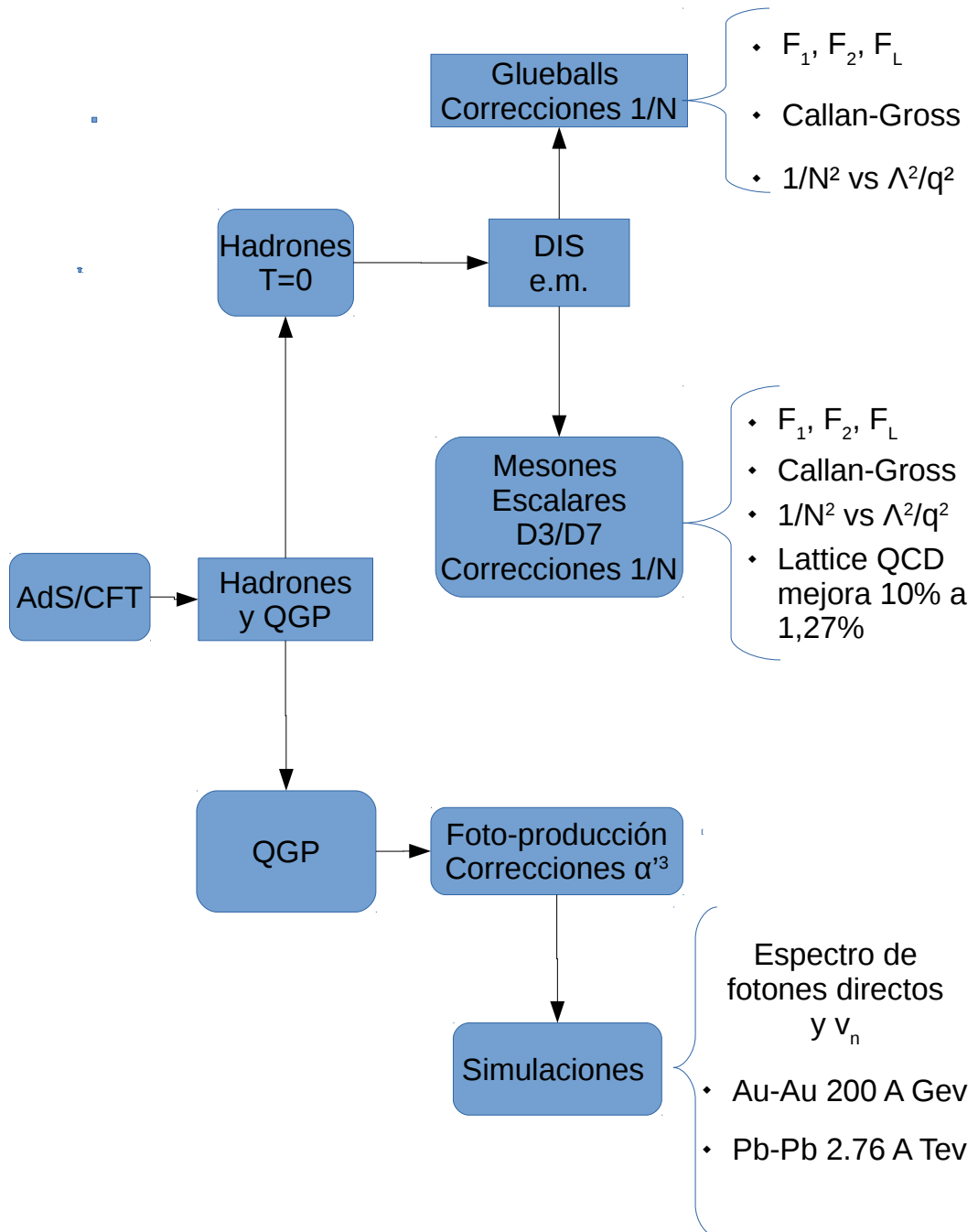


Figura 1.1: Presentación esquemática de la Tesis.

Parte I

Fundamentos teóricos

Capítulo 2

Teorías de Yang-Mills más allá del límite planar

Para explorar teorías de campos fuertemente acopladas en esta Tesis se utilizará la dualidad AdS/CFT que permite estudiar los observables a partir de modelos holográficos duales derivados directamente desde teorías de supercuerdas en el régimen de acoplamiento débil. Esta dualidad propuesta por Maldacena [22] requiere conocer, suponiendo que exista, la teoría dual definida sobre 10 dimensiones espacio-temporales. Desde la formulación de la conjetura en 1997, se ha realizado mucho esfuerzo para encontrar un método que permita obtener el dual holográfico de teorías de campos que describen procesos físicos en la naturaleza, sin embargo aún no se conoce la teoría dual a QCD. Un punto de partida es la utilización de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM, cuya teoría dual holográfica se conoce muy bien, al menos para ciertos regímenes paramétricos. Si bien esta teoría difiere sustancialmente de QCD en el caso de los *glueballs* resulta muy interesante calcular propiedades en dicha teoría e incluso comparar resultados con los de *Lattice* QCD. En el caso del plasma de quarks y gluones se discutirá en qué régimen de temperaturas las dos teorías presentan características similares. En este capítulo se detallarán las principales características de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM a temperatura cero y a temperatura finita, y se discutirá la similitudes y diferencias con QCD.

2.1. La teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM

El lagrangiano de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM con grupo de gauge $SU(N_c)$ en 3+1 dimensiones está dado por,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \text{tr} & \left(-\frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta_I}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \sum_a i \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda_a - \sum_i D_\mu X^i D^\mu X^i \right. \\ & \left. + \sum_{a,b,i} g C_i^{ab} \lambda_a [X^i, \lambda_b] + \sum_{a,b,i} g \bar{C}_{iab} \bar{\lambda}^a [X^i, \bar{\lambda}^b] + \frac{g^2}{2} \sum_{ij} [X^i, X^j]^2 \right). \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Las constantes C_i^{ab} y \bar{C}_{iab} están asociadas a las matrices de Clifford del grupo de simetría $R SO(6)_R \sim SU(4)_R$. El parámetro θ_I es el ángulo del instantón, $g = g_{YM}$ es la constante de acoplamiento de Yang Mills, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]$, $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ es el dual de $F_{\mu\nu}$ y $D_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu$ la derivada covariante. El contenido de campos viene dado por el supermultiplete de gauge de $\mathcal{N} = 4$ SYM ($A_\mu \lambda_\alpha^a X^i$), donde λ_α^a con $a = 1, \dots, 4$ son espinores de Weyl y X^i con $i = 1, \dots, 6$ son campos escalares reales. Los campos transforman en la representación adjunta

del grupo de gauge. Frente a la simetría $SU(4)_R$, los A_μ transforman como un singlete, los λ_α^a transforman como **4** y los escalares X^i transforman como tensores antisimétricos **6** de rango 2.

La acción es invariante frente a las siguientes transformaciones de supersimetría dadas por

$$\begin{aligned}
\delta X^i &= [Q_\alpha^a, X^i] = C^{iab} \lambda_{ab} \\
\delta \lambda_b &= Q_\alpha^a \lambda_{\beta b} = F_{\mu\nu}^+ (\sigma^{\mu\nu})_\beta^\alpha \delta_b^a + [X^i, X^j] \epsilon_{\alpha\beta} (C_{ij})_b^a \\
\delta \bar{\lambda}_\beta^b &= Q_\alpha^a \bar{\lambda}_\beta^b = C_i^{ab} \bar{\sigma}_\alpha^\mu D_\mu X^i \\
\delta A_\mu &= [Q_\alpha^a, A_\mu] + (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \dot{\lambda}_\beta^a.
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

La teoría es invariante de escala clásicamente y eso se puede verificar analizando la dimensión de escala de los campos y acoplamientos

$$[A_\mu] = [X^i] = 1, \quad [\lambda_a] = \frac{3}{2} \quad [g] = [\theta_I] = 0. \tag{2.1.3}$$

Los grupos asociados a las simetrías del lagrangiano se pueden combinar formando grupos más grandes. Combinando las simetrías de Poincaré y las simetrías conformes se obtiene el grupo $SO(2,4) \sim SU(2,2)$. Combinando el $SU(2,2)$ con las supersimetrías se forma el supergrupo $SU(2,2|4)$.

Existen indicios que hacen suponer que a nivel cuántico la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM no presenta divergencias ultravioletas en las funciones de correlación de sus campos canónicos [24]. La función β del grupo de renormalización se anula idénticamente y por lo tanto se conserva la simetría de invarianza de escala a nivel perturbativo al menos a tres *loops* [24]. Más allá de eso se asume la invarianza de escala, pero no está demostrado a todo orden [24]. En el caso de dispersión de gluones en MHV esto se ha mostrado al menos para 5-*loops* en el trabajo [25]. En el caso no perturbativo $\mathcal{N} = 4$ SYM es una teoría conforme en resulta ser el dual de la teoría de supercuerdas del tipo IIB con la solución $AdS_5 \times S^5$, dilatón constante y N_c unidades de F_5 sobre la S^5 . El grupo de isometrías del AdS_5 es el $SO(2,4)$, el cual justamente corresponde al grupo conforme $SO(2,4)$ de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM. En ese sentido la simetría conforme de $\mathcal{N} = 4$ SYM es manifiesta, cuando los valores de expectación de vacío de todos los campos escalares $\langle X_I \rangle = 0, \forall I = 1, \dots, 6$, ya que de esta forma no se introduce ninguna escala en forma dinámica en la teoría de gauge.

Los grupos de simetrías continuas de la teoría con sus generadores son:

- Simetría R : asociada al grupo $SO(6)_R \sim SU(4)_R$ generado por T_A con $A = 1, \dots, 15$.
- Simetría conforme: está generado por las traslaciones P^μ , transformaciones de Lorentz $L_{\mu\nu}$, dilataciones D y transformaciones conformes especiales K^μ .
- Supersimetrías: generado por las supercargas Q_α^a y sus complejas conjugadas $\bar{Q}_{\dot{\alpha}a}$.
- Supersimetrías conformes: Están generadas por las supercargas $S_{\alpha a}$ y sus complejas conjugadas $\bar{S}_{\dot{\alpha}^a}$. Estas deben incluirse debido a que las transformaciones conformes especiales y las supersimetrías no conmutan y se necesitan para cerrar el álgebra.

2.1.1. Operadores

El espectro de operadores de la teoría está determinado por los invariantes de gauge formados por los campos mencionados. Para esta teoría de gauge $SU(N_c)$ con campos en la representación adjunta los operadores necesariamente van a ser construidos a partir de una traza de productos de operadores (denominados operadores de traza única) o productos de operadores de traza única.

Tipo de operador	$\#Q$	Rango de espín	Primario $SU(4)_R$	Dimensión Δ
Identidad	16	0	$[0, 0, 0]$	0
1/2 BPS	8	2	$[0, k, 0], k \geq 2$	k
1/4 BPS	4	3	$[l, k, l], l \geq 1$	k+2l
1/8 BPS	2	7/2	$[l, k, l + 2m]$	$k + sl + 3m, m \geq 1$
No BPS	0	4	ninguno	no protegido

Cuadro 2.1: Características de los multipletes BPS y no BPS.

Por eso es natural dividir los operadores en los que tienen traza única y los de traza múltiple. En el estudio de la expansión del producto de operadores (OPE, por sus siglas en inglés) de corrientes en los procesos de dispersión inelástica profunda será importante esta distinción ya que en el límite de N_c grande las funciones de correlación de campos de operadores de traza múltiple están suprimidos por potencias de N_c en comparación con los de traza única formado por los mismos campos.

La representación unitaria del subgrupo bosónico de la superálgebra $SU(2, 2|4)$ posee los siguientes números cuánticos

$$SO(1, 3) \times SO(1, 1) \times SU(4)_R$$

$$(s_+, s_-) \quad \Delta \quad [r_1, r_2, r_3] \quad (2.1.4)$$

donde s_{\pm} son semienteros positivos o cero, Δ es la dimensión conforme que puede tomar valores positivos o cero y $[r_1, r_2, r_3]$ corresponden a los índices de Dynkin de la representación del grupo $SU(4)_R$. En una representación unitaria, la dimensión Δ está limitada inferiormente por los números cuánticos de espín y del $SU(4)_R$. Consideremos los operadores primarios, que son los que poseen menor dimensión conforme. Estos operadores son escalares por lo tanto su espín vale cero y sus dimensiones están restringidas por los números cuánticos de grupo $SU(4)_R$. A partir del análisis hecho en [26], se pueden clasificar en cuatro tipos, que poseen sus dimensiones conformes satisfaciendo las siguientes condiciones,

1. $\Delta = r_1 + r_2 + r_3$
2. $\Delta = \frac{3}{2}r_1 + r_2 + \frac{1}{2}r_3 \geq 2 + \frac{1}{2}r_1 + r_2 + \frac{3}{2}r_3$ y se debe satisfacer $r_1 \geq r_3 + 2$
3. $\Delta = \frac{1}{2}r_1 + r_2 + \frac{3}{2}r_3 \geq 2 + \frac{3}{2}r_1 + r_2 + \frac{1}{2}r_3$ y se debe satisfacer $r_1 \geq r_3 + 2$
4. $\Delta \geq \text{MAX} [2 + \frac{3}{2}r_1 + r_2 + \frac{1}{2}r_3; 2 + \frac{1}{2}r_1 + r_2 + \frac{3}{2}r_3]$

En los primeros tres casos, corresponden a una representación de series discretas, los operadores conmutan con al menos una supercarga y se denominan operadores quirales o BPS. Estos se encuentran en representaciones pequeñas del álgebra supersimétrica y por lo tanto sus dimensiones están protegidas y no reciben correcciones cuánticas.

El último caso corresponde a representaciones continuas, no hay supercargas que conmutan con el operador primario. Estas representaciones se denominan no quirales o no BPS.

En la tabla 2.1 se detallan características de los operadores BPS y no BPS. Notar que $\#Q$ es el número de supercargas que deja invariante al operador primario.

2.2. La expansión en $1/N_c$ y el límite planar

La teoría que describe las interacciones fuertes es QCD y es una teoría de gauge no abeliana. El grupo de gauge es $SU(3)$ con el número de color $N_c = 3$. A escalas de energías altas se pueden calcular observables con métodos perturbativos, en donde el parámetro de expansión es la constante de acoplamiento g_{YM} . Si consideramos procesos a escalas de energía cada vez más baja la constante de acoplamiento crece, el cálculo perturbativo pierde sentido y se vuelve inmanejable. Por eso se ha buscado considerar límites que permitan simplificar de alguna forma la dinámica de los grados de libertad y lograr captar características en escalas cercanas al confinamiento.

Una de las propuestas interesante formulada por 't Hooft [20] considera un nuevo parámetro de expansión $1/N_c$. Un límite importante en este contexto corresponde a tomar límite $N_c \rightarrow \infty$. En principio podemos pensar que se complicaría al tomar este límite debido a que los grados de libertad dinámicos se incrementan. Sin embargo se mostrará en esta sección que la teoría se simplifica en el límite de N_c grande en donde el parámetro de expansión es $1/N_c$. A pesar de que $N_c \rightarrow \infty$ no aparenta ser una buena aproximación a $N_c = 3$, se pueden obtener resultados acorde a los datos experimentales expandiendo en $1/N_c = 1/3$, sobre todo porque en muchos casos el primer término asociado a $1/N_c$ se anula y la primera corrección es del orden $1/N_c^2$. En estos casos las predicciones difieren el orden de 10% [21].

Vamos a ejemplificar la expansión de 't Hooft con el siguiente Lagrangiano

$$-\frac{1}{2}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \sum_{k=1}^{N_f} \bar{\psi}_k (i\not{D} - m_k) \psi_k. \quad (2.2.1)$$

Es una teoría de gauge $SU(N_c)$ con N_f fermiones de sabor definidos en la representación fundamental de $SU(N_f)$. El campo de gauge $A_\mu = A_\mu^A T^A$, en donde T^A son las matrices de la representación adjunta del grupo de gauge normalizadas de modo que

$$Tr(T^A T^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}. \quad (2.2.2)$$

Se define el tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i \frac{g_{YM}}{\sqrt{N_c}} [A_\mu, A_\nu]$ y la derivada covariante es $D_\mu = \partial_\mu + i \frac{g_{YM}}{\sqrt{N_c}} A_\mu$. La constante de acoplamiento se toma de esta forma para que en el límite de $N_c \rightarrow \infty$ la función β del grupo renormalización esté bien definida. Se tomará este límite manteniendo N_f fijo. Aquí estamos considerando $N_f \ll N_c$ pero se puede extender considerando N_f/N_c fijo correspondiente al límite de Veneziano [27].

Veamos que con la constante de acoplamiento usual se obtiene una función β a *one-loop*

$$\mu \frac{dg_{YM}}{d\mu} = - \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right) \frac{g_{YM}^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g_{YM}^5), \quad (2.2.3)$$

en donde se observa que no tiene un límite bien definido para $N_c \rightarrow \infty$. Con la definición nueva obtenemos una función β igual a

$$\mu \frac{dg_{YM}}{d\mu} = - \left(\frac{11}{3} - \frac{2}{3} \frac{N_f}{N_c} \right) \frac{g_{YM}^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g_{YM}^5). \quad (2.2.4)$$

El término de los fermiones es suprimido en este límite. El parámetro de escala Λ_{QCD} se mantiene fijo en el límite de $N_c \rightarrow \infty$. De esta forma tomar el límite de N_c grande con la constante de acoplamiento escaleada por $1/\sqrt{N_c}$ es equivalente a mantener la masa de los mesones fija.

Este reescalado se puede considerar en términos de la constante de 't Hooft $\lambda = g_{YM}^2$ (que en términos de la constante de acoplamiento estándar vale $\lambda = g_{YM}^2 N_c$) que se mantiene fija en el

límite de $N_c \rightarrow \infty$. Analicemos el conteo en potencias de N_c . Para ello redefinamos los campos de gauge $A/ \rightarrow \frac{\sqrt{N_c} \hat{A}}{g_{YM}}$ y $\psi \rightarrow \sqrt{N_c} \hat{\psi}$ obteniendo el siguiente lagrangiano

$$L = -\frac{N_c}{\lambda} \frac{1}{2} \text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} + N_c \sum_{k=1}^{N_F} \bar{\psi}_k (i \not{D} - m_k) \hat{\psi}_k. \quad (2.2.5)$$

A simple vista parecería que la presencia del factor N_c divergente delante de la acción generaría un límite semiclásico, pero esto no es verdad ya que el número de componentes de los campos $\hat{\psi}$ y \hat{A}_μ también se hace infinito en este límite.

Para realizar el conteo de factores N_c en los valores de espectación es conveniente utilizar el formalismo de doble línea desarrollado por 't Hooft. El propagador del quark es

$$\langle \psi^a(x) \bar{\psi}^b(y) \rangle = \delta^{ab} S(x-y), \quad (2.2.6)$$

y está representado diagramáticamente por una línea única. Se muestra en la figura 2.1 (a) el diagrama del quark. Luego el propagador de gluón tiene la forma,

$$\langle A_\mu^A(x) A_\nu^B(y) \rangle = \delta^{AB} D_{\mu\nu}(x-y), \quad (2.2.7)$$

donde A y B son índices en la representación adjunta. En vez de tratar a los gluones como campos con un único índice asociado con la representación es preferible considerarlos como matrices de $N_c \times N_c$ con dos índices en la representación de N_c y \bar{N}_c , $(A_\mu)_b^a = A_\mu^A (T^A)_b^a$. De esta forma el propagador del gluón se puede reescribir como

$$\langle A_{\mu b}^a(x) A_{\nu d}^c(y) \rangle = D_{\mu\nu}(x-y) \left(\frac{1}{2} \delta_d^a \delta_b^c - \frac{1}{2N_c} \delta_b^a \delta_d^c \right) \quad (2.2.8)$$

en donde utilizamos la identidad

$$(T^A)_b^a (T^A)_d^c = \frac{1}{2} \delta_d^a \delta_b^c \quad (2.2.9)$$

asociada al grupo $SU(N_c)$. El segundo factor no se encuentra si hubiésemos considerado el grupo $U(N_c)$, pero la diferencia se manifiesta en una corrección suprimida por $1/N_c$ por lo tanto no modifica la argumentación empleada. El propagador del gluón en este formalismo está representado por dos líneas correspondientes a cada índice a y b . Se detalla en la figura 2.1 (b).

El color se conserva por la presencia de la función delta de Kronecker en el propagador de la ecuación (2.2.8). Del mismo modo los vértices se pueden representar de forma sencilla manifestando la contracción en los índices de color. Por ejemplo el vértice triple fermión-campo de gauge $\bar{\psi}_a A_b^a \psi^b$ se detalla en la figura 2.1 (c) y los vértices de tres y cuatro gluones del término cinético se detallan en la figura 2.1 (d) y (e), respectivamente.

De esta forma cada diagrama de Feynman puede ser expresado en el formalismo de doble línea, donde cada línea indica una contracción de índices de color. Estos diagramas se pueden pensar como superficies formadas por polígonos unidos de modo que cada línea tiene una orientación (flecha) y las dobles líneas poseen orientaciones opuestas.

Si nos concentramos en el término del campo de gauge del lagrangiano (2.2.5) se observa que dado un diagrama de Feynman cada vértice de interacción contribuye con un factor $\frac{N_c}{\lambda}$, cada propagador con un factor $\frac{\lambda}{N_c}$ y cada *loop* contribuye con un factor N_c ya que contiene la suma sobre los N_c índices de gauge. Por lo tanto si tenemos un diagrama con V vértices, E propagadores y L *loops* (caras en la representación de doble líneas) la contribución en potencias de N_c será proporcional a

$$N_c^{V-E+F} \lambda^{E-V} = N_c^X \lambda^{E-V}. \quad (2.2.10)$$

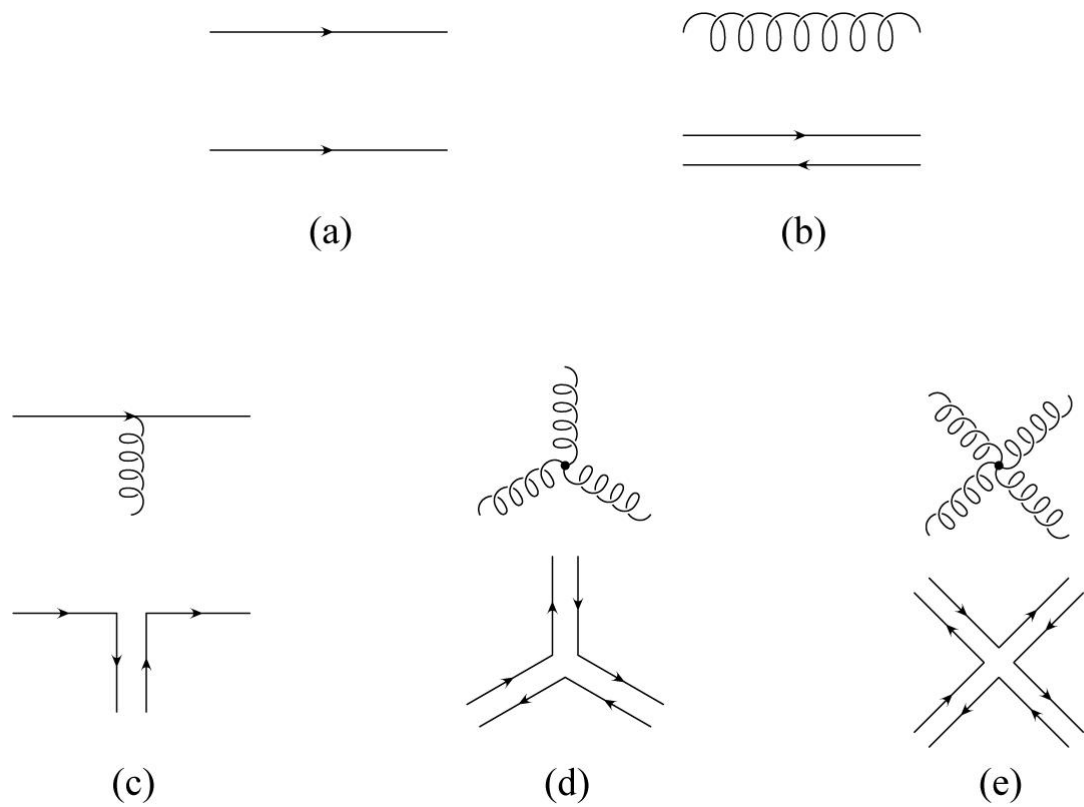


Figura 2.1: Se observa para cada diagrama la notación tradicional en la parte inferior y la notación en el formalismo de doble línea de 't Hooft en la parte superior. Figura extraída de la referencia [28].

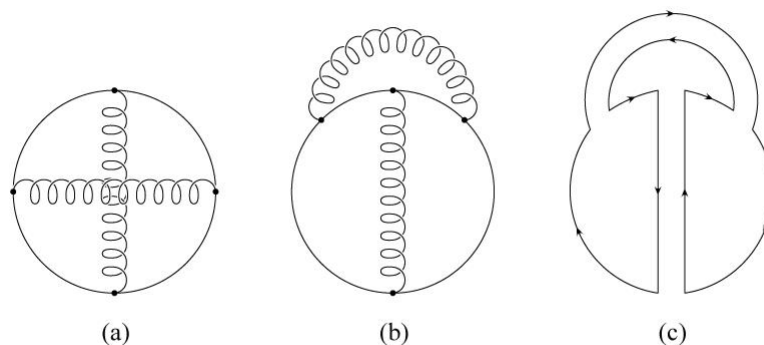


Figura 2.2: Ejemplo de un diagrama no planar. El diagrama (a) puede dibujarse como (b) pero sigue siendo no planar al realizar el conteo de E , V y B . (c) El diagrama en la versión doble línea. Figura extraída de [28].

El factor $\chi = V - E + F$ es la característica de Euler correspondiente al diagrama y depende de la topología del mismo. Desde el punto de vista topológico podemos expresar la contribución de cada diagrama en términos del *genus* g (género de la superficie bidimensional) que para superficies cerradas cuenta la cantidad de agujeros o manijas y se relaciona con la característica Euler mediante $\chi = 2 - 2g$.

Entonces todo diagrama de Feynman en la notación de doble línea se puede expandir perturbativamente de la siguiente forma

$$\sum_{g=0}^{\infty} N_c^{2-2g} \sum_{i=0}^{\infty} C_{g,i} \lambda^i = \sum_{g=0}^{\infty} N_c^{2-2g} f_g(\lambda), \quad (2.2.11)$$

donde f_g es un polinomio de λ . En el límite de N_c grande los diagramas que dominarán serán los que posean el menor *genus* g y corresponden a las superficies con topología esférica o equivalentemente a un plano. Todos estos diagramas planares contribuyen con una potencia N_c^2 mientras que los demás diagramas son suprimidos por potencias N_c^0 , N_c^{-2} , N_c^{-1} luego de tomar el límite. Por ejemplo el diagrama de la figura 2.2 es no planar y no contribuirá cuando tomemos el límite $N_c \rightarrow \infty$.

La forma de la expansión (2.2.11) es la misma que se encuentra al expandir perturbativamente las amplitudes de una teoría de cuerdas cerradas orientables, si identificamos el factor $1/N_c$ con la constante de acoplamiento de la cuerda, y λ como $\alpha' = 1/\sqrt{\lambda}$, donde $\alpha' \equiv l_s^2$, que involucra la longitud de la cuerda fundamental. Esta analogía es una fuerte motivación para pensar que las teorías cuánticas de campos y la teoría de cuerdas están relacionadas, y sugiere que esta relación se hace evidente en el límite de N_c grande. En esta Tesis se desarrolla esta expansión en potencias de $1/N_c$ en el caso no perturbativo con el fin de estudiar propiedades de hadrones obtenidos a partir de modelos holográficos duales. Asimismo, en el caso de plasmas de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM consideramos la expansión en $1/\lambda^{3/2}$ a partir de correcciones en $(\alpha')^3$ provenientes de la teoría de supercuerdas del tipo IIB, sobre supergravedad del tipo IIB.

Capítulo 3

El proceso de dispersión inelástica profunda (DIS)

La dispersión inelástica profunda (DIS, por sus siglas en inglés *Deep Inelastic Scattering*) es un proceso que nos permite estudiar la estructura interna de los hadrones a partir de la interacción con partículas leptónicas. En las décadas de 1960 y 1970, el proceso de DIS ha sido importante estableciendo las primeras evidencias sólidas de la existencia de los quarks como entidad física.

En este proceso interactúa un haz incidente de leptones de energía E mediante la interacción electromagnética¹ con un blanco hadrónico, dispersándose con energía E' . La energía y dirección del leptón dispersado se miden en un detector, pero el estado final hadrónico X no se mide experimentalmente. Por esta razón se lo suele considerar como un proceso inclusivo. El leptón interactúa emitiendo un fotón virtual muy energético que es absorbido por el blanco hadrónico para producir el estado final X . Como el fotón es virtual, éste no se encuentra en su capa de masa y por lo tanto su cuadrimomento q^μ no satisface $q^2 = 0$.

En este límite utilizando las simetrías de la interacción fuerte se puede concentrar toda la información hadrónica en un tensor que a su vez se puede expresar en términos de funciones escalares dependientes de parámetros cinemáticos denominadas funciones de estructura. Estas funciones según el modelo que describe la fuerza fuerte van a satisfacer ciertas identidades y poseer formas funcionales características. En esta Tesis se utilizarán métodos holográficos, basados desde primeros principios en la teoría de supercuerdas, para calcular las funciones de estructura.

3.1. Cinemática del DIS

En la figura 3.1 se observa un esquema del proceso DIS. Las variables cinemáticas utilizando la notación de [29] son:

- M es la masa del hadrón incidente.
- E es la energía del hadrón incidente.
- $k^\mu = (E, 0, 0, E)$ es el cuadrimomento del leptón incidente. En este proceso despreciamos su masa.

¹En esta Tesis solo consideramos DIS a partir de leptones cargados, con lo cual las partículas virtuales que interactúan con el hadrón son fotones virtuales.

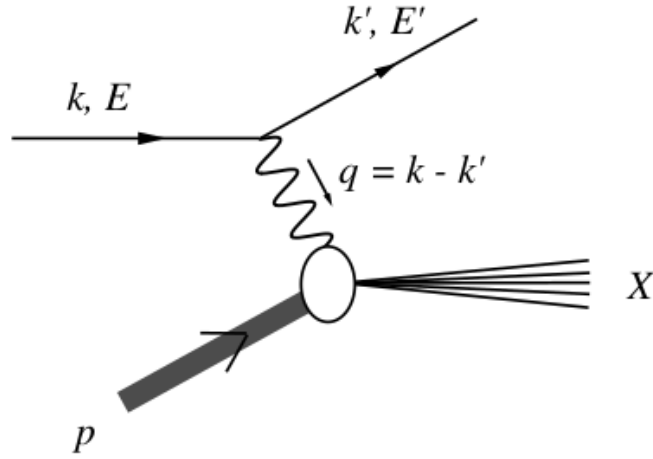


Figura 3.1: Diagrama esquemático del proceso DIS. El momento del fotón virtual es q y el estado hadrónico saliente es X . Figura correspondiente a la referencia [29].

- $k'^{\mu} = (E', E' \sin \theta \cos \phi, E' \sin \theta \sin \phi, E' \cos \theta)$ es el cuadrivector del leptón dispersado.
- $p^{\mu} = (M, 0, 0, 0)$ el momento del hadrón en el sistema de referencia de reposo del hadrón.
- E' es la energía del leptón dispersado.
- $q^{\mu} = k^{\mu} - k'^{\mu}$ el cuadrivector del fotón virtual transferido.
- $\nu = E - E'$ es la pérdida de energía del leptón.
- $Q^2 = -q^2 = 2EE'(1 - \cos \theta)$
- $x = \frac{-q^2}{2p \cdot q}$ el parámetro de Bjorken.
- $y = \frac{\nu}{E} = \frac{P \cdot q}{P \cdot k}$ es la pérdida de energía fraccional del leptón.
- $t = \frac{p^2}{q^2}$. En DIS este parámetro se considera mucho menor a uno.

En el proceso de DIS es importante la definición del parámetro de Bjorken x porque se tomará el límite de $q \rightarrow \infty$ manteniendo x fijo. Podemos determinar los valores físicos que puede tomar x a partir de la masa invariante M_X del sistema final X definida a continuación,

$$M_X^2 = (p + q)^2 = M^2 + 2p \cdot q + q^2. \quad (3.1.1)$$

Como el número bariónico se debe conservar la masa invariante debe ser al menos la masa del nucleón y por lo tanto,

$$M_X^2 \geq M^2 \quad \rightarrow \quad M^2 + 2p \cdot q + q^2 \geq M^2 \quad \rightarrow \quad x \leq 1. \quad (3.1.2)$$

También observando que $-q^2$ es positivo podemos inferir de sus definiciones que $x > 0$ e $y > 0$. Por lo tanto la región cinemática permitida que pueden tomar los parámetros están comprendidos en,

$$1 \geq x > 0 \quad 1 \geq y > 0. \quad (3.1.3)$$

El caso $x = 1$ corresponde a la dispersión elástica y se puede explicitar escribiendo el parámetro de Bjorken en términos de la masa invariante,

$$x = 1 - \frac{M_X^2 - M^2}{2p \cdot q}. \quad (3.1.4)$$

Si $x = 1$ entonces $M_x^2 = M^2$.

3.2. Sección eficaz a partir de los tensores leptónico y hadrónico

La sección eficaz diferencial se puede calcular a partir del módulo al cuadrado de la amplitud de transición y considerar los factores provenientes del espacio de fases. Se debe sumar sobre las polarizaciones del leptón final y sobre los estados intermedios recordando que es un proceso inclusivo y no se miden. La sección eficaz diferencial toma la forma

$$d\sigma = \sum_X \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} (2\pi)^4 \delta^4(k + p - k' - p_X) \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2E)(2M)(v_{rel} = 1)}, \quad (3.2.1)$$

donde la amplitud se puede escribir en términos de diagramas de Feynman perturbativos en la constante electromagnética obteniendo

$$i\mathcal{M} = (-ie)^2 \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \langle k' | j_l^\mu(0) | k, s_l \rangle \langle X | j_h^\nu(0) | p, h \rangle \quad (3.2.2)$$

donde s_l y h son las polarizaciones del leptón inicial y el hadrón final respectivamente y j_l^μ es la corriente leptónica y j_h^ν la corriente hadrónica. La constante de acoplamiento e no está incluida dentro de las corrientes sino explícitamente en la definición de la amplitud.

A continuación vamos a reescribir la sección eficaz en términos de dos tensores, el leptónico y el hadrónico.

Las corrientes son operadores hermíticos $j_\mu^\dagger = j_\mu$ y satisfacen

$$\langle \alpha | j^\mu | \beta \rangle^* = \langle \beta | j^\mu | \alpha \rangle. \quad (3.2.3)$$

Esta identidad permite desarrollar $d\sigma$

$$d\sigma = \sum_X \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k + p - k' - p_X)}{(2E)(2M)} \frac{e^4}{Q^4} \times \langle p, h | j_h^\mu | X \rangle \langle X | j_h^\nu | p, h \rangle \langle k, s_l | j_{l\mu} | k' \rangle \langle k' | j_{l\nu} | k, s_l \rangle \quad (3.2.4)$$

En esta expresión podemos definir el tensor leptónico $l_{\mu\nu}$, y el hadrónico $W_{\mu\nu}$ que contiene esencialmente la información de la interacción fuerte y la estructura interna hadrónica de modo que

$$d\sigma = \frac{e^4}{q^4} \int \frac{d^3k' 4\pi}{(2\pi)^3 2E'} \frac{l^{\mu\nu} W_{\mu\nu}(p, k - k')_{hh'}}{(2E)(2M)(v_{rel} = 1)},$$

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{e^4}{16\pi^2 Q^4} \frac{E'}{ME} l^{\mu\nu} W_{\mu\nu}(p, q)_{hh'}. \quad (3.2.5)$$

El tensor leptónico

El tensor leptónico se define de la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 l^{\mu\nu} &= \sum_{\text{espines finales}} \langle k' | j_l^\nu(0) | k, s_l \rangle \langle k, s_l | j_l^\mu(0) | k' \rangle \\
 &= \sum_{\text{espines finales}} \bar{u}(k') \gamma^\nu u(k, s_l) \bar{u}(k, s_l) \gamma^\mu u(k').
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

donde $u(k)$ es el espinor de Dirac. La sumatoria de sobre los espines finales se puede realizar utilizando la identidad

$$\sum_{\text{espines finales}} u(k') \bar{u}(k') = \not{k}' + m. \tag{3.2.7}$$

donde los espinores están normalizados con $2E$. Si la partícula tiene espín 1/2 se puede describir definiendo un vector de espín s_l en el sistema de referencia de la partícula

$$2\vec{s}_l = \bar{u}(k, s_l) \vec{\sigma} u(k, s_l) = \bar{u}(k, s_l) \vec{\gamma} \gamma_5 u(k, s_l). \tag{3.2.8}$$

El producto de espinores del estado inicial puede definirse en términos del operador proyección

$$u(k, s_l) \bar{u}(k, s_l) = (\not{k} + m) \frac{1 + \gamma_5 \not{s}_l / m}{2}. \tag{3.2.9}$$

Finalmente sustituyendo en la ecuación (3.2.6) obtenemos,

$$\begin{aligned}
 l^{\mu\nu} &= Tr \left((\not{k}' + m_l) \gamma^\nu (\not{k} + m_l) \frac{1 + \gamma_5 \not{s}_l / m}{2} \gamma^\mu \right) \\
 &= 2(k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu - g^{\mu\nu} (k \cdot k' - m_l^2) - i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_\alpha s_{l\beta}).
 \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Se puede observar que la parte independiente del espín corresponde a la componente simétrica y la parte dependiente del espín a la antisimétrica. En consecuencia, un haz de leptones no polarizado prueba la parte simétrica de $W_{\mu\nu}$.

El tensor hadrónico

La información relevante que podemos obtener mediante el proceso dispersión sobre la estructura hadrónica está contenida en el tensor hadrónico $W_{\mu\nu}$. A diferencia del tensor leptónico no se puede calcular mediante un desarrollo perturbativo debido al acoplamiento fuerte. El tensor $W_{\mu\nu}$ se define a partir de

$$W^{\mu\nu}(p, q)_{hh'} = \frac{1}{4\pi} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle p, h' | [j^\mu(x), j^\nu(0)] | p, h \rangle \tag{3.2.11}$$

donde h y h' son las polarizaciones hadrónicas iniciales y finales. Podemos insertar la identidad formada por una base completa de autoestados obteniendo

$$\begin{aligned}
 W_{\lambda\lambda'}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} \sum_X [(2\pi)^4 \delta^4(p + q - p_X) \langle p, h' | j^\mu(0) | X \rangle \langle X | j^\nu(0) | p, h \rangle \\
 &\quad - (2\pi)^4 \delta^4(p + p_X - p) \langle p, h' | j^\nu(0) | X \rangle \langle X | j^\mu(0) | p, h \rangle]
 \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

donde X son los estados finales y se utilizó la invarianza frente a traslaciones para obtener las deltas de conservación de tetraimpulsos. Notar que los estados finales permitidos son aquellos que poseen $p_X^0 \leq p_0$, ya que $M_X \leq M$.

3.3. Funciones de estructura para blancos hadrónicos escalares

El tensor hadrónico $W_{\mu\nu}$ lo podemos escribir en términos de funciones de estructura. Esta descomposición es independiente del acoplamiento y solo considera las simetrías de la interacción. A su vez escribiremos las funciones de estructura en función de los parámetros adimensionales x (parámetro de Bjorken) y t , posibilitando considerar el límite $Q \rightarrow \infty$ correctamente. Las simetrías y cómo ellas condicionan la forma del tensor hadrónico se detalla a continuación:

- La invarianza frente a transformaciones de paridad.
- La invarianza frente a la inversión temporal.
- La invarianza frente a traslaciones.
- $j^\mu(x)$ es una corriente conservada, $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$.

Aplicando estas restricciones al caso en donde el hadrón incidente tiene espín 0 y por lo tanto es un escalar (o pseudoescalar) podemos expresar el tensor hadrónico a partir de dos funciones de estructuras $F_1(x, q^2)$ y $F_2(x, q^2)$ de la siguiente forma

$$W_{\mu\nu} = F_1 \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{2xF_2}{q^2} \left(P_\mu + \frac{q_\mu}{2x} \right) \left(P_\nu + \frac{q_\nu}{2x} \right) \quad (3.3.1)$$

F_1 y F_2 son las funciones que nos interesaran calcular con métodos holográficos en esta Tesis.

Las funciones de estructura también se pueden calcular a partir del tensor asociado al proceso de dispersión de Compton. El tensor $T_{\mu\nu}$ del proceso de *Forward Compton scattering*, que vamos a indicar con las siglas FCS, es

$$(T_{\mu\nu})_{hh'} = i \int d^4x e^{iqx} \langle p, h' | T(j_\mu(x), j_\nu(0)) | p, h \rangle, \quad (3.3.2)$$

donde el operador \hat{T} corresponde al ordenamiento temporal. Las amplitudes de DIS pueden obtener de la parte imaginaria de la dispersión de Compton a partir del teorema óptico [30]. El tensor $T_{\mu\nu}$ posee las mismas simetrías que el $W_{\mu\nu}$ y por lo tanto puede expandirse de la misma forma en términos de funciones de estructura. Las relaciones entre las funciones de estructura de los dos tensores utilizando el teorema óptico son

$$2Im(\tilde{F}_j) = F_j, \quad (3.3.3)$$

donde \tilde{F}_j corresponde a la función de estructura j de $T_{\mu\nu}$ y F_j la de $W_{\mu\nu}$, con $j = 1, 2$.

Capítulo 4

La dualidad entre TYM y supergravedad y teorías de supercuerdas

La idea formulada por 't Hooft en la cual las teorías de Yang Mills en el límite de $N_c \rightarrow \infty$, con N_c el rango del grupo de gauge, poseen una expansión en *genus* de una forma similar a las amplitudes de dispersión de cuerdas se conoce hace tiempo (ver Sección 2.2) y llevó a pensar que existe una conexión entre ambas teorías en este límite. En el año 1997 Maldacena publicó el trabajo [22] en el que conjeturó la conexión explícita entre la teoría de campos $\mathcal{N} = 4$ SYM en su fase conforme con grupo de gauge $SU(N_c)$ y la teoría de supercuerdas de tipo IIB sobre un fondo $AdS_5 \times S^5$ en el límite de $N_c \gg 1$.

Esta dualidad en su forma más general se denomina la correspondencia AdS/CFT o dualidad gauge/gravedad debido a que relaciona en principio teorías cuánticas de campos conformes definidas en un espacio de Minkowski de 4 dimensiones con teorías de supercuerdas¹ en un espacio-tiempo curvo asintóticamente $AdS_5 \times S^5$.

La dualidad por ahora no se ha demostrado formalmente y mantiene el carácter de conjetura. Sin embargo en estas últimas dos décadas a superado muchas pruebas, verificaciones y extensiones. Esta conjetura es muy importante porque corresponde a una dualidad de acoplamiento fuerte/débil en la cual la teoría conforme de campos débilmente acoplada es, en principio, dual a una teoría de cuerdas fuertemente acoplada; y asimismo la teoría conforme de campos fuertemente acoplada es dual a una teoría de cuerdas débilmente acoplada. Esto permite analizar teorías conformes de campos fuera del régimen de validez del desarrollo perturbativo. En la Tesis utilizaremos la dualidad desde esta perspectiva, calculando desde la teoría de cuerdas débilmente acoplada observables de la TCC fuertemente acoplada.

En principio, la dualidad se formuló para la teoría conforme supersimétrica $\mathcal{N} = 4$ SYM con grupo de *gauge* $SU(N_c)$ en límite planar $N_c \rightarrow \infty$ a temperatura 0 y luego se fue extendiendo a sistemas más generales. Enunciamos algunos ejemplos: temperatura finita [31], con menor números de supersimetrías lo cual incluye teorías de SYM con $\mathcal{N} = 1, 2$ y 3 [32, 33], agregando materia en la representación fundamental [34, 35, 36] y el modelo de D4D8anti-D8-branas de Sakai y Sugimoto [37], teorías no conformes [38, 32, 39, 40], en distintos números de dimensiones espaciales [41], etc.

Por último vale la pena mencionar que no existe aún un método para obtener el dual holográfico de cualquier teoría de gauge como por ejemplo QCD aún en el límite de $N_c \rightarrow \infty$. Por

¹Las teorías de supercuerdas en el límite de bajas energías se describen efectivamente por teorías de supergravedad.

esta razón hay dos planteos generales para abordar estas teorías sin dual holográfico estrictamente conocido. El primero consiste en utilizar otra teoría con dual holográfico conocido² en ciertas regiones paramétricas donde son similares las teorías de campos en espacio plano. La otra opción es estudiar modelos holográficos efectivos definidos en 5 dimensiones tratando de reproducir las características de la teoría cuántica de campos.³ A continuación presentaremos la conjetura en su formulación original. En la Sección 4.2 detallaremos el Ansatz de Witten que permitirá calcular valores de espectación de operadores definidos sobre la CFT y realizar una expansión en $1/N_c$. En la Sección 4.3 extenderemos la conjetura a teorías con temperatura finita y correcciones en la constante de acoplamiento. Por último, se adicionará materia en la representación fundamental del grupo de gauge.

4.1. La correspondencia AdS/CFT

La correspondencia AdS/CFT establece una dualidad entre teorías cuánticas de campos y teorías de supercuerdas. El primer ejemplo, que motivó la dualidad y detalló cómo en ambas teorías se mapeaban las simetrías se obtuvo estudiando el sistema formado por N_c D3-branas paralelas coincidentes en un espacio plano de 9+1 dimensiones.

Las N_c D3-branas paralelas se extienden a lo largo de 3+1 dimensiones. En el marco de la teoría de cuerdas existen dos clases de cuerdas: abiertas y cerradas. Las cuerdas cerradas corresponden a excitaciones de espacio y las cuerdas abiertas tienen extremos sobre las D3-branas. Si analizamos el sistema a bajas energías ($E < 1/l_s$), los modos relevantes que pueden excitarse son los estados de masa nula.

Los estados de masa nula de cuerdas cerradas se describen en el límite de bajas energías de la acción de supergravedad tipo del IIB. Los estados de cuerdas abiertas generan el multiplete de gauge de $\mathcal{N} = 4$ en 3 + 1 dimensiones y en su límite de bajas energías se describe con el lagrangiano de la teoría de super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ con grupo de gauge $SU(N_c)$ [44].

La acción asociada al sistema es

$$S = S_{fondo} + S_{branas} + S_{int}. \quad (4.1.1)$$

La acción de la brana S_{branas} corresponderá a la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM con correcciones en derivadas superiores y S_{int} corresponde a la interacción entre los modos de fondo y los de las D3-branas. Aplicando el límite de Maldacena que corresponde a tomar $\alpha' \rightarrow 0$ manteniendo el acoplamiento de las cuerdas g_s y demás parámetros adimensionales fijos, los modos masivos de las cuerdas cerradas se desacoplan dejando la supergravedad y al mismo tiempo $S_{int} \rightarrow 0$ dado que los términos de interacción son proporcionales a $g_s \alpha'^2$. Por lo tanto la supergravedad queda libre y desacoplada del sistema a bajas energías de cuerdas abiertas.

Por otro lado podemos estudiar el sistema desde otra descripción alterativa dada por p-branas en supergravedad. Si analizamos el límite $\frac{R^4}{l_s^4} = 4\pi g_s N_c \gg 1$, debemos considerar la deformación del espacio tiempo por las branas que generan el siguiente tensor métrico [45],

$$ds^2 = \left(1 + \frac{L^4}{y^4}\right)^{-1/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \left(1 + \frac{L^4}{y^4}\right)^{1/2} (dy^2 + y^2 d\Omega_5^2) \quad (4.1.2)$$

²Este método se denomina *top-down*, en donde se parte de un dual conocido en teoría de cuerdas definida en un espacio de 10 dimensiones.

³Este método se denomina *bottom-up*. En el caso de modelos efectivos de 5 dimensiones se conocen como AdS/QCD, [42, 43].

si estudiamos el límite $y \gg R$ se recupera el espacio plano de 10 dimensiones. En cambio si $y < R$ la geometría se conoce como “garganta”, y en este límite de horizonte cercano se obtiene

$$ds^2 = \frac{y^2}{R^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + R^2 \frac{dy^2}{y^2} + R^2 d\Omega_5^2. \quad (4.1.3)$$

Esta métrica corresponde a un espacio $AdS_5 \times S^5$. Si ahora se define $z = R^2/y$ se obtiene la siguiente métrica

$$ds^2 = L^2 \left(\frac{1}{z^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{dz^2}{z^2} + d\Omega_5^2 \right) \quad (4.1.4)$$

Esta métrica posee un borde conforme en $z \rightarrow 0$.

La acción efectiva en este caso está dada por,

$$S = S_{garganta} + S_{plano} + S_{int} \quad (4.1.5)$$

en donde S_{plano} corresponde a los modos no masivos de cuerdas cerradas en el límite $y \rightarrow \infty$. La $S_{garganta}$ corresponde a los modos de cuerdas en la región correspondiente a la geometría $AdS_5 \times S^5$. Se observa que debido al corrimiento al rojo gravitatorio los modos masivos de cuerdas en la región entre el espacio de Mikowski en 10 dimensiones y $AdS_5 \times S^5$ son de baja energía con respecto a un observador en el infinito, y deben ser tenidos en cuenta al tomar el límite de bajas energías. S_{int} proviene de la interacción entre los modos sobre el espacio plano y los modos sobre la garganta. En el límite de bajas energías $S_{int} \rightarrow 0$ y el sistema queda desacoplado nuevamente. En la referencia [46] se detalla con precisión cómo tomar el límite para que se desacoplen los términos.

Estas descripciones motivan a postular la equivalencia entre los dos sistemas :

$$\{\text{La teoría } \mathcal{N} = 4 \text{ SYM}\} \equiv \{\text{La teoría de supergravedad IIB en } AdS_5 \times S^5\} \quad (4.1.6)$$

dados por

- La teoría de supercuerdas del tipo IIB sobre el espacio $AdS_5 \times S^5$ donde tanto el espacio AdS como la S^5 poseen el mismo radio R . El flujo de la 5-forma a través de la S^5 toma el valor entero $N_c = \int_{S^5} F_5$ y la constante de acoplamiento de la cuerda es g_s .
- La teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM definida en 4 dimensiones, con un grupo de gauge $SU(N_c)$ y el acoplamiento g_{YM} en su fase superconforme.

Los parámetros de ambas teorías se relacionan mediante

$$g_s = g_{YM}^2 \quad R^4 = 4\pi g_s N_c (\alpha')^2 \quad (4.1.7)$$

y el valor de expectación del axión es igual al ángulo del instantón en $\mathcal{N} = 4$ SYM, $\langle C \rangle = \theta_I$. Se pueden identificar las simetrías globales en ambas teorías, que permitirá identificar el mapeo entre operadores y estados. La simetrías continuas de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM en su fase conforme corresponde al grupo superconforme $SU(2, 2|4)$. Este grupo contiene al subgrupo de simetrías bosónicas $SU(2, 2) \times SU(4)_4 \sim SO(2, 4) \times SO(6)$. Las simetrías bosónicas son fácilmente reconocidas del lado de gravedad como isometrías de espacio $AdS_5 \times S^5$. La discusión completa de todos los generadores se encuentra en [26, 46]. En principio se puede proponer que la conjetura es válida para todo N_c y g_s , pero se debe tener en cuenta que no es una demostración formal matemática y los argumentos planteados sobre el sistema de D3-branas se formularon en un régimen perturbativo de la teoría de cuerdas.

Teoría de campos		Teoría de cuerdas
SYM conforme con $\mathcal{N} = 4$ cualquier N_c y g_{YM} $g_{YM}^2 = g_s$	\Leftrightarrow	Teoría cuántica de cuerdas del tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$ $R^4 = 4\pi g_s N_c \alpha'^2$
Límite de 't Hooft para $\mathcal{N} = 4$ SYM λ fijo, $N_c \rightarrow \infty$ Expansión en $1/N_c$	\Leftrightarrow	Teoría de cuerdas tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$ Expansión en g_s loops
Límite de λ grande en $\mathcal{N} = 4$ SYM (además de $N_c \rightarrow \infty$) Expansión en $1/\sqrt{\lambda}$	\Leftrightarrow	Supergravedad tipo IIB clásica en $AdS_5 \times S^5$ Expansión en α'

Cuadro 4.1: Tres formas de la correspondencia AdS/CFT.

Límite de 't Hooft y el límite de acoplamiento fuerte

Un límite interesante para aplicar la dualidad es el límite de 't Hooft en donde tomamos $N_c \rightarrow \infty$ manteniendo $\lambda = g_{YM}^2 N_c = g_s N_c$ fijo. Si despejamos $g_s = \frac{\lambda}{N_c}$, la teoría de cuerdas se vuelve débilmente acoplada ya que $g_s \rightarrow 0$. Esto nos permite formular una conjetura más débil que asocia una correspondencia entre una teoría de cuerdas y una teoría de campos en el límite de 't Hooft.

Luego quedaría estudiar el caso donde λ es libre. Si consideramos $\lambda \ll 1$, la teoría de campos se encuentra en un régimen donde se puede aplicar la teoría de perturbaciones y del lado de la teoría de cuerdas, debemos considerar todos los modos masivos. El otro límite $\lambda \gg 1$ es muy interesante porque la teoría de campos está fuertemente acoplada y del lado de la teoría de cuerdas se pueden considerar los modos no masivos lo cual lleva a la teoría a supergravedad del tipo IIB.

Las tres formas de la conjetura se detallan esquemáticamente en el cuadro 4.1.

4.2. Correspondencia campo/operador y expansión en diagramas de Witten en $1/N_c$

Se ha planteado la correspondencia de AdS/CFT junto con el diccionario que permite relacionar los parámetros relevantes en cada teoría. También es necesario poder realizar un mapeo entre el espectro de ambas teorías y un Ansatz para calcular los valores de espectación correspondiente a los observables.

En la teoría de cuerdas el valor de g_s está relacionado con el valor de espectación del dilatón y éste a su vez se determina a partir de la condición de contorno en el infinito. Esto sugiere que deformar la teoría de gauge cambiando el valor de la constante de acoplamiento corresponde a modificar el valor de un campo de fondo en el borde del AdS . De forma general se podría deformar la teoría de gauge agregando a la acción el siguiente término

$$S \rightarrow S + \int d^4x \phi(x) \mathcal{O}(x) , \tag{4.2.1}$$

donde $\mathcal{O}(x)$ es un operador local invariante de gauge y $\phi(x)$ es la fuente. La observación sobre g_s sugiere que cada fuente asociada a un operador local \mathcal{O} debe corresponder a un campo dual de supergravedad $\Phi(x, z)$ tal que el valor que toma en el borde del AdS está identificado con la fuente mediante la relación:

$$\phi(x) = \Phi|_{\partial AdS}(x) = \lim_{z \rightarrow 0} \Phi(x, z). \quad (4.2.2)$$

Esta identificación permite *mapear* operadores de la teoría de gauge con campos sobre el AdS, tomando en cuenta que deben poseer los mismos números cuánticos bajo las simetrías globales de la teoría.

Otro caso importante que vamos a utilizar es el de la fuente A_μ asociada a una corriente conservada de simetría R , J_μ , que se acopla del siguiente modo

$$\int d^4x A_\mu(x) J^\mu(x). \quad (4.2.3)$$

En este caso la fuente A_μ va a corresponder es la condición en el borde de un campo de gauge dinámico $A_\mu(x, z)$ definido sobre el AdS.

Del lado de la teoría de supercuerdas del tipo IIB en el espacio de 10 dimensiones $AdS_5 \times S^5$ cuando obtenemos las soluciones de las ecuaciones de movimiento de los campos de fondo, vamos a encontrar modos normalizables y modos no normalizables. Estos modos se relacionan con una prescripción que ejemplificaremos a continuación con el estudio de un campo escalar. Primero se puede descomponer el campo escalar en modos de Kaluza-Klein sobre la esfera S^5 , obteniendo campos efectivos ϕ_Δ definidos sobre el AdS_5 con números cuánticos Δ correspondientes a las masas de Kaluza-Klein. Δ es dual a la dimensión conforme del operador en la teoría de gauge. Asintóticamente los campos son libres y satisfacen la ecuación de Klein-Gordon $(\square - m^2)\Phi = 0$ con la masa $m_\Delta^2 = \Delta - 4$. Hay dos soluciones independientes caracterizadas por el siguiente desarrollo asintótico

$$\Phi_\Delta(x, z) = \begin{cases} z^\Delta & \text{Modos normalizables} \\ z^{4-\Delta} & \text{Modos no normalizables} \end{cases} \quad (4.2.4)$$

Los primeros modos de (4.2.4) son normalizables con respecto al producto interno, que en el caso de un campo escalar se define como

$$(\Phi_1, \Phi_2) = -i \int_{\Sigma_t} dz d^4x \sqrt{-g} g^{tt} (\Phi_1^* \partial_t \Phi_2 - \Phi_2 \partial_t \Phi_1^*) \quad (4.2.5)$$

donde Σ_t es una capa a tiempo constante. Luego en [47] se argumentó que estos modos determinan el valor de expectación de vacío de operadores con la dimensión conforme y los números cuánticos correspondientes. Por lo tanto los modos normalizables son elementos del espacio de Hilbert y deberían ser identificados con estados en la teoría del borde. Por otro lado, los modos no normalizables no corresponden a excitaciones del *bulk* porque no se pueden normalizar apropiadamente. Estos están asociados al acoplamiento de fuentes externas con la supergravedad y por lo tanto a las fuentes clásicas mencionadas anteriormente.

Ansatz de Witten

En vista a lo discutido en cuanto al mapeo campo/operador, se ha postulado en [48, 49] el siguiente Ansatz para calcular las funciones de correlación de la TCC

$$\langle e^{\int d^4x \phi_0(\vec{x}) \mathcal{O}(\vec{x})} \rangle_{CFT} = \mathcal{Z}_{cuerdas} [\Phi]_{[\partial AdS \equiv \phi_0(\vec{x})]}, \quad (4.2.6)$$

donde el término izquierdo corresponde a la funcional generatriz de funciones de correlación de la teoría cuántica de campos y el término derecho corresponde a la función de partición de la teoría de cuerdas con el valor ϕ_0 en el borde del AdS de los campos Φ . Las funciones de correlación se obtienen tomando derivadas funcionales con respecto a ϕ_0 . En el límite $\lambda \gg 1$, que corresponde a la aproximación de supergravedad

$$\mathcal{Z}_{\text{cuerdas}}[\Phi]_{[\partial \text{AdS} \equiv \phi_0(\vec{x})]} \approx e^{S_{\text{supergr}}}. \quad (4.2.7)$$

En este límite podemos calcular desde el lado derecho utilizando un método perturbativo de diagramas de Feynman en supergravedad denominados diagramas de Witten. Esto permite realizar una expansión en $1/N_c$ debido a la constante delante en la acción de supergravedad. Veamos esquemáticamente la justificación para el dilatón en supergravedad del tipo IIB. La acción efectiva en 5 dimensiones luego de realizar la reducción de Kaluza-Klein es

$$S = \frac{1}{2k_5^2} \int dx \sqrt{g} \left(-R + \Lambda + \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{1}{2} e^{2\Phi} \partial_\mu C \partial^\mu C \right). \quad (4.2.8)$$

En esta acción C es el campo axión, g es la métrica y $k_5 = 4\pi/N_c^2$ es la constante de Newton. En el límite que estamos considerando N_c es muy grande y en consecuencia k_5 muy chico, por lo tanto estamos realizando una expansión semiclásica. El detalle de la dependencia en N_c de los vértices de interacción para los casos de interés en esta Tesis se desarrollará en los Capítulos 7 y 8. Los diagramas de Witten son similares a los de Feynman pero con las siguiente prescripción:

- Cada fuente externa se ubica en el borde del círculo en el punto \vec{x}_i ($i = 1, \dots, n$) para una función de n -puntos.
- La estructura de los vértices de interacción en el *bulk* se obtiene de los vértices de la acción 4.2.8 como en los diagramas de Feynman.
- Desde las fuentes externas parten propagadores *bulk to boundary* de interacción a puntos internos (en el *bulk*).
- Dos puntos interiores pueden ser conectados a partir de propagadores *bulk to bulk* siguiendo la reglas de Feynman.

En la figura 4.1 se detalla algunos diagramas de Witten a orden árbol para una función de correlación de n -puntos de la TCC dual.

Si queremos extender este Ansatz a transición de estados, implementamos el procedimiento de [50]. La prescripción deja los propagadores *bulk to bulk* de la forma estándar y reemplaza los propagadores *bulk to boundary* (modos no-normalizados) asociados a fuentes en el borde por propagadores *bulk to bulk* (modos normalizados) que corresponderá a los estados de transición.

Una función de correlación entre estados de vacío, es un caso especial de una amplitud de transición donde todos los modos normalizables están apagados

4.3. Extensión considerando temperatura finita

La extensión de la dualidad AdS/CFT a teorías con temperatura finita se obtiene introduciendo branas negras (*black p-branes*) con soluciones de la métrica del tipo agujero negro. Los requisitos que debería satisfacer las soluciones de supergravedad para corresponder a una teoría dual de $\mathcal{N} = 4$ SYM a temperatura finita son

- Sea asintóticamente AdS₅.

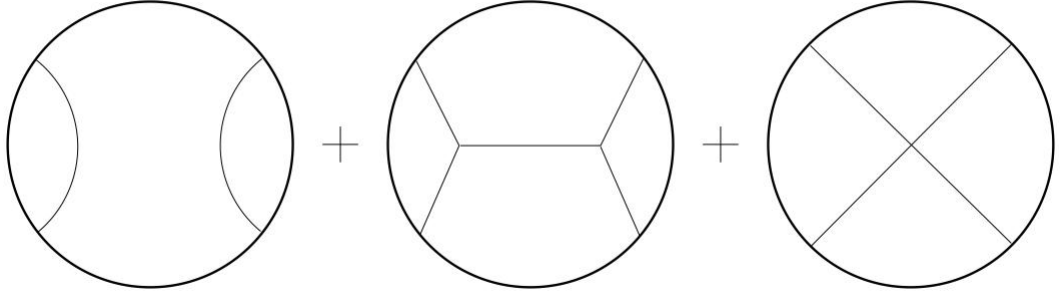


Figura 4.1: Diagramas de Witten a orden árbol.

- Que sea invariante frente a traslaciones de las coordenadas del borde e invariante frente a rotaciones de las coordenadas espaciales del borde.
- Que se le pueda asignar una temperatura que satisfaga las leyes de la termodinámica.

Todas estas condiciones las satisface la solución formada por N_c 3-branas negras coincidentes con una métrica,

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2}(-\tilde{f}dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{R^2}{r^2\tilde{f}}dr^2 + R^2d\Omega_5^2, \quad \tilde{f}(r) = 1 - \frac{r_0^4}{r^4} \quad (4.3.1)$$

y en términos de la coordenada $z = \frac{R^2}{r}$ toma la forma

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(-f dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{R^2}{z^2 f} dz^2 + R^2 d\Omega_5^2, \quad f(z) = 1 - \frac{z^4}{z_0^4}. \quad (4.3.2)$$

Estas métricas poseen un horizonte en $r = r_0$ y $z = z_0$, respectivamente, y el borde del AdS_5 se encuentra en $r \rightarrow \infty$ y $z = 0$. La temperatura asociada se calcula con el método estándar desarrollado por Hawking, demandando que la continuación Euclídea de la métrica de 5 dimensiones obtenida reemplazando $t \rightarrow -it_E$,

$$dS_E^2 = \frac{R^2}{z^2}(f dt_E^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{R^2}{z^2 f} dz^2, \quad (4.3.3)$$

sea regular en $z = z_0$. Expandiendo cerca de $z = z_0$, obtenemos,

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2 + \frac{R^2}{z_0^2} d\vec{x}^2 \quad (4.3.4)$$

donde se ha introducido las coordenadas

$$\rho = 2\sqrt{\frac{(z - z_0)R^2}{-4z_0}} \quad \theta = \frac{t_E}{2} \frac{4}{z_0}. \quad (4.3.5)$$

Los primeros dos términos de la métrica (4.3.4) describen un plano en coordenadas polares y para evitar la singularidad del cono se debe imponer que θ tenga un período 2π . Por lo tanto el período correspondiente del tiempo Euclídeo es,

$$\beta = \frac{1}{T} = \pi z_0. \quad (4.3.6)$$

La temperatura T la identificamos con la temperatura de la teoría de campos dual definida sobre el borde. La métrica Euclídea solo existe para $z \in (z, z_0)$, finalizando suavemente en z_0 .

Capítulo 5

Modelo de D3D7-branas y mesones escalares

El primer modelo holográfico que se desarrolló corresponde a la teoría de supergravedad de tipo IIB sobre el fondo $AdS_5 \times S^5$ y corresponde a la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM en el régimen de acoplamiento fuerte y rango del grupo de gauge N_c grande. Sin embargo, los campos de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM están definidos en la representación adjunta del grupo de gauge diferenciándose de QCD, que desde el punto de vista fenomenológico posee quarks que transforman en la representación fundamental del grupo de gauge. Por lo tanto nos interesaría obtener modelos holográficos que incluyan grados de libertad en la representación fundamental.

En el trabajo [34] se argumentó que para introducir materia en la representación fundamental en los modelos holográficos se introducen Dp-branas de prueba con sus respectivos espectros de cuerdas abiertas. En la teoría de cuerdas del tipo IIB, las branas estables permitidas son las de número de dimensiones espaciales impares, razón por la cuál se consideran usualmente D5-branas o D7-branas. Para simplificar y hacer tratable las soluciones se toma el límite en el que el número de especies o *flavors* es mucho más chico que el número de color $N_f \ll N_c$. Desde el punto de vista de supergravedad esto corresponde a tomar branas de prueba despreciando la *backreaction* y por lo tanto ellas no deforman el espacio.

5.1. El sistema D3-D7

En esta sección describiremos el sistema formado por una D7-brana en el fondo $AdS_5 \times S^5$ formado por el conjunto de N_c D3-branas coincidentes. Las coordenadas del borde x_i se encuentran en las direcciones $i = 0, 1, 2, 3$ y las direcciones transversas a las D3-brana, contienen a la coordenada radial del AdS_5 , r definida a partir de

$$r^2 = (x^4)^2 + (x^5)^2 + \dots + (x^9)^2, \quad (5.1.1)$$

y a las coordenadas asociadas a los ángulos de la S^5 [35].

Agregar una D7-brana rompe la supersimetría desde $\mathcal{N} = 4$ a $\mathcal{N} = 2$ SYM. Los modos más livianos correspondientes a cuerdas abiertas con un extremo en la D3-brana y el otro en la D7-brana generan el hipermultiplete $\mathcal{N} = 2$ de la teoría de SYM en la representación fundamental. La D7-branas está extendida a lo largo de 8 coordenadas y posee dos direcciones transversales. Las 4 coordenadas de las D3-branas asociadas al borde y a la teoría cuántica de campos corresponden a direcciones paralelas a la D7-branas. De las 6 coordenadas extras transversales a las D3-branas coincidentes, la D7-branas se extiende a lo largo de 4 direcciones x^4, \dots, x^7 preservando la simetría de rotación $SO(4)$, por lo tanto es conveniente introducir una coordenada

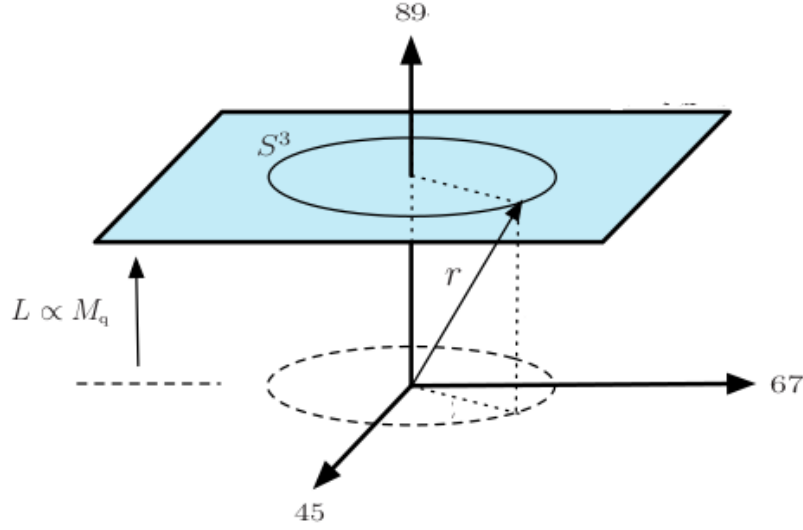


Figura 5.1: Esquema de las coordenadas paralelas y ortogonales a la D7-brana. Figura extraída de [51]. El plano horizontal representa esquemáticamente a la D7-brana. Notar que cada eje indica un par de coordenadas.

radial ρ definidas como

$$\rho^2 = x_4^2 + \cdots + x_7^2 \quad (5.1.2)$$

y tres coordenadas esféricas denotadas por Ω_3 que parametrizan la S^3 .

La distribución de las branas está representada por el siguiente arreglo,

$$\begin{array}{l} D3 : 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ - \ - \ - \ - \ - \ - \\ D7 : 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ - \ - \end{array}$$

Con respecto a las coordenadas transversales x_8 y x_9 tenemos dos posibilidades. La primera que se superponga con D3-brana en las coordenadas espaciales. Esto generaría que la simetría original $SO(6)$ se rompa a $SO(4) \times SO(2) \sim SU(2)_R \times SU(2)_L \times U(1)_R$, donde el $SO(4)$ y el $SO(2)$ corresponden a rotaciones sobre las direcciones 4, 5, 6, 7 y 8, 9, respectivamente. En este caso el supermultiplete es no masivo y la simetría R de la teoría está asociada al $SU(2)_R \times U(1)_R$ [35].

La segunda opción corresponde a separar la D7-brana de las D3-branas en la dirección es 8, 9. El hypermultiplete adquiere masa y la simetría R se rompe a $SU(2)_R$. Si ubicamos la D7-brana a una distancia L en la dirección 8, 9 del conjunto de D3-branas, la coordenada r original del espacio AdS_5 y ρ definido en (5.1.2) mantienen la relación $r^2 = L^2 + \rho^2$. Se indica esquemáticamente en la figura 5.1 las coordenadas en donde se extiende la D7-brana. La métrica inducida es,

$$ds^2 = \frac{\rho^2 + L^2}{R^2} ds^2(E^{(1,3)}) + \frac{R^2}{\rho^2 + L^2} d\rho^2 + \frac{R^2 \rho^2}{\rho^2 + L^2} d\Omega_3^2 \quad (5.1.3)$$

donde Ω_3 son las coordenadas de la S^3 . Se observa que si $L = 0$ la métrica es $AdS_5 \times S^3$, los quarks son de masa nula y la teoría es clásicamente conforme. En el límite de prueba $\frac{N_f}{N_c} \ll 1$

la función β obtenida desde la teoría cuántica de campos es proporcional a $\frac{N_f}{N_c}$, se anula. Si $L \neq 0$ la métrica se vuelve asintóticamente $AdS_5 \times S^3$ (en el límite $\rho \gg L$) debido a que los quarks adquieren una masa $m_q \sim L$ y la simetría conforme se rompe, restaurándose para energías $E \gg m_q$.

Los mesones corresponden a excitaciones de cuerdas abiertas representados por campos escalares y vectoriales con momentos angulares asociados a los ángulos de la S^3 . El espectro de mesones podemos obtenerlo a partir de la acción de bajas energías de la D7-brana denominada acción de Dirac-Born-Infeld, dada por

$$S_{DBI} = -\mu_7 \int d^8 \zeta \sqrt{-\det(P[G_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab}])} + \frac{(2\pi\alpha')^2}{2} \mu_7 \int P[C^{(4)}] \wedge F \wedge F, \quad (5.1.4)$$

donde la métrica de fondo G_{ab} es la asociada al espacio $AdS_5 \times S^5$ y el segundo término es el de Wess-Zunino que contiene la contribución del potencial de Ramond-Ramond dado por

$$C^{(4)} = \frac{r^4}{R^4} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (5.1.5)$$

La tensión de la D7-brana viene dada por $\mu_7 = [(2\pi)^7 g_s \alpha'^4]^{-1}$ y P corresponde al *pullback* de los campos sobre la hoja de mundo de la brana. En este trabajo nos interesa estudiar la dispersión inelástica profunda de mesones escalares que van a interactuar en los procesos de interés con otros campos bosónicos. Por eso en esta sección nos enfocaremos en las ecuaciones de movimiento y espectro de los campos bosónicos de las D7-branas.

Los modos más simples corresponden a excitaciones transversales a la D7-brana en las direcciones x^8 y x^9 . Elegimos sin pérdida de generalidad que la D7-brana se encuentra extendida a una distancia L en la dirección x^9 y parametrizamos las fluctuaciones escalares con los campos ξ y ϕ alrededor de la métrica fiducial de modo que

$$x^8 = 0 + 2\pi\alpha'\xi \quad x^9 = L + 2\pi\alpha'\phi. \quad (5.1.6)$$

Expandiendo la acción a orden cuadrático en las perturbaciones (se detalla la expansión en el Capítulo 8) obtenemos la siguiente densidad Lagrangiana,

$$\mathcal{L} \approx -\mu_7 \sqrt{-\det(g)} \left(1 + 2 (R\pi\alpha')^2 \frac{g^{cd}}{r^2} (\partial_c \xi \partial_d \xi + \partial_c \phi \partial_d \phi) \right). \quad (5.1.7)$$

Vamos a utilizar las letras a, b, \dots para las coordenadas que parametrizan las D7-branas, i, j, k para los ángulos de las S^3 y μ, ν las dimensiones del borde. Las ecuaciones de movimiento de los dos campos escalares son idénticas y en términos de las coordenada ρ obtenemos

$$\partial_a \left(\frac{\rho^3 \sqrt{\tilde{g}}}{\rho^2 + L^2} g^{ab} \partial_b \Phi \right) = 0, \quad (5.1.8)$$

donde el campo Φ representa cualquiera de las dos fluctuaciones escalares y la métrica \tilde{g} corresponde a la de la S^3 . Reemplazando los términos en la ecuación de movimiento obtenemos

$$\frac{R^4}{(\rho^2 + L^2)^2} \partial^\mu \partial_\mu \Phi + \frac{1}{\rho^3} \partial_\rho (\rho^3 \partial_\rho \Phi) + \frac{1}{\rho^2} \nabla^i \nabla_i \Phi = 0, \quad (5.1.9)$$

donde ∇_i es la derivada covariante definida sobre la S^3 . Proponiendo la solución

$$\Phi = \phi(\rho) e^{ik \cdot x} \mathcal{Y}^l(S^3) \quad (5.1.10)$$

en términos de los armónicos esféricos sobre la S^3 que son autoestados del Laplaciano, como se detalla en el apéndice, se obtiene la siguiente ecuación

$$\partial_u^2 \phi + \frac{3}{u} \partial_u \phi + \left(\frac{\tilde{M}^2}{(1+u^2)^2} - \frac{l(l+2)}{u^2} \right) \phi = 0. \quad (5.1.11)$$

En esta ecuación $u = \rho/L$, $\tilde{M}^2 = -k^2 R^4/L^2$ y l es un número entero asociado al autovalor de \mathcal{Y}^l . La solución que es regular se expresa en términos de funciones hipergeométricas

$$\phi(\rho) = \frac{\rho^l}{(\rho^2 + L^2)^{n+l+1}} F(-(n+l+1, -n; l+2; -\rho^2/L^2)), \quad (5.1.12)$$

con n un número entero y $\tilde{M}^2 = 4(n+l+1)(n+l+2)$. Expresando en función de la masa del mesón obtenemos el siguiente espectro discreto de masas

$$M_s(n, l) = \frac{2L}{R^2} \sqrt{(n+l+1)(n+l+2)}. \quad (5.1.13)$$

De forma análoga se puede calcular el espectro de los modos vectoriales F_{ab} de la acción (5.1.4), obteniendo la ecuación de movimiento

$$\partial_a(\sqrt{-g}F^{ab}) - \frac{4\rho(\rho^2 + L^2)}{R^4} \varepsilon^{bjk} \partial_j A_k = 0, \quad (5.1.14)$$

donde ε^{ijk} es la densidad tensorial. El segundo término proviene de la contribución de la parte de Wess-Zumino y solo contribuye si el índice b corresponde a una coordenada sobre la S^3 . Podemos separar las soluciones según la descomposición en armónicos esféricos vectoriales detallados en el apéndice. Se puede descomponer en los 3 modos [35]

$$\text{Modo I} \quad : \quad A_\mu = 0, \quad A_\rho = 0, \quad A_i = \phi_I^\pm(\rho) e^{ik \cdot x} \mathcal{Y}_i^{l, \pm 1}(\Omega), \quad (5.1.15)$$

$$\text{Modo II} \quad : \quad A_\mu = \zeta_\mu \phi_{II}(\rho) e^{ik \cdot x} \mathcal{Y}^l(\Omega), \quad k \cdot \zeta = 0, \quad A_\rho = 0, \quad A_i = 0, \quad (5.1.16)$$

$$\text{Modo III} \quad : \quad A_\mu = 0, \quad A_\rho = \phi_{III}(\rho) e^{ik \cdot x} \mathcal{Y}^l(\Omega), \quad A_i = \tilde{\phi}_{III}(\rho) e^{ik \cdot x} \nabla_i \mathcal{Y}^l(\Omega). \quad (5.1.17)$$

Notar que el modo I contiene 2 posibilidades (\pm) según como transforma el armónico esférico frente a transformaciones de paridad.

El espectro de masas de estas soluciones es:

- Modo I(+): $M_{I,+}^2 = \frac{4L^2}{R^4} (n+l+2)(n+l+3)$ con $n \geq 0$ y $l \geq 1$.
- Modo I(-): $M_{I,-}^2 = \frac{4L^2}{R^4} (n+l)(n+l+1)$ con $n \geq 0$ y $l \geq 1$.
- Modo II: $M_{II}^2 = \frac{4L^2}{R^4} (n+l+1)(n+l+2)$ con $n \geq 0$ y $l \geq 0$.
- Modo III: $M_{III}^2 = \frac{4L^2}{R^4} (n+l+1)(n+l+2)$ con $n \geq 0$ y $l \geq 1$.

Capítulo 6

Plasma de quarks y gluones generado en colisiones de iones pesados

La interacción fuerte junto con las interacciones electrodébil constituye las interacciones fundamentales del Modelo Estándar. La teoría cuántica de campo que describe las interacciones nucleares fuertes es la Cromodinámica Cuántica cuyos grados de libertad fundamentales son los gluones y quarks que poseen una carga denominada color. Una de las propiedades más importantes que presenta la teoría a bajas energías es la presencia de quarks y gluones formando objetos denominados hadrones que no poseen carga de color neta. La neutralización de la carga de color se denomina confinamiento y aún este fenómeno no se entiende completamente desde primeros principios, debido a que la teoría cuántica de campos se encuentra fuertemente acoplada y los métodos perturbativos no se pueden aplicar.

Por otro lado en el límite de altas energías de QCD, la constante de acoplamiento disminuye y la interacción entre quarks y gluones se vuelve más débil. A esta característica se la denomina libertad asintótica. Este comportamiento está asociado al hecho de que si partimos de un sistema de hadrones y lo llevamos a altas temperaturas la interacción que mantiene unidos los quarks y gluones en los hadrones se vuelve más débil a medida que la energía característica del sistema aumenta. Eventualmente los quarks y gluones forman un plasma de partículas con carga de color denominado plasma de quarks y gluones. La carga total de color del plasma es nula. La transición de un sistema térmico que pasa de estados hadrónicos al plasma se denomina deconfinamiento. Las propiedades termodinámicas del gas de hadrones pueden ser calculadas con modelos efectivos de interacciones hadrónicas mientras que en el límite de altas energías se puede aplicar QCD perturbativo. Estudiar el diagrama de fases de QCD y sus propiedades en todos los regímenes es muy importante. Una posible forma es utilizando simulaciones de QCD en la red (*Lattice*), sin embargo aún no se puede calcular todos los observables ni esto permite una comprensión teórica completa de todas las fases. En la figura 6.1 se puede observar el diagrama de fases de QCD en términos de la temperatura y el potencial químico.

Es importante plantear el estudio de las propiedades de la materia a densidades y temperatura extremas donde los quarks y gluones se encuentran formando el plasma. Las colisiones de iones pesados a altas energías permiten crear y estudiar este estado de la materia en los grandes laboratorios. En particular se emplean los colisionadores *Relativistic Heavy Ion Collider* (RHIC, Brookhaven) y el *Large Hadron Collider* (LHC, CERN). Uno de los importantes descubrimientos realizados en el RHIC fue determinar que el plasma de quarks y gluones generado en las colisiones se comportaba como un fluido fuertemente interactuante y no como un gas de quarks y gluones débilmente interactuante. Muchas de las características presentes en las colisiones en el RHIC y LHC sugieren que el plasma se encuentra cerca del equilibrio térmico local. El proceso

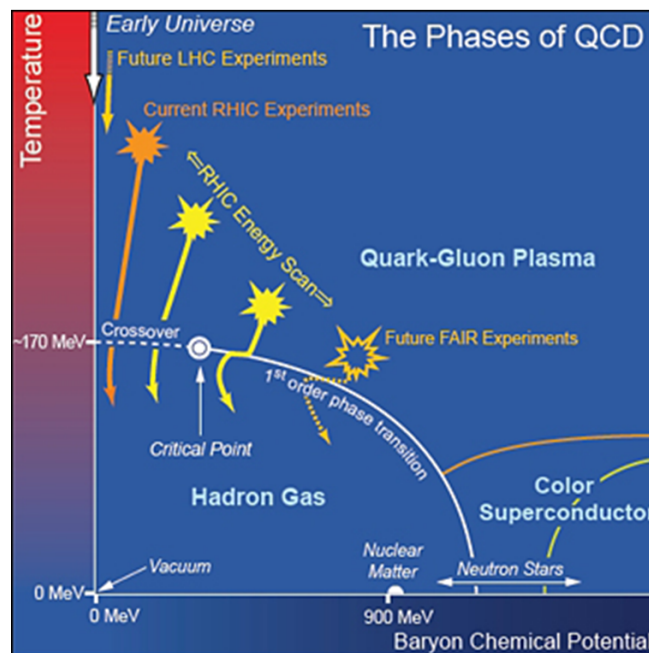


Figura 6.1: Diagrama de fases de QCD en función de la temperatura y el potencial químico. Se observan las distintas transiciones y las regiones que exploran los aceleradores RHIC y LHC. Figura extraída de la página web de Brookhaven National Laboratory.

de las colisiones ultrarelativistas de iones pesados se puede dividir en las siguientes etapas:

- Al comienzo los dos núcleos se mueven en direcciones opuestas con velocidades cercanas a las de la luz. Luego colisionan y se deposita materia con carga de color en la región en donde los núcleos se solapan, que es una región obloide en forma de almendra. Se genera un proceso de termalización que aún no se ha diluido completamente. Después de un período de entre 0,3 – 0,5 fm/c el sistema alcanza la isotropía local del impulso y en unos pocos fm/c se alcanza equilibrio térmico local.
- Los quarks y gluones producidos luego de la colisión forman un plasma fuertemente acoplado.
- El sistema se expande y se enfría siguiendo una transición suave desde la fase de QGP hasta el gas de hadrones siguiendo una ecuación de estado determinada por cálculos de *Lattice QCD*. El tiempo característico es del orden de los 10 fm/c.
- En la hadronización, el fluido formado por quark y gluones se convierte en hadrones debido al confinamiento. En la fase hadrónica, se puede modelar la descripción microscópica de la evolución con modelos de cascada.

6.1. Sistema de coordenadas y observables hadrónicos relevantes

Para iniciar la descripción del proceso, el sistema de referencia que se utiliza habitualmente posee uno de sus ejes coincidentes con el de la colisión y los otros ubicados sobre el plano transversal (ver figura 6.2). En las colisiones de iones pesados se utilizan la rapidez y o pseudo-

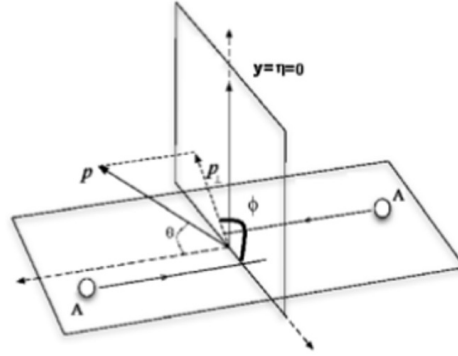


Figura 6.2: Sistema de coordenadas utilizado en la colisión relativista de dos núcleos pesados. La imagen fue extraída de la referencia [52].

rapidez η como coordenadas, definidas de la siguiente manera,

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + P_3}{E - P_3} \right), \quad (6.1.1)$$

$$\eta = -\ln \tan \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad (6.1.2)$$

donde P_0 es la energía, P_3 es el momento a lo largo del eje de colisión y θ el ángulo polar. Si la rapidez $y = 0$ entonces el momento total tiene solo componentes transversales y si además los núcleos son idénticos $y = 0$ se denomina *midrapidity*. El momento transversal $P_T = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$ y ϕ es el ángulo azimutal definido a partir del eje de colisión, siendo importante a la hora de estudiar el flujo anisotrópico. Otro parámetro característico es la energía del centro de masa \sqrt{s} , que por convención corresponde a la energía de cada nucleón. Las energías características en las colisiones son: Pb-Pb (LHC) $\sqrt{s} = 2,76$ A TeV, Au-Au (RHIC) $\sqrt{s} = 200$ A GeV, p-Pb (LHC) $\sqrt{s} = 5,02$ TeV y d-Au (RHIC) $\sqrt{s} = 200$ GeV.

El observable más simple es la multiplicidad de partículas hadrónicas cargadas emitidas al final del proceso. Se suele utilizar la multiplicidad por unidad de pseudorapidez $\frac{dN_{ch}}{d\eta}$ y es muy importante para clasificar las colisiones y ajustar los parámetros libres de la simulación hidrodinámica.

Las colisiones se clasifican por sus centralidades que caracteriza el parámetro de impacto entre los núcleos. Como experimentalmente no se puede medir el parámetro de impacto b , se obtiene indirectamente a partir de la multiplicidad, ya que están monótonamente correlacionadas. Las colisiones más centrales tienen la multiplicidad más alta, luego disminuye abruptamente para colisiones con un parámetro de impacto del orden de los núcleos (semi-periféricas), y continúa disminuyendo a medida que va aumentando b (periféricas). La relación precisa se obtiene de los modelos de Glauber y el porcentaje en la centralidad corresponde a la fracción de la totalidad de multiplicidad. En la figura 6.3 se observa la relación entre la multiplicidad y el parámetro de impacto.

En las colisiones con núcleos simétricos a altas energías tanto en el LHC como en el RHIC se observa que a *midrapidity* la invarianza frente a *boost* longitudinales es una simetría y permite estudiar el sistema en 2+1 dimensiones.

Los observables que nos interesan clasificados por su rango de centralidad serán principalmente al espectro y coeficientes v_n del flujo anisotrópico. El espectro se define como $\frac{dN}{2\pi dy p_T dp_T}$

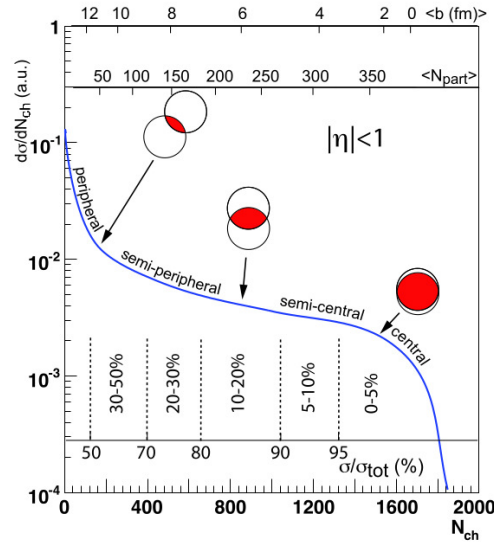


Figura 6.3: Ilustración de la correlación entre la multiplicidad (observable experimental) de partículas cargadas N_{ch} y las cantidades b y N_{part} obtenidas del modelo de Glauber. La imagen fue extraída de [53].

en unidades de GeV^{-1} y depende del momento transversal. El rango de momentos p_T que se estudiaron en las simulaciones, donde dominan los fotones térmicos por sobre los fotones *prompt*¹, es de 0-4 GeV. Los datos experimentales del espectro hadrónico para Pb-Pb se encuentran en [54] y para Au-Au en [55].

Otros de los observables importantes es la distribución anisotrópica en momentos, que toma en cuenta la distribución angular ϕ a lo largo del plano transversal definida a partir de la transformada de Fourier de la distribución diferencial de hadrones o fotones

$$\frac{1}{2\pi p_T} \frac{dN}{dp_T} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n(\phi - \psi_n)) \right]. \quad (6.1.3)$$

Los coeficientes v_n se refieren al orden del flujo y ψ_n denota la dirección azimutal del plano de reacción. En particular el v_1 se lo denomina flujo directo, al v_2 flujo elíptico y al v_3 flujo triangular. Estos parámetros dependen del momento transversal p_T , de la centralidad y del tipo de partícula. En las colisiones de núcleos idénticos a *midrapidity*, el v_1 se anula y por lo tanto el flujo elíptico es el primero relevante. También se suele emplear el coeficiente integrado en los momentos transversales que depende de la centralidad.

Algunos detalles técnicos para calcular los coeficientes v_i de los fotones directos se detallan en [56], que implica cómo definir el eje de referencia ψ , la contribución de la multiplicidad y la forma de promediar sobre los eventos de la simulación.

¹En la Sección 9.1 se detalla cada contribución de fotones.

6.2. Comparación de QCD y $\mathcal{N} = 4$ SYM a temperatura finita

Se ha comentado en el Capítulo 4 que se puede modelar teorías de campos fuertemente acopladas utilizando modelos holográficos duales en el contexto de supergravedad. Actualmente se desconoce el dual asociado a QCD a temperatura finita pero se cuenta con el asociado a $\mathcal{N} = 4$ SYM a temperatura finita (Sección 4.3). La idea es extrapolar los resultados obtenidos en los rangos donde ambas teorías son similares o en observables que cualitativamente no dependen tanto de la teoría sino del acoplamiento fuerte. A continuación se enumeran características de ambas teorías que son similares a temperatura finita cercana a la temperatura crítica T_c [51].

- QCD a temperatura $T = 0$ es confinante mientras que $\mathcal{N} = 4$ SYM no lo es. Sin embargo para temperaturas por arriba de la T_c QCD deja de ser confinante.
- $\mathcal{N} = 4$ SYM es una teoría supersimétrica, pero se debe tener en cuenta que a temperatura finita las supersimetrías se rompen por lo que no toman ningún rol importante a la hora de caracterizar las propiedades.
- $\mathcal{N} = 4$ SYM es una teoría invariante de escala mientras que QCD presenta una escala de confinamiento generado por dependencia de la constante de acoplamiento con la energía. Sin embargo si consideramos temperaturas superiores a los 170 MeV el plasma de quarks y gluones se vuelve invariante de escala, al menos desde el punto de vista de sus observables termodinámicos. Por lo tanto en ese rango de temperatura QCD y $\mathcal{N} = 4$ SYM son teorías similares a estos efectos.
- En QCD, la simetría quiral se rompe por la presencia del condensado quiral que introduce una escala que no esta presente en la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM. Sin embargo, QCD por arriba de su T_c el condensado quiral no está presente y esta distinción pasa a ser irrelevante.

De todas formas vale mencionar que hay diferencias entre los cálculos que podemos realizar con modelos duales más sencillos a temperatura finita con los obtenidos desde QCD. Estas diferencias son una de las razones que motivaron explorar las correcciones en α' del espectro de fotoemisión.

A continuación vamos a comentar algunas diferencias que se observan en los modelos incluso a temperatura finita. Lo primero es recordar que en la conjetura de Maldacena tomamos el límite $N_c \rightarrow \infty$ en contraste con $N_c = 3$ para QCD. Es importante considerar las correcciones superiores de los observables. Segundo que incluso tomando a $\mathcal{N} = 4$ SYM con $N_c = 3$, la teoría presenta un número mayor de grados de libertad que QCD. Hay que tener en cuenta cómo comparar los observables si dependen de los grados de libertad. Un ejemplo sencillo de observables que no dependen es el cociente de $\frac{q}{s}$. Tercero que además de tomar $N_c \rightarrow \infty$, se considera el límite para la constante de acoplamiento $\lambda \rightarrow \infty$ en los métodos holográficos ($1 \ll \lambda \ll N_c$). Sin embargo por más que el plasma se encuentre en el rango de acoplamiento fuerte, no implica que éste sea infinito y es necesario explorar correcciones en $1/\lambda$ para obtener conclusiones más rigurosas. Por último se debe tener en cuenta que la mayoría de los modelos holográficos duales consideran el límite $N_f \ll N_c$ ó $N_f = 0$, despreciando la *backreaction* de la materia en la representación fundamental.

Parte II

Contribuciones originales

Capítulo 7

Correcciones en $1/N_c^2$ de las funciones de estructura de glueballs

En este capítulo exploraremos correcciones en $1/N_c^2$ al proceso de dispersión inelástica profunda (DIS) de leptones cargados por glueballs en el régimen de acoplamiento fuerte utilizando la dualidad AdS/CFT. El objetivo es considerar la expansión en $1/N_c^2$ con el fin de explorar procesos más realistas y similares a QCD fuertemente acoplada. Mediante el teorema óptico podemos relacionar la sección eficaz del DIS con el producto de dos corrientes electromagnéticas $J^\mu(x) J^\nu(0)$ dentro del hadrón, que corresponde al proceso de *Forward Compton scattering* (FCS) (ver capítulo 3). Esto implica que 2π por la parte imaginaria de la función de estructura asociada al FCS da exactamente la función de estructura del DIS, obteniendo la siguiente expresión para el elemento de matriz de dos corrientes electromagnéticas dentro del hadrón

$$\text{Im}(T^{\mu\nu}) = \pi \sum_X \langle P, h | \tilde{J}^\mu(q) | X \rangle \langle X | J^\nu(0) | P, h \rangle, \quad (7.0.1)$$

donde P y h indican el momento y polarización del hadrón incidente y X corresponde a todos los estados intermedios en la capa de masa (*on-shell*).

Si consideramos el acoplamiento débil, el modelo de partones describe correctamente el proceso de modo que el fotón virtual interactúa directamente con un partón dentro del hadrón. En cambio si el acoplamiento es fuerte el modelo de partones pierde validez y por lo tanto debemos utilizar otra estrategia. En el límite de acoplamiento fuerte podemos calcular mediante modelos holográficos duales cada valor de expectación $\langle P, h | \tilde{J}^\mu(q) | X \rangle$ del tensor hadrónico. La prescripción holográfica dual asociada al proceso de DIS fue desarrollada por Polchinski y Strassler [57] y se puede aplicar en el límite planar de la teoría de gauge $1 \ll \lambda \ll N_c$, con N_c el rango del grupo y λ la constante de 't Hooft. La idea es calcular la amplitud de procesos de dispersión en supergravedad en 10 dimensiones que corresponderá al dual del proceso de FCS de la teoría de Yang-Mills definida sobre el borde del AdS. De acuerdo a la dualidad AdS/CFT la inserción del operador corriente sobre el borde induce una perturbación de la métrica, que a su vez interactúa con el campo escalar dual al glueball, que es el dilatón de la teoría de supercuerdas del tipo IIB. El régimen paramétrico que nos va a permitir considerar el límite de bajas energías de cuerdas (denominado supergravedad) corresponde a restringir el parámetro de Bjorken al intervalo $\lambda^{-1/2} \ll x < 1$. Esto se explicará en la Sección 7.3. El proceso holográfico dual en el límite de N_c grande fue calculado en [57] y corresponde al caso en el que se considera un único estado intermedio tal como se muestran en la figura 2 del artículo [1].

Tomar N_c finito implica considerar más estados intermedios y por lo tanto en el cálculo dual implica calcular diagramas de Witten con más vértices de interacción así como incluir diagramas con *loops* de mayor orden en supergravedad. Por otro lado en los procesos de DIS se

toma el límite $q \gg \Lambda$, donde q es el momento del fotón virtual y Λ la escala de confinamiento. Es interesante estudiar si este límite conmuta o no con el límite de $N_c \rightarrow \infty$, ya que en modelos más realistas debemos considerar esta corrección. Estudiando las funciones de estructura F_1 , F_2 y F_L vamos a concluir que estos límites no conmutan, manifestando un comportamiento interesante en el caso de tomar primero el límite de altas energías. Este efecto fue estudiado inicialmente por Gao y Moe en [58] con un lagrangiano efectivo en 5 dimensiones. En nuestro caso utilizamos el lagrangiano en 10 dimensiones de la teoría de supercuerdas del tipo IIB, ya que conocemos la teoría dual asociada y por lo tanto podemos considerarlo como un cálculo desde primeros principios a diferencia del cálculo efectivo de [58].

En la Sección 7.3 repasaremos el cálculo holográfico en el límite de N_c grande. En las Secciones 7.1 y 7.2 estudiaremos la expansión en $1/N_c$ desde el punto de vista holográfico y desde la expansión en productos de operadores. Luego en las Secciones 7.4.2 y 7.5 se calcularán las funciones de estructura obteniendo el diagrama más relevante. Por último en Secciones 7.7 y 7.8 se analizarán los resultados.

7.1. Expansión del producto de operados en DIS

En esta sección estudiaremos el análisis de la expansión del producto de operadores (OPE, por sus siglas en inglés de *Operator Product Expansion*) asociado a procesos de dispersión inelástica profunda para teorías de gauge fuertemente acopladas. Utilizaremos el procedimiento estándar en teoría cuántica de campos aplicado a teorías con un comportamiento infrarrojo confinante en el que se introduce una escala de confinamiento Λ que rompe la invarianza conforme. Siguiendo un razonamiento similar al de Polchinski y Strassler en [57] consideramos los momentos de las funciones de estructura del tensor hadrónico definidos a partir de

$$M_n^{(s)}(F) = \int_0^1 dx x^{n-1} (2x)^{1-s} F^{(s)}(x, q^2), \quad (7.1.1)$$

donde $s = 1, 2$ (con $F^{(s)} = F_1$ o F_2). Las funciones de estructura se calculan mediante el elemento de matriz del producto de dos corrientes electromagnéticas. Si estudiamos el OPE de las corrientes se obtiene el siguiente desarrollo,

$$\begin{aligned} M_n^{(s)}(q^2) \approx & \frac{1}{4} \sum_j C_{n,j}^{(s)} A_{n,j} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\frac{1}{2}\tau_{n,j}-1} + \frac{1}{4} \sum_{Q_p=Q} C_{n,p}^{(s)} A_{n,p} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\tau_p-1} \\ & + \frac{1}{4N_c^2} \sum_{Q_p \neq Q} C_{n,p}^{(s)} a_{n,p} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\tau_p-1}, \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

donde $C^{(s)}$ son coeficientes numéricos, las A 's corresponden a elementos de matriz de operadores y las a_{np} se definen a partir de $A_{n,p} = a_{n,p} N_c^{-2}$. Los parámetros τ 's denominados *twist* se definen para cada operador a partir de su dimensión conforme Δ , su dimensión anómala γ y su spin s siguiendo la ecuación,

$$\tau = \Delta + \gamma - s. \quad (7.1.3)$$

Analicemos a qué operadores corresponde cada contribución de la ecuación (7.1.2). Lo primero que debemos tener en cuenta es que en el proceso de DIS estamos tomando el límite de Bjorken ($q \gg \Lambda$) y por lo tanto algunas contribuciones pueden ser más relevantes que otras. Observando la expansión (7.1.2) concluimos que las contribuciones de los operadores con menor *twist* son los que dominarán debido a estar menos suprimidos en el desarrollo de potencias Λ^2/q^2 .

Los primeros términos provienen de los operadores de traza única que denotamos $T_{\mu,j}$. Utilizamos una normalización para los operadores locales de modo tal que estos crean hadrones a orden N^0 , y por lo tanto los coeficientes y los elementos de matriz poseen el siguiente comportamiento en potencias de N_c

$$\begin{aligned} C_{n,j}^{(s)} &\propto \langle Q, P | J J T_{n,j} | Q, P \rangle \sim N_c^{-1}, \\ A_{n,j} &= \langle Q, P | T_{n,j} | Q, P \rangle \sim N_c^{-1}. \end{aligned}$$

La dimensión anómala de $T_{n,j}$'s es de orden $\gamma \sim (gN_c)^{1/4}$, razón por la cual la contribución dominante en el caso de acoplamiento débil corresponde a operadores de traza única con el menor *twist* clásico $\tau = 2$.

Sin embargo en el caso de acoplamiento fuerte, las dimensiones anómalas de los operadores de traza única crecen con la constante de acoplamiento y por lo tanto los segundos y terceros términos en (7.1.2) cobran relevancia debido a estar asociados a operadores de doble traza $T_p^\dagger(\partial)^r T_p$ provenientes de operadores protegidos T_p . Las dimensiones conformes de los operadores protegidos no se corrigen con el acoplamiento y alcanzan el menor *twist* dominando el OPE para un gN_c suficientemente grande. Además podemos separar las contribuciones de los operadores de doble traza según sus contribuciones en potencias de N_c ,

$$\begin{aligned} A_{n,p} &= \langle Q, P | T_p^\dagger(\partial)^r T_p | Q, P \rangle \sim N_c^0 \quad \text{si } \langle Q, P | T_p | 0 \rangle \neq 0, \\ A_{n,p} &= \langle Q, P | T_p^\dagger(\partial)^r T_p | Q, P \rangle \sim N_c^{-2} \quad \text{si } \langle Q, P | T_p | 0 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

En el límite de $N_c \rightarrow \infty$ el segundo término de (7.1.4) se hace menos relevante y el OPE está dominado por el primer término que corresponde a un régimen en donde la producción hadrónica es nula. En cambio si consideramos N_c finito el segundo término no se puede despreciar y el número de hadrones no se conserva. Veremos que esta contribución será la más relevante porque puede provenir de un hadrón creado con menor *twist* que el incidente. Esto es interpretado como el proceso donde el fotón virtual interactúa con un pión de la nube de hadrones que rodea al hadrón incidente.

En el régimen de acoplamiento fuerte, si nos enfocamos en el caso en que el parámetro de Bjorken se encuentre entre $0,1 < x < 1$ mediante cálculos holográficos duales podemos describir el proceso a partir de supergravedad IIB. Los resultados en el límite de $N_c \rightarrow \infty$ fueron estudiados en [57] para el dilatón y dilatino y en [59, 60] para los mesones escalares y vectoriales. Se utilizó el teorema óptico en donde la contribución más relevante proviene de diagramas de Witten con un solo estado intermedio con el mismo Δ que el incidente.

En las siguientes secciones consideraremos diagramas a un *loop* en supergravedad de tipo IIB para analizar la contribución en N_c finito con el fin de capturar esta tercera contribución al OPE mencionado.

7.2. Expansión en $1/N_c$ y supergravedad a *one-loop*

La dualidad AdS/CFT en el límite $1 \ll \lambda \ll N_c$, donde $\lambda = g_{YM}^2 N_c$ es el acoplamiento de 't Hooft, permite describir el límite planar de teorías de campos fuertemente acopladas a partir de la supergravedad clásica. Podemos ir más allá de esta aproximación expandiendo en dos posibles series de potencias. La primera es una expansión en el acoplamiento de la teoría $1/\sqrt{\lambda}$ que desde el punto de vista de la teoría de cuerdas corresponde una expansión en α' (incluye modos masivos). Esta corrección se explorará en la Sección 9 para una teoría de campos a temperatura finita. La segunda expansión es en potencias de $1/N_c$, que implicará una corrección en $1/N_c^2$. Del lado de la teoría de cuerdas corresponde a una expansión en géneros (*genus*) del *worldsheet*.

Veamos por qué la expansión en diagramas de Witten corresponde a una expansión en $1/N_c$. Consideremos el sector bosónico del lagrangiano de supergravedad del tipo IIB en el marco de Einstein (*Einstein frame*), que viene dado por

$$S_{IIB}^{SUGRA} = -\frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{|\det g|} \left[\mathcal{R}_{10} - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} e^{2\phi} (\partial\mathcal{C})^2 - \frac{1}{4 \cdot 5!} (F_5)^2 \right], \quad (7.2.1)$$

donde ϕ es el dilatón, \mathcal{C} es el campo de Ramon-Ramond denominado axi3n, F_5 es la 5-forma, g corresponde a la métrica en 10 dimensiones y κ_{10} es la constante de Newton. Esta acción debe ser complementada con la condición de autodualidad $F_5 = *F_5$. Ahora realicemos el conteo en potencias de $1/N_c$ de los diagramas de supergravedad. Primero hacemos una reducción dimensional sobre la S^5 (ver [60, 61, 62, 63]) obteniendo una acción sobre el AdS_5 en términos del dilatón $\phi_5(x)$ de la forma

$$S_{5d}^{SUGRA} = -\frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^5x \sqrt{|\det g_5|} \left[\mathcal{R}_5 - \frac{1}{2} (\partial\phi_5)^2 + \dots \right]. \quad (7.2.2)$$

En la acción los puntos suspensivos corresponden a términos que no son relevantes para nuestro análisis. Es importante notar que la constante κ_5 depende de N_c y viene dada por

$$\frac{1}{2\kappa_5^2} = \frac{N_c^2}{8\pi^2 R^3}. \quad (7.2.3)$$

Por esta razón nos interesa que los términos cinéticos de los campos de supergravedad estén canónicamente normalizados. Para ello redefinimos los campos de modo de absorber esa constante dependiente de N_c que está delante de la acción. Reescalamos el dilatón como $\tilde{\phi}_5 \equiv N_c \phi_5$, y hacemos lo mismo para el gravitón y los demás campos. De esta forma los vértices de interacción asociados al lagrangiano canónicamente normalizado van a depender de potencias de $1/N_c$. Por ejemplo el vértice de interacción de tres puntos va como $1/N_c$ y el vértice de interacción de 4-puntos va como $1/N_c^2$. Con estos vértices podemos expandir en diagramas de Witten con la correspondiente potencia de N_c .

El único diagrama importante en el límite de $N_c \rightarrow \infty$, que utilizaremos en la Sección 7.3 para calcular las funciones de estructura F_1 y F_2 , proviene del vértice canónicamente normalizado de la forma

$$S_{5d}^{\tilde{A}\tilde{\phi}\tilde{\phi}} = \frac{1}{8\pi^2 N_c R^3} i\mathcal{Q} \int d^5x \sqrt{|\det g_5|} \tilde{A}_5^m (\tilde{\phi}_{in,5}^* \partial_m \tilde{\phi}_{X,5} - \tilde{\phi}_{X,5}^* \partial_m \tilde{\phi}_{in,5}). \quad (7.2.4)$$

Aquí se normalizó el $\tilde{A}_5^m \equiv N_c A_5^m$. Para la siguiente contribución debemos considerar diagramas a un *loop* de supergravedad armado con dos vértices triples o uno cuártico como los detallados en la figura 7.1. Notar que el corte vertical dado por las líneas punteadas indica que nos interesa la parte imaginaria del FCS y requiere elevar a cuadrado y sumar sobre todos los posibles diagramas con dos estados intermedios *on-shell*. Esto corresponde al teorema óptico, que se desprende de las reglas de Cutkowsky. Se debe considerar los términos cruzados y sumar sobre las torres de los modos de Kaluza-Klein provenientes de la reducción dimensional sobre S^5 .

En las siguientes secciones primero estudiaremos el caso analizado en [23] y luego analizaremos la corrección al siguiente orden en $1/N_c$.

7.3. Cálculo de DIS holográfico para $N_c \rightarrow \infty$

En esta sección vamos a calcular las funciones de estructura del glueball en el límite de $N_c \rightarrow \infty$ y $\lambda \rightarrow \infty$, con $1 \ll \lambda \ll N_c$. Este método holográfico fue empleado por Polchinski y

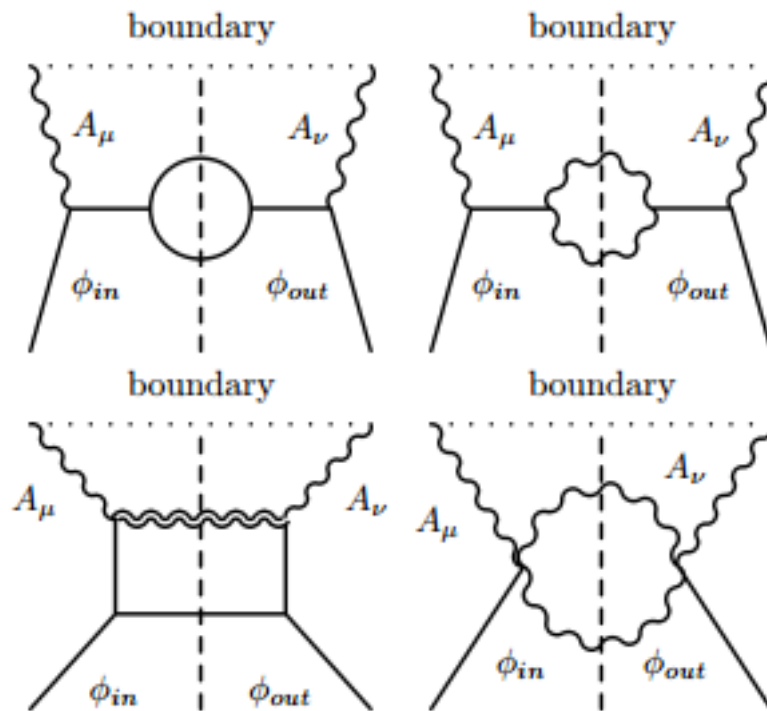


Figura 7.1: Algunos diagramas en supergravedad del tipo IIB que pueden contribuir en la corrección a un *loop* del FCS. La línea vertical punteada representa el “corte” del teorema óptico, los campos escalares, vectoriales y tensoriales están representados por líneas rectas, onduladas y doblemente onduladas, respectivamente. Figura extraída de nuestro trabajo [2].

Strassler en [23] y vamos a desarrollarlo para introducir las nociones básicas del proceso dual, y las soluciones de los modos normalizables y no-normalizables. Además el resultado es muy importante para contrastar con las correcciones en $1/N_c$.

A partir de la conjetura de Maldacena presentada en la introducción conocemos el dual gravitatorio de $\mathcal{N} = 4$ SYM dado por la teoría de supercuerdas tipo IIB sobre el fondo $\text{AdS}_5 \times S^5$ con métrica,

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2, \quad (7.3.1)$$

donde $R = (4\pi g_s N_c \alpha'^2)^{1/4}$ es el radio del AdS_5 y de la S^5 . Las coordenadas x^μ están asociadas al borde (donde está la teoría de gauge) y r es la coordenada radial holográfica. Se puede notar que la métrica contiene un factor de deformación (en inglés *warp factor*) dado por $\frac{r^2}{R^2}$ que multiplica a las coordenadas del borde. Este factor permite relacionar la coordenada r con escalas de energías de los procesos. El momento asociado a la teoría de gauge $p_\mu = -i\partial_\mu$ con $\mu = 0, \dots, 3$ visto por un observador inercial en diez dimensiones es,

$$\tilde{p}_\mu = \frac{R}{r} p_\mu. \quad (7.3.2)$$

La escala de energía característica en diez dimensiones va como $\tilde{E} \sim R^{-1}$ por lo tanto en cuatro dimensiones va como $E \rightarrow \frac{r}{R^2}$. Se observa que en el horizonte $E \rightarrow 0$ y en el borde del AdS_5 $E \rightarrow \infty$. Si la teoría es confinante entonces la métrica tomará la forma de la ecuación (7.3.1) sólo asintóticamente para grandes valores de r , mientras que será diferente para valores del orden de

$$r_0 = \Lambda R^2, \quad (7.3.3)$$

donde Λ es la masa del glueball más liviano y definirá una escala característica del sistema. La forma de simular el comportamiento infrarrojo de la teoría de gauge es considerando un corte (*cut-off*) r_0 en la coordenada r de modo que los campos de supergravedad estarán definidos entre r_0 y $r \rightarrow \infty$ de forma análoga a una partícula en una caja de potencial.

Cálculo del tensor hadrónico

El objetivo es calcular el elemento de matriz

$$T^{\mu\nu} = i \langle P, \mathcal{Q} | T(\tilde{J}^\mu(q) \tilde{J}^\nu(0)) | P, \mathcal{Q} \rangle \quad (7.3.4)$$

cuya parte imaginaria calculada utilizando el teorema óptico nos permite estudiar la estructura hadrónica mediante las funciones de estructura definidas en el Capítulo 3. La parte imaginaria se puede obtener de la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \text{Im}(T^{\mu\nu}) &= \pi \sum_{P_X, X} \langle P, \mathcal{Q} | \tilde{J}^\mu(q) | X \rangle \langle X | J^\nu(0) | P, \mathcal{Q} \rangle \\ &= 2\pi^2 \sum_{P_X, X} \delta(M_X^2 + (p+q)^2) \langle P, \mathcal{Q} | J^\mu(0) | P+q, X \rangle \langle P+q, X | J^\nu(0) | P, \mathcal{Q} \rangle \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

donde X y P_X es el estado intermedio y P y \mathcal{Q} el momento y la carga del hadrón incidente.

Vamos a utilizar la dualidad AdS/CFT siguiendo el procedimiento de Polchinski y Strassler [57] para calcular las funciones de estructura asociadas al glueball como hadrón incidente en el límite de $N_c \rightarrow \infty$ y acoplamiento fuerte. Los valores de expectación de las corrientes se pueden calcular a partir del Ansatz de Witten presentado en el Capítulo 4. El operador de corriente

insertado en el borde induce una perturbación generada por un campo de gauge definido en el interior del espacio AdS. Esta perturbación corresponde a un modo no normalizable y posee una simetría $U(1)$ por corresponder a una corriente electromagnética. Desde el punto de vista de la teoría de cuerdas dual, se necesita un campo que posea la simetría requerida. Los campos definidos sobre el espacio en 10 dimensiones de supergravedad del tipo IIB se pueden expandir en modos de Kaluza-Klein sobre el espacio interno.

Vamos a elegir la siguiente notación para indicar los índices y coordenadas:

- Los índices $M, N, \dots = 0, \dots, 9$ corresponden a las coordenadas en 10 dimensiones.
- Los índices i, j, \dots corresponden a las coordenadas de la S^5 .
- Las coordenadas del borde $x^\mu = 0, \dots, 3$.
- Las coordenada radial del AdS es $r = 4$ o $z = \frac{R^2}{r}$.
- Las coordenadas del AdS₅ será $y^m = 0, \dots, 4$ con índices m, n, \dots .

En el caso estudiado de la esfera S^5 cuyas isometrías corresponden al grupo $SO(6)$ poseen un subgrupo de simetría $U(1)$. El modo no normalizable de supergravedad que es dual a la corriente corresponde a un campo de gauge proveniente del espectro no masivo de la reducción de Kaluza-Klein de la métrica. Estos modos están compuestos por el campo de gauge definido en el AdS₅ y un vector de Killing v^a sobre la esfera S^5 . La perturbación de la métrica en el interior del espacio AdS₅ × S⁵ posee la siguiente forma

$$\delta g^{mi} = A^m(y)v^i. \quad (7.3.6)$$

Las ecuaciones de movimiento del campo de gauge son las de Maxwell ($D_m F^{mn} = 0$) dadas por

$$-q^2 A_\mu + R^{-4} r \partial_r (r^3 \partial_r A_\mu) = 0 \quad (7.3.7)$$

$$-q^2 A_r + R^{-4} \partial_r (r \partial_r (r^3 A_r)) = 0 \quad (7.3.8)$$

fijando el gauge con la condición del tipo Lorenz implementada en [57] y dada por la siguiente ecuación

$$i\eta^{\mu\nu} q_\mu A_\nu + R^{-4} r \partial_r (r^3 A_r). \quad (7.3.9)$$

El modo no normalizable debe satisfacer la siguiente condición de contorno en el borde del AdS

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_\mu(x, r) = A_\mu(x)|_{4d} = n_\mu e^{ipx}. \quad (7.3.10)$$

Esta condición corresponde a insertar un operador $n^\mu J_\mu$.

Las soluciones vienen dadas por funciones de Bessel K que se detallan a continuación

$$A_\mu(y) = n_\mu e^{iq \cdot x} \frac{qR^2}{r} K_1 \left(\frac{qR^2}{r} \right), \quad (7.3.11)$$

$$A_r(y) = iq \cdot n e^{iq \cdot x} \frac{R^4}{r^3} K_0 \left(\frac{qR^2}{r} \right) \quad (7.3.12)$$

Estas funciones decaen exponencialmente para $r < qR^2$ y por lo tanto como estamos interesados en procesos con $q \gg \Lambda$, podemos considerar que la interacción sucede en la región $r_{int} \sim qR^2 \ll r_0 = \Lambda R^2$.

En la Sección 7.4 se detalla la reducción dimensional sobre S^5 y las ecuaciones de movimiento de los campos de supergravedad de tipo IIB.

La versión dual del hadrón incidente corresponde a una fluctuación normalizable del dilatón que es dual al glueball. La función de onda viene dada por el modo de Kaluza-Klein

$$\Phi = e^{ip \cdot x} \psi(r, \Omega) \quad (7.3.13)$$

donde $\psi(r, \Omega)$ es un autoestado del laplaciano de la S^5 . Como imponemos la condición de *hard wall*, la función de onda se anula en el *cut-off* dado en r_0 e impone un espectro discreto de masas $M = -p^\mu p^\nu \eta_{\mu\nu}$ de modo que Mz_0 corresponde a una raíz de la función de Bessel del correspondiente modo (en la siguiente sección se detalla de forma explícita las soluciones de cada modo en términos de funciones de Bessel). Esto genera un *gap* de masa que rompe la invarianza conforme.

El lagrangiano de interacción en el límite de $N_c \rightarrow \infty$ está dado por la ecuación (7.2.4) permitiendo un único estado intermedio. Este estado viene dado por otro modo escalar asociado al dilatón con momento

$$s = -(p + q)^2 = q^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right). \quad (7.3.14)$$

Veamos la condición para la cuál podemos aplicar supergravedad excitando modos no masivos de cuerdas. Se debe considerar el momento de los campos definidos en 10 dimensiones dado por

$$\tilde{s} = -g^{MN} P_{X,M} P_{X,N} \leq -g^{\mu\nu} (P + q)_\mu (P + q)_\nu \leq \frac{R^2}{r_{int}} q^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha' (4\pi g_s N_c)^{1/2}} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \quad (7.3.15)$$

donde P_X es el momento de el estado intermedio. El término de la derecha posee un denominador dependiente de la constante de 't Hooft. Por lo tanto si se satisface la condición $\lambda^{-1/2} \ll x < 1$ entonces $\alpha' \tilde{s} \ll 1$ indicando que no se excitan estados masivos de cuerdas y la aproximación de supergravedad es correcta.

A continuación se analiza las soluciones de las perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales sobre el espacio AdS. A diferencia del cálculo realizado por Polchinski y Strassler, vamos a utilizar el gauge axial y la coordenada para los modos de vectoriales obteniendo el mismo resultado para el caso de $N_c \rightarrow \infty$ como es esperable. Se utiliza este gauge porque facilitará el análisis en diagramas más generales.

Soluciones de perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales en AdS₅

Para calcular el tensor hadrónico con métodos holográficos, se necesitan los modos normalizables y no normalizables de perturbaciones en supergravedad. Utilizaremos como coordenada radial $z = R^2/r$ con un *cut-off* asociado z_0 de modo que los campos de supergravedad estarán definidos entre $z = 0$ y z_0 . Vamos a seguir la referencia [50] para obtener las soluciones y luego vamos a imponer la condición de *hard wall*. Las perturbaciones sobre AdS₅ × S⁵ se pueden expandir en modos de Kaluza-Klein sobre la S^5 . Estas soluciones efectivas sobre AdS₅ corresponden a modos masivos, con masas de Kaluza-Klein dadas por los autovalores con respecto al Laplaciano angular (apéndice B). Además es útil trabajar con el conjunto de soluciones de autovalores de momentos de las coordenadas del borde de la forma, $\Phi(x^0, \dots, x^3, z) = e^{ip \cdot x} \Phi^{(p)}(z)$ y nos enfocaremos en momentos de tipo-tiempo.

Las distintas masas de KK las denotaremos genéricamente como $m \propto R^{-1}$ y las ecuaciones de movimiento correspondientes son las de Klein-Gordon en el AdS₅ dadas por,

$$(\square - m^2)\phi(x, z) = 0 \Rightarrow [z^2 \partial_z^2 - 3z \partial_z + (z^2 p^2 - R^2 m^2)] \phi^{(p)}(z) = 0, \quad (7.3.16)$$

con $p^2 = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$. En el caso no masivo la ecuación equivalente es $\partial_M(\sqrt{-g}g^{MN}\partial_N)\phi = 0$ y tiene las soluciones conocidas

$$\begin{aligned}\phi^{(p)}(z) &\sim z^2 J_2(pz) \text{ normalizable,} \\ \phi^{(p)}(z) &\sim z^2 Y_2(pz) \text{ no normalizable,}\end{aligned}\tag{7.3.17}$$

donde $p \equiv \sqrt{-p^2}$ y J y Y son las funciones de Bessel de primer y segundo orden, respectivamente. En el cálculo de DIS nos interesa los modos normalizables masivos del campo escalar. Las soluciones para $m^2 \neq 0$ se obtienen de forma análoga

$$\phi^{(p)}(z) \sim z^2 J_{\sqrt{4+R^2 m^2}}(pz).\tag{7.3.18}$$

En general, para las fluctuaciones escalares la dimensión conforme $\Delta \geq 2$ del operador asociado a la teoría de campos en el borde está dado por $m^2 = R^{-2}\Delta(\Delta - 4)$, que en función del índice de la función de Bessel es $\sqrt{4 + R^2 m^2} = \Delta - 2$.

El propagador escalar que se utilizará para calcular la corrección en $1/N_c$, correspondiente a las soluciones es:

$$\begin{aligned}G(x, z; x', z') &= \frac{1}{\text{Vol}(S^5)R^3} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G^{(p)}(z, z') e^{ip \cdot (x-x')} \\ &= -\frac{i}{\pi^3 R^8} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{dM^2}{2} \frac{z^2 J_{\Delta-2}(Mz) z'^2 J_{\Delta-2}(Mz') e^{ip \cdot (x-x')}}{p^2 + M^2 - i\epsilon}.\end{aligned}\tag{7.3.19}$$

Este propagador se obtiene resolviendo la ecuación

$$\square G(x, z; x', z') = \frac{i}{\sqrt{-g_{AdS_5}}} \delta^4(x - x') \delta(z - z').\tag{7.3.20}$$

El procedimiento para obtener el propagador utilizado en [50] consiste en realizar una transformación de Fourier en las coordenadas x y utilizar la identidad

$$\int dz z J_\nu(Mz) J_\nu(M'z) = \frac{1}{M} \delta(M - M').\tag{7.3.21}$$

para resolver la ecuación diferencial en la coordenada z . Debemos recordar que estamos considerando un *cut-off* z_0 en el espacio AdS donde las soluciones tienen que anularse. Esto significa que p tiene que ser tal que el producto $p z_0$ tiene que corresponder a un cero de la función de Bessel. Esto se aplica a todos los modos normalizables que estamos considerando.

Para campos vectoriales, los cuales notaremos genéricamente como A_m , debemos resolver las ecuaciones de Maxwell-Einstein luego de fijar la libertad de gauge. En esta tesis detallaremos el cálculo con el gauge axial que implica $A_z = 0$ ya que luego lo implementaremos en el análisis de la Sección 7.6 ¹. Planteamos separación de variables para las soluciones obteniendo,

$$[z^2 \partial_z^2 - z \partial_z + (z^2 p^2 - R^2 m^2)] A_\mu^{(p)}(z) = 0 \quad y \quad \eta^{\mu\nu} p_\mu A_\nu^{(p)}(z) = 0,\tag{7.3.22}$$

donde la última ecuación es válida para los modos normalizables. Las soluciones para los modos masivos son

$$A_\mu^{(p)}(z) \sim \epsilon_\mu z J_{\sqrt{1+R^2 m^2}}(pz) \text{ con } p \cdot \epsilon = 0.\tag{7.3.23}$$

La definición $m^2 = R^{-2}(\Delta - 1)(\Delta - 3)$ para las fluctuaciones vectoriales en el contexto de la dualidad AdS/CFT produce un índice de la forma $\sqrt{1 + R^2 m^2} = \Delta - 2$. La única diferencia con el caso escalar es la potencia del factor z .

¹Notar que en el trabajo [57] se implementó un fijado de gauge tipo Lorenz.

Finalmente analicemos las fluctuaciones tensoriales $h_{\mu\nu}$. Solo hay una única torre de Kaluza-Klein y los que corresponden a estados no masivos son los gravitones en AdS_5 . En este caso, el gauge axial está definido por $h_{\mu z} = 0$, generando simplificaciones y, como en el caso vectorial, selecciona la solución de polarización transversa para $h_{\mu\nu}$.² Las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$[z^2 \partial_z^2 + z \partial_z + (z^2 p^2 - 4 - R^2 m^2)] h_{\mu\nu}^{(p)}(z) = 0 \quad y \quad \eta^{\mu\nu} p_\mu h_{\mu\sigma}^{(p)}(z) = 0, \quad (7.3.24)$$

donde solo consideramos la parte de la perturbación simétrica de traza nula. Las soluciones son de la forma

$$h_{\mu\nu}^{(p)}(z) \sim E_{\mu\nu} J_{\sqrt{4+R^2 m^2}}(pz) \text{ con } \eta^{\nu\sigma} p_\nu E_{\sigma\mu} = \eta^{\nu\sigma} p_\nu E_{\mu\sigma} = 0, \quad \eta^{\mu\nu} E_{\mu\nu} = 0, \quad E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu}, \quad (7.3.25)$$

y debido a que la ecuación de masa $m^2(\Delta)$ para el modo tensorial es la misma que en el caso escalar, se obtiene el índice $\Delta - 2$ pero con un factor de z diferente.

La condición de normalización para las perturbaciones escalares viene dada por el *cut-off* z_0 y fue implementada en [23, 58], donde se ha mostrado que con las coordenadas utilizadas e implementado la cuantización canónica, los campos de la forma $\phi = e^{ip \cdot x} f(z) Y(\Omega_5)$ poseen una condición de normalización que garantiza

$$\int_0^{z_0} dz d\Omega_5 \omega(z) \sqrt{g_{zz} g_{S^5}} |f(z) Y(\Omega_5)| = 1. \quad (7.3.26)$$

En esta integral $\omega(z) = (R/z)^2$ es el factor de curvatura delante de $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ en la métrica (7.3.1), y en un contexto más general $g_{zz} g_{S^5}$ debería ser reemplazado por el determinante de la parte de la métrica correspondiente al resto de las coordenadas. Suponiendo que la parte angular de la solución está normalizada como

$$\int \Omega_5 \sqrt{g_{S^5}} |Y(\Omega)|^2 = 1 \quad (7.3.27)$$

y utilizando que nuestra solución está definida hasta $z = z_0$, que significa que $J_{\Delta-2}(pz_0) = 0$, la constante de normalización es

$$Norm = \frac{\sqrt{2}}{z_0 R^4 |J_{\Delta-1}(pz_0)|}. \quad (7.3.28)$$

Tomando en cuenta que $|A^\mu A_\mu| \sim z^2 |A_\mu|^2$ y $|h^{\mu\nu} h_{\mu\nu}| \sim z^4 |h_{\mu\nu}|^2$ la normalización de las perturbaciones vectoriales y tensoriales se obtienen análogamente.

Funciones de estructura utilizando el *gauge axial*

El *gauge axial* implica que fijamos $A_z = 0$, y proponiendo una solución de la forma $A_\mu = c_\mu e^{ik \cdot x} f(z)$ las ecuaciones de movimiento de Einstein-Maxwell para el campo vectorial no masivo proveniente del borde son

$$iq \cdot \partial_z A = 0, \quad \partial_z^2 A_\mu - \frac{1}{z} \partial_z A_\mu - q^2 A_\mu + q_\mu q \cdot A = 0, \quad (7.3.29)$$

donde la contracción corresponde a $v \cdot w = \eta^{\mu\nu} v_\mu w_\nu$. La primera ecuación implica que $q \cdot A$ es una constante independiente de la variable z . Para modos normalizables se verifica $A_\mu(z \rightarrow 0) \rightarrow 0$

²Formalmente, hay un modo asociado con h_{zz} , sin embargo no es un grado de libertad independiente ya que la traza de h_μ^μ se incluye en las fluctuaciones escalares.

implicando que $q \cdot A = 0$ y por lo tanto podemos no considerarlo en la segunda ecuación ³. Sin embargo, necesitamos un A_μ que sea dual a la excitación de la corriente R proveniente del borde, entonces no podemos ignorar este término constante que se requiere para satisfacer la condición de borde

$$A_\mu(z \rightarrow 0) \rightarrow n_\mu e^{iq \cdot x} \Rightarrow q \cdot A|_{z=0} = q \cdot n e^{iq \cdot x} = \text{const.} \quad (7.3.30)$$

La solución completa no normalizable toma la forma

$$A_\mu = \left[c_\mu q z K_1(qz) + \frac{(q \cdot A) q_\mu}{q^2} \right] e^{iq \cdot x} \quad (7.3.31)$$

e imponiendo la condición de borde obtenemos

$$c_\mu = n_\mu - \frac{(q \cdot n) q_\mu}{q^2}. \quad (7.3.32)$$

En el caso del *gauge* de tipo Lorenz simplemente $c_\mu = n_\mu$ (y $A_z \neq 0$). La corriente asociada al dilatón es $J_m = i\mathcal{Q}(\phi_I \partial_m \phi_X^* - \phi_X^* \partial_m \phi_I)$ en donde el estado incidente ϕ_I como posee $p \ll q$ puede aproximarse por su desarrollo asintótico cerca del borde dado por una potencia de z . En cambio el estado intermedio ϕ_X corresponde a una excitación escalar de Kaluza-Klein con solución,

$$\phi_X = e^{i(p+q)x} \frac{C z^2}{R^4} J_{\Delta-2}(s^{1/2} z) Y(\Omega). \quad (7.3.33)$$

Debemos considerar la función completa en vez de aproximarla por su desarrollo asintótico ya que $s^{1/2}$ es del mismo orden que q . La dependencia en Λ y s de C se obtiene de la normalización del modo escalar siguiendo la cuantización canónica tomando el valor

$$C = C_x s^{1/4} \Lambda^{1/2} \quad (7.3.34)$$

con C_x una constante adimensional.

La acción de interacción evaluada *on-shell* en el *gauge* considerado es

$$\begin{aligned} S_{A\phi\phi} &= i\mathcal{Q} \int d^{10}x \sqrt{-g} A^m J_m = i\mathcal{Q} \int d^{10}x \sqrt{-g} A^\mu J_\mu, \\ &= i\mathcal{Q} \int d^{10}x \sqrt{-g} \phi_I \phi_X^* A^\mu (2P_\mu + q_\mu), \end{aligned} \quad (7.3.35)$$

que representa el término proveniente de las funciones de Bessel y otro de la constante en z de A_μ . El primero genera exactamente la integral en z obtenida en el *gauge* del tipo Lorenz dada por $z^\Delta J_{\Delta-2}(s^{1/2} z) K_1(qz)$, y notando que la contracción es ahora

$$c^\mu (2P_\mu + q_\mu) = \left(n_\mu - \frac{(q \cdot n) q_\mu}{q^2} \right) (2P_\mu + q_\mu) \propto n \cdot \left(P + \frac{q}{2x} \right), \quad (7.3.36)$$

se encuentra exactamente la misma contribución de [57]. Esto significa que el otro término debe anularse. Esto es lo que sucede ya que A_m no decae tan rápidamente con z en el espacio de fondo, y no podemos utilizar el comportamiento asintótico para el estado entrante, la integral en z toma la forma

$$\begin{aligned} &\int_0^{z_0} dz z J_{\Delta-2}(s^{1/2} z) J_{\Delta-2}(Pz) = \\ &\frac{z_0}{s - P^2} \left[s J_{\Delta-3}(s^{1/2} z_0) J_{\Delta-2}(Pz_0) - P J_{\Delta-2}(s^{1/2} z_0) J_{\Delta-3}(Pz_0) \right], \end{aligned} \quad (7.3.37)$$

³Esto es importante ya que este término genera una solución mucho más complicada para el caso masivo.

donde $z_0 = 1/\Lambda$, representa el *cut-off* radial en el espacio AdS₅. Tomando en cuenta que $J_{\Delta-2}$ debe anularse en z_0 , se prueba que el término constante que aparece en el gauge axial no contribuye a las funciones de estructura.

Utilizando la dualidad AdS/CFT obtenemos el elemento de matriz que define al tensor hadrónico en términos de la acción de interacción

$$n_\mu \langle P + q, X | J^\mu(0) | P, Q \rangle = 2\mathcal{Q}c_i C_x s^{1/4} \Lambda^{\Delta-1/2} q n_\mu \left(P^\mu + \frac{q^\mu}{2x} \right) \int_0^{z_0} dz z^\Delta J_{\Delta-2}(s^{1/2}z) K_1(qz) \quad (7.3.38)$$

En esta integral se puede aproximar la función de onda del hadrón incidente por su desarrollo asintótico en torno a $z \rightarrow 0$ ya que se satisface la condición $q \gg p$. Tomando como aproximación $z \rightarrow \infty$ para obtener una solución analítica la integral toma el valor

$$2^{\Delta-1} \Gamma(\Delta) \frac{s^{\Delta/2-1} q}{(s+q^2)^\Delta}. \quad (7.3.39)$$

Siguiendo la ecuación (7.3.5), aplicando el teorema óptico se debe sumar sobre las excitaciones radiales de los estados intermedios. Se pueden estimar la densidad de estados dados por un *cut-off* en z_0 conociendo la distribución de ceros de las funciones de Bessel que genera una torre de masas, con n entero positivo

$$M_n = n\pi\Lambda. \quad (7.3.40)$$

En el límite de $N_c \rightarrow \infty$ se debe sumar sobre las deltas de Dirac pero para $\Lambda \ll q$ se tiene

$$\sum_n \delta(M_n^2 - s) \sim \left(\frac{\partial M_n^2}{\partial n} \right)^{-1} \sim (2\pi s^{1/2} \Lambda)^{-1}. \quad (7.3.41)$$

Reemplazando se obtiene finalmente

$$\text{Im}(T^{\mu\nu}) = A_0 \mathcal{Q}^2 \left(P^\mu + \frac{q^\mu}{2x} \right) \left(P^\nu + \frac{q^\nu}{2x} \right) \Lambda^{2\Delta-2} q^{-2\Delta} x^{\Delta+2} (1-x)^{\Delta-2}. \quad (7.3.42)$$

El resultado depende de la normalización $A_0 = 2^{2\Delta} \pi |c_i|^2 |c_X|^2 \Gamma(\Delta)^2$. Se obtienen como funciones de estructura:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = A_0 \mathcal{Q}^2 \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta-1} x^{\Delta+1} (1-x)^{\Delta-2} \quad (7.3.43)$$

Este resultado representa la dispersión inelástica profunda de un leptón por un campo escalar en el límite de $N \rightarrow \infty$ y acoplamiento fuerte. El leptón dispersado cambia a un estado excitado dado por ϕ_X , pero no se fragmenta.

7.4. Cálculo de los diagramas de Witten en supergravedad con dos estados intermedios

La métrica de la teoría dual es una deformación de $AdS_5 \times S^5$ con radio R , que toma la siguiente forma

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2) + R^2 d\Omega_5^2, \quad (7.4.1)$$

donde $z = R^2/r$. En este sistema de coordenadas el borde conforme del espacio Anti de Sitter se encuentra en $z = 0$, que corresponde a $r \rightarrow \infty$. Para simular el confinamiento en la escala de

energía infrarroja de la teoría de gauge introduciremos un corte (*cutt-off*) en la coordenada r_0 que inducirá una escala de confinamiento $\Lambda = \frac{r_0}{R^2} = z_0^{-1}$. A continuación derivaremos brevemente el espectro de fluctuaciones bosónicas alrededor de la de supergravedad del tipo IIB que serán relevantes para calcular los diagramas de Witten (ver [64]). Los campos relevantes en nuestro cálculo son la métrica $G_{MN} = g_{MN} + h_{MN}$, el campo complejo ϕ y la 4-forma de Ramond-Ramond A_4 . Tenemos una contribución a orden 0 de la F_5 asociada a la 4-forma ($dF_5 = A_4$),

$$F_{mnopq} = \frac{1}{R} \epsilon_{mnopq}, \quad F_{abcde} = \frac{1}{R} \epsilon_{abcde}, \quad (7.4.2)$$

donde ϵ es la densidad pseudo-tensorial de Levi-Civita y los índices m, n corren sobre el AdS_5 y los a, b sobre la S^5 . Expandiremos las ecuaciones de movimiento a orden cuadrático para obtener los términos cinéticos. Empezaremos expandiendo las soluciones sobre la S^5 mediante la descomposición de Kaluza-Klein en una base de armónicos esféricos. Los campos de supergravedad transforman según las distintas representaciones del grupo $SO(6)$ de isometrías de la esfera, por lo tanto incluiremos armónicos esféricos escalares, vectoriales y tensoriales (simétricos y antisimétricos) que escribiremos $Y^l(\Omega)$, $Y_a^l(\Omega)$, $Y_{(a,b)}^l(\Omega)$, $Y_{[a,b]}^l(\Omega)$, respectivamente. Estos son autofunciones del Laplaciano angular ∇^2 ⁴, satisfaciendo las siguientes ecuaciones

$$\nabla^2 Y^l(\Omega) = -\frac{1}{R^2} k(k+4) Y^l(\Omega) \quad (7.4.3)$$

con k entero. Separamos las distintas componentes de la métrica sobre el AdS_5 y la S^5 de la siguiente forma

$$\begin{aligned} G_{mn} &= g_{mn}^{(AdS)} + \tilde{h}_{mn}, & \tilde{h}_{mn} &= h_{mn} - \frac{1}{3} g_{mn}^{(AdS)} h_a^a, \\ G_{ma} &= h_{ma}, & G_{ab} &= g_{ab}^{S^5} + h_{ab}, \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

y fijando las condiciones de gauge de De Donder $D^a h_{(ab)} = 0$ y $D^a h_{am} = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} h_{mn}(y, \Omega) &= \sum_l H_{mn}^l(y) Y^l(\Omega), & h_{ma}(y, \Omega) &= \sum_l A_m^l(y) Y_a^l(\Omega), \\ h_{(ab)}(y, \Omega) &= \sum_l \phi^l(y) Y_{(ab)}^l(\Omega), & h_a^a(y, \Omega) &= \sum_l \pi^l(y) Y^l(\Omega), \end{aligned}$$

donde y corresponde a las coordenadas del AdS_5 mientras que Ω corresponde a las coordenadas angulares sobre la S^5 . Las derivadas covariantes D^a solo contiene la métrica de fondo. Del mismo modo expandimos los demás campos, como por ejemplo A_4

$$a_{mabc}(y, \Omega) \equiv \sum_l a_m^l(y) \epsilon_{abc}{}^{de} D_d Y_e^l(\Omega). \quad (7.4.5)$$

La descomposición de Kaluza-Klein simplifica las ecuaciones, introduciendo una torre de masas asociadas a campos efectivos sobre el AdS_5 . Combinando la 4-forma y el gravitón obtenemos ecuaciones para 3 campos escalares, 2 vectoriales y uno tensorial con números cuánticos detallados en la tabla 7.1. Notar que los modos h_{mn} con masa de Kaluza-Klein nula corresponden a gravitones de la teoría efectiva sobre el AdS_5 . A continuación derivaremos las ecuaciones de movimiento.

Los modos bosónicos normalizados que corresponden a los estados entrantes deducidos en la Sección 7.3 poseen genéricamente la siguiente forma

$$\Phi_{m_1 \dots} \sim \epsilon_{m_1 \dots} e^{ip \cdot x} z^\alpha J_{\Delta(k)-2}(pz) Y^{l(k)}(\Omega), \quad (7.4.6)$$

⁴El Laplaciano en el espacio AdS_5 lo denotamos con \square .

Campo	Espín	Armado con	$m^2(k)$	$\Delta(k)$	\mathcal{O}_{QFT}	$SU(4)_R$
ϕ	$(0, 0)$	ϕ	$k(k+4), k \geq 0$	$k+4$	$\text{Tr}(F^2 X^k)$	$(0, k, 0)$
s	$(0, 0)$	h^a_a, a_{abcd}	$k(k-4), k \geq 2$	k	$\text{Tr}(X^k)$	$(0, k, 0)$
t	$(0, 0)$	h^a_a, a_{abcd}	$(k+4)(k+8), k \geq 0$	$k+8$	$\text{Tr}(F\tilde{F}\lambda\bar{\lambda}X^k)$	$(0, k, 0)$
Ω	$(0, 0)$	$h_{(ab)}$	$k(k+4), k \geq 2$	$k+4$	$\text{Tr}(\lambda\lambda\bar{\lambda}\bar{\lambda}X^k)$	$(2, k-2, 2)$
A_m	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	h_{ma}, a_{mabc}	$(k-1)(k+1), k \geq 1$	$k+3$	$\text{Tr}(\lambda\bar{\lambda}X^k)$	$(1, k-1, 1)$
B_m	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	h_{ma}, a_{mabc}	$(k+3)(k+5), k \geq 1$	$k+7$	$\text{Tr}(F\tilde{F}\lambda\bar{\lambda}X^k)$	$(1, k-1, 1)$
$h_{(mn)}$	$(1, 1)$	$h_{(mn)}$	$k(k+4), k \geq 0$	$k+4$	$\text{Tr}(F\tilde{F}X^k)$	$(0, k, 0)$

Cuadro 7.1: Algunas características importantes que son relevantes en nuestros cálculos de las fluctuaciones de supergravedad del tipo IIB en el espacio $\text{AdS}_5 \times S^5$. Los enteros k están asociados a la representación irreducible de $SO(6) \sim SU(4)_R$ y definen las correspondientes masas de Kaluza-Klein. También se detalla la relación entre el k y la dimensión conforme del operador Δ .

donde p corresponde al momento 4-dimensional sobre las coordenadas del borde, $\epsilon_{m_1\dots}$ el tensor de polarización y α es una potencia. La diferencia de las soluciones utilizadas con el caso conforme provienen del *cut-off* infrarrojo r_0 , que impone una condición de contorno análoga al de una partícula en un caja. Esta condición de borde implica que p y por lo tanto las masas sean discretas de modo que se satisfaga $J_{\Delta(k)-2}(pz_0) = 0$.

7.4.1. Reglas de selección de los vértices de interacción

Los distintos campos escalares, tensoriales y vectoriales estudiados previamente pueden interactuar de formas complicadas. Estas interacciones pueden ser obtenidas directamente de la acción de supergravedad del tipo IIB realizando la expansión de los campos en términos de los armónicos esféricos sobre la S^5 . Sin embargo, detrás de la apariencia de los vértices que intervienen es importante considerar las reglas de selección dadas por el hecho que las partículas pertenecen a representaciones del grupo de isometrías $SO(6) \sim SU(4)$. Las representaciones de menor dimensión en la cual estos campos se encuentran pueden ser vistas en [64, 61].

Las reglas de selección pueden ser escritas en términos de los coeficientes de Clebsh-Gordon de la descomposición del producto tensorial en representaciones irreducibles del grupo $SU(4)$ dado en notación de la tabla 7.1 por

$$(0, k_1, 0) \otimes (0, k_2, 0) = \bigoplus_{i=0}^{k_2} \bigoplus_{j=0}^{k_2-i} (j, k_1 + k_2 - 2i - 2j, j), \quad k_2 \leq k_1, \quad (7.4.7)$$

y de manera similar para el producto $(0, k_1, 0) \otimes (1, k_2, 1)$. Físicamente, un coeficiente nulo implica que si en un proceso de dispersión en donde dos estados iniciales pertenecen a las primeras dos representaciones irreducibles, entonces una partícula perteneciente a la tercera representación no puede ser un estado final. Junto con la reducción de la acción de diez dimensiones a una acción efectiva de 5 dimensiones, estas reglas indican cuales son los índices de las funciones de Bessel que estarán presentes en las interacciones a la hora de calcular la amplitud del proceso

dual. En términos de nuestras soluciones, estos coeficientes están dados por integrales angulares entre combinaciones de distintos armónicos esféricos sobre la S^5 [63, 65]:

$$a_{123} = a(k_1, k_2, k_3) = \int_{S^5} d\Omega_5 Y^{k_1} Y^{k_2} Y^{k_3}, \quad (7.4.8)$$

$$b_{123} = b(k_1, k_2, k_3) = \int_{S^5} d\Omega_5 Y_a^{k_3} D^a Y^{k_2} Y^{k_3}, \quad (7.4.9)$$

$$c_{123} = c(k_1, k_2, k_3) = \int_{S^5} d\Omega_5 D^a Y^{k_1} D^b Y^{k_2} Y_{(ab)}^{k_3}. \quad (7.4.10)$$

Las primeras integrales aparecen cuando estudiamos la interacción entre los escalares tipo s , t , ϕ o campos tensoriales en la representación $(0, k_i, 0)$. En esta sección utilizamos t y s , del mismo modo que se hace en la bibliografía, para denotar los escalares formados de combinaciones de perturbaciones de campos del *bulk* y no deben confundirse con las variables Maldelstan utilizadas en las siguientes secciones y denotadas de la misma forma. En las segundas integrales intervienen dos escalares y un vector. Estas dos aparecerán en el cálculo de la amplitud. La tercera se detalla por completitud y posee dos campos escalares y un campo Ω . Estos factores están presentes en el acoplamiento de estos vértices.

Las reglas de selección relevantes para los diagramas que consideraremos son los siguientes:

1. Cuando dos escalares en la representación $(0, k_1, 0)$ y $(0, k_2, 0)$ intervienen en la interacción de tres partículas, las partículas relevantes que pueden estar son

- Partículas s , t , ϕ o h en la representación $(0, k_3^{(1)}, 0)$ con $|k_1 - k_2| \leq k_3^{(1)} \leq k_1 + k_2$,
- Partículas vectoriales en la representación $(1, k_3^{(2)}, 1)$ con $|k_1 - k_2| + 1 \leq k_3^{(2)} \leq k_1 + k_2 - 1$,
- Escalares Ω pertenecientes a la representación $(2, k_3^{(3)}, 2)$ con $|k_1 - k_2| + 2 \leq k_3^{(3)} \leq k_1 + k_2 - 2$,

donde todos los índices k_3 saltan de a dos unidades cada vez.

2. Cuando una partícula escalar y una vectorial pertenecientes a las representaciones $(0, k_s, 0)$ y $(1, k_v, 1)$ respectivamente interactúan de modo que las posibles partículas resultantes son

- Partículas s , t , ϕ o h en la representación $(0, k_3^{(1)}, 0)$ con $|k_1 - k_2| + 1 \leq k_3^{(1)} \leq k_1 + k_2 - 1$,
- Partículas vectoriales en la representación $(1, k_3^{(2)}, 1)$ con $|k_1 - k_2| \leq k_3^{(2)} \leq k_1 + k_2$,
- Escalares Ω en la representación $(2, k_3^{(3)}, 2)$ con $|k_1 - k_2| + 1 \leq k_3^{(3)} \leq k_1 + k_2 - 1$,

donde todos los k_3 toman valores como antes.

Se observa que en todos los casos los enteros k asociados con cada partícula están acotados inferiormente. De hecho, las partículas no masivas en general corresponden a la menor representación, dados por $k = 1$ para vectores y $k = 0$ para escalares y tensores. Hay una excepción dado por el escalar $s_{k=2}$. Consideremos el caso en que un modo vectorial no masivo interactúe con un partícula escalar dada. La excitación vectorial solo puede pertenecer a la representación $(1, 0, 1)$, mientras que la escalar a la representación $(0, k, 0)$ para algún entero k asociado con su dimensión Δ como se indica en la tabla 7.1. Luego, la segunda regla de selección implica que si estamos buscando que la partícula saliente sea un escalar s , t o ϕ , solo podemos tener algún campo perteneciente a la misma representación $(0, k, 0)$. Ahora, la representación vectorial que

elegimos corresponde al campo A_m que representa nuestro fotón holográfico *i.e.* la fluctuación del gravifotón sobre el borde. Por lo tanto del mismo modo que para la interacción $S_{\phi\phi A}$ de [23], no hay *mezcla* para el vértice S_{ssA} .

7.4.2. Vértices de interacción y el diagrama más relevante

En esta sección vamos a analizar los vértices más relevantes. Comenzamos con la interacción de dos dilatones con un escalar s proveniente de una fluctuación de la métrica, correspondiente al proceso $\phi \rightarrow s + \phi$. Este vértice de interacción $S_{s\phi\phi}$ solo puede provenir del término cinético del dilatón

$$\int d^{10}x \sqrt{-G} G^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi. \quad (7.4.11)$$

La única fluctuación de la métrica que no podemos apagar es una combinación de modos de (7.4.5) y viene dada por

$$\tilde{h}_{(mn)}^k = D_{(m} D_{n)} \left[\frac{2}{5(k+1)(k+3)} (\pi^k - 30b^k) \right], \quad (7.4.12)$$

con

$$\begin{aligned} b^k &\equiv t^k - s^k, \\ \pi^k &\equiv 10[(k+4)t^k + ks^k]. \end{aligned}$$

Luego perturbamos la métrica,

$$\sqrt{-G} \approx \sqrt{-g} \left(1 + \frac{1}{2} h_M^M \right), \quad G^{MN} \approx g^{MN} - h^{MN}, \quad (7.4.13)$$

donde los índices se suben y bajan con la métrica sin perturbar g . Reemplazamos en el término cinético, eligiendo $t^k = 0$ e integrando por partes obtenemos los siguientes términos de interacción

$$\begin{aligned} S_{s\phi\phi} &= \frac{1}{2\kappa_5^2} \int_{AdS_5} dx^5 \sqrt{g_{AdS_5}} a_{123} \times \\ &\quad \left[\frac{2k_1^2}{k_1+1} s_1 D_m \phi_2 D^m \phi_3 - \frac{2}{k_1+1} D_m D_n s_1 D^m \phi_2 D^n \phi_3 \right] \\ &= \frac{1}{2\kappa_5^2} \int_{AdS_5} dx^5 \sqrt{g_{AdS_5}} a_{123} s_1 \phi_2 \phi_3 \times \\ &\quad \left[\frac{k_1^2}{k_1+1} (m_1^2 - m_2^2 - m_3^2) + \frac{1}{2(k_1+1)} ((m_2^2 - m_3^2)^2 - m_1^4) \right]. \end{aligned} \quad (7.4.14)$$

Las masas corresponden a los autovalores de los armónicos esféricos en la expansión de KK. El campo ϕ_i corresponde al modo ϕ con $k = k_i$ y su correspondiente masa de KK es $m_i^2 = m_\phi^2(k_i)$. Si escribimos las masas en términos de k_i y definimos a $\Sigma = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3)$ y $\alpha_i = \Sigma - k_i$ obtenemos el lagrangiano simplificado

$$S_{s\phi\phi} = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int_{AdS_5} d^5x \sqrt{g_{AdS_5}} \lambda_{123} s_1 \phi_2 \phi_3, \quad (7.4.15)$$

donde la constante de acoplamiento viene dada por

$$\lambda_{123} = \frac{-8 \alpha_3 \alpha_2 (\alpha_1 + 2) (\Sigma + 2)}{k_1 + 1} a_{123}. \quad (7.4.16)$$

El signo de la constante de acoplamiento es irrelevante en nuestro análisis ya que el resultado final es proporcional a λ_{123}^2 . Notar que λ_{123} se anula para $k_1 = |k_2 - k_3|$ (y además para $k_1 = k_2 + k_3 + 4$) eliminando algunos posibles diagramas. De hecho, para $k_1 = 2$ la regla de selección permite los casos $k_3 = k_2 - 2, k_2, k_2 + 2$, y por lo tanto nos quedamos con el caso $k_3 = k_2$. Esto se debe a que no necesitamos considerar términos de superficie ya que estamos considerando soluciones normalizadas y éstas se anulan en el borde.

Podemos realizar la integral *on-shell* en las coordenadas de AdS_5 usando las soluciones de los modos normalizados. Las integrales en las coordenadas del borde generan una delta de conservación. Luego a partir de que el determinante va como z^{-5} y las soluciones de los modos normalizados tienen la forma $z^2 J_{\Delta_i-2}(pz)$, obtenemos una integral en la variable z de la forma

$$\int_0^{z_0} dz z J_{\Delta_1-2}(az) J_{\Delta_2-2}(bz) J_{\Delta_3-2}(cz), \quad (7.4.17)$$

donde a, b y c son las masas de AdS . Esta integral es complicada y no se conoce una expresión analítica. La forma de tratarla es notar que la mayor contribución proviene de la región $z \rightarrow z_0$ y para los cálculos numéricos podemos aproximar las funciones de Bessel por su desarrollo asintótico

$$J_m(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (7.4.18)$$

Se puede obtener intuición de los procesos cerca de $z \rightarrow z_0$ en los casos donde la integral es conocida (ver apéndice A). En los casos donde no la conocemos se considerará el análisis semi-empírico aproximando las funciones de Bessel en el trabajo [66] en donde se toma límite $z_0 \rightarrow \infty$ y se concluye que la integral es distinta de cero solo en los casos en que las masas coinciden con la suma de las otras.

Por otro lado para armar el diagrama necesitamos el vértice de interacción del escalar s con el campo de gauge A_m asociado a la corriente. Este tipo de interacción ha sido estudiado en la bibliografía [65, 67] en el contexto del cálculo de funciones de correlación de n puntos de operadores quirales primarios calculados con la dualidad AdS/CFT . El procedimiento para derivar los vértices de interacción se diferencia del anterior utilizando las ecuaciones de movimiento en conjunto con la condición de autodualidad de la F_5 en vez de trabajar con la acción en 10 dimensiones. Los autores calculan las correcciones a orden cúbico y cuadrático a las ecuaciones y obtienen los términos de interacción presentes en la acción al orden relevante en las correcciones. Notar que en este contexto la integración por partes y los términos de superficie aparecen como redefiniciones que simplifican la acción. El resultado del término de interacción cúbico entre A_m y dos escalares s [67] es

$$S_{ssA} = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int_{AdS_5} d^5x \sqrt{-g} G_{123} A_1^m s_2 \partial_m s_3, \quad (7.4.19)$$

con una constante de acoplamiento en términos de los índices k_1, k_2 y k_3

$$G_{123} = \frac{2^5(k_1+1)(\Sigma^2 - \frac{1}{4})(\Sigma + \frac{3}{2})(\alpha_1 - \frac{1}{2})}{(k_1+2)(k_2+1)(k_3+1)} b_{123}. \quad (7.4.20)$$

La conclusión a la que se llega es que el modo s interactúa con el campo de gauge del mismo modo que el dilatón. El caso $k_2 = k_3 = 2$ será importante para nuestro cálculo. Considerando el campo escalar complejo como en [23] encontraremos exactamente el mismo tipo de vértice que el de la ecuación (7.2.4) proveniente del campo de gauge y una corriente $U(1)$. Notar que este término debe provenir de

$$\int d^{10}x \sqrt{|-det g|} \left(\mathcal{R}_{10} - \frac{1}{2 \cdot 5!} F_5^2 \right) \text{ con } F_5 = \star F_5. \quad (7.4.21)$$

También por completitud discutiremos diagramas que contienen vértices cuárticos en el diagrama a un *loop* como por ejemplo el cuarto diagrama de la figura 7.1. Este se obtiene de la expansión del término cinético del dilatón. Expandimos el determinante de la métrica en términos de las fluctuaciones obteniendo la siguiente acción en diez dimensiones

$$S_{\phi\phi hh} = \int d^{10}x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} h h^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi + \frac{1}{8} h^2 \partial^P \phi \partial_P \phi + \frac{1}{8} h_N^M h_M^N \partial^P \phi \partial_P \phi + \frac{1}{2} h^{MP} h_P^N \partial_M \phi \partial_N \phi \right), \quad (7.4.22)$$

donde h denota la traza h_M^M . Los campos h y h_{MN} pueden ser expandidos en armónicos esféricos y junto con las fluctuaciones de la F_5 , podemos construir por ejemplo los modos escalares s y t . El segundo término no será considerado por la ausencia de fluctuaciones vectoriales. Los otros tienen acoplados dos dilatones con el A_m y una fluctuación en el espacio AdS_5 .

Se mostrará cuando clasifiquemos los diagramas, que los modos normalizables del dilatón incidente pueden ser aproximados por su expansión asintótica cerca del borde porque es allí donde la interacción tomará lugar. Luego, la integral en z es proporcional a dos funciones J de Bessel y una K . La integral completa puede ser calculada en el apéndice A pero a nosotros nos interesa la dependencia en q :

$$\mathcal{M} \propto \int dz z^{\Delta_1 + \alpha} K_1(az) J_{\Delta_2 - 2}(bz) J_{\Delta_3 - 2}(cz) K_1(qz) \propto a^{-\Delta_1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\Delta_2} \left(\frac{c}{a}\right)^{\Delta_3}, \quad (7.4.23)$$

donde α es una constante que depende de la solución normalizable de los estados intermedios.

Con respecto a la dependencia en R , el radio de AdS , es fácil ver del análisis dimensional que con las normalizaciones utilizadas en [57] la constante de acoplamiento del vértice triple sin derivadas debe ser proporcional a R^2 y los vértices cuárticos proporcionales a R^6 . Esto es importantes para obtener las funciones de estructura adimensionales de la amplitud holográfica. De hecho el resultado final no dependerá de R .

También se debe remarcar que los diagramas generales deben considerar todos los tipos de fluctuaciones, incluyendo los fermiones. No se han discutidos aquí debido a que los diagramas en los que nos hemos enfocados, las reglas de selección junto con el análisis al realizar la reducción dimensional no permiten estas perturbaciones.

Clasificación de los diagramas

Los procesos que consideramos son dispersiones $2 \rightarrow 2$ donde tanto los estados incidentes como los finales son de dos partículas. Tenemos fluctuaciones normalizables del campo de dilatón ϕ_Δ para algún Δ y modos vectoriales no-normalizables A_m que se propagan del borde del espacio AdS_5 hasta el interior. El dilatón es dual al glueball escalar, mientras el campo de gauge corresponde al fotón virtual. Debido a que los modos no normalizables están dados por una función de Bessel de la forma $K_1(qz)$, estos solo viven cerca del borde en la región de z chico. En el límite $N_c \rightarrow \infty$ la creación de partículas no está permitida, y el hadrón holográfico incidente tiene que *tunear* del interior hasta la región donde puede interactuar, aportando a la amplitud un factor de supresión en q dado por $(\Lambda^2/q^2)^{\Delta-1}$. Este puede ser interpretado como la probabilidad de que el hadrón se fragmente en contribuciones de tamaño del orden de $1/q$.

En este caso luego de evaluar las soluciones e integrando en las coordenadas del borde que generan una delta de conservación se obtiene la siguiente integral en la coordenada z .

$$\int_0^{z_0} dz z^2 K_{\Delta_1 - 2}(az) J_{\Delta_2 - 2}(bz) J_{\Delta_3 - 2}(cz). \quad (7.4.24)$$

Similarmente al caso de $N_c \rightarrow \infty$ tratado en [57], tomando en cuenta que la función de Bessel K decae rápidamente para $z \rightarrow \infty$ la integral en la coordenada z es,

$$\int_0^{z_0} dz z^2 J_{\Delta-2}(Pz) J_{\Delta-2}(s^{1/2}z) K_1(qz) \approx 2^{\Delta-1} \Gamma(\Delta) \frac{q s^{\frac{\Delta}{2}-1}}{(s+q^2)^\Delta}, \quad (7.4.25)$$

donde

$$s = -(P+q)^2 \approx -q^2 - 2P \cdot q = -\frac{q^2}{x}(1-x), \quad (7.4.26)$$

es la variable de Mandelstam relacionada con la energía del centro de masa. El momento incidente P no es pequeño en comparación con $s^{1/2}$, nos permite utilizar el desarrollo asintótico de $J_{\Delta-2}(z) \sim z^{\Delta-2}$ para pequeños argumentos. De esta forma el resultado luego de elevar al cuadrado utilizando el teorema óptico (tomando la suma de estados intermedios y las normalizaciones correspondientes) se obtiene la parte imaginaria de las amplitudes escritas en términos de q^2 and x . Estas tienen el factor de supresión en q comentado anteriormente y como se explica en [57], corresponde a lo predicho en el análisis de los OPEs desde teoría de campos y se lo puede observar en el segundo término de la ecuación (7.1.2).

Ahora lo importante es observar que este análisis es correcto para cualquier diagrama donde un escalar interactúa con el A_m que viene del borde de AdS. Esto sucede porque los vértices tienen la misma forma. Más allá del límite de $N_c \rightarrow \infty$ pueden contribuir diagramas a *one-loop* con diferentes partículas intermedias. Una de estas partículas va interactuar con el fotón virtual. Ya que todas las soluciones son combinación de potencias y funciones de Bessel, deberíamos encontrar integrales similares a las de la ecuación (7.4.25). En consecuencia analizando la supresión de cada diagrama en términos del desarrollo en potencias de Λ^2/q^2 , se puede observar que esta supresión está directamente relacionada con el índice Δ del modo normalizable que interactúa con el campo de gauge. Aquí es donde el límite de q grande se vuelve importante: este clasifica los distintos diagramas de acuerdo a sus pesos relativos en potencias de Λ^2/q^2 e implica que habrá una contribución más dominante (correspondiente a la menos suprimida). Esto está fuertemente respaldado por la ecuación (7.1.2) del OPE, ya que el tercer término posee una contribución con la forma esperada que nos permite decir que esta contribución esta suprimida por un factor $1/N_c^2$ y posee diferentes potencias de Λ^2/q^2 asociadas a diferentes *twists* de operadores que en principio podrían ser menores que el asociado al hadrón incidente completo. Por ejemplo el vértice correspondiente a un diagrama tipo s en los primeros dos casos de la figura 7.1 producirá una supresión similar al diagrama de Witten a orden árbol. Por lo tanto, cuando consideramos que el dilatón entrante se divide en dos partículas, sólo una que carga una fracción del momento interactúa con la perturbación de la métrica que proviene del borde, dejando una supresión relacionada con la naturaleza de la partícula y su masa de Kaluza-Klein, definida a partir de su dimensión conforme Δ' . Esto es consistente con el hecho de que en un proceso como el que describimos, este estado intermedio es el único que *tunelea* a la región de z chico.

Nuestra conclusión es la siguiente: el diagrama dominante corresponderá al que tiene una partícula intermedia, que interactúa con el campo de gauge, con el menor Δ posible. Afortunadamente en el caso a *one loop* existe una sola posibilidad que corresponde a la dimensión conforme $\Delta' = 2$ y está asociado al de menor masa de KK correspondiente al escalar s de la tabla 7.1.

Otra característica interesante que vale la pena comentar es que en el límite de $N_c \rightarrow \infty$ produce una función de estructura $F_1 = 0$ porque el fotón interactúa con el hadrón escalar completo. Más allá de este límite, considerando el proceso de DIS con dos estados hadrónicos finales, se obtiene una F_1 distinta de cero. Esto se debe a que el glueball incidente se divide en dos hadrones y solo uno de ellos interactúa con el A_m en la región próxima al borde. Por lo tanto, hay un conjunto de diagramas que contribuyen para que $F_1 \neq 0$, entre los cuales se encuentra el más relevante.

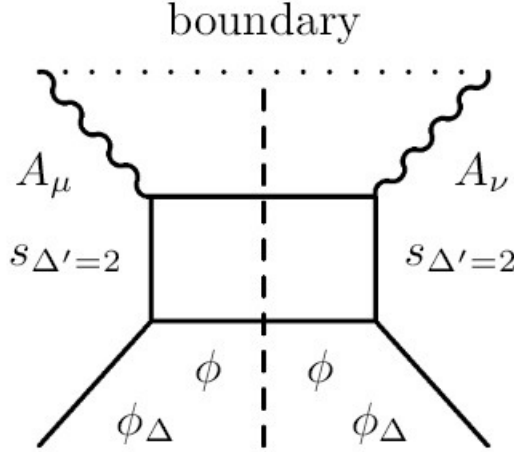


Figura 7.2: Diagrama de Witten correspondiente al FCS con dos estados intermedios. Figura extraída de [1].

A partir del análisis realizado, concluimos que el diagrama más relevante es el mostrado en la figura 7.2. Todos los escalares considerados poseen una carga Q_i bajo la simetría $U(1)$, y suponemos que en cada vértice se conserva. Esto significa que si la carga del hadrón inicial es Q_1 y los estados intermedios poseen cargas Q_2 y Q_3 , entonces $Q_1 = Q_2 + Q_3$.

Podríamos decir que todos los ingredientes parecen fundamentar completamente la conclusión que obtuvimos, pero no es una prueba completa. Ésta es muy difícil de obtener ya que sería necesario obtener las integrales definidas con tres y cuatro funciones de Bessel provenientes de la evaluación de amplitudes y en particular de la integración en z , las cuales no son conocidas analíticamente en todo el régimen paramétrico y para todas las combinaciones de índices. Sin embargo este análisis debería poder extenderse a otras teorías cuyos duales sean asintóticamente $\text{AdS}_5 \times S^5$.

7.5. Resultados de las funciones de estructura

7.5.1. Consideraciones generales

Habiendo identificado el diagrama junto con la interacción más relevante procederemos mediante el teorema óptico a extraer la contribución al orden $1/N_c^2$ del tensor hadrónico y las funciones de estructura. Debemos calcular la amplitud de dispersión del lado izquierdo del corte vertical con estados salientes *on-shell*, luego elevar al cuadrado la amplitud obtenida y finalmente sumar sobre todos los posibles estados intermedios. A diferencia con el caso de Polchinski-Strassler correspondiente al orden más dominante en la expansión en $1/N_c$, tenemos un modo *off-shell* (propagador) que se representa en el diagrama por una línea vertical que va de un vértice al otro. Este estado corresponde a un escalar s con dimensión conforme $\Delta = 2$ y es el menos suprimido en la expansión $\frac{\Lambda^2}{q^2}$.

En la figura 7.3 se detalla el diagrama más relevante junto a la notación de los momentos, masas y dimensiones conformes asociada con cada partícula. Notar que $q^0 = \sqrt{M_2^2 + |\vec{q}'|^2}$ y $p^0 = \sqrt{M_3^2 + |\vec{p}'|^2}$. Es conveniente trabajar en el sistema de referencia del centro de masa en

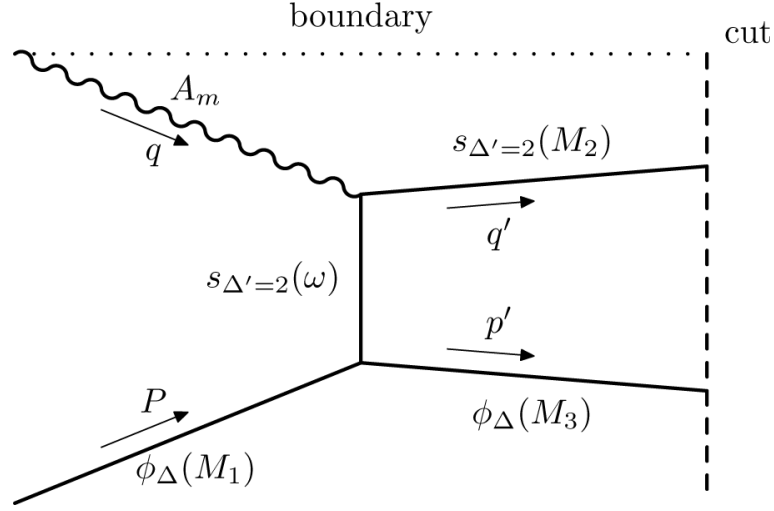


Figura 7.3: Diagrama de Witten correspondiente al lado izquierdo del corte. A los campos asociados a cada línea se le detalla la notación de sus momentos, dimensiones conformes y masas AdS. Figura extraída de nuestro trabajo [1]

donde

$$P^0 = |\vec{P}| = |\vec{q}| = \frac{q}{2\sqrt{x(1-x)}}, \quad |\vec{q}'| = |\vec{p}'| \quad \text{y} \quad q^0 = \frac{(1-2x)q}{2\sqrt{x(1-x)}}. \quad (7.5.1)$$

Para simplificar las expresiones del tensor hadrónico definimos los siguientes vectores

$$v_s^\mu = \frac{1}{q} \left(P^\mu + \frac{q^\mu}{2x} \right) \quad \text{y} \quad v_t^\mu = \frac{1}{q} \left(q'^\mu + \frac{q^\mu}{2y'} \right) \quad \text{con} \quad y' = \frac{-q^2}{2q' \cdot q}. \quad (7.5.2)$$

La variable auxiliar y' es análoga al parámetro de Bjorken para la dispersión del escalar s y el campo de gauge. Del lado de la teoría de campos la contribución al elemento de matriz de dos corrientes electromagnéticas con dos estados intermedios X_1 y X_2 toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \text{Im}(T^{\mu\nu}) &= \pi \sum_{X_1, X_2} \langle P, Q | \tilde{J}^\mu(q) | X_1, X_2 \rangle \langle X_1, X_2 | J^\nu(0) | P, Q \rangle \\ &= \pi \sum_{M_2, M_3} \int \frac{d^3 p'}{2E_{p'}(2\pi)^3} \frac{d^3 q'}{2E_{q'}(2\pi)^3} \langle P, Q | \tilde{J}^\mu(q) | X_1, X_2 \rangle \langle X_1, X_2 | J^\nu(0) | P, Q \rangle \\ &= 4\pi^3 \sum_{M_2, M_3} \int \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} \delta(M_2^2 - q'^2) \delta(M_3^2 - (P + q - q')^2) |\langle P, Q | J^\nu(0) | X_1, X_2 \rangle|^2, \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

donde el subíndice en T corresponde al proceso con dos estados intermedios y el elemento de matriz

$$n_\mu \langle P, Q | \tilde{J}^\mu(q) | X_1, X_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P + q - p' - q') \langle P, Q | n \cdot J(0) | X_1, X_2 \rangle \quad (7.5.4)$$

está identificado mediante la dualidad AdS/CFT con la amplitud en supergravedad. Reemplazando por el diagrama más importante obtenemos el tensor hadrónico en términos de integrales en AdS₅

$$W_2^{\mu\nu} = \sum_{M_2, M_3} c^2 \int \frac{d^3 p'}{2E_{p'}(2\pi)^3} \frac{d^3 q'}{2E_{q'}(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(P + q - p' - q') v_t^\mu v_t^\nu |C_t|^2, \quad (7.5.5)$$

donde $c^2 \equiv c_1^2 c_2^2 c_3^2$ corresponde a la constante de normalización de los campos *on-shell*. El factor complejo contiene toda la información de los vértices, el propagador y los estados del proceso en el AdS₅ con excepción de las integrales de las fases sobre las coordenadas del borde que generan la delta de conservación de momentos.

Podemos separar la contribución a cada función de estructura a partir de la estructura tensorial $v_t^\mu v_t^\nu$ proveniente del diagrama más relevante (canal t) en el cálculo holográfico. Multiplicando por las estructuras tensoriales que acompañan a cada función de estructura en la definición del tensor hadrónico (Capítulo 3), obteniendo las siguientes ecuaciones

$$\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) = \eta_{\mu\nu} W^{\mu\nu} = 3q^2 F_1 + 2xv_s^2 F_2, \quad (7.5.6)$$

$$q^2 (v_s)_\mu (v_s)_\nu W^{\mu\nu} = P_\mu P_\nu W^{\mu\nu} = q^2 v_s^2 F_1 + 2xv_s^4 F_2. \quad (7.5.7)$$

Esto nos permite expresar las funciones de estructura en función de las expresiones holográficas

$$F_1(x, q^2) = \sum_{M_2, M_3} c^2 \int \frac{d^3 p'}{2E_{p'}(2\pi)^3} \frac{d^3 q'}{2E_{q'}(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(P + q - p' - q') |C_t|^2 \\ \times 2q^2 [v_t^2 + 4x^2(v_s \cdot v_t)^2], \quad (7.5.8)$$

$$F_2(x, q^2) = \sum_{M_2, M_3} c^2 \int \frac{d^3 p'}{2E_{p'}(2\pi)^3} \frac{d^3 q'}{2E_{q'}(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(P + q - p' - q') |C_t|^2 \\ \times 4xq^2 [v_t^2 + 12x^2(v_s \cdot v_t)^2]. \quad (7.5.9)$$

Los primeros términos del corchete satisfacen la relación de Callan-Gross al menos al orden $1/N_c$. En cambio los segundos términos generan una contribución a la función de estructura longitudinal no nula definida como

$$F_L = F_2 - 2x F_1. \quad (7.5.10)$$

Las integrales en momentos \vec{p}' y \vec{q}' , junto con la delta de conservación de momento pueden simplificarse en el sistema de centro de masa utilizando coordenadas esféricas. Las integrales se pueden resolver la que corresponde al ángulo θ entre los momentos entrantes q y salientes q' , obteniendo

$$\int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3 2E_{q'}} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P + q - p' - q') (\dots) = \frac{|\vec{p}'|}{8\pi q} \sqrt{\frac{x}{1-x}} \int d\theta \sin \theta (\dots)$$

donde los (\dots) indican los integrandos de las ecuaciones (7.5.8) y (7.5.9) que se pueden escribir en términos de θ y $|\vec{p}'|$ con las definiciones (7.5.2). $|\vec{p}'|$ se calcula resolviendo la siguiente ecuación algebraica

$$q \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \sqrt{|\vec{p}'|^2 + M_2^2} + \sqrt{|\vec{p}'|^2 + M_3^2}. \quad (7.5.11)$$

Hay un factor c^2 que corresponde al producto de las constantes de normalización de todos los estados que participan del procesos y está dado por $c_1^2 c_2^2 c_3^2$. Si suponemos que las masas son conocidas es fácil calcular estas constantes ya que en todos los casos la normalización de la integral está dominada por la región $z \sim z_0 = \Lambda^{-1}$. Los argumentos de las funciones de Bessel no pueden ser chicos, y por lo tanto podemos utilizar la expresión asintótica (7.4.18). De esta forma la solución del campo escalar *on-shell* asociada con esta función de Bessel $J_{\Delta-2}$ viene con una constante de normalización c_Δ tal que

$$c_\Delta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{z_0 |J_{\Delta-1}(kz_0)|} \right)^2 \sim \frac{kz_0}{z_0^2} = k\Lambda, \quad (7.5.12)$$

a menos de un factor numérico. En el último paso utilizamos el hecho que debido a que kz_0 es un cero de $J_{\Delta-2}$, este debe ser un mínimo o un máximo de $J_{\Delta-1}$ por las relaciones de recursión de las derivadas de estas funciones.

Luego tenemos una suma sobre las masas de los estados intermedios *on-shell* M_2 y M_3 (se suma sobre los índices de la ecuación 7.3.40). Las masas están acotadas por la conservación de la energía (7.5.11). Por lo tanto esquemáticamente tenemos que

$$\sum_{M_2 M_3} \equiv \sum_{M_2=0}^{q\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \sum_{M_3=0}^{q\sqrt{\frac{1-x}{x}} - M_2} . \quad (7.5.13)$$

El escalar complejo C_t contiene la información de los vértices, los propagadores y las constantes de acoplamiento con los correspondientes índices de los armónicos esféricos. En los cálculos siguientes todas las constantes de acoplamientos vamos a agruparlas en un factor adimensional B independiente de q^2 y x cuya forma exacta es irrelevante para nuestras conclusiones. Podemos mover hacia afuera la integral en ω del propagador (ver Apéndice A) factorizando las integrales en z y z'

$$C_t = q \int d\omega \frac{\omega}{\omega^2 + (P - p')^2} S_{ssA}^{(z)}(M_2, q, \omega) S_{s\phi\phi}^{(z')}(M_1, M_3, \omega) \quad (7.5.14)$$

donde $S_{ssA}^{(z)}$ y $S_{s\phi\phi}^{(z')}$ son integrales en z y z' respectivamente. A continuación explicaremos cómo se resuelven las integrales y se reemplazan los términos. Tenemos:

- Una integral (o suma) en la variable ω de los campos intermedios s y sus propagadores dados por

$$\frac{\omega}{\omega^2 + (P - p')^2} = \frac{\omega}{\omega^2 - M_1^2 - M_3^2 + \frac{q}{\sqrt{x(1-x)}} \left(\sqrt{|\vec{p}'|^2 + M_3^2} - |\vec{p}'| \cos \theta \right)}. \quad (7.5.15)$$

- Una integral asociada con la interacción entre los tres modos escalares (2 dilatones y el escalar s)

$$S_{s\phi\phi}^{(z')} = \int_0^{z_0} dz' z'^2 J_{\Delta-2}(M_1 z') J_0(\omega z') J_{\Delta''-2}(M_3 z'), \quad (7.5.16)$$

donde Δ es la dimensión conforme del operador correspondiente al dilatón inicial, mientras que Δ'' está asociado con el dilatón correspondiente al estado intermedio con masa M_3 . La principal contribución a esta integral esta dada por la región $z \sim z_0 \gg 1$. Así, podemos aproximar las funciones de Bessel con argumentos grandes. Considerando ambas aproximaciones de las integrales y la integración numérica encontramos que esta integral se comporta como (A.0.1)

$$S_{s\phi\phi}^{(z')} \sim \frac{1}{\sqrt{M_1 M_3}} [\delta(\omega - |M_1 - M_3|) \pm \delta(\omega - (M_1 + M_3))], \quad (7.5.17)$$

donde la dependencia en Δ y Δ'' está solo reflejada en el signo \pm frente a cada término. Esto nos permitirá realizar la integral en ω .

- Una integral asociada con el vértice de interacción entre dos campos s y la perturbación vectorial no-normalizable A_m . Utilizando el *gauge* axial, la correspondiente integral en z se vuelve

$$S_{ssA}^{(z)} = \int_0^{z_0} dz z^2 K_1(qz) J_0(\omega z) J_0(M_2 z), \quad (7.5.18)$$

donde la función de Bessel $K_1(qz)$ rápidamente decrece en interior del espacio AdS permitiendo aproximar el límite superior por $z \rightarrow +\infty$. Podemos resolver la integral utilizando la ecuación (A.0.3) con $\rho = 3$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$ and $\nu = 1$ del apéndice A. Para $\omega \ll q$ la expresión para las funciones de Bessel $J_0(\omega z)$ con argumento pequeño puede ser utilizado, y esto corresponde a considerar $J_0(\omega z) \sim 1$. Por lo tanto de la ecuación (A.0.4), se obtiene

$$S_{ssA}^{(z)} = \frac{2q}{(M_2^2 + q^2)^2}. \quad (7.5.19)$$

Notar que tanto para $M_2 \ll 1$ y $M_2 \sim q$ esta genera un factor q^{-3} .

Debemos recordar que los factores que aparecen en los items mencionados entran en la definición de C_t , y por lo tanto deben elevarse al cuadrado generando $|C_t|^2$ antes de realizar la integral angular.

Finalmente podemos simplificar las integrales de las funciones de estructura en términos de un integral angular:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_L \end{pmatrix} = \frac{B}{N_c^2} \sum_{M_1 M_2} c^2 \frac{q|\vec{p}'|}{8\pi} \sqrt{\frac{x}{1-x}} \int d\theta \sin \theta \begin{pmatrix} v_t^2 + 4x^2(v_s \cdot v_t)^2 \\ 2x[v_t^2 + 12x^2(v_s \cdot v_t)^2] \\ 16x^3(v_s \cdot v_t)^2 \end{pmatrix} |C_t|^2 \quad (7.5.20)$$

El factor $\frac{1}{N_c}$ proviene de haber normalizado canónicamente en N_c los campos. Los factores en los paréntesis se pueden escribir en términos de las masas, los momentos, el parámetro de Bjorken y el ángulo θ como se detalla a continuación,

$$\begin{aligned} & \frac{|\vec{p}'|^2}{q^2} [1 - \cos^2 \theta], \quad \frac{1}{(1-x)q^2} \left[(q'^0 + (2x-1)|\vec{p}'| \cos \theta)^2 \right] \\ & \text{y} \quad \frac{1}{(1-x)q^2} \left[2x(1-x)|\vec{p}'|^2 (1 - \cos^2 \theta) + (q'^0 + (2x-1)|\vec{p}'| \cos \theta)^2 \right] \end{aligned} \quad (7.5.21)$$

para F_1 , F_L y F_2 , respectivamente.

7.5.2. Integrales angulares y resultados de las funciones de estructura

En esta sección discutiremos las integrales angulares. El factor que depende del ángulo θ es $|C_t|^2$ (que posee un dependencia en $(P - p')^2$ en el denominador del propagador) multiplicado por la combinación de v_t^2 y $(v_s \cdot v_t)^2$ para cada función de estructura.

La función de estructura longitudinal F_L , en la cual nos enfocaremos, toma la siguiente expresión

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{1}{N_c^2} B^2 \sum_{M_2, M_3} \Lambda^3 M_1 M_2 M_3 \int d\theta \sin(\theta) \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{x}{1-x}} |\vec{p}'| q^3 \left[\frac{(q'^0 + (2x-1)|\vec{p}'| \cos(\theta))^2}{(1-x)q^2} \right] \\ &\times \left(\int d\omega \frac{\omega}{\omega^2 + (P - p')^2 - i\epsilon} S_{s\phi\phi}^{(z')}(\omega, M_1, M_3) S_{ssA}^{(z)}(\omega, q, M_2) \right)^2. \end{aligned} \quad (7.5.22)$$

Utilizando la ecuación (7.5.17) la integral se convierte en

$$F_L = \frac{1}{N_c^2} B^2 \sum_{M_2, M_3} \Lambda^3 M_2 \int d\theta \sin(\theta) \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{x}{1-x}} |\vec{p}'| q^3 \left[\frac{(q^0 + (2x-1)|\vec{p}'| \cos(\theta))^2}{(1-x)q^2} \right] \times \left(\int d\omega \frac{\omega}{\omega^2 + (P-p')^2 - i\epsilon} [\delta(\omega - |M_1 - M_3|) \pm \delta(\omega - (M_1 + M_3))] S_{Ass}^{(z)}(\omega, q, M_2) \right)^2. \quad (7.5.23)$$

Consideremos el caso $M_3 \ll q$ y $|\vec{p}'| \sim q$ que genera la contribución más relevante ⁵. Las condiciones sobre $M_1 \ll q$ implica que $\omega = |M_1 \pm M_3| \ll q$ permitiendo resolver la integral aproximadamente $S_{ssA}^{(z)}(|M_1 \pm M_3|, q, M_2)$ de (7.5.19). Para resolver la integral en θ podemos expandir el denominador en el propagador considerando $M_3 \ll |\vec{p}'|$. Estas restricciones imponen una condición en el límite superior de M_2 de la sumatoria, ya que para M_2 cercano al máximo podemos ver de la definición (7.5.11) que $|\vec{p}'|$ debería ser de menor orden o anularse. Expandiendo p^0 y p'^0 , se obtiene

$$p'^0 = \sqrt{|\vec{p}'|^2 + M_3^2} \approx |\vec{p}'| + \frac{M_3^2}{2|\vec{p}'|} - \frac{M_3^4}{8|\vec{p}'|^3}, \quad (7.5.24)$$

$$p^0 = \sqrt{|\vec{p}'|^2 + M_1^2} \approx |\vec{p}'| + \frac{M_1^2}{2|\vec{p}'|} - \frac{M_1^4}{8|\vec{p}'|^3}. \quad (7.5.25)$$

De esta forma, el denominador se vuelve

$$(M_1 \pm M_3)^2 + (P - p')^2 \approx 2|\vec{p}'||\vec{p}'|(1 - \cos(\theta)) + \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}'|} (M_3 \pm M_1 \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}'|})^2 + \mathcal{O}(M_1^4). \quad (7.5.26)$$

La mayor contribución proviene de la región de θ chico correspondiente al término con signo menos. Esto se debe a que para $\theta = 0$, $M_3 = \alpha M_1$ con $\alpha = \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}'|}$, es un cero del denominador. Por lo tanto, nos enfocaremos en el término con el signo menos. La posible divergencia será tratada luego tomando cuenta que suponemos que el *cut-off* Λ es pequeño. Notar que la expresión contiene dos deltas de Dirac y el término al que nos enfocaremos tiene un interpretación física sencilla: para $M_3 < M_1$ y $M_3 + \omega = M_1$ representa un proceso en el cual el hadrón incidente se divide en 2 hadrones, cada uno cargando una fracción del momento total incidente.

La condición $M_3 \ll |\vec{p}'|$ implica que el factor adimensional de F_L es aproximadamente

$$\left[\frac{(q^0 + (2x-1)|\vec{p}'| \cos(\theta))^2}{(1-x)q^2} \right] \approx \frac{1}{x} \left[1 + \sqrt{\frac{x}{1-x}} \frac{|\vec{p}'|}{q} ((2x-1) \cos \theta - 1) \right]^2. \quad (7.5.27)$$

Bajo las aproximaciones consideradas obtenemos

$$F_L = \frac{1}{N_c^2} B^2 \sum_{M_2, M_3} \frac{\Lambda^3 M_2 q^5}{(M_2^2 + q^2)^2} \frac{|\vec{p}'|}{2\pi} \frac{(M_1 - M_3)^4}{\sqrt{x(1-x)}} \times \int_0^\pi \frac{d\theta \sin(\theta) \left[1 + \sqrt{\frac{x}{1-x}} \frac{|\vec{p}'|}{q} ((2x-1) \cos \theta - 1) \right]^2}{\left[2|\vec{p}'||\vec{p}'|(1 - \cos \theta) + \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}'|} (M_3 - M_1 \alpha)^2 \right]^2}. \quad (7.5.28)$$

⁵Se puede chequear explícitamente que el caso $M_3 \sim q$ genera una contribución menos relevante como en [58].

La integral en el ángulo θ se puede resolver, y considerando la expansión en $1/q^2$ obtenemos

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\sin(\theta) \left[1 + \sqrt{\frac{x}{1-x}} \frac{|\vec{p}'|}{q} ((2x-1)\cos\theta - 1) \right]^2}{\left[2|\vec{p}'||\vec{p}'|(1-\cos\theta) + \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}'|} (M_3 - M_1\alpha)^2 \right]^2} = \frac{\left(1 - 2\sqrt{x(1-x)} \frac{|\vec{p}'|}{q} \right)^2}{2|\vec{p}'|^2 (M_3 - M_1\alpha)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\log q}{q^4}\right). \quad (7.5.29)$$

Luego,

$$F_L = \frac{1}{N_c^2} \sum_{M_2} \frac{\Lambda^3 M_2 q^5}{(M_2^2 + q^2)^4} \frac{|\vec{p}'|}{2\pi} \frac{\left(1 - 2\sqrt{x(1-x)} \frac{|\vec{p}'|}{q} \right)^2}{2|\vec{p}'|^2 \sqrt{x(1-x)}} \sum_{M_3} \frac{(M_1 - M_3)^2}{(M_3 - M_1\alpha)^2}. \quad (7.5.30)$$

De la suma en M_3 mantenemos la contribución más importante, dada por el término donde M_3 está tan cerca como es posible de αM_1 . Recordemos que M_3 puede solo tomar algunos pocos valores discretos debido a la presencia del *cut-off* Λ . Luego, tomaremos el valor representativo $M_3 = \alpha M_1 + \Lambda$. Así, tomamos

$$\sum_{M_3} \frac{(M_1 - M_3)^2}{(M_3 - M_1\alpha)^2} \approx \frac{M_1^2 (\alpha - 1)^2}{\Lambda^2}. \quad (7.5.31)$$

Este término depende de $\alpha = \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|}$, que implícitamente depende de M_2 a través de la definición de $|\vec{p}'|$.

Finalmente, resolvemos la sumatoria sobre M_2 aproximándola por una integral, de forma similar al procedimiento hecho para M_X en [57]. El límite superior esta dado por una fracción $0 < c < 1$ de la energía del centro de masa $q\sqrt{\frac{1-x}{x}}$. Notar que c debería estar restringido por la condición $|\vec{p}'| \gg M_3$. Aquí, $|\vec{p}'|$ puede ser escrito como función de M_2 y q a partir de la ecuación

$$|\vec{p}'| \approx \frac{q}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x}} - \frac{M_2^2}{2q} \sqrt{\frac{x}{1-x}}. \quad (7.5.32)$$

Por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{M_1^2}{N_c^2} B^2 \Lambda \int_0^{cq\sqrt{\frac{1-x}{x}}} dM_2 \frac{M_2 q^4}{(M_2^2 + q^2)^4} \left(1 - x \left(1 + \left(\frac{M_2}{q} \right)^2 \right) \right) x^4 \left(1 + \left(\frac{M_1}{q} \right)^2 \right)^4 \\ &= \frac{1}{N_c^2} B^2 c^2 (2 - c^2) \frac{M_1^2}{4\pi q^2} x^3 (x - 1)^2, \end{aligned} \quad (7.5.33)$$

donde B es una constante adimensional que contiene la correspondiente constante de acoplamiento λ_{123} y G_{123} de la Sección 7.4.2 con los índices k correspondiente a cada partícula. Se puede observar que F_L tiene un máximo en $x \approx 0,6$ y se anula en $x = 1$ como era esperable. Notar que la dependencia en x de este resultado es independiente del valor de c . Además, recordemos que las soluciones son tales que las masas de AdS (como M_1) son proporcionales a Λ .

Para F_1 las integrales en z , z' y ω pueden ser resuelta de forma similar que para F_L . La principal diferencia proviene del factor adimensional en la integral angular. Obtenemos

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{N^2} \sum_{M_2, M_3} \Lambda^3 \frac{M_2 q^5}{(M_2^2 + q^2)^4} \frac{1}{8\pi} \frac{(M_1 - M_3)^2 \sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)}} |\vec{p}'| \\ &\quad \times \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \frac{\frac{|\vec{p}'|^2}{q^2} (1 - \cos^2 \theta)}{\left[2|\vec{p}'||\vec{p}'|(1 - \cos \theta) + \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}'|} (M_3 - M_1\alpha)^2 \right]^2}. \end{aligned}$$

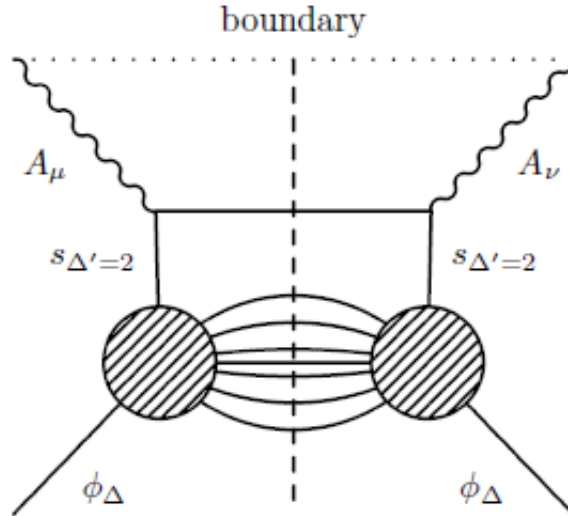


Figura 7.4: Diagrama de Witten más relevante en un n -loop genérico.

Las integrales sobre M_2 y M_3 son muy complejas y no podemos obtener un resultado analítico para F_1 . Sin embargo, si nosotros estimamos que el conteo de potencias en q la función de estructura F_1 contribuye como $\frac{\log q}{q^4}$. Esto es una evidencia que F_1 no se anula pero es menos relevante en el desarrollo en potencias de q .

7.6. Estados intermedios de multipartículas en supergravedad del tipo IIB

En esta sección se estudia la situación en la que participan múltiples estados intermedios en el *Forward Compton Scattering*. Se investiga considerando diagramas de Witten con estados intermedios de múltiples partículas de supergravedad del tipo IIB. La idea es mostrar que la dependencia en $\frac{\Lambda^2}{q^2}$ y la descomposición covariante del tensor se mantiene para cualquier número de *loops* desde el punto de vista de supergravedad. Además en esta sección se darán argumentos que motivarán la siguiente conjetura: en el límite de supergravedad, la contribución más relevante para todos los *loops* con $n \geq 1$ están suprimidos por la misma potencia de Λ^2/q^2 que el caso $n = 1$ estudiado en este capítulo. Solo se consideran los diagramas de Witten tales que un escalar s con la menor dimensión de escala $\Delta' = 2$ interactúa con el campo de gauge, que corresponde a un modo no-normalizable. Supondremos que existe una separación de esta región de interacción del resto de los procesos de intercambio de múltiples partículas, que ocurre en el IR. Esto sucede porque si las primeras masas son pequeñas, y todas las otras están limitadas a ser del mismo orden debido a la forma del vértice presente en la división del hadrón original, en el que intervienen modos normalizables y una integral en la variable z asociada a la interacción $s\phi\phi$. Este tipo de diagramas generará la contribución más relevante por razones justificadas en las secciones anteriores. En la figura 7.4 se observa esquemáticamente la forma de los diagramas relevantes.

Comenzamos con la forma más general de descomponer el tensor hadrónico utilizando la

7.6 Estados intermedios de multipartículas en supergravedad del tipo IIB 62

simetría de Lorentz

$$W^{\mu\nu} = F_1(x, q^2) \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^{\mu\nu} q^\nu}{q^2} \right) + F_2(x, q^2) (2x v_s^\mu v_s^\nu), \quad (7.6.1)$$

y la solución del campo de gauge $U(1)$ correspondiente a la perturbación de la métrica, inducida por el operador de corriente insertado en el borde del AdS dado por

$$A_{\mu\nu} = e^{iq \cdot x} \left[c_\mu q z K_1(qz) + \frac{n \cdot q}{q^2} \right], \quad c_\mu = n_\mu - \frac{n \cdot q}{q^2} q_\mu, \quad A^\mu = z^2 \eta^{\mu\nu} A_\nu. \quad (7.6.2)$$

Esta solución ha sido obtenida utilizando el gauge axial, para el cual $A_z = 0$ y la condición de contorno en el borde es

$$A_\mu(x, z \rightarrow 0) = n_\mu e^{iq \cdot x}. \quad (7.6.3)$$

El tensor de estructura a partir de la amplitud es

$$Im(\mathcal{A}) \sim n_\mu n_\nu Im(T^{\mu\nu}). \quad (7.6.4)$$

La interacción relevante es la correspondiente al vértice más próximo a la superficie, dada por S_{sAA} o $S_{A\phi\phi}$, que aparecen en todos los diagramas de Witten que estamos considerando. Usando la solución del dilatón⁶ en el gauge axial, el vértice evaluado *on-shell* viene dado por

$$\begin{aligned} S_{A\phi\phi}|_{on-shell} &= \int d^{10}x \sqrt{-g} G^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi \\ &= \int d^{10}x \sqrt{-g} A^m v^a (\partial_a \phi_1 \partial_m \phi_2^* - \partial_a \phi_1 \partial_m \phi_2^*) \\ &= i\mathcal{Q} \int d^4y dz d\Omega_5 \sqrt{g_\Omega} z^{-5} A^\mu (\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - \phi_1 \partial_\mu \phi_2^*) \\ &= i\mathcal{Q} \delta^4(q + p_1 - p_2) \int dz d\Omega_5 \sqrt{g_\Omega} z^{-3} \phi_1 \phi_2^* \eta^{\mu\nu} A_\mu (p_{1\nu} + p_{2\nu}) \end{aligned}$$

donde ϕ_1 es el dilatón entrante y ϕ_2 representa el estado intermedio que va hacia arriba en el diagrama de la figura 7.4. Los cuadri-momentos son p_1 y p_2 , respectivamente. g_Ω es el determinante de la métrica de la 5-esfera con radio R . Para ϕ podemos escoger el armónico esférico tal que

$$v^a \partial_a \phi_i = c_{\phi_i} e^{ip_i \cdot x} z^2 J_{\Delta-2}(p_i z) v^a \partial_a Y(\Omega) = i\mathcal{Q}_i \phi_i. \quad (7.6.5)$$

Además, la conservación de la carga implica que $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2 \equiv \mathcal{Q}$. De la solución de A_μ , se puede separar la integral en dos contribuciones: la primera que contiene la función de Bessel $K_1(qz)$ que domina cerca del borde del AdS, y la segunda es la parte del A_μ que es independiente de z . Esta última no se anula por la razón explicada en la Sección 7.3 cuando $N_c \rightarrow \infty$, de esta forma la estructura del tensor, *i.e.* los factores que contienen n_μ están dados exclusivamente por el cuadrado de

$$\eta^{\mu\nu} c_\mu (p_{1\nu} + p_{2\nu}) = \eta^{\mu\nu} \left(n_\mu - \frac{n \cdot q}{q^2} q_\mu \right) (p_{1\nu} + p_{2\nu}). \quad (7.6.6)$$

En el límite de $N_c \rightarrow \infty$ se obtiene

$$p_1^\mu + p_2^\mu = P^\mu + (P + q)^\mu = 2q v_s^\mu, \quad (7.6.7)$$

y debido a que $q_\mu v_s^\mu = 0$, se obtiene $F_1 = 0$ y $F_2 \neq 0$. Sin embargo, para la amplitud a un *loop*, tenemos

$$p_1^\mu + p_2^\mu = (P - p')^\mu + (q')^\mu = (2q' - q)^\mu. \quad (7.6.8)$$

⁶El análisis para el escalar s es análogo.

Luego

$$\eta^{\mu\nu} \left(n_\mu - \frac{n \cdot q}{q^2} q_\mu \right) (p_{1\nu} + p_{2\nu}) = 2n \cdot \left(q' + \frac{q}{2y'} \right) \equiv 2q(n \cdot v_t). \quad (7.6.9)$$

A partir de estas estructuras tensoriales y la descomposición del $W^{\mu\nu}$ se obtienen esquemáticamente las funciones de estructura:

$$F_1 \sim 2q^2 [v_t^2 + 4x^2(v_s \cdot v_t)^2], \quad (7.6.10)$$

$$F_2 \sim 4xq^2 [v_t^2 + 12x^2(v_s \cdot v_t)^2]. \quad (7.6.11)$$

En la expresión de arriba se debería incluir todas las integrales que son necesarias para completarlas. Es fácil ver que este análisis para diagramas de Witten a un *loop* se puede aplicar a diagramas genéricos de *n-loops* como se muestra esquemáticamente en la figura 7.4. De hecho, para un diagrama a *n loops* la diferencia es que ahora $p_2 = P - p'_1 - \dots - p'_{n-1}$ pero por la conservación de momentos esta vale $q' - q$. Aquí, los p'_i son los momentos de las partículas intermedias *on-shell* que aparecen en la región IR, mientras que q' es el momento del escalar s después de la dispersión con el modo vectorial no normalizable. Así, la descomposición del tensor es totalmente general y por lo tanto siempre tomará una estructura similar al presentado en la Sección 7.5. Si θ es el ángulo entre los vectores \vec{q} y \vec{q}' , además podemos decir que $F_1(\theta \rightarrow 0) = 0$. Ya que la función de estructura y el vértice más relevantes son los mismos, proponemos que la dependencia más importante en q será la misma para todos los casos. Si lo propuesto es correcto tendría una importante consecuencia: las correcciones $1/N_c^{2n}$ con $n > 1$ serían menos relevantes. Esto significa que si la creación de una partícula intermedia está permitida, $N_c \rightarrow \infty$ y $q^2 \rightarrow \infty$ serían límites que no conmutan. En este caso, las únicas contribuciones dominantes en el estudio de DIS en el límite de N_c grande y acoplamiento fuerte serían los procesos de un estado final o dos estados finales. Veremos en particular en el límite de altas energías el proceso que permite la creación de dos hadrones es el más relevante para $1 \ll \lambda \ll N_c$ con N_c finito.

7.7. El límite planar vs el límite de altas energías

En la sección anterior calculamos la función de estructura longitudinal de glueballs al siguiente orden en la expansión en $1/N_c$. Los glueballs están asociados a campos escalares holográficos y la corriente está asociada a un gravi-fotón en una métrica AdS₅ con un *cut-off* infrarrojo que simula la escala de confinamiento de la teoría de campos.

Es interesante notar que los cálculos en DIS toman el límite de altas energías del fotón virtual $q \gg \Lambda$ para poder definir correctamente el parámetro de Bjorken. Por otro lado el proceso fuertemente acoplado se puede calcular mediante la conjetura AdS/CFT que toma el límite planar de la teoría de campos $N_c \rightarrow \infty$. Este límite desde el punto de vista de la teoría de cuerdas corresponde a un expansión en género de las topologías del *worldsheet* y en el límite de bajas energías corresponde a la expansión en diagramas de Witten con *loops* en supergravedad.

A partir de los cálculos realizados podemos estudiar la compatibilidad de dos límites $N_c \rightarrow \infty$ y $q \rightarrow \infty$. Debemos recordar que nos interesa obtener resultados que podamos extrapolar con QCD, que es una teoría de gauge con $N_c = 3$. Nuestros resultados muestran que los límites no conmutan. Si tomamos primero el límite $N_c \rightarrow \infty$ que corresponde al proceso calculado por Polchinski y Strassler [23] con un solo estado intermedio obtenemos funciones de estructuras proporcionales a $(\Lambda^2/q^2)^{\Delta-1}$. Por otro lado si tomamos primero el límite de altas energías $q \gg \Lambda$ permitiendo la creación de dos estados intermedios la contribución más relevante a la función de estructura longitudinal F_L es proporcional a $1/N_c^2$ y (Λ^2/q^2) .

El hecho que el límite planar y de altas energías no conmuten tiene interesantes implicaciones. Este efecto se pone en evidencia en la función de estructura longitudinal del glueball que incluye

en su definición el valor de espectación de dos corrientes electromagnéticas en el interior del hadrón. Esta relación se puede obtener a partir de la expansión del producto de operadores del momento de la función de estructura en (7.1.2). El tercer término con un factor $1/N_c^2$ domina la expresión de $M_n^{(s)}(q^2)$ cuando $q^2 \geq \Lambda^2 N_c^{2/(\tau_Q - \tau_c)}$ en el cuál $\tau_Q = \tau_c + 1$ donde τ_c es el mínimo *twist* de todos los operadores cargados protegidos. La consecuencia inmediata es que en este régimen de momentos restringiendo el parámetro de Bjorken en $\lambda^{-1/2} \ll x < 1$ la función de estructura longitudinal no depende de la dimensión conforme del hadrón incidente en contraste con el caso de Polchinski-Strassler en el límite planar que sí dependía.

7.8. Análisis de las funciones de estructura

Utilizando el diagrama más relevante en la expansión en potencias de q , que corresponde al canal t , obtuvimos la dependencia analítica de la función de estructura longitudinal en el parámetro de Bjorken x . En el límite de N_c grande el fotón interactúa con el hadrón incidente completamente, generando una $F_1 = 0$. Más allá de este límite, incluyendo correcciones en $1/N_c$, el hadrón se fragmenta y el fotón termina interactuando con el escalon s , produciendo una $F_1 \neq 0$. Se logró separar F_1 y F_2 en dos contribuciones: la primera satisface la conocida relación de Callan-Gross $F_2 = 2xF_1$, mientras que la segunda genera un contribución longitudinal no nula $F_L \equiv F_2 - 2xF_1$. Esto concluye que el proceso está asociado a una corriente más compleja que en principio contiene campos de espín 0, espín 1/2 y espín 1 del multiplete de $\mathcal{N} = 4$ SYM.

Hemos encontrado que la dependencia de $F_L \propto x^3(1-x)^2$ (ecuación (7.5.33)) se compara correctamente con los datos fenomenológicos y de *Lattice QCD* en [68]. Se observa que la función de estructura se anula en $x = 1$ y en $x = 0$, y posee un máximo en $x \approx 0,6$, características usuales en funciones de estructura. Es consistente con el hecho que para algunas partículas como el pión, mediciones experimentales han mostrado que las funciones de estructuras decaen como $(1-x)^2$ cuando $x \rightarrow 0$ y está asociado a la función de estructura de valencia. También se ha encontrado que la F_1 es de un orden inferior en la expansión de potencias de q , por lo tanto en principio se debe considerar contribuciones de otros diagramas con contribuciones del mismo orden.

Capítulo 8

Mesones escalares en la expansión $1/N_c$

Modelos holográficos contruidos a partir de Dp-branas permiten incluir materia en la representación fundamental del grupo de gauge logrando describir mesones livianos e interacciones en el límite de N_c grande y acoplamiento fuerte. Existen varios modelos que utilizan branas de sabor en límite de prueba ([35], [36]) que tratan de representar las características principales de QCD. Actualmente el modelo que logra una descripción holográfica de las principales características de QCD, como por ejemplo el rompimiento de la simetría quiral, es el modelo propuesto por Sakai-Sugimoto en [37], aunque de todas formas aún no se conoce el dual holográfico de QCD exacto.

A partir del estudio de las funciones de estructura de mesones vectoriales y escalares asociadas a procesos DIS ([59], [60]) para distintos modelos de branas ([35, 36, 37],) en el límite de N_c grande y acoplamiento fuerte, se obtuvieron resultados y comportamientos independientes del modelo en el sentido de encontrar relaciones del tipo de Callan-Gross. Esto apunta a la existencia de un comportamiento universal para teorías del tipo de QCD en el límite de $N_c \rightarrow \infty$. Estas propiedades universales provienen de modelar la dinámica de los mesones a partir de acciones de bajas energías de Dp-branas (en el contexto de la teoría de cuerdas) asociados a la acción de Dirac-Born-Infeld.

Por esta razón vamos a estudiar el sistema particular que incluye una D7-brana en el límite de prueba esperando capturar comportamientos universales que se puedan extrapolar a QCD. Se eligió el modelo D3D7 por poseer una geometría sencilla que permitirá obtener expresiones analíticas de las funciones de estructura al siguiente orden en $1/N_c$. La segunda razón es por generar, en el límite de $N_c \rightarrow \infty$, resultados que reproducen mejor la fenomenología, en particular, un punto importante proviene de la comparación entre resultados analíticos de la función de estructura F_2 para el pión, calculada con los métodos holográficos aquí descriptos, y diferentes modelos fenomenológicos que concuerdan que para $x \rightarrow 1$ las funciones de distribución deberían ir como $(1-x)^2$ [68]. En [69] se ha encontrado una caída de dichas funciones que corresponde a $(1-x)^{2\pm 0,1}$ para la función de distribución de valencia consistente con datos experimentales del proceso de Drell-Yan. De la discusión de [68] se infiere que efectivamente el modelo de D3D7-branas funciona mejor que el de D4D8anti-D8-branas y que el de D4D6anti-D6-branas estudiados en dicho trabajo. El objetivo en este capítulo es estudiar la contribución al siguiente orden en $1/N_c$ de las funciones de estructura asociadas a mesones escalares con el fin de comparar con datos que se disponen de *Lattice* QCD. La forma de calcular estas contribuciones es a partir de un desarrollo en diagramas de Witten en supergravedad correspondiendo a un procedimiento análogo al realizado para el glueball en el capítulo anterior.

Al igual que en el caso del glueball esperamos que el límite de energía grande $q \gg \Lambda$ y el límite planar no conmuten. Esto nos permite comparar estudiando las funciones de estructura del pión (el mesón pseudoescalar más liviano) qué límite es más relevante en los procesos de DIS.

En las Secciones 8.2 y 8.3 se estudian los vértices relevantes para armar los diagramas de Witten a partir de la acción de Dirac-Born-Infeld obteniendo el diagrama más importante. Luego en la Sección 8.4 se calcula la función de estructura longitudinal y finalmente en las Secciones 8.5 y 8.6 se comparan los resultados con datos de simulaciones en la red.

8.1. Resultados previos en el límite de $N_c \rightarrow \infty$

Con técnicas análogas a las utilizadas para el glueball, a partir del teorema óptico sabemos que 2π por la parte imaginaria de las funciones de estructura asociadas al FCS corresponde a las funciones de estructura del proceso de DIS. Aplicando la dualidad AdS/CFT en [59, 60] se obtuvieron en límite de N_c grande y las funciones de estructura asociadas a mesones escalares y vectoriales. En estos trabajos se estudiaron las funciones de estructuras con x , parámetro de Bjorken, en el rango $1/\sqrt{\lambda} \ll x < 1$ que implica desde el punto de vista holográfico que se puede emplear la aproximación de supergravedad. Para incorporar materia en la representación fundamental del grupo de gauge (mesones), se estudiaron sistemas de branas en el límite de prueba.

Para los modelos D3D7-branas en [59] se obtuvo para mesones escalares a nivel árbol en la expansión en diagramas de Witten en $1/N_c$ el siguiente resultado

$$F_1 = 0, \quad F_2 = A_0 \mu_7^2 \mathcal{Q}^2 \alpha'^4 R^8 \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{l+2} x^{l+4} (1-x)^{l+1}, \quad (8.1.1)$$

donde $A_0 = 2^{2l+6} \pi^5 (l+2)!^2 |c_i|^2 |c_X|^2$ es una constante adimensional, mientras que c_i y c_X son las constantes de normalización del mesón escalar incidente e intermedio. Consideramos $l > 0$, que significa que el campo escalar está cargado con respecto al grupo $U(1)$.

Por otro lado, se estudiaron en [70] las funciones de estructura para x pequeño en el rango $\exp(-\sqrt{\lambda}) \ll x \ll 1/\sqrt{\lambda}$ y acoplamiento fuerte. Esto implica que la aproximación de supergravedad pierde validez y se deben considerar amplitudes de dispersión de teoría de cuerdas del tipo IIB, que incluyen dos cuerdas abiertas (mesones) y dos cuerdas cerradas (representan los fotones virtuales)

El resultado obtenido en [70] es

$$F_1 = \frac{\pi^2}{16x^2} \rho_3 |c_i|^2 \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{l+1} \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} I_{1,2l+5}, \quad (8.1.2)$$

$$F_2 = \frac{\pi^2}{8x} \rho_3 |c_i|^2 \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{l+1} \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} (I_{0,2l+5} + I_{1,2l+5}). \quad (8.1.3)$$

La constante ρ_3 está definida a partir de la condición de normalización de los armónicos esféricos sobre S^3

$$\int d\Omega_3 \sqrt{\tilde{g}} v_i v^i Y(\Omega_3) Y^*(\Omega_3) = \rho_3 R^2. \quad (8.1.4)$$

La definición de $I_{j,n}$ viene dada en términos del cuadrado de las funciones de Bessel modificadas de segundo orden multiplicadas por un potencia entera de su argumento $\omega = \frac{qR^2}{r}$,

$$I_{j,n} = \int_0^\infty d\omega \omega^n K_j^2(\omega). \quad (8.1.5)$$

Desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos el diagrama de Feynman a orden árbol considerando al mesón descrito por un quark y un antiquark en el caso perturbativo más importante corresponde al de la figura 8.1 (a). El fotón virtual interactúa con un único partón y en el OPE de JJ los operadores que intervienen son los que poseen *twist* par $\tau = 2, 4, \dots$ y por lo tanto los operadores de traza única con *twist* dos dominan el OPE (análisis análogo al de la Sección 7.1). En el caso de acoplamiento fuerte al igual que analizamos con el glueball, los operadores que antes dominaban tienen dimensiones anómalas grandes y por lo tanto dejan de ser importantes. Ahora, en su lugar los que pasan a dominar son los operadores de traza doble que no poseen correcciones a sus dimensiones de escala para ningún acoplamiento. Estos operadores protegidos dominan el OPE en régimen de acoplamiento fuerte y están asociados a procesos en donde el fotón virtual interactúa con el hadrón completo en vez de interactuar con cada partón individual. En el diagrama de la figura 8.1 (b) representa intercambios de múltiples gluones en el límite planar. Este proceso desde el punto de vista holográfico corresponde al término a orden árbol en la expansión de diagramas de Witten (si se lo piensa como un proceso de acoplamiento fuerte). Si queremos ir más allá de la aproximación de N_c grande e incluir diagramas no planares, debemos considerar el caso de intercambios de gluones mostrado en la figura 8.1(c). Esto corresponde a considerar N_c finito y en este capítulo se estudiara desde el punto de vista holográfico. Por último se pueden incluir correcciones a N_f de sabor finito correspondiente a la figura 8.1(d).

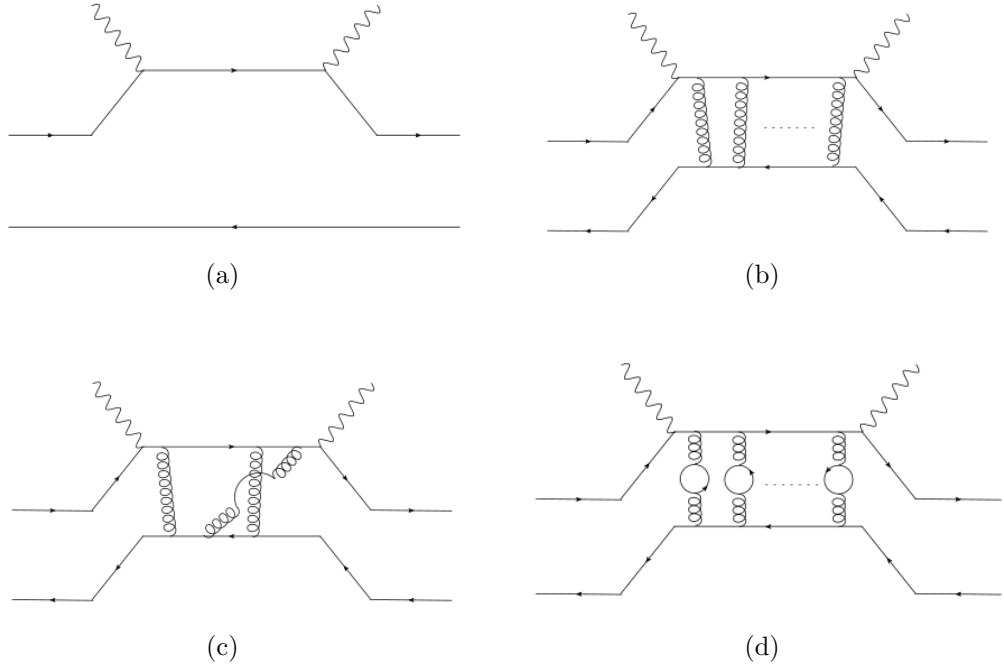


Figura 8.1: Diagramas de Feynman del FCS asociados a los casos de acoplamiento débil y fuerte. Figura extraída de [60]. En (a) un partón dispersa al fotón virtual. En (b) el FCS en acoplamiento fuerte, de tal forma que el fotón virtual es dispersado por el mesón completo y corresponde al diagrama de Witten a nivel árbol (N^0). En (c) aparece una corrección al caso anterior con una configuración no planar que corresponde a la corrección $1/N_c$, cuya realización holográfica dual puede verse en la figura 8.2. En (d) se incluyen n -loops de sabor, lo cual no se estudia en esta Tesis.

A continuación nos enfocaremos en cálculos de supergravedad a un *loop* en el rango $1/\sqrt{\lambda} \ll$

$x < 1$, acoplamiento fuerte para estudiar la corrección en $1/N$.

8.2. Derivación de los vértices de interacción en supergravedad

Vamos a expandir la acción de Dirac-Born-Infeld que describe a una D7-brana en un fondo curvo $\text{AdS}_5 \times S^5$ en la aproximación de prueba (ver Capítulo 5). Notaremos G_{AB} a la métrica generada por las N_c D3-branas 7.4.1. La acción de Dirac-Born-Infeld de la D7-brana es

$$S = -\mu_7 \int d^8\xi \sqrt{-\det(P[G]_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})} + \frac{(2\pi\alpha')^2}{2} \mu_7 \int P[C^{(4)}] \wedge F \wedge F, \quad (8.2.1)$$

donde $C^{(4)}$ es el potencial de Ramond-Ramond dado en [35] y P corresponde al *pullback* de la métrica definido como

$$P[G]_{ab} = G_{AB} \frac{dx^A}{d\xi^a} \frac{dx^B}{d\xi^b}, \quad (8.2.2)$$

con $a, b = 0, 1, \dots, 7$ índices que parametrizan las coordenadas de la D7-brana. Las coordenadas perpendiculares a la brana Z^5 y Z^6 las parametrizamos introduciendo dos campos escalares χ y ϕ a partir de

$$Z^5 = 2\pi\alpha'\chi, \quad Z^6 = L + 2\pi\alpha'\phi. \quad (8.2.3)$$

Notar que la brana se ubica en la posición L de la coordenada Z^6 y los campos χ y ϕ representan los mesones escalares holográficos. Las otras coordenadas Z^i las parametrizamos en términos de coordenadas esféricas de radio ρ y ángulos ψ , θ y ω . El radio ρ se define mediante la ecuación

$$r^2 = \rho^2 + (L + 2\pi\alpha'\phi)^2 + (2\pi\alpha'\chi)^2 \quad (8.2.4)$$

y la métrica inducida toma la forma

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} ds^2(E^{(1,3)}) + \frac{R^2}{r^2} [(2\pi\alpha')^2 (d\chi^2 + d\phi^2) + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2]. \quad (8.2.5)$$

Al igual que se hizo en el Capítulo 5 para obtener el espectro de mesones elegimos el gauge estático, con la siguiente asignación $x^i = \xi^i$ para $i = 0, \dots, 3$, mientras que $\rho = \xi^4$, $\psi = \xi^5$, $\theta = \xi^6$ y $\omega = \xi^7$. Vamos a expandir primero el *pullback* alrededor de la solución clásica $\phi = 0$ y $\chi = 0$. La expansión de Taylor del *pullback* es,

$$P[G]_{ab} = \left(G_{MN}|_{\chi, \phi=0} + \frac{\partial G_{MN}}{\partial \chi}|_{\chi, \phi=0} \chi + \frac{\partial G_{MN}}{\partial \phi}|_{\chi, \phi=0} \phi + \mathcal{O}(\phi^2, \phi\chi, \chi^2) \right) \times (\delta_a^M \delta_b^N + \delta_8^M \delta_8^N \partial_a \phi \partial_b \phi + \delta_9^M \delta_9^N \partial_a \chi \partial_b \chi). \quad (8.2.6)$$

Se observa que a orden cero la métrica G_{MN} contraída con las deltas de Dirac define la métrica inducida sobre la D7-brana,

$$ds^2 = \frac{(\rho + L)^2}{R^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{R^2}{(\rho + L)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2), \quad (8.2.7)$$

donde las coordenadas $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Las fluctuaciones las podemos separar en dos tipos h y X de modo que el *pullback* cambia como $P[G]_{ab}^{(0)} \rightarrow P[G]_{ab} = P[G]_{ab}^{(0)} + h_{ab} + X_{ab}$. A su vez para indicar el orden en la perturbación que corresponderá a los vértices con distintas

patas utilizaremos el supraíndice (i) de modo que por ejemplo $h_{ab} = \sum_i h_{ab}^{(i)}$. También debemos considerar las contribuciones del producto de la métrica expandida por las derivadas de las fluctuaciones escalares. Estas generarán los términos cinéticos. Luego las perturbaciones en la dirección transversa a la D7-brana las denotamos como $X_{ab} = \sum_j X_{ab}^{(j)}$ siendo j el orden de la perturbación. Para calcular h_{ab} y X_{ab} basta con considerar las fluctuaciones del *warp factor* asociado a la fluctuaciones del tensor métrico:

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{r_0^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} [2(2\pi\alpha')L\phi + (2\pi\alpha')^2(\phi^2 + \chi^2)] \quad (8.2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{r^2} &= \frac{R^2}{r_0^2} + \frac{R^2}{r_0^4} \left\{ -2(2\pi\alpha')L\phi + (2\pi\alpha')^2 \left[\left(4\frac{L^2}{r_0^2} - 1 \right) \phi^2 - \chi^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2\pi\alpha')^3}{r_0^2} 4L \left[\left(1 - 2\frac{L^2}{r_0^2} \right) \phi^3 + \phi\chi^2 \right] \right\} + \mathcal{O}(\phi^4, \phi^3\chi, \dots). \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

El símbolo \mathcal{O} indica que la expresión es a menos de términos de orden cuártico. Reemplazando esas expresiones en la métrica inducida (8.2.5), obtenemos la contribución a X_{ab} que viene dada por

$$\begin{aligned} X_{ab} &= (2\pi\alpha')^2 \left[\frac{R^2}{r_0^2} + \frac{R^2}{r_0^4} \left\{ -2(2\pi\alpha')L\phi + (2\pi\alpha')^2 \left[\left(4\frac{L^2}{r_0^2} - 1 \right) \phi^2 - \chi^2 \right] \right\} \right] \times \\ &\quad (\partial_a\phi\partial_b\phi + \partial_a\chi\partial_b\chi) \equiv X_{ab}^{(2)} + X_{ab}^{(3)} + X_{ab}^{(4)}. \end{aligned} \quad (8.2.10)$$

Finalmente debemos expandir la raíz cuadrada del determinante. Para ello veamos a continuación la forma general de expandir una matriz M_{ab} con una fluctuación h_{ab} hasta el orden 4

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(M_{ab} + m_{ab})} &= \sqrt{M} \left[1 + \frac{1}{2}m + \left(\frac{1}{8}m^2 - \frac{1}{4}m \cdot m \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{1}{48}m^3 - \frac{1}{8}m(m \cdot m) + \frac{1}{6}m \cdot m \cdot m \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{384}m^4 + \frac{1}{32}(m \cdot m)^2 - \frac{1}{32}m^2(m \cdot m) + \frac{1}{12}m(m \cdot m \cdot m) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{8}m \cdot m \cdot m \cdot m \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

En esta expansión los índices se suben y bajan utilizando la métrica sin perturbar, por lo tanto la traza y el producto de matrices m , se calculan siguiendo

$$m \equiv m_a^a = M^{ab}m_{ab}, \quad m^2 = (M^{ab}m_{ab})^2, \quad m \cdot m \equiv m_b^a m_a^b = M^{bc}M^{ad}m_{ab}m_{cd}. \quad (8.2.12)$$

Con esta identidad podemos expandir la raíz cuadrada del determinante en la ecuación (8.2.1), de modo que la matriz sin perturbar corresponde a la métrica inducida g_{ab} y la fluctuación $m_{ab} = h_{ab} + X_{ab} + \tilde{F}_{ab}$. El término $\tilde{F}_{ab} = 2\pi\alpha'F_{ab}$ y contiene las fluctuaciones a lo largo de las direcciones de la brana asociados a mesones vectoriales (ver Capítulo 5).

A primer orden no hay contribución de X_{ab} y la traza de los demás términos se anula

$$L_1 = -\mu_7\sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}m^{(1)} \right] = -\frac{\mu_7}{2}\sqrt{-g}g^{ab} \left(h_{ab}^{(1)} + \tilde{F}_{ab} \right) = -\frac{\mu_7}{2}\sqrt{-g}h^{(1)} = 0,$$

A segundo orden, considerando que el tensor F_{ab} es antisimétrico, los términos que sobreviven generan las contribuciones cinéticas de los mesones escalares y vectoriales discutidos en el

Capítulo 5:

$$\begin{aligned}
L_2 &= -\mu_7\sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}m^{(2)} - \frac{1}{4}m^{(1)} \cdot m^{(1)} + \frac{1}{8}(m^{(1)})^2 \right] \\
&= -\mu_7\sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}(h^{(2)} + X^{(2)}) - \frac{1}{4}(\tilde{F} \cdot \tilde{F} + h^{(1)} \cdot h^{(1)} + h^{(1)} \cdot \tilde{F}) + \frac{1}{8}((h^{(1)})^2 + \tilde{F}^2 + h^{(1)}\tilde{F}) \right] \\
&= -\mu_7\sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}X^{(2)} + \frac{1}{4}\tilde{F} \cdot \tilde{F} \right] \\
&= -\mu_7(2\pi\alpha')^2\sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}\frac{R^2}{\rho^2 + L^2}g^{ab}(\partial_a\phi\partial_b\phi + \partial_a\chi\partial_b\chi) - \frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} \right]. \tag{8.2.13}
\end{aligned}$$

Este término es importante debido a que se puede obtener el espectro de mesones y los propagadores.

La expansión a tercer y cuarto orden generan los vértices de interacción para armar los diagramas de Witten. Notar que estos vértices acoplan solo mesones. A tercer orden todos los términos se anulan quedando las siguientes contribuciones

$$L_3 = -\mu_7\sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}(X^{(3)} - h^{(1)} \cdot X^{(2)}) + \frac{1}{2}h^{(1)} \cdot \tilde{F} \cdot \tilde{F} \right], \tag{8.2.14}$$

que se pueden expresar de forma explícita en términos de los mesones a partir de

$$L_3 = -\mu_7(2\pi\alpha')^3\sqrt{-g} \left[\frac{R^4L}{(\rho^2 + L^2)^3}\phi(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \partial_\mu\chi\partial_\nu\chi)\eta^{\mu\nu} + \frac{L}{\rho^2 + L^2}\phi(F_{aI}F^{aI} - F_{a\mu}F^{a\mu}) \right]. \tag{8.2.15}$$

Este resultado también fue obtenido por Kruczenski et al en [36]. Por último escribiremos la forma general del Lagrangiano a cuarto orden por completitud, pero debemos recordar que al tomar el límite de altas energías y expandir en potencias de $\frac{\Lambda}{q}$ estos diagramas contribuyen en un orden inferior (la explicación se detalla en el capítulo anterior),

$$\begin{aligned}
L_4 &= -\mu_7\sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}X^{(4)} + \frac{1}{8}(X^{(2)})^2 - \frac{1}{4}X^{(2)} \cdot X^{(2)} + \frac{1}{32}(\tilde{F} \cdot \tilde{F})^2 - \frac{1}{8}\tilde{F} \cdot \tilde{F} \cdot \tilde{F} \cdot \tilde{F} \right. \\
&\quad - \frac{1}{2}h^{(2)} \cdot X^{(2)} + \frac{1}{2}h^{(1)} \cdot h^{(1)} \cdot X^{(2)} + \frac{1}{2}\tilde{F} \cdot \tilde{F} \cdot X^{(2)} - \frac{1}{8}X^{(2)}(\tilde{F} \cdot \tilde{F}) \\
&\quad - \frac{1}{2}h^{(1)} \cdot X^{(3)} + h^{(1)} \cdot X^{(2)} \cdot \tilde{F} + \frac{1}{2}h^{(2)} \cdot \tilde{F} \cdot \tilde{F} - \frac{1}{2}h^{(1)} \cdot h^{(1)} \cdot \tilde{F} \cdot \tilde{F} \\
&\quad \left. - \frac{1}{4}h^{(1)} \cdot \tilde{F} \cdot h^{(1)} \cdot \tilde{F} \right]. \tag{8.2.16}
\end{aligned}$$

Por último nos quedaría derivar el vértice del campo de gauge con los mesones. El campo de gauge A_M , que corresponde al dual holográfico de la corriente J_μ , proviene de una fluctuación de la métrica (gravitón) no diagonal. Las fluctuaciones de la métrica en 10 dimensiones a lo largo de la D7-brana son $G_{MN} + H_{MN}(x^\mu)$ y generan fluctuaciones en el *pullback* de la forma

$$\begin{aligned}
\delta P[G]_{ab}^H &= \sum_{i=1}^3 H_{ab}^{(i)} = H_{ab} + H_{a8}(2\pi\alpha')\partial_b\phi + H_{8b}(2\pi\alpha')\partial_a\phi + H_{a9}(2\pi\alpha')\partial_b\chi \\
&\quad + H_{9b}(2\pi\alpha')\partial_a\chi + H_{89}(2\pi\alpha')^2\partial_a\phi\partial_b\chi. \tag{8.2.17}
\end{aligned}$$

Las contribuciones a tercer orden en las fluctuaciones que poseen un gravitón y mesones tiene la forma

$$\begin{aligned}
L_{graviton} &= -\mu_7\sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}H^{(3)} - \frac{1}{2}H^{(2)} \cdot h^{(1)} - \frac{1}{2}H^{(1)} \cdot h^{(2)} + \frac{1}{2}H^{(1)} \cdot h^{(1)} \cdot h^{(1)} + \frac{1}{4}H^{(1)}X^{(2)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}H^{(1)} \cdot X^{(2)} + \frac{1}{2}H^{(1)} \cdot \tilde{F} \cdot \tilde{F} - \frac{1}{8}H^{(1)}(\tilde{F} \cdot \tilde{F}) \right]. \tag{8.2.18}
\end{aligned}$$

No consideramos los vértices cuárticos ya que contribuyen en un orden inferior en desarrollo de Λ/q . El término que nos interesa para armar el diagrama es el que contiene un gravifotón, que corresponde a una perturbación no diagonal asociada a una simetría $R U(1)$ y tiene una forma $H_{mi} \sim A_m v_i$. El campo A_m es un campo de *gauge* en 5 dimensiones que vive en el espacio AdS_5 , mientras que v_i es un vector de Killing asociado a la $S^3 \subset S^5$.

Simplificamos el lagrangiano notando que los términos $H_{ab}^{(2)}$, $H_{ab}^{(3)}$ y la traza $H^{(1)}$ se anulan. Imponiendo que el gravitón posea una forma no diagonal, los términos $H^{(1)} \cdot h^{(2)}$ y $H^{(1)} \cdot h^{(1)} \cdot h^{(1)}$ también se anulan debido a que están contraídos con las matrices diagonales $h_{ab}^{(i)}$ y g_{ab} . Los términos que sobreviven generan un lagrangiano de la forma,

$$L_{\text{graviton}} = -\mu_7 \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} H^{(1)} \cdot X^{(2)} + \frac{1}{2} H^{(1)} \cdot \tilde{F} \cdot \tilde{F} \right]. \quad (8.2.19)$$

8.3. Expansión en $1/N_c$ y análisis de los diagramas dominantes

El objetivo al que apuntamos corresponde a relajar el límite de N_c grande, y calcular la expansión en $1/N_c$ en el contexto de la dualidad AdS/CFT . Existen dos regímenes del parámetro de Bjorken que podemos considerar. El primero corresponde a $\exp(-\sqrt{\lambda}) \ll x < 1/\sqrt{\lambda}$ y requiere una expansión en el género de las *worldsheets* de la teoría de cuerdas en las que intervienen cuerdas abiertas y cerradas. El segundo requiere $1/\sqrt{\lambda} \ll x \leq 1$ y nos basta con incluir diagramas de Feynman-Witten a un *loop* en supergravedad. En ambos regímenes podemos usar el teorema óptico y el elemento de matriz de la corriente electromagnética con dos estados hadrónicos intermedios *on-shell*. En esta Tesis nos va a interesar el segundo caso que implica calcular diagramas de Feynman en supergravedad del tipo IIB.

Para obtener la expansión en $1/N_c$ a partir del desarrollo en diagramas de Witten, debemos normalizar canónicamente con respecto a la variable N_c los términos cinéticos del lagrangiano. Podemos observar en la acción de Dirac-Born-Infeld (ecuación (8.2.1)) que el lagrangiano posee una constante delante $\mu_7 = [(2\pi)^7 g_s \alpha'^4]^{-1} = 2N_c [R^4 (2\pi)^6 \alpha'^2]^{-1}$ con una potencia que va como N_c^1 .

Redefinimos los campos escalares y vectoriales de la siguiente forma,

$$\phi \rightarrow \frac{\phi}{\sqrt{N_c}}, \quad \chi \rightarrow \frac{\chi}{\sqrt{N_c}}, \quad F_{ab} \rightarrow \frac{F_{ab}}{\sqrt{N_c}}. \quad (8.3.1)$$

Con estas definiciones los términos de interacción de tres mesones contribuyen con un factor $1/\sqrt{N_c}$ y los de cuatro mesones contribuyen con un $1/N_c$. Para calcular la contribución de vértices con un gravitón tenemos que considerar la normalización en la Sección 7.2,

$$H_{ab} \rightarrow \frac{H_{ab}}{N_c}, \quad (8.3.2)$$

que toma en cuenta que la constante de Newton en supergravedad IIB es $1/k_{10}^2 = N_c^2/(4\pi^5 R^8)$. De esta forma podemos clasificar cada vértice de interacción derivado en la sección anterior según su contribución en potencias de $1/N_c$.

Si calculamos las funciones de estructura longitudinales y realizamos una expansión simultáneamente en potencias inversas del momento transferido por el fotón virtual obtenemos el

siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}
F_L &= F_2 - 2x F_1 \\
&= f_2^{(0)} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta_{in}-1} + \frac{1}{N_c} \left(f_2^{(1)} - 2x f_1^{(1)} \right) \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right) + \frac{1}{N_c^2} \left(f_2^{(2)} - 2x f_1^{(2)} \right) \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right) + \dots
\end{aligned} \tag{8.3.3}$$

Notar que la primera contribución en el límite de N_c grande depende de la dimensión conforme Δ del hadrón incidente. Este resultado se calculó previamente en [60] y es análogo al del glueball. El segundo término proviene de la corrección en N_c finito y contribuye en un orden que va como $1/N_c$ con respecto al término anterior ya que corresponde a mesones. Anticipándonos al resultado obtenido, vemos que este término contribuye con una potencia independiente Δ análogamente a la corrección del glueball calculada en el capítulo anterior.

A continuación estudiaremos el diagrama más relevante en el desarrollo de potencias Λ/q . El razonamiento es similar al realizado para el glueball en el capítulo anterior y el presentado en [58]. En principio deberíamos considerar todos los diagramas a un *loop* en el proceso holográfico del FCS para calcular la contribución en $1/N_c$. En estos intervienen dos corrientes asociadas a modos no normalizables provenientes del borde y dos modos normalizables asociados a fluctuaciones de la D7-brana que corresponden a los mesones escalares. Necesitamos calcular la parte imaginaria de esos diagramas, que significa introducir un corte vertical en los diagramas de Witten a un *loop* y considerar todos los estados intermedios de 2 partículas *on-shell*. Los vértices de interacción utilizados para armar los diagramas serán los obtenidos en la sección anterior. Es importante tener en cuenta a la hora de clasificar los diagramas la expansión en series de potencias de Λ^2/q^2 . El cuadri-momento q^μ corresponde al campo de gauge no normalizable que es el dual holográfico al fotón virtual en el borde. Se puede observar que los vértices de interacción de campos escalares con el A_μ al igual que en el caso del glueballs estudiado en el capítulo anterior tienen siempre la misma forma

$$S_{\Phi\Phi A} \propto \int d^{p+1}x \sqrt{-g} h^{ab} \partial_a \Phi \partial_b \Phi, \quad h^{ab} \sim (A^a v^b + A^b v^a), \tag{8.3.4}$$

donde Φ representa un campo escalar genérico. Esto implica que si evaluamos el vértice con un escalar dado por Φ_Δ que proviene de la región infrarroja, la función de estructura será suprimida por un factor $(\Lambda/q)^{\Delta-1}$. La razón física proviene del comportamiento de los modos normalizables y no normalizables en el *bulk*. Los hadrones incidentes tiene soluciones dadas por funciones de Bessel J que viven en la región IR $z \sim \Lambda^{-1}$, mientras que la corriente que llega al borde está asociada a funciones de Bessel K que decaen exponencialmente en la región infrarroja. Esta caída está caracterizada por q y por lo tanto el factor $(\Lambda/q)^2$ con la potencia Δ está relacionado con la probabilidad de que el hadrón incidente Φ_Δ *tunelee* desde la región IR e interactúe con la corriente en el UV.

A partir de análisis realizado podemos concluir que la expansión en potencias de Λ/q será dominada por el proceso en donde el campo no normalizable de gauge interactúa con el escalar con el menor valor posible de Δ . En el límite de $N_c \rightarrow \infty$ existe un único vértice de interacción y la potencia obtenida va como la dimensión conforme del campo incidente Δ_{in} . En cambio cuando permitimos que el número de colores N_c sea finito, consideramos los diagramas a un *loop* y el escalar incidente puede dividirse en dos y solo uno de ellos puede interactuar con el A_μ . En el caso que estamos analizando correspondiente al sistema D3D7-branas, el campo que posee el menor $\Delta = 2$ corresponde al escalar tipo I, y generará una dependencia análoga a la del glueball que va como $1/q^2$. Finalmente el diagrama más relevante que se detalla en la figura 8.2 va a corresponder al del canal t con un escalar tipo I que se propaga del vértice IR e interactúa con la corriente UV. A continuación calcularemos las integrales asociadas a cada vértice.

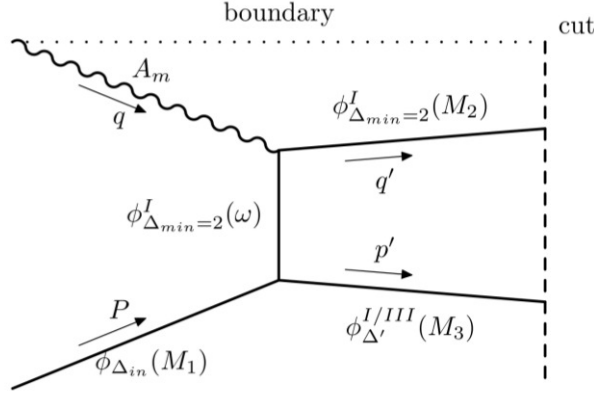


Figura 8.2: Diagrama de Feynman-Witten correspondiente al lado izquierdo del corte usando el teorema óptico. Este diagrama que corresponde al canal t es el más relevante y tiene como estado intermedio dos estados *on-shell*. Se detallan los cuádrimomentos, las dimensiones conformes y las masas de AdS para cada campo.

Vértice ultravioleta

Este vértice proviene del segundo término en el lagrangiano de la ecuación (8.2.19), donde la fluctuación de la métrica se acopla a dos modos vectoriales. En principio, ambos modos de F_{ab} pueden construirse de los modos vectoriales tipo I^\pm , II o III. El asociado con el propagador vertical de la figura 8.2 debe ser un modo de tipo I^- , que posee menor índice $\Delta_{min} = 2$. La interacción relevante es de la forma $A\phi_I\phi_I$. La situación donde el segundo modo vectorial en el vértice UV es de tipo II o III es excluido porque en este caso el lagrangiano de interacción se anula por la integral angular. La acción efectiva asociada a este vértice es

$$S_{A\phi_I\phi_I} = -\frac{\mu_7}{N_c}(2\pi\alpha')^2 \int d^4x d\rho d\Omega_3 \sqrt{-g} \frac{1}{2} H^{(1)} \cdot F^I \cdot F^{*I} , \quad (8.3.5)$$

donde

$$F_{\mu\nu}^I = 0 , \quad F_{\mu z}^I = 0 , \quad F_{\mu i}^I = \partial_\mu B_i^I , \quad F_{zi}^I = \partial_z B_i^I . \quad (8.3.6)$$

De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned} H^{(1)} \cdot F^I \cdot F^{*I} &= g^{bc} g^{de} g^{af} h_{ab} F_{cd}^I F_{ef}^{*I} \\ &= A^\mu v^i g^{de} F_{\mu d}^I F_{ei}^{*I} + A^\mu v^i g^{de} F_{id}^I F_{e\mu}^{*I} \\ &= A^\mu v^i \partial_\mu B_I^j (\partial_j B_i^{*I} - \partial_i B_j^{*I}) + A^\mu v^i \partial_\mu B_I^{*j} (\partial_j B_i^I - \partial_i B_j^I) \\ &= - (A^\mu \partial_\mu B^j v^i \partial_i B_j^* + A^\mu \partial_I B^{*j} v^i \partial_i B_j) . \end{aligned} \quad (8.3.7)$$

Con el fin de evaluar el vértice *on-shell*, debemos insertar la solución obtenida en la Sección 5 e integrar sobre las ocho dimensiones espacio-temporales. La integración sobre las primeras cuatro coordenadas x^μ es trivial debido a que siempre genera la condición de conservación asociada a los correspondientes momentos. La integral sobre los armónicos esféricos puede ser simplificada considerando los autoestados de carga

$$v^i \partial_i Y^j = iQ Y^j . \quad (8.3.8)$$

Notar que la carga \mathcal{Q} no necesariamente es la carga correspondiente al hadrón incidente \mathcal{Q}_i debido al proceso de fragmentación.

Realizando el cambio de variables $z = \frac{R^2}{\rho}$, la acción efectiva toma la siguiente forma

$$S_{A\phi_I\phi_I} = i \mathcal{Q} \frac{\mu_7}{N_c} 2 (\pi\alpha')^2 \int d^4x dz d\Omega_3 \sqrt{-g} A^m(z) \times (B^{Ii}(z, \Omega) \partial_m B_i^{*I}(z, \Omega) - B_i^{*I}(z, \Omega) \partial_m B^{Ii}(z, \Omega)) . \quad (8.3.9)$$

Los modos de tipo I denotados con (\pm) son ortogonales y por lo tanto no se acoplan entre sí. La única partícula saliente permitida es un escalar de tipo I con el signo $(-)$ y con los mismos números cuánticos l, m, m' que el escalar incidente. Por lo tanto, incluso si en la teoría de 8 dimensiones el modo de tipo I proveniente del campo de gauge y la existencia de su solución dependiera de la presencia del término de Wess-Zumino en la acción junto con el término de DBI (ecuación (5.1.4)), la integral angular solo tiene en cuenta la conservación de la carga, que además indica que no intervienen otras partículas en este vértice. Luego, la acción *on-shell* que obtenemos es exactamente la misma encontrada para las glueballs [57], mesones escalares [59, 60] y el escalar s [1].

Luego de integrar la ecuación (8.3.9) sobre la S^3 , utilizando las relaciones de ortogonalidad de los armónicos esféricos vectoriales, obtenemos

$$S_{A\phi_I\phi_I} = i \mathcal{Q} \frac{\mu_7}{N_c} 2 (\pi\alpha')^2 \int d^4x dz \sqrt{-g} A^m(z) (\phi_I(z) \partial_m \phi_I^*(z) - \phi_I^*(z) \partial_m \phi_I(z)) , \quad (8.3.10)$$

donde $\phi^I = \sqrt{\Lambda\omega} e^{i(P-p_\omega)\cdot x} z^2 J_{\Delta_\omega-2}(\omega z)$ and $\phi^{I*} = \sqrt{\Lambda M_3} e^{-iq'\cdot x} z^2 J_{\Delta_\omega-2}(M_3 z)$.

Vértice infrarrojo

El vértice relevante es el que acopla el mesón escalar incidente al modo escalar del tipo I^- , que tiene la menor dimensión conforme $\Delta_{min} = 2$ correspondiente a $l = 1$. A partir del lagrangiano a orden cúbico, el único término que acopla el mesón escalar ϕ al modo vectorial tipo I^\pm es el segundo término de la ecuación (8.2.14). Así, para L pequeño tenemos

$$L_{\phi FF} = \frac{\mu_7}{N_c^{3/2}} (2\pi\alpha')^3 \sqrt{-g} \frac{L}{\rho^2} \phi (F_{IJ} F^{IJ} - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) .$$

Notar que el caso conforme correspondiente a $L = 0$, este vértice no existe. Aquí, analizamos la situación para el fondo no conforme y mantendremos un valor no nulo pero pequeño L para aproximar la función hipergeométrica por una función de Bessel. El caso $L = 0$ debería analizarse de una forma diferente.

Ya que uno de los modos vectoriales del tipo I^- , el campo de F asociado es tal que $F_{\mu\nu}^I = 0$. Por lo tanto, el único término importante es el proporcional a $F_{IJ} F^{IJ}$. Esto implica que el modo *on-shell* producido en este proceso (cuya masa está indicada como M_3) no puede ser del tipo modo II. Esto significa que solo tenemos que considerar el modos escalar desde el punto de vista de la teoría en 5 dimensiones. La contracción del campo 2-forma puede ser descompuesta en términos de las coordenadas angulares sobre la S^3 , y la coordenada radial ρ ,

$$F_{IJ} F^{IJ} = F_{ij} F^{ij} + 2F_{i\rho} F^{i\rho} = 2 [\nabla_i B_j \nabla^i B^j - \nabla_i B_j \nabla^j B^i + \nabla_\rho B_i \nabla^\rho B^i - \nabla_\rho B_i \nabla^i B^\rho] , \quad (8.3.11)$$

donde en el último paso se ha utilizado el hecho que el modo tipo I satisface $B_\rho = 0$. Reemplazando ésto en la acción y tomando el campo complejo conjugado para el campo saliente, obtenemos

$$S_{\phi_I \phi_I} = -\frac{\mu_7}{N_c^{3/2}} (2\pi\alpha')^3 \times \int d^8\xi \sqrt{-g} \frac{2L\phi}{\rho^2} (\nabla_i B_j \nabla^i B^{j*} - \nabla_i B_j \nabla^j B^{i*} + \nabla_\rho B_i \nabla^\rho B^{i*} - \nabla_\rho B_i \nabla^i B^{\rho*}), \quad (8.3.12)$$

donde B corresponde al modo escalar de tipo I^- con masa ω que proviene del propagador e interactúa con el fotón virtual en la región UV. Por otro lado, B^* es el modo saliente con masa M_3 . Primero analizaremos el caso I^\pm y luego consideraremos que el modo saliente del vértice IR sea un modo tipo III.

Modo saliente del tipo I^\pm

Si el modo normalizado saliente corresponde a un escalar de tipo I, se satisface $B_\rho^* = 0$ y por lo tanto el último término de la ecuación (8.3.12) se anula. Reemplazando la solución de los modos en la acción y tomando en cuenta que $\Delta = \Delta_{min} + 2$ para el escalar que corresponde al propagador representado por la línea vertical en la figura 8.2, obtenemos la siguiente acción de interacción

$$S_{\phi_I \phi_I}^{I^\pm} = -\frac{\mu_7}{N_c^{3/2}} (2\pi\alpha')^3 2L C \int d^4x e^{i(p_1+p_\omega-p_3)x} \left(\int_0^{\frac{1}{\Lambda}} dz z^2 J_{\Delta_i-2}(M_1 z) J_0(\omega z) J_{\Delta_3-2}(M_3 z) I_1 + \int_0^{\frac{1}{\Lambda}} dz J_{\Delta_\Phi-2}(M_1 z) \partial_z(z^2 J_0(\omega z)) \partial_z(z^2 J_{\Delta_3-2}(M_3 z)) I_2 \right), \quad (8.3.13)$$

donde Δ_{in} y Δ_3 están asociados con los índices de la representación de los armónicos esféricos de los modos *on-shell* incidentes y salientes respectivamente y $C = \sqrt{\Lambda^3 M_1 M_3 \omega}$ es la constante de normalización. Además I_1 y I_2 son integrales de armónicos esféricos sobre S^3 definidas de la siguiente forma

$$I_1 = \int d\Omega_3 \left(\nabla_i \vec{Y}^{l''} \cdot \nabla^i \vec{Y}^{l'} Y^{l_{in}} - \nabla_i Y_j^{l''} \cdot \nabla^j Y^{l',i} Y^{l_{in}} \right), \quad I_2 = \int d\Omega_3 \vec{Y}^{l''} \cdot \vec{Y}^{l'} Y^{l_{in}} \quad (8.3.14)$$

donde l'' y l_{in} están relacionados con las dimensiones conformes. Utilizando las propiedades de los armónicos esféricos vectoriales obtenemos la siguiente identidad

$$\pm(l+1)\epsilon_{ilm} Y_i^{l,\pm} = \epsilon_{ilm} \epsilon_{ijk} \nabla_j Y_k^{l,\pm} = \nabla_l Y_m^{l,\pm} - \nabla_m Y_l^{l,\pm}, \quad (8.3.15)$$

que permite expresar una de esas integrales en términos de la otra

$$I_1 = \int d\Omega_3 Y^{l_{in}} \nabla^i Y^{l'',\pm,j} \left(\nabla_i Y_j^{l',-} - \nabla_j Y_i^{l',-} \right) = \mp 2(l''+1) I_2. \quad (8.3.16)$$

Modo saliente del tipo III

Luego si consideramos como modo saliente el escalar de tipo III, las soluciones sobre las 8 dimensiones espacio temporales se escriben en términos de las funciones $\phi_{III}(\rho)$ y $\tilde{\phi}_{III}(\rho)$, y los armónicos esféricos escalares $Y^{(l)}(\Omega)$ of S^3 . Estas toman la forma,

$$B_\mu = 0 \quad , \quad B_\rho = e^{ik \cdot x} \phi_{III}(\rho) Y^{(l)}(\Omega) \quad , \quad B_i = e^{ik \cdot x} \tilde{\phi}_{III}(\rho) \nabla_i Y^{(l)}(\Omega) \quad , \quad (8.3.17)$$

donde la dimensión conforme asociada es $\Delta = l + 3$ y las relaciones entre las funciones radiales son

$$l(l+2)\tilde{\phi}_{III} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho^3\phi_{III}). \quad (8.3.18)$$

La ecuación de movimiento esta dada por

$$\partial_\rho\left(\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho^3\phi_{III}(\rho))\right) - l(l+2)\phi_{III}(\rho) - \frac{M^2R^2}{\rho^2}\phi_{III}(\rho) = 0, \quad (8.3.19)$$

donde el valor de L lo tomamos pequeño. Ya que L aparece con un orden cuadrático en la ecuación (8.3.19), vamos a utilizar la solución a $L = 0$ en vez del dado por la hipergeométrica para L distinto de cero. Luego la solución normalizable está dado en términos de las funciones Bessel $\phi_{III} = c_{III}J_{\Delta-2}(MR^2/\rho)$ con $c_{III} = R^2\sqrt{l(l+2)\Lambda/M}$. Notar que estos modos poseen una normalización diferente a los de los modos I. Reemplazando las soluciones en la acción de interacción se observa que los primeros dos términos se anulan ya que

$$\int d\Omega_3 Y^{l''} \nabla^i Y^{1j} \left(\nabla_i \nabla_j Y^{*l} - \nabla_j \nabla_i Y^{*l} \right) = 0. \quad (8.3.20)$$

Por lo tanto se obtiene la siguiente expresión de la acción

$$S_{int} = -\frac{\mu_7}{N_c^{3/2}}(2\pi\alpha')^3 2L \int d\rho d\Omega_3 \sqrt{-g} \frac{\phi(\rho)}{\rho^2} \nabla^\rho(\phi_I(\rho)) \left(\partial_\rho \tilde{\phi}_{III}(\rho) - \phi_{III}(\rho) \right) Y^{in} Y^{Ii} \nabla_i Y^{III}, \quad (8.3.21)$$

donde hemos omitido la delta de conservación de momento como en la contribución del modo I. Se puede simplificar esta contribución utilizando la relación entre $\tilde{\phi}_{III}$ y ϕ_{III} dada en la ecuación (8.3.18) y la ecuación de movimiento ya que implican que

$$\nabla_\rho(\tilde{\phi}_{III}(\rho)) = \frac{\partial_\rho\left(\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho^3\phi_{III}(\rho))\right)}{l(l+2)} = \phi_{III}\left(1 + \frac{M_3^2 R^4}{l(l+2)\rho^2}\right). \quad (8.3.22)$$

El resultado en términos de $z = R^2/\rho$ para el modo de tipo III saliente es

$$S_{int} = -\frac{\mu_7}{N_c^{3/2}}(2\pi\alpha')^3 2L \sqrt{\frac{M_3 M_1 \omega}{l(l+2)}} M_3 \int dz z^2 \partial_z (z^2 J_{\Delta-2}(\omega z)) J_0(\omega z) J_{\Delta-2}(\omega z) I_3 \quad (8.3.23)$$

donde $I_3 = \int d\Omega_3 Y^{in} \vec{Y}^I \cdot \nabla Y^{III}$ es la integral angular sobre la esfera.

Integrales angulares

El resultado de la integrales I_1 e I_3 se detalla a contiunación, Los vértices de interacción que consideramos tienen coeficientes que provienen de integrales de tres armónicos esféricos. Estas integrales generan reglas de selección para los modos salientes e introducen una dependencia en l . Las integrales relevantes son

$$\begin{aligned} \int_{S^3} Y_l^{m,n} \vec{Y}_{l',\epsilon}^{m',n'} \cdot \vec{Y}_{l'',\epsilon'}^{m'',n''} &= \begin{pmatrix} \frac{l'+\epsilon}{2} & \frac{l''+\epsilon'}{2} & \frac{l}{2} \\ m' & m'' & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l'-\epsilon}{2} & \frac{l''-\epsilon'}{2} & \frac{l}{2} \\ n' & n'' & n \end{pmatrix} R_{1,\epsilon,\epsilon'}(l', l, l'') \\ \int_{S^3} Y_l^{m,n} \vec{Y}_{l',\epsilon}^{m',n'} \cdot \nabla Y_{l''}^{m'',n''} &= \begin{pmatrix} \frac{l''}{2} & \frac{l'+\epsilon'}{2} & \frac{l}{2} \\ m'' & m' & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l''}{2} & \frac{l'-\epsilon'}{2} & \frac{l}{2} \\ n'' & n' & n \end{pmatrix} R_2(l', l, l''), \end{aligned} \quad (8.3.24)$$

donde las matrices corresponden a los símbolos $3j$, mientras que las funciones R_1 y R_2 están definidas a continuación

$$R_{1,\epsilon,\epsilon'}(x,y,z) = \frac{(-1)^{\sigma+(\epsilon+\epsilon')/2}}{\pi} \left(\frac{(y+1)}{32(x+1)(z+1)} \right)^{1/2} ((\epsilon(x+1) + \epsilon'(z+1) + y + 2) (\epsilon(x+1) + \epsilon'(z+1) + y)(\epsilon(x+1) + \epsilon'(z+1) - y) (\epsilon(x+1) + \epsilon'(z+1) - y - 2))^{1/2}, \quad (8.3.25)$$

$$R_2(x,y,z) = \frac{(-1)^{\sigma'}}{\pi} \left[\frac{(x+1)(z+1)(\sigma' - x)(\sigma' - y)(\sigma' - z)(\sigma' + 1)}{(y+1)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8.3.26)$$

El lado derecho de esas ecuaciones está definido de modo que se obtienen valores no nulos sólo si se satisface la siguiente inecuación $|x - z| \leq y \leq x + z$, y si $\sigma = \frac{x+y+z}{2}$ en R_1 y $\sigma' = \frac{x+y+z+1}{2}$ en R_2 son enteros.

El diagrama más importante en la expansión en $1/N_c$ tiene un mesón escalar entrante, un modo vectorial tipo I ($\epsilon = -1$) con $l = 1$, y un tercer campo que puede ser un modo tipo I o un modo tipo III. El mesón intermedio con $l = 1$ solo admite $m' = 0$ y el índice n' puede tomar tres posibles valores ($\pm 1, 0$). Primero se considera el caso con un escalar tipo I ($\epsilon = -1$) como el tercer campo en el vértice. La integral angular es

$$\int_{S^3} Y_l^{m,n} \vec{Y}_{1,-1}^{m',n'} \cdot \vec{Y}_{l'',-1}^{m'',n''} = \begin{pmatrix} \frac{l''-1}{2} & 0 & \frac{l}{2} \\ m'' & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l''+1}{2} & 1 & \frac{l}{2} \\ n'' & n' & n \end{pmatrix} R_{3,-1,-1}(l'', l, 1). \quad (8.3.27)$$

El primer símbolo j impone una regla de selección sobre l''

$$\begin{pmatrix} \frac{l''-1}{2} & 0 & \frac{l}{2} \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} = \begin{matrix} (-1)^{-m} \frac{i^{-l}}{\sqrt{l+1}} & \text{if } l'' = l + 1 \\ 0 & \text{if } l'' \neq l + 1 \end{matrix}. \quad (8.3.28)$$

De la condición de conservación $m + m' = 0$ y $n + n' + n'' = 0$, podemos simplificar la integral y calcular la suma de los términos cuadráticos que requiere el teorema óptico

$$\sum_{n'=-1}^1 \left(\begin{pmatrix} \frac{l}{2} & 0 & \frac{l}{2} \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l+2}{2} & 1 & \frac{l}{2} \\ -n - n' & n' & n \end{pmatrix} R_{3,-1,-1}(l, l+1, 1) \right)^2 = \frac{1}{2\pi^2}. \quad (8.3.29)$$

El resultado es independiente de la dimensión conforme de campo entrante ($\Delta \sim l$). Si el tercer modo es un escalar de tipo I con $\epsilon = 1$ el símbolo j cambia y la regla de selección es $l = l'' - 1$, pero el resultado es el mismo. Sin embargo, para el escalar de tipo III, obtenemos una regla de selección $l = l''$ y el resultado depende de la dimensión conforme del campo entrante

$$\sum_{n'=-1}^1 \left(\begin{pmatrix} \frac{l}{2} & 0 & \frac{l}{2} \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l}{2} & 1 & \frac{l}{2} \\ -n - n' & n' & n \end{pmatrix} R_2(l, l, 1) \right)^2 = \frac{l(l+2)}{2\pi^2}. \quad (8.3.30)$$

Para calcular las funciones de estructura debemos sumar sobre los índices m y n de los armónicos esféricos de los estados intermedios utilizando el teorema óptico. Notar que muchos términos se anulan debido a la conservación de la carga asociada a esos índices.

Comentarios generales de las integrales en z

Por otro lado hemos trabajado desde primeros principios, encontrando el diagrama dominante a partir del estudio de los vértices y propagadores. Una vez tratado con las integrales angulares, nos queda pendiente la integral en z del producto de las tres funciones de Bessel de primer tipo multiplicadas por alguna potencias de entera de z . Debido a que estas integrales no tienen representación analítica conocida, existen dos formas de proceder. La primera consiste en considerar numéricamente, simplificando las integrales considerando que la fragmentación ocurre en la región IR, de modo que podemos aproximar las funciones de Bessel por su desarrollo asintótico

$$J_m(az) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi az}} \cos\left(az - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (8.3.31)$$

Sin embargo la compleja dependencia en x en la amplitud de dispersión dificulta la extracción de la dependencia en x en las funciones de estructura. La estrategia que se adopta es similar al del Capítulo 7 y obtenemos las funciones $F(x, q^2)$ semi-analíticamente con un rango de validez bajo ciertas aproximaciones razonables.

8.4. Cálculo de la función de estructura longitudinal

Calculamos las funciones de estructura de una forma análoga al caso del *glueball* tomando en cuenta el diagrama más relevante en la expansión en $\frac{\Lambda}{q}$ y luego utilizando el teorema óptico sumamos sobre los estados intermedios *on-shell*. El tensor $T^{\mu\nu}$ se calcula a partir de FCS obteniendo

$$\text{Im}(T_2^{\mu\nu}) = 4\pi^3 \sum_{M_2, M_3} \int \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} \delta(M_2^2 - q'^2) \delta(M_3^2 - (P + q - q')^2) |\langle P, Q | J^\nu(0) | X_1, X_2 \rangle|^2, \quad (8.4.1)$$

donde el subíndice en el tensor T indica que estamos considerando el proceso con dos estados intermedios X_1 and X_2 con momentos p' y q' . El elemento de matriz de la corriente en la teoría de campos que vive en el borde es

$$n_\mu \langle P, Q | \tilde{J}^\mu(q) | X_1, X_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P + q - p' - q') \langle P, Q | n \cdot J(0) | X_1, X_2 \rangle, \quad (8.4.2)$$

lo identificamos a partir de la dualidad AdS/CFT con la amplitud del diagrama de Witten en supergravedad del tipo IIB. A partir del procedimiento utilizando en la Sección 7.5 y las definiciones de los vectores v^μ definidos en (7.5.2) calculamos las funciones de estructura al siguiente orden en $1/N_c$ obteniendo,

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_L \end{pmatrix} = \frac{1}{N_c} \sum_{M_2, M_3} \frac{q|\vec{p}'|}{8} \sqrt{\frac{x}{1-x}} \int d\theta \sin\theta \begin{pmatrix} v_t^2 + 4x^2(v_s \cdot v_t)^2 \\ 2x[v_t^2 + 12x^2(v_s \cdot v_t)^2] \\ 16x^3(v_s \cdot v_t)^2 \end{pmatrix} |C_t|^2, \quad (8.4.3)$$

donde el prefactor N_c^{-1} posee toda la dependencia del número de color luego de haber reescalado los campos para obtener los términos cinéticos del lagrangiano canónicamente normalizados. El factor C_t , que contiene las integrales de cada vértice y el propagador del mesón escalar tipo I, se define como

$$\begin{aligned} C_t(M_2, M_3, p', q') &= \int dz dz' [V_{IR}(z) \times V_{UV}(z') \times G(z, z')] \\ &= \int d\omega \frac{\omega}{\omega^2 + (P - p')^2} S_{\phi_I \phi_I}^{(z)}(M_1, M_3, \omega) S_{A\phi_I \phi_I}^{(z')}(M_2, q, \omega). \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

La función de estructura F_1 al igual que para los glueballs aportará una contribución de un orden menor en la expansión en q , por lo tanto nos enfocaremos en la F_L . La constante C_t contiene las integrales en la variable z de cada vértice y también la contribución del propagador del escalar de tipo I $G(z, z')$, que posee la misma forma que el correspondiente al glueball (7.3.19). La principal diferencia con el caso del glueball detallado en el Capítulo 7 corresponde a las integrales del vértice de interacción IR, que contiene las tres funciones de Bessel de primer tipo multiplicado por la potencia z^k , con k un entero positivo. En este caso las integrales son complicadas de resolver analíticamente, debido a la presencia del *cutt-off* $z_0 = \Lambda^{-1}$ que puede aproximarse siguiendo un análisis similar al de $k = 1$ y luego analizarse utilizando técnicas inspiradas en el caso estudiado por Auluck [66]. Estas aproximaciones se detallan en el Apéndice C. Las fórmulas que se obtuvieron como resultado están dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} I^{(\kappa)}(a, b, c, \Lambda) &\equiv \int_0^{\Lambda^{-1}} dz z^\kappa J_m(az) J_n(bz) J_l(cz) \\ \Rightarrow \Lambda^3 I^{(4)}(a, b, c, \Lambda) &\approx \Lambda^2 I^{(3)}(a, b, c, \Lambda) \approx \Lambda I^{(2)}(a, b, c, \Lambda) \approx I_1(a, b, c, \Lambda), \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

que están escritas a menos de ciertas constantes numéricas que no son relevantes al estudiar la dependencia en x de las funciones de estructura. $I^{(1)}(M_1, M_3, \omega, \Lambda)$ es la integral que aparece en el caso del glueball. La ecuación (8.4.5) implica que debido a que estamos trabajando en el régimen de Λ pequeño, la contribución importante proviene del caso $k = 4$, por lo tanto nos enfocaremos en esta contribución. Sin embargo las otras integrales se hacen importantes si consideramos el límite $x \rightarrow 1$. Además realizando la aproximación del Apéndice A,

$$\begin{aligned} I^{(4)}(a, b, c, \Lambda) &= \int_0^{\Lambda^{-1}} dz z^4 J_m(az) J_n(bz) J_l(cz) \\ &\approx \left(\frac{1}{\Lambda}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{ab}} \left[(-1)^\alpha \delta(c - (a + b)) + (-1)^\beta \delta(c - (a - b)) \right], \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

para algunas potencias enteras α y β que poseen toda la dependencia en los índices de las funciones de Bessel. La similitud de las diferentes integrales proviene del hecho que, si consideramos los límites de integración, las contribuciones importantes provienen de la región $c = |a \pm b|$. En nuestro contexto corresponde a $\omega = M_1 \pm M_3$. Este tipo de comportamiento en donde las interacciones de supergravedad en AdS actúan como algún tipo de restricción de la conservación de la energía ha sido notado en [58], que proviene intuitivamente de las aproximaciones con las funciones delta de Dirac.

Considerando las aproximaciones para el vértice IR, el vértice UV y el propagador $G(z, z')$ se puede proceder del mismo modo que en el cálculo del glueball en el Capítulo 7. Primero elevamos al cuadrado la amplitud, luego realizamos la integración en ω e integramos en la variable angular θ . La contribución importante viene del caso $\omega = M_1 - M_3$. Luego la suma sobre la M_3 indica que los valores importantes son los cercanos a αM_1 con $\alpha = \frac{|\vec{p}|}{|p|}$. Todos esos resultados indican que la fragmentación del hadrón ocurre para ángulos pequeños y que el cociente entre el momento de las partículas resultantes *on-shell* de masa M_3 y momento p del hadrón incidente es similar a las masas de AdS

$$F_L^I = \frac{B}{\lambda N_c} \frac{M_1^6}{\Lambda^3} \sum_{M_2} \frac{M_2}{q^{14}} (M_2^2 + q^2)^2 x^6 (q^2(1-x) - xM_2^2)^3 x^6 \left(1 + \left(\frac{M_2}{q} \right)^2 \right)^6, \quad (8.4.7)$$

donde B es una constante numérica. La diferencia entre esta suma y el caso del glueball está dada por algunos factores Λ , pero también de M_3 y $\omega = M_1 - M_3$ que cambien el resultado de la dependencia funcional en x . Asimismo para el glueball tienen $1/N_c^2$ mientras que para los

mesones va con $1/N_c$. Ahora, la contribución más importante proviene del caso donde M_2 toma valores del orden de q , que significa que podemos tratar esta suma como una integral de medida dM_2/Λ [57]. Esta integral genera el resultado final para las funciones de estructura longitudinal F_L

$$F_L^{(I)}(x, q^2) = \frac{1}{\lambda N_c} \frac{B}{120} \left(\frac{M_1}{\Lambda} \right)^6 \frac{\Lambda^2}{q^2} x^3 (1-x)^4 (1+2x(2+5x)). \quad (8.4.8)$$

Se observa que para $x \rightarrow 1$ la función de estructura decae como $(1-x)^4$, pero debemos tener en cuenta que hay otras integrales en z de orden menos relevante. Estas integrales aportan contribuciones proporcionales como $x^3(1-x)^2(1+x(2+3x))$ y $x^3(1-x)^2$ y se vuelven importantes cuando $x \rightarrow 1$. La aparición del decaimiento $(1-x)^2$ es importante y esperable desde la fenomenología.

8.5. Comparación con resultados de *Lattice* QCD

A partir de las simulaciones de *Lattice* de QCD se conocen los primeros momentos asociados a las funciones de estructura mediante las siguientes integrales

$$M_n[F_i] = \int_0^1 dx x^{n-1} F_i(x, q^2). \quad (8.5.1)$$

En el trabajo previo [68] se compararon los primeros momentos asociados a funciones de estructura de mesones escalares y vectoriales en el límite de N_c grande con los datos provenientes de simulaciones en la red del pión y del mesón rho [71]. En nuestra descripción holográfica asociamos al mesón pseudoescalar más liviano con la fluctuación escalar ϕ asociada a la masa de Kaluza-Klein más pequeña. Para el modelo de D3D7-branas el $\Delta = l + 3$ y $l = 1$ corresponde a la masa de KK más chica. El número entero l indica la representación irreducible del grupo $SO(4) \sim SU(2) \times SU(2)$ asociada a la descomposición de los armónicos esféricos escalares.

En [68] se calcularon los primeros tres momentos de $F_1(x, q^2)$ y $F_2(x, q^2)$. Como en nuestro cálculo F_1 es de un orden inferior, vamos a comparar F_L con la F_2 obtenida de *Lattice* QCD. El resultado que obtuvimos a partir de supergravedad de las funciones de estructura es válido entre $x = 0,1$ y $x = 1$. Sin embargo para los primeros momentos es importante la contribución de x chico, por eso utilizamos la función de estructura encontrada en [70] y usada en [68]. Ésta se derivó a partir de la dispersión de cuerdas abiertas y cerradas en $AdS_5 \times S^5$ y posee una dependencia en el parámetro de Bjorken que va como $F_L^{small}(x, q^2) \propto x^{-1}$. El argumento que nos permite utilizar esta función de estructura que fue calculada a orden árbol consiste en notar que es independiente de la dimensión conforme del hadrón incidente Δ_{in} y por lo tanto podemos conjeturar que el resultado a un loop no será demasiado diferente. De esta forma podemos integrar desde $x = 0,0001$ hasta $x = 1$ como en [68]. Vamos a expresar la función de estructura total a partir de dos constantes adimensionales, una delante de la F_L asociada a x chico y otra delante de la F_L asociada a x grande. Luego calculamos el mejor ajuste de estas constantes para reproducir los datos de *Lattice* para los primeros tres momentos del pión.

En la figura 8.3 se detallan los resultados del ajuste de la contribución en $1/N_c$ comparado con el ajuste realizado en el límite de $N_c \rightarrow \infty$. Las constantes de los ajustes son 0.0017 y 14.47. Estas son del mismo orden de magnitud que las encontradas en [68]. Otro punto interesante es que el cociente de los dos primeros momentos tomando el límite de energías grandes $M_3(F_2)/M_2(F_2) = 0,55$ es mucho más cercano a 0.5 (valor esperado desde la fenomenología) que el obtenido tomando el límite de N_c grande $M_3(F_2)/M_2(F_2) = 0,69$ [68].

En la tabla 8.1 se comparan los resultados de los primeros tres momentos calculados para el mesón pseudoescalar más liviano con los resultados de las simulaciones de QCD en la red calculadas en [72, 73] y con los resultados en el límite de N_c grande presentados en [68].

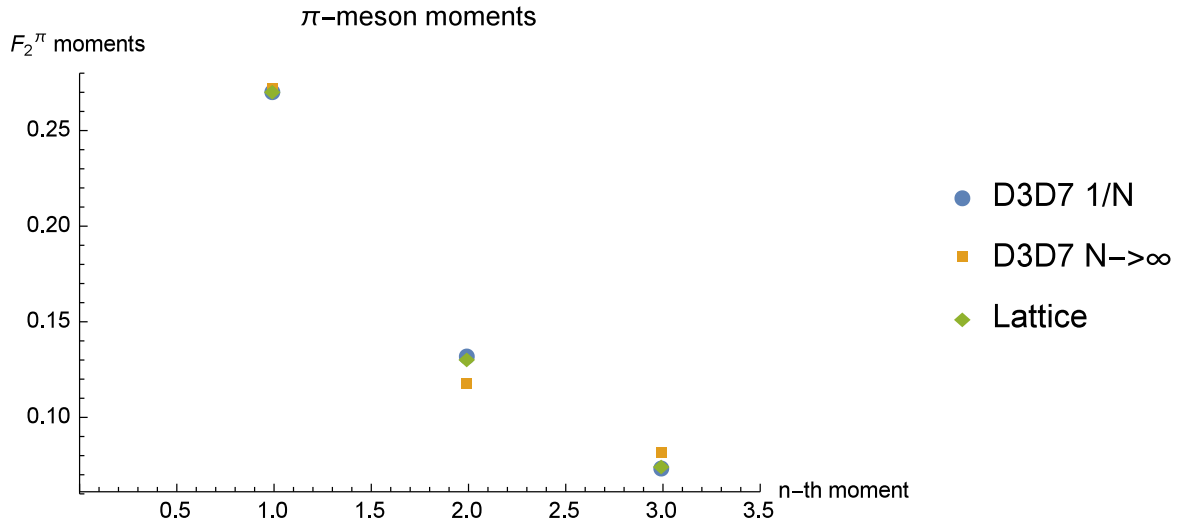


Figura 8.3: Los primeros tres momentos de la función de estructura F_2 del pión obtenidos de simulaciones de *Lattice* QCD [72, 73]. Se compara con los momentos obtenidos del mejor ajuste de los parámetros libres de la contribución $1/N_c$ tomando primero el límite de altas energías (etiquetada con "D3D7 $1/N_c$ "). También se incluyen los momentos obtenidos del mejor ajuste tomando primero el límite de N_c grande. Se utiliza la etiqueta "D3D7 $N \rightarrow \infty$ " para esta contribución.

Modelo / Momento	$M_1(F_2)$	$M_2(F_2)$	$M_3(F_2)$
Lattice QCD	0.27	0.13	0.074
D3D7 ($1/N$)	0.2699	0.1323	0.0727
Porcentaje error	0.1	-1.8	1.8
D3D7 ($N \rightarrow \infty$)	0.2708	0.1161	0.0803
Porcentaje error	-0.3	10.8	-8.5

Cuadro 8.1: Comparación de nuestros resultados de los primeros momentos asociados a la función de estructura F_2 del mesón pseudoescalar más liviano para una elección apropiada de la constante de normalización con respecto a los resultados computacionales de QCD en la red [72, 73] y se compara también con los resultados presentados en [68]. Las incertezas de los datos de *Lattice* QCD fueron omitidas.

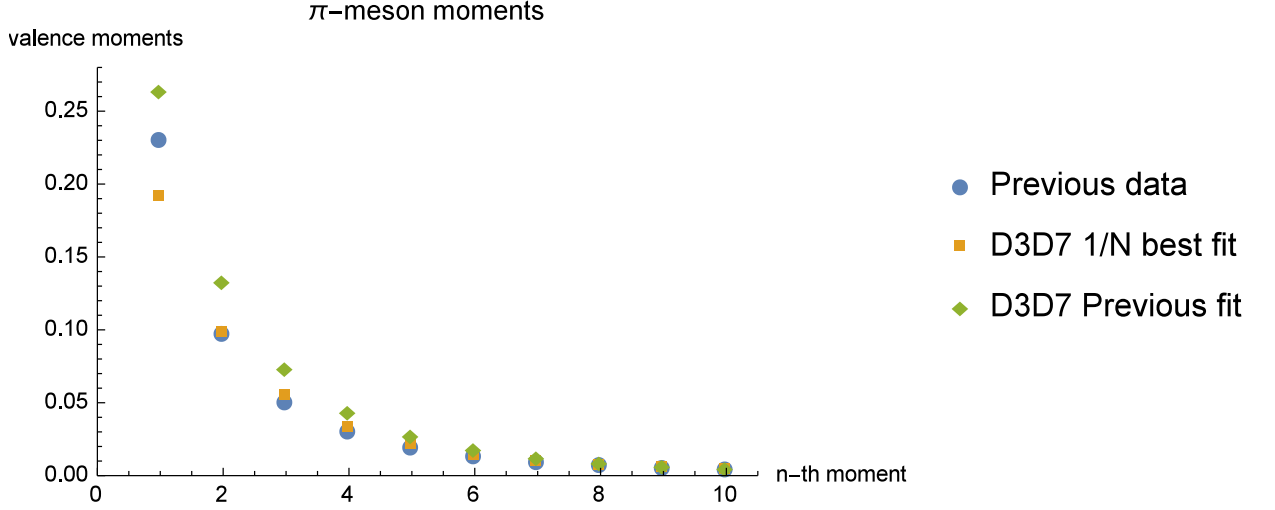


Figura 8.4: Momentos de la F_2 del pión $n = 1, \dots, 10$. Los datos previos son obtenidos de [74].

También podemos comparar de nuestros resultados para momentos de más altos órdenes. Se detallan en la figura 8.4 los momentos comparados con [74]. La diferencia con los primeros ajustes corresponde a que para los momentos superiores no hace falta utilizar el F_L asociado a x chico y es suficiente con la función de estructura de valencia (x cercano a 1).

8.6. Funciones de estructura y relación de Callan-Gross

A partir de ciertas aproximaciones razonables calculamos la dependencia explícita en el parámetro de Bjorken de la función de estructura longitudinal. Esta expresión se calculó tomando como estados intermedios un modo escalar tipo I o un modo escalar tipo III. Estos diagramas generan una expresión que decae como $(1-x)^4$ cuando $x \rightarrow 1$. Además existen otras contribuciones provenientes de integrales en la variable z que son de un orden inferior pero decaen como $(1-x)^2$. Éstas son relevantes para x tendiendo a 1 y por lo tanto la contribución a los momentos de las funciones de estructura son muy pequeñas.

Se observan que la estructura a un *loop* de las amplitudes DIS generan una contribución no nula de la F_1 pero es de un orden menos relevante en la expansión en q/Λ . El término relevante está dado por F_2 o este caso la función de estructura longitudinal $F_L = F_2 - 2xF_1$.

Otro efecto notable en la ecuación (8.4.8) es la presencia del factor $1/\lambda$ además del factor $1/N_c$. Este factor es esperable ya que la interacción de tres mesones tiene una acoplamiento proporcional a

$$g_{cubic} \propto \frac{1}{\sqrt{N_c}} \frac{\alpha'}{L}, \quad (8.6.1)$$

donde $L = \Lambda R^2$ y como $R^2 = \sqrt{\lambda \alpha'}$ entonces,

$$g_{cubic} \propto \frac{1}{\sqrt{N_c}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (8.6.2)$$

También hay que enfatizar otras características interesantes. Primero que la dependencia en l se encuentra solo en el coeficiente y no como potencia de x o $(1-x)$. Este comportamiento difiere

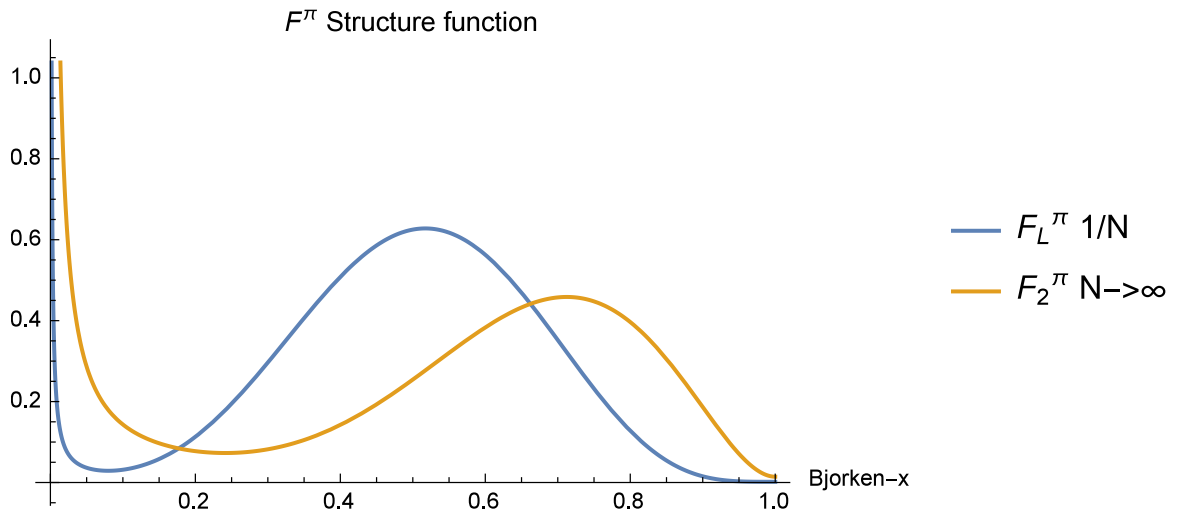


Figura 8.5: La función de estructura F_2 en función del parámetro de Bjorken. Se consideraron las constantes ajustadas que dan los momentos de la tabla 8.1.

del obtenido en el límite $N_c \rightarrow \infty$ [68] en donde la $F_2 \propto x^{l+4}(1-x)^{l+1}$. Segundo, la función de estructura decae como $(1-x)^2$ en la región de $x \rightarrow 1$ y en el contexto de la función de estructura de valencia se han obtenido en [69] una contribución que va como $(1-x)^{2 \pm 0,2}$.

Capítulo 9

Plasmas de quarks y gluones fuertemente acoplados

Las colisiones a velocidades ultrarelativistas de iones pesados juegan un rol muy importante en la física de altas energías proporcionando el acceso controlado a datos experimentales de un nuevo estado de la materia a altas temperaturas y densidades: el plasma de quarks y gluones (QGP). El proceso completo desde de las instancias previas a la colisión de los núcleos hasta la formación de hadrones y fotones térmicos medidos por los acelerados está regido por varias etapas, cada una con su física subyacente.

En los primeros instantes el plasma está formado esencialmente por gluones, denominándose *glasma*. El número de gluones es del orden de $\sim \frac{1}{g^2}$ con g la constante de acoplamiento y cada uno lleva una pequeña fracción x del momento total del núcleo incidente. Durante el primer fm/c debido al alto número de ocupación el plasma evoluciona siguiendo las ecuaciones clásicas de Yang-Mills a primer orden en el desarrollo perturbativo. Se espera que en los siguientes órdenes en la expansión en la constantes de acoplamiento, las correcciones cuánticas generen los procesos de isotropización de los momentos [75] y posteriormente alcance el equilibrio local.

A pesar del progreso en los últimos años [76], aún no se ha dilucidado el mecanismo de termalización desde primeros principios (QCD perturbativa). Otra alternativa prometedora para generar tiempos de termalización extremadamente rápidos (0.2-1) fm/c provienen de modelos holográficos derivados de supergravedad (teoría de cuerdas) [77], [78]. Se han estudiados simulaciones que contienen la evolución completa combinando condiciones iniciales provenientes de un plasma $\mathcal{N} = 4$ SYM con modelos hidrodinámicos [79], en donde se obtuvieron buenos resultados para observables hadrónicos. Sería interesante explorar modelos holográficos más realistas incluyendo por ejemplo campos magnéticos fuertes, acoplamiento finito (correcciones en α') y efectos de momento angular del plasma.

En la siguiente etapa el sistema está formado por un plasma de quarks y gluones (QGP) en equilibrio térmico local que se expande y enfría. La dinámica puede ser descrita por modelos hidrodinámicos viscosos, en donde la viscosidad toma en cuenta la desviación del equilibrio térmico e isotropía. El plasma sufre una transición de fase suave hacia un gas hadrónico, de acuerdo a las ecuaciones de estado obtenidas a partir de datos de *Lattice* [80]. Durante esta evolución emite fotones térmicos que nos proveen información directa de la evolución del plasma.

Finalmente, alcanzada una temperatura crítica debido al confinamiento, el sistema hadroniza. El gas de hadrones continua evolucionando, decayendo e interactuando y luego se miden los observables hadrónicos en los calorímetros de los aceleradores.

En los trabajos [81, 56] se han estudiado con éxito el espectro hadrónico y los coeficiente del flujo anisotrópico para procesos Au-Au en el *Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC, Brooha-*

ven, USA) y Pb-Pb en el *Large Hadron Collider (LHC, CERN, Suiza)* a partir de simulaciones numéricas. Para simular estos procesos se utilizaron condiciones iniciales IP-glasma y un simulador hidrodinámico. Luego se utilizó esta simulación para estudiar la producción de fotones directos [56] a partir de la tasa de fotoemisión asociada a un plasma débilmente acoplado [82]. Por último en el trabajo de [83] se incluyó tasas de fotoemisión asociadas a plasmas fuertemente acoplados calculados mediante la dualidad AdS/CFT. Estas tasas se obtuvieron a partir de modelos *bottom-up* y ajustaban mejor los datos experimentales. El objetivo de nuestro trabajo es explorar el espectro y los coeficientes de flujo anisotópico a partir de utilizar las tasas de fotoemisión con λ grande pero finito. Se remarca que estos modelos son *top-down* y se podemos considerarlos desde primeros principios con contraste con los utilizados en [83].

9.1. Fotoemisión

Los observables asociados a corrientes electromagnéticas como fotones y dileptones interactúan con el medio a partir de la interacción electromagnética que es mucho más débil que la interacción fuerte. Por esta razón su longitud de camino medio es mayor que la longitud característica del sistema y su estado final permanece prácticamente inalterado, siendo buenos candidatos para proveer información de la evolución local del plasma.

Los fotones térmicos emitidos por el plasma, no son la única fuente en el proceso. Existen otros mecanismos de fotoemisión que deben tenerse en cuenta a la hora de comparar los modelos teóricos y simulaciones con los datos experimentales, ver figura 9.1. A continuación se detallan brevemente de dónde provienen las otras fuentes de fotones directos.¹

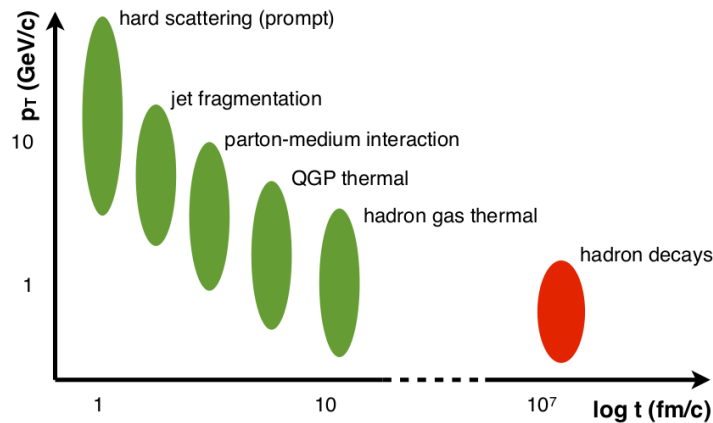


Figura 9.1: Escalas de tiempos asociadas a los distintos mecanismos de producción de fotones. La imagen fue extraída de [53].

Fotones *prompt*

En primeros instantes cuando los dos núcleos colisionan, las interacciones entre partones producen fotones mediante *hard scattering* (aniquilación quark-antiquark, proceso de Compton) y procesos de fragmentación. Esta contribución se puede calcular utilizando un modelo empírico

¹En realidad la fotoemisión total que mide los calorímetros del acelerador corresponde a la contribución de fotones directos y fotones inclusivos. Estos últimos se pueden extraer de los datos mediante análisis estadístico y corresponden a decaimientos partónicos, principalmente debidos a procesos del tipo $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$.

a partir de cálculos de QCD perturbativo que permiten obtener el espectro de fotones producidos en colisiones p+p complementado con un escaleo binario. Este escaleo supone que las colisiones entre los núcleos están dadas por una suma incoherente de colisiones protón-protón.

Utilizando cálculos perturbativos se puede obtener los fotones producidos de la colisión protón+protón (p+p) a partir de dos canales [84], [85]. El primero es de fragmentación:

$$E \frac{d^3 \sigma_{pp}}{d^3 p} = \sum_{a,b,c,d} f_{a/p}(x_a) \times f_{b/p}(x_b) \times d\hat{\sigma} \times D_{\gamma/c}(z_c), \quad (9.1.1)$$

donde las f son las funciones de distribución partónicas y la suma se hace sobre los partones. El último factor indica que el partón c tiene una probabilidad de producir un fotón de momento $P_T = z_c p_c$ en el proceso de fragmentación y esta probabilidad está dada por la función de fragmentación $D_{\gamma/c}$ no perturbativa.

El segundo canal corresponde a los procesos de *hard scattering* dados por

$$E \frac{d\sigma_{pp}}{d^3 p} = \sum_{a,b,d} f_{a/p}(x_a) \times f_{b/p}(x_b) \times d\hat{\sigma}, \quad (9.1.2)$$

donde $d\hat{\sigma}$ describe procesos de la forma $ab \rightarrow \gamma d$ (donde a,b,d corresponden a partones), principalmente dados por la dispersión de Compton ($gq \rightarrow \gamma q$) y la aniquilación quark-antiquark ($q\bar{q} \rightarrow g\gamma$).

El cálculo perturbativo del procesos p+p se realizó mediante el programa INCNLO [86] con correcciones nucleares a las funciones de distribución partónica [87]. Esto se conoce a *next to leading order* y se puede condensar los dos efectos de fragmentación y *hard scattering* en una sola expresión

$$E \frac{d^3 \sigma_{pp}}{d^3 p} = \sum_{a,b,c,d} f_{a/p}(x_a, Q_{fact}) \times f_{b/p}(x_b, Q_{fact}) \times d\hat{\sigma}(Q_{ren}) \times D_{\gamma/c}(z_c, Q_{frag}). \quad (9.1.3)$$

donde $f_{a/p}$ son funciones de distribución partónicas que se pueden interpretar que representan la probabilidad de que un partón a con momento $x_a P$ sea encontrado en un protón de momento P . La sección eficaz total depende de las escalas de energía que entran en cada factor: la escala de factorización Q_{fact} de las funciones de distribución partónica f , la escala de fragmentación Q_{frag} de la función de fragmentación $D_{\gamma/c}(z_c)$ y la escala de renormalización Q_{ren} absorbida por la constante de acoplamiento. Se fijaron todas las escalas en $Q = 0,5 p_T$ que reproduce correctamente los datos experimentales. La escala Q , que puede tomar valores entre 1-1.5 GeV. Estos valores corresponden a una estimación de las escalas de energías más bajas en las cuales se puede considerar QCD perturbativo. Esto impone una limitación, ya que permite explorar valores $p_T > 2Q$, por eso para acceder a valores cercanos a $p_T \sim 0,5 GeV$ se puede utilizar el comportamiento analizado en [52, 56] en donde el resultado de cambiar de escala Q corresponde a un cambio de normalización. Esto permite elegir $Q = 4p_T$ y acceder a la región de p_T chicos que nos interesa. Por último se utilizó la parametrización adoptada en [88] que ajusta correctamente el espectro de fotones en procesos p+p dada por la siguiente forma funcional $f(a_1, b_1, c_1) = a_1(1 + p_T^2/b_1)^{-c_1}$. En la figura 9.2 se observan los datos experimentales y el ajuste de fotones directos del procesos p+p a $\sqrt{s} = 200$ GeV.

Por último implementando un escaleo binario calculamos la contribución del espectro de fotones *prompt* dos núcleos (A+A) :

$$E \frac{d^3 N_{AA}^{prompt}}{d^3 p} \approx \frac{N_{coll}}{\sigma_{nn}^{inel}} E \frac{d^3 \sigma_{pp}}{d^3 p}, \quad (9.1.4)$$

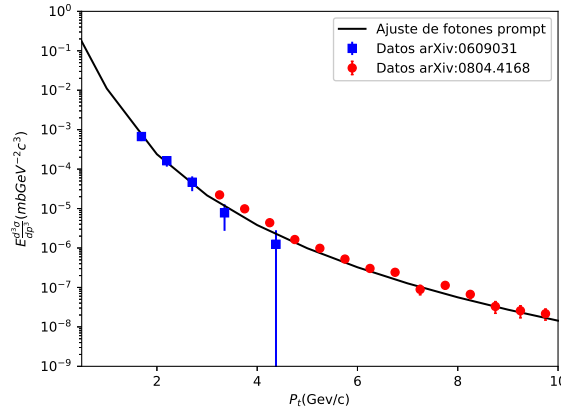


Figura 9.2: Ajuste de los datos experimentales de *PHENIX* [88, 89] de fotones directos en el proceso p-p a $\sqrt{s} = 200 \text{ GeV}$.

donde N_{coll} es el número colisiones nucleón-nucleón en la colisión de los dos núcleos calculado con el modelo de Glauber (ver tabla 9.1) y σ_{nn}^{inel} es la sección eficaz diferencial inelástica del proceso nucleón-nucleón. Se utilizó el valor $\sigma_{nn} = 42 \text{ mb}$ para los procesos Au-Au y $\sigma_{nn} = 65 \text{ mb}$ para Pb-Pb del mismo modo que en [90]

Fotones térmicos

Los fotones térmicos son emitidos por el plasma durante su tiempo de vida. Es interesantes estudiarlos por dos razones. La primera es que poseen un compartimiento exponencial para bajos momentos al igual que el espectro directo, indicando que son la fuente más dominante. El segundo punto interesante es que lo fotones directos aportan una contribución en la anisotropía en momentos para P_T (momento transverso) pequeños mayor al de las otras fuentes de fotones y es del mismo orden de magnitud que el asociado a los piones. Esto parece indicar que la anisotropía en momento asociada la emisión de fotones y hadrones se genera por el mismo mecanismo.

Fotones de decaimientos hadrónicos

La mayor parte de los fotones producidos por decaimientos se extraen estadísticamente y corresponden a fotones *prompt*. Algunos otros canales de decaimientos menos relevantes como por ejemplo $f(1285) \rightarrow \rho_0 \gamma$ no fueron considerados en los fotones *prompt* y quedan incluidos en los fotones directos [56]. Estos se pueden calcular con el módulo de una simulación numérica de hadronización y decaimientos.

Otras fuentes no consideradas

Existen otras fuentes que no se considerarán en este trabajo [91] y [52] pueden provenir de la fase de pretermalización, de considerar campos magnéticos fuertes o jets.

9.2. Simulaciones numéricas

Para simular las colisiones se utilizaron módulos que recrean numéricamente cada etapa del proceso y están asociados a distintos modelos físicos. Los observables se clasifican según el rango

de centralidad al que pertenecen y para simularlos se generan eventos con condiciones iniciales fluctuantes y aleatorias en el rango centralidad estudiado. Luego se computa la evolución para cada evento y finalmente los observables se obtienen a partir del promedio sobre el número total de eventos. Este método se denomina simulación *event by event* y ha generado buenos resultados describiendo correctamente el espectro, el flujo anisotrópico de hadrones y la producción de fotones térmicos, [81], [56].

A continuación describiremos el proceso para generar numéricamente el espectro de fotones directos.

Los módulos se dividen en:

- Generador de condiciones iniciales.
- Evolución hidrodinámica.
- Emisión de fotones térmicos.
- Emisión de fotones por decaimientos.

Luego para obtener el espectro de fotones directos se le debe sumar la contribución de fotones *prompt* calculados como se comentó en la sección anterior. Se detalla esquemáticamente en la figura 9.3 las etapas que describen las colisiones de iones pesados, qué módulo numérico se emplea y qué modelo teórico se aplica.

9.2.1. Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales que se generaran para la simulación evento por evento y que utilizaremos en la evolución hidrodinámica se pueden clasificar en dos grupos: métodos Monte Carlo Glauber y modelado considerando la presencia de un *Color Glass Condensate* (CGC). Se debe aclarar que estos mecanismos no recrean el proceso de pretermalización y termalización. En ambas técnicas se utilizan generadores de Montecarlo en alguna etapa interna.

MC-Glauber

En las colisiones relativistas de iones pesados, los núcleos se aceleran hasta alcanzar velocidades cercanas a las de la luz, generando que los movimientos orbitales intrínsecos de los nucleones se congelen debido a la dilatación temporal. Esto permite utilizar la descripción semi-clásica de los modelos de Glauber que considera nucleones descorrelacionados que interactúan. Las etapas principales son:

- Generar las posiciones de los nucleones en cada núcleo aleatoriamente de modo que sean compatibles con la densidad de distribución nuclear de Woods-Saxon.
- Computar la probabilidad de interacción a partir del parámetro de impacto entre los núcleos y la sección eficaz inelástica nucleón-nucleón.
- Recrear la forma en que se deposita la energía o entropía de cada interacción. Por ejemplo a partir de una distribución gaussiana en 2D en el plano transversal.

Cada una de estas etapas se la puede mejorar para que recreen condiciones más realistas. Estos modelos nos aportan solo la densidad de energía inicial, el número de nucleones participantes y el número de colisiones binarias. Un artículo de revisión completo de los modelos de Glauber es [92] y un artículo donde detalla operativamente como implementarlo es [93].

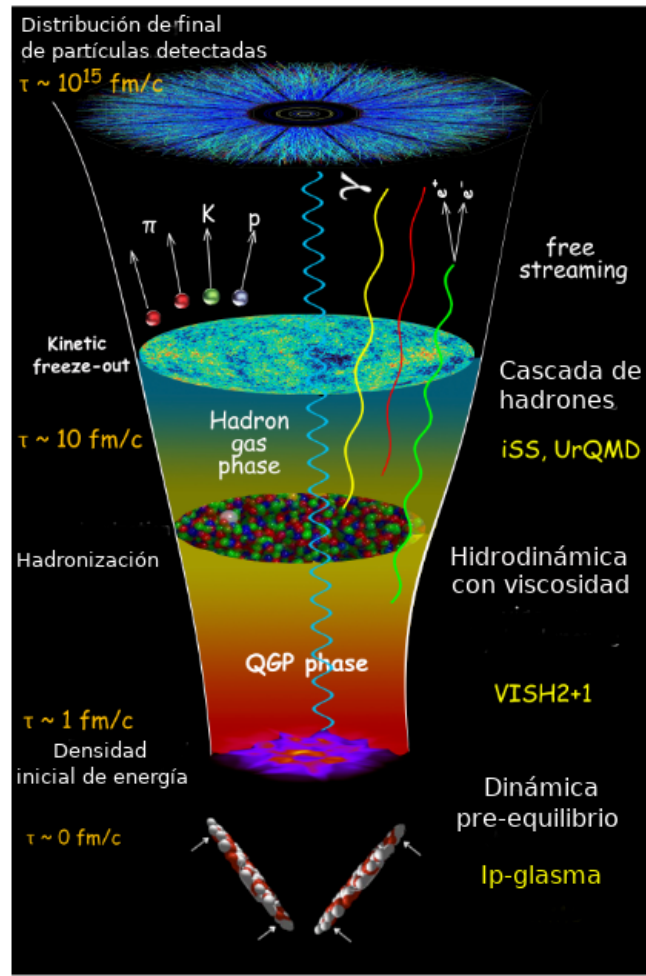


Figura 9.3: Ilustración de las etapas de la colisión con los modelos teóricos y los módulos numéricos que las describen. Figura modificada de [91].

IP-glasma

Por otro lado, utilizando el método de Glauber solo se puede obtener la densidad de energía inicial $e(t_0)$ y se deben fijar a mano a partir de otros modelos o consideraciones, $\vec{u}(t_0)$, $\pi^{\mu\nu}(t_0)$ y $\Pi(t_0)$ (correspondientes a los tensores de viscosidad y flujo de velocidades a tiempo inicial definidas formalmente en la siguiente sección). Esto impulsó la búsqueda de condiciones iniciales con menos parámetros libres. Una propuesta alternativa está basada en modelos de *Color glass Condensate*, que calcula la multiplicidad de los gluones a partir sus funciones de distribución. En este modelo suponemos que a altas energías la constante de acoplamiento es pequeña y el número de ocupación de los gluones es grande y no perturbativo ($\sim 1/\alpha_s$). En este límite podemos aproximar la dinámica por la teoría de Yang-Mills clásica, describiendo su configuración inicial y su posterior evolución. Esta aproximación es válida para colisiones de núcleos pesados pero para colisiones pequeñas como por ejemplo p+Pb se especula que sólo es válida para eventos de alta multiplicidad.

El marco de trabajo CGC se combina con modelos de parámetro de impacto de la escala de saturación, que introduce una escala de saturación Q_s dependiente del x de Bjorken y reproduce correctamente los datos de dispersión inelástica profunda de HERA. A partir de una constante de multiplicativa de orden uno que permite convertir Q_s en la densidad de carga de color $g^2\mu$

se puede generar la distribución de carga de cada núcleo.

Se genera la distribución de carga inicial ρ^a con un muestreo de Monte-Carlo siguiendo la densidad de distribución gaussiana de carga de color $\langle \rho^a(\vec{x}_T) \rho^b(\vec{y}_T) \rangle = \mu g^2 Q_s(x, \vec{x}_T) \delta^{ab} \delta(\vec{x}_T - \vec{y}_T)$ y la distribución de Woods-Saxon. Una vez determinada la distribución de carga, se obtienen los campos de gluones para cada núcleo de

$$A_{(m)}^i = -\frac{i}{g} U_m \partial_i U_m(x_T) \quad (9.2.1)$$

donde U es la línea de Wilson definida a partir de

$$U_m = \mathcal{P} e^{-ig \int dx \frac{\rho_m(\vec{x}_T, x)}{\nabla_T^2 - m^2}}. \quad (9.2.2)$$

El índice $m = 1, 2$ indica el correspondiente núcleo. Los campos luego de la colisión $t \rightarrow 0^+$ toman los valores

$$A^i = A_{(1)}^i + A_{(2)}^i \quad (9.2.3)$$

$$A^\eta = \frac{ig}{2} [A_{(1)}^i, A_{(2)}^i] \quad (9.2.4)$$

Se evoluciona siguiendo las ecuaciones de Yang-Mills hasta un cierto tiempo t_0 . Los autovalores tipo-tiempo del tensor de energía-impulso

$$T_{\nu}^{\mu} u^{\nu} = \epsilon u^{\mu} \quad (9.2.5)$$

permiten obtener la densidad de energía ϵ y el flujo de velocidades u^{μ} que corresponden a las cantidades relevantes para los cálculos de fluidos. Esto se denomina *Landau Matching*.

La normalización del tensor de energía-momento en estas condiciones no está totalmente determinada, por la libertad en la elección de α_s (ver [94]). Esta normalización se puede fijar ajustando los datos de multiplicidad de hadrones cargados. Las condiciones iniciales obtenidas con este modelo son invariantes de *boost* por lo cuál son una buena aproximación para colisiones de altas energías con rapidez cercana a *mid-rapidity*.

El trabajo donde se empieza a emplear la condiciones IP-glasma es [95], y en la sección 4 de [94] hay un resumen del proceso para generarlas.

Para las colisiones de Pb-Pb y Au-Au se utilizaron las condiciones IP-glasma descargadas del sitio web de Schenke [96], que cuentan con la densidad de energía inicial y la velocidad. Se debe escoger como tiempo inicial en la evolución hidrodinámica $t_0 = 0,4$ fm/c.

9.2.2. Módulo hidrodinámico

El módulo hidrodinámico es la parte central que nos permite describir la evolución del plasma de quarks y gluones. Necesita de condiciones iniciales derivadas en la sección anterior y algunos parámetros que deben fijarse de modo de ajustar correctamente algunos observables hadrónicos. Estos parámetros corresponden a la viscosidad de corte η y la viscosidad del bulk ζ y provienen de correcciones de viscosidad al equilibrio local. A continuación se detalla brevemente la principales características de los modelos hidrodinámicos.

Las teorías hidrodinámicas son teorías efectivas en donde las complicadas interacciones a corta distancia y tiempos cortos son promediadas. Los grados de libertad efectivos se reducen a las cargas conservadas y sus corrientes. Por lo tanto las ecuaciones hidrodinámicas son simplemente las leyes de conservación y se debe adicionar la ecuación de estado. Si incluimos términos de disipación se necesitan las correspondientes relaciones constitutivas [97].

Los grados de libertad hidrodinámicos incluyen los valores de expectación de corrientes conservadas, tales como el tensor de energía-impulso $T^{\mu\nu}$ (simetría de Lorentz) o corrientes asociadas a una carga conservada J_B (ejemplo carga bariónica), con sus respectivas leyes de conservación,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (9.2.6)$$

$$\partial_\mu J_B^\mu = 0. \quad (9.2.7)$$

En nuestro caso se supone la condición más realista en la que el plasma se encuentra en equilibrio térmico local. Se toma como hipótesis que cada parte del sistema puede ser aproximado localmente por un estado de equilibrio térmico que se mantiene durante un cierto tiempo. Para que sea una suposición razonable se necesita la siguiente jerarquía de escalas:

- Una escala microscópica que es relevante en la dinámica microscópica (QCD en nuestro caso).
- Una escala intermedia suficientemente mayor a la escala microscópica en donde se puedan definir las cantidades termodinámicas.
- Una escala macroscópica suficientemente grande para que la escala intermedia pueda tratarse en el límite continuo.

Luego se puede ir más allá y estudiar el sistema apartado del equilibrio local mediante la expansión en gradientes del tensor de energía-impulso, que implica introducir el tensor de viscosidad de corte $\pi^{\mu\nu}(X)$ y la presión del *bulk* de $\Pi(X)$ que parametrizan el apartamiento. Estos tensores quedan indeterminados y se deben restringir a partir de otro modelo, como por ejemplo teoría cinética. Primero definimos un marco de referencia local en donde las cantidades termodinámicas estén bien definidas,

$$T_\nu^\mu(X)u^\nu = \epsilon(X)u^\mu(X), \quad u^\mu u_\mu = 1, \quad (9.2.8)$$

donde $T^{\mu\nu}(X)$ es el tensor de energía impulso, $\epsilon(X)$ es la densidad de energía y $u^\mu(X)$ es el flujo de velocidad. El marco de referencia en reposo de un elemento de fluido se obtiene realizando un *boost* de modo que $u^\mu(X) = (1, 0, 0, 0)$.

El tensor $T^{\mu\nu}$ se puede descomponer como,

$$T^{\mu\nu}(X) = \epsilon(X)u^\mu u^\nu(X) - (p(X) + \Pi(X))\Delta^{\mu\nu}(X) + \pi^{\mu\nu}(X), \quad (9.2.9)$$

donde $\Delta^{\mu\nu}(X) = g^{\mu\nu} - u^\mu(X)u^\nu(X)$, $p(X)$ la presión. El tensor de viscosidad de corte $\pi^{\mu\nu}$ posee la siguientes propiedades

$$\pi^{\mu\nu} = \pi^{\nu\mu}, \quad (9.2.10)$$

$$\pi^{\mu\nu}u_\nu = 0, \quad (9.2.11)$$

$$\pi_\mu^\mu = 0. \quad (9.2.12)$$

Las ecuaciones de movimiento de $\pi^{\mu\nu}$ y Π se pueden derivar de la teoría cinética, tomando como punto de partida la ecuación de Boltzmann relativista

$$K^\mu \partial_\mu f(K, X) = C[f(K, X)] \quad (9.2.13)$$

donde $f(X, K)$ es la función de distribución de una partícula y $C[f(X, K)]$ es el término de colisión.

Se pueden obtener ecuaciones de movimiento más simples dependientes de algunos pocos parámetros libres realizando una expansión sistemática en términos de la inversa de los números de Reynolds y el parámetro de Kudsens [98]. La inversa de los parámetros ($R_\pi^{-1}, R_\Pi^{-1} = |\Pi|/P$) de Reynolds comparan la contribución de la viscosidad con la del fluido ideal mediante $R_\pi^{-1} = |\pi^{\mu\nu}|/P$ y $R_\Pi^{-1} = |\Pi|/P$. El parámetro de Kundsens $K_n = \lambda/L$ cuantifica la relación entre el camino libre medio λ de la escala microscópica y la longitud característica del medio L .

Las ecuaciones de movimiento a segundo orden en los parámetros de Kundsens y la inversa de los números de Reynolds son [91] y [52]

$$\begin{aligned}\tau_\Pi \dot{\Pi} + \Pi &= -\zeta\theta - \delta_{\Pi\Pi}\Pi\theta + \lambda_{\Pi\pi}\pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \\ \tau_\pi \Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu}\pi^{\alpha\beta} + \pi^{\mu\nu} &= 2\eta\sigma^{\mu\nu} - \delta_{\pi\pi}\pi^{\mu\nu}\theta - \tau_{\pi\pi}\Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu}\pi^{\lambda\alpha}\sigma_\lambda^\beta + \lambda_{\pi\Pi}\Pi\sigma^{\mu\nu} + \phi_7\Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu}\pi^{\lambda\alpha}\pi_\lambda^\beta\end{aligned}\quad (9.2.14)$$

con las siguientes definiciones

$$\theta = \partial_\mu u^\mu, \quad \Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\Delta_\alpha^\mu \Delta_\beta^\nu + \Delta_\beta^\mu \Delta_\alpha^\nu \right) - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{\mu\nu} = \Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \partial^\alpha u^\beta \quad (9.2.15)$$

$$\begin{aligned}\phi_7 &= \frac{9}{70P}, \quad \tau_\Pi = \frac{\zeta}{15(1/3 - c_s^2)^2(\epsilon + P)}, \quad \delta_{\Pi\Pi} = 2/3\tau_\Pi, \quad \lambda_{\Pi\pi} = \frac{8}{5} \left(\frac{1}{3} - c_s^2 \right) \tau_\Pi \\ \tau_\pi &= \frac{5\eta}{\epsilon + P}, \quad \delta_{\pi\pi} = \frac{4}{3}\tau_\pi, \quad \tau_{\pi\pi} = \frac{10}{7}\tau_\pi, \quad \lambda_{\pi\Pi} = \frac{6}{5}\end{aligned}\quad (9.2.16)$$

donde c_s es la velocidad del sonido que se obtiene de la ecuación de estado y los únicos parámetros libres corresponden a la viscosidad de corte η y la viscosidad del *bulk* ζ .

En este trabajo se utilizó para resolver las ecuaciones hidrodinámicas en (2 + 1)D para las colisiones de núcleos simétricos a *midrapidity* el programa MUSIC [99] basado en el algoritmo de Kurganov-Tadmor [100].

9.2.3. Módulo de *hadronización* y dinámica posterior

En esta sección se comentará brevemente cómo se describe el proceso de hadronización y la posterior evolución que permitirá obtener los observables hadrónicos. Se utilizó el programa iSS del paquete iEBE [101] para generar la hipersuperficie del modelo de Cooper-Frye.

A medida que el plasma evoluciona se enfría y diluye hasta que en algún momento la descripción hidrodinámica pierde validez. El sistema de todos modos continua interactuando por lo cual se debe utilizar otro modelo para describirlo como la teoría cinética. Antes de utilizar los modelos de transporte debemos convertir el medio en un gas de hadrones. A este proceso se lo denominamos *hadronización*, pero debemos recordar que la transición del plasma al gas de hadrones se da de un modo continuo. El modelo utilizado para obtener esta transición es el desarrollado por Cooper-Frye [102] en el cual el plasma evoluciona hasta al alcanzar una temperatura T_h que define una hipersuperficie. Esta temperatura es un parámetro efectivo de la simulación que indica el fin del proceso hidrodinámico. Este proceso se produce localmente y los hadrones están dados por una distribución térmica de energía y momento de acuerdo a la temperatura T_h y *boosted* por el flujo de velocidad local del medio. Utilizando la función de distribución local térmica de hadrones se puede calcular el espectro de hadrones de especie i (tales como el kaón, protón, etc) a partir de la siguiente ecuación

$$E \frac{d^3 N_i}{dp} = \int_\Sigma g_i d\Sigma_\mu P^\mu (f_0(P \cdot u, X) + \delta f_{corte}(x, p) + \delta f_{bulk}(x, p)) \quad (9.2.17)$$

donde g_i es la degeneración del hadrón, $d\Sigma_0 = d^3r$ y $d\Sigma + d\tau d^2s n$ con n un vector normal a la hipersuperficie definida por $T(X) = T_h$ y d^2s el área local a la superficie. La energía se conserva en el proceso si todas las hadrones y resonancias son producidas por este medio.

Se incorporan correcciones a la viscosidad de corte y del *bulk* del medio corrigiendo las funciones de distribuciones en equilibrio :

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{e^{p \cdot u/T} \pm 1} \\ \delta f_{corte} &= f_0(1 \pm f_0) \frac{\pi_{\mu\nu} p^\mu p^\nu}{2(\epsilon_0 + P_0)T^2} \\ \delta f_{bulk} &= -f_0(1 \pm f_0) \left[\frac{1}{3} \frac{m^2}{TP_0} - \frac{P^0}{T} \left(\frac{1}{3} - c_s^2 \right) \right] \Pi \frac{\tau_\Pi}{\zeta} \end{aligned} \quad (9.2.18)$$

El signo \pm corresponde a la naturaleza bosónica o fermiónica de la distribución.

Se debe comentar que se estudian criterios de transición más realista que implican comparar las longitudes de camino libre medio de cuasipartículas pero requiere un mayor estudio de la dinámica de las interacciones y aún no hay un consenso establecido.

Este módulo es importante para proveer previamente los parámetros hidrodinámicos de la simulación y calcular los fotones proveniente de decaimiento aunque no interviene el cómputo de fotones térmicos.

Dinámica hadrónica posterior

Las partículas generadas luego del proceso de *hadronización* continúan interactuando hasta que finalmente alcanzan el detector. Este proceso se lo suele denominar *afterburner*. Las colisiones elásticas modifican la distribución de momentos y las inelásticas modifican la abundancia relativa que cada tipo de hadrón. Además se deben considerar los decaimientos de hadrones y resonancias inestables. Esta dinámica posterior se simula utilizando el modelo de transporte UrQMD (correspondiente a las siglas en inglés de *Ultra-relativistic Quantum Molecular Dynamics*) que resuelve las ecuaciones de Boltzmann con grados de libertad hadrónicos. Se utilizará la versión 3.4 desarrollada en [103, 104] que simula interacciones de hadrones y resonancias con masas de hasta 2,25 GeV. Las secciones eficaces hadrónicas que utiliza UrQMD, están basadas en datos experimentales o mediante extrapolaciones de otros procesos en el caso de no contar con datos experimentales.

Es importante incluir colisiones y decaimientos para obtener una buena descripción de observables hadrónicos como por ejemplo el valor medio de $\langle p_T \rangle$ [81, 105].

9.2.4. Observables hadrónicos

En esta sección vamos a discutir brevemente qué parámetros se utilizaron para describir correctamente los observables hadrónicos y lograr calcular utilizando el medio hidrodinámico que simula el plasma las curvas de fotones directos.

Para las colisiones Pb-Pb y Au-Au se utilizaron las condiciones IP-Glasma por describir con mayor precisión que las condiciones de Mc-Glauber, el flujo anisotrópico. Estas condiciones fijan $\epsilon(t_0)$ y $u^\mu(t_0)$, y los otros tensores iniciales se fijan $\pi^{\mu\nu}(t_0) = 0$ y $\Pi(t_0) = 0$. El t_0 en este caso es 0.4 fm/c. Se utiliza la ecuación de estado s95p-v1 ([80]) que proviene de cálculos de *Lattice* QCD. Se incluye viscosidad de *bulk* en el medio con la función ζ/s , que ya viene incorporado en el programa MUSIC, depende de la temperatura y se toma de la parametrización [106], que reproduce correctamente datos de *Lattice* QCD.

Hay tres parámetros efectivos importantes en la simulación que corresponden a la viscosidad de corte η , la normalización de la densidad de energía de las condiciones iniciales y la temperatura de *hadronización* T_h , que se obtienen ajustando algunos observables hadrónicos.

En la Tesis [52] se estudia con detalle como ajustar los 3 parámetros y cómo mejora al implementar el modelo UrQMD incluyendo colisiones. La normalización de la densidad de energía

Colisión	η/s	T_h	ϵ_0	t_0	Vis	Colisión	$N_{coll}^{(0-20)\%}$	$N_{coll}^{(20-40)\%}$
Pb-Pb	0.095	145 MeV	1.15	0.4 fm/c	Si	Si	1227	499
Au-Au	0.06	165 MeV	1.3	0.4 fm/c	Si	Si	795	323

Cuadro 9.1: Parámetros más relevantes en las simulaciones.

se obtiene ajustando la multiplicidad del pión y la temperatura de hadronización T_{sw} se obtiene ajustando la multiplicidad y el P_T promedio del protón. Por último la viscosidad de corte que es proporcional a la entropía, se obtiene imponiendo que ajusten correctamente los coeficientes del flujo anisotrópico $v_n\{2\}$ teórico definidos como:

$$v_n^{th}\{2\} = \sqrt{\langle (v_n)^2 \rangle} \quad (9.2.19)$$

en donde el valor medio se calcula promediando entre los eventos y v_n se obtiene integrando los $v_n(p_t)$ definidos en el Capítulo 6. Ésto se puede realizar porque la multiplicidad y el p_T promedio ajustado en el paso previo no son muy sensibles a variaciones de η . Los v_n fueron integrados en el rango de momentos entre 0 y 3 GeV.

Los parámetros que podemos utilizar de los trabajos [81, 105] corresponden a la viscosidad de corte η/s y la temperatura T_p . Nos queda la constante de normalización de las condiciones iniciales que se ajusta a partir de multiplicidad del pión y es de un valor cercano a 1. Al aumentar la densidad de energía la multiplicidad del pión, kaón y protón aumentan, por lo tanto se fueron barriendo valores hasta alcanzar el dato experimental. Luego la variación de la temperatura T_p no altera la multiplicidad del pión pero si modifica la del protón (de esta forma se fija este parámetro). Como ya se disponía de los otros dos parámetros, se verificó de obtener una buena descripción de observables hadrónicos. La normalización de la energía para Au-Au es 1,35 y la de Pb-Pb es 1.2. La temperatura de hadronización T_p utilizada es $T_{sw} = 145$ MeV para Pb-Pb y $T_{sw} = 165$ MeV para Au-Au. La viscosidad de corte (que se la toma proporcional a la entropía) utilizada para los procesos Pb-Pb es $\frac{\eta}{s} = 0,095$ y para Au-Au $\frac{\eta}{s} = 0,06$, que reproduce correctamente $v_n\{2\}$ para todas las centralidades. A continuación se detalla en la tabla 9.1 de los parámetros de la simulación para las colisiones Au-Au y Pb-Pb.

En las figura 9.4 se detallan algunos resultados observables experimentales junto con los resultados de la simulación hidrodinámica. Los datos de multiplicidad en función de la centralidad y el p_t promedio se obtuvieron de [55], los coeficientes de flujo anisotrópicos $v_2\{2\}$, $v_3\{2\}$ de [107] y [108], y el espectro en [89]. Estos observables se generaron utilizando simulaciones hidrodinámicas con parámetros similares en [105].

En la figura 9.5 se observan algunos observables provenientes de las simulaciones para colisiones de Pb-Pb comparados con datos experimentales. Los datos de multiplicidad, p_t promedio y el espectro se obtuvieron de [109].

Se concluye que las simulaciones hidrodinámicas proveen una sólida descripción del proceso, describiendo muchos simulatámente distintos observables hadrónicos en las distintas centralidades fijando pocos parámetros libres (la constante de normalización de la energía, la temperatura T_h y la viscosidad de corte η/s). Además en los trabajos [81, 105] se detallan una buena descripción de otros observables, por ejemplo, flujo anisotrópico en función de p_t y otros bariones como el Λ , Ω y Ξ .

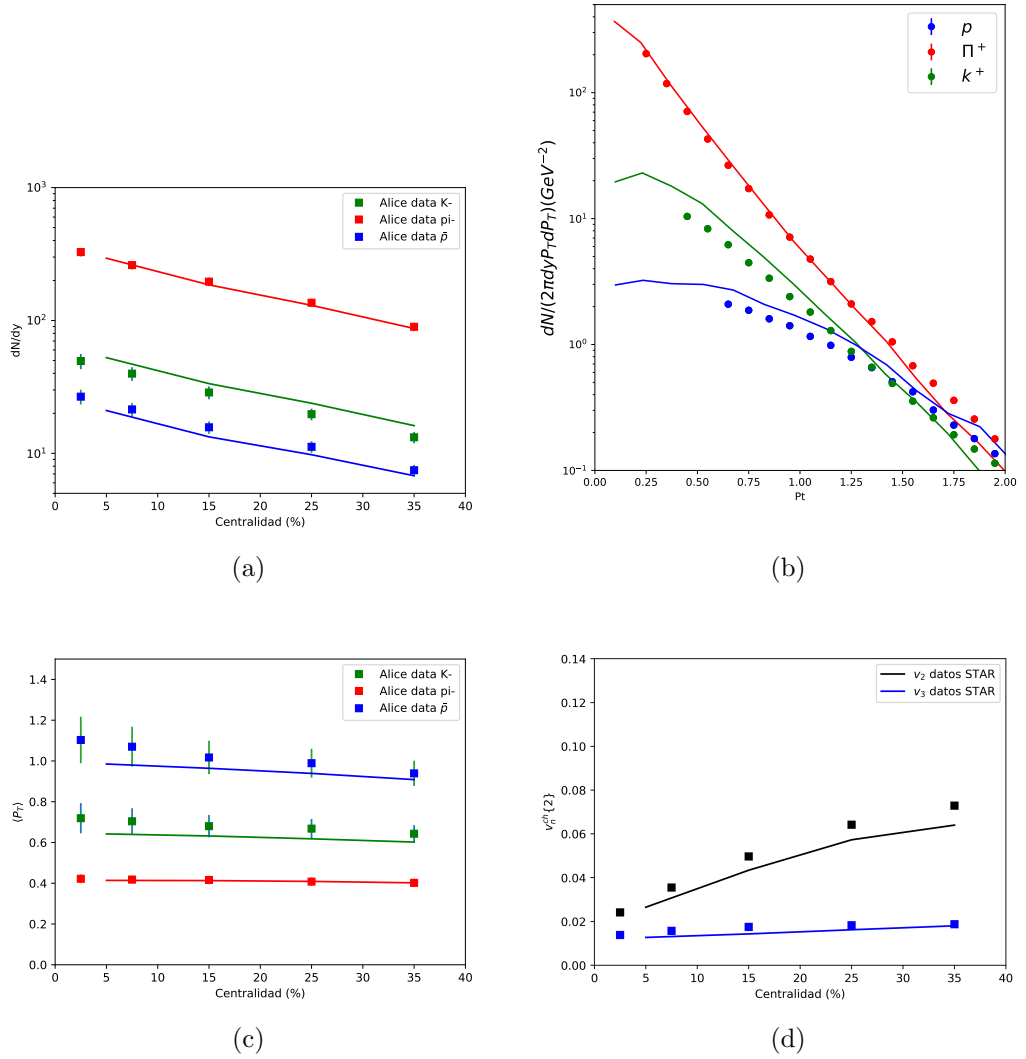


Figura 9.4: Comparación de las simulaciones hidrodinámicas con los observables hadrónicos experimentales de colisiones Au+Au $\sqrt{s} = 200$ A GeV : (a) multiplicidad vs centralidad, (b) espectro hadrónico para la centralidad 10-20%, (c) p_t promedio vs centralidad y (d) v_n integrado vs centralidad.

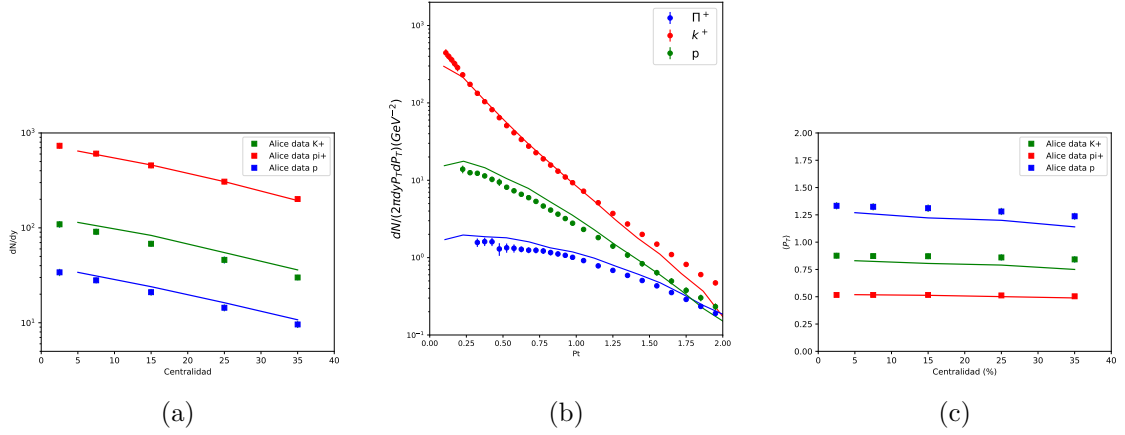


Figura 9.5: Comparación de las simulaciones hidrodinámicas con los observables hadrónicos experimentales de colisiones Pb-Pb a $\sqrt{s} = 2,78 ATeV$: (a) multiplicidad vs centralidad, (b) espectro hadrónico para la centralidad 10-20 %, (c) p_t promedio vs centralidad.

9.2.5. Módulo de emisión de fotones

Este módulo se encarga de calcular la contribución de los fotones térmicos emitidas por el plasma. El primer ingrediente que se necesita es la tasa de fotoemisión del plasma termalizado definida de la siguiente forma

$$k \frac{d\Gamma}{d^3k} = \frac{i}{2(2\pi)^3} \Pi_{\mu}^{12\mu}, \quad (9.2.20)$$

donde k es el momento y $\Pi_{\mu}^{12\mu}$ es la componente (12) del tensor de polarización del medio. En el formalismo de Schwinger-Keldish se obtiene calculando el correlador de dos corrientes electromagnéticas j_{μ} :

$$\Pi_{\mu\nu}^{12} = i \int d^4x e^{-ip \cdot x} \langle j_{\mu}^1(x) j_{\nu}^2(0) \rangle, \quad (9.2.21)$$

en donde los índices 1, 2 corresponden a las líneas en la integral de camino de Schwinger-Keldysh.

La tasa de fotoemisión corresponde a la cantidad de fotones emitido por un diferencial de volumen en reposo de un plasma en equilibrio térmico por unidad de tiempo y volumen. En un marco referencia *boosted* con un cuadrivector velocidad u la tasa es

$$E \frac{d\Gamma}{d^3k} (K \cdot u, T). \quad (9.2.22)$$

Luego para calcular la fotoproducción, se debe realizar la convolución de la tasa de fotoemisión térmica con la evolución hidrodinámica en cada evento. Si el medio se puede describir con hidrodinámica viscosa, la emisión total se calcula a partir de

$$E \frac{dN}{d^3k} = \int d^4X E \frac{d\Gamma}{d^3k} (K^{\mu}, u^{\mu}(X), T(X), \pi^{\mu\nu}(X), \Pi(X)) \quad (9.2.23)$$

donde T es la temperatura local, u el flujo de velocidades y $\Pi(X)$ y $\pi^{\mu\nu}(X)$ los tensores de viscosidad. La integral va sobre el volumen del espacio-tiempo ocupado por el medio que irradia.

Se debe tomar en cuenta que el sistema sufre una transición de fase (ecuación de estado [80]) y por lo tanto existe una contribución del plasma de quarks y gluones (QGP) y otra contribución del gas de hadrones (HG), cada una con su tasa de fotoemisión asociada. La contribución del

gas de hadrones no se obtiene a partir del módulo de hadronización, si no que por simplicidad y por generar buenos resultados se extiende la evolución hidrodinámica del plasma hasta alcanzar una $T = 105$ MeV. La transición se da a una temperatura crítica de $T_c = 180$ MeV y se utiliza la siguiente tasa de fotoemisión para toda el rango de temperaturas,

$$E \frac{d\Gamma}{d^3k} = \alpha(T) \left(E \frac{d\Gamma}{d^3k} \right)_{QGP} + (1 - \alpha_{QGP}(T)) \left(E \frac{d\Gamma}{d^3k} \right)_{HG} \quad (9.2.24)$$

con

$$\alpha_{QGP}(T) = \frac{T - T_{low}^{tr}}{T_{high}^{tr} - T_{low}^{tr}}, \quad (9.2.25)$$

con T_{low}^{tr} y T_{high}^{tr} los extremos del intervalo donde se realiza la transición [91].

La tasas asociadas a la fase del gas de hadrones se han calculado utilizando lagrangianos efectivos y contiene las siguientes contribuciones:

- Interacciones de mesones livianos [110] .
- Funciones ρ -espectrales de muchos cuerpos [111].
- Contribuciones de proceso de *Bremsstrahlung* π - π [112]
- Emisión de interacciones ρ - ω - π [113].

Para calcular los fotones directos debemos considerar la contribución del plasma que denominamos fotones térmicos y las provenientes de fotones *prompt* por lo tanto los fotones directos se obtienen de la suma de ambos.

$$q \frac{dN_{directos}}{d^3q} = q \frac{dN_{termicos}}{d^3q} + q \frac{dN_{prompt}}{d^3q}. \quad (9.2.26)$$

Para estudiar el flujo anisotrópico y poder compararlo con mediciones experimentales se debe correlacionar con hadrones cargados livianos. Esto se conoce como método del producto escalar [114]. En el cálculo teórico este observable puede ser obtenido como en [91, 52] de la siguiente expresión,

$$v_n(SP) = \frac{\langle v_n^\gamma(p_t) v_n^{ref} \cos(n(\psi_n^\gamma(p_t) - \psi_n^{ref})) \rangle}{\sqrt{\langle v_n^{ref} \rangle^2}} \quad (9.2.27)$$

donde v_n y ψ_n^{ref} son las magnitudes y el ángulo del flujo armónico de orden n a un momento transversal dado p_t . Ellos se definen a partir de la transformada de Fourier detallada en el Capítulo 6.

La tasa asociada a la fase del plasma de quark y gluones tenemos dos formas teóricas de calcularla: La primera es suponer que el plasma está débilmente acoplado y calcular con métodos perturbativos. Estas tasas fueron consideradas en [82] en donde se calculó a un *loop* las expresiones analíticas para el plasma de quarks y gluones en equilibrio térmico provenientes de dos canales: .

- El canal ' $2 \rightarrow 2$ ' que incluye los procesos $qg \rightarrow \gamma q$ y $q\bar{q} \rightarrow q\gamma$.
- El canal ' $2 \rightarrow n$ ' de procesos *soft Bremsstrahlung*.

El segundo método corresponde a suponer que el plasma está fuertemente acoplado y calcular la tasa de fotoemisión mediante métodos holográficos.

Estrictamente utilizando la dualidad AdS/CFT se puede calcular la tasa de fotoemisión de un plasma de $\mathcal{N} = 4\text{SYM}$, pero hay evidencia de que en los rangos de temperatura la teoría se comporta cualitativamente similar a QCD (ver última sección del Capítulo 4).

Considerando que el plasma está fuertemente acoplado, aplicando técnicas holográficas se calcularon la tasa de fotoemisión en el límite $\lambda \rightarrow \infty$ y $N_c \rightarrow \infty$ y luego se consideraron la corrección en la constante de acoplamiento finita de [115, 116, 117].

9.3. Descripción holográfica dual

La conjetura de Maldacena se ha formulado en principio en el límite de bajas energías de supergravedad que corresponde a despreciar los modos masivos de la teoría de cuerdas. Este límite desde el punto de vista de la teoría de gauge dual definida sobre el borde de AdS₅ corresponde a considerar la constante de acoplamiento $\lambda \rightarrow \infty$ (en rigor en el intervalo $1 \ll \lambda \ll N_c$, en el límite planar). Considerar correcciones a la acción de supergravedad del tipo IIB de los modos masivos de cuerdas corresponde a correcciones en λ finito en la teoría de gauge. La primera corrección ocurre al orden $(\alpha')^3$ obtenida en [118, 119]. Banks y Green [120] mostraron que la solución AdS₅ \times S^5 no se modifica a todos los órdenes en α' .

Por otro lado para el caso de temperatura finita que corresponde a un agujero negro, Gubser et al [48] y Pawelczyk y Theisen [121] mostraron que la métrica se corrige y propusieron el Ansatz correspondiente para resolver las ecuaciones de movimiento. La acción corregida en α' con los términos relevantes es

$$S = \frac{N_c^2}{16\pi^7} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left(\mathcal{R} - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \gamma e^{-\frac{3}{2}\phi} W - \frac{1}{4 \cdot 5!} \frac{1}{N^2} F_5^2 \right) \quad (9.3.1)$$

donde \mathcal{R} es el tensor de Ricci y se ha definido $\gamma = \frac{1}{8}\zeta(3)(g_s N_c)^{-3/2}$ a partir de la función zeta de Riemann $\zeta(3)$. W es un escalar que se puede expresar en términos de tensor de Weyl en 10 dimensiones

$$W = C^{hmnk} C_{pmnq} C_h^{rsp} C_{rsk}^q + \frac{1}{2} C^{hkmn} C_{pqmn} C_h^{rsp} C_{rsk}^p. \quad (9.3.2)$$

El Ansatz propuesto que genera la métrica corregida es

$$ds^2 = \left(\frac{r_0}{R}\right)^2 \frac{1}{u} (-f(u)K^2(u)dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{R^2}{4u^2 f(u)} P^2(u)du^2 + R^2 L^2(u) d\Omega_5^2 \quad (9.3.3)$$

donde $f(u) = 1 - u^2$ y R es el radio del AdS₅. El borde del AdS se encuentra en $u = 0$ y el horizonte del agujero negro en $u = 1$. Las funciones dependientes de u de la métrica son

$$K(u) = e^{\gamma(a(u)+4b(u))}, \quad P(u) = e^{\gamma b(u)}, \quad L(u) = e^{\gamma c(u)} \quad (9.3.4)$$

donde los exponentes son funciones de la coordenada radial u también,

$$a(u) = -\frac{1625}{8}u^2 - 175u^4 + \frac{10005}{16}u^6, \quad (9.3.5)$$

$$b(u) = \frac{325}{8}u^2 + \frac{1075}{32}u^4 - \frac{4835}{32}u^6, \quad (9.3.6)$$

$$c(u) = \frac{15}{32}(1+u^2)u^4. \quad (9.3.7)$$

Notar que esta solución es exacta al orden $(\alpha')^3$. El radio del horizonte del agujero negro se corrige con

$$r_0 = \frac{\pi T R^2}{1 + \frac{265}{16}\gamma}. \quad (9.3.8)$$

La F_5 y el dilatón tienen soluciones no triviales pero sus formas explícitas no generan modificaciones en los observables que son relevantes para la tasa de fotoemisión al orden $1/(\lambda)^{3/2}$.

9.4. Cálculo holográfico de la tasa de fotoemisión de $\mathcal{N} = 4$ SYM a temperatura finita

La idea es incluir en la simulación hidrodinámica las tasas de fotoemisión de la teoría fuertemente acoplada calculadas con métodos holográficos. Las tasas de fotoemisión para $\mathcal{N} = 4$ SYM en límite de $N_c \rightarrow \infty$ y $\lambda \rightarrow \infty$ fueron calculadas en [82] y a continuación se describirá el método.

Para calcular la fotoemisión se debe acoplar $\mathcal{N} = 4$ SYM (ver Capítulo 1) a temperatura finita con una corriente electromagnética. La forma más sencilla es considerar un campo de gauge $U(1)$ que se acopla con una corriente conservada del $U(1)$ correspondiente a un subgrupo de grupo completo de simetría $R SU(4)$. El lagrangiano considerado es

$$L = L_{SYM} + eJ_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{U(1)}^2, \quad (9.4.1)$$

donde e es la constante de acoplamiento electromagnético, L_{SYM} es el lagrangiano de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM y $F_{U(1)}^2$ es el término cinético del campo asociado a los fotones. Se elige la corriente conservada de simetría R del mismo modo que en [82] de modo que la carga de los fermiones es igual que la de los escalares de modo que la teoría esté libre anomalías. Después a la hora de comparar con QCD se debe tener en cuenta que los grados libertad son diferentes y va a ser conveniente incluir una constante de normalización apropiada.

Se define Γ_γ como el número de fotones emitidos por unidad de tiempo y unidad de volumen. Si la teoría de campos se encuentra en equilibrio térmico y la constante de acoplamiento electromagnético es pequeña de modo que los fotones no son dispersados ni termalizan, se puede calcular la tasa de fotoemisión a partir de

$$d\Gamma_\gamma = \frac{e^2}{2|\vec{K}|} \eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu}^<(K)|_{k^0=|\vec{k}|}, \quad (9.4.2)$$

donde

$$C_{\mu\nu}^< = \int d^4X e^{-iK \cdot X} \langle J_\mu^{EM}(0) J_\nu^{EM}(X) \rangle \quad (9.4.3)$$

es la función de Wightman de las corrientes electromagnéticas. En esta expresión $\eta = (-, +, +, +)$ es la métrica de Minkowski en cuatro dimensiones y $K = (k_0, \vec{k})$ es el momento del fotón, que en la condición *on-shell* es un vector nulo que satisface $k_0 = |\vec{k}|$. La función de Wightman en equilibrio térmico se puede expresar en términos de la densidad espectral $\chi_{\mu\nu}(K)$ y la distribución de Bose-Einstein $n_b(k^0) = 1/(e^{\beta k^0} - 1)$, del siguiente modo

$$C_{\mu\nu}^<(K) = n_b(k^0) \chi_{\mu\nu}(K). \quad (9.4.4)$$

La función espectral $\chi_{\mu\nu}$ se obtiene de la parte imaginaria de la función de dos puntos retardada de las corrientes

$$\chi_{\mu\nu}(K) = -2\text{Im}(G_{\mu\nu}^{RET}). \quad (9.4.5)$$

Con la función Wightman se puede además calcular la conductividad eléctrica directa (DC) σ del plasma a partir de la fórmula de Kubo tomando el límite de frecuencia cero al correlador de las corrientes

$$\sigma = \lim_{k^0 \rightarrow 0} \frac{e^2}{6T} \eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu}^<(k^0, \vec{k} = 0). \quad (9.4.6)$$

9.4.1. Cálculo holográfico en el límite $\lambda \rightarrow \infty$

Para el caso de acoplamiento fuerte en el límite $\lambda \rightarrow \infty$ podemos calcular el valor de expectación de las corrientes que permite calcular la tasa de fotoemisión a partir del dual holográfico de $\mathcal{N} = 4$ SYM. Este cálculo que vamos a presentar fue hecho en la referencia [122]. La solución de supergravedad dual corresponde al agujero negro asintóticamente AdS en supergravedad tipo IIB. La métrica esta dada por

$$ds^2 = \frac{(\pi T R)^2}{u} [-f(u)dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2] + \frac{R^2}{4u^2 f(u)} du^2 + R^2 d\Omega_5^2 \quad (9.4.7)$$

donde R es el radio de curvatura del AdS_5 y la S^5 y $f(u) = 1 - u^2$ con u definido en el intervalo $[0, 1]$. El borde del AdS se encuentra $u = 0$ y el horizonte del agujero negro en $u = 1$. El correlador retardado de las corrientes a temperatura finita se descompone a partir de imponer simetrías de rotación y de invarianza de gauge

$$C_{\mu\nu}^{ret}(K) = \Pi^T(k^0, k) P_{\mu\nu}^T(K) + \Pi^L(k^0, k) P_{\mu\nu}^L(K), \quad (9.4.8)$$

de modo que los proyectores transversales y longitudinales están definidos tal que $P_{0\mu}^T = 0$, $P_{ij}^T(K) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$, y $P_{\mu\nu}^L(K) = P_{\mu\nu} - P_{\mu\nu}^T(K)$, con $P_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{K_\mu K_\nu}{K^2}$. Los índices espaciales i, j corren sobre las variables x, y, z . Para calcular la tasa de fotoemisión necesitamos la traza de la función espectral que se calcular utilizando la ecuación (9.4.5)

$$\chi_\mu^\mu = -4Im(\Pi^T(k^0, k)) - 2Im(\Pi^L(k^0, k)) \quad (9.4.9)$$

Para el cálculo de fotoemisión nos interesa el caso con momento tipo-luz en que solo contribuye Π^T . Esto sucede porque la contribución longitudinal debe anularse para no obtener un propagador singular sobre el cono de luz.

Se calcula el valor de expectación de las corrientes utilizando la dualidad AdS/CFT a partir de los modos en supergravedad de una forma análoga al utilizado en DIS en los capítulos previos. La prescripción posee una extensión para teorías a temperatura finita dada en [123]. Se debe calcular los modos linearizados en supegravedad de la perturbación asociada a la corriente dada por las ecuaciones de movimiento de Maxwell sobre el espacio curvo del agujero negro de Schwarzschild asintóticamente AdS_5 , $\partial_A(\sqrt{-g}g^{AB}g^{CD}F_{BD})$. Luego se impone la prescripción para obtener la función de Green retardada que implica que la perturbación sea entrante en el horizonte del agujero negro. El campo $F_{AB} = \partial_A A_B - \partial_B A_A$. Con la identificación $E_i = F_{0i}$ podemos expresar las ecuaciones de movimiento para las fluctuaciones vectoriales separando en las componentes transversas (x, y) y las longitudinales (z)

$$E_{x,y}'' - \frac{2u}{f(u)} E_{x,y}' + \frac{\bar{\omega}_0^2 - q_0^2 f(u)}{u f^2(u)} E_{x,y} = 0 \quad (9.4.10)$$

$$E_z'' - \frac{2\bar{\omega}_0^2 u}{f(u)(\bar{\omega}_0^2 - q_0^2 f(u))} E_z' + \frac{\bar{\omega}_0^2 - q_0^2 f(u)}{u f^2(u)} E_z = 0, \quad (9.4.11)$$

donde las primas corresponden a derivadas con respecto a la coordenada u , y definimos $\bar{\omega}_0 = k^0 / (2\pi T)$ y $q_0 = K / (2\pi T)$. Las soluciones para momentos de tipo luz $\bar{\omega}_0 = q_0$ con las condiciones de contorno entrantes al agujero negro toman la siguiente forma para la componente del campo transverso

$$E_x(u) = (1-u)^{-i\bar{\omega}_0/2} (1+u)_2^{-\bar{\omega}_0/2} F_1 \left(1 - \frac{1}{2}(1+i)\bar{\omega}_0, -\frac{1}{2}(1+i)\bar{\omega}_0; 1 - i\bar{\omega}_0; \frac{1}{2}(1-u) \right) \quad (9.4.12)$$

donde ${}_2F_1$ es una función hipergeométrica. El correlador de las corrientes está determinado según la prescripción dada en [124] por el término de borde de la acción de Maxwell *on-shell* definida en 5 dimensiones

$$S_B = \frac{N_c^2 T^2}{16} \lim_{u \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{f}{q^2 f - \bar{\omega}^2} E'_x(u, K) E'_x(u, -K) - \frac{f}{\omega^2} E'_z(u, K) \cdot E_z(u, -K) \right) \quad (9.4.13)$$

y aplicando la prescripción Lorentziana de la conjetura [123] y considerando que la componente transversa es la única necesaria para calcular la tasa de fotoemisión, se obtiene la siguiente contribución

$$\Pi^T(q) = -\frac{N_c^2 T^2}{8} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{E'_x(u, K)}{E_x(u, K)}. \quad (9.4.14)$$

Por lo tanto, la traza de la función espectral para momento tipo-luz es

$$\chi_\mu^\mu(k^0 = k) = \frac{N^2 T^2 \bar{\omega}_0}{8} \left| {}_2F_1 \left(1 - \frac{1}{2}(1+i)\bar{\omega}_0, -\frac{1}{2}(1+i)\bar{\omega}_0; 1 - i\bar{\omega}_0; -1 \right) \right|^{-2} \quad (9.4.15)$$

Finalmente la tasa de fotoemisión esta dado por

$$\frac{d\Gamma_\gamma}{dk} = \frac{\alpha_{em} N_c^2 T^3}{16\pi^2} \frac{(k/T)^2}{e^{k/T} - 1} \left| {}_2F_1 \left(1 - \frac{(1+i)k}{4\pi T}, 1 + \frac{(1-i)k}{4\pi T}, 1 - \frac{ik}{2\pi T}; -1 \right) \right|^{-2}. \quad (9.4.16)$$

Esta expresión vale en todo el rango de momentos y en límite de $\lambda \rightarrow \infty$ y $N_c \rightarrow \infty$, con $1 \ll \lambda \ll N_c$.

9.4.2. Corrección en λ finito

Se incluyen las correcciones en el acoplamiento a la tasa de fotoemisión desarrollada en [115, 117]. Las correcciones a la acción de supergravedad del tipo IIB al orden de $\mathcal{O}(\alpha'^3)$, son de la forma $S = S_{IIB} + S_{IIB}^{\alpha'}$, fueron obtenidas en [125] y toman la siguiente expresión

$$S_{IIB}^{\alpha'} = \frac{R^6}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} [\gamma e^{-\frac{3}{2}\phi} (C^4 + C^3 \mathcal{T} + C^2 \mathcal{T}^2 + C \mathcal{T}^3 + \mathcal{T}^4)] \quad (9.4.17)$$

obtenida en el límite de N_c grande, donde $\gamma = 1/8\zeta(3)(\alpha'/R^2)^3$, con $R^4 = 4\pi g_s N_c \alpha'^2$. En términos de la constante de acoplamiento de 't Hooft $\lambda = g_{YM}^2 N_c = 4\pi g_s N_c$, se obtiene que la corrección es del orden $\gamma = \frac{1}{8}\zeta(3) \frac{1}{\lambda^{3/2}}$. El término C^4 es un operador de dimensión 8, definido a continuación

$$C^4 = C^{hmnk} C_{pmnq} C_h^{rsp} C_{rsk}^q + \frac{1}{2} C^{hkmn} C_{pqmn} C_h^{rsp} C_{rsk}^q, \quad (9.4.18)$$

donde C_{rsk}^q es el tensor de Weyl. El tensor \mathcal{T} se define

$$\mathcal{T}_{abcdef} = i \nabla_a F_{bcdef}^+ + \frac{1}{16} \left(F_{abcmn}^+ F_{def}^{+mn} F_{def}^{+mn} - 3 F_{abfmn}^+ F_{dec}^{+mn} \right), \quad (9.4.19)$$

donde los índices $[a, b, c]$ y $[d, e, f]$ son antisimetrizados en cada corchete y simetrizados frente al intercambio $abc \leftrightarrow def$. A temperatura finita la métrica solo se corrige por el término C^4 ya que la métrica sin corregir se anula en el término \mathcal{T} .

Análogamente al caso $\lambda \rightarrow \infty$ visto previamente se procede a considerar una perturbación dual a la corriente de simetría $R J_\mu$. Esta perturbación es un modo vectorial A_μ de la métrica y la F_5 y satisface las ecuaciones de movimiento de S_{IIB} . El Ansatz propuesto para las perturbaciones es

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n + R^2 L(u)^2 \sum_{i=1}^3 \left(d\mu_i^2 + \mu_i^2 \left(d\phi + \frac{2}{\sqrt{3}} A_\mu dx^\mu \right)^2 \right) \quad (9.4.20)$$

donde $g_{mn} = G_{mn}$ para $m, n \in [0, 4]$ y G_{mn} la métrica (9.3.3). Luego los μ_i y ϕ se definen a partir de los ángulos de la S^5 dada por

$$d\Omega_5^2 = dy_1^2 + \cos^2 y_1 dy_2^2 + \sin^2 y_1 dy_3^2 + \cos^2 y_1 dy_4^2 + \cos^2 y_1 \cos^2 y_2 dy_5^2 \quad (9.4.21)$$

y

$$\mu_1 = \sin y_1, \quad \mu_2 = \cos y_1 \sin y_2, \quad \mu_3 = \cos y_1 \cos y_2, \quad (9.4.22)$$

$$\phi_1 = y_3, \quad \phi_2 = y_4, \quad \phi_3 = y_5. \quad (9.4.23)$$

El Ansatz para la F_5 es

$$F_5 = -\frac{4}{R}\bar{\epsilon} + \frac{R^3 L(u)^3}{\sqrt{3}} \left(\sum_{i=1}^3 d\mu_i \wedge d\phi_i \right) \wedge \bar{*}F_2 \quad (9.4.24)$$

donde $F_2 = dA$ es el campo asociado a A_{mu} y $\bar{\epsilon}$ es la deformación de la forma de volumen de la métrica con el agujero negro asintóticamente AdS . El operador de Hodge $*$ y $\bar{*}$ están tomados con respecto a la métrica en 10 dimensiones y la métrica de agujero negro AdS en 5 dimensiones.

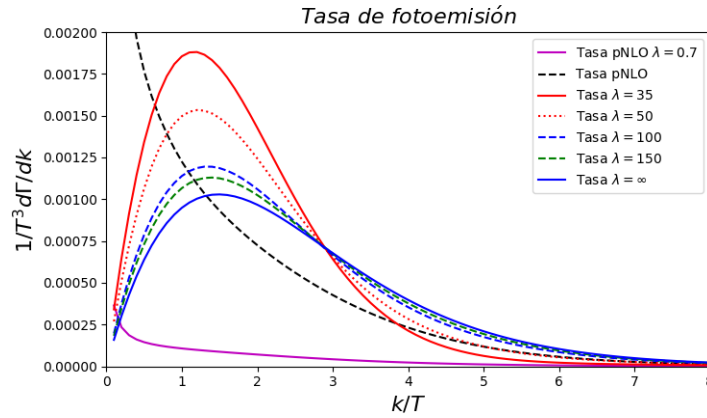


Figura 9.6: Tasa de fotoemisión con correcciones en λ para distintos acoplamientos y la tasa de fotoemisión perturbativa a NLO.

Para calcular la tasa de fotoemisión se considera las fluctuaciones transversales de tipo luz $A_x(t, x, u)$. Se reemplazan las soluciones de las ecuaciones (9.4.20) y (9.4.24) en la acción de supergravedad S_{IIB} . El sistema se reduce a un problema de tipo Schrödinger luego de integrar las coordenadas de la S^5 y redefinir los campos en términos de $\Psi(u) = A(u)/(\sqrt{f(u)}[1 + \gamma p(u)])$, donde $A_k(u)$ es la transformada de Fourier de $A_x(t, x, u)$ y $p(u)$ es el polinomio dado por

$$\frac{u^2(11700 - u^2(343897 + 37760\bar{\omega}^2 u - 87539u^2))}{288} \quad (9.4.25)$$

Con estas redefiniciones la acción tipo Schrödinger obtenida es

$$S = -\frac{N_c^2 r_0^2}{16\pi^2 R^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 du \left(\frac{1}{2} \Psi \mathcal{L} \Psi + \partial_u \Phi \right) \quad (9.4.26)$$

donde $\mathcal{L}\Psi = 0$ corresponde a la ecuación de movimiento $\Psi'' = V(u)\Psi(u)$ con el potencial dado por

$$V(u) = -\frac{1}{f^2(u)} \left(1 + q^2 u - \frac{\gamma}{144} f(u) [-11700 + 2098482u^2 - 4752055u^4 + 183831u^6 + q^2 u \times (-16470 + 245442u^2 + 1011173u^4)] \right) \quad (9.4.27)$$

El término de borde puede ser simplificado a $\Phi = \Psi'(u)\Psi(u)$. Las ecuaciones de movimiento se resuelven perturbando la solución obtenida para $\lambda \rightarrow \infty$ de modo que $\Psi(u) = \Psi_0(u) + \gamma\Psi_1(u)$. La solución para $\Psi_0(u)$ corresponde a la ecuación (9.4.12) y $\Psi_1(u)$ se obtiene resolviendo las ecuaciones de forma numérica. La traza de la función espectral $\chi_\mu^\mu(k)$ es,

$$\chi_\mu^\mu(k) = \frac{N_c^2 T^2}{2} \text{Im} \left(\left(1 - \frac{265}{8} \gamma \right) \frac{\Psi_0'}{\Psi_0} + \gamma \left(-\frac{\Psi_0' \Psi_1}{\Psi_0 \Psi_0} + \frac{\Psi_1'}{\Psi_0} \right) \right) \Big|_{u=0} \quad (9.4.28)$$

En la figura 9.6 se observa las tasas de fotoemisión con la corrección en λ para distintos acoplamientos.

9.5. Tasa de fotoemisión a NLO perturbativa

Para el caso perturbativo se utilizaron las tasas de fotoemisión calculadas a *next-to-leading order* en la constante de acoplamiento fuerte g por Moore *et al* [126]. Estas tasas las obtuvieron para un plasma débilmente acoplado. Las contribuciones a la tasa a orden dominante, pueden dividirse en tres regímenes: región *hard*, *soft* y *collinear*. Las contribuciones provenientes de las regiones *hard* y *soft* dependen logarítmicamente de la escala utilizada para dividir las regiones cinemáticas. Sin embargo esta dependencia se cancela al sumar las regiones. La contribución de cada región se han ajustado con precisión en el trabajo de Moore *et al* con funciones dependientes de q/T dadas por,

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dk} = & \frac{4\alpha_{em}g^2T^2}{3k} n_f(k, T) \left(\ln(T/m_\infty(T)) + C_{coll}(k, T) + C_{hard}(k, T) + \frac{g^2 C_A T}{m_D} C_{coll}^C(k/T) \right. \\ & \left. - 2 \frac{m_D(T)}{\pi T} \left(\ln \left(\frac{\sqrt{2Tm_D}}{m_\infty} \right) + C_{coll}^{\delta m}(k, T) + C_{soft+sc}(k, T) \right) \right) \end{aligned} \quad (9.5.1)$$

donde

$$\begin{aligned} C_{coll}(k, T) &= \frac{1}{3} \left(\frac{0,316 \ln(12, 18 + T/k)}{(k/T)^{3/2}} + \frac{0,0768k/T}{1 + 16,27T/K} \right) \\ C_{hard}(k, T) &= 1/2 \ln \frac{2k}{T} + 0,041 \frac{T}{k} - 0,3615 + 1,01E^{-1,35k/T} \\ C_{coll}^{\delta m}(k, T) &= -0,3664T/k - 0,08478 - 0,0799 \log(k/T) \\ &+ 0,0315 - 0,005 \frac{k}{T} \log(k/T) - 0,0681(\log(k/T))^2 \\ C_{coll}^{\delta C}(k, T) &= -0,7207 \frac{k}{T} + 0,7056 - 0,8309 \log(k/T) + 0,12305k/T - 0,01777 \frac{k}{T} \log \left(\frac{K}{T} \right) \\ &+ 0,2804 \log \left(\frac{k}{T} \right)^2 - 0,0702 \log \left(\frac{K}{T} \right)^3 \\ C_{soft+sc}(k, T) &= \frac{1}{4} \left(C_{brem/compton} \left(\frac{k}{T} \right) + C_{pair} \left(\frac{k}{T} \right) \right) - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (9.5.2)$$

donde m_D es la masa de Debye que toma el valor $m_D^2 = g^2 T^2 (C_A + N_f/2)/3$ Y $m_\infty = g^2 T^2 C_R/4$. C_R y C_A son los Casimir cuadráticos de las representaciones de los quarks y gluones respectivamente y las funciones $C_{brem/compton}$ y C_{pair} se encuentran definidas en el apéndice de [126]. Estas funciones se utilizaron para generar la curva perturbativa de la tasa de fotoemisión para $g = 2$ y $g \sim 0,5$ en la figura 9.6.

Estas correcciones requieren condiciones del tipo $gT \ll T$ o $g^2 T \ll T$, que no se satisfacen para valores esperables de acoplamiento g grandes. La filosofía es esperar que estas correcciones

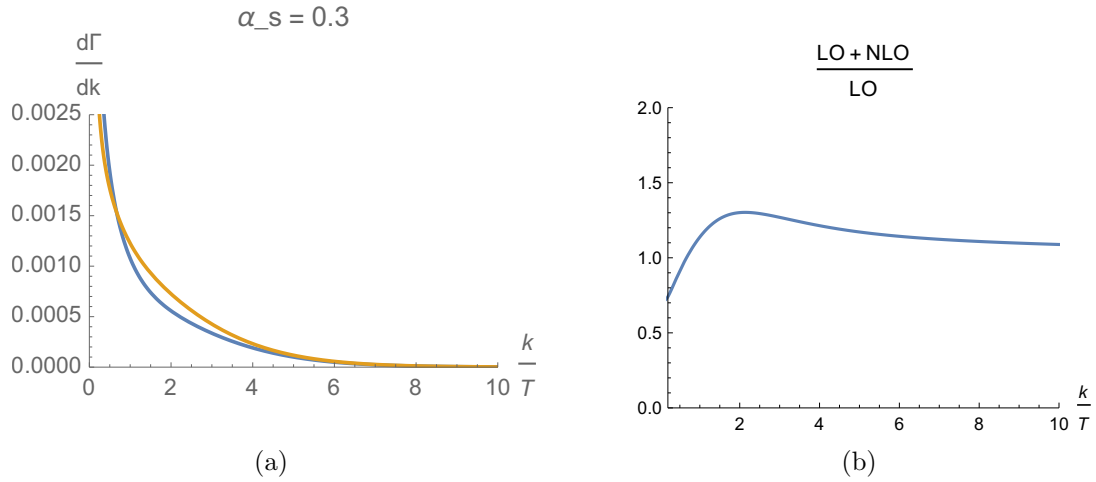


Figura 9.7: (a) La curva azul corresponde a la tasa de fotoemisión al orden dominante (LO) para $\alpha_s = 0,3$ comparada con la calculada al siguiente orden (NLO). (b) Cociente entre ambas contribuciones.

captan la física relevante fuera del rango del cálculo perturbativo [52]. Si observamos la figura 9.7 en donde comparamos las tasa a NLO con la LO, se observa una reducción para los momento $k < 1$ y un incremento (del 30 % para $g = 2$) para momentos de $1 < k < 5$. Esto es compatible con las tasas en acoplamiento fuerte obtenidas desde modelos holográficos.

9.6. Resultados y discusión

En las figuras 9.8 y 9.9 se comparan los espectros de fotones directos provenientes de datos experimentales para colisiones Pb+Pb a 2.75 ATeV en el *LHC* y Au+Au a 200 AGeV en el *RHIC* en los rangos de centralidades 0-20 % y 20-40 % con los obtenidos de simulaciones utilizando las tasas de fotoemisión perturbativas [82, 126] y tasas de modelos holográficos con acoplamiento finito [117]. Se debe mencionar que los resultados asociados a valores de la constante de 't Hooft (λ) provienen de primeros principios, es decir de un modelo del tipo *top-down*, como lo es el fondo del agujero negro del tipo Schwarzschild-anti de Sitter $\times S^5$ con correcciones del orden α'^3 desde la teoría de supercuerdas del tipo IIB. Estos resultados se contrastan con los obtenidos por Kiritsis *et al* en [83] de modelos holográficos *bottom-up* que incluyen grados de libertad de sabores en el límite de Veneziano (*V-QCD*).

La constante de acoplamiento α_s que es relevante en el proceso corresponde a valores entre 0,3 y 0,9, que corresponden a g entre 1,94 y 3,36, y considerando $N_c = 3$ estará asociado a λ de 't Hooft entre 12 y 34. La corrección en α' la evaluamos hasta $\lambda = 35$, debido a que para valores menores (del orden de 25) la aproximación $\alpha' \ll 1$ pierde validez generando regiones en las cuales la tasa de fotoemisión se hace negativa.

Se observa en los gráficos de fotones directos que las curvas asociadas a las tasas de $\mathcal{N} = 4$ SYM con $\lambda \rightarrow \infty$ quedan en todos los casos por arriba de la perturbativa. A medida que tomamos valores de λ más chicos las curvas para valores p_t mayores a 1 decrecen en el sentido de las curvas perturbativas. Este efecto lo podemos relacionar con el comportamiento de la tasa de fotoemisión en la región de momentos $k/T > 3$ en los cuales se observa una interpolación de las curvas hacia las perturbativas.

Para el caso Au-Au 20-40 % se incluyó la tasa perturbativa con un valor de λ pequeño 0.7 que

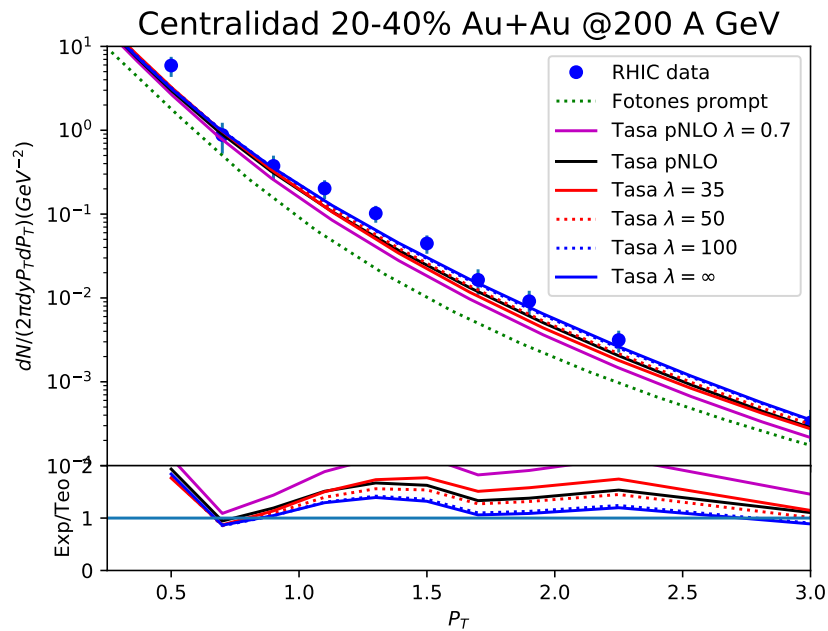
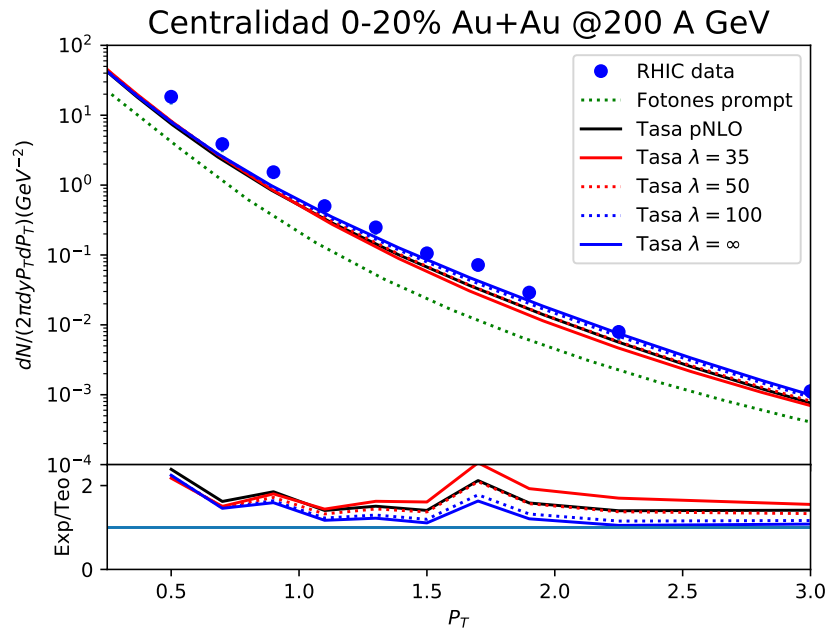


Figura 9.8: Espectro directos calculados con tasas de fotoemisión con correcciones α'^3 (desde la teoría de supercuerdas del tipo IIB, correspondientes a la expansión en $1/\lambda^{3/2}$ con λ de 't Hooft finito, en el límite planar) y de QCD perturbativa. (a),(b) corresponden a colisiones Au-Au a 200 GeV por nucleón con centralidades de 0-20 % y 20-40 % comparadas con datos experimentales de *PHENIX* [54] y la contribución de fotones *prompt*.

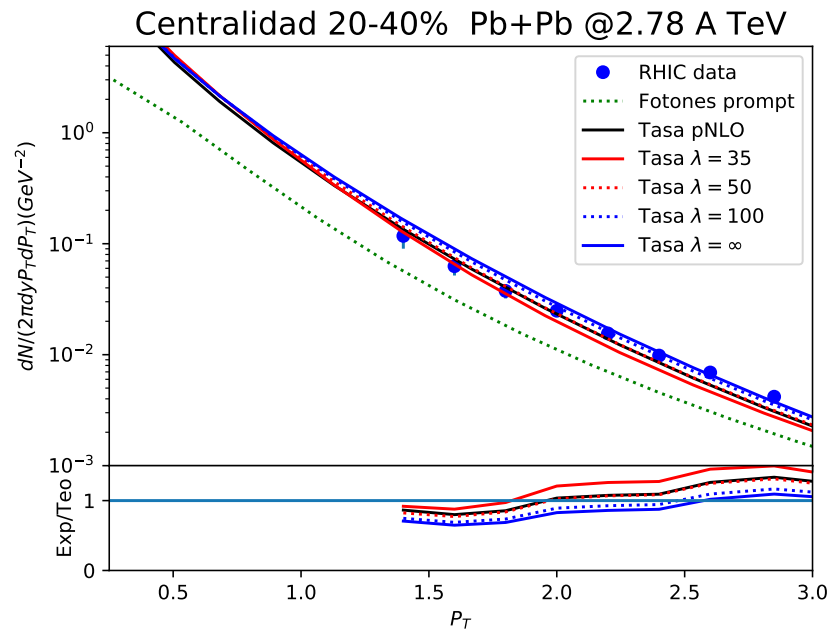
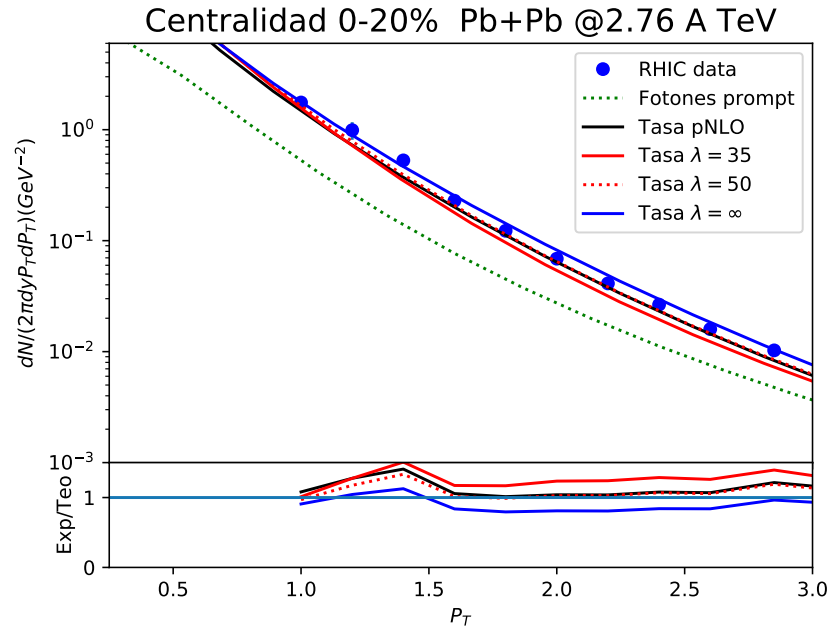


Figura 9.9: Espectro directos calculados con tasas de fotoemisión con correcciones α'^3 (desde la teoría de supercuerdas del tipo IIB, correspondientes a la expansión en $1/\lambda^{3/2}$ con λ de 't Hooft finito, en el límite planar) y de QCD perturbativa. (a) y (b) corresponden a colisiones Pb-Pb a 2.76 TeV por nucleón de centralidades 0-20 % y 20-40 % comparadas con datos experimentales de ALICE del *LHC* y la contribución de fotones *prompt*.

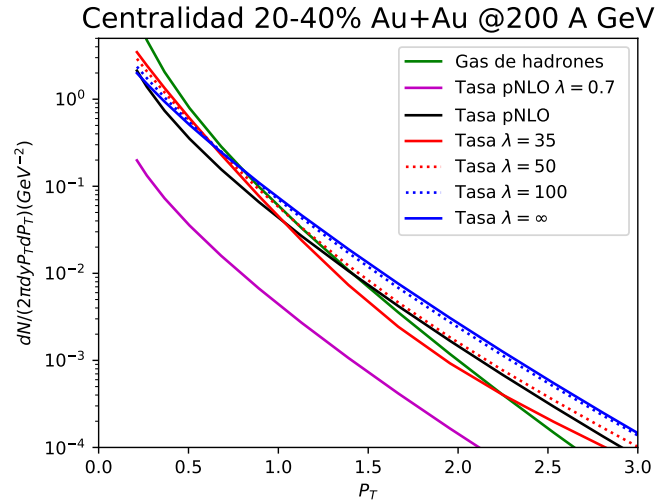
corresponde $g < 1$ para contrastar la contribución en la región de expansión en donde el cálculo perturbativo es válido ($g \ll 1$). En la bibliografía se utilizan estas tasas debido a que se espera que para el caso de acoplamiento fuerte las contribuciones a NLO logren capturar la física relevante [52]. Pero hay que tomar en cuenta que para $\lambda \sim 12$ tanto la expansión perturbativa como la holográfica están en rangos que se alejan de las condiciones de validez. Por eso es interesante incorporar más ordenes tanto desde el punto de vista de la teoría de campos (NNLO), como desde el cálculo holográfico (corrección α'^5). En el caso del Au-Au, las curvas de espectros de fotones directos con tasas holográficas mejoran las tendencias para acoplamientos mayores a 50 disminuyendo la discrepancia con los datos experimentales. De todas formas hasta para el caso más favorable $\lambda = \infty$ se mantiene una subestimación en el espectro en varios puntos, indicando que posiblemente las contribuciones de fuentes de fotones no consideradas puedan jugar un papel importante. Para el Pb-Pb, la curva con $\lambda \rightarrow \infty$ queda por arriba de los datos experimentales y tanto la pNLO como la holográfica $\lambda = 50$ describen con mayor precisión los espectros. Se podría pensar que, debido a que las colisiones Pb-Pb acá consideradas se producen a energías de centro de masa del orden de diez veces comparadas con las correspondientes energías del caso Au-Au, el acoplamiento en el caso Pb-Pb debería ser menor que el del Au-Au. Esto es consistente con los resultados mostrados en las figuras 9.8 y 9.9.

En la región de momentos transversales chicos p_t se hacen relevantes los fotones *prompt* y la contribución de fotones térmicos provenientes de las tasas hadrónicas por ello las curvas tienden a juntarse. Para comparar y analizar las jerarquías de las distintas contribuciones en todo el rango de momentos transversos, se graficó en la figura 9.10 el detalle de cada una de las contribución por separado. Se observa para momentos pequeños el comportamiento interesante en el cuál las curvas del espectro de fotones térmicos asociadas a la tasa holográfica se cortan en el valor de $p_t \sim 0,7$, de modo que obtener un efecto interpolante para momentos grandes (observado en la figuras de fotones directos) y un aumento del espectro para momento pequeños. El efecto está relacionado con el hecho analizado en [117] en donde se observa que las tasas de fotoemisión con acoplamiento finito se cortan en un $k/T \sim 2,92$ (ver figura 9.6) y a medida que el λ es más chico el pico aumenta.

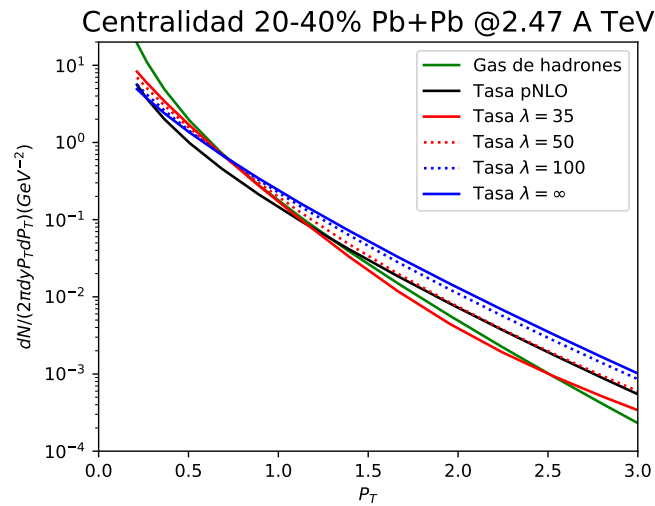
Este efecto incrementa el espectro de fotones para momentos $P_t < 0,7$, que en el Au-Au, se observa para $P_t \sim 0,5$ una mayor discrepancia con los datos experimentales y proviene del comportamiento de la tasa de fotoemisión con la corrección en acoplamiento finito. En el paper de Kiritsis et al [83] se exploraron los fotones directos calculando la contribución de fotones térmicos utilizando modelos holográficos *bottom-up* que incluyen grados de libertad de sabores en el límite de Veneziano (V -QCD). En ese trabajo ya se observó que contribuciones provenientes de modelos holográficos pueden incrementar el espectro y achicar la diferencia con los datos experimentales de los fotones directos con momento transversal alto (son perpendiculares a la dirección del haz del experimento). Sin embargo para momentos pequeños en donde las contribuciones de los fotones *prompt* y los fotones térmicos hadrónicos dominan, sus curvas holográficas tendían a acercarse a la perturbativa quedando por debajo de caso $\mathcal{N} = 4$ SYM $\alpha' \rightarrow \infty$. Eso contribuye a que la diferencia con datos experimentales para momento pequeños continuara siendo significativa y subestimada por las simulaciones. Como conclusión sugieren que la diferencia de espectro para momentos transversales pequeños se debe a subestimaciones de la tasa de fotoemisión hadrónica.

Si el comportamiento observado en las correcciones en λ finito se mantiene para QCD, es un indicio que el acoplamiento fuerte puede generar un incremento en el espectro para momentos pequeños llegando a ser del mismo orden que la asociada a los fotones térmicos hadrónicos. Para momentos grandes la contribución de fotones térmicos del QGP continúa siendo la fuente dominante. De todas formas se deben mejorar el estudio e incluir las contribuciones de fuentes no consideradas para esclarecer este punto.

Vale la pena mencionar que si hubiésemos considerado modelos *bottom-up* que simulan acoplamiento finito como Gauss-Bonnet analizado en [127, 128]. Se pueden observar que las tasas de fotoemisión para λ_{GB} en el rango $-7/36 < \lambda_{GB} < 9/10^2$ y negativo³ decrecen comparadas con el caso $\lambda = \infty$ para todo q de modo que posiblemente se obtenga para los fotones directos el efecto interpolantes para momentos transversos grandes pero no mejoraría la estimación para momento pequeños.



(a)



(b)

Figura 9.10: Comparación de espectro térmico del QGP usando distintas tasas de fotoemisión en la región de temperaturas $T > 180$ MeV para colisiones 20-40 % Au-Au a at 200 A GeV (a) y colisiones 20-40 % Pb+Pb 2.76 A TeV. También se detalla la contribución de gas de hadrones para $T < 180$ MeV (b).

A continuación en la figura 9.11 se detallan los coeficientes v_2 del flujo anisotrópico de fotones

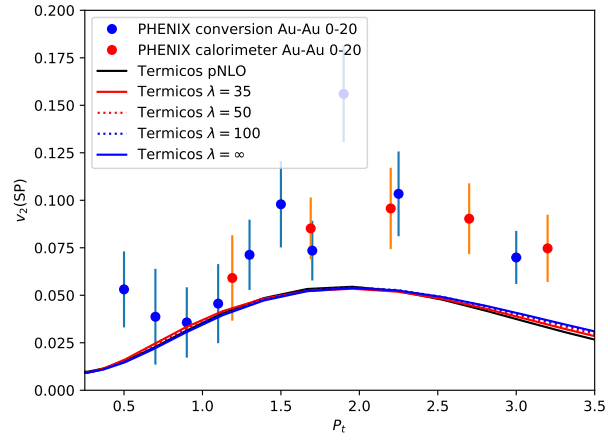
²Considerado para que la teoría sea causalmente consistente, ver referencia ([129]).

³Valores en donde otros observables como la viscosidad de corte se corrigen en el sentido esperado.

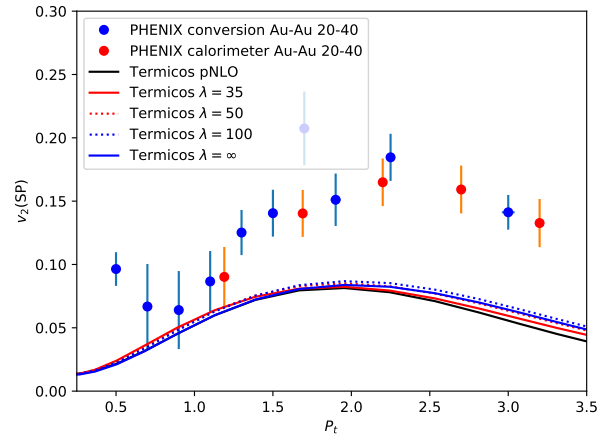
directos para el Au+Au en la centralidad 0-20% y 20-40%. En estas curvas se encuentran las contribuciones de los fotones térmicos y *prompt*. Para calcular la cotribución total se toma en cuenta que los coeficientes asociados a los fotones *prompt* son muy chicos por lo tanto contribuyen suprimiendo el flujo anisotrópico.

Se observa que las tasas holográficas dan resultados ligeramente mayores pero muy similares a las perturbativas, manteniendo la discrepancia con los datos experimentales. Esto indica que la corrección en λ finita no resuelve la discrepancia en los flujos anisotrópicos que se la denomina *the photon flow puzzle* y por lo tanto posiblemente provenga de otras fuentes no consideradas o subestimaciones en la contribuciones de fotones térmicos de la fase hadrónica como sugieren en [83].

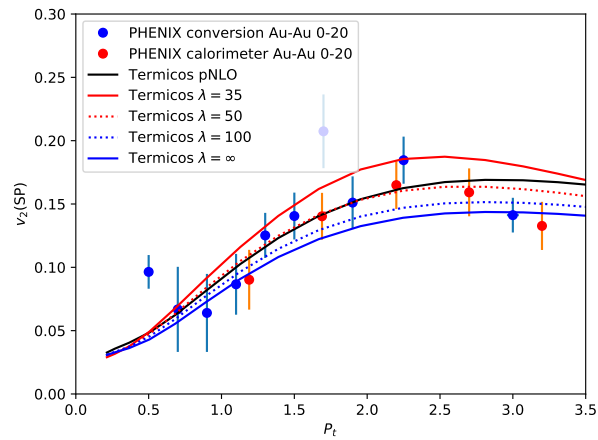
De todas formas es interesante observar el comportamiento del flujo anisotrópico de los fotones térmicos en la figura 9.11 (c). Se observa que a medida que el acoplamiento disminuye el flujo aumenta para los momentos grandes. Este efecto compite con la supresión generada por la incorporación de fotones *prompt* que tiene en cuenta el espectro relativo entre ambos obteniendo contribuciones finales del mismo orden que las perturbativas.



(a)



(b)



(c)

Figura 9.11: Flujo anisotrópico de colisiones Au-Au $\sqrt{s} = 200$ GeV fotones directos v_2 comparadas mediciones de PHENIX [130] para centralidades 0-20 % (a) y 20-40 % (b). (c) v_2 de la contribución térmica utilizando las distintas tasas de fotoemisión para colisiones Au-Au de centralidad 0-20 %.

Capítulo 10

Conclusiones

Mediante el uso de métodos holográficos duales, en esta Tesis se han investigado observables asociados a funciones de correlación de dos corrientes electromagnéticas de teorías cuánticas de campos fuertemente acopladas, a temperatura cero y a temperatura finita. En el caso de temperatura cero, ésto se refiere a la investigación de propiedades de la estructura de hadrones obtenidos a partir de modelos holográficos duales derivados desde la teoría de supercuerdas del tipo IIB. Se han considerado glueballs y mesones escalares. Asimismo, en el caso de temperatura finita, se desarrollaron investigaciones para el caso del plasma de la teoría de SYM con $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías en 4 dimensiones y grupo de gauge $SU(N_c)$. Se compararon los resultados obtenidos con resultados de simulaciones numéricas obtenidas en *Lattice QCD*, para el caso de la estructura de mesones escalares. Asimismo, para temperatura distinta de cero se compararon los resultados de esta tesis directamente con resultados experimentales obtenidos en el *Relativistic Heavy Ion Collider* y en el *Large Hadron Collider*, en el caso de los espectros de fotones directos para plasmas de quarks y gluones formados a partir de colisiones ultrarelativistas de iones pesados de Au+Au y Pb+Pb.

En el Capítulo 7 se estudió la corrección en $1/N_c^2$ del proceso de la dispersión inelástica profunda de leptones cargados dispersados por glueballs, expandiendo en diagramas de Witten en supergravedad del tipo IIB en el contexto de la dualidad AdS/CFT. A partir del teorema óptico y el Ansatz de Witten se expresó el tensor hadrónico en términos de amplitudes de dispersión de supergravedad del tipo IIB, considerando dos estados intermedios. Para esto se realizó el cálculo explícito a un *loop* en supergravedad del tipo IIB. Por otro lado, el proceso de DIS requiere tomar el límite altas energías $q \gg \Lambda$, donde q es el momento del fotón virtual y Λ es el *cutoff* IR de la teoría de gauge. Esto implica que existen dos expansiones perturbativas que, en principio, podrían o no conmutar. El objetivo de esta investigación fue explorar esos límites en la región del parámetro de Bjorken comprendida en el rango de valores: $1/\sqrt{\lambda} \ll x < 1$, donde λ es la constante de 't Hooft. Calculando los diagramas de Witten correspondientes concluimos que la contribución más relevante en términos de la expansión en $\frac{\Lambda^2}{q^2}$ de la corrección en $1/N_c^2$ proviene del diagrama del canal t en donde el hadrón incidente se separa en la región IR produciendo un dilatón y un escalar s con la menor dimensión conforme $\Delta_{min} = 2$. Se calcularon la corrección en $1/N_c^2$ de la función de estructura longitudinal F_L y la función de estructura F_1 , obteniendo una dependencia en potencias de q de la forma $\frac{\Lambda^2}{q^2}$. Comparando el resultado con la contribución al orden N_c^0 en el límite $N_c \rightarrow \infty$, que depende de la dimensión conforme del hadrón incidente con un factor $(\Lambda^2/q^2)^{\Delta_{in}-1}$, se concluye que estos límites no conmutan. El resultado central descrito en nuestro *paper* [1], es que primero se debe tomar el límite de altas energías y luego en límite de N_c grande.

Considerando que el límite dominante es el de altas energías $q^2 \gg \Lambda^2$ y la corrección en $1/N_c$ es la que más contribuye, se observa que la dependencia en x de F_L resulta proporcional a $(x^3(1-x)^2)$. Este resultado es compatible con datos de *Lattice* QCD. Dicha función se anula para $x = 0$ y $x = 1$, y para valores intermedios tiene la forma de campana con un máximo cercano a $x \approx 0,6$. Este resultado es consistente con el comportamiento observado para otros hadrones (por ejemplo el pión) e interpretado desde la fenomenología como funciones de estructura de valencia.

Inspirados en el resultado anterior, luego consideramos los límites mencionados para el caso de piones obtenidos mediante el modelo de D3D7-branas. En el Capítulo 8 se estudió el proceso de DIS con mesones escalares como blanco hadrónico. Para considerar materia en la representación fundamental del grupo de gauge, desde el punto de vista holográfico, se consideró el modelo consistente en una D7-brana de sabor. Se calculó la contribución más relevante en potencias de $\frac{\Lambda}{q}$ de la función de estructura longitudinal al siguiente orden en $1/N_c$. Del mismo modo que para los glueballs la potencia en q no depende de la dimensión conforme del hadrón incidente y va como $\frac{\Lambda^2}{q^2}$ por lo tanto los límites $N_c \rightarrow \infty$ y $q \gg \Lambda$ no conmutan. Se obtuvo la dependencia explícita en x y se observaron características esperadas de la función de estructura con forma de campana, anulándose en los extremos y con un decaimiento de la forma $(1-x)^2$ para $x \rightarrow 1$. Luego, considerando que la contribución en $1/N_c$ es la dominante se ajustaron los primeros tres momentos del pión calculados mediante *Lattice* QCD, tomando para la región x chico entre $x \sim 0,0001$ y $x = 0,1$ las funciones de estructura obtenidas en trabajos previos calculadas a partir de amplitudes de dispersión de la teoría de supercuerdas del tipo IIB en el límite $N_c \rightarrow \infty$. Los resultados obtenidos para el mejor ajuste con la contribución en $1/N_c$ tienen errores del orden máximos que no superan el 1,27%, con relaciones entre los momentos $M_3[F_2]/M_2[F_2] = 0,55$ cercanos al valor esperado de 0,5. Los ajustes son considerablemente mejores que los obtenidos a orden N_c^0 , es decir para el caso del DIS con un FCS con intercambio de solo un estado intermedio que corresponden diagramas de Witten al nivel árbol en supergravedad del tipo IIB, cuyos errores para el mejor ajuste en comparación con los mismos datos de *Lattice* QCD son del orden del 10,8%, mientras que las relaciones entre los momentos $M_3[F_2]/M_2[F_2]$ dan 0,69. Por último se observa que el cálculo a un *loop* desarrollado en esta tesis describe correctamente los datos provenientes de momentos superiores calculados de las funciones de estructura de valencia. Las posibles extensiones en esta línea corresponden a considerar cálculos de mesones vectoriales (mesón ρ) como hadrón incidente, calcular para la región paramétrica de $x \sim 0$ la corrección en $1/N_c$ mediante amplitudes de dispersión de la teoría de supercuerdas, y utilizar modelos holográficos duales con características más similares a QCD como el de Sakai-Sugimoto, con el fin de investigar la universalidad del resultado obtenido sobre la no conmutatividad de los límite aquí estudiados.

En el Capítulo 9 se ha estudiado el espectro de fotoemisión de plasmas de quarks y gluones fuertemente acoplados generados en colisiones ultrarelativistas de iones pesados utilizando simulaciones numéricas. Esto implicó poner a punto distintos módulos numéricos que describen las etapas de la colisión desarrollados en el paquete VISHNEW y el simulador hidrodinámico MUSIC, incorporando las condiciones iniciales más recientes desarrolladas a partir del modelo IP-Glasma que describen con buena precisión distintos observables hadrónicos. Los parámetros fenomenológicos se han fijado ajustando algunos observables hadrónicos como la multiplicidad y espectro del pión, el kaón y el protón, para colisiones de Pb-Pb (LHC) y Au-Au (RHIC) en distintos rangos de centralidad. El plasma evoluciona a partir de modelos hidrodinámicos que incluyen las viscosidades de corte y del *bulk*.

Luego se calculó el espectro de fotones directos con el fin de comparar con los resultados experimentales obtenidos en los aceleradores LHC y RHIC. Los fotones directos están princi-

palmente compuestos por fotones *prompt* y térmicos. Los fotones *prompt* fueron modelados con métodos perturbativos y considerando las últimas correcciones nucleares de las funciones de estructura. Los fotones térmicos se obtuvieron a partir de modelos holográficos duales derivados directamente de la teoría de supercuerdas del tipo IIB, que consideran las correcciones en $1/\sqrt{\lambda}$, para la constante de acoplamiento en el régimen de acoplamiento fuerte. Se comparó estos resultados con las contribuciones calculadas con métodos perturbativos. A medida que tomamos valores en λ más pequeños se observa una tendencia a la disminución del espectro de fotones en el rango de momentos grandes acercándose al cálculo perturbativo. Además se observa un incremento en los momentos pequeños. Este último efecto da una tendencia que ajusta mejor los datos fenomenológicos y puede indicar una subestimación del espectro de fotoemisión en ese rango de momentos calculados con métodos perturbativos que no consideran la naturaleza del plasma fuertemente acoplado.

Lo presentado en el último capítulo que relaciona cálculos holográficos con modelos fenomenológicos puede extenderse a procesos con campos magnéticos fuertes, colisiones de sistemas *pequeños* Pb-p y Au-d, condiciones iniciales aplicando termalización holográfica y correcciones en N_c finito. También sería interesante incluir las otras fuentes de fotones que aportarán un mayor entendimiento de la naturaleza del plasma fuertemente acoplado.

Apéndices

Apéndice A

Integrales de funciones de Bessel dobles y triples

Las siguientes integrales definidas se usarán al integrar en la variable z del AdS. Ellas provienen de las funciones de Bessel $J_\mu(x)$ y $K_\mu(x)$ que están presentes en todas las soluciones no asintóticas de los campos libre en el espacio $AdS_5 \times S^5$.

- Para los vértices entre 3 estados normalizables podemos aproximar con la distribución semi-empírica [66]:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z J_{\Delta_1-2}(M_1 z) J_{\Delta_2-2}(M_2 z) J_{\Delta_3-2}(M_3 z) dz \approx & \\ & \left[\cos\left(\frac{\pi(\Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2 + 2)}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi(\Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2 + 2)}{2}\right) \right] \\ & \times \frac{\delta(M_3 - (M_1 + M_2))}{2\sqrt{M_1 M_2}} \\ & + \left[\cos\left(\frac{\pi(\Delta_3 - |\Delta_1 - \Delta_2| + 2)}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi(\Delta_3 - |\Delta_1 - \Delta_2| + 2)}{2}\right) \right] \\ & \times \frac{\delta(M_3 - (|M_1 - M_2|))}{2\sqrt{M_1 M_2}} \end{aligned} \quad (\text{A.0.1})$$

- Para el mismo vértice con dos estados iguales:

$$\int_0^\infty z J_0(az) J_\nu(bz) J_\nu(cz) dz = \frac{1}{bc\sqrt{2\pi \sin(v)}} P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\cos(v)) \quad (\text{A.0.2})$$

si $|b - c| < a < b + c$ o cero fuera del rango. Aquí, $P_\alpha^\beta(x)$ representan las funciones de Legendre asociadas y se ha definido $\cos(v) \equiv \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

- Para vértices entre dos estados normalizables y la perturbación no normalizable correspondiente a la corriente proveniente del borde:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z^{\rho-1} J_\lambda(az) J_\mu(bz) K_\nu(cz) dz = & \frac{2^{\rho-2} a^\lambda b^\mu c^{-\rho-\lambda-\mu}}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)} \Gamma\left(\frac{\rho+\lambda+\mu-\nu}{2}\right) \\ & \times \Gamma\left(\frac{\rho+\lambda+\mu+\nu}{2}\right) F_4\left(\frac{\rho+\lambda+\mu-\nu}{2}, \frac{\rho+\lambda+\mu+\nu}{2}; \lambda+1, \mu+1; -\frac{a^2}{c^2}, -\frac{b^2}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.0.3})$$

donde F_4 es la función hipergeométrica de Appell cuarta. Esta fórmula es válida para $Re(\rho + \mu + \lambda) > Re(\nu)$ and $Re(c) > |Im(a)| + |Im(b)|$.

- Para los mismos vértices con un estado normalizable que es aproximado por sus expansión asintótica :

$$\int_0^\infty z^\rho K_\mu(az) J_\nu(bz) dz = 2^{\rho-1} \left(\frac{b}{a}\right)^\nu a^{-\rho-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+\rho-\mu+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)} \times F\left(\frac{\nu+\rho+\mu+1}{2}, \frac{\nu+\rho-\mu+1}{2}, \nu+1, -\frac{b^2}{a^2}\right) \quad (\text{A.0.4})$$

Esta ecuación es válida para $Re(a \pm ib) > 0$ and $Re(\nu + \lambda + 1) > |Re(\mu)|$.

para $\rho = \Delta$, $\nu = \Delta - 2$, $\mu = 1$, $a = q$ and $b = \sqrt{s}$, tenemos que $F(\Delta, \Delta - 1, \Delta - 1, -\frac{s}{q^2}) = (1 + \frac{s}{q^2})^{-\Delta}$ y recuperamos el resultado de (7.4.25).

Apéndice B

Propiedades básicas de los armónicos esféricos

Lo armónicos esféricos pertenecen a representaciones del grupo de isometría de la S^3 , *i.e.* $SO(4) \approx SU(2) \times SU(2)$. El armónico esférico escalar transforma en la representación $(\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$, donde l es un entero no negativo, mientras $-\frac{l}{2} \leq m, n \leq \frac{l}{2}$. Ellas satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\int_{S^3} Y_l^{m,n} Y_{l'}^{m',n'} = \delta_{ll'} \delta_{mn} \delta_{m'n'}, \quad (\text{B.0.1})$$

y su complejo conjugado se calcula de

$$(Y_l^{m,n})^* = (-1)^{m+n} Y_l^{-m,-n}. \quad (\text{B.0.2})$$

Los armónicos esféricos son autofunciones del operador de Laplace sobre la esfera

$$\nabla^2 Y_l^{m,n} = -l(l+2) Y_l^{m,n}. \quad (\text{B.0.3})$$

Bajo la transformación de paridad sus autovalores son $(-1)^l$. Un campo vectorial sobre S^3 puede ser expandido por la combinación de gradientes de armónicos esféricos escalares $\nabla_i Y$ más un conjunto de armónicos esféricos vectoriales Y_i^{\pm} , que transforman en la representación $(\frac{l \pm 1}{2}, \frac{l \pm 1}{2})$ del grupo $SO(4) \approx SU(2) \times SU(2)$, con $l \geq 1$. Para hacer la notación más simple, los índices m y n pueden ser omitidos. Sin embargo es necesarios escribirlos explícitamente, nosotros usamos la siguiente notación $\vec{Y}_{l,\epsilon}^{m,n}$, donde $\epsilon = \pm 1$ indica la representación. Ellos satisfacen la ecuación de

$$\nabla_i \nabla^i Y_i^{l,\pm} + R_i^j Y_j^{l,\pm} = -(l+1)^2 Y_i^{l,\pm}, \quad (\text{B.0.4})$$

$$\epsilon_{ijk} \nabla_j Y_k^{l,\pm} = \pm(l+1) Y_i^{l,\pm}, \quad (\text{B.0.5})$$

$$\nabla^i Y_i^{l,\pm} = 0, \quad (\text{B.0.6})$$

donde $R_{ij} = 2\delta_{ij}$ es el tensor de Ricci de una S^3 de radio unidad. Además, ellos satisfacen las siguientes relaciones

$$\vec{Y}_{l,\epsilon}^{*,m,n} = (-1)^{m+n+1} \vec{Y}_{l,\epsilon}^{-m,-n}. \quad (\text{B.0.7})$$

Los esféricos armónicos satisfacen las relaciones ortogonales,

$$\begin{aligned} \int_{S^3} \vec{Y}_{l,\epsilon}^{m,n} \cdot \vec{Y}_{l',\epsilon'}^{m',n'} &= \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \delta_{\epsilon,\epsilon'}, \\ \int_{S^3} \vec{Y}_{l,\epsilon}^{m,m'} \cdot \vec{\nabla} Y_{l'}^{n,n'} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.0.8})$$

Los armónicos $\vec{Y}_{l,\epsilon}^{m,n}$ no mezclan con otros vectores con otros armónicos esféricos ya que ellos pertenecen a diferentes representaciones de $SO(4)$.

Apéndice C

Integrales de productos de funciones de Bessel para cálculos aplicados a mesones escalares

En este apéndice se discuten las aproximaciones de las integrales en z de las tres funciones de Bessel en el vértice de interacción IR que se utilizaron en los cálculos de funciones de estructura en el Capítulo 8.

En el caso del glueball estudiado en el Capítulo 7, el vértice de interacción IR describe un proceso donde el hadrón incidente, cuyo dual holográfico está dado por un modo de Kaluza-Klein normalizable del dilatón, se divide en dos hadrones. De forma análoga, en el caso presente para mesones escalares, en la contribución más relevante de los dos campos resultantes tiene la mínima dimensión conforme Δ_{min} . Este es $\Delta_{min} = 2$, y es la misma para los glueballs y los mesones escalares. Considerando el cambio de variables $z = R^2/r$, la acción de interacción *on-shell* contienen una integral en z de la forma

$$I^{(1)} = \int_0^{z_{max}} dz z J_{\Delta_{in}-2}(M_1 z) J_{\Delta'-2}(M_3 z) J_0(\omega z), \quad z_{max} = \Lambda^{-1}. \quad (\text{C.0.1})$$

Este tipo de integrales no se conocen explícitamente para límites de integración arbitrarios. Los resultados analíticos conocidos son obtenidos cuando el límite superior es $z \rightarrow \infty$, y ellos pueden ser escritos en términos de las funciones hipergeométricas y series de Appell. Sin embargo, un análisis interesante ha sido relacionado por Auluck. En [66], se ha propuesto que como función de una de las masas de AdS, ω , y tomando el límite z_{max} grande la integral de la ecuación (C.0.1) se comporta aproximadamente como la suma de funciones de Dirac, a menos de una constante de normalización. Es fácil ver como estas funciones se generan. Usando las expresiones asintóticas ¹ (8.3.31) permite reescribir un producto general de tres funciones de Bessel $J_m(az) J_n(bz) J_l(cz)$ como

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{abc}} \cos\left(az - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(bz - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(cz - l\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{abc}} \sum_{\alpha=\pm 1, \beta=\pm 1} \cos\left[(c - \alpha a - \beta b)z + (-m + \alpha n + \beta l)\frac{\pi}{2} + (-1 + \alpha + \beta)\frac{\pi}{4}\right]. \end{aligned} \quad (\text{C.0.2})$$

Ahora, la integración de cada término multiplicado por z genera la presencia del cuadrado de la correspondiente frecuencia, más algunos signos y el seno de Fresnel y las funciones cosenos. Estas

¹Debido a que la división del hadrón ocurre en la región IR, esta aproximación toma sentido porque la contribución principal en la integral z viene de valores z lejanos de cero.

frecuencias están dadas por $|c \pm a \pm b|$, y cada término describe el comportamiento correcto cerca de la región donde uno de estos factores se anula. En nuestro caso esto significa que la integral tiene dos divergencias, ubicadas en $\omega = (M_1 \pm M_3)$. Otra forma de verlo es proceder como en [131] usando la continuación analítica de la expansión en serie de las funciones de Bessel

$$J_m(az) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi az}} \left[e^{i(az - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^j(m, j)}{(2az)^j} + e^{-i(az - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^{-j}(m, j)}{(2az)^j} \right], \quad (\text{C.0.3})$$

donde

$$(m, j) \equiv \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + m + j)}{n! \Gamma(\frac{1}{2} + m - j)}.$$

Combinando esta expresión para cada función de Bessel, multiplicando por z e integrando término a término, obtenemos los mismos polos mas términos finitos. Así, argumentos frente a escaleos para el comportamiento de las integrales bajo el cambio $(a, b, c) \rightarrow (ka, kb, kc)$ para alguna constante k , junto con un análisis numérico similar al hecho en la referencia [66] alrededor de cada singularidad, generando una aproximación en términos de las dos funciones Delta de Dirac. Esta toma la forma

$$I^{(1)} \approx \frac{1}{\sqrt{M_1 M_3}} [(-1)^{\gamma_-} \delta(\omega - (M_1 - M_3)) + (-1)^{\gamma_+} \delta(\omega - (M_1 + M_3))] , \quad (\text{C.0.4})$$

donde γ_{\pm} puede ser 0 o 1 de acuerdo a las fases determinadas por los índices (m, n, l) en la aproximación asintótica (C.0.2). Ellos no son importantes para el cálculo presente, ya que solo necesitamos el cuadrado el primer término. Hay una interpretación física simple para este comportamiento con las funciones de Delta de Dirac: Están asociados con algún tipo de conservación de masa en el proceso IR [58, 1].

En el caso presente la situación parece ser más complicada ya que tenemos una combinación de diferentes integrales de la forma

$$I^{(\kappa)} = \int_0^{z_{max}} dz z^{\kappa} J_{\Delta_{in}-2}(M_1 z) J_{\Delta'-2}(M_3 z) J_0(\omega z) , \quad (\text{C.0.5})$$

con $\kappa = 2, 3, 4$. En principio, parece que podríamos tener problemas debido a que para $z_{max} \rightarrow \infty$ el integrando crece (y oscila) con z para $\kappa \geq 3/2$. Sin embargo, no estamos integrando hasta $z = \infty$ y el hecho que hay un límite superior dado por el cutt-off es importante. Además, no habría problemas incluso si no estuviera el cutt-off : uno debe tener en mente que las soluciones de Bessel son solo aproximaciones. El espacio de fondo no es exactamente $AdS_5 \times S^3$ y la forma de las soluciones exactas está dadas en [35] en términos de funciones Hypergeométricas. El producto de las tres multiplicado por z^{κ} decae para cualquier κ que estamos estudiando al tomar z grande. Nosotros no vemos esto explícitamente porque este comportamiento ocurre para distancias grandes, mayores a $z \sim R^2/L$, donde la aproximación pierde validez. Por otro lado, un análisis similar señala la misma singularidad en el plano ω . Ahora, todo esto nos motiva a considerar aproximaciones análogas a las que fueron utilizadas en el cálculo del glueball con $\kappa = 1$, y solo necesitamos estudiar el comportamiento cerca de $\omega = M_1 \pm M_3$.

Hemos encontrado que estas integrales se comportan de modo muy similar cuando están divididos por la apropiada potencia del límite superior de integración. El comportamiento numérico se puede mostrar en algunos ejemplos donde cada integral la estudiamos como una función de Λ^{-1} para valores diferentes de ω (figuras C.1, C.2 and C.3). De esas figuras podemos ver que $\Lambda I^{(2)}$, $\Lambda^2 I^{(3)}$ y $\Lambda^3 I^{(4)}$ se comportan de la misma forma, a menos de una constante numérica de orden $\mathcal{O}(1)$, y muy similar a $I^{(1)}$.

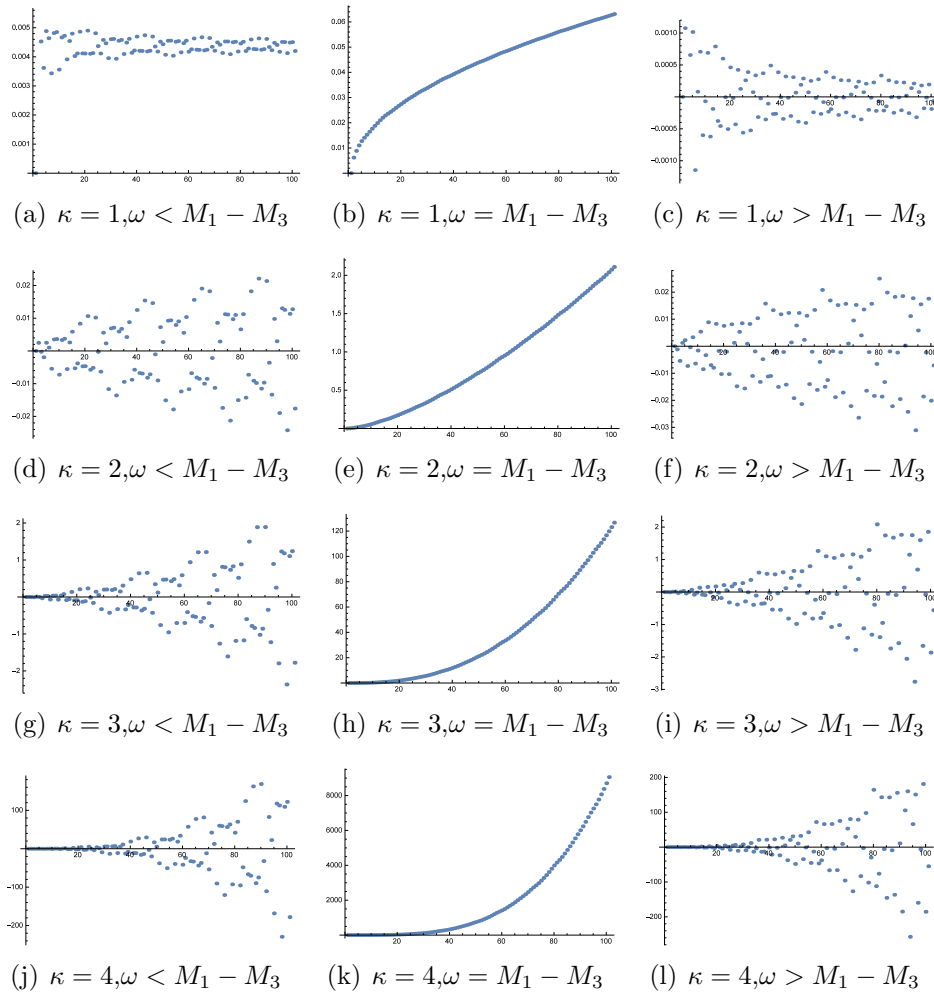


Figura C.1: Ejemplos de integrales $I^{(\kappa)}(\Lambda)$ evaluadas numéricamente $\kappa = 1, \dots, 4$ y mostradas como una función de el límite superior Λ^{-1} . Los parámetros usados son $M_1 = 15$, $M_3 = 6$ y $\omega = 7, 9, 11$ respectivamente.

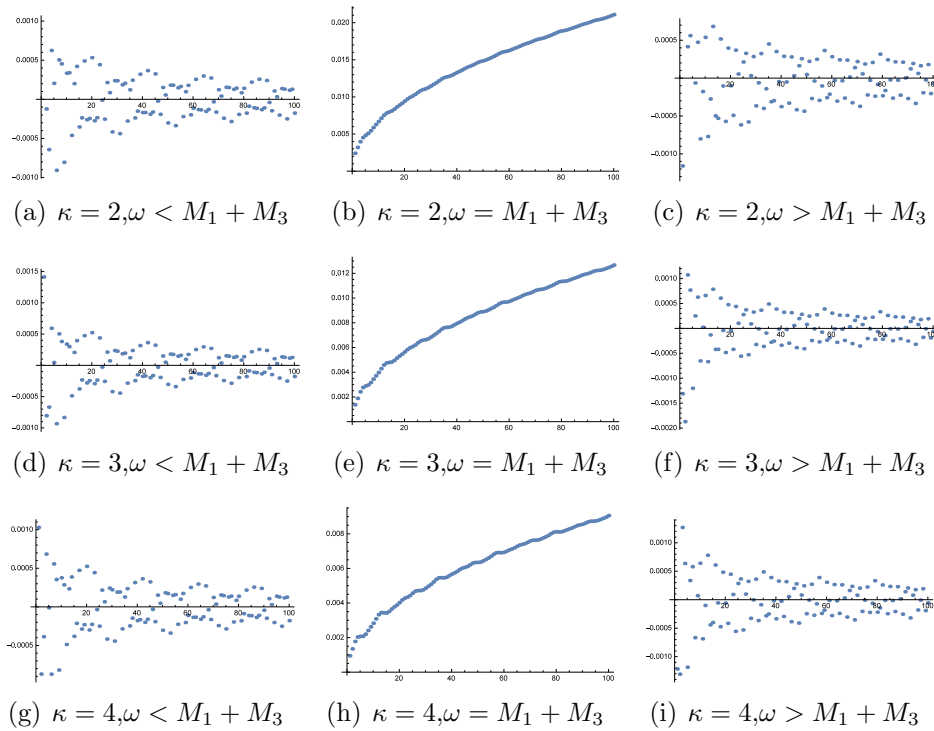


Figura C.2: Las integrales rescaleadas $\Lambda^{\kappa-1}I^{(\kappa)}(\Lambda)$ están evaluadas numéricamente para $\kappa = 2, \dots, 4$ y se muestran como una función de los límites de integración superior Λ^{-1} . Los parámetros usados son $M_1 = 15$, $M_3 = 6$ y $\omega = 7, 9, 11$ respectivamente. Los diferentes comportamientos observados en las figuras previas desaparecen (a menos de una constante de orden 1) y los resultados para cada ω son similares para todas las integrales. Se puede observar que en todos los casos las integral decrece (o da una constante muy chica) para todos los valores de $\omega \neq \omega_c = M_1 - M_3$.

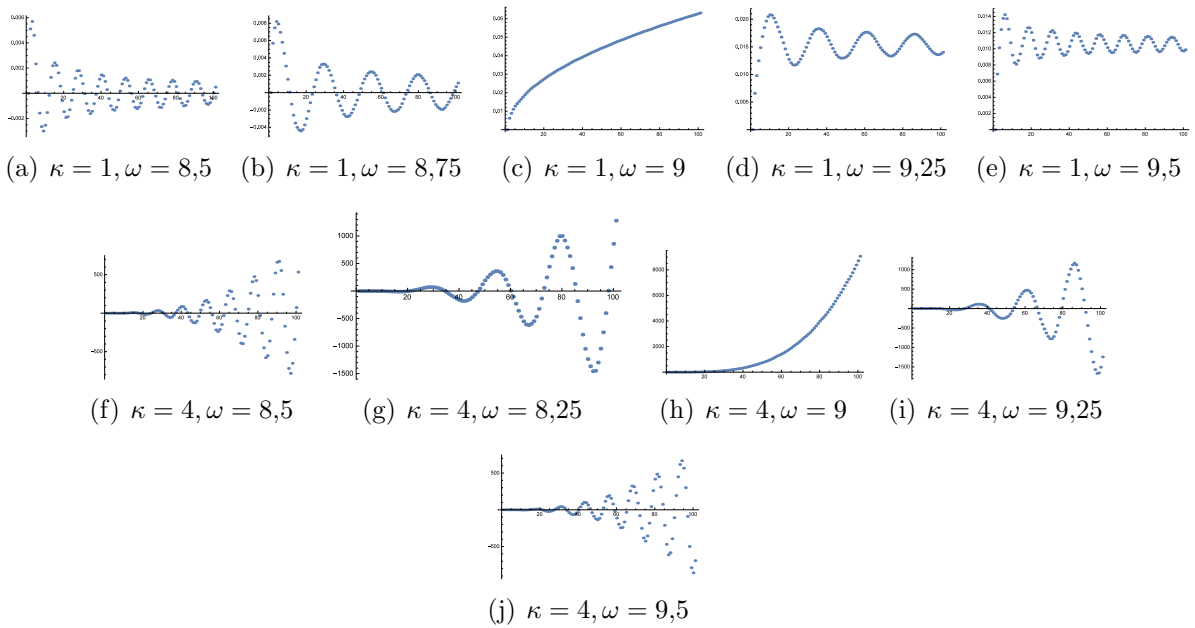


Figura C.3: El comportamiento de las integrales $I^{(\kappa)}(\Lambda)$ con $\kappa = 1$ y $\kappa = 4$ cerca del pico esta mostrado usando diagramas similares a los de las figuras previas pero con $\omega = 8,5, 8,75, 9, 9,25$ y $9,5$ en ambos casos.

De hecho, se puede ver esto directamente de (C.0.2), realizando primero una integral indefinida en z para los primeros casos diferentes, obteniendo

$$\begin{aligned} \int dz z^{-1/2} \cos(Pz + b) &= \left(\frac{2\pi}{P}\right)^{1/2} \left[\cos(b)C(\sqrt{2\pi^{-1}Pz}) - \sin(b)S(\sqrt{2\pi^{-1}Pz}) \right] \\ \int dz z^{1/2} \cos(Pz + b) &= \left(\frac{2\pi}{4P^3}\right)^{1/2} \left[-\cos(b)S(\sqrt{2\pi^{-1}Pz}) - \sin(b)C(\sqrt{2\pi^{-1}Pz}) \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{Pz} \sin(Pz + b) \right] \\ \int dz z^{3/2} \cos(Pz + b) &= \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{P^5}\right)^{1/2} \left[-3\cos(b)C(\sqrt{2\pi^{-1}Pz}) + 3\sin(b)S(\sqrt{2\pi^{-1}Pz}) \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{Pz} (3\cos(Pz + b) + 2Pz \sin(Pz + b)) \right] \\ \int dz z^{5/2} \cos(Pz + b) &= \frac{1}{8} \left(\frac{2\pi}{P^7}\right)^{1/2} \left[15\cos(b)S(\sqrt{2\pi^{-1}Pz}) + 15\sin(b)C(\sqrt{2\pi^{-1}Pz}) \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{Pz} (10Pz \cos(Pz + b) + (4P^2 z^2 - 15) \sin(Pz + b)) \right] \end{aligned}$$

donde P corresponde a la desviación de $\omega = M_1 \pm M_3$ y b representa alguna fase, mientras que $S(x)$ y $C(x)$ son las funciones seno y coseno de fresnel, respectivamente. Ahora, evaluando estos resultados entre $z = 0$ y $z = \Lambda^{-1}$ y expandiendo alrededor del pico, i.e., alrededor $P = 0$ encontramos que, al menos en esta región paramétrica, las diferentes integrales están relacionadas como establecimos en nuestra aproximación.

La razón para este comportamiento es que como los entrangdo de las integrales $I^{(n)}$ crecen con z hasta z_{max} , la contribución más importante proviene de la región $z \sim z_{max} = \Lambda^{-1}$. Esto también fue comentado en el estudio de la normalización de las funciones de onda del gluebon incidente en [57]. Argumento de escaleo bajos el cambio $(a, b, c) \rightarrow (ka, kb, kc)$ además son

consistentes con este análisis. Por lo tanto, la aproximación que usaremos está dado por las ecuaciones (8.4.5) and (8.4.6).

Bibliografía

- [1] D. Jorin, N. Kovensky, and M. Schvellinger, “Towards $1/N$ corrections to deep inelastic scattering from the gauge/gravity duality,” *JHEP* **1604** (2016) 113, [arXiv:1601.01627 [hep-th]].
- [2] D.Jorin, N.Kovensky, and M.Schvellinger, “Deep inelastic scattering off scalar mesons in the $1/n$ expansion from the d3d7-brane system,” *JHEP* **1612** (2016) 003, [arXiv:1609.01202 [hep-th]].
- [3] D.Jorin and M.Schvellinger, “Holographic photo-production in heavy ion collision at finite coupling,” *Trabajo en preparación*.
- [4] R. Brock *et al.*, “Handbook of perturbative QCD: Version 1.0,” *Rev. Mod. Phys.* **67** (1995) 157.
- [5] M. Creutz, *Quarks, gluons and lattices*. Cambridge University Press 1985.
- [6] I.Montvay and G.Munster, *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press 1997.
- [7] J.Smit, *Introduction to Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press 2002.
- [8] H.Rothe, *Lattice Gauge Theories, An Introduction*. World Scientific 2005.
- [9] T.DeGrand and C.DeTar, *Lattice Methods for Quantum Chromodynamics*. World Scientific 2006.
- [10] C.Gattringer and C.B.Lang, *Quantum Chromodynamics on the Lattice*. Springer 2010.
- [11] T. H. R. Skyrme, “A Nonlinear field theory,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **260** (1961) 127.
- [12] I.Zahed and G.E.Brown, “The Skyrme Model,” *Phys. Rept.* **142** (1986) 1.
- [13] T. Weidig, “The Baby skyrme models and their multiskyrmions,” *Nonlinearity* **12** (1999) 1489.
- [14] C. G. Callan, Jr. and I. R. Klebanov, “Bound State Approach to Strangeness in the Skyrme Model,” *Nucl. Phys. B* **262** (1985) 365.
- [15] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn, “Baryon Structure in the Bag Theory,” *Phys. Rev. D* **10** (1974) 2599.
- [16] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. 1.,” *Phys. Rev.* **122** (1961) 345.
- [17] J. Gasser and H. Leutwyler, “Chiral Perturbation Theory: Expansions in the Mass of the Strange Quark,” *Nucl. Phys. B* **250** (1985) 465.

- [18] J. Gasser and H. Leutwyler, “Chiral Perturbation Theory to One Loop,” *Annals Phys.* **158** (1984) 142.
- [19] E. E. Jenkins and A. V. Manohar, “Baryon chiral perturbation theory using a heavy fermion Lagrangian,” *Phys. Lett. B* **255** (1991) 558.
- [20] G. ’t Hooft, “A Planar Diagram Theory for Strong Interactions,” *Nucl. Phys. B* **72** (1974) 461.
- [21] E. Witten, “Baryons in the $1/n$ Expansion,” *Nucl. Phys. B* **160** (1979) 57.
- [22] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113 [*Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231].
- [23] J. Polchinski and M. J. Strassler, “Hard scattering and gauge / string duality,” *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 031601, [hep-th/0109174].
- [24] M. F. Sohnius, “Introducing Supersymmetry,” *Phys. Rept.* **128** (1985) 39.
- [25] S. Caron-Huot, L. J. Dixon, A. McLeod, and M. von Hippel, “Bootstrapping a Five-Loop Amplitude Using Steinmann Relations,” *Phys. Rev. Lett.* **117** (2016) no.24, 241601, [arXiv:1609.00669 [hep-th]].
- [26] E. D’Hoker and D. Z. Freedman, “Supersymmetric gauge theories and the AdS / CFT correspondence,” in *Strings, Branes and Extra Dimensions: TASI 2001: Proceedings*, 2002.
- [27] G. Veneziano, “Some Aspects of a Unified Approach to Gauge, Dual and Gribov Theories,” *Nucl. Phys. B* **117** (1976) 519.
- [28] A. V. Manohar, “Large N QCD,” in *Probing the standard model of particle interactions. Proceedings, Summer School in Theoretical Physics, NATO Advanced Study Institute, 68th session, Les Houches, France, July 28-September 5, 1997. Pt. 1, 2.* hep-ph/9802419.
- [29] A. V. Manohar, “An Introduction to spin dependent deep inelastic scattering,” in *Lake Louise Winter Institute: Symmetry and Spin in the Standard Model Lake Louise, Alberta, Canada, February 23-29, 1992.* [hep-ph/9204208].
- [30] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory.* 1995.
- [31] E. Witten, “Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 505, [hep-th/9803131].
- [32] J. M. Maldacena and C. Nunez, “Towards the large N limit of pure $N=1$ superYang-Mills,” *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 588, [hep-th/0008001].
- [33] I. R. Klebanov and E. Witten, “Superconformal field theory on three-branes at a Calabi-Yau singularity,” *Nucl. Phys. B* **536** (1998) 199, [hep-th/9807080].
- [34] A. Karch and E. Katz, “Adding flavor to AdS / CFT,” *JHEP* **0206** (2002) 043, [hep-th/0205236].
- [35] R. M. Kruczenski, D. Mateos and D. J. Winters, “Meson spectroscopy in AdS/CFT with flavor,” *JHEP* **0307** (2003) 049, [hep-th/0304032].
- [36] R. M. Kruczenski, D. Mateos and D. J. Winters, “Towards a holographic dual of large $N(c)$ QCD,” *JHEP* **0405** (2004) 041, [hep-th/0311270].

- [37] T. Sakai and S. Sugimoto, “Low energy hadron physics in holographic QCD,” *Prog. Theor. Phys.* **113** (2005) 843, [hep-th/0412141].
- [38] J. M. Maldacena and C. Nunez, “Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem,” *Int. J. Mod. Phys. A* **16** (2001) 822, [hep-th/0008001].
- [39] I. R. Klebanov and A. A. Tseytlin, “Gravity duals of supersymmetric $SU(N) \times SU(N+M)$ gauge theories,” *Nucl. Phys. B* **536** (1998) 199, [hep-th/9807080].
- [40] I. R. Klebanov and M. J. Strassler, “Supergravity and a confining gauge theory: Duality cascades and chi SB resolution of naked singularities,” *JHEP* **0008** (2000) 052, [hep-th/0007191].
- [41] I. Nissan, J. M. Maldacena, J. Sonnenschein, and S. Yankielowicz, “Supergravity and the large N limit of theories with sixteen supercharges,” *Phys. Rev. D* **58** (1998) 046004, [hep-th/9802042].
- [42] J. Erlich, E. Katz, D. T. Son, and M. A. Stephanov, “QCD and a holographic model of hadrons,” *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 261602, [hep-ph/0501128].
- [43] L. Da Rold and A. Pomarol, “Chiral symmetry breaking from five dimensional spaces,” *Nucl. Phys. B* **721** (2005) 79, [hep-ph/0501218].
- [44] J. Polchinski, “String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string,” *Cambridge University*, 1998.
- [45] G. T. Horowitz and A. Strominger, “Black strings and P-branes,” *Nucl. Phys. B* **360** (1991) 197.
- [46] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323** (2000) 183, [hep-th/9905111].
- [47] V. Balasubramanian and P. Kraus, “Space-time and the holographic renormalization group,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3605, [hep-th/9903190].
- [48] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from non-critical string theory,” *Phys. Lett. B* **428** (1998) 105, [hep-th/9802109].
- [49] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253, [hep-th/9802150].
- [50] S. Raju, “Recursion Relations for AdS/CFT Correlators,” *Phys. Rev. D* **83** (2011) 126002, [arXiv:1102.4724 [hep-th]].
- [51] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal, and U. A. Wiedemann, “Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions,” [arXiv:1101.0618 [hep-th]].
- [52] J. Paquet, “Characterizing the non-equilibrium quarkgluon plasma with photons and hadrons,” *Ph.D. thesis, McGill University*, 2015.
- [53] D. Lohner, “Anisotropic flow of direct photons in Pb-Pb collisions at 2.76 TeV per nucleon,” *Thesis Heidelberg U*, 2013.
- [54] A. Adare *et al.*, “Centrality dependence of low-momentum direct-photon production in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV,” *Phys. Rev. C* **91** (2015) no.6, 064904, [arXiv:1405.3940 [nucl-ex]].

- [55] B. I. Abelev *et al.*, “Systematic Measurements of Identified Particle Spectra in pp, d^+ Au and Au+Au Collisions from STAR,” *Phys. Rev. C* **79** (2009) 034909, [arXiv:0808.2041 [nucl-ex]].
- [56] J.F.Paquet, C.Shen, G.S.Denicol, M.Luzum, B.Schenke, S.Jeon, and C.Gale, “Production of photons in relativistic heavy-ion collisions,” *Phys. Rev. C* **93** (2016) no.4, 044906, [arXiv:1509.06738 [hep-ph]].
- [57] J.Polchinski and M.J.Strassler, “Deep inelastic scattering and gauge / string duality,” *JHEP* **0305** (2003) 012, [hep-th/0209211].
- [58] J.H.Gao and Z.G.Mou, “Structure functions in deep inelastic scattering from gauge/string duality beyond single-hadron final states,” *Phys. Rev. D* **90** (2014) 075018, [arXiv:1406.7576 [hep-ph]].
- [59] E.Koile, S.Macaluso, and M.Schvellinger, “Deep Inelastic Scattering from Holographic Spin-One Hadrons,” *JHEP* **1202** (2012) 103, [arXiv:1112.1459 [hep-th]].
- [60] E.Koile, S.Macaluso, and M.Schvellinger, “Deep inelastic scattering structure functions of holographic spin-1 hadrons with $N_f \geq 1$,” *JHEP* **1401** (2014) 166, [arXiv:1311.2601 [hep-th]].
- [61] H.Liu and A.A.Tseytlin, “Dilaton - fixed scalar correlators and $AdS_5 \times S^5$ - SYM correspondence,” *JHEP* **9910** (1999) 003, [hep-th/9906151].
- [62] D.Z.Freedman, S.D.Mathur, A.Matusis, and L.Rastelli, “Correlation functions in the CFT(d) / AdS(d+1) correspondence,” *Nucl. Phys. B* **546** (1999) 96, [hep-th/9804058].
- [63] E.D’Hoker, S. D.Z.Freedman, A.Matusis, and L.Rastelli, “Graviton exchange and complete four point functions in the AdS / CFT correspondence,” *Nucl. Phys. B* **562** (1999) 353, [hep-th/9903196].
- [64] H.J.Kim, L.J.Romans, and P.vanNieuwenhuizen, “Mass spectrum of chiral ten-dimensional N=2 supergravity on S^5 ,” *Phys. Rev. D* **32** (1985) 389.
- [65] G.Arutyunov and S.Frolov, “Some cubic couplings in type IIB supergravity on $AdS_5 \times S^5$ and three point functions in SYM(4) at large N ,” *Phys. Rev. D* **61** (2000) 064009, [hep-th/9907085].
- [66] S. K. H. Auluck, “On the integral of the product of three bessel functions over an infinite domain,” *The Mathematica Journal* 14, 2012.
- [67] S. Lee, “AdS(5) / CFT(4) four point functions of chiral primary operators: Cubic vertices,” *Nucl. Phys. B* **563** (1999) 349, [hep-th/9907108].
- [68] E.Koile, N.Kovensky, and M.Schvellinger, “Deep inelastic scattering cross sections from the gauge/string duality,” *JHEP* **1512** (2015) 009, [arXiv:1507.07942 [hep-th]].
- [69] M.Aicher, A.Schafer, and W.Vogelsang, “Soft-gluon resummation and the valence parton distribution function of the pion,” *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 252003, [arXiv:1009.2481 [hep-ph]].
- [70] E.Koile, N.Kovensky, and M.Schvellinger, “Hadron structure functions at small x from string theory,” *JHEP* **1505** (2015) 001, [arXiv:1412.6509 [hep-th]].

- [71] C.Best, M.Gockeler, R.Horsley, E.M.Ilgenfritz, P. H.Perlt, A.Schafer, and G.Schierholz, “Pion and rho structure functions from lattice QCD,” *Phys. Rev. D* **56** (1997) 2743, [hep-lat/9703014].
- [72] D. Broemmell, M. Diehl, M. Goeckeler, P. Haegler, R. Horsley, D. P. Y. Nakamura, P. Rakow, A. Schafer, G. Schierholz, H. Stuben, and J. Zanotti, “Quark distributions in the pion,” *PoS LATTICE* **2007** (2007) 140.
- [73] L.Chang, C.Mezrag, H.Moutarde, J.-Q. C.D.Roberts, and P.C.Tandy, “Basic features of the pion valence-quark distribution function,” *Phys. Lett. B* **737** (2014) 23.
- [74] S.-i. Nam, “Parton-distribution functions for the pion and kaon in the gauge-invariant nonlocal chiral-quark model,” *Phys. Rev. D* **86** (2012) 074005, [arXiv:1205.4156 [hep-ph]].
- [75] J.L.Albacete and C.Marquet, “Pressure isotropization in high energy heavy ion collisions,” *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 232301, [arXiv:1307.2214 [hep-ph]].
- [76] J.L.Albacete and C.Marquet, “Gluon saturation and initial conditions for relativistic heavy ion collisions,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **76** (2014) 1, [arXiv:1401.4866 [hep-ph]].
- [77] V. Balasubramanian, A. Bernamonti, J. de Boer, N. Copland, B. Craps, E. Keski-Vakkuri, B. Muller, A. Schafer, M. Shigemori, and W. Staessens, “Holographic Thermalization,” *Phys. Rev. D* **84** (2011) 026010, [arXiv:1103.2683 [hep-th]].
- [78] V. Balasubramanian, A. Bernamonti, J. de Boer, N. Copland, B. Craps, E. Keski-Vakkuri, B. Muller, A. Schafer, M. Shigemori, and W. Staessens, “Thermalization of Strongly Coupled Field Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 191601.
- [79] W. der Schee, P.Romatschke, and S.Pratt, “Fully Dynamical Simulation of Central Nuclear Collisions,” *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) no.22, 222302, [arXiv:1307.2539 [nucl-th]].
- [80] P.Huovinen and P.Petreczky, “QCD Equation of State and Hadron Resonance Gas,” *Nucl. Phys. A* **837** (2010) 26, [arXiv:0912.2541 [hep-ph]].
- [81] S.Ryu, J.-F.Paquet, C.Shen, G.S.Denicol, B.Schenke, S.Jeon, and C.Gale, “Importance of the Bulk Viscosity of QCD in Ultrarelativistic Heavy-Ion Collisions,” *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015) no.13, 132301, [arXiv:1502.01675 [nucl-th]].
- [82] P.B.Arnold, G.D.Moore, and L.G.Yaffe, “Photon emission from quark gluon plasma: Complete leading order results,” *JHEP* **0112** (2001) 009, [hep-ph/0111107].
- [83] I.Iatrakisa, E.Kiritsis, C.Shen, and D.L.Yang, “Holographic Photon Production in Heavy Ion Collisions,” *JHEP* **1704** (2017) 035,[arXiv:1609.07208 [hep-ph]].
- [84] P.Aurenche, R.Baier, M.Fontannaz, and D.Schiff, “Prompt Photon Production at Large $p(T)$ Scheme Invariant QCD Predictions and Comparison with Experiment,” *Nucl. Phys. B* **297** (1988) 661.
- [85] F. Aversa, P. Chiappetta, M. Greco, and J. P. Guillet, “QCD Corrections to Parton-Parton Scattering Processes,” *Nucl. Phys. B* **327** (1989) 105.
- [86] P. Aurenche, F. Aversa, R. Baier, T. Binoth, L. Bourhis, P. Chiappetta, M. Fontannaz, M. Greco, J.-P. Guillet, G. Heinrich, E. Pilon, D. Schiff, and M. Werlen, “INCNLO v1.4,” http://laph.cnrs.fr/PHOX_FAMILY/readme_inc.html.

- [87] K.J.Eskola, H.Paukkunen, and C.A.Salgado, “EPS09: A New Generation of NLO and LO Nuclear Parton Distribution Functions,” *JHEP* **0904** (2009) 065, [arXiv:0902.4154 [hep-ph]].
- [88] A. Adare and others [PHENIX Collaboration], “Enhanced production of direct photons in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV and implications for the initial temperature,” *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 132301, [arXiv:0804.4168 [nucl-ex]].
- [89] S. S. Adler *et al.*, “Identified charged particle spectra and yields in Au+Au collisions at $S(NN)^{1/2} = 200$ -GeV,” *Phys. Rev. C* **69** (2004) 034909, [nucl-ex/0307022].
- [90] Y.-M. Kim, C.-H. Lee, D. Teaney, and I. Zahed, “Direct photon elliptic flow at energies available at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider and the CERN Large Hadron Collider,” *Phys. Rev. C* **96** (2017) no.1, 015201.
- [91] C. Shen, *The standard model for relativistic heavy-ion collisions and electromagnetic tomography*. PhD thesis, Ohio State U., 2014-07-25.
- [92] M.L.Miller, K.Reygers, S.J.Sanders, and P.Steinberg, “Glauber modeling in high energy nuclear collisions,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **57** (2007) 205, [nucl-ex/0701025].
- [93] W.Broniowski, M.Rybczynski, and P.Bozek, “GLISSANDO: Glauber initial-state simulation and more,” *Comput. Phys. Commun.* **180** (2009) 69, [arXiv:0710.5731 [nucl-th]].
- [94] K.Dusling, W.Li, and B.Schenke, “Novel collective phenomena in high-energy proton-proton and proton-nucleus collisions,” *Int. J. Mod. Phys. E* **25** (2016) no.01, 1630002, [arXiv:1509.07939 [nucl-ex]].
- [95] B.Schenke, P.Tribedy, and R.Venugopalan, “Fluctuating Glasma initial conditions and flow in heavy ion collisions,” *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 252301, [arXiv:1202.6646 [nucl-th]].
- [96] “<https://quark.phy.bnl.gov/bschenke/>,”
- [97] L. Landau and E. Lifshitz, “Fluid mechanics,” *Addison-Wesley, Reading, Mass*, 1959.
- [98] G.S.Denicol, H.Niemi, E.Molnar, and D.H.Rischke, “Derivation of transient relativistic fluid dynamics from the Boltzmann equation,” *Phys. Rev. D* **85** (2012) 114047, [arXiv:1202.4551 [nucl-th]].
- [99] S. B.Schenke and C.Gale, “(3+1)D hydrodynamic simulation of relativistic heavy-ion collisions,” *Phys. Rev. C* **82** (2010) 014903, [arXiv:1004.1408 [hep-ph]].
- [100] A. Kurganov and E. Tadmor, “New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection Diffusion Equations,” *Journal of Computational Physics* **160** (2000) 1.
- [101] C.Shen, Z.Qiu, H.Song, J.Bernhard, S.Bass, and U.Heinz, “The iEBE-VISHNU code package for relativistic heavy-ion collisions,” *Comput. Phys. Commun.* **199** (2016) 61, [arXiv:1409.8164 [nucl-th]].
- [102] F. Cooper and G. Frye, “Comment on the Single Particle Distribution in the Hydrodynamic and Statistical Thermodynamic Models of Multiparticle Production,” *Phys. Rev. D* **10** (1974) 186.
- [103] S. A. Bass *et al.*, “Microscopic models for ultrarelativistic heavy ion collisions,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **41** (1998) 255, [nucl-th/9803035].

- [104] H. Petersen, M. Bleicher, S. A. Bass, and H. Stoecker, “UrQMD v2.3: Changes and Comparisons,” arXiv:0805.0567 [hep-ph].
- [105] S. Ryu, J.-F. Paquet, C. Shen, G. Denicol, B. Schenke, S. Jeon, and C. Gale, “Effects of bulk viscosity and hadronic rescattering in heavy ion collisions at RHIC and LHC,” arXiv:1704.04216 [nucl-th].
- [106] G.S.Denicol, T.Kodama, T.Koide, and P.Mota, “Effect of bulk viscosity on Elliptic Flow near QCD phase transition,” Phys. Rev. C **80** (2009) 064901, [arXiv:0903.3595 [hep-ph]].
- [107] J. Adams *et al.*, “Azimuthal anisotropy in Au+Au collisions at $s(\text{NN})^{1/2} = 200\text{-GeV}$,” Phys. Rev. C **72** (2005) 014904, [nucl-ex/0409033].
- [108] L. Adamczyk *et al.*, “Third Harmonic Flow of Charged Particles in Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 200\text{ GeV}$,” Phys. Rev. C **88** (2013) no.1, 014904, [arXiv:1301.2187 [nucl-ex]].
- [109] B. Abelev *et al.*, “Centrality dependence of π , K, p production in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 2.76\text{ TeV}$,” Phys. Rev. C **88** (2013) 044910.
- [110] S.Turbide, R.Rapp, and C.Gale, “Hadronic production of thermal photons,” *Phys. Rev. C*, vol. 69, no. 014903, 2004.
- [111] R.Rapp and J.Wambach, “Chiral symmetry restoration and dileptons in relativistic heavy ion collisions,” Phys. Rev. C **69** (2004) 014903, [hep-ph/0308085].
- [112] R.W.Liu and R.Rapp, “Low-energy thermal photons from meson-meson bremsstrahlung,” Nucl. Phys. A **796** (2007) 101, [nucl-th/0604031].
- [113] N.P.M.Holt, P.M.Hohler, and R.Rapp, “Thermal photon emission from the $\Pi\rho\omega$ system,” Nucl. Phys. A **945** (2016) 1, [arXiv:1506.09205 [hep-ph]].
- [114] M. Luzum and J.-Y. Ollitrault, “Eliminating experimental bias in anisotropic-flow measurements of high-energy nuclear collisions,” Phys. Rev. C **87** (2013) no.4, 044907, [arXiv:1209.2323 [nucl-ex]].
- [115] B.Hassanain and M.Schvellinger, “Diagnostics of plasma photoemission at strong coupling,” Phys. Rev. D **85** (2012) 086007, [arXiv:1110.0526 [hep-th]].
- [116] B.Hassanain and M.Schvellinger, “Towards ’t Hooft parameter corrections to charge transport in strongly-coupled plasma,” JHEP **1010** (2010) 068, [arXiv:1006.5480 [hep-th]].
- [117] B.Hassanain and M.Schvellinger, “Plasma photoemission from string theory,” JHEP **1212** (2012) 095, [arXiv:1209.0427 [hep-th]].
- [118] D. J. Gross and E. Witten, “Superstring Modifications of Einstein’s Equations,” Nucl. Phys. B **277** (1986) 1.
- [119] M. D. Freeman, C. N. Pope, M. F. Sohnius, and K. S. Stelle, “Higher Order σ Model Counterterms and the Effective Action for Superstrings,” Phys. Lett. B **178** (1986) 199.
- [120] T. Banks and M. B. Green, “Nonperturbative effects in AdS in five-dimensions x S^{*5} string theory and $d = 4$ SUSY Yang-Mills,” JHEP **9805** (1998) 002, [hep-th/9804170].
- [121] J. Pawelczyk and S. Theisen, “AdS(5) x S^{*5} black hole metric at $O(\alpha\text{-prime}^{*3})$,” JHEP **9809** (1998) 010, [hep-th/9808126].

- [122] S. Caron-Huot, P. Kovtun, G. D. Moore, A. Starinets, and L. G. Yaffe, “Photon and dilepton production in supersymmetric Yang-Mills plasma,” *JHEP* **0612** (2006) 015, [hep-th/0607237].
- [123] D. T. Son and A. O. Starinets, “Minkowski space correlators in AdS / CFT correspondence: Recipe and applications,” *JHEP* **0209** (2002) 042, [hep-th/0205051].
- [124] G. Policastro, D. T. Son, and A. O. Starinets, “From AdS / CFT correspondence to hydrodynamics,” *JHEP* **0209** (2002) 043, [hep-th/0205052].
- [125] M. F. Paulos, “Higher derivative terms including the Ramond-Ramond five-form,” *JHEP* **0810** (2008) 047, [arXiv:0804.0763 [hep-th]].
- [126] J. Ghiglieri, J. Hong, A. Kurkela, E. Lu, G. D. Moore, and D. Teaney, “Next-to-leading order thermal photon production in a weakly coupled quark-gluon plasma,” *JHEP* **1305** (2013) 010, [arXiv:1302.5970 [hep-ph]].
- [127] Y. Bu *Phys. Rev. D* **89** (2014) no.8, 086008.
- [128] V. Jahnke and A. S. Misobuchi, “Probing strongly coupled anisotropic plasmas from higher curvature gravity,” *Eur. Phys. J. C* **76** (2016) no.6, 309.
- [129] A. Buchel and R. C. Myers, “Causality of Holographic Hydrodynamics,” *JHEP* **0908** (2009) 016, [arXiv:0906.2922 [hep-th]].
- [130] A. Adare *et al.*, “Azimuthally anisotropic emission of low-momentum direct photons in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV,” *Phys. Rev. C* **94** (2016) no.6, 064901.
- [131] L.-Y. Hung and Y. Shang, “On 1-loop diagrams in AdS space,” *Phys. Rev. D* **83** (2011) 024029.