CAPÍTULO III

Juegos bipersonales de suma no nula como vectoriales

F. R. Fernández L. Monroy

1. Juegos como problemas de decisión múltiple

El fundamento de un juego es la toma de decisión multilateral. Por ello, un juego puede considerarse como un problema de decisión múltiple, cuando los distintos decisores tienen que optimizar objetivos de forma cooperativa o no cooperativa, con estructuras de información iguales o diferentes y con un conjunto de acciones finito o infinito, entre las que tienen que elegir. Es decir, la teoría de juegos comparte con la teoría de decisión muchos aspectos, de forma que ambas teorías se complementan.

En general, un problema bipersonal de decisión es una situación en la que la toma de decisiones es compartida por dos decisores que, generalmente, valoran dicha decisión de forma distinta. Así, si X e Y son los conjuntos de estrategias mixtas de los jugadores, el conjunto de alternativas es $D = X \times Y$, y una decisión $d = (x, y) \in D$ será valorada mediante una función de dos componentes:

$$f(d) = (f_1(x, y), f_2(x, y)),$$

donde f_1 y f_2 son las funciones de pagos de cada jugador.

Este problema lo vamos a analizar de dos formas distintas. En primer lugar consideraremos una situación cooperativa, y posteriormente estudiaremos la situación no cooperativa.

1.1. Situación cooperativa

En la situación cooperativa, al tomar una decisión, ambos jugadores tratan de escoger la *mejor* de todas las alternativas disponibles, para ambos. Se busca una decisión no dominada d^*, es decir, $d^* \in D$ tal que no existe $d \in D$ con $f(d) \geq f(d^*)$ en ambas componentes.

Este estudio es similar al que se realiza en decisión múltiple, en el que se buscan soluciones eficientes o Pareto óptimas para tal problema. La dificultad proviene de la forma de las funciones f que pueden ser lineales, fraccionales, cuadráticas, etc. Notemos que este procedimiento puede aplicarse tanto a juegos escalares como vectoriales, pues el proceso de razonamiento es similar en ambos casos, aunque en el caso vectorial aumente la complejidad del problema.

Ejemplo 3.1 *La batalla de los sexos*

Una pareja tienen que decidir entre ir al teatro o ir a un combate de boxeo. Ella (jugador II) quiere ir al teatro y él (jugador I) al combate de boxeo, pero en cualquier caso ambos quieren ir juntos. Si la primera estrategia para ambos es ir al teatro y la segunda ir al combate de boxeo la matriz del juego es

	II_1	II_2
I_1	(1,4)	(0,0)
I_2	(0,0)	(4,1)

La región de pagos del juego se representa en la figura 3.1.

Si ambos jugadores cooperan, como las estrategias mixtas conjuntas están permitidas, la región de pagos del juego cooperativo es el cierre convexo de la región anterior, representado en la figura 3.2.

El juego se convierte, por tanto, en un problema lineal con dos objetivos que es fácil de resolver. La región de pagos no dominados es el segmento que une los puntos $(1,4)$*, y* $(4,1)$*. Así, si deciden tirar una moneda y bien ir*

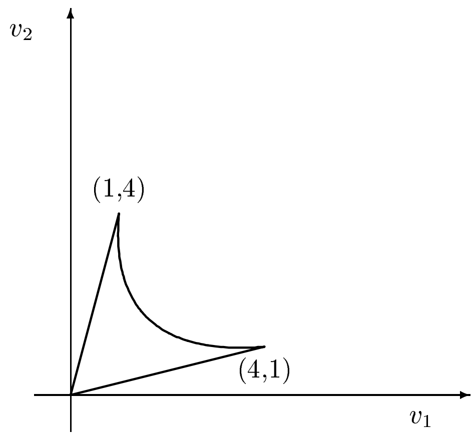

Figura 3.1.

al teatro o bien ir al combate de boxeo, se corresponde con jugar (I_1, II_1) *o* (I_2, II_2) *con probabilidad* $1/2$ *cada una, lo que proporciona un pago esperado de* $1/2(1,4) + 1/2(4,1) = (5/2, 5/2)$*, que en la gráfica es el punto medio del segmento de extremos* $(1,4)$*,* $(4,1)$*.*

1.2. Situación no cooperativa

Cuando tenemos una situación no cooperativa se plantea un aditamento, pues un decisor puede desear una acción x (o y) para asegurarse un cierto valor en su función objetivo, sin importarle lo que haga su oponente.

Analizaremos el concepto de equilibrio de Nash desde la perspectiva de la decisión múltiple. En este sentido, un punto de equilibrio puede verse como una solución eficiente de una determinada función de valoración de las decisiones.

Cada decisión $d^* = (x^*, y^*) \in X\text{x}Y$ se valora con respecto a las otras decisiones mediante la función:

$$f(d, d^*) = (f_1(x, y^*), f_2(x^*, y)),$$

donde f_1 y f_2 son las funciones de pagos de los jugadores.

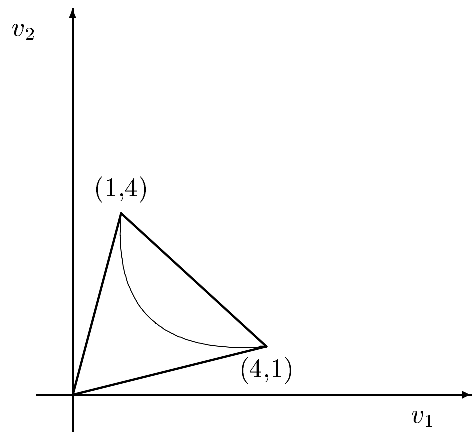

Figura 3.2.

Diremos que d^* está en equilibrio si no es dominada con respecto a dicha función. Es decir, no existe $d = (x, y) \in D$ tal que

$$f_1(x, y^*) \geq f_1(x^*, y^*) \quad \text{y} \quad f_2(x^*, y) \geq f_2(x^*, y^*).$$

Observemos que para el estudio del caracter no dominado de cada decisión se considera una función distinta. La dificultad del estudio va a depender, como en el caso anterior, de la forma de las funciones.

Notemos que si $x^* \in X$ verifica $f_1(x, y^*) \leq f_1(x^*, y^*)$, es que x^* es la mejor respuesta a $y^* \in Y$. Si $y^* \in Y$ verifica $f_2(x^*, y) \leq f_2(x^*, y^*)$, es que y^* es la mejor respuesta a $x^* \in X$. Cuando x^* e y^* son la mejor respuesta mutuamente, (x^*, y^*) es un punto de equilibrio. Es decir, si ambos jugadores adoptan estas estrategias, ningún jugador puede beneficiarse si alguno se desvia de ella. John Nash (1951) [66] probó que todo juego finito bipersonal tiene al menos un punto de equilibrio en estrategias puras o mixtas. En su honor, los equilibrios en los juegos de suma no nula se denominan *equilibrios de Nash*.

La batalla de los sexos es un juego con tres equilibrios de Nash, (I_1, II_1) con un pago $(1, 4)$, (I_2, II_2) con un pago $(4, 1)$ y el tercero formado por las estrategias mixtas $x = (1/5, 4/5)$ del jugador I, $y = (4/5, 1/5)$ del jugador

II, con un pago $(4/5, 4/5)$. Está claro que el jugador I intentará alcanzar el equilibrio (I_2, II_2), por ello puede jugar su estrategia I_2 como una forma de obligar a su oponente a jugar II_2. Sin embargo, observemos que si el jugador I utiliza su estrategia I_2, mientras que que el jugador II se mantiene en su estrategia II_1, el pago que reciben es $(0, 0)$.

En los juegos estrictamente competitivos, en los que los intereses de los jugadores son totalmente opuestos, una decisión nunca puede dominar a otra pues si un jugador mejora con una, el otro debe empeorar. En el caso particular de un juego escalar de suma nula, en el que $f_1(x, y) = -f_2(x, y)$ al aplicar el concepto de punto de equilibrio, no podrá existir un $d = (x, y)$ tal que

$$f_1(x, y^*) \geq f_1(x^*, y^*) \geq f_1(x^*, y)$$

es decir, para cualquier $d = (x, y)$

$$f_1(x, y^*) \leq f_1(x^*, y^*) \leq f_1(x^*, y)$$

de donde la solución es un punto de silla para la función de pagos del juego.

No obstante, éste es un caso excepcional que suele presentarse en pocas ocasiones, incluso en los juegos vectoriales de suma nula, puesto que las desigualdades no tienen por qué invertirse y no tiene por qué existir el punto de silla. En estos juegos pueden buscarse las soluciones a través del concepto de nivel de seguridad, ya que ambos jugadores se oponen mutuamente como hemos visto en el capítulo II.

Para juegos escalares de suma no nula, también puede aplicarse este concepto, pero sólo para eliminar equilibrios triviales, pues un decisor nunca escogerá una estrategia $\overline{x}$ (o $\overline{y}$) que le proporcione un pago inferior a su nivel de seguridad dado por $\inf_{y \in Y} f_1(\overline{x}, y)$, (o $\inf_{x \in X} f_2(x, \overline{y})$), ya que siempre puede emplear estrategias conservadoras que son las que le aseguran

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f_1(x, y) \text{ (o bien } \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} f_2(x, y)),$$

aunque esto puede llevar a ambos jugadores al peor de los resultados como ocurre en el dilema del prisionero.

Ejemplo 3.2 *Dilema del prisionero*

La policía detiene a dos delincuentes con objetos robados y los interroga por separado. Ambos pueden confesar su delito o bien no hacerlo. Si ambos confiesan el robo, ambos son condenados a 9 años de cárcel, mientras que si ambos permanecen callados sólo los condenarían a 1 año de carcel. Si uno confiesa y el otro no, el que confiesa, por haber cooperado con la justicia, quedaría libre, mientras que al otro le condenarían a 10 años de cárcel. Si la primera estrategia para ambos es confesar el robo y la segunda no confesarlo, la matriz de pagos del juego, considerando $-n$ para n años de prisión es:

	II_1	II_2
I_1	(-9,-9)	(0,-10)
I_2	(-10,0)	(-1,-1)

Este juego tiene un único equilibrio de Nash, (I_1, II_1) con el que se obtiene el pago $(-9,-9)$. Sin embargo, ésta no es una solución satisfactoria para el juego, puesto que el pago que proporciona es peor que el que ambos jugadores conseguirían si no confiesan su delito que es $(-1,-1)$.

En los juegos vectoriales bipersonales de suma no nula, donde las funciones f_1 y f_2 son vectoriales, obtenemos una definición similar. Una decisión $d^* \in D$ está en equilibrio si es eficiente para la función

$$f(d,d^*) = \left(f_1^1(x,y^*),\dots,f_1^k(x,y^*); f_2^1(x^*,y),\dots,f_2^k(x^*,y)\right),$$

es decir, no existe $d=(x,y) \in D$ tal que

$$f_1^i(x,y^*) \geq f_1^i(x^*,y^*), \quad f_2^i(x^*,y) \geq f_2^i(x^*,y^*), \quad i=1,\dots,k$$

que sigue siendo una condición local.

En los juegos vectoriales, este concepto coincide con el de punto de equilibrio de Nash. Así, podemos caracterizar los puntos de equilibrios de los juegos vectoriales como lo hace Shapley (1959) [82], a través de los juegos escalares que resultan de la ponderación de los pagos, o como lo hace Corley (1985) [26] estableciendo la equivalencia entre un juego bipersonal vectorial y un problema lineal complementario paramétrico.

De la misma forma pueden estudiarse los puntos de equilibrio para un juego vectorial de n personas como Zhao (1991) [100] y Wang (1993) [95]. El principal inconveniente del punto de equilibrio como concepto de solución es que en el caso múltiple, estos equilibrios suelen no ser comparables entre sí, además de compartir con el caso escalar todas las deficiencias de inestabilidad que pusieron de manifiesto Selten (1975) [78] y Myerson (1978) [63] entre otros.

Por esto, diversos autores como Nieuwenhuis (1983) [67], Ghose y Prassad (1989) [41], Fernández y Puerto (1996) [38] y Puerto y Fernández (1995a) [73], han propuesto nuevos conceptos de solución para los juegos multicriterio de suma nula. Sin embargo, el correspondiente análisis de refinamiento del concepto de equilibrio en juegos multicriterio de n personas no cooperativos ha sido escasamente estudiado por su extraordinaria dificultad, véase van Mergen y otros (1995) [60] y Puerto y Férnandez (1995b) [74].

Sin embargo, aún es posible un análisis alternativo de estos juegos, utilizando otro concepto de racionalidad. En las metodologías que hemos expuesto anteriormente, se han tenido presente a ambos jugadores simultáneamente. A continuación vamos a estudiar un planteamiento alternativo que se basa en los juicios que puede hacer un jugador de modo aislado. En este caso, el jugador siempre buscará lo mejor para sí, pero como sus acciones repercuten en el resultado del otro jugador, el estudio puede realizarse bajo dos aspectos diferentes. En uno de ellos, el jugador trata de obtener lo mejor para ambos, situación que denominamos de *actitud positiva*, mientras que en el otro, un jugador intenta conseguir lo mejor para sí, pero perjudicando al contrario, situación que denominamos de *actitud negativa*. Veamos cada uno de ellas.

2.2.1. Situación de actitud positiva

Dado un juego bipersonal escalar, supongamos que el jugador I quiere determinar la estrategia que le proporcione el mejor de los peores resultados, tanto para él como para el jugador II. Para ello, hay que considerar los pagos más desfavorables que se pueden obtener con una estrategia $\overline{x} \in X$, y que son:

$$v_1(\overline{x}) = \inf_{y \in Y} f_1(\overline{x}, y), \quad v_2(\overline{x}) = \inf_{y \in Y} f_2(\overline{x}, y).$$

Ante esta situación, el jugador I debe considerar sólo aquellas estrategias que sean eficientes, pues en $v_1(\overline{x})$ y $v_2(\overline{x})$ solamente se considera al jugador II a través de su mejor respuesta ante la estrategia propuesta $\overline{x}$. Tendremos que $\overline{x}$ es una estrategia eficiente del jugador I, si no existe $x \in X$ tal que $v_1(x) \geq v_1(\overline{x})$ y $v_2(x) \geq v_2(\overline{x})$ con alguna desigualdad estricta. Estas estrategias eficientes las llamaremos estrategias de seguridad por la forma de ser valoradas.

De igual forma puede plantearse el problema considerando al jugador II. Así, los pagos más desfavorables que éste puede obtener con una estrategia $y \in Y$ son:

$$u_1(\overline{y}) = \inf_{x \in X} f_1(x, \overline{y}), \quad u_2(\overline{y}) = \inf_{x \in X} f_2(x, \overline{y}).$$

Análogamente, $\overline{y}$ es una estrategia eficiente del jugador II, si no existe $y \in Y$ tal que $u_1(\overline{y}) \leq u_1(y)$ y $u_2(\overline{y}) \leq u_2(y)$, con alguna desigualdad estricta.

2.2.2. Situación de actitud negativa

Como ya expusimos anteriormente, en este caso el jugador busca su máximo beneficio y al mismo tiempo el mayor perjuicio de su oponente. Es decir, desde esta perspectiva del jugador I quiere determinar una estrategia que le proporcione el mejor de los peores pagos para él y el peor de los mejores pagos para el jugador II. En este caso tiene que considerar una estrategia $\overline{x} \in X$ tal que:

$$v_1(\overline{x}) = \inf_{y \in Y} f_1(\overline{x}, y), \quad v_2(\overline{x}) = \sup_{y \in Y} f_2(\overline{x}, y).$$

Notemos que $\overline{x}$ es una estrategia eficiente del jugador I si no existe $x \in X$ tal que $v_1(x) \geq v_1(\overline{x})$ y $v_2(x) \leq v_2(\overline{x})$ con alguna desigualdad estricta.

Análogamente, si consideramos el problema para el jugador II, los pagos más desfavorables que puede obtener con una estrategia $y \in Y$ son:

$$u_1(\overline{y}) = \sup_{x \in X} f_1(x, \overline{y}) \quad u_2(\overline{y}) = \inf_{x \in X} f_2(x, \overline{y}).$$

Entonces, $\overline{y}$ es una estrategia eficiente del jugador II, si no existe $y \in Y$ tal que $u_1(\overline{y}) \geq u_1(y)$ y $u_2(\overline{y}) \leq u_2(y)$ con alguna desigualdad estricta.

De lo expuesto se deduce que el análisis de los juegos bajo la actitud positiva o bajo la actitud negativa, se realiza por el mismo procedimiento sin más que invertir el signo de una de las funciones de pago de los jugadores.

2.2.3. Juegos bimatriciales no cooperativos como problemas lineales múltiples.

Un procedimiento análogo al propuesto en el capítulo II, para resolver los juegos vectoriales de suma nula por medio de la programación lineal multiobjetivo puede utilizarse para estudiar los juegos bimatriciales escalares desde la óptica de uno de los jugadores.

Cuando los pagos de los jugadores vienen determinados por las matrices de pagos A y B respectivamente, el conjunto de estrategias de seguridad del jugador I y el conjunto de estrategias de seguridad del jugador II, son los conjuntos de soluciones eficientes de ciertos problemas lineales múltiples.

En el caso en que el jugador I trate de obtener lo mejor para ambos el problema lineal múltiple se obtiene de la siguiente forma:

Para cada $x \in X$, se consideran los valores $v_1(x) = \min_{y\in Y} x^t Ay$ y $v_2(x) = \min_{y\in Y} x^t By$, y se busca la estrategia $x \in X$, que haga máximos esos valores, es decir hay que resolver el problema:

$$\begin{array}{ll} \max & v_1, v_2 \\ \text{s.a.} & x^t A \geq (v_1, \ldots, v_1) \\ & x^t B \geq (v_2, \ldots, v_2) \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Observemos que el planteamiento anterior es similar a considerar el juego desde el punto de vista del jugador I, como un juego múltiple de suma nula con matriz de pagos (A, B).

De la misma forma el conjunto de estrategias de seguridad para el jugador II viene dado por el conjunto de soluciones eficientes del problema:

$$\begin{array}{ll} \max & u_1, u_2 \\ \text{s.a.} & Ay \geq (u_1, \ldots, u_1)^t \\ & By \geq (u_2, \ldots, u_2)^t \\ & \sum_{j=1}^m y_j = 1 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Cuando uno de los jugadores trata de obtener lo mejor para sí, pero perjudicando al contrario, los problemas lineales múltiples que representan esta situación son, para los jugadores I y II, respectivamente:

$$\begin{array}{ll} \max & v_1, -v_2 \\ \text{s.a.} & x^t A \geq (v_1, \ldots, v_1) \\ & x^t B \leq (v_2, \ldots, v_2) \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & -u_1, u_2 \\ \text{s.a.} & Ay \leq (u_1, \ldots, u_1)^t \\ & By \geq (u_2, \ldots, u_2)^t \\ & \sum_{j=1}^{m} y_j = 1 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

En este caso, el planteamiento corresponde a considerar el juego desde el punto de vista del jugador I, como un juego múltiple de suma nula con matriz de pagos $(A, -B)$.

Obsérvese que este resultado puede considerarse como una generalización del concepto introducido por Owen [71], para determinar una estrategia de amenaza óptima en un juego bimatricial (A, B). Owen las obtiene resolviendo el juego de suma nula de matriz $A - B$, que en nuestra metodología está relacionando con el caso en que se resuelve el juego múltiple de matriz $(A, -B)$ con pesos unidad.

Al estudiar los juegos bimatriciales de suma no nula bajo este enfoque, es decir, cuando consideramos este juego como uno vectorial de suma nula cuyos pagos son vectores de dos componentes, el jugador obtiene un conjunto de estrategias de seguridad donde podrá escoger la que va a utilizar, con algún criterio adicional de los estudiados en el capítulo II.

Ejemplo 3.3 *Consideremos el juego bipersonal de suma no nula propuesto por*

Borm y otros (1993) [17].

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Actitud Positiva.

El conjunto de estrategias de seguridad para el jugador I, bajo una actitud positiva, viene dado por el conjunto de soluciones eficientes del problema

$$\begin{array}{ll} \max & v_1, v_2 \\ s.a. & 2x_2 + 2x_3 \geq v_1 \\ & 2x_1 \geq v_1 \\ & 2x_3 \geq v_1 \\ & 2x_2 + 2x_3 \geq v_2 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x3 \geq v_2 \\ & 2x_3 \geq v_2 \\ & \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \\ & x \geq 0, v_1, v_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

utilizando el paquete de programación multiobjetivo ADBASE hemos obtenido las siguientes soluciones extremas eficientes:

$$(v^1, x^1) = (1, 1; 1/2, 0, 1/2)$$

$$(v^2, x^2) = (0, 0; 0, 0, 1)$$

por lo que el conjunto de todas las estrategias de seguridad es:

$$\text{conv}\{(1/2, 0, 1/2), (0, 0, 1)\}$$

b) Actitud Negativa.

Si resolvemos el juego bajo una actitud negativa, el conjunto de estrategias de seguridad para el jugador I, viene dado por el conjunto de soluciones *eficientes del problema*

$$
\begin{array}{ll}
\max & v_1, -v_2 \\
s.a. & 2x_2 + 2x_3 \geq v_1 \\
 & 2x_1 \geq v_1 \\
 & 2x_3 \geq v_1 \\
 & 2x_2 + 2x_3 \leq v_2 \\
 & x_1 + 2x_2 + 2x3 \leq v_2 \\
 & 2x_3 \leq v_2 \\
 & \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \\
 & x \geq 0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

cuyas soluciones extremas eficientes son:

$$(v^1, x^1) = (1, 3/2; 1/2, 0, 1/2)$$

$$(v^2, x^2) = (0, 1; 1, 0, 0)$$

por lo que el conjunto de todas las estrategias de seguridad es:

$$\text{conv}\{(1/2, 0, 1/2), (1, 0, 0)\}$$

En el caso de tratar el juego por el procedimiento de Owen, para determinar una estrategia de amenaza óptima consideremos la matriz $A - B$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver el juego escalar de suma nula con matriz de pagos $A - B$ *obtenemos la estrategia* $x = (1, 0, 0)$ *y el valor del juego* $v^* = 0$. *Esta estrategia es una de las estrategias obtenidas al resolver el juego bimatricial desde el punto de vista vectorial y bajo una actitud negativa por parte del jugador I.*

2. Resolución como juegos por objetivos

En esta sección establecemos un nuevo análisis para los juegos bimatriciales no cooperativos, bajo el punto de vista de uno de los jugadores, y a través de los juegos por objetivos establecidos en el capítulo II. Con este nuevo enfoque, el jugador puede además conocer la probabilidad de conseguir aquellos objetivos que se ha marcado.

Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, las matrices de pago de un juego bipersonal de suma no nula. Como hemos comentado anteriormente, el planteamiento puede realizarse bajo dos direcciones diferentes. Teniendo en cuenta que el jugador I intenta obtener lo mejor para ambos jugadores, o bien considerando que el jugador I trata de conseguir lo mejor para sí, pero perjudicando al contrario. A continuación desarrollamos el primer caso, ya que es el que más se acerca al enfoque clásico en el que ambos jugadores intentan maximizar sus ganancias.

Sean $P = (P_1, P_2)$ los objetivos establecidos por el jugador I. Dichos objetivos representan no sólo el pago deseado sino también la actitud ante el riesgo del jugador.

Definición 3.1 *El pago esperado del juego para los objetivos $P = (P_1, P_2)$, para cada par de estrategias $x \in X$, $y \in Y$, es:*

$$v(x,y) = (v_1(x,y), v_2(x,y))$$

donde

$$v_1(x,y) = x^t A_P y, \quad v_2(x,y) = x^t B_P y$$

$$A_P = (\delta^1_{ij}), \quad B_P = (\delta^2_{ij}),\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m$$

$$\delta^1_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_{ij} \geq P_1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \delta^2_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad b_{ij} \geq P_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los niveles de seguridad para el jugador I vienen dados por

Definición 3.2 *Dada $x \in X$, el vector de nivel de seguridad para los objetivos P es*

$$v^P(x) = (v_1^P(x), v_2^P(x))$$

donde

$$v_1^P(x) = \min_{y \in Y} v_1^P(x,y) = \min_{y \in Y} x^t A_P y = \min_j (\sum_{i=1}^n x_i \delta_{ij}^1)$$

$$v_2^P(x) = \min_{y \in Y} v_2^P(x,y) = \min_{y \in Y} x^t B_P y = \min_j (\sum_{i=1}^n x_i \delta_{ij}^2)$$

Definición 3.3 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad de nivel P si no existe $x \in X$, tal que $v^P(x^*) \leq v^P(x)$, $v^P(x^*) \neq v^P(x)$.*

El problema lineal multicriterio asociado al juego vectorial por objetivos, para el jugador I es:

$$\begin{array}{lll} (JMO)_P: & \max & v_1, v_2 \\ & \text{s.a.} & x^t A_P \geq (v_1, \ldots, v_1) \\ & & x^t B_P \geq (v_2, \ldots, v_2) \\ & & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

Teorema 3.1 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad de nivel P y $v^* = (v_1^*, v_2^*)$ su vector de nivel de seguridad si y sólo si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(JMO)_P$.*

Demostración: Se deduce del teorema 2.9 para $k = 2$. □

Ejemplo 3.4 *Sea un juego bipersonal de suma no nula con matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & 7 & 2 \\ 8 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 1 \\ 9 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Supongamos que el jugador I establece los objetivos $P = (6,5)$. Considerando la actitud positiva, las estrategias de seguridad de nivel P y sus vectores de nivel de seguridad asociados son el cierre convexo de las soluciones

$$(v^1, x^1) = (v_1^1, v_2^1; x_1^1, x_2^1, x_3^1) = (1/2, 1/4; 1/4, 1/2, 1/4)$$
$$(v^2, x^2) = (v_1^2, v_2^2; x_1^2, x_2^2, x_3^2) = (1/3, 1/3; 1/3, 1/3, 1/3)$$

Si el jugador I utiliza la estrategia $x^1 = (1/4, 1/2, 1/4)$ conseguirá el objetivo $P_1 = 6$ con probabilidad al menos 1/2, y el jugador II conseguirá $P_2 = 5$ con probabilidad al menos 1/4.

2.1. Análisis de sensibilidad en los objetivos

El análisis de sensibilidad en los objetivos desarrollado en el capítulo II podemos aplicarlo en los juegos bipersonales de suma no nula, de forma que el espacio de objetivos se descompone en un número finito de regiones rectangulares en las cuales los puntos que pertenecen a una misma región tienen el mismo conjunto de soluciones y valores.

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ y $\beta_1, \ldots, \beta_s$ los elementos de las matrices A y B respectivamente, ordenados en orden creciente. Las distintas regiones de la partición del espacio de objetivos son:

$$R_{11} = \{(\alpha_1, \beta_1)\}$$
$$R_{1j} = \{\alpha_1\} \times (\beta_{j-1}, \beta_j], \;\; j = 2, \ldots, s$$
$$R_{i1} = (\alpha_{i-1}, \alpha_i] \times \{\beta_1\}, \;\; i = 2, \ldots, r$$
$$R_{ij} = (\alpha_{i-1}, \alpha_i] \times (\beta_{j-1}, \beta_j], \;\; i = 2, \ldots, r, \; j = 2, \ldots, s$$

Dado un objetivo $P = (P_1, P_2)$, denotamos por C_P el conjunto de soluciones eficientes del problema $(JMO)_P$, es decir,

$$C_P = \left\{(v_1^P, v_2^P, x^P) : \text{ solución eficiente de } (JMO)_P\right\}.$$

Teorema 3.2 *Se verifican los siguientes resultados:*

1. *Para todo P, P' en R_{ij} , $C_P = C_{P'}$.*

2. *Sea $P = (P_1, P_2)$ un objetivo en R_{ij} para i fijo y $j = 1, \ldots, m$. Sea $\overline{v}_1^P$ el valor del juego de suma nula con matriz de pagos A_P, y denotemos por*

X^{P_1} el conjunto de todas las estrategias óptimas para este juego. Entonces $(\overline{v}_1^P, \overline{v}_2^P, \overline{x}^P)$ es una solución eficiente de $(JMO)_P$ donde

$$\overline{v}_2^P = \max_{x \in X^{P_1}} \min_j (\sum_{i=1}^n x_i^P \delta_{ij}^2)$$

$$\overline{x}^P = \arg \max_{x \in X^{P_1}} \min_j (\sum_{i=1}^n x_i^P \delta_{ij}^2).$$

Demostración: 1. Por definición, para todo $P, P' \in R_{ij}$, $A_P = A_{P'}$ y $B_P = B_{P'}$, de donde $(\mathrm{JMO})_P = (\mathrm{JMO})_{P'}$ y $C_P = C_{P'}$.

2. Para cualquier $P_1 \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, y $P_2 \in (\beta_{j-1}, \beta_j]$, $j = 2, \dots, s$, consideremos el problema

$$\begin{array}{lll} (JMO)_P: & \max & v_1, v_2 \\ & \text{s.a.} & x^t A_P \geq (v_1, \dots, v_1) \\ & & x^t B_P \geq (v_2, \dots, v_2) \\ & & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

Si $(\overline{v}_1^P, \overline{x}^P)$ es una solución óptima del problema escalar

$$\begin{array}{ll} \max & v_1 \\ \text{s.a.} & x^t A_P \geq (v_1, \dots, v_1) \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

entonces tomando $\overline{v}_2^P = \min_j (\sum_{i=1}^n x_i^P \delta_{ij}^2)$ obtenemos que $(\overline{v}_1^P, \overline{v}_2^P, \overline{x}^P)$ es una solución lexicográfica de $(JMO)_P$, lo que implica el resultado. □

Nota: Dado $P = (P_1, P_2) \in R_{ij}$, existe una solución eficiente del problema $(JMO)_P$ que proporciona el valor de la probabilidad máxima de conseguir P_1, con $P_1 \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ para cualquier P_2. De la misma forma, existe una solución del problema $(JMO)_P$ que proporciona el valor de la probabilidad máxima de conseguir P_2 , con $P_2 \in (\beta_{j-1}, \beta_j]$, para cualquier P_1. Si el problema $(JMO)_P$ tiene una única solución eficiente, dicha solución proporciona conjuntamente el valor de la probabilidad máxima de alcanzar P_1 y P_2.

Hemos descompuesto el espacio de objetivos en regiones rectangulares R_{ij} en las que los objetivos pertenecientes a cada una de ellas se alcanzan con la misma probabilidad. Puede ocurrir que objetivos pertenecientes a regiones distintas originen problemas con el mismo conjunto de soluciones. En este caso, estas regiones pueden colapsarse con lo que el número de regiones en la partición disminuye.

Ejemplo 3.5 *Consideremos el juego bipersonal de suma no nula con matrices de pagos:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si consideramos la actitud positiva, la partición del espacio de objetivos viene dada por el siguiente mapa de soluciones:

3			
(1,0;1,0,0) *(1,0;0,1,0)* *(1,0;0,0,1)* **2**	*(1,0;1,0,0)*	*(1,0;1,0,0)*	*(.5,0;.5,0,.5)*
(.5,.5;.5,.5,0) *(1,.5;0,.5,.5)*	*(.5,.5;.5,.5,0)* *(.5,.5;0,.5,.5)* *(1,0;1,0,0)*	*(.5,.5;.5,.5,0)* *(1,0;1,0,0)*	*(.25,.5;.25,.5,.25)* *(.5,0;.5,0,.5)*
0 *(1,1;1,0,0)* *(1,1;0,1,0)* *(1,1;0,0,1)*	**1** *(1,1;1,0,0)*	**2** *(1,1;1,0,0)*	**3** *(.5,1;.5,0,.5)*

Dentro de cada región hemos escrito las soluciones eficientes extremas que proporcionan las probabilidades de conseguir los objetivos pertenecientes a *cada una de ellas, y las estrategias correspondientes. Podemos observar que objetivos pertenecientes a distintas regiones se obtienen con las mismas probabilidades y las mismas estrategias, por tanto estas regiones pueden colapsarse.*

3			
(1,0;1,0,0) *(1,0;0,1,0)* *(1,0;0,0,1)* **2**	*(1,0;1,0,0)*		*(.5,0;.5,0,.5)*
(.5,.5;.5,.5,0) *(1,.5;0,.5,.5)*	*(.5,.5;.5,.5,0)* *(.5,.5;0,.5,.5)* *(1,0;1,0,0)*	*(.5,.5;.5,.5,0)* *(1,0;1,0,0)*	*(.25,.5;.25,.5,.25)* *(.5,0;.5,0,.5)*
0	**1**	**2**	**3**
(1,1;1,0,0) *(1,1;0,1,0)* *(1,1;0,0,1)* **2**	*(1,1;1,0,0)*		*(.5,1;.5,0,.5)*

Basándonos en el teorema 2.10, establecemos un procedimiento para obtener los conjuntos C_P para cualquier objetivo P. Para ello, denotamos por por $(JMO)_P(i,j)$ el problema $(JMO)_{(\alpha_i,\beta_j)}$, siendo los elementos α_i, β_j los introducidos al comienzo de 2.1.

El procedimiento es el siguiente:

1. Considerar el objetivo $P = (\alpha_1, \beta_1)$, y resolver el problema $(JMO)_P(1,1)$. Las soluciones extremas eficientes son las estrategias puras del jugador I y el valor del juego es $v_1 = 1$, $v_2 = 1$.

2. Considerar el objetivo $P = (\alpha_2, \beta_1)$ y el problema $(JMO)_P(2,1)$. Este problema tiene más restricciones que $(JMO)_P(1,1)$, por lo que sólo hay que comprobar si las soluciones de este problema verifican las nuevas restricciones.

2.1. Si todas las soluciones extremas las verifican, son las soluciones extremas eficientes del nuevo problema $(JMO)_P(2,1)$

2.2. Si algunas sí verifican las restricciones adicionales y otras no, las nuevas soluciones eficientes del problema $(JMO)_P(2,1)$ están en la frontera que generan las nuevas restricciones.

2.3. Si ninguna solución eficiente del problema $(JMO)_P(1,1)$ verifica las nuevas restricciones del problema $(JMO)_P(2,1)$, todas las soluciones eficentes de este problema están en la frontera que generan dichas restricciones.

3. Considerar el objetivo $P = (\alpha_3, \beta_1)$ y repetir el paso 2 con los problemas $(JMO)_P(2,1)$ y $(JMO)_P(3,1)$

Repitiendo el proceso de forma ordenada para todos los objetivos, se construye un procedimiento iterado mediante el cual se utiliza la información obtenida en el paso anterior (bases eficientes), para obtener las soluciones eficientes del nuevo problema.