UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 69-85
ISSN: 1815-0640

¿Perderse en un laberinto? No con las matemáticas

Isabel Hernández Fernández, Consuelo Mateos Contreras, Juan Núñez Valdés

"En el "Jardín de senderos que se bifurcan", Borges propone sin saberlo (no podría haberlo sabido) una solución a un problema de la física cuántica aún no resuelto."
A. Rojo (Universidad de Michigan)

Resumen

En este artículo se sugiere la posibilidad de introducir algunos temas de las Matemáticas de Secundaria o Bachillerato, como la Combinatoria o la Probabilidad, mediante la utilización de los laberintos. Para ello se define este concepto y se estudian sus principales tipos, comentándose también algunos aspectos básicos de la Teoría de Grafos que ayudan a entender mejor este concepto y que pueden ser aplicados en los diferentes métodos existentes de resolución de los mismos.

Abstract

In this paper, the possibility of introducing some topics of Mathematics in the Secondary level, like Combinatorics or Probability, by using the concept of labyrinth (or maze), is proposed. To do this, labyrinths are defined and their main types are shown. Some basic aspects of Graph Theory are studied to be used as a tool in the solving of a labyrinth.

Resumo

Neste artigo sugere-se a possibilidade de introduzir alguns temas das Matemáticas de Secundário ou Bacharelado, como a Combinatória ou a Probabilidade, mediante a utilização dos labirintos. Para isto se define este conceito e se estudam seus principais tipos, comentando-se também alguns aspectos básicos da Teoria de Grafos que ajudam a entender melhor este conceito e que podem ser aplicados nos diferentes métodos existentes de resolução dos mesmos

Introducción

El objetivo principal de este artículo es el de presentar el concepto de *laberinto* como herramienta a utilizar por el profesor de Matemáticas de Secundaria o Bachillerato en la introducción de determinados temas del currículo, como por ejemplo la Combinatoria o la Probabilidad (en España los alumnos de Secundaria tienen de 12 a 15 años, y los de Bachillerato, de 16 a 18).

Por definición, un *laberinto* no es más que una estructura formada por calles y encrucijadas, normalmente compleja, que intenta conseguir la confusión en quien en ella se adentra. El nombre de laberinto proviene del latín "*labyrinthus*" y del griego "*labýrinzos*". Sin embargo, la idea de laberinto que todo el mundo tiene difiere en parte con la definición original del mismo. Así, un laberinto, en el sentido clásico, llamado también laberinto *univiario*, es aquél en el que solo existe un único recorrido posible. En este tipo de laberintos no hay, por tanto, bifurcaciones y, podemos alcanzar sin pérdida el centro o final del laberinto desde su única entrada, recorriendo todo el espacio del mismo y, a través de una sola vía.

Sin embargo, cuando normalmente se piensa en un laberinto, siempre aparecen en nuestra cabeza caminos difíciles con bifurcaciones o vías cerradas que complican la llegada a la meta. Estos otros tipos de laberintos menos antiguos son los denominados *mazes o laberintos de caminos alternativos*. En ellos la elección de un camino u otro puede guiarnos hasta la salida o simplemente obligarnos a vagar por el mismo sin rumbo alguno. Es probable que si se indaga un poco en el tema, pueda descubrirse cómo en muchas ocasiones ambos términos son confundidos e incluso uno de los dos tipos anteriores suele ser normalmente incluido dentro del otro.

Nuestra intención entonces en este artículo es la de analizar los laberintos de mazes desde un punto de vista matemático para buscar posibles formas de resolución, enumerando los métodos que se conocen hasta el momento para alcanzar el final de estas misteriosas encrucijadas. Todo ello con el propósito, como ya se ha comentado, de facilitarle al profesor de Matemáticas de Secundaria o Bachillerato una herramienta para poder introducir determinados temas de la asignatura, como la Combinatoria o la Probabilidad, por ejemplo.

Para ello, se ha considerado conveniente estructurar el artículo como sigue: en la primera sección se comenta el origen de los laberintos y su simbología, dedicándose la segunda a recordar algunas leyendas y curiosidades sobre los mismos. En la tercera sección se muestran los diferentes tipos de laberintos existentes. La cuarta sección está dedicada a recordar algunos conceptos básicos de la Teoría de Grafos, fácilmente asumibles por los alumnos de los niveles anteriormente señalados (a pesar de que esta materia no se encuentra en su currículum), que consideramos necesarios para una adecuada comprensión de los métodos de resolución de los laberintos, que se exponen en la siguiente sección, la quinta, y que constituyen la parte esencial del artículo.

En la sección 6 se analiza la dificultad de salida de un laberinto, como paso previo a considerar los métodos de creación de un laberinto, que se muestran en la sección séptima. La última sección se dedica finalmente a comentar algunas aplicaciones de la utilización de los laberintos al estudio de la probabilidad.

1. El origen de los laberintos. Su simbología y usos.

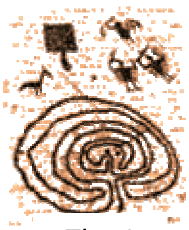
Fig. 1

Casi todas las personas han resuelto alguna vez algún laberinto como distracción o lo han podido observar en obras de arte, pinturas,… pero ¿sabemos realmente por qué surgieron? ¿Cuál fue el motivo por el que se empezaron a utilizar? O mejor, ¿conocemos todos los usos y simbolismos que han tenido desde la antigüedad? A continuación, veremos algunos ejemplos de estos significados.

El primer atisbo de laberinto apareció muy temprano. Data de la Edad de Bronce y pueden encontrarse algunos tallados en rocas en Pontevedra, así como también en Val Camonica, en Italia. En ocasiones, presenta un par de ojos dibujados en el centro como si de una cara se tratase.

Son muchos los laberintos hallados en cantos rodados y algunos en tumbas, pero los estudios que se conocen afirman que es difícil datarlos con exactitud.

Los laberintos, con sus caminos tortuosos, han simbolizado en muchas ocasiones, un reto que nos lleve hasta una meta. De ahí, que tuviesen un significado espiritual en muchas culturas. Así, para los cristianos, el laberinto mostraba el duro camino hasta Dios (véase el situado en el centro de la siguiente figura). Otros han sido usados en ceremonias, rituales y danzas, o para atrapar los malos espíritus. Se cree que en las enrevesadas calles de los laberintos deambulaban las almas de las personas fallecidas luchando por escaparse.

Algunos de ellos construidos en el campo servían para que los jóvenes compitieran entre ellos por alcanzar el centro, donde se hallaba una hermosa muchacha que los aceptaría. De estos laberintos construidos en la vegetación algunos de los más destacables se encuentran en Inglaterra.

Fig. 2: ejemplos de laberintos

En algunos pueblos y ciudades de la costa, como ocurre en Escandinavia, los pescadores recorrían los laberintos antes de salir a la mar para conseguir vientos favorables que garantizaran una buena pesca: pensaban que los malos vientos quedaban atrapados en el tortuoso interior del laberinto. Incluso, podemos encontrar referencias de cómo los pastores de Finlandia caminaban a través de los laberintos para protegerse de los malos espíritus, que los perseguían hasta el interior del mismo, pero que después eran incapaces de encontrar el camino de regreso al exterior.

Algunos laberintos han sido también hallados en la llanura de Nazca en Perú, en Brasil e incluso en México. Existen escritos sobre cómo los indios Hopi usaban los laberintos, a los que llamaban Tápu'at. Utilizaban dos versiones de ellos diferentes. En diferentes textos y en la propia red, pueden encontrarse bocetos de estos laberintos, como los que se muestran a continuación.

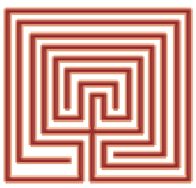

Fig. 3: laberinto del "Padre sol"

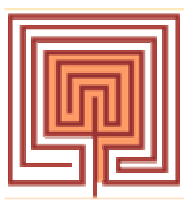

Fig. 4: laberinto del "Madre tierra"

Se cuenta que el de la izquierda del lector simboliza al "Padre Sol" encargado de dar vida, y sus caminos representan la senda que se ha de seguir. En él podemos observar cuatro finales de líneas que encarnan los 4 puntos cardinales. Por su parte, el de la derecha representa a la "Madre Tierra" y son dos laberintos uno dentro del otro. Simboliza a la madre con su hijo en el interior del útero y en sus brazos tras el nacimiento.

2. Algunas leyendas y curiosidades sobre los laberintos

El significado místico y, en ocasiones de misterio de los laberintos, ha dado lugar a la aparición de una serie de leyendas en torno a ellos. Indicamos a continuación algunas de ellas, así como también algunas curiosidades que pueden encontrarse sobre estas extrañas figuras:

Según una leyenda, en Knossos, ciudad de Creta en la que se encuentra el palacio del rey Minos, había un laberinto (el denominado *Laberinto de Creta*), que albergaba al legendario Minotauro [1]. De acuerdo con la Mitología, el Minotauro era un monstruo mitad humano mitad toro, hijo de Pasifae, esposa del rey Minos, que lo había tenido con un toro enviado por el dios Poseidón. A petición de Minos, el inventor Dédalo construyó este laberinto para encerrar al Minotauro. Más tarde, la enemistad de Dédalo con el rey haría que el segundo encerrase al primero en su propio laberinto, junto con su hijo Ícaro, aunque ambos consiguieron salir de él construyendo unas alas de cera y plumas. Más tarde, Teseo, hijo del rey Egeo, entró en el laberinto para matar al Minotauro, consiguiendo salir de él gracias a la ayuda de Ariadna, hija de Minos, quién le dio a Teseo un hilo (el conocido como *hilo de Ariadna*) con el que no perderse dentro del laberinto.

Otro de los laberintos de leyenda es el *Laberinto de Rosamunda,* uno de los más destacados que podemos encontrar en la arquitectura de Inglaterra [2]. La leyenda narra que fue construido por el Rey Enrique II para esconder a su amante, llamada Rosamunda la Bella. Leonor de Aquitania, la mujer del Rey fue capaz de encontrar a Rosamunda en el centro del laberinto, usando la misma técnica del hilo de Ariadna, obligándola después a tomarse un veneno. Con el tiempo, son muchos los escritores que han utilizado esta leyenda como inspiración y muchos los escritos que pueden encontrarse al respecto.

El laberinto de setos más importante de los Estados Unidos fue construido por los harmonistas (miembros de una secta protestante alemana que se trasladaron a Harmony, Indiana, a principios del siglo XIX). Lo construyeron para intentar simbolizar "el serpentear de la serpiente del pecado" y la dificultad que presenta continuar en el camino de la verdad, el camino de la fe verdadera.

Ciñéndonos a nuestro país, tenemos modelos de laberintos construidos en determinados jardines, como por ejemplo en los dos siguientes lugares:

- **El Parque del laberinto de Horta** en Barcelona: es un jardín histórico en el distrito de Horta-Guinardó de Barcelona, el más antiguo que se conserva en la ciudad. Ubicado en la antigua finca de la familia Desvalls, cerca de la sierra de Collserola, el parque incluye un jardín neoclásico del siglo XVIII y un jardín romántico del siglo XIX. En las siguientes imágenes podemos ver un plano del laberinto y una foto del jardín.

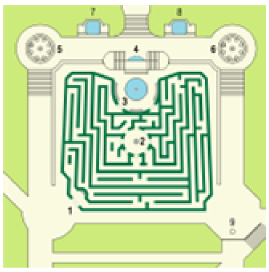

Fig. 5: imágenes del parque del laberinto de Horta

- **El Laberinto del Jardín “El Capricho”** en Madrid: este jardín es una de las joyas de los parques Madrileños, ubicado en las afueras de la ciudad. Su fundadora fue la duquesa de Osuna y es un buen ejemplo de jardín romántico español. En las siguientes imágenes podemos ver diferentes fotos del mismo.


Fig. 6: imágenes del parque del laberinto del Jardín “El Capricho”

Para terminar esta sección, y como curiosidades, mostramos a continuación algunos ejemplos de la utilización de los laberintos que se da hoy en día en algunas disciplinas, por ejemplo, en el campo de la psicología o en el diseño de ordenadores.

En el terreno de la psicología, los laberintos se han usado para estudiar el comportamiento de aprendizaje de los seres humanos y de los animales. Por ejemplo, a un gusano se le puede enseñar a recorrer el laberinto de un tenedor o a una hormiga a superar laberintos de hasta diez puntos de elección.

En cuanto al diseño de los ordenadores, los robots que manejan laberintos están programados para construir máquinas que aprovechan su experiencia. Uno de los más antiguos es Teseo, un robot creado por Claude E. Shannon para resolver laberintos, que se encuentra en el Instituto Tecnológico de Massachussets. Este robot recorre el laberinto sistemáticamente, de forma que cuando llega a un cruce para el que el ser humano tendría que escoger al azar, el robot elige el pasillo más cercano a un lado. Cuando el robot encuentra el camino, lo memoriza y es capaz de volverlo a recorrer sin errores (véase [3] para mayor información)

Veamos a continuación, algo más detalladamente, en la siguiente sección, qué tipos de laberintos son los actualmente conocidos e investigados.

3. Tipos de Laberintos

Mostramos a continuación una de las clasificaciones existentes sobre los laberintos. Esta clasificación atiende a la forma y estructura con la que los laberintos fueron construidos, mencionándose además algunos nombres de laberintos, que por sus peculiaridades, pueden considerarse como variantes en esta clasificación.

Esta clasificación es la siguiente:

- **Laberinto cretense**: Se trata de un laberinto del tipo univiario, normalmente en forma de ovoide y con una estructura muy sencilla, cuyo nombre proviene de la famosa leyenda del laberinto del Minotauro de Creta, ya comentada.

  

  El dibujo del supuesto laberinto podemos encontrarlo en algunas monedas de Cnosos del siglo III a.C., como la que se muestra en la figura:

Fig. 7: laberinto del cretense o también llamado de tipo 7 o clásico

- **Laberinto romano**: Es también un laberinto univiario. En sus orígenes tenía una forma cuadrada que se dividía en cuatro cuadrantes en torno al centro y final del laberinto. Con el tiempo, evolucionaría hasta otro formado por círculos, pero con una estructura similar a la original, en las que las distintas formas enmarcaban el centro.

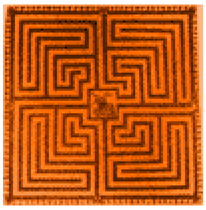

Fig. 8

Los romanos usaron y adaptaron el símbolo del laberinto, apareciendo en túnicas, aceras y multitud de pavimentos, pero éstos eran demasiado pequeños para ser recorridos a pie y sólo eran usados para ejercicios contemplativos.

- **Laberinto barroco**: Su estructura es mucho más compleja que la de los anteriores. Se trata de un laberinto de tipo maze, con caminos sin salidas y en el que sólo un camino pueda dar con el final o centro del laberinto.
- **Laberinto manierista (o de Mannerist)**: Tiene estructura de árbol con bifurcaciones en forma de Y. Además, todos los caminos conducen a un punto, salvo uno, que conduce a la salida.
- **Laberinto rizoma**: Es el que presenta infinitas ramificaciones. Es más, todas las calles pueden estar conectadas entre sí porque cada calle puede conectarse con cualquier otra y no tiene centro ni periferia.
- **Laberinto Hampton Court**: Este peculiar laberinto fue pensado para el palacio de Justicia de Hampton de Guillermo de Orange. Es un laberinto construido con setos (modelo de laberinto al que haremos referencia más tarde) y sin lugar a dudas, uno de los laberintos construidos con setos más importantes que pueden encontrarse en Inglaterra.

Fig. 9

- **Laberinto de Stolp**: Este laberinto univiario, construido en césped, lleva el nombre de una ciudad polaca. En ella, el gremio de zapateros lo recorría cada tres años en una celebración, danzando por el interior y por el exterior del mismo.

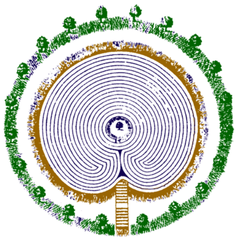

Fig. 10

- **Laberintos medievales**: Con un diseño complejo, estos laberintos presentan también un modelo univiario y eran usados en los suelos de las catedrales. En la Edad Media los laberintos constituían un símbolo de la fe cristiana mostrando el camino hacia la eterna salvación.

Muchos de ellos podemos encontrarlos en pavimentos como los que se muestran a continuación:

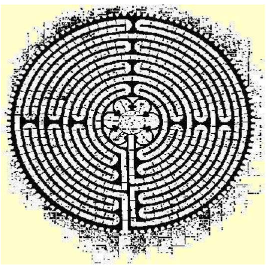
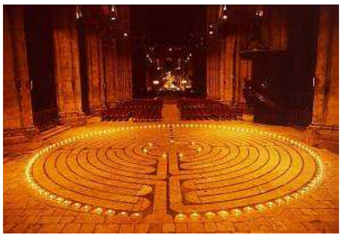

Fig. 11

- **Laberinto de Boughton Green**: Este laberinto es característico por su interior, en el que se ha sustituido el centro por una espectacular espiral. Fue construido en Inglaterra, en concreto en Northamptonshire, donde se celebraba un mercado anual en el que los lugareños recorrían el laberinto. Aunque actualmente ya no existe, un boceto del mismo es el que se observa en la figura.

Fig. 12

- **Laberinto de Altjessnitz**: Se trata de un laberinto de setos construido en Altjessnitz, Alemania. Su tamaño, de unos 50 metros, lo convierte en el más grande de Alemania. En el centro tiene una zona elevada desde la que se puede ver todo el laberinto y posee unos 200 recorridos diferentes para llegar al centro.

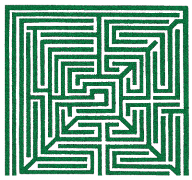

Fig. 13

- **Laberinto ruso o ciudad de Troya**: Con este nombre se designa a los laberintos ingleses y galos hechos en césped. Eran llamados de esta manera probablemente por el denominado Juego de Troya, una danza romana en honor del Eneas el troyano, antepasado del emperador Augusto. El que se muestra en la figura se encuentra tallado en una piedra en Visby, Suecia.

Fig. 14

- **Laberinto de St.Quentin y Amiens**: Estos dos laberintos presentan unas características muy similares. Ambos podemos encontrarlos en el pavimento de catedrales y simbolizan ese carácter espiritual de los caminos tortuosos.




Fig. 15: imágenes de la catedral de Chartres

- **Laberintos modernos**: En este tipo de laberintos todos los caminos están conectados y no poseen ciclos cerrados en su interior. Es un claro ejemplo de maze. Como ejemplo de uno de ellos, un jardín construido en 1913 en el interior del Alcázar de Sevilla.

Fig. 16

4. Algunos aspectos básicos de la Teoría de Grafos

En este punto se presenta un tema con el objeto de exponer los diferentes conceptos que se necesitan para resolver los laberintos matemáticamente, es decir, para encontrar métodos que permitan hallar sus salidas. Para ello, recordamos algunos conceptos básicos de la Teoría de Grafos.

Esta teoría nace en un lugar y una fecha muy determinados: la resolución del P*roblema de los puentes de Köningsberg*, en el año 1736, por el matemático suizo Leonhard Euler. Ha sido y es aplicada a diferentes campos, tanto científicos como sociales. Así, actualmente, se aplica al estudio de estructuras de datos, técnicas de clasificación, teoría de la codificación, inteligencia artificial, teoría de juegos y estrategias y problemas de optimización, por citar solo algunos ejemplos. Nosotros vamos a aplicarla en este trabajo a la resolución de los laberintos (para una visión más general y completa de esta teoría, así como de los conceptos que a continuación se relacionan, el lector puede consultar Gross, 2004).

- **Grafo:** un grafo G es un par ordenado G = (V, E), donde V es un conjunto de vértices o nodos (puntos), y E es un conjunto de líneas o aristas, que relacionan estos nodos.
- **Subgrafo de un grafo:** si G = (V, E) es un grafo, entonces G1 = (V1, E1) se dice subgrafo de G si V1 es un subconjunto de V, distinto del conjunto vacío y E1 es un subconjunto de E, donde cada arista de E1.
- **Grafo dirigido:** Un grafo dirigido o digrafo es un grafo G = (V,E) en el que $V \neq \phi$ y $E \subseteq \{(a,b) \in V \times V : a \neq b\}$es un conjunto de pares ordenados de elementos de V.

En un digrafo, dada una arista (a, b), a es su nodo inicial y b su nodo final. Es decir, cada arista tiene definido un sentido. En este tipo de grafo se pueden definir dos conceptos:

- **Grado de entrada de un vértice:** es el número de aristas que llegan a dicho vértice.
- **Grado de salida de un vértice:** es el número de aristas que salen de dicho vértice.

Otros conceptos básicos de esta teoría son los siguientes:

- **Camino en un grafo:** es una sucesión finita y alternada de vértices y aristas de dicho grafo. Los extremos del camino son el vértice inicial y el vértice final. Si éstos coinciden, diremos que el camino es cerrado.
- **Grafo conexo:** es un grafo en el que dados dos vértices cualesquiera, siempre existe al menos un camino que los une.
- **Ciclo:** es un camino cerrado de un grafo donde los únicos vértices repetidos son el primero y el último.
- **Camino euleriano:** es un camino o circuito del grafo que contiene todas las aristas, apareciendo cada una de éstas exactamente una vez. Un grafo que admite dicho circuito se denomina grafo euleriano.
- **Árbol:** es todo grafo conexo y sin ciclos.
- **Grafos equivalentes:** dos grafos se dicen equivalentes si pueden obtenerse uno del otro por medio de transformaciones en las aristas, del tipo de estirarlas o hacerlas más pequeñas, pero nunca cortarlas o unirlas.

5. Métodos de resolución de laberintos

En esta sección vamos a tratar de resolver los diferentes problemas que se pueden plantear en un laberinto, por medio de la aplicación de la Teoría de Grafos.

Por un lado, dado un laberinto, podemos entrar en él o bien partir de un punto concreto de su interior y tener que buscar la salida. En este caso, no tendremos que recorrer el laberinto completo, sino buscar un camino que nos lleve a la salida. Por otro lado, se nos puede pedir que encontremos un tesoro escondido en el laberinto, y que una vez encontrado, salgamos del mismo. Para este último tipo de problemas, tendremos que recorrer el laberinto entero para poder encontrar el tesoro y hallar después un camino hacia la salida. Todos estos problemas pueden ser resueltos de una manera sistemática, como a continuación se verá, utilizando las Matemáticas, y en concreto, la Teoría de Grafos.

Para ello, dado un laberinto, lo primero que debe hacerse es construir el *grafo asociado* a él, identificando cada pasillo del laberinto con una arista del grafo y sus cruces o encrucijadas con los vértices. Después, utilizando el grafo, resolveremos los problemas que se nos pueden presentar con un laberinto, es decir, en el primer caso, encontrar un camino desde el vértice en el que nos encontremos hasta el vértice salida; y en el segundo caso, encontrar un camino que recorra todos los vértices y aristas del grafo, es decir un camino euleriano.

Entonces, una vez construido el grafo correspondiente a un laberinto dado, vamos a ver los diferentes métodos que tenemos para recorrerlo de forma sistemática, bien para recorrer el laberinto completo, bien para hallar sólo la salida.

Primer método

Un primer método para recorrer un laberinto es desplazarse por sus pasillos eligiendo siempre el lado derecho o izquierdo. Es decir, siempre que lleguemos a una encrucijada o cruce optaremos por continuar por el camino de la derecha, si hemos escogido ceñirnos al lado de la derecha, o continuaremos por el camino de la izquierda, si hemos escogido ceñirnos a este lado. Este proceso lo haremos en todo el recorrido del laberinto, teniendo en cuenta, que una vez elegido un lado, siempre tendremos que escoger ese mismo. Utilizando este método, lograremos salir del laberinto, bien por donde hemos entrado o bien por una salida nueva.

Sin embargo, si lo que deseamos es recorrer el laberinto por completo, este método será adecuado o no, dependiendo del tipo de laberinto del que se trate. Veamos, si el laberinto que tenemos lleva a un grafo que no tenga ciclos, es decir, que se trate de un árbol, el laberinto se puede recorrer entero utilizando este método. Sin embargo, si el grafo tiene un ciclo, el laberinto no tiene por qué ser recorrido entero con este método, aunque lo que sí encontraremos será una salida.

Apliquemos esto al siguiente ejemplo:

Una vez dado este laberinto, lo primero que tenemos que hacer es construir el grafo asociado.

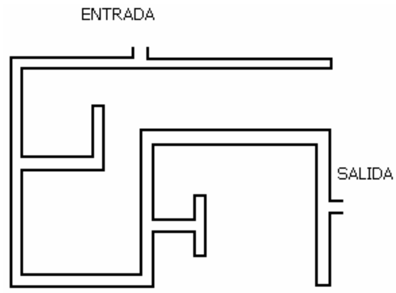

Fig. 17: ejemplo de laberinto

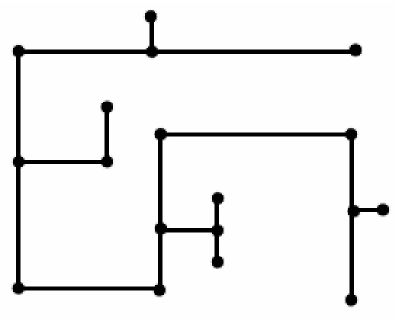

Fig. 18

Este es el grafo asociado al laberinto. Como podemos ver, este grafo tiene ciclos, es decir, no es un árbol. Por tanto, podemos aplicar el método de ceñirnos a un lateral, pero para hallar la salida, no para recorrer el laberinto por completo.

En el siguiente gráfico, se muestra cómo hemos de recorrer el laberinto, mediante este método:

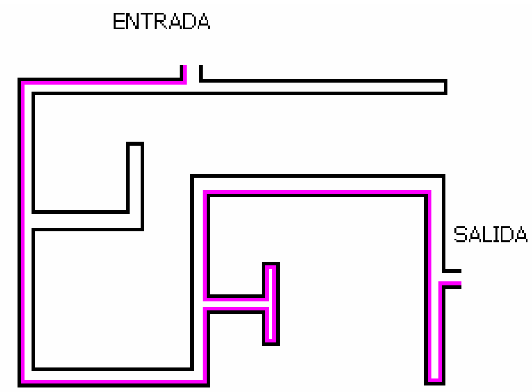

Fig. 19: Resolución del laberinto con el primer método

Segundo método

El siguiente método fue descrito por el matemático francés Gaston Tarry en 1895 [5] y sirve para explorar el laberinto por completo. Hay que tener en cuenta que para su aplicación, consideraremos que cada pasillo comienza y acaba en un cruce y que un cruce es un punto donde se encuentran más de un pasillo. Así, con este método recorreremos cada pasillo del laberinto dos veces, una vez en cada sentido.

Interpretando lo anterior en el grafo asociado a un laberinto, esto significa que si tenemos una arista formada por los vértices u y v, recorreremos la arista de u a v y también de v a u. Con esta consideración, podemos asignar al laberinto un grafo dirigido o digrafo formado por el procedimiento explicado al principio de esta sección salvo que ahora cada arista aparecerá dos veces, una en cada sentido.

Veamos entonces que de esta forma siempre se puede recorrer todo el laberinto. Recordamos que como ya se ha comentado antes, recorrer el laberinto por completo significa encontrar un camino euleriano en su digrafo asociado.

Para ello, apliquemos el siguiente resultado, válido para digrafos: *la condición necesaria y suficiente para que un digrafo posea un circuito euleriano es que sea conexo y que todo vértice posea el mismo grado de entrada que de salida.* Entonces, como todos los vértices de los digrafos asociados al laberinto poseen un número par de aristas incidentes en ellos, la mitad de entrada y la otra mitad de salida, siempre se cumple la condición del teorema y por lo tanto existe el camino euleriano, es decir, traduciendo el resultado a laberintos, cualquier laberinto se puede recorrer por completo.

Veamos a continuación el método dado por G. Terry y su justificación. Por el planteamiento hecho, cuando terminemos de recorrer todos los cruces del pasillo, salvo el de partida, tendremos que haber atravesado un número par de pasadizos, una vez cada uno en cada sentido, de tal forma que hemos recorrido cada arista en ambos sentidos; aplicando esto a cada cruce, una vez que llegamos a uno de ellos, el número de aristas recorridas hacia dentro excede en una unidad al número de las recorridas hacia fuera. Si, en estas condiciones hay un único pasillo que ha sido recorrido una vez, éste es por el que hemos encontrado por primera vez dicho cruce, ya que el resto o han sido recorridos en ambos sentidos o permanecen inexplorados.

Por tanto, deberíamos volver por dicho pasillo si todos hubieran sido ya explorados. Aplicando estas condiciones, veamos las tres reglas que forman este método:

- ✓ Cada vez que entremos en un pasillo dejaremos dos marcas en la entrada del mismo.
- ✓ Cada vez que salgamos de un pasillo, al llegar a un cruce dejaremos una marca si dicho cruce ya ha sido visitado o una marca señalada de forma diferente si es la primera vez que hemos llegado a él.
- ✓ Para salir de un cruce, escogeremos los pasillos que estén inexplorados o que sólo se hayan explorado en un sentido, escogiendo como último recurso el pasillo por el que llegamos al cruce por primera vez.

De esta forma recorreremos el laberinto por completo, saliendo de él habiendo hecho tres marcas en cada extremo de cada pasillo, lo que demuestra que recorremos cada pasillo dos veces, una en cada sentido.

Aplicando estas reglas, se pueden efectuar diferentes exploraciones de un mismo laberinto, ya que una vez llegado a un cruce tenemos tres alternativas: explorar un nuevo pasillo, coger uno que ya haya sido explorado en un sentido o volver por el que hemos llegado.

Veamos esta aplicación con un ejemplo:

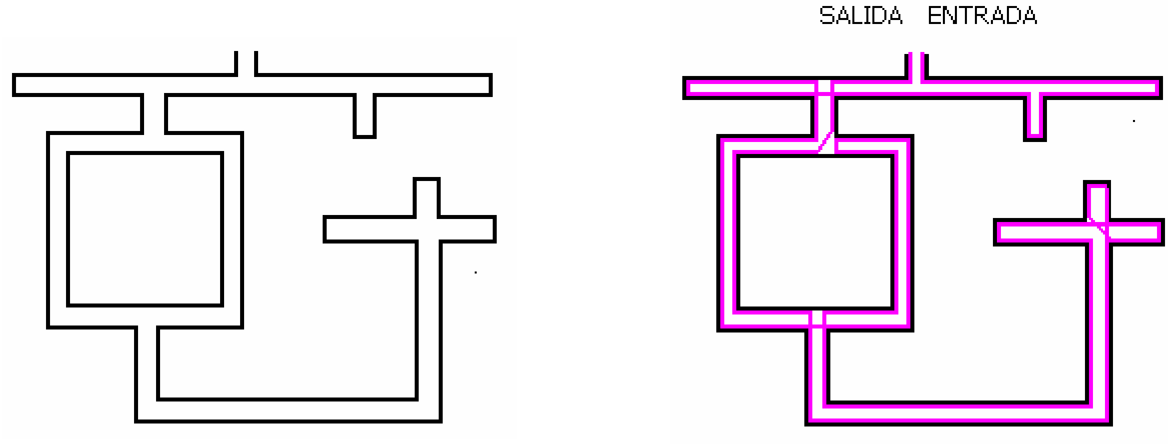

Fig. 20: laberinto y su resolución

Tercer método

Este método fue inventado por el ingeniero francés Trémeaux, en la misma época que el anterior, y redactado por el matemático E. Lucas en el primer tomo de sus Récréations Mathématiques [5].

La base de este método es la misma que la del anterior, es decir partimos de un digrafo y hay que recorrer todas las aristas. Lo único que cambian son las reglas:

- ✓ Desde el punto de partida, se toma el camino que queramos. Si se llega a un punto sin salida, se retrocede por el pasillo ya recorrido. Si se llega a un cruce, se toma otro camino cualquiera, no explorado.
- ✓ Si se llega a un cruce ya explorado, pero por una nueva vía, se retrocede por el pasillo al que se ha llegado a ese cruce hasta recorrerlo de nuevo al completo, pero en el sentido contrario.
- ✓ Si se llega a un cruce ya explorado y por un pasillo ya recorrido en ambos sentidos, se elige en primer lugar, un pasillo nuevo, y si no se pudiese, se escoge un pasillo ya explorado en un sentido.

Veamos este método aplicándolo al mismo laberinto que el método anterior:

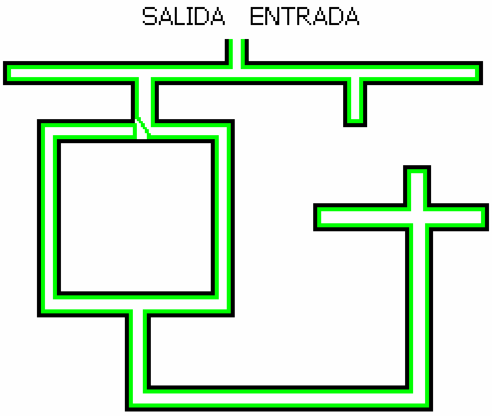

Fig. 21: resolución del laberinto
anterior por el tercer método

Cuarto método

Este método sirve para explorar el laberinto por completo, aunque se recorren la mayoría de los pasillos más de una vez, siendo además bastante largo de aplicar. Fue diseñado por el matemático americano Oysten Ore. Se basa en el conocimiento en todo el laberinto de la *distancia* entre donde uno se encuentra y el punto de partida, dada por el número de pasillos que hay entre los dos puntos.

Para empezar, se marca el punto de partida con un 0 y se exploran todos los pasillos que parten del origen y llegan al primer cruce, es decir, todos los que están a distancia 1. Después, se vuelve hacia atrás, marcando los cruces con un 1 y señalando el principio y final de los pasillos por los que ya se ha pasado, añadiendo una cruz cuando el pasillo no tenga salida.

En la siguiente etapa, se exploran todos los pasillos que se inician en los cruces 1 hasta llegar a los cruces 2 realizando el mismo proceso que el anterior. Se vuelve hacia atrás y se realiza el mismo proceso, explorando todos los niveles hasta recorrer el laberinto por completo (teniendo en cuenta que lo estamos recorriendo por niveles, es decir midiendo la distancia al punto de partida, que consiste en contar los pasillos que los unen).

Como puede observarse, este método es fácil de aplicar, pero resulta bastante largo, ya que se recorren los mismos pasillos bastantes veces.

Seguidamente, una vez ya descritos los diferentes métodos de resolución de un laberinto, vamos a explicar cómo puede definirse el concepto de *dificultad* de un laberinto para salir de él.

6. Dificultad de un laberinto

En esta sección se trata de definir una medida que mida *la dificultad de salir de un laberinto*, aunque no sea por el camino más corto, es decir, la dificultad de encontrar un camino que nos lleve a la salida, sea éste cual sea.

Para ello, veamos primero qué condiciones debe de cumplir esta medida.

- C1: La dificultad de un laberinto es un número real mayor o igual que cero.
- C2: La dificultad del laberinto trivial es cero, entendiendo como laberinto trivial aquél que está formado por la entrada, la salida y el pasillo que los une.
- C3: Si los grafos asociados a dos laberintos son dos grafos equivalentes, entonces tienen la misma dificultad (en Teoría de Grafos, esta condición significa que la dificultad es un invariante topológico).
- C4: Si el grafo asociado a un laberinto A se obtiene agregando vértices a lo largo de una de las aristas del grafo asociado a un laberinto B, entonces los laberintos A y B tienen la misma dificultad.
- C5: Sean A y B dos laberintos. La dificultad de A+B, entendiendo la suma de laberintos como el laberinto que se obtiene fusionando la salida del laberinto A con la entrada del B, es mayor o igual que la suma de la dificultad de A más la dificultad de B.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que la dificultad de un laberinto no es un concepto objetivo, ya que depende de la persona que intente resolverlo, de sus conocimientos y capacidades. Por tanto si se desea plantear una medida consistente, se deben establecer además unas reglas, relacionadas con las capacidades y habilidades del jugador. Éstas son las siguientes:

- R1 (Regla de no retroceso): Cuando se llega a un cruce, no se retrocederá por el pasillo por el que se acaba de llegar, a menos que esto sea inevitable.
- R2 (Regla del subgrafo): Si se ha recorrido completamente un subgrafo del grafo asociado a un laberinto sin encontrar la salida, entonces ya no se volverá a entrar en ese subgrafo.
- R3 (Regla de no repetición): Si se llega a un cruce ya visitado, se escoge un pasillo que no haya sido recorrido antes, si es posible. Si no, se aplican las reglas anteriores. Por último, si no hay ninguna regla que determine el pasillo a escoger, se elige al azar.

También hay que tener en cuenta que sólo se puede ver el sitio donde uno se encuentra, es decir, no se puede ver el final del pasillo donde uno se encuentra, hasta salir de él y llegar a un cruce.

Estas reglas anteriores pueden ampliarse sabiendo que unas no deben oponerse a las otras y también, que si se permitiera ver más allá, si encontramos la salida debemos dirigirnos a ella por el camino más corto.

Señalar entonces, por último, que la medida de dificultad de un laberinto dependerá del conjunto de reglas que se defina, es decir, que se está definiendo una medida de dificultad relativa a un conjunto de reglas dadas. Teniendo en cuenta esto último, se deben imponer tres condiciones más:

- C1: Las reglas se enuncian en función del conocimiento de la persona que resuelve el laberinto.
- C2: Existe al menos un camino en el laberinto que nos lleva a la salida y que cumple todas las reglas.
- C3: Sean S y R dos conjuntos de reglas. Si R está contenido en S, entonces la dificultad relativa a R es mayor o igual que la relativa a S.

En nuestro caso, supondremos que nuestro conjunto de reglas está constituido por las siguientes: regla de no retroceso, regla del subgrafo, regla de no repetición y que además sólo podremos ver el sitio en el que nos encontramos. Definamos entonces la medida:

Cuando se recorre un laberinto, hay cruces en los que se debe elegir el pasillo por el que continuar al azar. Por tanto, cada recorrido de un laberinto tiene una cantidad de decisiones al azar. Además, por tener que elegir al azar entre unas cuantas opciones, cada recorrido tiene una probabilidad de ocurrir asociada. Proponemos entonces como medida el número esperado de decisiones, es decir, para cada recorrido posible se calcula el producto de la probabilidad de ese recorrido por la cantidad de decisiones tomadas para realizarlo y se suman todos los valores obtenidos. Esta sería la medida de la dificultad de un laberinto.

Puede comprobarse que esta medida así definida cumple todas las condiciones propuestas. Veamos algunas de ellas:

1. La medida es mayor o igual que cero ya que sumamos términos positivos, al ser el número de decisiones y la probabilidad de que suceda números mayores o iguales que cero y por tanto su producto es mayor o igual que cero.
2. El laberinto trivial tiene medida cero, ya que hay un único recorrido. Por ello, la probabilidad es 1 y se toman 0 decisiones.
3. La medida es un invariante (topológico), ya que da igual que los pasillos cambien de longitud o forma, puesto que ello no implica más decisiones ni varía la probabilidad, dado que una vez entramos en un pasillo, tenemos que recorrerlo por completo, sea como sea, hasta llegar al siguiente cruce, que es donde podemos escoger.
4. Añadir nodos no cambia la medida, puesto que no tenemos que elegir porque las opciones son las mismas. En este caso el nodo añadido no representa un cruce, luego no cambia la medida por cómo está definida ésta.

Finalmente, podríamos seguir aplicando esta definición de medida a las diferentes condiciones impuestas, para comprobar que está bien definida.

7. Creación de laberintos

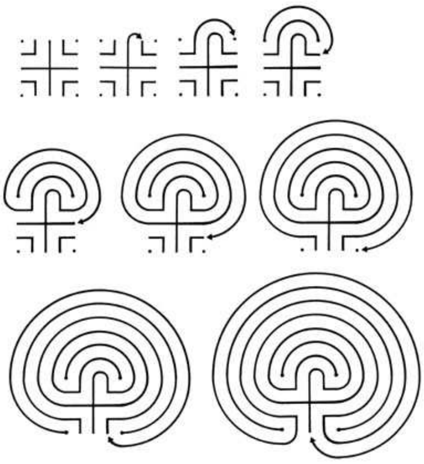

Fig. 22, ejemplo construcción

Dos son básicamente las formas de crear laberintos:

F1: Añadir paredes. Consiste en comenzar con un espacio vacío o rodeado de una pared e ir añadiendo bloques. Un ejemplo de esto son los laberintos de setos.

F2: Perforar caminos. Se parte de un espacio con un bloque sólido y se van perforando caminos.

No obstante, es posible, lógicamente, crear laberintos combinando ambas técnicas. Mostramos a continuación un ejemplo de creación de un laberinto, viendo cómo se forman algunos pasos intermedios. El resto de la construcción es análogo.

8. Posible aplicación de los laberintos como herramienta en la introducción de algunos temas de Secundaria y/o Bachillerato

Como ya se ha comentado en la Introducción, los autores pensamos que el concepto de laberinto puede ser utilizado como herramienta por el profesor de Matemáticas de Secundaria y/o Bachillerato para introducir todos aquellos temas del currículo de su asignatura que estén relacionados de una forma más o menos directa con la Matemática Discreta, como pueden ser los dedicados a Combinatoria o Probabilidad, fundamentalmente.

La forma de utilizar esta herramienta ya sí es verdad que puede ser totalmente subjetiva, dependiendo lógicamente de la mayor o menor profundidad con la que se desee emplear, del nivel de comprensión de los alumnos, del tiempo del que se pueda disponer para ello, etc.

En cualquier caso, pensamos que una pequeña introducción de lo que se entiende por laberinto, de sus diferentes tipos y de la manera de resolverlos sería especialmente bienvenida por los alumnos y ayudaría a aumentar su motivación para el tratamiento particular de los temas antes citados, en sus aspectos discretos, como pudieran ser, por ejemplo en Combinatoria, el tipo de grupos que se deseen formar, asimilando esta cuestión con el número de bifurcaciones posibles en una etapa del laberinto, la importancia del hecho de que los elementos que formen esos grupos estén ordenados o no, que puede ser reflejada en la opción de elegir un sentido del recorrido del laberinto, la posibilidad de repetición de elementos en cada grupo, idealizada por el poder pasar o no varias veces por un mismo camino, etc.

También, para conseguir una mayor motivación del alumno a la hora de afrontar las explicaciones del profesor, pensamos que la descripción y referencias históricas comentadas sobre los laberintos pueden bastar para llevar adelante este planteamiento.

Además de las aplicaciones mencionadas anteriormente, veamos una última que relaciona los laberintos con la probabilidad a través del análisis de los diferentes caminos existentes en él.

Supongamos que nos encontramos resolviendo un laberinto y llegamos a una encrucijada en la que se nos plantean tres posibles caminos, como puede observarse en la figura.

La probabilidad de elección de uno de esos caminos es, evidentemente, 1/3.

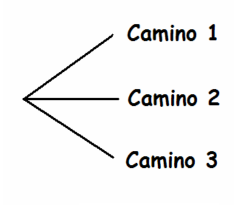

Fig. 22

Si seguimos resolviendo el laberinto nos encontraremos ante nuevas elecciones de caminos, de tal modo que el esquema en forma de árbol se irá complicando, apareciendo por ejemplo, una figura como la que se muestra de la izquierda.

La probabilidad del camino que nos conduce a la salida será entonces $P[salida] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$.

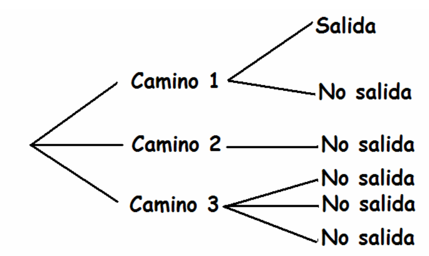

Fig. 23

Pero este sencillo razonamiento puede llevarse a cabo a través de laberintos concretos como puede ser el de Hampton Court. A este laberinto se le han realizado algunas modificaciones, en este caso, para convertirlo en un laberinto barroco (en el que sólo una de las vías nos conduce a la salida).

Las siguientes figuras muestran el laberinto y el camino de resolución.

Fig. 24, laberinto de Hampton Court modificado

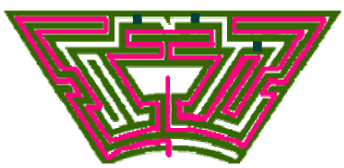

Fig. 25, caminos del laberinto anterior

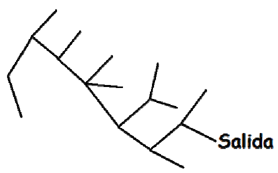

Fig. 26, diferentes caminos del laberinto

Traduciendo las distintas encrucijadas en ramas de nuestro árbol, de la misma manera que hemos hecho anteriormente, y analizando el camino a la salida, puede observarse que la probabilidad es $P[salida] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

Este mismo razonamiento puede utilizarse con otros laberintos más complicados o llamativos, basta para ello tener en cuenta sólo dos condiciones:

- ✓ Los caminos que nos conducen a la salida no pueden estar conectados entre sí, para no complicar en exceso la resolución.
- ✓ Una vez elegida una vía, no habrá posibilidad de retroceder.

Referencias

Gross, J. L.; Yellen, J. (2004): *Handbook of the Graph Theory*. CRC Press.
[1] http://www.labyrinthos.net/ (sobre clasificación de los laberintos).
[2] http://www.ehu.es/francoiradi/LABERINTOS/labe_02.htm (sobre el laberinto de Rosamunda).
[3] http://es.wikipedia.org/wiki/Claude_Elwood_Shannon (sobre robots que manejan laberintos).
[4] http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Tarry.html (sobre la vida y obra del matemático Gaston Tarry).
[5] http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%89douard_Lucas (sobre la vida y obra del matemático E. Lucas).

Isabel Hernández Fernández, nacida en Huelva el 18 de Enero de 1985, es licenciada en Matemáticas por la Universidad de Sevilla (2003-2008). Investiga en Teoría de Lie, habiendo publicado algunos artículos al respecto, así como también tiene varias publicaciones en Matemáticas Recreativas y Divulgativas, en las que está muy interesada. **isa_hdez_fdez@hotmail.com**

Consuelo Mateos Contreras, nacida en Cádiz el 16 de Enero de 1985, es licenciada en Matemáticas por la Universidad de Sevilla (2003-2008). Investiga en Teoría de Lie, habiendo publicado algunos artículos al respecto, así como también tiene varias publicaciones en Matemáticas Recreativas y Divulgativas, en las que está muy interesada. **conmatcon@gmail.es**

Juan Núñez Valdés, nacido en Sevilla en 1952, es Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla, en la que trabaja actualmente como Profesor Titular del Dpto. de Geometría y Topología, con sede en la Facultad de Matemáticas. Su principal línea de investigación son los grupos y álgebras de Lie, habiendo publicado varios artículos sobre los mismos en diferentes revistas de impacto. Pertenece como vocal a la Junta Directiva de la Delegación Provincial de Sevilla de la S.A.E.M. THALES, siendo autor de varias publicaciones sobre Matemáticas Recreativas y Divulgativas, así como también sobre Historia de las Matemáticas. **jnvaldes@us.es**