



FACULTAD DE TURISMO Y FINANZAS

GRADO EN FINANZAS Y CONTABILIDAD

UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO DEL DAX 30

Trabajo Fin de Grado presentado por José Burgos Escribano, siendo el tutor del mismo el profesor José Manuel Gavilán Ruiz.

Vº. Bº. del Tutor

Alumno:

D. José Manuel Gavilán Ruiz

D. José Burgos Escribano

Sevilla. Mayo de 2015



**GRADO EN FINANZAS Y CONTABILIDAD
FACULTAD DE TURISMO Y FINANZAS**

**TRABAJO FIN DE GRADO
CURSO ACADÉMICO [2014-2015]**

**TÍTULO:
UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO DEL DAX 30**

**AUTOR:
JOSÉ BURGOS ESCRIBANO**

**TUTOR:
D. JOSÉ MANUEL GAVILÁN RUIZ**

**DEPARTAMENTO:
ECONOMÍA APLICADA I**

**ÁREA DE CONOCIMIENTO:
MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA**

RESUMEN:

En este trabajo se analizan algunas de las premisas básicas que establece el modelo de Black-Scholes para la evolución temporal de los precios de un activo financiero, concretamente del DAX 30. Principalmente, se analiza el ajuste de los logreturns del DAX 30 con la distribución Normal, su agregación gaussiana y su independencia. Además, se propone como alternativa una distribución más precisa y flexible, la distribución Normal Inversa Gaussiana. Para realizar los cálculos y gráficas necesarias, se utiliza el software estadístico R.

PALABRAS CLAVE:

Modelo de Black-Scholes; logreturns; Normal; Normal Inversa Gaussiana; software R.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	1
2. EL DAX 30	1
3. EL MODELO DE BLACK-SCHOLES.....	5
3.1. INTRODUCCIÓN	5
3.2. MOVIMIENTO BROWNIANO	6
3.2.1. Historia: origen y autores.....	7
3.2.2. Marco teórico: características y modelos matemáticos.....	7
3.2.3. Simulación del movimiento browniano.....	8
4. DATOS EMPÍRICOS DEL DAX 30.....	9
5. AGREGACIÓN GAUSSIANA	10
5.1. TEST DE NORMALIDAD.....	11
5.1.1. Contraste de Kolmogórov-Smirnov (Corrección de Lilliefors)	11
6. COLAS PESADAS	12
6.1. VALUE AT RISK.....	12
6.2. DENSIDADES EN ESCALA LOGARÍTMICA	13
7. MEDIDAS DE FORMA	13
7.1. ASIMETRÍA.....	13
7.2. CURTOSIS.....	14
7.3. TEST JARQUE-BERA.....	15
8. AUTOCORRELACIONES	16
9. ALTERNATIVA PARA EL MODELO BLACK-SCHOLES: NORMAL INVERSA GAUSSIANA..	18
9.1. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL INVERSA GAUSSIANA	18
9.2. ESTIMACIÓN DE LA NORMAL INVERSA GAUSSIANA.....	20
10. CONCLUSIONES.....	23
Bibliografía	25
Anexo.....	27

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, aparecen cada vez más modelos para predecir el futuro en muchos campos. Entre todos ellos, los más utilizados son aquellos para predecir fenómenos naturales como el tiempo, terremotos, etc. Estos modelos están muy presentes en los mercados financieros, ya que permiten predecir el movimiento futuro de los precios y obtener grandes beneficios de ello.

Uno de estos modelos, es el de Black-Scholes. Aunque está diseñado para la valoración de opciones europeas, existen diversas adaptaciones para valorar otros productos financieros.

Los **objetivos principales** del presente trabajo son analizar algunas características del modelo de Black-Scholes, medir la validez de éste para la modelización del DAX 30 y compararlo con un modelo alternativo que puede modelizar las variaciones en los precios más adecuadamente.

Para cumplir los objetivos, y utilizando el software estadístico R, se han llevado a cabo las siguientes **acciones**: estimación de los parámetros de la distribución Normal y Normal Inversa Gaussiana (NIG) ajustada a los logreturns del DAX 30, simulación del movimiento browniano estándar, representación gráfica de las densidades de los logreturns del DAX 30, de la Normal y de la NIG, así como las mismas en escala logarítmica, test de normalidad, cálculo de las medidas de forma y análisis de las autocorrelaciones.

La **organización** del trabajo es como sigue: la primera sección contiene la introducción. En la segunda, se exponen la composición, la fórmula de cálculo y algunos datos históricos del DAX 30. En la tercera, se introduce el modelo de Black-Scholes y se analiza la premisa relacionada con el movimiento browniano, realizando una simulación del mismo. En la cuarta, se representan datos empíricos del DAX 30 y se obtienen parámetros descriptivos de interés. En la quinta, se expone el fenómeno de la agregación gaussiana y se realiza un test de normalidad. En la sexta, se analiza la subestimación de las colas pesadas por parte de la distribución Normal. En la séptima, se estudian las medidas de forma (asimetría y curtosis) y se realiza un test para comprobar el ajuste de éstas con la distribución Normal. En la octava, se utilizan las autocorrelaciones para comprobar la dependencia entre los logreturns del DAX 30. En la novena, se expone una alternativa para el modelo de Black-Scholes, la NIG, y se compara con éste. En la décima, se exponen de forma resumida las conclusiones extraídas del estudio realizado. Por último, se incluye la bibliografía utilizada para la elaboración del trabajo, así como un anexo con las líneas de código introducidas en el software estadístico R para los cálculos y gráficas realizadas a lo largo del trabajo.

2. EL DAX 30

El DAX (*Deutscher Aktienindex*) es el índice de referencia de la Bolsa de Fráncfort, así como el más importante de la Bolsa Alemana. Está compuesto por las 30 empresas alemanas más grandes en términos de capitalización y volumen de negocio. También se le conoce como DAX 30 o DAX XETRA.

Las 30 acciones contenidas en el índice representan en torno al 80% de la capitalización del mercado alemán. En él están representados todos los sectores con influencia en la economía del país, como, por ejemplo, la industria de la construcción, del automóvil, bancos, sector tecnológico y sector de servicios. Además, el DAX 30 fue diseñado desde un principio para ser utilizado como subyacente de productos financieros.

La plataforma electrónica de negociación de la Bolsa de Alemania es el XETRA. En ella se negocia más del 90% del volumen de los valores bursátiles del país. Además de acciones, también se negocian todo tipo de derivados a través de esta plataforma.

El DAX 30 es un índice largo con base 1000 el 30 de diciembre de 1987, lo que quiere decir que se fijó su base en esa fecha y desde ese momento puede considerarse su evolución histórica.

Para la formulación o expresión matemática de cálculo del índice se utiliza la fórmula de Laspeyres, que mide los cambios de precios frente a una base fija:

$$DAX_t = K_T \cdot \frac{\sum p_{it} \cdot ff_{iT} \cdot q_{iT} \cdot c_{it}}{\sum p_{i0} \cdot q_{i0}} \cdot Base$$

donde:

- t es el momento en que se calcula el índice,
- T es el momento en el que se hacen ajustes (momento del último encadenamiento),
- K_t es el factor que permite encadenar los tiempos T y t ,
- p_{it} es el precio de la acción i en el momento t ,
- ff_{iT} es el capital flotante de la acción i en el momento T ,
- q_{iT} es el número de acciones de la compañía i en el momento T ,
- c_{it} es el factor de ajuste de la compañía i en el momento T (por ampliaciones o reducciones de capital, dividendos, etc),
- p_{i0} es el precio de cierre de la acción i en el día de negociación siguiente a la primera inclusión en el índice,
- q_{i0} es el número de acciones de la compañía i en el día de negociación siguiente a la primera inclusión en el índice
- $Base$ del índice es, en nuestro caso, 1000.

Aunque existen valores históricos del DAX 30 desde el 28 de septiembre de 1959, su evolución histórica se considera a partir del 30 de diciembre de 1987. La mayor subida diaria del índice se produjo el 13 de octubre de 2008, cuando subió un 11,40% (518,14 puntos) tras la aprobación de un plan de rescate por parte de la zona euro para desbloquear el sistema financiero. Sin embargo, durante la semana anterior (del 6 al 10 de octubre de 2008) acumuló una caída de 1.252,72 puntos debido a la inestabilidad del sistema financiero y a la crisis desatada por la quiebra de *Lehman Brothers*.

Desde su creación hasta el año 2000, el DAX 30 experimentó una lenta y continua subida, pero desde ese año y hasta el 2003 sufrió una fuerte caída debido a la crisis tecnológica (burbuja "puntocom"). A partir de entonces, comenzó un ascenso progresivo que finalizó en 2008, con la llamada crisis de las hipotecas *subprime*. A partir de 2009, se produce una subida en la que se encuentra inmerso actualmente, marcando máximos históricos en 2015 por encima de los 12.300 puntos (ver Figura 3).

En la Figura 1 se puede ver la composición del DAX 30 por sectores, así como el peso de cada uno de ellos dentro del índice a 30 de enero de 2015.

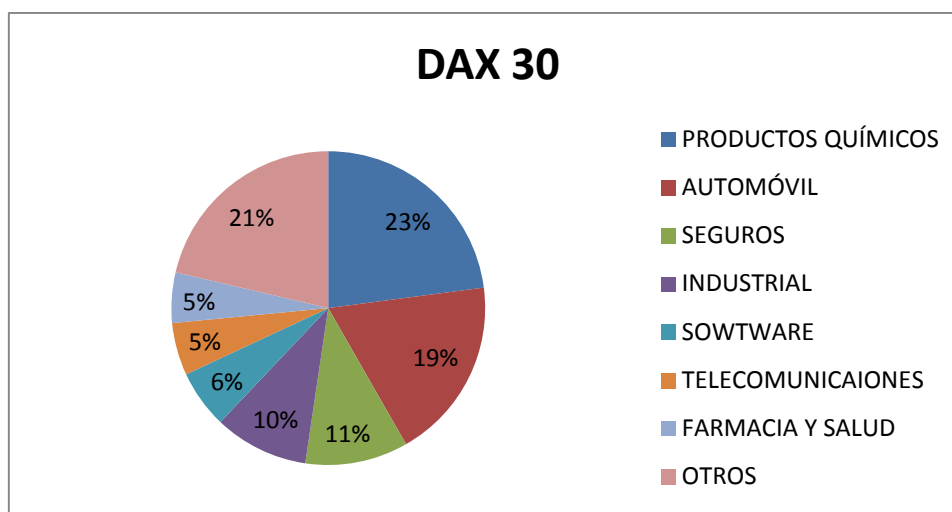


Figura 1. Composición del DAX 30 por sectores.

Fuente: Elaboración propia a partir de dax-indices.com.

En la Tabla 1 se muestran los componentes del DAX 30, así como su último precio, capitalización y el peso de cada uno de los valores dentro del índice a fecha 27 de febrero de 2015.

	ÚLTIMO PRECIO (€)	CAPITALIZACIÓN (millones de €)	PESO (%)
ADIDAS	69,430	14.525,88	1,4672%
ALLIANZ	149,600	68.292,40	7,7838%
BASF SE	85,650	78.667,70	7,9113%
BAYER	113,000	68.025,46	3,5756%
BEIERSDORF	132,050	95.066,35	10,1687%
BMW	77,630	19.562,76	0,8394%
COMMERZBANK	12,055	13.724,70	1,2733%
CONTINENTAL	213,300	42.661,28	2,3230%
DAIMLER	86,510	92.551,64	8,5255%
DEUTSCHE BANK	29,375	40.516,15	4,0208%
DEUTSCHE BOERSE	72,900	14.069,70	1,3511%
DEUTSCHE LUFTHANSA	30,430	36.810,34	3,1718%
DEUTSCHE POST	16,670	75.607,97	5,1105%
DEUTSCHE TELEKOM	14,445	28.904,45	3,4358%
E.ON	73,170	22.702,88	1,6196%
FRESENIUS MED.CARE	51,180	27.673,06	2,0882%
FRESENIUS SE	71,130	13.366,50	1,0053%
HEIDELBERGCEMENT	105,850	18.858,54	1,9274%
HENKEL	10,345	11.666,18	1,1984%
INFINEON TECHNO N	28,825	5.517,11	0,5059%
K+S AG NOM.	46,035	4.213,26	0,4337%
LANXESS	181,800	33.766,29	3,2468%
LINDE	13,100	6.040,08	0,7732%
MERCK KGAA	92,200	11.916,14	1,2551%
MUNICH RE	185,500	32.080,86	3,1181%
RWE	24,985	14.385,00	1,5701%
SAP	62,840	77.199,21	6,5700%
SIEMENS	99,820	87.941,42	9,0480%
THYSSENKRUPP	23,790	13.463,66	1,1428%
VOLKSWAGEN AG VZO	225,500	40.734,65	3,5396%

Tabla 1. Precios, capitalización y peso de las acciones del DAX 30 a 27/02/2015.

Fuente: dax-indices.com.

3. EL MODELO DE BLACK-SCHOLES

3.1. INTRODUCCIÓN

La industria financiera se encuentra en continuo desarrollo y cada vez gana más importancia en los mercados mundiales, lo que ha llevado a la introducción de métodos matemáticos y estadísticos para valorar los productos financieros. Estos productos pueden ser acciones, bonos, divisas y derivados (opciones, futuros, *swaps*, etc), entre otros. La oferta es cada vez más amplia y los productos más complejos, por lo que, mediante la aplicación de los anteriores métodos, se consigue una valoración más fiable y correcta de cada uno de ellos.

Dentro de los derivados, nos centraremos en las opciones, que son un contrato en el que el comprador adquiere el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un activo (subyacente) a un precio determinado y en una fecha futura, mientras que el vendedor adquiere la obligación de vender cuando el comprador ejerce su derecho. Las opciones europeas son aquellas que sólo pueden ejercerse al vencimiento, mientras que las opciones americanas pueden ejercerse en cualquier momento antes del vencimiento. El precio al que el comprador puede comprar o vender en el futuro el activo subyacente se denomina precio del ejercicio o *strike*.

En 1973, el economista estadounidense Robert C. Merton publicó la fórmula de Black-Scholes, apoyándose en los modelos estocásticos de los economistas Fischer Black y Myron Scholes. La idea clave del modelo es valorar el precio de opciones europeas para la compra (*call*) o venta (*put*) de acciones en una fecha futura. El modelo se convirtió en una referencia para la valoración de opciones en los mercados financieros y, por ello, Merton y Scholes recibieron en 1997 el Premio Nobel de Economía. Fischer Black, fallecido en 1995, recibió el reconocimiento póstumo por su trabajo por parte del jurado del Premio Nobel del 97.

El componente probabilístico del modelo está basado en la distribución teórica de las variaciones en la cotización del activo subyacente entre períodos de tiempo (diarios, mensuales, trimestrales, etc). Lo que hace la distribución teórica es suponer qué modelo sigue la distribución de las variaciones de las cotizaciones. Este modelo, se denomina movimiento browniano y se basa en la distribución normal. La fórmula de Black-Scholes para opciones de compra (*call*) y venta (*put*) es la siguiente:

$$\begin{aligned} Call &= SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \\ Put &= -SN(-d_1) + Ke^{-rT}N(-d_2) \end{aligned}$$

donde:

- S es el precio del activo subyacente en el momento en que se realiza la valoración,
- N es la distribución Normal Acumulada,
- K es el precio del ejercicio o *strike*,
- r es la tasa de interés libre de riesgo,
- T es el tiempo desde el momento de la valoración hasta el vencimiento del contrato,
- d_1 y d_2 son calculados como:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

donde σ es la volatilidad (desviación típica).

El desarrollo de este trabajo girará en torno a la variable N , ya que es la que proporciona al modelo de Black-Scholes la definición matemática de las probabilidades de las variaciones de la cotización.

Lo que hace el modelo es proyectar el precio actual del activo subyacente al vencimiento, considerando el tipo de interés libre de riesgo y la volatilidad implícita, lo que permite definir las cotas máximas y mínimas esperadas de las variaciones del subyacente (y por tanto del propio precio del subyacente). El valor de la opción, según se trate de una *call* o de una *put* dependerá de la diferencia entre alguna de esas cotas y el *strike*. (Knop, 2009).

La volatilidad implícita de una opción es aquella para la cual el precio de Black-Scholes es igual al precio de mercado. Existe una correspondencia uno a uno entre los precios y las volatilidades implícitas.

Como se ha mencionado anteriormente, necesitamos un modelo que describa estadísticamente el valor $S(T)$ del subyacente en el periodo T . Además, para proyectar la opción, necesitamos un modelo dinámico para el precio $S(t)$ del subyacente para todos los momentos t desde que se abrió el contrato hasta el vencimiento T . El modelo dinámico de Black-Scholes es el **movimiento browniano geométrico**, también llamado proceso lognormal.

En definitiva, las premisas básicas del modelo Black-Scholes son las siguientes:

- Las cotizaciones fluctúan de la misma forma que un movimiento browniano geométrico.
- Los mercados funcionan sin costes de transacción, márgenes de seguridad o impuestos.
- Los valores que se negocian son infinitamente divisibles y se puede operar el cualquier momento.
- El tipo de interés libre de riesgo es conocido y constante a lo largo del tiempo.
- Los inversores pueden prestar y endeudarse al tipo libre de riesgo.
- No existe limitación para las ventas al descubierto. Los vendedores al descubierto pueden disponer plenamente de los ingresos de esas ventas y no tienen la obligación de efectuar ningún depósito en garantía.
- La opción es de tipo europeo.
- La acción subyacente no paga dividendos antes de la fecha de vencimiento de la opción.

3.2. MOVIMIENTO BROWNIANO

Una de las premisas básicas del modelo de Black-Scholes es que las cotizaciones fluctúan de la misma forma que un movimiento browniano geométrico. En torno a esta premisa girará el desarrollo del trabajo, ya que es la que define matemáticamente el modelo, lo que es fundamental para su formulación.

Para concluir si este modelo es adecuado para la valoración de productos financieros, vamos a contrastar algunos de los supuestos teóricos que establece el modelo con datos reales de los mercados financieros. Concretamente, se analizará y comparará este comportamiento teórico con las cotizaciones de cierre diarias, semanales y mensuales del DAX 30.

3.2.1. Historia: origen y autores

El movimiento browniano nace en Inglaterra en 1827 a manos del médico y botánico escocés Robert Brown (1773-1858). Brown es conocido, sobre todo, por un estudio de los granos de polen de una flor silvestre llamada *Clarkia pulcella*. El botánico, pretendía analizar al milímetro la forma y el tamaño de los granos de polen con un microscopio, pero las partículas no paraban de moverse, por lo que probó con otro tipo de partículas pero siempre se encontraba con ese movimiento sin saber por qué se producía. Brown murió sin hacer ninguna hipótesis y, durante varias décadas otros científicos trataron de descubrir el origen de ese movimiento. Entre éstos, destacaron Albert Einstein en 1905, Norbert Wiener en 1923, Paul Pierre Lévy en 1939 y Samuelson en 1965.

Sin embargo, no fue aplicado a las finanzas hasta 1900 por el matemático Louis Bachelier (1870-1946). Considerado como pionero en el estudio de las matemáticas financieras y los procesos estocásticos, utilizó el movimiento browniano para modelizar las fluctuaciones de las acciones de la bolsa de París en su tesis "*Théorie de la spéculation*".

3.2.2. Marco teórico: características y modelos matemáticos

Comenzaremos definiendo lo que es un proceso estocástico. Se trata de un modelo matemático del comportamiento en el tiempo de un fenómeno aleatorio, es decir, es un conjunto de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in T}$, donde T es un conjunto, finito o infinito, de tiempos. El movimiento browniano estándar (B_t) es un proceso estocástico que comienza en cero ($B_0 = 0$) y que presenta las siguientes propiedades (Benth, 2004):

- Incrementos independientes: la variable aleatoria $B_t - B_s$ es independiente de la variable aleatoria $B_u - B_v$, siempre que $t > s \geq u > v \geq 0$.
- Incrementos estacionarios: la distribución de $B_t - B_s$ para $t > s \geq 0$ es una función de $t-s$, y no de t y s por separado.
- Incrementos normales: la distribución de $B_t - B_s$ para $t > s \geq 0$ es normal con media 0 y desviación típica $\sqrt{t-s}$.

Como se puede observar, la tercera propiedad implica la segunda, por lo que la propiedad de los incrementos estacionarios es innecesaria. No obstante, si consideráramos un proceso estocástico que sólo cumple las dos primeras propiedades, éste sería un proceso de Lévy. Por tanto, podemos concluir que el movimiento browniano es un caso particular de un proceso de Lévy.

De las definiciones anteriores, podemos extraer que B_t es una variable aleatoria para cada momento de tiempo t . Sin embargo, para cada resultado ω del espacio muestral Ω , tenemos una función de tiempo $t \rightarrow B(t, \omega)$. Esta función se conoce como la trayectoria del movimiento browniano. Para cada resultado tendremos una trayectoria, que denominaremos trayectoria muestral.

El movimiento browniano presenta características muy similares a las de las cotizaciones de los mercados financieros, pero no puede representar correctamente el comportamiento de todas las variables que influyen en las cotizaciones. Esto compone la primera crítica al modelo Black-Scholes, ya que el movimiento browniano forma parte de éste y de otros modelos financieros y económicos.

3.2.3. Simulación del movimiento browniano

Para comprobar que el movimiento browniano es similar a las variaciones en las cotizaciones de los mercados financieros, se simulará un movimiento browniano estándar a través del software estadístico R.

En primer lugar, se ha generado una muestra aleatoria de una distribución normal con media cero y desviación típica uno ($N(0,1)$) que simula las variaciones entre períodos de un activo hipotético del mercado financiero en escala logarítmica, a las que denominaremos **logreturns**. En segundo lugar, cada línea se ha dibujado como la suma acumulada de los logreturns, representando así las variaciones en la cotización de cada período.

El motivo de considerar la muestra aleatoria $N(0,1)$ como logreturns ha sido la posibilidad de añadir la propiedad aditiva a las variaciones, para así poder calcular la suma acumulada de los datos. Para poder realizar estos cálculos, nos hemos basado en la siguiente propiedad: el valor de la tasa de variación de un período a otro de una serie se aproxima al valor de la variación de un período a otro de la misma serie en escala logarítmica, es decir:

$$\ln\left(\frac{x_i}{x_{i-1}}\right) = \ln x_i - \ln x_{i-1} \cong \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}}$$

donde x_i es la cotización del activo en el momento i y debe cumplirse que $x_i \cong x_{i-1}$.

En la Figura 2, se puede observar la representación de tres movimientos brownianos simulados, con los periodos representados en el eje horizontal y las cotizaciones en el eje vertical. A simple vista, se puede observar la similitud entre estas variaciones y las de cualquier activo del mercado financiero.

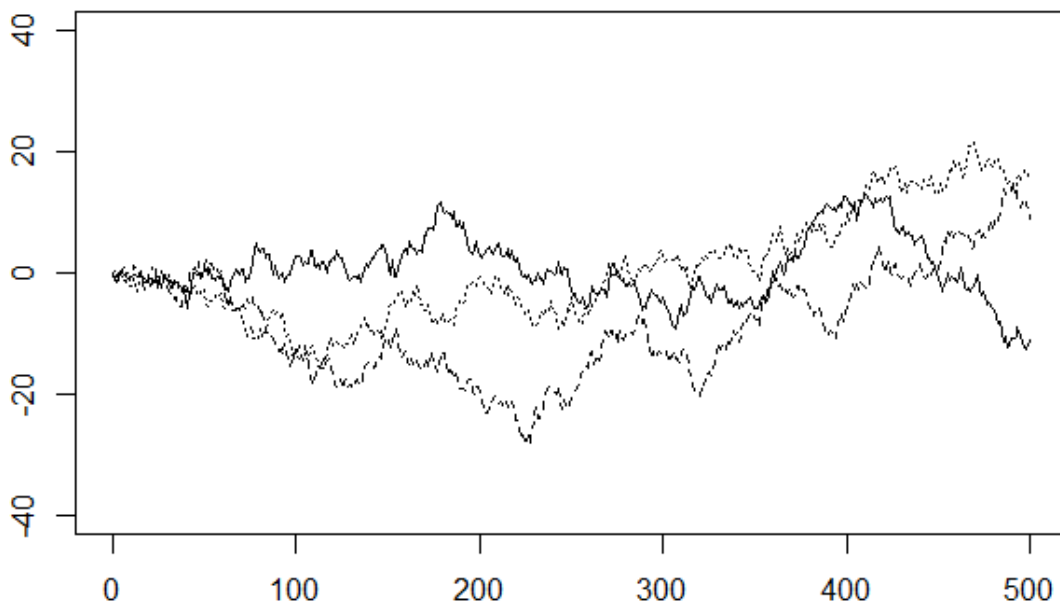


Figura 2. Simulación de tres movimientos brownianos estándar.

4. DATOS EMPÍRICOS DEL DAX 30

Los datos empíricos tratados en éste y sucesivos apartados, han sido obtenidos de la página web *www.finance.yahoo.com*. Estos datos, son las cotizaciones diarias, semanales y mensuales de cierre del índice DAX 30 desde el 1 de enero del año 2000 hasta el 31 de diciembre de 2014, expresadas en puntos básicos.

En la Figura 3, se han representado las cotizaciones diarias del índice en el periodo mencionado anteriormente. A simple vista, se puede observar la similitud con el movimiento browniano representado en la Figura 2.

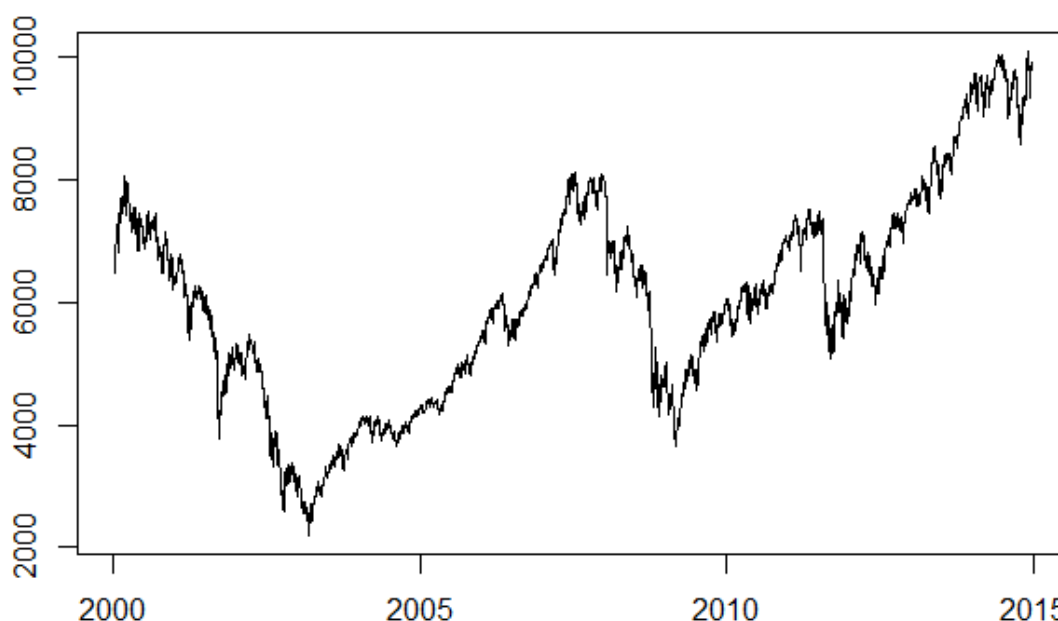


Figura 3. Cotización diaria del DAX 30.

A continuación, en la Tabla 2, se han estimado los parámetros μ y σ de la distribución Normal como la media y la desviación típica de la muestra. Se ha calculado también el coeficiente de variación, la mediana, el máximo y el mínimo del DAX 30 en el periodo de estudio.

	Media	D.Típica	C.V	Mediana	Máximo	Mínimo
Diario	0,000098	0,0155	158,503	0,00074	0,1080	-0,0743
Semanal	0,000472	0,0335	71,072	0,00425	0,1494	-0,2435
Mensual	0,002016	0,0641	31,799	0,00957	0,1937	-0,2933

Tabla 2. Estadística descriptiva de los logreturns del DAX 30.

El coeficiente de variación, expresado como la relación entre la desviación típica de la muestra y su media, nos permite comparar la dispersión relativa entre las tres series temporales, es decir, la volatilidad. Se observa cómo disminuye ésta a medida que aumentan los intervalos temporales.

Como ya se ha mencionado anteriormente, el movimiento browniano presenta características muy similares a las de las cotizaciones de los mercados financieros, pero no puede representar correctamente el comportamiento de todas las variables que influyen en las cotizaciones.

Para describir el cambio porcentual o rendimiento del precio de un activo, se suele utilizar el movimiento browniano geométrico (S_t), obtenido a través de una transformación exponencial del movimiento browniano estándar. Su expresión matemática es la siguiente:

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t}$$

donde S_0 es el precio actual, μ es la variación media de la cotización del subyacente (tendencia), σ es la desviación típica (volatilidad) y B_t es el movimiento browniano estándar (Benth, 2004).

Por tanto, los logreturns entre dos periodos se calculan de la siguiente forma:

$$\log\left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right) = \mu\Delta t + \sigma\Delta B_t$$

que es una variable aleatoria normal de media $\mu\Delta t$ y varianza $\sigma^2\Delta t$.

En la Figura 4, se han simulado dos trayectorias del movimiento browniano geométrico ajustadas a los parámetros diarios estimados en la Tabla 2. La cotización en el primer momento del tiempo de la muestra se ha definido como S_0 y, a partir de ella, se ha realizado la suma acumulada de cada uno de los valores aleatorios de la muestra y se ha pasado ésta a escala exponencial.

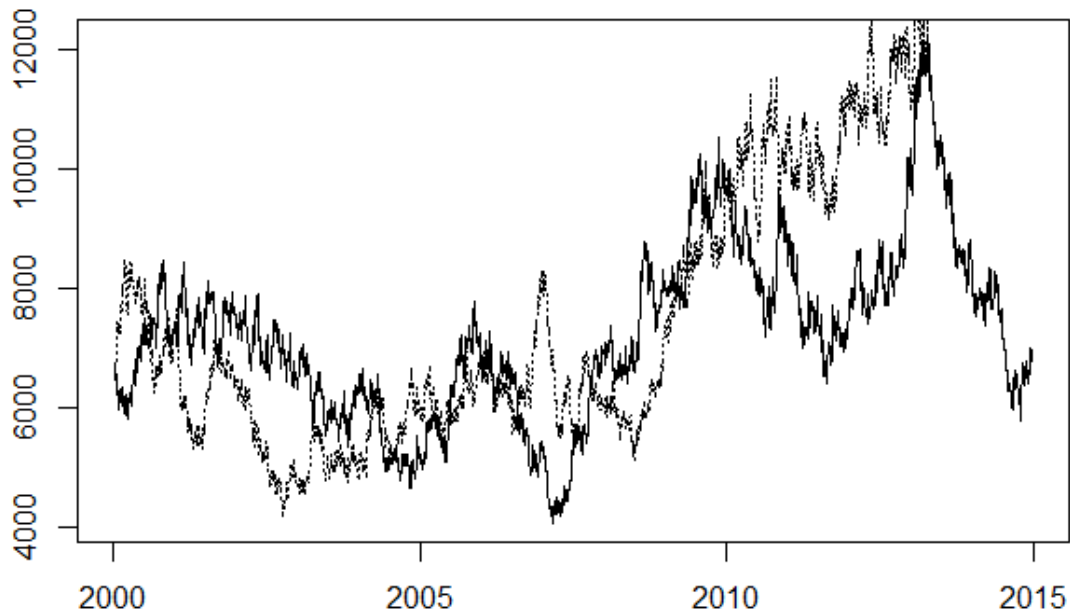


Figura 4. Simulación de dos trayectorias del movimiento browniano geométrico ajustado a los datos diarios.

5. AGREGACIÓN GAUSSIANA

La distribución normal se emplea para el estudio de diversas distribuciones empíricas, como el peso, el coeficiente intelectual, errores cometidos al medir ciertas magnitudes, etc. El Teorema Central del Límite o hipótesis de Lindeberg-Lévy afirma que la tipificación de la suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas se aproxima en su comportamiento al de la distribución Normal estándar $N(0,1)$. Habitualmente, cuando n es mayor o igual que 30 el parecido entre las funciones de distribución de las variables tipificadas y de la $N(0,1)$ ya se considera grande.

La Agregación Gaussiana es un fenómeno según el cual la densidad de una muestra empírica tiende a converger hacia la de una distribución Normal a medida que aumenta el periodo de tiempo entre observaciones. Esta convergencia puede darse en los logreturns semanales y, sobre todo, mensuales del DAX 30. Sin embargo, los períodos cortos de tiempo como los logreturns diarios se encuentran lejos de la distribución Normal.

Debido a la propiedad aditiva de los logreturns mencionada en apartados anteriores, los logreturns semanales y mensuales se pueden obtener a partir de los

diarios. Utilizando los cinco días de cotización en una semana, el logreturn $x^w(i)$ para la semana i sería:

$$x^w(i) = \sum_{n=1}^5 x(5(i-1) + n)$$

El índice i se mide en semanas, por lo que $x^w(2)$ es la variación logarítmica en el precio desde el final de la primera semana hasta el final de la segunda. Del mismo modo, asumiendo 20 días de cotización en un mes, el logreturn $x^m(i)$ para el mes i sería:

$$x^m(i) = \sum_{n=1}^{20} x(20(i-1) + n)$$

Si suponemos que los logreturns diarios son muestras independientes de la misma distribución (no es necesario que sea normal), el Teorema Central del Límite implica que los logreturns semanales y mensuales se asemejan a una distribución Normal. En la Figura 5 se muestran las densidades empíricas de las muestras diarias, semanales y mensuales del DAX 30 junto con la densidad teórica de la Normal.

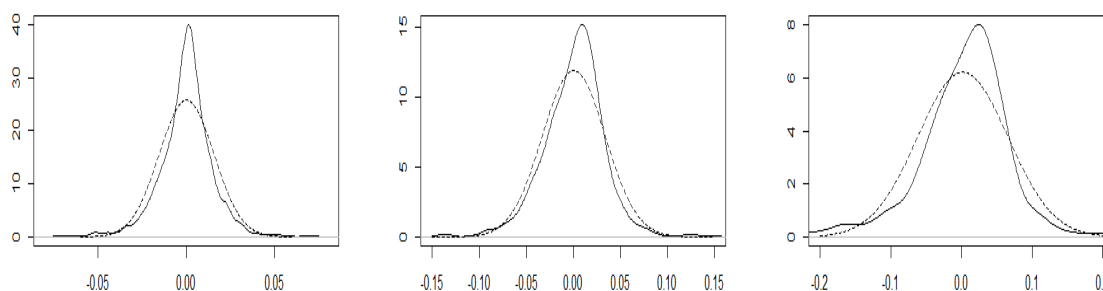


Figura 5. Densidades empíricas (línea continua) y teóricas (línea discontinua) de las muestras diarias, semanales y mensuales del DAX 30.

En la figura anterior se puede apreciar el fenómeno de la Agregación Gaussiana, ya que, cuanto mayor son los periodos de tiempo entre las observaciones, mayor es el parecido con la distribución Normal. Sin embargo, se observa cómo la muestra diaria se encuentra lejos de ésta.

5.1. TEST DE NORMALIDAD

Además de comparar las gráficas de las densidades empíricas y teóricas de la muestra, se realiza un test de normalidad para determinar la similitud entre la distribución de los logreturns del DAX 30 y la distribución Normal. Se trata, por tanto, de un contraste de hipótesis en el que la hipótesis nula (H_0) es que la distribución de los logreturns se ajusta a una distribución Normal, mientras que la hipótesis alternativa (H_1) es que no se ajusta a ella.

5.1.1. Contraste de Kolmogórov-Smirnov (Corrección de Lilliefors)

El contraste de Kolmogórov-Smirnov (K-S), compara los valores de una distribución empírica con los que se derivarían de la distribución supuesta como hipótesis nula. En nuestro caso, la hipótesis nula (H_0) es que la distribución de la muestra es Normal. La corrección de Lilliefors es una mejora que se introduce para el caso de la distribución Normal, ya que este contraste se puede plantear para otras distribuciones distintas de la Normal. El estadístico de K-S (D) consiste en la máxima diferencia observada entre ambas funciones de distribución:

$$D = \text{máx}|F_n(x_i) - F_0(x_i)|$$

donde $F_n(x_i)$ es la función de distribución muestral, $F_0(x_i)$ la función teórica (Normal, en nuestro caso) y x_i es el i -ésimo valor observado en la muestra (cuyos valores han sido ordenados previamente de menor a mayor).

Cuanto más cercano a cero se encuentre el estadístico D , mayor será la similitud entre la distribución muestral y la teórica normal. El p -valor determina hasta qué valor se debe bajar el nivel de significación para no tener que rechazar H_0 . Generalmente, el p -valor tiene que ser menor o igual que 0,05 para que H_0 sea rechazada con un nivel de significación del 5% (es el nivel generalmente aceptado).

En la Tabla 3, se ha calculado el estadístico D y el p -valor para las series diaria, semanal y mensual del DAX 30. En los tres casos, el estadístico D se encuentra muy alejado de cero, así como el p -valor muy por debajo de 0,05. Por tanto, según este test, las muestras no se ajustan a una distribución normal y se rechazaría la hipótesis nula. En cuanto al fenómeno de la Agregación Gaussiana, se aprecia cómo el p -valor va aumentando a medida que se incrementan los periodos de tiempo, pero queda muy lejos del valor crítico 0,05.

	D	p-valor
Diario	0,0713	< 2,2E-16
Semanal	0,0579	0,000001642
Mensual	0,0852	0,002935

Tabla 3. Estadístico y p-valor del contraste K-S para las series diaria, semanal y mensual del DAX 30.

6. COLAS PESADAS

Cuando hablamos de colas pesadas, nos referimos a la probabilidad concentrada en los valores extremos, es decir, en las colas de la función de densidad. En esta sección se analiza en qué medida considera la distribución Normal la probabilidad concentrada en las colas, utilizando para ello el Valor en Riesgo (VaR) y la representación gráfica en escala logarítmica de las curvas de densidad de la Figura 5.

6.1. VALUE AT RISK

El VaR, es un sistema de valoración de riesgo basado en el planteamiento de escenarios pesimistas o de aversión al riesgo. Se utiliza habitualmente en el campo de las finanzas y de los seguros.

Bajo el supuesto de que las variaciones entre periodos del DAX 30 siguen una distribución Normal, utilizaremos el VaR para determinar la existencia de colas pesadas. Para ello, calcularemos los percentiles 1%, 2%, 98% y 99% para determinar la probabilidad existente por debajo de ellos en la distribución normal y empírica. Si existen colas pesadas, el valor absoluto de los percentiles empíricos será mayor que el de los teóricos, ya que existe mayor probabilidad concentrada en los extremos.

La Tabla 4 muestra cómo la distribución Normal subestima la probabilidad en los extremos, es decir, que la distribución empírica de los logreturns del DAX 30 tiene colas más pesadas que la distribución teórica Normal ajustada a la muestra diaria de los logreturns del índice.

Percentil	Empírico	Teórico
0,01	-0,0470	-0,0359
0,02	-0,0351	-0,0317
0,98	0,0318	0,0319
0,99	0,0413	0,0361

Tabla 4. Valores de los percentiles de la serie diaria empírica y teórica del DAX 30.

En la Tabla 5, se han calculado los percentiles teóricos correspondientes a los valores de los percentiles empíricos 1%, 2%, 98% y 99%. Para ver hasta qué punto la distribución Normal subestima la probabilidad de los sucesos extremos, utilizaremos el siguiente ejemplo con los valores de la Tabla 5: teóricamente, una caída igual o superior a un 4,70% se produce 0,12 de cada 100 días, mientras que empíricamente se produce 1 de cada 100 días.

Valor	Percentiles empíricos	Percentiles teóricos
-0,0470	0,01	0,0012
-0,0351	0,02	0,0115
0,0318	0,98	0,9796
0,0413	0,99	0,9961

Tabla 5. Percentiles teóricos correspondientes a los valores de los percentiles empíricos 1%, 2%, 98% y 99%.

6.2. DENSIDADES EN ESCALA LOGARÍTMICA

La siguiente Figura representa las curvas de densidad empírica y teórica de las muestras diaria, semanal y mensual ya vistas en la Figura 5, pero esta vez en escala logarítmica. Si observamos los extremos de las gráficas, vemos como la curva de densidad empírica (línea continua) se encuentra por encima de la curva de densidad teórica (línea discontinua). Este hecho demuestra, una vez más, que la distribución Normal subestima la probabilidad concentrada en los extremos.

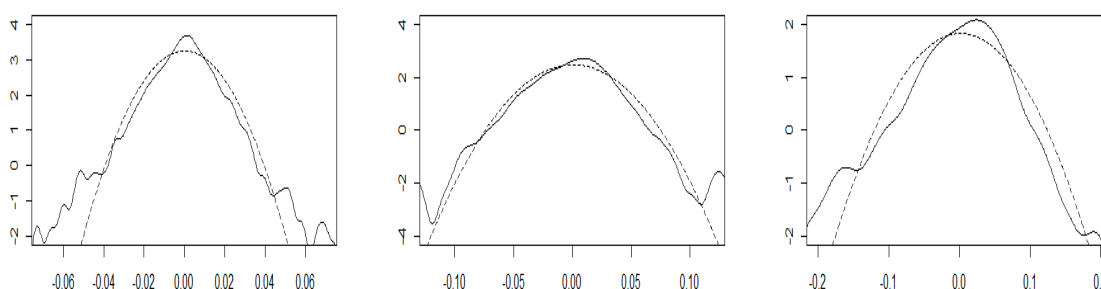


Figura 6. Densidades empíricas (línea continua) y teóricas (línea discontinua) de las muestras diarias, semanales y mensuales del DAX 30 en escala logarítmica.

7. MEDIDAS DE FORMA

En este apartado se analizan las medidas de forma (asimetría y curtosis) y se contrastan con la distribución Normal a través del Test Jarque-Bera.

7.1. ASIMETRÍA

Las medidas de asimetría se utilizan para determinar el grado de simetría o asimetría que presenta una distribución sin necesidad de realizar una representación gráfica. Además, permite realizar comparaciones entre distribuciones distintas.

Si una distribución es simétrica, existe el mismo número de valores a la derecha que a la izquierda de la media y, por tanto, el mismo número de desviaciones con signo positivo que con signo negativo, siendo la suma de las desviaciones positivas igual a la suma de las negativas (Martín-Pliego, 2009).

Para medir numéricamente la asimetría se utiliza un coeficiente de asimetría. El más usado es el coeficiente de asimetría de Fisher (g_1):

$$g_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

siendo μ_3 el momento central de orden 3 y σ la desviación típica:

$$\mu_3 = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^3 n_i}{N}$$

El signo de g_1 determina la simetría o asimetría de la distribución y depende solo del numerador. Por tanto, si

$g_1 = 0$ la distribución es simétrica

$g_1 > 0$ la distribución es asimétrica positiva

$g_1 < 0$ la distribución es asimétrica negativa

Cabe destacar que, cuando la distribución es simétrica, entonces $g_1 = 0$, pero el recíproco no tiene por qué cumplirse. Por tanto, es necesario acompañar el estudio numérico con la representación gráfica.

En la Tabla 6 hemos calculado los coeficientes de asimetría de la muestra empírica diaria, semanal y mensual de los logreturns del DAX 30. También se han calculado los *p-valores* para determinar el nivel de significación con el que podemos considerar si el valor de g_1 está significativamente lejano o cercano a cero. Cabe destacar que el *p-valor* se ha obtenido a partir de la distribución asintótica normal del estadístico usado. En este caso, la hipótesis nula o H_0 es que el coeficiente de asimetría es cero. En función de los datos obtenidos, el *p-valor* de la serie diaria es mayor que el nivel de significación generalmente aceptado (0,05), por lo que no se rechaza H_0 y se acepta que el coeficiente de asimetría de la serie diaria es cero. En las series semanal y mensual, sin embargo, el *p-valor* se encuentra muy por debajo de 0,05 y se observa que presentan asimetría negativa, es decir, presentan valores más alejados de la media por debajo de ésta que por encima.

Serie	g_1	<i>p-valor</i>
Diaria	0,0166	0,6752
Semanal	-0,6568	6,217E-14
Mensual	-0,9954	4,977E-8

Tabla 6. Coeficiente de asimetría de Fisher y *p-valores* de las series diaria, semanal y mensual de logreturns del DAX 30.

7.2. CURTOSIS

La curtosis es otra medida de forma que mide tanto el apuntamiento (anchura del pico) como la pesadez de las colas de la distribución. Las medidas de curtosis tratan de determinar el número de observaciones que se encuentran muy lejos o muy cerca de la media. Para esta medida, una curtosis elevada significa que más varianza de la variable es resultado de observaciones extremas infrecuentes en oposición a observaciones menos desviadas de la media y más frecuentes.

Para estudiar la curtosis, se utiliza la distribución Normal como modelo de referencia. El hecho de utilizar esta distribución, es porque se presenta en múltiples casos, e implica que la mayoría de los valores de la variable están cerca de la media, y aquellos que se encuentran muy distanciados de ella, a ambos lados, son poco numerosos (Martín-Pliego, 2009).

El coeficiente de curtosis es el cociente entre el momento central de orden cuatro y la varianza a la cuarta. No obstante, a esta fórmula se le resta 3 para medir el exceso de curtosis respecto a la distribución Normal:

$$g_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 4$$

siendo μ_4 el momento central de orden 3 y σ la desviación típica:

$$\mu_4 = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^4 n_i}{N}$$

En función del signo de g_2 , podemos distinguir entre distribuciones:

mesocúrticas si $g_2 = 0$

leptocúrticas si $g_2 > 0$

platicúrticas si $g_2 < 0$

Al igual que con la asimetría, se han calculado en la Tabla 7 los coeficientes de curtosis y sus correspondientes *p-valores* para la tres series temporales. En los tres casos, se observa un exceso de curtosis elevado, aunque éste va disminuyendo a medida que se reduce el periodo de tiempo entre observaciones. Las distribuciones son, por tanto, leptocúrticas. En los tres casos el *p-valor* del contraste es prácticamente nulo, con lo que hay un claro rechazo de la hipótesis nula de que el coeficiente de curtosis es cero.

Serie	g_2	<i>p-valor</i>
Diaria	4,2686	0
Semanal	5,1965	0
Mensual	3,1209	0

Tabla 7. Coeficiente de curtosis y *p-valores* de las series diaria, semanal y mensual de logreturns del DAX 30

7.3. TEST JARQUE-BERA

Se trata de un test exclusivo para la distribución Normal y se basa en el ajuste entre las medidas de forma (asimetría y curtosis) de la distribución empírica y una distribución Normal teórica. El estadístico de este test es X^2 , y su fórmula de cálculo la siguiente:

$$X^2 = \frac{n}{6} \left(g_1^2 + \frac{1}{4} g_2^2 \right)$$

En la Tabla 8 se han calculado el estadístico X^2 y su correspondiente *p-valor* para contrastar si las muestras de los logreturns diarios, semanales y mensuales del DAX 30 se ajustan a la distribución Normal. En los tres casos se observa cómo los *p-valores* se encuentran muy por debajo del nivel de significación del 5%, por lo que, según este test, ninguna de las distribuciones de los logreturns del DAX 30 es Normal. Aun así, el estadístico va disminuyendo su valor a medida que aumentan los intervalos temporales entre observaciones, con lo que se demuestra, una vez más el fenómeno de agregación Gaussiana.

Serie	X^2	<i>p-valor</i>
Diaria	2.901,819	<2,2E-16
Semanal	936,116	<2,2E-16
Mensual	102,206	<2,2E-16

Tabla 8. Test de Jarque-Bera para las series diaria, semanal y mensual de logreturns del DAX 30.

8. AUTOCORRELACIONES

El modelo de Black-Scholes establece incrementos independientes de los logretorns. En los mercados financieros, existen periodos de mucha volatilidad en los que las variaciones son mayores y otros en los que hay menos volatilidad. Este hecho se puede observar en la Figura 7, en la que se han representado las variaciones diarias del DAX 30 (logretorns). Se puede ver cómo las variaciones son sistemáticamente mayores en determinados momentos del tiempo y menores en otros. Esto nos lleva a pensar que los logretorns no son independientes entre sí, sino que existe una dependencia en determinados momentos del tiempo.

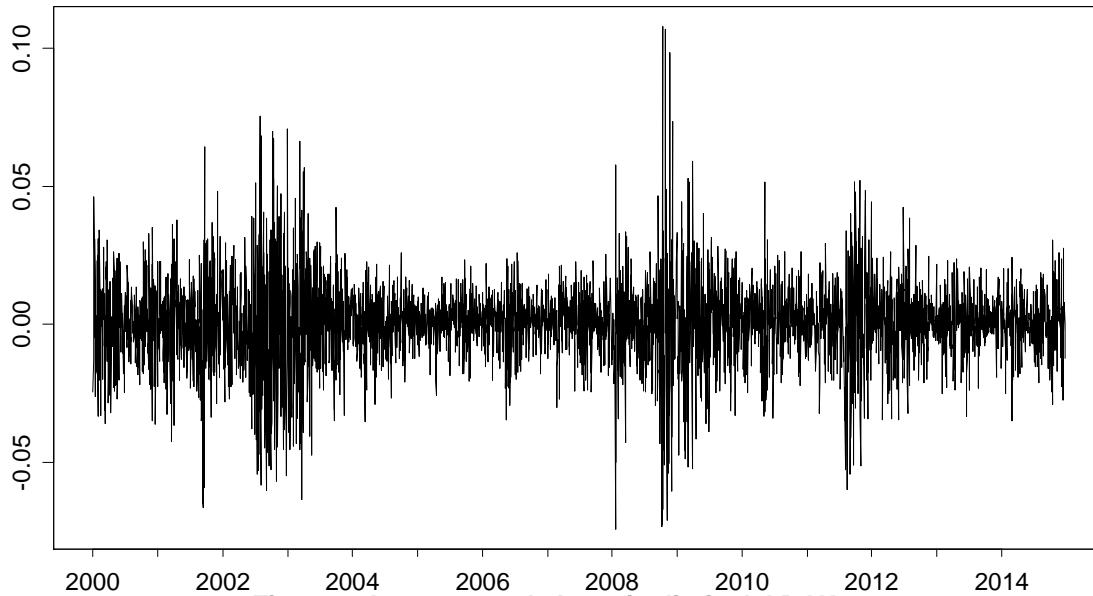


Figura 7. Logretorns de la serie diaria del DAX 30.

Considerando la serie temporal $\{X(t)\}_{t=1}^{\infty}$ de logretorns como estacionaria en el sentido de que el valor esperado de $X(t)$ no es una función de tiempo y la covarianza entre $X(t)$ y $X(t+s)$ solo depende de s (intervalo temporal), podemos establecer la expresión matemática

$$\text{Cov}(X(t), X(t+s)) = \gamma(s)$$

para una función $\gamma(s)$ donde $\gamma(0) = \gamma > 0$. La autocorrelación con s retardos viene dada por la siguiente expresión:

$$\text{corr}(X(t), X(t+s)) = \frac{\text{Cov}(X(t), X(t+s))}{\text{std}(X(t))\text{std}(X(t+s))} = \frac{\gamma(s)}{\gamma}$$

La autocorrelación describe la intensidad con la que el logretorn actual recuerda a los anteriores, es decir, la dependencia lineal entre ambos. Por tanto, a través de la autocorrelación podemos predecir los precios futuros (Benth, 2004).

En la Figura 8, se han representado las autocorrelaciones de los logretorns de la serie diaria del DAX 30. Se observa cómo varían sin orden alguno por encima y por debajo de cero y la gran mayoría de ellas se encuentran dentro de la banda de confianza del 95% centrada en cero. Por tanto, los logretorns de la serie diaria del DAX 30 no están correlados.

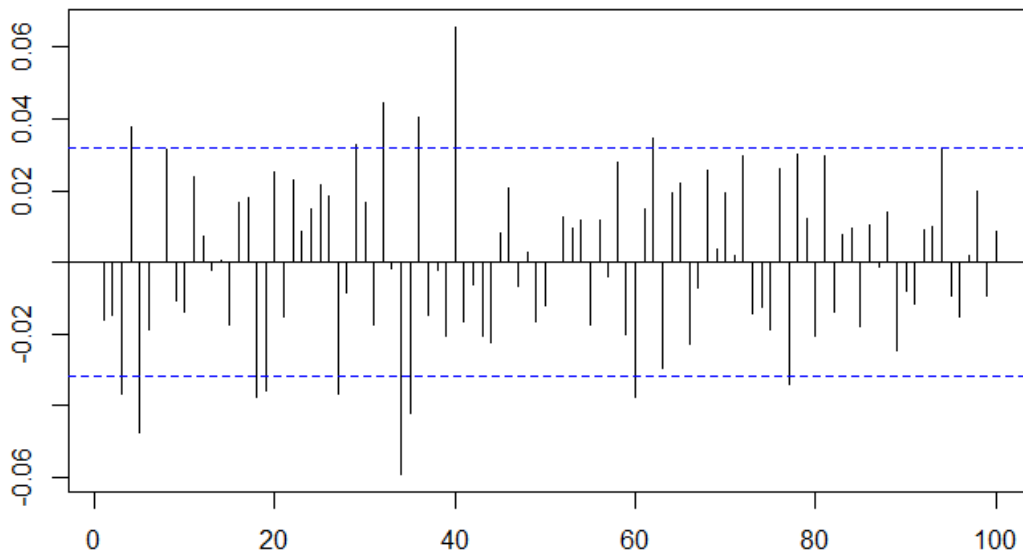


Figura 8. Autocorrelaciones de los logretornos diarios del DAX 30 con retardos de hasta 100.

Sin embargo, al representar las autocorrelaciones en la Figura 9 utilizando el valor absoluto de los logretornos (gráfica de arriba) y su cuadrado (gráfica de abajo), es decir, las autocorrelaciones entre los tamaños de los logretornos, se observa que las autocorrelaciones son siempre positivas y significativamente alejadas de cero. Además, se aprecia un descenso progresivo en el valor de la autocorrelación, lo que significa que, cuanto menor es la distancia en el tiempo entre los logretornos, la correlación entre ellos se hace mayor.

Si los logretornos fueran independientes tal y como afirma el modelo de Black-Scholes, sus autocorrelaciones deberían ser significativamente iguales a cero en todos los casos, cosa que no ocurre con el valor absoluto y el cuadrado de los logretornos. Se prueba entonces que existe un cierto grado de dependencia entre los tamaños de los logretornos, lo que contradice una de las premisas básicas del modelo de Black-Scholes.

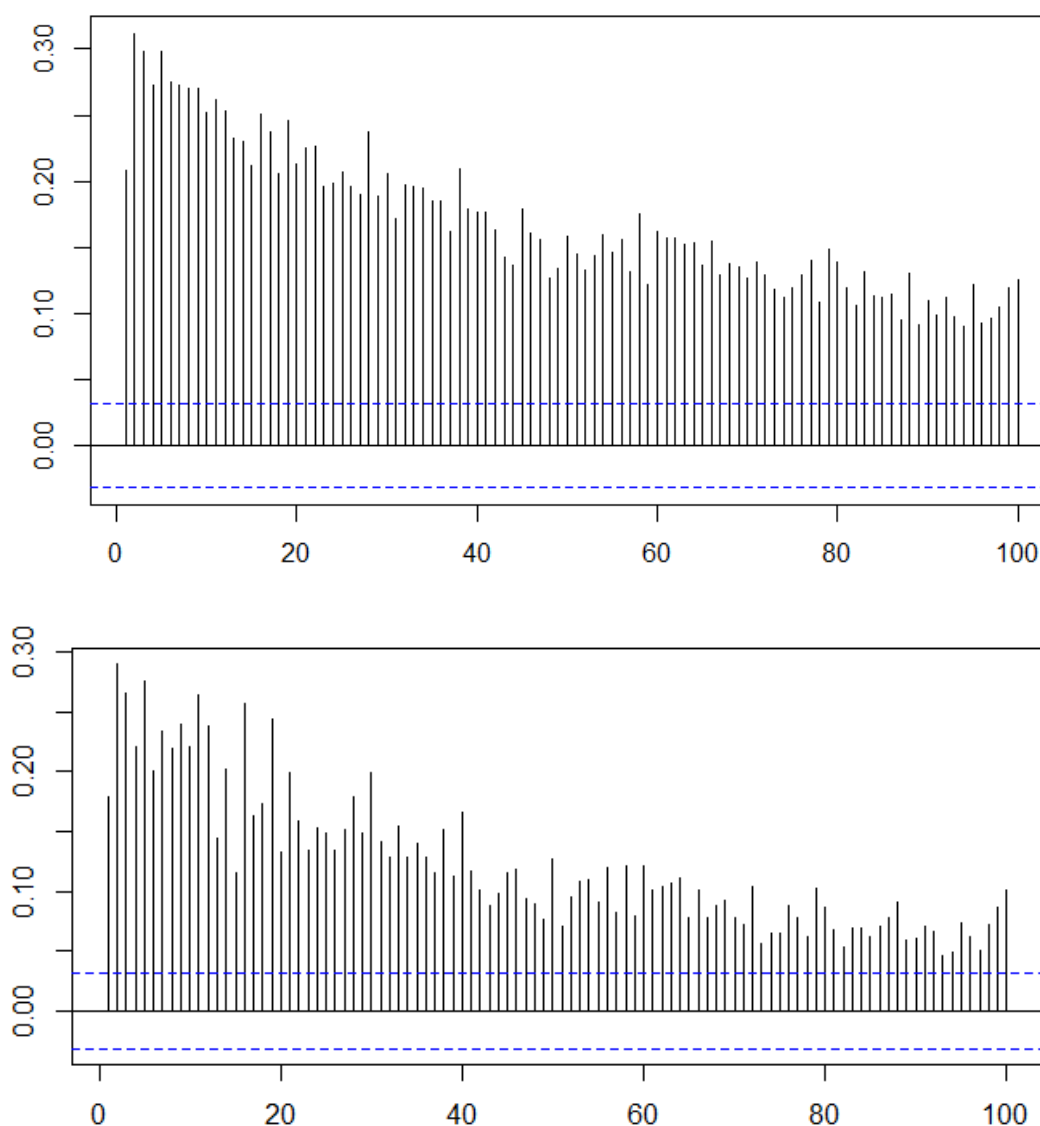


Figura 9. Autocorrelaciones de los valores absolutos (arriba) y cuadrados (abajo) de los logretornos diarios del DAX 30.

9. ALTERNATIVA PARA EL MODELO BLACK-SCHOLES: NORMAL INVERSA GAUSSIANA

Hasta ahora, hemos visto cómo la distribución Normal no es un modelo adecuado para los logretornos del DAX 30 debido a varios factores. En primer lugar, subestima las probabilidades en las colas de la distribución. Además, la muestra empírica presenta asimetría y curtosis, lo cual no ocurre en la distribución Normal.

En este apartado, se introduce un modelo más complejo y flexible que se adapta mejor a las series temporales financieras, a los logretornos del DAX 30 en nuestro caso. Este modelo, es la distribución Normal Inversa Gaussiana (NIG).

9.1. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL INVERSA GAUSSIANA

Se trata de un tipo de distribución hiperbólica y fue introducida por Barndorff-Nielsen en 1977 como un modelo de distribución para el tamaño de los granos de arena en las playas danesas. Más tarde, se comenzó a utilizar en las finanzas como un buen modelo para los logretornos.

La NIG presenta cuatro parámetros: α , β , μ y δ . El parámetro μ marca el centro de la distribución en el eje horizontal, mientras que la asimetría está definida por β . El parámetro δ es un parámetro de escala parecido a la desviación típica de la distribución Normal. Por último, α modela las colas pesadas de la distribución.

La expresión de la función de densidad de la distribución Normal Inversa Gaussiana es la siguiente:

$$p_{nig}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) = k e^{\beta(x-\mu)} \frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}}$$

donde k es una constante y K_1 es la función de Bessel modificada de tercera clase con índice 1:

$$k = \pi^{-1} \delta \alpha e^{\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \quad K_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x(z+z^{-1})}$$

En la función de densidad, se tiene que cumplir que $0 \leq |\beta| \leq \alpha$. Adicionalmente, δ tiene que ser mayor que cero.

La media y varianza de una variable aleatoria x que sigue una distribución Normal Inversa Gaussiana son las siguientes:

$$E[x] = \mu + \frac{\delta\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \quad Var[x] = \frac{\delta\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^{3/2}}$$

En la Figura 10 se han representado 4 distribuciones NIG (línea continua) y las correspondientes Normales (línea discontinua) con la misma media y varianza, de modo que sea comparables. Los parámetros fijados para cada gráfica son los siguientes:

Gráfica	α	β	μ	δ
1	30	0	0	0,015
2	150	0	0	0,015
3	30	10	0	0,015
4	30	-10	0	0,015

Tabla 9. Valores de los parámetros de las distribuciones NIG representadas en las Figuras 10 y 11.

En las gráficas 1,3 y 4 se observa la forma hiperbólica que presentan las colas, mientras que en la segunda gráfica son prácticamente lineales. Esto se debe a que, para la gráfica 2, se ha fijado el peso de las colas (α) en 150, mientras que en el resto ha sido 30. En los ejemplos 3 y 4, se ha fijado una asimetría (β) positiva y negativa respectivamente. Se observa como la NIG recoge este fenómeno, a diferencia de la distribución Normal. Los parámetros μ y δ se han mantenido constantes en todas las representaciones.

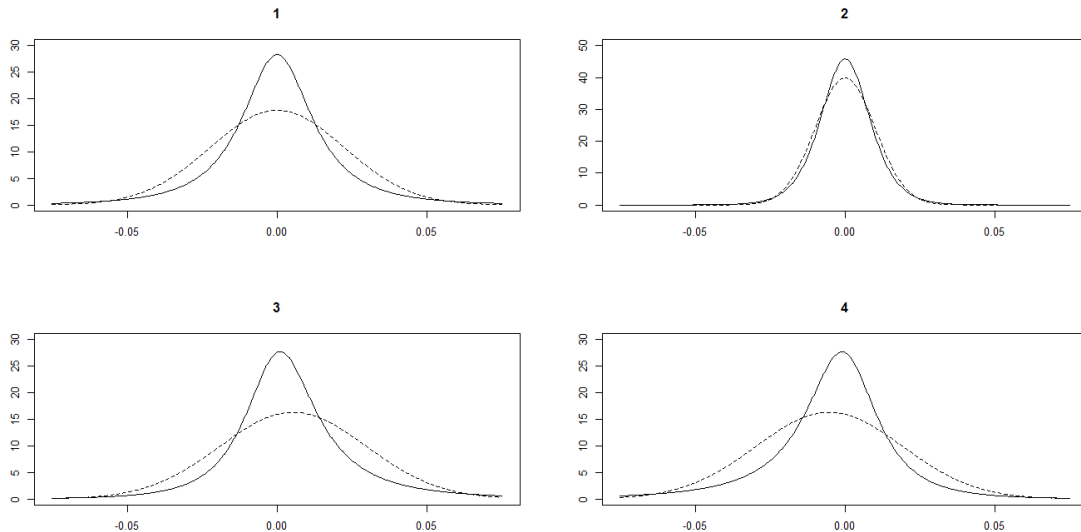


Figura 10. Gráficas de la función de densidad de la NIG (línea continua) y sus correspondientes Normales (línea discontinua).

En la Figura 11 se han representado las mismas gráficas, pero en escala logarítmica. De esta forma se puede contemplar mejor el efecto del peso de las colas. En la gráfica 2, al aumentar el peso de las colas, se observa claramente cómo recoge este efecto la distribución Normal Inversa Gaussiana.

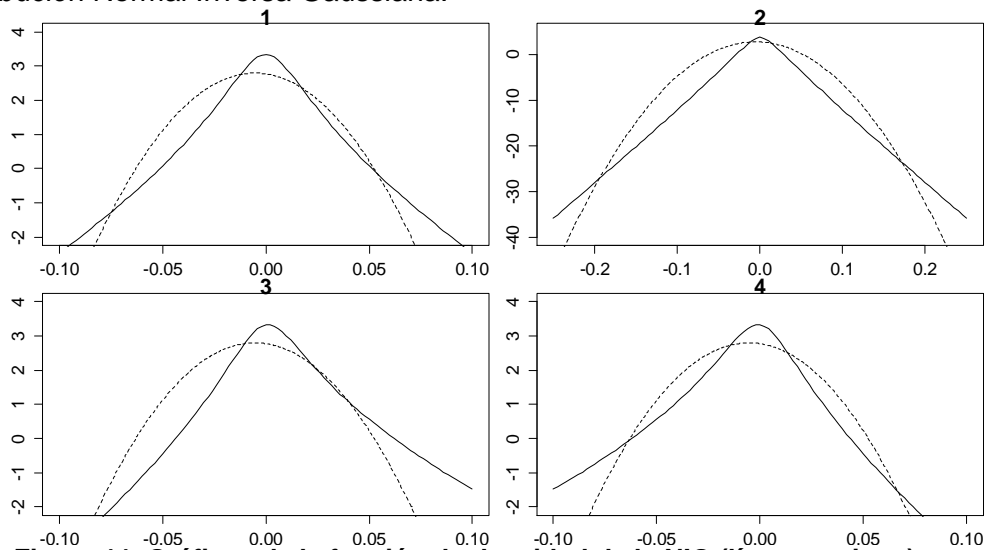


Figura 11. Gráficas de la función de densidad de la NIG (línea continua) y sus correspondientes Normales (línea discontinua) en escala logarítmica.

En definitiva, la distribución NIG es más flexible que la normal para representar las variaciones de los logretornos del DAX 30, ya que considera tanto el peso de las colas como la asimetría.

9.2. ESTIMACIÓN DE LA NORMAL INVERSA GAUSSIANA

A continuación, se calculan los parámetros de la NIG para la muestra empírica del DAX 30 mediante el método de máxima verosimilitud. Este método consiste en seleccionar el valor del parámetro que parece más coherente o verosímil a partir de la muestra obtenida.

En la Tabla 10 se han recogido los parámetros de la NIG calculados mediante el método de máxima verosimilitud para cada una de las series temporales de los logretornos del DAX 30.

Serie	α	β	δ	μ
Diaria	49,1960	-4,8836	0,0118	0,0013
Semanal	33,0316	-7,9231	0,0335	0,0087
Mensual	17,2810	-7,1370	0,0549	0,0269

Tabla 10. Valores de los parámetros de la distribución NIG para las series diaria, semanal y mensual de los logreturns del DAX 30.

A continuación, se han representado a la izquierda en la Figura 12 las curvas de densidades empíricas (línea azul), de la NIG (línea roja) y de la distribución Normal (línea discontinua) de los logreturns diarios, semanales y mensuales del DAX 30. Las tres curvas se han representado superpuestas en el mismo gráfico, de forma que resulte más fácil la comparación entre ellas. Por otro lado, a la derecha aparecen las mismas curvas en escala logarítmica.

En primer lugar, se observa como la Normal Inversa Gaussiana recoge mejor la curtosis o apuntamiento que la distribución Normal, es decir, recoge mejor la concentración de densidad en torno al centro y la altura de la curva. Este ajuste se aprecia observando la diferencia entre el punto más alto de la curva de densidad de la NIG y la empírica. A medida que se incrementan los periodos de tiempo entre observaciones, las tres curvas se parecen más debido al fenómeno de agregación gaussiana. Por tanto, en general la NIG se aproxima mejor a la muestra empírica en intervalos pequeños de tiempo, mientras que, a medida que éstos aumentan, el exceso de curtosis y la asimetría son menores y las tres curvas tienden a converger.

En segundo lugar, si se observan las gráficas de la derecha de la Figura 12, se puede ver cómo la NIG considera mejor que la Normal la probabilidad concentrada en los extremos, es decir, las colas pesadas. Este fenómeno se contempla claramente en la gráfica diaria, ya que la densidad empírica queda muy por encima de la Normal, pero ajustada a la Normal Inversa Gaussiana. Sin embargo, a medida que aumentan los intervalos temporales, la muestra se va aproximando a la Normal debido, como anteriormente, a la agregación gaussiana.

En conclusión, la Normal Inversa Gaussiana se ajusta a los datos mucho mejor que la normal para observaciones en pequeños intervalos temporales. A medida que aumentan estos intervalos, la muestra se va aproximando a la normalidad. No obstante, la NIG siempre recoge con mayor precisión algunas características de la muestra, ya que tiene más parámetros y es más flexible que la Normal.

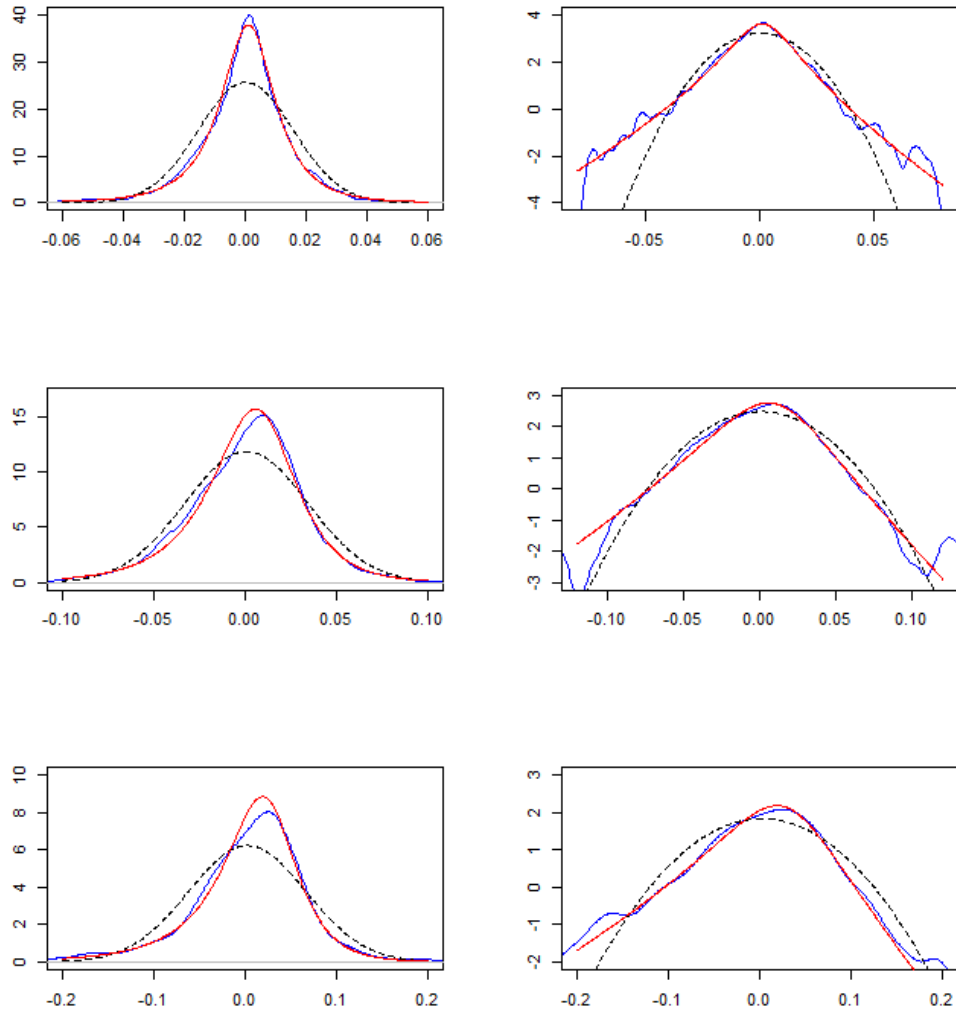


Figura 12. Gráficas de las curvas de densidad empírica (línea azul), NIG (línea roja) y Normal (línea discontinua) para las series diaria, semanal y mensual de los logreturns del DAX 30 (columna izquierda) y las mismas gráficas en escala logarítmica (columna derecha).

10. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se ha analizado si el modelo de Black-Scholes, un movimiento browniano geométrico, es válido para representar la evolución temporal de los precios de productos financieros, concretamente del índice DAX 30. Se ha probado que tal modelo presenta importantes defectos.

Hemos comprobado de varias formas que los logreturns del índice considerado no siguen una distribución Normal. En primer lugar, mediante la representación de las densidades empíricas y teóricas de los logreturns del DAX 30, se ha puesto de manifiesto el fenómeno de agregación gaussiana, pero en ningún caso se ha apreciado el ajuste de los logreturns a la distribución Normal. En segundo lugar, el contraste de Kolmogórov-Smirnov también pone de manifiesto el fenómeno anterior, pero, a pesar de que el *p-valor* se encuentra cada vez más cercano al valor estándar 0,05, el estadístico se aleja cada vez más de cero a medida que aumentan los periodos de tiempo entre observaciones y se demuestra que los logreturns del DAX 30 no siguen una distribución Normal. Por último, hemos visto que sólo la muestra diaria de logreturns del índice es simétrica, mientras las demás no lo son. También se ha observado un exceso de curtosis muy elevado en todas las muestras. La distribución Normal, por su parte, es simétrica y presenta un exceso de curtosis nulo. El test Jarque-Bera, también ha concluido que la asimetría y curtosis de los logreturns no se ajustan a una Normal.

Otro aspecto de la distribución Normal es que subestima la probabilidad concentrada en los valores extremos, es decir, las colas pesadas. Mediante el VaR y la representación gráfica de las curvas de densidades empíricas y teóricas de los logreturns del DAX 30, ha quedado significativamente reflejada la subestimación de las colas pesadas por parte de la distribución Normal.

Por último, hemos visto que los logreturns no son independientes entre sí a través de la representación gráfica de las autocorrelaciones con 100 retardos de los logreturns diarios del DAX 30, así como de sus valores absolutos y sus cuadrados. Las autocorrelaciones en los dos últimos casos han resultado siempre positivas y lejanas de cero, mientras que en el primer caso se encontraban por encima y por debajo de cero y dentro de la banda de confianza del 95%. De ser independientes los logreturns, tal y como afirma el modelo de Black-Scholes, todas estas autocorrelaciones no deberían ser significativamente distintas de cero.

Tras probar que los logreturns del DAX 30 no se ajustan bien a una distribución normal, se ha propuesto un modelo alternativo: la distribución Normal Inversa Gaussiana. Ésta recoge mejor la asimetría y la curtosis de la muestra, así como las colas pesadas. No obstante, el ajuste de los logreturns a la distribución normal es mejor a medida que aumentan los periodos de tiempo entre observaciones (agregación gaussiana). Aun así, la distribución NIG resulta siempre más precisa y flexible que la distribución Normal gracias a que tiene cuatro parámetros.

En definitiva, algunas premisas del modelo de Black-Scholes no se cumplen para el caso de los logreturns del DAX 30, por lo que se deben buscar otras alternativas más precisas y flexibles para representar los precios.

Bibliografía

Manuales

- Benth, Fred E. (2004). *Option Theory with Stochastic Analysis*, Springer.
- Embrechts, Paul; Klüppelberg, Claudia ; Mikosch, Thomas (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, Berlin.
- Knop, R. (2009). *Manual de Instrumentos Derivados: Cuatro décadas de Black-Scholes*, Ediciones Empresa Global, Madrid.
- Martín-Pliego, Francisco J. (2009). *Introducción a la Estadística Económica y Empresarial Teoría y Práctica*, Editorial AC, Madrid.
- Nuñez Velázquez, José J. (2011). *Análisis Dinámico Mediante Procesos Estocásticos Para Actuarios y Finanzas*, Universidad de Alcalá, Alcalá de Henares.
- Paradis, E. (2003). *R para Principiantes*. (Jorge A. Ahumada, Trad.), Institut des Sciences de l'Évolution, Montpellier.
- Stock, James H.; Watson Mark w. (2012). *Introducción a la Econometría*, PEARSON EDUCACIÓN, Madrid
- Venegas Martínez, F. (2008). *Riesgos Financieros y Económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, Cengage Learning Editores, México, D.F.

Documentos electrónicos

- Deutsche Börse AG. (2014). *Guide to the Equity Indices of Deutsche Börse AG*.
http://dax-indices.com/EN/MediaLibrary/Document/Guide_Equity_Indices.pdf
- STOXX Ltd. (2015). *Factsheet DAX*.
http://dax-indices.com/EN/MediaLibrary/Document/Factsheet_DAX.pdf

Prensa digital

- Missé, A. (2008): "La zona euro acuerda un plan de rescate para desbloquear el sistema financiero", *elpais.com*, 13 de octubre,
http://elpais.com/diario/2008/10/13/economia/1223848802_850215.html (Consultado: 19/02/2015)

Anexo

En el desarrollo de este trabajo se ha usado el software estadístico R para realizar diversas gráficas y cálculos. A continuación, se exponen las líneas de código utilizadas a lo largo del trabajo.

Simulación del movimiento browniano estándar (Figura 2)

```
set.seed(250)
par(mar=c(2,2,2,2))
BA <- cumsum(rnorm(500,0,1))
plot(x=c(0:500),y=c(0,BA),type="l",lty=1,xlab="",ylab="",ylim=c(-40,40))
BB <- cumsum(rnorm(500,0,1))
lines(x=c(0:500),y=c(0,BB),type="l",lty=2,xlab="",ylab="")
BC <- cumsum(rnorm(500,0,1))
lines(x=c(0:500),y=c(0,BC),type="l",lty=3,xlab="",ylab="")
```

Lectura de datos de yahoo finance y representación de cotizaciones diarias

(Figura 3)

```
library("tseries")
library("zoo")

indice="^GDAXI"

fecha.ini="2000-01-01"
fecha.fin="2014-12-31"

precios="close"

DAXd <- get.hist.quote(instrument=indice, start=fecha.ini,
end=fecha.fin, compression="d", quote=precios)
DAXw <- get.hist.quote(instrument=indice, start=fecha.ini,
end=fecha.fin, compression="w", quote=precios)
DAXm <- get.hist.quote(instrument=indice, start=fecha.ini,
end=fecha.fin, compression="m", quote=precios)

nd=length(DAXd); nw=length(DAXw); nm=length(DAXm);
par(mar=c(2,2,2,2))
plot(DAXd,xlab="",ylab="",type="l",lty=1)
```

Logreturns del DAX 30

```
XDAXd <- diff(log(DAXd))
XDAXw <- diff(log(DAXw))
XDAXm <- diff(log(DAXm))
nXDAXd <- as.numeric(XDAXd)
nXDAXw <- as.numeric(XDAXw)
nXDAXm <- as.numeric(XDAXm)
```

Estadística descriptiva de los logreturns del DAX 30 (Tabla 2)

```
mud <- mean (XDAXd)
sigmad <- apply(XDAXd,2,sd);sigma2d <- sigmad^2;
muw <- mean (XDAXw)
sigmaw <- apply(XDAXw,2,sd);sigma2w <- sigmaw^2;
mum <- mean (XDAXm)
sigmam <- apply(XDAXm,2,sd);sigma2m <- sigmam^2;

options(scipen=100)
options(digits=6)
summary(XDAXd)
summary(XDAXw)
summary(XDAXm)
```

```
library(pastecs)
stat.desc(nXDAXd)
stat.desc(nXDAXw)
stat.desc(nXDAXm)
```

Simulación de dos trayectorias del movimiento browniano geométrico ajustado a los datos diarios y mensuales (Figura 4)

```
set.seed(1000)
lsd0=log(as.numeric(DAXd[1]))
I <- rnorm(nd-1, mean=mud, sd=sigmad)
ssimul <- exp(cumsum(c(lsd0,I)))
ssimul <- zoo(ssimul,index(DAXd))
plot(ssimul,type="l",lty=1)
```

```
I <- rnorm(nd-1, mean=mud, sd=sigmad)
ssimul <- exp(cumsum(c(lsd0,I)))
ssimul <- zoo(ssimul,index(DAXd))
lines(ssimul, type="l",lty=3)
```

```
set.seed(1000)
lsd1=log(as.numeric(DAXm[1]))
II <- rnorm(nm-1, mean=mum, sd=sigmam)
ssimul <- exp(cumsum(c(lsd1,II)))
ssimul <- zoo(ssimul,index(DAXm))
plot(ssimul,type="l",lty=1)
```

```
II <- rnorm(nm-1, mean=mum, sd=sigmam)
ssimul <- exp(cumsum(c(lsd1,II)))
ssimul <- zoo(ssimul,index(DAXm))
lines(ssimul, type="l",lty=3)
```

Curvas de densidad del DAX 30 y de la Normal con parámetros diarios, semanales y mensuales. También las mismas curvas, pero en escala logarítmica (Figuras 5 y 6)

```
densityXDAXd <- density(XDAXd,n=500)
plot( densityXDAXd,type="l",lty=1,xlab="",ylab="",main="",xlim=c(-
0.08,0.08))
curve(dnorm(x,mean=mud,sd=sigmad),add=TRUE,xlim=c(-
0.06,0.06),n=500,type="l",lty=2,xlab="c(-0",ylab="",main="")
```

```
x <- seq(from=-0.06,to=0.06,length.out=500)
plot(densityXDAXd$x,log(densityXDAXd$y),type="l",lty=1,xlab="",ylab=""
,main="",xlim=c(-0.07,0.07), ylim=c(-2,4))
y <- log(dnorm(x,mean=mud,sd=sigmad))
lines(x,y,lty=2)
```

```
densityXDAXw <- density(XDAXw,n=500)
plot( densityXDAXw,type="l",lty=1,xlab="",ylab="",main="",xlim=c(-
0.15,0.15))
curve(dnorm(x,mean=muw,sd=sigmax),add=TRUE,n=500,type="l",lty=2,xlab="
c(-0",ylab="",main="")
```

```
x <- seq(from=-0.15,to=0.15,length.out=500)
plot(densityXDAXw$x,log(densityXDAXw$y),type="l",lty=1,xlab="",ylab=""
,main="",xlim=c(-0.12,0.12), ylim=c(-4,4))
y <- log(dnorm(x,mean=muw,sd=sigmax))
lines(x,y,lty=2)
```

```
densityXDAXm <- density(XDAXm,n=500)
plot( densityXDAXm,type="l",lty=1,xlab="",ylab="",main="",xlim=c(-
0.20,0.20))
curve(dnorm(x,mean=mum,sd=sigmam),add=TRUE,n=500,type="l",lty=2)
```

```
x <- seq(from=-0.25,to=0.25,length.out=500)
plot(densityXDAXm$x,log(densityXDAXm$y),type="l",lty=1,xlab="",ylab=""
,main="",xlim=c(-0.20,0.20), ylim=c(-2,2))
y <- log(dnorm(x,mean=mum,sd=sigmam))
lines(x,y,lty=2)
```

Contraste de Kolmogórov-Smirnov (Corrección de Lilliefors) (Tabla 3)

```
library(nortest)
lillie.test(nXDAXd);lillie.test(nXDAXw);lillie.test(nXDAXm)
```

Percentiles empíricos y teóricos (Tabla 4)

```
qnorm(p=c(0.01,0.02,0.98,0.99),mean=mud,sd=sigmad)
qe <- quantile(x=XDAXd,probs=c(0.01,0.02,0.98,0.99))
```

Probabilidades teóricas acumuladas por los percentiles empíricos (Tabla 5)

```
pnorm(qe,mean=mud,sd=sigmad)
```

Asimetría y curtosis de los logreturns del DAX 30 y sus respectivos p-values (Tablas 6 y 7)

```
library(moments)
skewness(XDAXd); skewness(XDAXw); skewness(XDAXm)
kurtosis(XDAXd)-3; kurtosis(XDAXw)-3; kurtosis(XDAXm)-3

sk.d <- skewness(XDAXd);stat <- abs(sk.d/sqrt(6/nd));2*(1-pnorm(stat))
sk.w <- skewness(XDAXw);stat <- abs(sk.w/sqrt(6/nw));2*(1-pnorm(stat))
sk.m <- skewness(XDAXm);stat <- abs(sk.m/sqrt(6/nm));2*(1-pnorm(stat))

ku.d <- kurtosis(XDAXd)-3;stat <- abs(ku.d/sqrt(24/nd));2*(1-
pnorm(stat))
ku.w <- kurtosis(XDAXw)-3;stat <- abs(ku.w/sqrt(24/nw));2*(1-
pnorm(stat))
ku.m <- kurtosis(XDAXm)-3;stat <- abs(ku.m/sqrt(24/nm));2*(1-
pnorm(stat))
```

Test de Jarque-Bera (Tabla 8)

```
library(tseries)
jarque.bera.test(nXDAXd);jarque.bera.test(nXDAXw);jarque.bera.test(nXDAXm)
```

Logreturns de la serie diaria del DAX 30 (Figura 7)

```
plot(XDAXd, type="l",xlab="",ylab="", col="blue" )
```

Autocorrelaciones de los logreturns diarios del DAX 30, así como de sus valores absolutos y cuadrados (Figuras 8 y 9)

```
library(FinTS)
autocorr <- apply(XDAXd,2,Acf,lag.max = 100,type = "correlation",xlab = "", ylab="", main="")
autocorr <- apply(abs(XDAXd),2,Acf,lag.max = 100,type = "correlation",xlab = "", ylab="", main="")
autocorr <- apply(XDAXd^2,2,Acf,lag.max = 100,type = "correlation",xlab = "", ylab="", main="")
```

Gráficas de la función de densidad de la NIG y sus correspondientes Normales (Figura 10)

```
par(mfrow=c(2,2)
alpha=30; beta=0; mu=0; delta=0.015;
curve(dnig(x, alpha,beta,delta,mu),xlim=c(0.075,0.075),ylim=c(0,30),n=500,type="l",lty=1,xlab="",ylab="",main="1")
temp=sqrt(alpha^2-beta^2)
mean <- mu +( delta*beta)/(temp);
sigma2= (delta*(alpha^2))/(temp^3); sigma=sqrt(sigma2);
curve(dnorm(x,mean=mean,sd=sigma),add=TRUE,n=500,type="l",lty=2,xlab="",ylab="",main="")
```

```
alpha=150; beta=0; mu=0; delta=0.015;
curve(dnig(x, alpha, beta, delta, mu), xlim=c(0.075, 0.075), ylim=c(0, 50), n=500, type="l", lty=1, xlab="", ylab="", main="2")
temp=sqrt(alpha^2-beta^2)
mean <- mu + (delta*beta)/(temp);
sigma2= (delta*(alpha^2))/(temp^3); sigma=sqrt(sigma2);
curve(dnorm(x, mean=mean, sd=sigma), add=TRUE, n=500, type="l", lty=2, xlab="", ylab="", main="")
```

```
alpha=30; beta=10; mu=0; delta=0.015;
curve(dnig(x, alpha, beta, delta, mu), xlim=c(0.075, 0.075), ylim=c(0, 30), n=500, type="l", lty=1, xlab="", ylab="", main="3")
temp=sqrt(alpha^2-beta^2)
mean <- mu + (delta*beta)/(temp);
sigma2= (delta*(alpha^2))/(temp^3); sigma=sqrt(sigma2);
curve(dnorm(x, mean=mean, sd=sigma), add=TRUE, n=500, type="l", lty=2, xlab="", ylab="", main="")
```

```
alpha=30; beta=-10; mu=0; delta=0.015;
curve(dnig(x, alpha, beta, delta, mu), xlim=c(0.075, 0.075), ylim=c(0, 30), n=500, type="l", lty=1, xlab="", ylab="", main="4")
temp=sqrt(alpha^2-beta^2)
mean <- mu + (delta*beta)/(temp);
sigma2= (delta*(alpha^2))/(temp^3); sigma=sqrt(sigma2);
curve(dnorm(x, mean=mean, sd=sigma), add=TRUE, n=500, type="l", lty=2, xlab="", ylab="", main="")
```

Gráficas de la función de densidad de la NIG y sus correspondientes Normales en escala logarítmica (Figura 11)

```
x<-seq(from=-0.09, to=0.09, length.out=500)
curve(log(dnig(x, alpha= 30, beta= 0, delta= 0.015, mu= 0)), type="l", lty=1, xlab="", ylab="", main="1", xlim=c(-0.15, 0.15), ylim=c(-2, 4))
y<-log( dnorm(x, mean=mean, sd=sigma))
lines(x, y, lty=2)
```

```
x<-seq(from=-0.19, to=0.19, length.out=500)
curve(log(dnig(x, alpha= 150, beta= 0, delta= 0.015, mu= 0)), type="l", lty=1, xlab="", ylab="", main="2", xlim=c(-0.20, 0.20), ylim=c(-20, 5))
y<-log( dnorm(x, mean=mean, sd=sigma))
lines(x, y, lty=2)
```

```
x<-seq(from=-0.09, to=0.09, length.out=500)
curve(log(dnig(x, alpha= 30, beta= 10, delta= 0.015, mu= 0)), type="l", lty=1, xlab="", ylab="", main="3", xlim=c(-0.15, 0.15), ylim=c(2, 4))
y<-log( dnorm(x, mean=mean, sd=sigma))
lines(x, y, lty=2)
```

```
x<-seq(from=-0.09, to=0.09, length.out=500)
curve(log(dnig(x, alpha= 30, beta= -10, delta= 0.015, mu= 0)), type="l", lty=1, xlab="", ylab="", main="4", xlim=c(-0.15, 0.15), ylim=c(2, 4))
y<-log( dnorm(x, mean=mean, sd=sigma))
lines(x, y, lty=2)
```

Estimación de los parámetros de la distribución NIG para las series diaria, semanal y mensual de los logreturns del DAX 30 (Tabla 10)

```
nigFit(nXDAXd, alpha = 49, beta = -4.8, delta = 0.01, mu = 0.001)
nigFit(nXDAXw, alpha = 33, beta = -7.8, delta = 0.03, mu = 0.01)
nigFit(nXDAXm, alpha = 15, beta = -7, delta = 0.1, mu = 0.01)
```

```
alphafd <- 49.195961699;betafd <- -4.883579874;deltafd <- 0.011800869;mufd <- 0.001274932
alphafw <- 33.031597136;betafw <- -7.923094366;deltafw <- 0.033472579;mufw <- 0.008741963
alphafm <- 17.28097973;betafm <- -7.13702345;deltafm <- 0.05487273;mufm <- 0.02689937
```

Gráficas de las curvas de densidad empírica, Normal y NIG con parámetros del DAX 30, así como las mismas curvas en escala logarítmica (Figura 12)

```
par(mfrow=c(3,2))
densityXDAXd <- density(XDAXd,n=500)
plot( densityXDAXd ,
type="l",lty=1,xlab="",ylab="",main="",xlim=c(-
0.06,0.06),col="blue")
curve( dnorm(x,mean=mud,sd=sigmad),from=-0.06,
to=0.06,add=TRUE,n=500,
type="l",lty=2,xlab="",ylab="",main="",col="black")
curve(dnig(x,alpha=alphafd,beta=betafd,delta=deltafd,mu=mufd),n=500
,add=TRUE, type="l",from=-0.06,
to=0.06, lty=1,xlab="",ylab="",main="",col="red")
```

```
plot( densityXDAXd$x, log(densityXDAXd$y) ,
type="l",lty=1,xlab="",ylab="",
main="",xlim=c(-0.08,0.08), ylim=c(-4,4),col="blue")
curve( log(dnorm(x,mean=mud,sd=sigmad)),from=-0.08,
to=0.08,add=TRUE,n=500,
type="l",lty=2,xlab="",ylab="",main="",col="black")
curve(log(dnig(x,alpha=alphafd,beta=betafd,delta=deltafd,mu=mufd)),
n=500,add=TRUE, type="l",from=-0.08,
to=0.08, lty=1,xlab="",ylab="",main="",col="red")
```

```
densityXDAXw <- density(XDAXw,n=500)
plot( densityXDAXw , type="l",lty=1,xlab="",ylab="",main="",
xlim=c(-0.10,0.10), ylim=c(0,17),col="blue")
curve( dnorm(x,mean=muw,sd=sigmax),add=TRUE,n=500,
type="l",lty=2,xlab="",ylab="",main="",col="black")
curve(dnig(x,alpha=alphafw,beta=betafw,delta=deltafw,mu=mufw),n=500
,add=TRUE, type="l",from=-0.10,
to=0.10, lty=1,xlab="",ylab="",main="",col="red")
```

```
plot( densityXDAXw$x, log(densityXDAXw$y) ,
type="l",lty=1,xlab="",ylab="",
main="",xlim=c(-0.12,0.12), ylim=c(-3,3),col="blue")
curve( log(dnorm(x,mean=muw,sd=sigmax)),from=-0.12,
to=0.12,add=TRUE,n=500,
type="l",lty=2,xlab="",ylab="",main="",col="black")
curve(log(dnig(x,alpha=alphafw,beta=betafw,delta=deltafw,mu=mufw)),
n=500,add=TRUE, type="l",from=-0.12,
to=0.12, lty=1,xlab="",ylab="",main="",col="red")
```

```
densityXDAXm <- density(XDAXm, n=500)
plot( densityXDAXm , type="l",lty=1,xlab="",ylab="",main="",
xlim=c(-0.2,0.2),ylim=c(0,10),col="blue" )
curve( dnorm(x,mean=mum,sd=sigmam),add=TRUE,n=500,
type="l",lty=2,xlab="",ylab="",main="",col="black")
curve(dnig(x,alpha=alphafm,beta=betafm,delta=deltafm,mu=mufm),n=500
,add=TRUE, type="l",from=-0.2,
to=0.2, lty=1,xlab="",ylab="",main="",col="red")
```

```
plot( densityXDAXm$x, log(densityXDAXm$y) ,
type="l",lty=1,xlab="",ylab="",
main="",xlim=c(-0.2,0.2), ylim=c(-2,3),col="blue")
curve( log(dnorm(x,mean=mum,sd=sigmam)),from=-0.20,
to=0.20,add=TRUE,n=500,
type="l",lty=2,xlab="",ylab="",main="",col="black")
curve(log(dnig(x,alpha=alphafm,beta=betafm,delta=deltafm,mu=mufm)),
n=500,add=TRUE, type="l",from=-0.2,
to=0.2, lty=1,xlab="",ylab="",main="",col="red")
```