FACULTAD DE TURISMO Y FINANZAS

GRADO EN FINANZAS Y CONTABILIDAD

Título del Trabajo Fin de Grado

Trabajo Fin de Grado presentado por Manuel Quevedo Zarcero, siendo la tutora del mismo la profesora Inmaculada Masero Moreno.

Vº. Bº. de la Tutora: Alumno:

Dña. Inmaculada Masero Moreno D. Manuel Quevedo Zarcero

Sevilla. Junio de 2015

GRADO EN FINANZAS Y CONTABILIDAD
FACULTAD DE TURISMO Y FINANZAS

TRABAJO FIN DE GRADO
CURSO ACADÉMICO [2014-2015]

TÍTULO:
ANÁLISIS DE UNA CARTERA DE INVERSIÓN DE MARKOWITZ COMO APLICACIÓN DE LA OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD

AUTOR:
MANUEL QUEVEDO ZARCERO

TUTOR:
DÑA INMACULADA MASERO MORENO

DEPARTAMENTO:
ECONOMÍA APLICADA III

ÁREA DE CONOCIMIENTO:
METODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA

.

RESUMEN:

En el presente trabajo se aborda una aplicación de la optimización clásica con restricciones de desigualdad en el ámbito financiero. Se plantea una aplicación práctica del modelo de Markowitz para una cartera de valores del Ibex35 que minimice el riesgo para una rentabilidad dada.

PALABRAS CLAVE:

Métodos Cuantitativos, Optimización, Inversión, Rentabilidad, Riesgo.

ÍNDICE

INTRODUCIÓN ... 1

CAPÍTULO 1. OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA ... 3

1.1. Breve aproximación histórica de la Optimización ... 3

1.2. Clasificación de los problemas de Optimización Matemática ... 4

CAPÍTULO 2: OPTIMIZACIÓN EN ECONOMÍA ... 7

2.1. La Optimización Libre en el contexto económico-empresarial ... 8

2.2. La Optimización Condicionada en el contexto económico-empresarial ... 9

CAPÍTULO 3: PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD ... 11

3.1. Formulación del problema ... 11

3.2. Condiciones de Kuhn-Tucker ... 12

3.2.1. Problemas con condiciones de no negatividad. Condiciones de K-T ... 13

3.3. Condición suficiente de Optimalidad Global ... 14

CAPÍTULO 4: EL MODELO DE MARKOWITZ ... 17

4.1. Introducción ... 17

4.2. Planteamiento ... 17

4.2.1. Minimización del riesgo ... 17

4.2.2. Rendimiento esperado ... 19

4.2.3. La frontera eficiente ... 20

CAPÍTULO 5: APLICACIÓN PRÁCTICA ... 21

5.1. Elección de las Empresas ... 21

5.2. Planteamiento y construcción del problema ... 23

5.3. Resolución del problema ... 25

5.3.1 Condiciones de Kuhn-Tucker ... 25

5.3.2 Resolución del problema mediante LINGO ... 27

5.3.3 Variantes sobre el problema ... 28

5.3.4 Conclusiones ... 30

BIBLIOGRAFÍA ... 31

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta una aplicación de la optimización clásica en el ámbito financiero. Más concretamente se diseñará una aplicación práctica utilizando el modelo de Markowitz para una cartera de valores con el fin de encontrar una cartera eficiente con el mínimo riesgo para una rentabilidad dada.

En primer lugar, comentaremos un planteamiento matemático del modelo económico, que se ajusta a un problema de Optimización. Ésta, ha estado siempre ligada al comportamiento humano, ya que el hombre por su propia naturaleza busca siempre lo mejor en casi todos los segmentos de su actividad.

Comenzaremos por exponer qué es la Optimización y las características de los distintos tipos de problemas que engloban para proponer una clasificación de los mismos.

En el capítulo 2 comentaremos la importancia de la Optimización, tanto condicionada como libre, en los contextos económicos- empresariales y en algunos de los problemas que se plantean en torno al consumidor, la empresa y el inversor.

Planteada la relación entre algunos problemas económicos y los problemas de Optimización, abordaremos en el capítulo 3 los **problemas con restricciones de desigualdad**, deteniéndonos en su estudio, ya que la aplicación práctica que se propone se ajusta a este tipo de problemas de optimización. Se plantearán las **Condiciones de Kuhn-Tucke**r.

En el capítulo 4, se expone el modelo de **Markowitz**. En primer lugar haremos una referencia a sus orígenes, las ideas sobre su teoría y, lo más importante, cómo se plantea su modelo. Como principal característica tiene que, el inversor analiza la situación de inversión para decidir qué proporción de su capital invertir para conseguir un mínimo riesgo. Se necesita construir una cartera de valores eficientes. La cuestión se centra en demostrar cómo, a partir de las expectativas que se crean sobre las rentabilidades esperadas de los activos financieros individuales, se puede realizar una correcta elección de la cartera a través de tres objetivos fundamentales; la minimización del riesgo, el rendimiento esperado y la frontera eficiente.

Una vez conocidas las ideas principales del modelo se plantea una aplicación práctica del mismo en el capítulo 5, que se ajusta a un problema de Optimización Clásica con restricciones de desigualdad. Se pretende construir una cartera de valores formada por tres compañías, justificando la elección de estas empresas del Ibex-35 referenciándonos a sus rentabilidades por dividendo.

Se exponen de forma detallada la construcción del mismo, es decir, el cálculo de cada uno de las funciones que intervienen en el modelo para realizar el adecuado planteamiento del problema.

A continuación, se plantean las Condiciones de Kuhn-Tucker para dicho problema y dado el número de variables y de ecuaciones e inecuaciones se resuelve mediante el programa informático LINGO, herramienta fundamental para formular problemas lineales y no lineales, resolverlos y analizar su solución.

Para finalizar, se introducen algunas variantes sobre el mismo y se analizan los resultados detalladamente.

CAPÍTULO 1

OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA

La Optimización Matemática proporciona los mejores valores de una función objetivo en un determinado dominio.

Según Barrios y otros, *"la Optimización es cualquier proceso genérico por el cual se obtiene la mejor solución a un problema dado y caracteriza la manera en que nos enfrentamos a situaciones del día a día conflictivas en las que deseamos escoger la opción más apropiada o beneficiosa" (2005, p.325).*

Para Costa en la Optimización *"necesitamos establecer unas condiciones de preferencia que nos permitan decidir qué situación es más conveniente entre las posibles". (1989, p.75).*

En ocasiones, para poder determinar cuál es la decisión óptima en un problema real, y siempre que la naturaleza del problema a resolver lo permita, se formula en términos matemáticos antes de abordar su resolución. Una vez transformado el problema al lenguaje matemático, es preciso disponer de técnicas que permitan conocer si éste tiene o no solución.

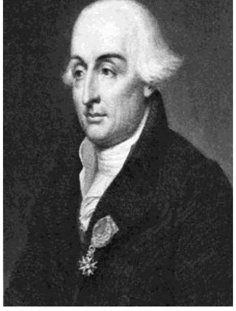
1.1 Breve aproximación histórica de la Optimización

La Optimización Matemática según Barrios y otros*, "se encuadra en la actualidad en un área de las Matemáticas que se denomina Investigación Operativa" (2005, p.326)*. Ésta disciplina surge a partir de la Segunda Guerra Mundial debido al interés que planteaba la aplicación de los métodos matemáticos en las operaciones bélicas.

Es un área extremadamente extensa que aborda problemas relacionados con la búsqueda de la mejor alternativa, empleando diversos enfoques para su resolución. Sin embargo el origen de la Optimización Matemática se remonta a épocas muy anteriores, siendo posible el tratamiento de tales problemas con el nacimiento del Análisis Matemático. El problema de Optimización más antiguo conocido, data del siglo V a. C y consiste en encontrar de entre todas las curvas planas cerradas aquella que abarca mayor superficie.

La formalización de este tipo de problemas y su resolución por procedimientos analíticos se aborda en el siglo XVII a través del Cálculo Diferencial, dando lugar a lo que hoy conocemos como Optimización Clásica.

La **Optimización Clásica** aborda problemas en los que todas sus funciones son suficientemente diferenciables y trata problemas de Optimización sin restricciones (Optimización Libre) o bien con restricciones (Optimización Condicionada o Restringida)



Joseph-Louis Lagrange

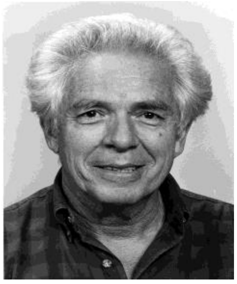
Las técnicas clásicas de **Optimización Condicionada** fueron desarrolladas en el siglo XVIII, gracias a las aportaciones de Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813). El principio general sobre el que se basa el llamado *método de los multiplicadores de Lagrange* consiste en modificar la función objetivo para incorporar el efecto de las restricciones de igualdad. Esto se lleva a cabo añadiendo a la función que se está optimizando las expresiones que definen las restricciones multiplicadas por parámetros que actúan a modo de variables adicionales. La nueva función construida se denomina función de Lagrange o Lagrangiana.

En un principio, los problemas con restricciones de igualdad pueden ser resueltos mediante el método de sustitución. Éste emplea la estrategia de eliminación de variables como medio para conseguir la transformación del problema original (restringido) en un problema libre. El método de Lagrange también persigue la transformación del problema original en uno sin restricciones aumentando el número de incógnitas del problema en un número igual al de las restricciones del enunciado original.

El método de los multiplicadores no solo proporciona el óptimo sino que también facilita información sobre la sensibilidad del valor óptimo ante cambios en las disponibilidades. Además se obtiene información adicional sobre el efecto que las restricciones tienen en el valor óptimo del problema a partir de los valores de los multiplicadores asociados a las correspondientes restricciones.

Las condiciones necesarias que deben satisfacer los óptimos de los problemas de Optimización con restricciones de desigualdad fueron publicadas por primera vez en el año 1939 por William Karush (1917-1997) en la tesis de maestría[1], aunque fueron renombradas por Harold William Kuhn (1925-2014) y Albert William Tucker (1905-1995) en un artículo[2] en 1951. Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) son una generalización del método de los multiplicadores de Lagrange para problemas de Optimización con restricciones de desigualdad. Se suelen nombrar como las condiciones de Kuhn-Tucker.


Albert William Tucker


Harold William Kuhn


William Karush

1.2 Clasificación de los problemas de Optimización Matemática

Las técnicas de Optimización Matemática admiten distintas clasificaciones atendiendo a las características del problema, como son los valores que pueden tomar las variables o los tipos de funciones que aparecen en el modelo.

Los tipos de problemas de optimización se pueden clasificar en función de diversos criterios, como son:

- Según la diferenciabilidad de las funciones: problemas diferenciables y problemas no diferenciables.
- Según el tipo de restricciones: problemas sin restricciones, problemas con restricciones de igualdad y programa con restricciones de desigualdad.
- Según la convexidad de la función objetivo y del conjunto factible: problemas convexos y problemas no convexos.
- Según la linealidad de funciones: problemas lineales y problemas no lineales.

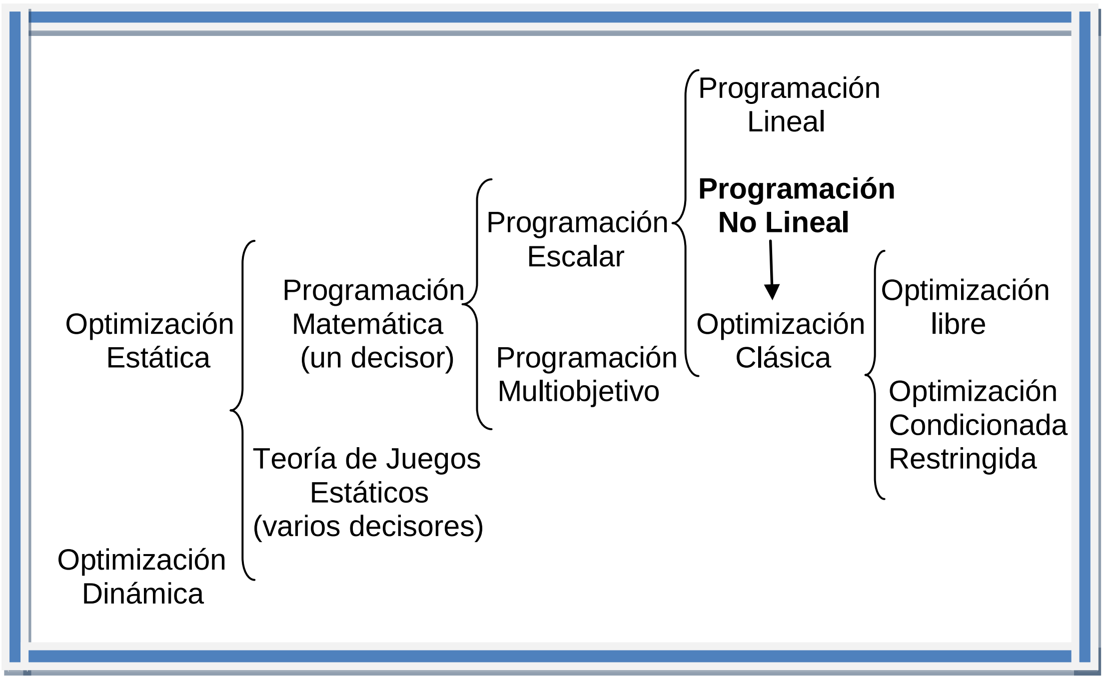
[1] *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints*
[2] *"Nonlinear Programming" presentado en el Proceedings of 2nd Berkeley Symposium*

La Optimización Estática analiza modelos en un instante temporal dado y la Optimización Dinámica trabaja con valores de decisión que dependen del tiempo.

La Programación Matemática es la parte de la Optimización dedicada a la resolución de problemas en los que no se considera el tiempo como variable, existe un único decisor y no hay aleatoriedad.

Cuando existe un único decisor el problema se encuadra en la Programación Matemática y si existen varios decisores el problema se encuadra dentro de la Teoría de Juegos. Cuando hay un único decisor y hay una única función objetivo el problema se considera de Programación Escalar y de Programación Multiobjetivo cuando hay varios objetivos.

Dentro de la Programación Escalar se encuentra la Programación Lineal que trata la optimización de una función lineal sujeta a una serie de restricciones también lineales y la Programación No Lineal cuya característica es la presencia de no linealidades en la función objetivo y/o en las restricciones.



Esquema 1.1. Clasificación de la Optimización Matemática
Fuente: Barrios y otros (2005, p. 328).

CAPÍTULO 2

LA OPTIMIZACIÓN EN ECONOMÍA

Una de las definiciones más conocidas de la Economía según Barrios y otros, hace referencia a "*la asignación óptima de recursos escasos" (2005, p.325*) Esta definición establece una clara relación entre Optimización y Economía.

En Economía, así como en otras ciencias, aparecen a menudo situaciones en las que es necesario tomar la mejor decisión entre varias posibles. Si este problema se puede formular matemáticamente, da lugar a un problema de Optimización Matemática.

Los distintos agentes económicos tratan de alcanzar de entre todas las opciones posibles aquella que les resulte más satisfactoria, adoptando comportamientos optimizadores según un criterio de selección, como por ejemplo obtener la combinación de inputs de mínimo coste, maximizar los beneficios para una empresa, satisfacer la demanda con el mínimo coste o maximizar la utilidad bajo un supuesto dado.

En un entorno económico, es frecuente que existan determinadas restricciones de una u otra naturaleza que acoten el conjunto de posibles decisiones de los agentes. En ocasiones, es posible formalizar matemáticamente los problemas económicos, sustituyendo las acciones por variables, los objetivos por funciones y los medios disponibles por restricciones

Las herramientas propias de la Optimización Matemática han desempeñado un papel primordial en la formalización de problemas básicos en el Análisis Económico como en el caso de la asignación eficiente de recursos escasos entre fines alternativos. En este contexto se supone la racionalidad como característica principal de la toma de decisiones. Según Barrios y otros *"el axioma de racionalidad, asegura que los agentes económicos tienen preferencias consistentes y bien especificadas en virtud de las cuales eligen sus acciones para obtener el mejor resultado posible, siendo su conducta de carácter optimizador" (2005, p.326)*. Esto supone buscar la asignación más eficiente entre todas las posibles de recursos, lo que convierte estos planteamientos en problemas de optimización, como los que encontramos típicamente en la teoría del consumidor (maximización de la utilidad) y de la empresa (maximización del beneficio, minimización del coste).

La Teoría Económica se basa en modelos de comportamiento humano que definen al agente objeto de estudio del modo más sencillo posible basándose en la hipótesis de comportamiento racional de los agentes económicos. Por ello, asume que estos tienen propiedades bien definidas y actúan consecuentemente con esas prioridades, de modo que su conducta es optimizadora. Este supuesto sencillo, consensuado dentro del Análisis Económico, no ha quedado exento de controversias. Gran parte se ha centrado en discernir hasta qué punto consumidores y empresas optimizan al tomar decisiones, en la medida que, claramente, ninguno de ellos realiza en general un sofisticado análisis matemático de la situación.

Sin embargo, si la elección realizada es acertada para el agente, aceptar como válido el principio de racionalidad supone calificar de racional aquel comportamiento que, en su lugar, pueda justificarse como derivado de la maximización de una función objetivo bajo ciertas restricciones y en estas circunstancias se puede establecer una estrechísima relación entre los problemas económicos y los problemas de optimización. Justamente es esta relación la que ha ejercido una mayor influencia en los avances significativos de la Economía Matemática, acaecidos tras el nacimiento de la Programación Lineal y la Teoría de Juegos como respuesta a problemas de carácter económico.


Antoine Augustin Cournot

El pionero en la incorporación de la teoría formal de máximos y mínimos de funciones en el campo económico fue el considerado "padre" de la Economía Matemática, Antoine Augustin Cournot (1801-1877). La incorporación de nuevas técnicas que permitieran el análisis de problemas con restricciones permitió manejar situaciones más realistas, además fue el primero en utilizar funciones matemáticas para describir conceptos económicos como la demanda, la oferta o el precio.

El método de los multiplicadores de Lagrange es una herramienta de gran interés para el economista, gracias a la cual es posible analizar el comportamiento humano desde el punto de vista de un comportamiento maximizador con restricciones. El primer problema económico en ser abordado con la técnica de los multiplicadores de Lagrange, consistió en encontrar la distribución eficiente de un recurso entre distintos usos de manera que maximizará la utilidad total.


Leonid Kantorovich

Ya en el siglo XX, un nuevo y espectacular avance para la optimización se produjo en 1939 de la mano del matemático ruso Leonid Kantorovich[3] (1912-1986), al advertir que los problemas de planificación de la producción poseen una estructura matemática definida y representó un gran avance en la comprensión de la asignación de recursos para lograr resultados óptimos.

2.1 La Optimización Libre en el contexto económico-empresarial.

En la Teoría de la Empresa, donde el comportamiento racional induce a la maximización de beneficios o la minimización de los costes, es frecuente encontrar situaciones que pueden ser resueltos mediante problemas de optimización libre. Por ejemplo, la obtención de un plan de producción para una empresa que fabrica un producto a partir de varios inputs o para una empresa que fabrica varios productos.

Un importante papel es el que juega la Optimización Clásica Libre en la Estadística y Econometría, por ejemplo, para obtener estimadores de máxima verosimilitud. El método de los mínimos cuadrados es una aproximación polinómica usada como en el ajuste de datos y la estadística. Sin embargo la Optimización Clásica presenta como inconvenientes las funciones han de ser suficientemente diferenciables y que los óptimos que se calculan no son absolutos, sino relativos a un entorno más o menos amplio del punto encontrado.

[3] Premio Nobel de Economía en 1975.

2.2 La Optimización Condicionada en el contexto económico-empresarial.

Los problemas de Optimización Condicionada encuentran una cantidad de aplicaciones en multitud de áreas, en particular en la Economía y la Empresa. Un problema económico casi siempre es un problema condicionado. En Economía es muy típico ilustrar la Optimización Condicionada con el ejemplo del consumidor que desea elegir los bienes adecuados para maximizar su utilidad teniendo en cuenta su restricción presupuestaria.

La Optimización Clásica libre es rica teóricamente y proporciona los fundamentos de la Optimización Clásica Condicionada. En ocasiones, ésta última podría verse como un caso particular de aquélla ya que hay problemas condicionados que se traducen de una forma más o menos directa a problemas libres.

Las restricciones limitan los valores que pueden tomar las variables, pues representan condiciones sobre las incógnitas del problema. En ocasiones tales condiciones se podrían eliminar si se tuvieran en cuenta variables adicionales. Por ejemplo, una restricción presupuestaria se podría eliminar si consideramos que se puedan obtener fondos adicionales a un cierto interés, a costa de modificar la función objetivo para incluir el coste de dicha operación. Así el problema de optimización restringida también puede reducirse en algunas ocasiones a problemas de optimización sin restricciones.

En numerosas ocasiones las restricciones de igualdad son una limitación a la hora de recrear fielmente la realidad. Una restricción presupuestaria no necesariamente debe satisfacerse con exactitud, es decir, no es necesario gastar todo el presupuesto, sino garantizar que el gasto sea menor o igual que el total disponible.

Son más realistas aquellos problemas que contienen restricciones definidas mediante inecuaciones (restricciones de desigualdad). Y por ello, veremos las consecuencias que tendría para el consumidor, la empresa y el inversor:

- **El problema del consumidor**

El problema básico del consumidor se resume en la elección de bienes a consumir a partir de una renta disponible. Dado que el conjunto de bienes y servicios para el consumo es muy amplio, se supone que el consumidor dispone de un nivel de renta que puede gastar en su totalidad o no en una combinación de productos que le proporciona un beneficio máximo. Así el consumidor realiza un proceso de elección teniendo en cuenta una conducta optimizadora.

- **El problema de la empresa**

En este caso el problema consiste en elegir la combinación adecuada de inputs, de manera que se consigan la maximización de los beneficios. Las variables de decisión son las cantidades a consumir de los distintos inputs y la función de producción informa de la cantidad de output que se puede producir con una determinada combinación de inputs. Conocidos los precios unitarios de los inputs y del output, se puede construir la función de beneficios de la empresa y la función objetivo del problema de optimización.

Sin embargo, pueden aparecer otras situaciones que nos guíe a un modelo de Optimización Condicionada. Por ejemplo, según Barrios y otros *“supongamos que la empresa tiene que satisfacer determinado contrato que le exige asegurar una producción prefijada mínima en P unidades de output” (2005, p.416).* La mejor opción posible para cumplir dicho contrato consiste en efectuar esa producción de manera que se minimice el coste asumido por la empresa, que será también una función de las unidades empleadas de los inputs.

- **El problema del inversor**

La inversión en cualquier tipo de bienes suele plantear elegir entre varias opciones disponibles. El problema para el inversor es elegir dentro de la cartera óptima qué combinación de títulos es la que le reportará una rentabilidad total prefijada, así como la minimización de su riesgo de inversión. En el presente trabajo abordaremos la resolución de un problema de este tipo.

CAPÍTULO 3

PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD

En este capítulo se formulan los problemas de optimización con restricciones de desigualdad, ya que son los que más se ajustan a la realidad de un modelo.

3.1 Formulación del problema.

Un problema de optimización con restricciones de desigualdad se formula de la siguiente manera:

Opt $f(x)$

s.a. $g(x) \leq b$

$x \in S \subseteq R^n$

Donde

$f: D \subseteq R^n \to R$ es la Función Objetivo

$g: R^n \to R^m \qquad g = (g_1, \ldots, g_m) \qquad g_j: R^n \to R \qquad j = 1 \ldots . m$

$X = \{x \in D \,/\, g(x) \leq b,\ x \in S\}$ es el conjunto factible.

<u>DEFINICIÓN</u>

Denotaremos por $D_F\ (x^0)$ al conjunto de direcciones factibles a partir de x^0.

$\overline{D_F\ (x^0)}$ representa la clausura de $D_F\ (x^0)$ y por $I\ (x^0)$ denotaremos el conjunto de índices correspondientes a las restricciones saturadas en x^0.

Un punto $x_0 \in X$ verifica **hipótesis de cualificación de restricciones** (h.c.r) si:

$$\overline{D_F\ (x^0)} = \{v \in R^n,\ \nabla g_i\ (x^0)^t v \leq 0,\ i \in I\ (X^0)\}$$

Esta condición es difícil de comprobar en la práctica y existen condiciones suficientes más operativas para determinar la presencia de esta hipótesis.

<u>DEFINICIÓN</u>

Un punto $x^0 \in X$ es **regular** si los gradientes de las restricciones saturadas en x^0 son linealmente independientes o es un punto interior de X.

La regularidad de un punto es condición suficiente para que se cumplan en él la hipótesis de cualificación de restricciones.

A continuación se exponen las dos condiciones suficientes más utilizadas para que todos los puntos de *X* cumplan hipótesis de cualificación de restricciones.

- Todas las funciones $g_i\,(x)$ que definen las restricciones $g_i\,(x) \leq\ b_i$ son convexas, y *X* tiene interior no vacío.
- Todas las restricciones del problema son lineales.

Supondremos que los puntos del conjunto factible verifican la denominada hipótesis de cualificación de restricciones.

3.2 Condiciones de Kuhn y Tucker

Consideremos el problema *Opt f(x)*

s.a g(x) ≤ b

con *f, g* ∈ C^1*(D)*

El siguiente resultado establece las denominadas condiciones de Kuhn y Tucker que son condiciones necesarias para que un punto que cumple las h.c.r. sea un óptimo local del problema.

Teorema (Condición Necesaria de Kuhn-Tucker de Optimalidad Local)

Sea $x^0\ \in X$ que verifica hipótesis de cualificación de restricciones.

Si x^0 es máximo (mínimo) local del problema, entonces $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots., \lambda_m\ \geq 0\ (\leq 0)$ tales que:

1) $\nabla f\ (X^0) = \ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\ \nabla g_j\ (X^0)$

2) $\lambda_j(g_j(x^0) -\ b_j) = 0, \qquad \forall j =, \ldots, m$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots., \lambda_m$ se denominan multiplicadores de Kuhn-Tucker.

$(x^0, \lambda^0) = \left(x^0, x_i^0, \lambda_i^0, \ldots \lambda_m^0\right)$ se denominan puntos de Kuhn-Tucker.

La segunda relación se llama de **holgura complementaria**. Establecen que si una restricción no está saturada en el punto, esto hace que el multiplicador correspondiente sea nulo.

Según el teorema los puntos de Kuhn-Tucker (x^0, λ^0) han de verificar las siguientes condiciones:

1) $\nabla f\ (X^0) -\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^0\ \nabla g_j\ (X^0) = 0$

2) $\lambda_j^0\left(g_j\ (x^0) -\ b_j\right) = 0,\ \ \forall\ j = 1, \ldots., m$

3) $\lambda_j^0\ \geq 0, j = 1, \ldots, m$

4) $g_j\ (x^0) \leq b_j, j = 1, \ldots., m$

Las condiciones anteriores se pueden expresar en términos de la función langraniana $L\,(x,\lambda) = f(x) - \lambda^t\,(g(x) - b)$, de la forma siguiente:

$(x^{0,}\lambda^0)$ es punto de Kuhn-Tucker si verifica:

1) $\frac{\partial L}{\partial xi}\,(x^0,\lambda^0) = 0 \;\; i = 1,\dots,n$

2) $\lambda_j^0\left(g_j\,(x^0) - b_j\right) = 0,\;\; \forall\, j = 1,\dots.,m$

3) $\lambda_j^0 \geq 0, \qquad j = 1,\dots,m$

4) $g_j(x^0) \;\leq b_j, \qquad j = 1,\dots.,m$

Las condiciones necesarias de mínimo local, son análogas cambiando el signo de los multiplicadores.

El valor de los multiplicadores de Kuhn-Tucker asociado a una restricción mide la variación marginal que experimenta el valor objetivo óptimo cuando se realizan variaciones infinitesimales en el coeficiente de la restricción correspondiente.

3.2.1 Problemas con condiciones de no negatividad. Condiciones de Kuhn-Tucker.

Las variables económicas siempre son no negativas, por lo que supongamos el problema anterior introduciendo que las variables están sujetas a condiciones de no negatividad.

El problema se formula de la forma siguiente.

$$\begin{array}{ll} Max & f(x) \\ s.a & g(x) \leq b \\ & x \geq \Theta \end{array}$$

con *f, g* ∈ C^1*(D)*

El siguiente resultado establece las denominadas condiciones de Kuhn y Tucker, condiciones necesarias para que un punto que cumple las h.c.r. sea un óptimo de este problema.

Teorema (Condición Necesaria de Kuhn-Tucker de Optimalidad Local)

Sea $x^0 \in X$ que verifica hipótesis de cualificación de restricciones.

Si x^0 es máximo (mínimo) local del problema, entonces $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots., \lambda_m \geq 0\ (\leq 0)$ tales que:

1) $\nabla f\,(x^0) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^0\,\nabla g_j(x^0) \leq 0$

$$2)\left(\nabla f\ (x^0) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^0\ \nabla\ g_j\ (x^0)\right)^t x^0 = 0$$

3) $\lambda_j^0\big(g_j(x^0) - b_j\big) = 0, \forall j = 1 \ldots\ldots, m$

Los puntos $(x^{0,}\lambda^0)$ se denominan puntos de Kuhn y Tucker.

En términos de la función Langraniana para el problema anterior, las condiciones anteriores se reescriben como:

$(x^{0,}\lambda^0)$ es punto de Kuhn y Tucker si verifica.

1) $\frac{\partial L}{\partial xi}\ (x^0, \lambda^0)\ \leq 0,\ \ i = 1, \ldots., n$

2) $x_i^0\ \frac{\partial L}{\partial xi}\ (x^0, \lambda^0) = 0,\ \ i = 1, \ldots., n$

3) $\lambda_j^0\big(g_j(x^0) - b_j\big) = 0, \forall j = 1 \ldots\ldots, m$

4) $\lambda^0 \geq \Theta$

5) $x^0 \geq \Theta$

6) $g_j\ (x^0) \leq b_j,\ \ \forall j = 1, \ldots., m$

Para el problema de minimizar, las condiciones son análogas salvo que el signo de cada multiplicador es negativo y el signo de las derivadas de la Lagrangiana respecto a las variables originales del problema que son positivas.

1) $\frac{\partial L}{\partial xi}\ (x^0, \lambda^0)\ \geq 0,\ \ i = 1, \ldots., n$

2) $x_i^0\ \frac{\partial L}{\partial xi}\ (x^0, \lambda^0) = 0,\ \ i = 1, \ldots., n$

3) $\lambda_j^0\big(g_j(x^0) - b_j\big) = 0, \forall j = 1 \ldots\ldots, m$

4) $\lambda^0 \leq \Theta$

5) $x^0 \geq \Theta$

6) $g_j\ (x^0) \leq b_j,\ \ \forall j = 1, \ldots., m$

3.3 Condición Suficiente de Optimalidad global

La Condición Suficiente de Óptimo Global se aplican para afirmar que los puntos de Kuhn-Tucker son Óptimos Globales.

Si $f\ y\ g_j,\ j = 1 \ldots\ldots m$ son funciones convexas y (x^*, λ^*) es un punto de Kuhn-Tucker entonces x^* es un mínimo global.

En el caso que *f* fuera estrictamente convexa, x^* es un mínimo global único.

Si *f* cóncava y g_j, $j = 1 \ldots\ldots m$ son convexas y (x^*, λ^*) es un punto de Kuhn-Tucker entonces x^* es un máximo global.

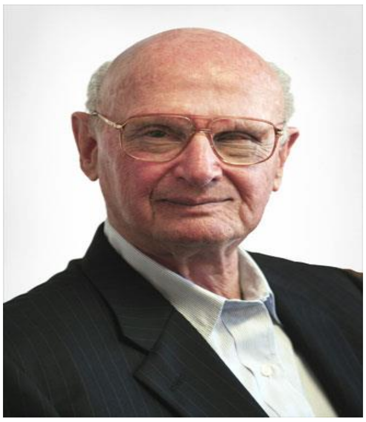
En el caso que *f* fuera estrictamente cóncava, x^* es un máximo global único.

CAPÍTULO 4

EL MODELO DE MARKOWITZ

4.1 Introducción

El modelo matemático de Harry Max Markowitz (1927-) se desarrolla sobre la base del comportamiento racional del inversor, es decir, el inversor desea la rentabilidad de la inversión y rechaza el riesgo, por lo que una cartera será eficiente si proporciona la máxima rentabilidad posible para un riesgo dado.



Harry Markowitz

Markowitz[4] publicó en 1952 en la revista *Journal of Finance,* un artículo[5] basado en su tesis doctoral, planteando un modelo de conducta racional del decisor para la selección de carteras de títulos-valores con liquidez inmediata. Desde su aparición, el modelo de Markowitz ha conseguido un gran éxito a nivel teórico, dando lugar a múltiples desarrollos y derivaciones, e incluso sentando las bases de diversas teorías de equilibrio en el mercado de activos financieros. Sin embargo, su utilidad en la práctica no ha sido tan extensa como podría suponerse de su éxito teórico.

Una de sus principales causas de este hecho contradictorio es la complejidad matemática de sus cálculos. El algoritmo de resolución es complejo y por otro lado, el número de estimaciones de rentabilidades esperadas, varianzas y covarianzas a realizar es muy elevado aunque depende del número de títulos a analizar.

Es importante señalar que el modelo no tiene en cuenta los costes de transacción ni los impuestos y considera la perfecta divisibilidad de los títulos-valores seleccionados.

4.2 Planteamiento del problema

4.2.1 Minimización del riesgo

El modelo de Markowitz analiza una cartera de mínimo riesgo. Éste se calcula a través de medidas estadísticas de dispersión. Una de ellas es la varianza y se define como la esperanza matemática del cuadrado de los desvíos que se producen entre cada valor de la variable y la media aritmética.

Ya que la varianza está expresada en términos cuadráticos, es útil calcular la desviación típica, que es la raíz cuadrática positiva de la varianza. En este caso, la desviación se utilizará como indicador del riesgo de un activo.

La desviación estándar de cada una de las acciones, permite indicar que a mayor desviación estándar mayor será el nivel de riesgo de ese activo ya que significa una mayor dispersión de los datos con respecto al promedio.

$$VAR\,(X) = E\left[\left(X_i - E\,(X)\right)^2\right]$$

[4] Premio Nobel de Economía en 1990.
[5] *"Portfolio Selection".*

$\sigma\,(X) = \,+\sqrt{E\,[\,(\,X_i\, -\, E\,(X))^2]}$

Supongamos una cartera a analizar que se compone de n activos y pueden tener algún tipo de riesgo, es decir, cada uno de ellos son variables aleatorias, con sus esperanzas, varianzas, covarianzas y correlación lineal entre ellos. La desviación típica de la cartera será la que nos indique el riesgo de la misma, y es la raíz cuadrada positiva de la suma de las varianzas de los n activos que la componen y sus covarianzas, ponderadas por la participación de cada activo en la cartera.

Si se plantea un problema de minimización del riesgo, la función objetivo es la varianza de la cartera. Para pasar de la varianza a la desviación típica se aplica una transformación monótona, que es la raíz cuadrática positiva, al minimizar la varianza también estaremos minimizando la desviación típica y por lo tanto el riesgo.

Las variables de elección serán las cantidades de capital a invertir en cada uno de los activos. A continuación, se muestra el planteamiento del problema matemático, minimizando el riesgo de la cartera con una restricción que supone que la inversión total será igual a 1.

$$Min \quad \sigma_P^2 = X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + \; ....+ X_n^2\,\sigma_n^2 + \,2\sum_{i=1}^{n-1}\;\sum_{j=i}^{n} X_i\,X_j\sigma_{ij}$$

$$s.a \quad \sum_{i=1}^{n} X_i = 1$$

$$X_i \;\geq 0 \qquad i = 1\,.......\,n$$

Dónde:

X_i = Proporción a invertir en el activo i.

σ_i^2 = Varianza del activo i.

σ_{ij} = Covarianza entre el Activo i y el Activo j, siendo i distinto de j.

σ_P^2 = Varianza del rendimiento de la cartera.

El problema se puede expresar de forma matricial.

$$Min\;\sigma_p^2 = [\,X_1\;\; X_2\;\; ....\;\; X_n]\,.\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{2,1}\;.... & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2\;\;.... & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2}\;\;.... & \sigma_n^2 \end{pmatrix}\;.\;\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$s.a \quad \sum_{i=1}^{n} X_i = 1$$

$$X_i \;\geq 0 \qquad i = 1\,.......\,n$$

Una vez resuelto el problema, se obtienen todos los X_i que indican la proporción a invertir en cada uno de los activos. Luego se reemplazan todos esos valores en la función objetivo para calcular σ_{pmin}^2. A continuación, se calcula su raíz cuadrada positiva, σ_{pmin} y se obtiene el riesgo mínimo de la cartera.

Como resultado de esta optimización se obtiene la composición de la cartera de valores de mínimo riesgo y el valor de dicho riesgo.

4.2.2 Rendimiento esperado

El rendimiento esperado de la cartera es el promedio ponderado de los rendimientos esperados de los activos individuales de la cartera, es decir, la suma de los rendimientos esperados de cada activo multiplicado por el porcentaje del capital invertido en cada uno tal y como se presenta en la siguiente ecuación:

$$E_p = X_1 \,.\, E_1 + X_2 \,.\, E_2 + \ldots + X_n \,.\, E_n$$

Donde:

E_i : Rendimiento esperado del Activo *i*.

E_p : Rendimiento esperado de la cartera.

X_i: Proporción a invertir en el Activo *i*.

Para calcular el rendimiento de la cartera, se debe de calcular el rendimiento esperado de cada activo. Éste se obtiene a través del cociente entre la diferencia del precio esperado del activo al momento t y su precio actual, dividido el precio actual.

$$E_i = \frac{E\,(P_i) - P_i}{P_i}$$

Donde:

$E\,(P_i)$: Precio esperado del activo i.

P_i : Precio actual del activo i.

Por otra parte, se considera al precio como una variable aleatoria. El valor esperado, será por lo tanto, la esperanza matemática de la variable aleatoria. Se define la esperanza como la suma del producto de cada valor numérico de la función por la correspondiente probabilidad de que se de ese estado. La ecuación, en este caso, sería:

$$E\,(P_i) = \sum_{s=1}^{N} p_s \,.\, p_{si}$$

Donde:

P_{si} : Estado S del precio del activo i.

P_s : Probabilidad puntual del estado s.

N : Número total de posibles estados.

4.2.3 La frontera eficiente

Para calcular la frontera eficiente nos basaremos en lo planteado en el subapartado 4.2.1. La función objetivo no cambiará, seguirá siendo la varianza de la cartera. En cuanto a las restricciones que hay que aplicar, se sigue invirtiendo el total de la cuantía de su capital, pero ahora añade una restricción correspondiente al rendimiento. En ella se le exigirá a la cartera un determinado rendimiento, ($\overline{E_p}$).

En la resolución de la minimización, se obtendrá un par ordenado compuesto por un rendimiento y el riesgo que conlleva.

Si se resuelve el problema para varios valores de $\overline{E_p}$, se obtiene una variedad de puntos con los que se puede dibujar la frontera eficiente. Para poder trazarla se deberá contar con algunos puntos óptimos, correspondientes a diferentes $\overline{E_p}$, siendo necesario realizar la minimización en más de una ocasión.

Matemáticamente el problema es el siguiente:

$$Min \;\; \sigma_p^2 = X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + \cdots + X_n^2\sigma_n^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{ji}^{n} X_i\,X_j\sigma_{ij}$$

$$s.a \qquad X_1 \cdot E_1 + X_2 \cdot E_2 + \cdots + X_n \cdot E_n \;\; \geq \; \overline{E_p}$$

$$X_1 + \; X_2 + \cdots + X_n = 1$$

$$X_1^0 \; \geq 0 \qquad i = 1 \ldots\ldots n$$

.

CAPÍTULO 5

APLICACIÓN PRÁCTICA

Después de plantear el modelo de Markowitz, se va a realizar una aplicación práctica con datos de tres compañías del Mercado Bursátil Español, concretamente del IBEX-35, para construir una cartera de valores y conseguir la minimización del riesgo para una rentabilidad deseada.

5.1 Elección de las Empresas

Para construir la cartera de valores, se han seleccionado tres de las empresas atendiendo a las rentabilidades que cosechan sus dividendos. Además, esta elección se refuerza con los datos publicados en ABCEMPRESAS el 07/06/2015 que recoge cuales son las empresas líderes en sus respectivos sectores[6].

A continuación se explicará el porqué de la elección de éstas empresas.

En primer lugar, el **Banco Santander**, es la compañía del IBEX-35 más rentable por dividendo con cargo a 2015. Los analistas prevén que el banco reduzca el importe por acción por primera vez en nueve años, aunque cotiza a ratios algo ajustados por lo que la mayoría pospone compras, aunque se aconseja mantener los títulos.

En segundo lugar, la petrolera **Repsol**, es una de las empresas más generosas del parqué del IBEX-35. Los analistas prevén una rentabilidad alta por dividendo para las accionistas de dicha empresa. Uno de esos motivos es que según expertos, si no encuentra activos interesantes en los que invertir, podría dedicar todo o parte de lo obtenido tras la venta de su filial argentina YPF en remunerar al accionista. Además, la compañía presenta buenas perspectivas de revalorización.

[6] http://www.merco.info/docs/Premios-ABC-Merco-2015-2.pdf

Por último, la compañía aseguradora **Mapfre**, que es la primera aseguradora del país, que es otra de las empresas del IBEX-35 que ofrece buenos rendimientos. Los analistas destacan el elevado descuento con el que cotiza. Además las previsiones de ingresos de Mapfre superan los 30.000 millones en los próximos dos años, así que es otro atractivo más en esta compañía aseguradora que se encuentra en auge.

MAPFRE

Como ya se ha comentado, tomaremos como referencia las rentabilidades por dividendo de estas tres compañías según datos facilitados por la Bolsa de Madrid en su Informe 2014[7] que nos aporta los años 2013 y 2014. Para la previsión de 2015 la rentabilidad se toma de un artículo en prensa de expansión.com[8] publicado el 28/09/2014.

En principio, se pretende mantener la cartera como inversión a medio-largo plazo. Esta opción nos permite plantear la inversión desde el punto de vista del rendimiento por dividendo y no desde el rendimiento de la acción, obviando la posible ganancia o perdida obtenida de su potencial venta que depende del precio del título. Por lo tanto, vamos a utilizar este ratio en vez de la rentabilidad de la acción propuesta por Markowitz.

La rentabilidad por dividendo es el ratio de rentabilidad que procede únicamente del cobro de dividendos por ser titular de unas acciones. Se calcula comparando el dividendo esperado por acción (DPA) y el precio de cotización de la misma (P). La rentabilidad por dividendo es el ratio de rentabilidad que procede únicamente del cobro de dividendos por ser titular de unas acciones. Se expresa en términos porcentuales y matemáticamente se obtiene de la siguiente forma:

$$\text{Rentabilidad por dividendo} = \frac{\text{DPA}}{\text{P}} \text{ x } 100$$

Existe una concordancia entre el dividendo repartido y la rentabilidad por dividendo, mientras que la relación es inversa entre la cotización y la rentabilidad por dividendo.

En numerosas ocasiones, la rentabilidad por dividendo suele tener comparación con la rentabilidad de la deuda pública del Estado, ya que los dividendos se asimilan a los intereses repartidos por los bonos y obligaciones.

Normalmente, las compañías con una elevada rentabilidad por dividendo suponen oportunidades de compra en relación con otras empresas que ofrecen una fuente de rentabilidad menor. Lo lógico es invertir en acciones que el mercado valora que van a distribuir una ganancia asegurada para el accionista (dividendo) por encima de lo que se valora la acción en el mercado en el que cotice. Sabiendo esto, no es tan relevante que el precio de la acción caiga, ya que el ingreso estará asegurado en forma de dividendo.

[7] www.bolsasmadrid.es/docs/SBolsas/InformesSB/anual.pdf
[8] http://www.expansion.com/2014/09/28/mercados/1411924991.html

RENTABILIDAD POR DIVIDENDO %			
Empresa	**2013**	**2014**	**Previsión 2015**
SANTANDER (S)	9.27(S_1)	8.60(S_2)	6.64(S_3)
REPSOL (R)	5.25(R_1)	6.16(R_2)	5.37(R_3)
MAPFRE (M)	3.85(M_1)	4.98(M_2)	5.24(M_3)

Tabla 5.1. Rentabilidad por dividendo %. Período (2013-Previsión 2015)
Fuente: www.bolsasmadrid.es/docs/SBolsas/InformesSB/anual.pdf
www.expansion.com/2014/09/28/mercados/1411924991.html

Como se puede apreciar en la tabla, tanto Santander como Repsol disminuyen su rentabilidad por dividendo con respecto al año pasado, pero aún así siguen siendo las más atractivas del Mercado Bursátil. En cambio, Mapfre debido al auge en sus resultados tiene un pequeño aumento en cuanto a este ratio financiero lo que conlleva el atractivo que tiene invertir en la compañía aseguradora.

5.2 Planteamiento y construcción del problema

A continuación, se detallan los pasos para llegar a la formulación del problema de la inversión en la cartera formada por las tres empresas seleccionadas.

Primer paso. Cálculo de la Varianza de cada activo:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} X_i^2 - \frac{1}{p^2} \left(\sum_{k=1}^{p} X_i \right)^2$$

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{3} \cdot (9.27^2 + 8.6^2 + 6.64^2) - \frac{1}{9} \cdot (9.27 + 8.6 + 6.64)^2 = 1{,}24526$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{3} \cdot (5.25^2 + 6.16^2 + 5.37^2) - \frac{1}{9} \cdot (5.25 + 6.16 + 5.37)^2 = 0.16295$$

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{3} \cdot (3.85^2 + 4.98^2 + 5.24^2) - \frac{1}{9} \cdot (3.85 + 4.98 + 5.24)^2 = 0.36406$$

La desviación estándar (S) de cada una de las rentabilidades por dividendo, estadístico que se toma como indicador del riesgo son los siguientes:

$\sigma_S = \sqrt{\sigma_s^2} = \sqrt{1.24526} = 1.1159$. Riesgo de un 11.59%

$\sigma_r = \sqrt{\sigma_r^2} = \sqrt{0.16295} = 0.40367$. Riesgo de un 4.04%

$\sigma_m = \sqrt{\sigma_m^2} = \sqrt{0.36406} = 0.60337$. Riesgo de un 6.03%

Segundo paso. Cálculo de las covarianzas entre los activos.

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} X_i \cdot X_j - \frac{1}{p^2}\left(\sum_{k=1}^{p} X_i\right) * \left(\sum_{k=1}^{p} X_j\right)$$

$$\sigma_{sr} = \frac{1}{3} \cdot (9.27 \cdot 5.25 + 8.6 \cdot 6.16 + 6.64 \cdot 5.37) - \frac{1}{9}\,((9.27 + 8.6 + 6.64) \cdot (5.25 + \\ + 6.16 + 5.37)) = 0.06923$$

$$\sigma_{sm} = \frac{1}{3} \cdot (9.27 \cdot 3.85 + 8.6 \cdot 4.98 + 6.64 \cdot 5.24) - \frac{1}{9}\,\big((9.27 + 8.6 + 6.64) \cdot (3.85 + \\ + 4.98 + 5.24)\big) = -0.546933$$

$$\sigma_{rm} = \frac{1}{3} \cdot (5.25 \cdot 3.85 + 6.16 \cdot 4.98 + 5.37 \cdot 5.24) - \frac{1}{9}\,((5.25 + 6.16 + 5.37) \cdot (3.85 + \\ + 4.98 + 5.24)) = 0.06923$$

$$\sigma_{sr} = 0.06923 = \sigma_{rs}$$
$$\sigma_{sm} = -0.54693 = \sigma_{ms}$$
$$\sigma_{rm} = 0.10996 = \sigma_{mr}$$

Tercer paso. Matriz de varianza y covarianza:

$$\text{M} = \begin{pmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_{sr} & \sigma_{sm} \\ \sigma_{rs} & \sigma_r^2 & \sigma_{rm} \\ \sigma_{ms} & \sigma_{mr} & \sigma_m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.24526 & 0.06923 & -0.54693 \\ 0.06923 & 0.16295 & 0.10996 \\ -0.54693 & 0.10996 & 0.36406 \end{pmatrix}$$

Cuarto paso. Función Objetivo.

Sean X_S , X_r , X_m el % de capital a invertir en cada uno de los activos.

$$\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\; X_i\, X_j$$

$$z = \sigma_s^2\, X_s^2 + \sigma_r^2\, X_r^2 + \sigma_m^2\, X_m^2 + 2\,\sigma_{sr}\, X_s\; X_r + 2\,\sigma_{sm}\, X_s\, X_m + 2\,\sigma_{rm}\, X_r\, X_m$$

$$\boldsymbol{z} = 1.24526\, \mathrm{X_s^2} + 0.16295\, \mathrm{X_r^2} + 0.36406\, \mathrm{X_m^2} + 0.13846\, X_s\, X_r - \\ + 1.09386\, X_s X_m + 0.21992\, X_r X_m$$

Quinto paso. Rendimiento de los Dividendos por Activo Bursátil.

$$\overline{Rs} = \frac{9.27 + 8.6 + 6.64}{3} = 8.17$$

$$\overline{Rr} = \frac{5.25 + 6.16 + 5.37}{3} = 5.59$$

$$\overline{Rm} = \frac{3.85 + 4.98 + 5.24}{3} = 4.69$$

Sexto Paso. Restricciones del problema.

Fijamos una rentabilidad o ganancia determinada del 8% (nivel máximo ya que si no, no hay conjunto factible).

$$\overline{\mathrm{R_s}}\,\mathrm{X_s} + \overline{\mathrm{R_r}}\,\mathrm{X_r} + \overline{\mathrm{R_m}}\,\mathrm{X_m} \geq \mathrm{R_p}$$

$$0.0817\mathrm{X_s} + 0.0559\mathrm{X_r} + 0.0469\mathrm{X_m} \geq 0.08$$

En este caso, las variables representan el % de inversión de cada tipo de acción a valorar. Vamos a suponer que no existe obligación de invertir todo el capital disponible, lo que se traduce en la siguiente restricción:

$$X_s + X_r + X_m \leq 1$$

Séptimo paso. Planteamiento del problema:

Obtener el porcentaje óptimo de inversión en cada activo que minimiza el riesgo asegurando una rentabilidad mínima del 8%, 6,15% y 4,5% y una inversión máxima de 10.000 euros

$$\begin{aligned} Min \quad z = {} & 1.24526X_S^2 + 0.16295X_r^2 + 0.36406X_m^2 + 0.13846X_s \cdot X_r - \\ & + 1.09386X_s \cdot X_m + 0.21992X_r \cdot X_m \end{aligned}$$

$$\text{s.a} \quad 0.0817\mathrm{X_s} + 0.0559\mathrm{X_r} + 0.0469\mathrm{X_m} \geq 0.08$$

$$X_s + X_r + X_m \leq 1$$

$$X_s\,, X_r\,, X_m \geq 0$$

5.3 Resolución del problema

5.3.1 Condiciones de Kuhn-Tucker

Vamos a escribir las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker para este problema.

En primer lugar comprobemos que se verifican las hipótesis de cualificación de restricciones y para ellos apliquemos una de las condiciones suficientes:

Las restricciones del problema son lineales, por lo tanto todos los puntos del conjunto factible verifican las hipótesis de cualificación.

Las función objetivo y las funciones que aparecen en las restricciones son de clase uno.

La función de Lagrange del problema es:

$$\begin{aligned} L(X_s, X_r, X_m, \lambda_1, \lambda_2) = {} & 1.24526X_S^2 + 0.16295X_r^2 + 0.36406X_m^2 + 0.13846X_s \cdot X_r - \\ & + 1.09386X_s \cdot X_m + 0.21992X_r \cdot X_m - \lambda_1(0.0817\mathrm{X_s} + 0.0559\mathrm{X_r} + 0.0469\mathrm{X_m} - \\ & +0.08) - \lambda_2 (X_s + X_r + X_m - 1) \end{aligned}$$

Los puntos $x^0 \in X$ que son Kunh-Tucker del problema verifican las siguientes condiciones:

1) $2 \cdot 1.24526X_s + 0.13846X_r - 1.09386X_m - 0.0817\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$

$2 \cdot 0.16295X_r + 0.13846X_s + 0.21992X_m - 0.0559\,\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$

$2 \cdot 0.36406X_m - 1.09386X_s + 0.21992X_r - 0.0469\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$

2) $X_s\ (2 \cdot 1.24526X_s + 0.13846X_r - 1.09386X_m - 0.0817\lambda_1 - \lambda_2 = 0)$

$X_r\ (2 \cdot 0.16295X_r + 0.13846X_s + 0.21992X_m - 0.0559\,\lambda_1 - \lambda_2 = 0)$

$X_m(2 \cdot 0.36406X_m - 1.09386X_s + 0.21992X_r - 0.0469\lambda_1 - \lambda_2 = 0)$

3) $\lambda_1\ (\ 0.0817\mathrm{X_s} + 0.0559\mathrm{X_r} + 0.0469\mathrm{X_m} - 0.08) = 0$

$\lambda_2\ (X_s + X_r + X_m - 1) = 0$

4) $\lambda_1 \geq 0 \qquad \lambda_2 \leq 0$

5) $X_s\,, X_r\,, X_m \geq 0$

6) $0.0817\mathrm{X_s} + 0.0559\mathrm{X_r} + 0.0469\mathrm{X_m} \geq 0.08$

$X_s + X_r + X_m \leq 1$

Dado el número de variables y de inecuaciones y ecuaciones vamos a resolverlo a través del programa informático LINGO. Éste programa nos proporciona óptimos locales. Para asegurar que el óptimo obtenido sea global podemos aplicar el Teorema de Local-Global.

La función es estrictamente convexa ya que:

$D_1 = 1{,}24526$ >0
$D_2 = 0.19812$ >0
$D_3 = 0.000001052 > 0$

El conjunto factible está formado por las soluciones de un sistema lineal de inecuaciones por lo que es convexo.

El Teorema Local-Global afirma que si *f* es estrictamente cóncava y el conjunto factible es convexo, entonces si existe un mínimo local es global y es único.

Para la obtención de óptimos locales en los problemas de programación matemática, se puede utilizar el programa informático LINGO.

El problema planteado se ajusta a uno de Optimización Condicionada que puede ser resuelto mediante el Teorema de Kuhn-Tucker

En este caso, lo vamos a resolver a través del programa LINGO. Para Lucero y Canizo, LINGO *"es una herramienta simple para formular problemas lineales y no lineales, resolverlos y analizar su solución……. el resultado que LINGO nos proporciona es la* optimización *que nos ayuda a encontrar el mejor resultado: la* *ganancia más alta o el costo más bajo"* (2002, p.1). Por lo tanto, LINGO proporciona un óptimo local del problema, sea único o no.

Según estos autores, el programa permite expresar cualquier problema de manera similar a una notación matemática en su conjunto, pudiendo incluir restricciones en el problema que se vaya a plantear. Incluso puede leer datos de una hoja de cálculo separada, base de datos o archivo de texto.

A continuación, se mostrará la resolución mediante dicho programa del problema planteado anteriormente.

5.3.2 Resolución del problema mediante LINGO

Para introducir los datos en el programa LINGO, fijamos una rentabilidad o ganancia determinada del 8% (el nivel máximo es la rentabilidad más alta entre los títulos para que el conjunto factible no sea el conjunto vacío).

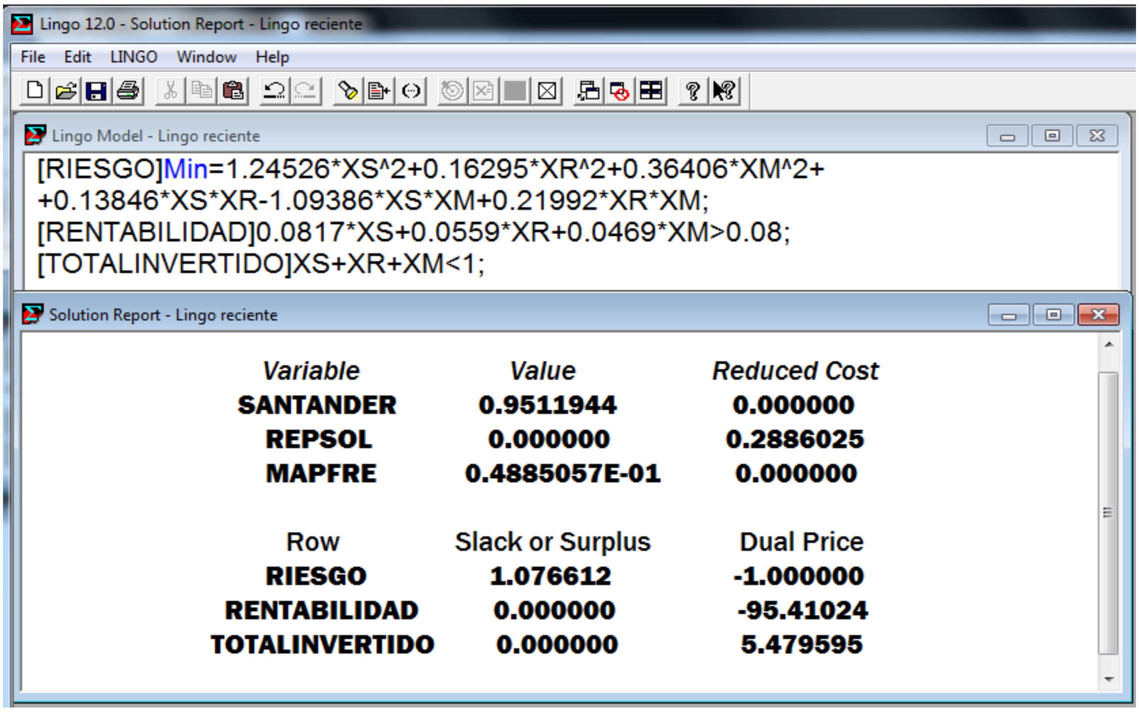


Figura 5.1. Solución del problema para una rentabilidad mínima del 8 % proporcionada por LINGO
Fuente: LINGO

Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

RENTABILIDAD 8%	**SANTANDER**	**REPSOL**	**MAPFRE**
INVERSIÓN	95.11%	0%	4.89%
RIESGO	10.375%		
TOTAL INVERTIDO	100%		

Tabla 5.2. Aplicación práctica con la rentabilidad fijada al 8%.
Fuente: Elaboración propia a partir del programa informático LINGO.

El reparto de la inversión se realiza entre dos de los tres títulos, concentrándose casi el total de la inversión en las acciones del Santander (95,11%), compañía cuya rentabilidad está más cercana al porcentaje mínimo fijado. En cuanto a las otras dos compañías, no se invierte en Repsol y se realiza una inversión mínima en Mapfre.

El riesgo de la inversión es de 10,375% inferior al riesgo de realizar toda la inversión en el título con el porcentaje con riesgo más alto, 11,59%, que en este caso es Santander.

Se invierte la totalidad del capital y se obtiene la rentabilidad más baja esperada.

5.3.3 Variantes sobre el problema

Vamos a plantear el mismo problema con dos valores diferentes de rentabilidad mínima esperada.

Comenzaremos por un porcentaje de rentabilidad que es el promedio de los rendimientos por activo bursátil de los tres títulos. Dicha rentabilidad es del 6,15%. A continuación, se muestra el problema resuelto mediante el programa LINGO.

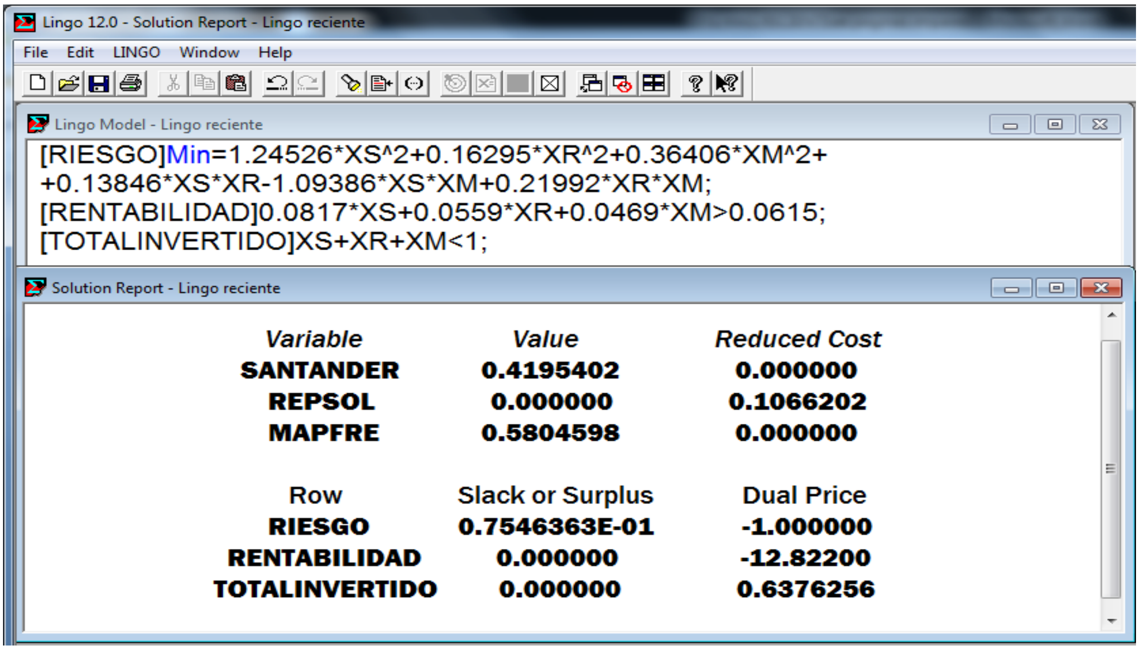


Figura 5.2. Solución del problema para una rentabilidad mínima del 6,15 % proporcionada por LINGO
Fuente: LINGO

La siguiente tabla muestra los resultados en el reparto de inversión entre los tres tipos de títulos:

RENTABILIDAD 6.15%	SANTANDER	REPSOL	MAPFRE
INVERSIÓN	41.95%	0%	58.05%
RIESGO	2.75%		
TOTAL INVERTIDO	100%		

Tabla 5.3. Aplicación práctica con la rentabilidad fijada al 6.15%.

Fuente: Elaboración propia a partir del programa informático LINGO.

La inversión se reparte de nuevo entre las dos mismas compañías del caso anterior, siendo el porcentaje a invertir superior en Mapfre, un 58,05%, pero “relativamente” cercano al de Santander (41,95%).

El riesgo de la inversión es de 2,75%, muy inferior al riesgo asociado a los datos del problema anterior y a los de los tres activos.

Se invierte la totalidad del capital y se obtiene la rentabilidad más baja esperada.

Por último, fijaremos una rentabilidad o ganancia determinada del 4,5% (nivel mínimo). No tiene sentido plantearse una rentabilidad inferior a este dato ya que la rentabilidad más baja de los activos es del 4,69 %

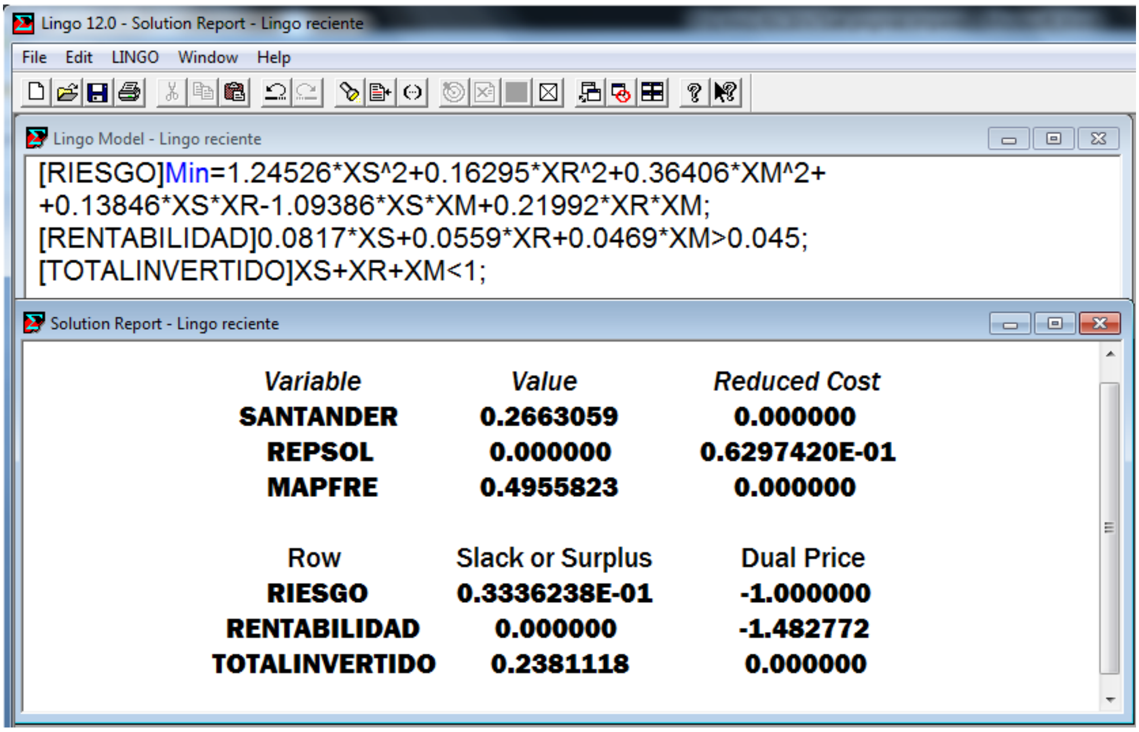


Figura 5.3. Solución del problema para una rentabilidad mínima del 4,5 % proporcionada por LINGO

Fuente: LINGO

Los resultados muestran el siguiente reparto de inversión entre los tres tipos de títulos:

RENTABILIDAD 4.5%	SANTANDER	REPSOL	MAPFRE
INVERSIÓN	26.63%	0%	49.56%
RIESGO	1.82%		
TOTAL INVERTIDO	76.19%		

Tabla 5.4. Aplicación práctica con la rentabilidad fijada al 4.5%.
Fuente: Elaboración propia a partir del programa informático LINGO.

Se mantiene la dinámica del segundo planteamiento, repartiéndose la inversión entre los Santander y Mapfre, siendo bastante superior la de este último, aunque inferiores ambas al caso anterior. Para esta rentabilidad mínima, el 23,8% del capital se deja sin invertir.

El riesgo de la inversión en este caso es del 1,82%. Este caso es el más conservador, lo que justifica ese bajo nivel de riesgo.

5.3.4 Conclusiones finales.

Según los datos anteriores, conforme se exige al planteamiento de la inversión una rentabilidad menor, el riesgo de la misma a su vez también va tomando valores inferiores. Por lo tanto a menor exigencia de rentabilidad menor riesgo asumido, es decir, mientras más conservador es el inversionista menor riesgo y rentabilidad.

Conforme disminuye el nivel mínimo de rentabilidad exigida, se invierten las posiciones de fuerza en la inversión entre Santander y Mapfre.

Es de destacar que cuando se fija la rentabilidad en el nivel mínimo es decir, 4.5%, el total de la inversión es de 76.19% por lo que no se invierte todo nuestro capital.

En ninguno de los tres casos analizados se invierte parte del capital en Repsol.

Cabe decir que la frontera eficiente será la misma para todos los inversores, siempre y cuando no haya información asimétrica. Esto nos dice que si todos los inversores tienen los mismos datos con los que actuar sobre los activos, construirán la misma frontera eficiente. A raíz de esto, cada uno decidirá cuál de las interminables carteras eficientes les conviene según el riesgo que quieran asumir en cada una de ellas.

Bibliografía

Agopián, E. (2010):*"Teoría de Selección de la Cartera de Valores"* 26 de abril.

Alcelay, S. (2015): Suplemento ABC, "ABC EMPRESA". 7 de junio. http://www.merco.info/docs/Premios-ABC-Merco-2015-2.pdf (Consultado 16/06/2015)

Arévalo Mª.T; Camacho E; Mármol A; Monroy, L. (2005): *Programación Matemática para la Economía.* Las Rozas (Madrid):Delta Publicaciones.

Barrios ,G; Carrillo, F; Concepción, G; Pestano, C. (2005): *Análisis de Funciones en Economía y empresa, un enfoque interdisciplinar*, Madrid: Díaz de Santos.

BME: Sociedad de Bolsas," *Informe Anual 2014".* http://www.bolsamadrid.es/docs/SBolsas/InformesSB/anual.pdf (Consultado 28/04/2015)

Botero Buitrago (2014), "*Aplicación del Modelo de Markowitz en la construcción de portafolios con las acciones de empresas más transitadas en la Bolsa de Valores de Colombia*, http://repository.unimilitar.edu.co/bitstream/10654/11669/1/APLICACI%C3%93N%20DEL%20MODELO%20DE%20MARKOWITZ%20.pdf (Consultado: 18/05/2015).

Canizo, E; Lucero, P (2002): *Investigación Operativa, Software para Programación Lineal.* http://www1.frm.utn.edu.ar/ioperativa/lingo_lindo.pdf (Consultado 16/06/2015)

Costa, E. (1989): *Matemáticas para economista,* Madrid: Pirámide

Díaz, M; Bernabéu, R ; Olmeda, M (2007): *"Aplicación del modelo de Markowitz para la determinación de la cartera eficiente de vinos en la empresa vinícola"* Vol. 103 (1) 43-53 http://www.aida-itea.org/aida-itea/files/itea/revistas/2007/103-1/43-53_ITEA_103-1.pdf (Consultado: 11/06/2015)

Gálvez, P; Salgado, M; Gutiérrez, M. (2010): *"Optimización de Carteras de Inversión, Modelo de Markowitz y estimación de volatilidad con Garch"* INVESTMENT PORTFOLIO OPTIMIZATION http://www.ubiobio.cl/miweb/webfile/media/42/version%209-2/finanzas.pdf (Consultado 11/05/2015)

González, C; Gil Fariña (2000): *El lenguaje de la Ciencia Económica,* Madrid: Ra- Ma.

Karush, W. (1939): *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints.* Tesis. Dept de Matemáticas, Universidad de Chicago, Illinois.

Kuhn, H.W. ; Tucker, A.W. Nonlinear Programming. *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium.* Berkeley. University of California Press, pp. 481-492

Markowitz, H.,(1952): "Portfolio Selection". *The Journal of Finance, 7 (1),* pp.77-91. https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf (Consultado 16/06/2015)

Pacheco J.M. (2002): "*Programación Cuadrática y selección de Carteras de inversión"* Séptimas Jornadas:*" Investigación en la Facultad"* de Ciencias Económicas y Estadística, (Consultado: 10/05/2015)

Pérez-Grasa; Minguillón, E; Jarne G. (2001): *Matemáticas para la Economía. Programación Matemática y Sistemas Dinámicos,* Madrid [etc] McGraw Hill, D.L

Sánchez-Galán ; Sogorb, M. (2015): *"Rentabilidad por Dividendo"* Expansion.com. 21 de mayo. http://www.expansion.com/diccionario-economico/rentabilidad-por-dividendo.html(Consultado: 27/05/2015)

Sekulits. C (2014): "Las mejores compañías para cosechar dividendos", *Expansion.com*, 28 de septiembre http://www.expansión.com/2014/09/28/mercados/1411924991.html (Consultado: 17/04/2015).

Zubeldia, M; Zabalza, M ; Zubiarre, Z. (2002): "El modelo de Markowitz en la gestión de carteras" *Cuadernos de Gestión* 2(1), pp. 33-46. https://addi.ehu.es/bitstream/10810/7000/1/CdG_212.pdf (Consultado: 17/04/2015)

.