



FACULTAD DE TURISMO Y FINANZAS

GRADO EN FINANZAS Y CONTABILIDAD

Algunos hechos estilizados de las series temporales financieras univariantes. Aplicación al índice FTSE 100

Trabajo Fin de Grado presentado por María Gómez Jiménez, siendo el tutor del mismo José Manuel Gavilán Ruiz.

Vº. Bº. Del Tutor:

Alumna:

D. José Manuel Gavilán Ruiz

Dña. María Gómez Jiménez.

Sevilla. Junio de 2014



**GRADO EN FINANZAS Y CONTABILIDAD
FACULTAD DE TURISMO Y FINANZAS**

**TRABAJO FIN DE GRADO
CURSO ACADÉMICO 2013-2014**

TÍTULO:

ALGUNOS HECHOS ESTILIZADOS DE LAS SERIES TEMPORALES FINANCIERAS UNIVARIANTES. APLICACIÓN AL ÍNDICE FTSE 100.

AUTOR:

MARÍA GÓMEZ JIMÉNEZ

TUTOR:

JOSÉ MANUEL GAVILÁN RUIZ

DEPARTAMENTO:

ECONOMÍA APLICADA I

ÁREA DE CONOCIMIENTO:

MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA

RESUMEN:

En este trabajo se analizan los rendimientos logarítmicos (logreturns) del índice FTSE 100. Se ponen de manifiesto las discrepancias entre lo observado en la realidad y lo que se deduce de la consideración del modelo Black-Scholes para representar su dinámica en el tiempo. Se muestra su falta de normalidad (asimetría, exceso de curtosis y colas pesadas). Sin embargo, se aprecia una mayor similitud con la distribución normal cuando el tiempo entre observaciones es mayor (agregación gaussiana). Se propone la distribución gaussiana inversa normal para modelizar los rendimientos mencionados y se prueba que no presenta las deficiencias del modelo normal. Por último, se analizan las autocorrelaciones de tales rendimientos. Aunque no se aprecian autocorrelaciones significativamente distintas de cero, como se desprende del modelo de Black-Scholes, sí que se aprecian cuando se consideran los tamaños de los logreturns a través de sus valores absolutos o sus cuadrados, lo que va en contra de lo esperado bajo el modelo de Black-Scholes.

PALABRAS CLAVE:

FTSE 100; modelo de Black-Scholes; logreturns; distribución gaussiana normal inversa; autocorrelación.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	1
2. EL FTSE 100	2
3. EL MODELO DE BLACK-SCHOLES	3
3.1MOVIMIENTO BROWNIANO.....	6
3.2DATOS EMPÍRICOS.....	7
4. ESTIMACIÓN DEL MODELO B-S	8
5. AGREGACIÓN GAUSSIANA.....	12
5.1 TEST NORMALIDAD.....	13
5.1 TEST SHAPIRO-WILK.....	13
5.2 TEST KOLMOGOROV-SMIRNOV.....	14
6. AJUSTE DE UNA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA INVERSA NORMAL	15
7. ALTERNATIVA AL MODELO DE B-S.....	18
8. AUTOCORRELACIÓN DE LOS LOG-RETURNS	19
9. CONCLUSIONES	21
BIBLIOGRAFÍA.....	22
APÉNDICE	23

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se realiza un estudio empírico para mostrar la discrepancia entre algunas propiedades teóricas de los logreturns o retornos logarítmicos de un activo financiero, que se desprenden de la consideración del modelo de Black-Scholes y lo observado en la realidad, tomando datos del índice medio ponderado de los cien principales títulos negociados en la Bolsa de Londres, el conocido como FTSE 100.

El trabajo se organiza de la siguiente manera:

En la Sección 2 se describe el FTSE 100, explicando sus características básicas y su cálculo. También se especifican las series de datos del FTSE 100 que se van a usar a lo largo del trabajo, así como de dónde se han obtenido, incluyendo una gráfica con los valores de cierre diarios de dicho índice.

En la Sección 3 se presenta el modelo de Black-Scholes.

En la Sección 4 se estiman los parámetros del modelo de Black-Scholes mediante el método de máxima verosimilitud, usando datos del FTSE 100. Se muestran la densidad empírica y la densidad normal ajustada de los logreturns diarios, semanales y mensuales y se analiza su discrepancia (asimetría y colas pesadas).

En la Sección 5 se analiza cómo cambia la distribución de los logreturns al aumentar el tiempo de observación entre dos precios consecutivos. Se pone de manifiesto como la discrepancia observada entre la densidad empírica y la normal disminuye conforme aumenta el tiempo entre las observaciones (agregación gaussiana).

En la Sección 6 se presenta la distribución gaussiana inversa normal (NIG). Como la distribución normal no es capaz de modelizar las colas pesadas observadas, y no tiene flexibilidad para capturar la asimetría, se introduce esta distribución más flexible. Se representan gráficamente cuatro distribuciones NIG con diferentes valores de los parámetros para ver la diferencia con la distribución normal y se estiman sus cuatro parámetros por el método de máxima verosimilitud, usando los datos del FTSE 100. Finalmente, se presenta la distribución NIG ajustada, junto con la densidad empírica y la distribución normal ajustada, para datos diarios, semanales y mensuales del FTSE 100, con el objetivo de que se aprecie más fácilmente cómo la distribución NIG se ajusta bien a la empírica tanto en las colas como en la asimetría, a diferencia de la distribución normal.

En la Sección 7 se propone como alternativa al modelo de Black-Scholes un proceso de Lévy gaussiano inverso normal. Este es un proceso mucho más complicado de analizar que el movimiento browniano y nos limitamos a proponerlo como alternativa al modelo de Black-Scholes con mejores propiedades empíricas.

En la Sección 8 se analiza la autocorrelación de los logreturns. El modelo de Black-Scholes defiende la independencia de los logreturns, sin embargo, si bien esto es corroborado para los logreturns del FTSE 100, no es así cuando se consideran sus valores absolutos o sus cuadrados.

En la Sección 9 se exponen las conclusiones obtenidas en este trabajo.

Se añade además un Apéndice donde se presentan y comentan las líneas de código usadas en el software estadístico R para llevar a cabo el presente estudio empírico.

2. EL FTSE 100

El índice FTSE 100, pronunciado popularmente como Fointsie 100, es publicado por el Financial Times. Lo componen los 100 principales valores de la Bolsa de Londres (London Stock Exchange). FTSE es un acrónimo de Financial Times Stock Exchange. El principal indicador del FTSE es el FTSE 100 Index. El índice fue desarrollado con un nivel base de 1000 a fecha 3 de enero de 1984.

La capitalización de las empresas que componen el índice supone el 70% del valor total del mercado de valores de Londres. Los valores se ponderan por el criterio de capitalización. Se revisa trimestralmente, el primer viernes de marzo, junio, septiembre y diciembre. Las sesiones se desarrollan de lunes a viernes.

El índice FTSE 100 bate el récord de subida en una sesión el 19 de septiembre de 2008 con un 9,33 por ciento en plena crisis de las hipotecas subprime. Fue una crisis financiera, por desconfianza crediticia que se extiende inicialmente por los mercados financieros americanos y es la alarma que pone el punto de mira en las hipotecas basuras europeas desde el verano del 2006 y se evidencia al verano siguiente con una crisis bursátil

Hay 100 empresas en el índice, pero el índice está compuesto por 102 valores ya que existen dos clases de acciones para Royal Dutch Shell y Schroders.

Su fórmula de cálculo es la siguiente:

$$I_t = \sum_{i=1}^n \frac{P_{it}C_{it}}{CBA_0K}$$

- i es el título utilizado en el cálculo del índice
- t es el periodo de calculo
- n es el número del activo en la ecuación
- C_{it} es el número de títulos de valor i en el periodo t
- P_{it} es el valor del título i en el periodo t
- CBA_0 es la capitalización bursátil en el periodo base
- K es un coeficiente de ajuste

La evolución del índice nos lo da el siguiente gráfico, donde observamos los precios de cierre diario del índice FTSE 100:

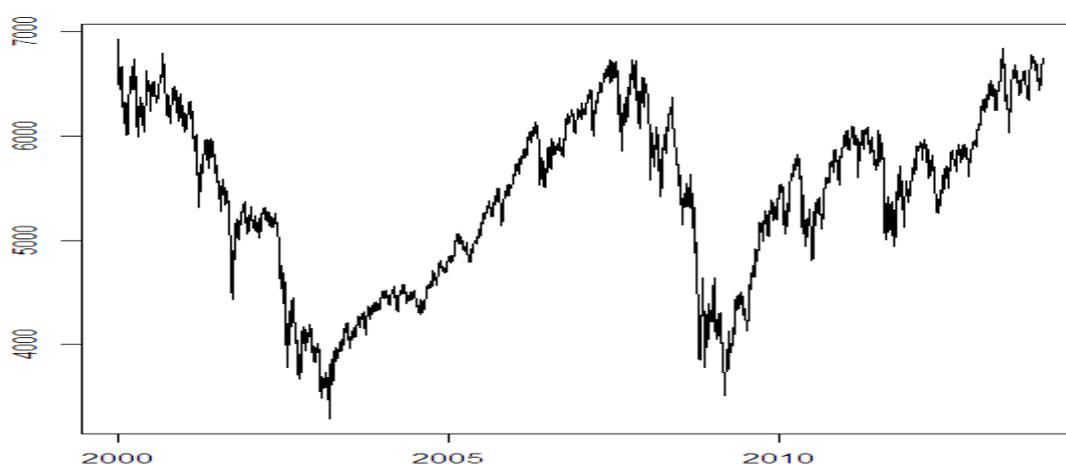


Figura 2.1. Evolución de los precios de cierre diarios del índice FTSE 100 desde el 1 de enero de 2000 hasta el 31 de diciembre de 2013.

Se puede observar, como hemos indicado anteriormente, que uno de los picos se presenta en plena crisis en el periodo comprendido entre 2007 y 2008. Después de una espectacular bajada hasta el año 2009, la tendencia en los últimos años es ascendente.

3. EL MODELO DE BLACK-SCHOLES

En 1973 los economistas Fischer Black y Myron Scholes -más tarde se les añadiría Robert C. Merton- publicaron en el Journal of Political Economy de Chicago una fórmula que ha transformado de arriba a abajo el sector financiero mundial hasta la actualidad. Se trata de la llamada ecuación Black-Scholes y se utiliza para valorar derivados financieros.

La ecuación Black-Scholes abrió la puerta a un nuevo mundo de cada vez más complejas inversiones y propició la llegada de un mercado financiero global de

proporciones mastodónticas. Todo iba de maravilla hasta que las hipotecas sub-prime aparecieron en escena y dieron por terminada la función. A partir de entonces, aquella ficticia realidad se tornó en un agujero negro de dinero inexistente, en un batacazo bancario global colosal y en una profunda crisis de la que todavía hoy se escuchan los ecos. Scholes y Merton (Black murió años antes) compartieron el Premio Nobel de Economía en 1997 por dicha fórmula, la cual se aplica a las opciones, que son acuerdos para comprar o vender un activo (llamado activo subyacente) a un precio específico en una fecha futura determinada.

Los mercados financieros no solo establecen contratos de compra y venta a un vencimiento determinado, sino que permiten también comprar y vender esos mismos contratos antes de su vencimiento, como si fueran mercancías de pleno derecho. La ecuación Black-Scholes especifica un determinado precio basado en el valor probable en su vencimiento. El modelo calcula el precio en el que en teoría se elimina el riesgo al comprar una opción.

La ecuación, como cualquier otro modelo matemático que han inventado los seres humanos, se basa en suposiciones, por lo que puede presentar algún que otro problema. El trabajo detrás de la elaboración de esta ecuación dejaba claro que existían unos supuestos, por tanto, no siempre miden con precisión el comportamiento del mercado.

El modelo concluye que:

$$C = SN(d_i) - Ke^{-rdT} N(d_z)$$

$$P = Ke^{-rdT} N(d_z) - SN(d_i)$$

Dónde:

$$d_i = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_z = d_i - \sigma\sqrt{T}$$

Definiendo:

- C es el valor de una opción de compra de una opción europea.
- P es el valor de una opción de venta de una opción europea.
- S es el precio del activo subyacente.
- K es el precio marcado en la opción (Strike price).
- T es el tiempo expresado en años que aún faltan por transcurrir en la opción.
- r es la tasa de interés libre de riesgo.
- σ es un parámetro de variabilidad o volatilidad.

- N es la función de distribución de la distribución normal.
- $N(d_1)$ y $N(d_2)$ son los valores de la función N en los puntos d_1 y d_2 .

Lo que, en resumidas cuentas, hace el modelo de Black-Scholes es proyectar el precio del activo subyacente del contrato de opciones a vencimiento en el ámbito de la distribución Normal considerando la tasa de interés libre de riesgo y la volatilidad implícita. Esta proyección permite definir las cotas máximas y mínimas esperadas de las variaciones del subyacente (y por tanto del propio precio del subyacente), el valor de la opción según se trate de una call o una put dependerá de la diferencia entre algunas de estas cotas y el strike (Knop, 2005).

Para valorar una opción se requiere un modelo que describa estadísticamente el valor $S(T)$ del valor subyacente en el periodo T (duración del contrato de opción de compra o venta desde su salida al mercado, hasta el vencimiento), es decir, cuál es el valor teórico del subyacente en el instante de tiempo T. Como el objetivo del modelo de Black Scholes es valorar el precio de opciones, debe usarse un modelo dinámico para el precio $S(t)$ del valor subyacente para todos los momentos t ocurridos antes del momento de vencimiento T. El modelo dinámico usado para decir la fórmula de Black Scholes es el movimiento browniano geométrico, también llamado proceso lognormal (consultar por ejemplo Martínez Barbeito (2003) para una mayor información). Para $0 \leq t \leq T$, el precio $S(t)$ viene dado por

$$S(t) = S(0) \exp(\mu t + \sigma B(t))$$

donde μ es un parámetro de tendencia y σ un parámetro de volatilidad o variabilidad. El precio inicial de la acción es $S(0)$ y $B(t)$ es el movimiento browniano. Para explicar lo que es el movimiento browniano, se introduce en primer lugar la noción de proceso estocástico.

Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias parametrizadas por el tiempo t, es decir, para cada t dado, $X(t)$ es una variable aleatoria.

El movimiento browniano $B(t)$ es un proceso estocástico que comienza en el origen, es decir, $B(0) = 0$, y que satisface las siguientes propiedades:

Incrementos independientes: la variable aleatoria $B(t) - B(s)$ es independiente de la variable aleatoria $B(u) - B(v)$ cuando $t > s \geq u > v \geq 0$.

Incrementos estacionarios: la distribución de $B(t) - B(s)$ para $t > s \geq 0$ es sólo una función de (t-s), y no de t y s por separado.

Incrementos normales: la distribución de $B(t) - B(s)$ para $t > s \geq 0$ es normal con esperanza 0 y varianza t-s.

La propiedad 3 implica la propiedad 2, por lo que la propiedad 2 es superflua. Sin embargo, si consideramos un proceso estocástico $L(t)$ que satisface sólo las dos primeras propiedades, $L(t)$ es un proceso de Lévy. Por lo tanto, vemos que el movimiento browniano es un caso particular de un proceso de Lévy.

3.1 MOVIMIENTO BROWNIANO

El modelo de movimiento Browniano geométrico describe la distribución de probabilidad de los precios futuros de un activo; en otras palabras, es un modelo matemático de la relación entre el precio actual de un activo y sus posibles precios futuros. El modelo de movimiento Browniano geométrico establece que los pagos futuros de un activo están normalmente distribuidos y que la desviación típica (volatilidad) de esta distribución puede estimarse con los datos del pasado.

Hipótesis: Los retornos logarítmicos de un activo entre el momento actual y un breve instante futuro Δt están normalmente distribuidos. La media de esta distribución es $\mu\Delta t$ y la desviación típica $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Técnicamente, se supone que el proceso de precios S resuelve la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t; S_0 > 0$$

En la siguiente figura se han representado tres trayectorias simuladas del movimiento browniano estándar ($\mu=0$, $\sigma=1$). El camino de un movimiento browniano es siempre continuo, de hecho, el movimiento browniano es el único proceso Lévy que tiene caminos continuos. Dichos caminos son llamados caminos muestrales.



Figura 3.1 Simulación de tres trayectorias del movimiento browniano estándar.

En el eje de abscisas están representados los periodos, mientras que en el eje vertical se muestran las cotizaciones. En ella, efectivamente se puede comprobar cómo las fluctuaciones de los tres movimientos se asemejan mucho a las oscilaciones de las cotizaciones de los valores de cualquier mercado financiero real.

El modelo supone que el precio en cada instante se cambia de manera independiente de su pasado: es como si el precio «olvidara» de dónde viene y decidiese continuamente, y mediante un procedimiento al azar, hacia dónde ir. O sea que este movimiento, a pesar de ser continuo, cambia en todo punto de dirección y de velocidad. Tiene trayectoria continua, pero no tiene tangente (no es derivable) en ningún punto.

Todas las trayectorias son continuas. Una vez que fue observado el precio en el instante $t=0$ (precio por tanto conocido), el precio (aleatorio) en un instante posterior t está regido por la ley de Gauss, cuyos parámetros dependen del tiempo t transcurrido.

3.2 DATOS EMPÍRICOS

Cuando hablamos de datos empíricos nos referimos a los datos que se obtiene por medio de la experimentación y la observación. En nuestro caso, los datos empíricos son los índice FTSE 100 en el periodo comprendido entre el 1 de enero de 2000 hasta el 31 de diciembre de 2013. Serán utilizadas series temporales diarias, semanales y mensuales; y la cotización estará expresada siempre en puntos básicos.

Las estimaciones de los parámetros μ y σ para la distribución Normal, expuestos en la tabla siguiente, han sido calculadas como la media y la desviación típica de la muestra.

	Media	S	Cv	Me	Máy	Mín
DIARIO	-0,0000072	0,01247	1720,59	0,0000	0,0938	-0,0926
SEMANAL	0,0000505	0,02568	508,61	0,0018	0,1258	-0,2363
MENSUAL	0,0004423	0,04186	94,63	0,0070	0,0829	-0,1395

Tabla 3.1. Media, desviación típica, coeficiente de variación, mediana, máximo y mínimo del FTSE 100 para el periodo de cotización que va desde 01-01-2000 a 31-12-2013.

Se observa que en todos los casos los logreturns medios y medianos están muy próximos 0. Con respecto al coeficiente de variación se observa que va disminuyendo según el tiempo que se tome (diario, semanal o mensual) siendo en el caso diario en el que presenta mayor variabilidad.

4. ESTIMACIÓN DEL MODELO B-S

En econometría financiera se denomina logreturn a la primera diferencia de los logaritmos de los precios de los activos financieros: $r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$. La serie r_t es la transformación preferida para el tratamiento de los datos financieros porque presenta algunas ventajas, como la aditividad en el tiempo, y es una buena aproximación de los retornos de los activos financieros. La transformación convierte la serie en estacionaria. Los retornos vienen dado por:

$$R_t = \frac{P_t - P_{(t-1)}}{P_{(t-1)}}$$

El rendimiento logarítmico de un activo normalmente se conoce como logreturn. Es más natural usar el logaritmo de la variación de los precios relativos en el período de tiempo en cuestión.

Su definición es la siguiente:

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{(t-1)}}$$

Al contrario que los rendimientos R_t , los logreturns r_t son aditivos en el sentido de que la suma de n logreturns consecutivos es igual al logreturn a lo largo de todo el período de tiempo.

Bajo la hipótesis del modelo de B-S, los $r(t)$ son meramente realizaciones independientes de una variable aleatoria normal con media $\mu\Delta t$ y varianza $\sigma^2\Delta t$. Por lo tanto, estimar μ y σ utilizando la técnica de máxima verosimilitud (consultar por ejemplo García Barbancho (1992) para más información sobre esta técnica) se convierte en una tarea sencilla. Como podemos ver, no importa la escala de tiempo que elijamos, días, semanas o meses, los logreturns siempre se distribuyen normalmente bajo el paradigma del modelo de B-S.

El movimiento Browniano geométrico, el cual, se reveló muy importante para modelizar los mercados financieros, asignando concretamente S_t como precio de la acción. P. A. Samuelson desarrolló, desde 1965, el estudio del movimiento Browniano geométrico en conexión con la economía y recibió el premio Nobel de Economía en 1970 por estas aportaciones. En 1973, F. Black y M. Scholes e, independientemente, R. Merton utilizaron el movimiento Browniano geométrico para asignar precio a las opciones.

El movimiento Browniano geométrico es la solución única de $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, con condición inicial S_0 . Este movimiento subyace en todo el modelo de Black-Scholes y en su famosa fórmula para el precio de las opciones. En este modelo hay un activo sin riesgo (cuenta bancaria) $B = (B_t)_{t \geq 0}$ regido por la ecuación $dB_t = rB_t dt$ y un activo con riesgo $S = (S_t)_{t \geq 0}$ recogido por la ecuación diferencial estocástica del movimiento Browniano geométrico.

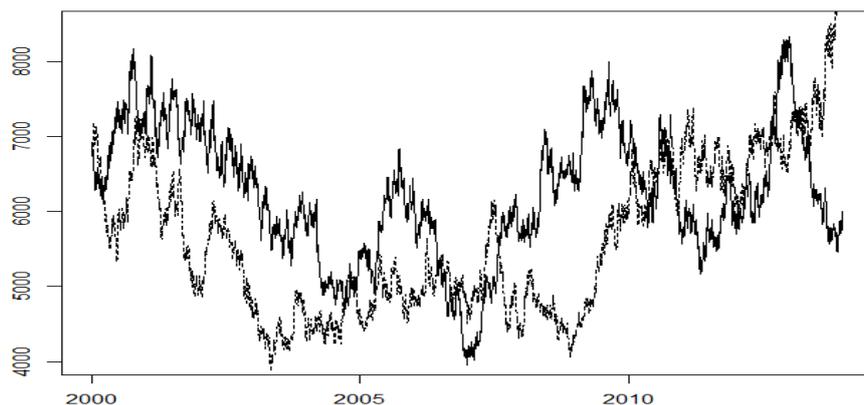


Figura 4.1. Simulación de dos trayectorias del movimiento browniano geométrico ajustado a los datos diarios del FTSE 100.

La Figura 4.1 muestra dos caminos simulados de un movimiento browniano geométrico, donde se han estimado los parámetros μ y σ usando datos diarios de FTSE 100.

La siguiente figura muestra una estimación no paramétrica de la densidad (ver la referencia Silverman (1986) para mayor información) de los logreturns diarios, semanales y mensuales para el FTSE 100. En la misma grafica se ha incluido la distribución normal con parámetros estimados mediante el mencionado método de máxima verosimilitud. Vemos que la distribución normal es claramente más aplanada en la zona central que la densidad empírica y tiene colas menos pesadas.

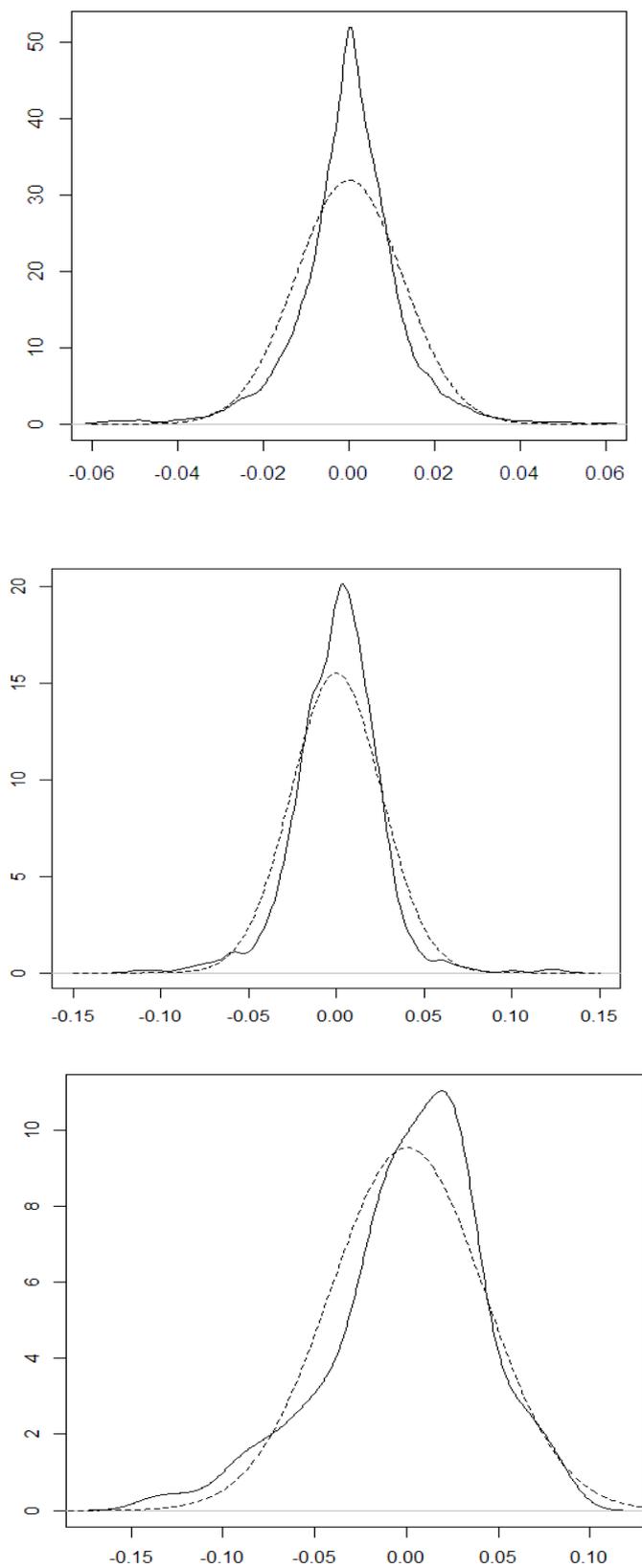


Figura 4.2. Densidades empíricas (línea continua) y normal (línea discontinua) de las muestras diarias, semanales y mensuales para el FTSE 100

Para apreciar mejor las colas de la distribución empírica y normal en la siguiente figura se pueden ver representadas gráficamente en escala logarítmica las gráficas comparativas de la densidad empírica y teórica. Se observa como la curva de densidad empírica (línea continua) queda dibujada por encima de la de la curva de densidad teórica (línea discontinua) en los extremos de la gráfica. Lo que significa que la densidad teórica está subestimando los valores extremos.

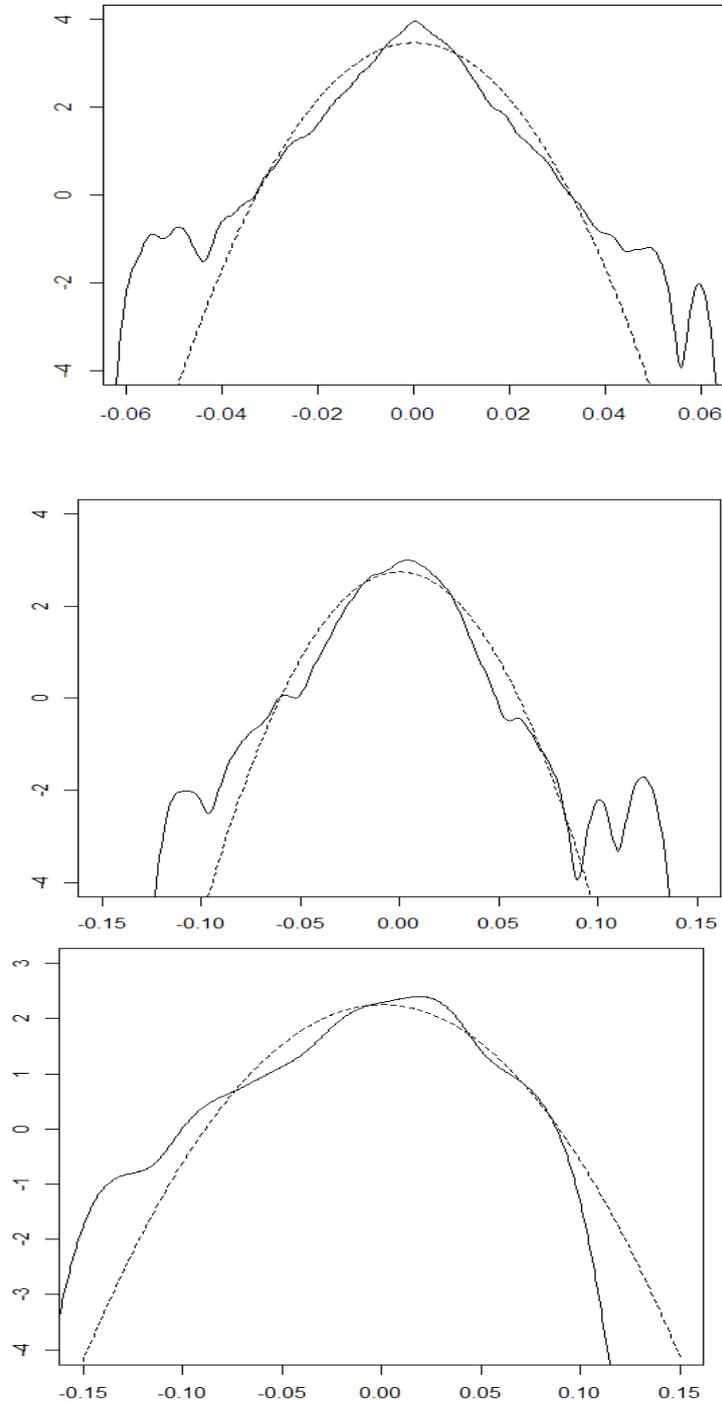


Figura 4.3 La densidad empírica (línea continua) y la distribución normal ajustada (línea de puntos) de los logretornos diarios, semanales y mensuales del FTSE 100 con una escala logarítmica en el eje vertical.

Como se desprende de las Figuras 4.2 y 4.3 los logretorns diarios del FTSE 100 en comparación con una distribución normal presentan colas más pesadas y, por tanto, un mayor apuntamiento en la zona central, así como asimetría. También se pueden utilizar cuantiles para medir cómo de pesadas son las colas. Una distribución con colas pesadas tendrá cuantiles más grandes (en valor absoluto) que la normal, ya que asigna más probabilidad de que aparezcan eventos extremos.

La siguiente tabla incluye los cuantiles correspondientes a las distribuciones empírica y normal ajustada a esta serie de datos. Como se puede ver, la distribución empírica, al contrario que ocurre con la normal, es asimétrica, ya que los cuantiles 2% y 98%, y más aún los cuantiles 1% y 99% difieren mucho en valor absoluto, además los cuantiles empíricos son siempre mayores en valor absoluto que sus correspondientes normales, mostrando el fenómeno de las colas pesadas.

FTSE 100	1%	2%	98%	99%
Normal	-0,0290	-0,0256	0,0256	0,0290
Empírica	-0,0359	-0,0280	0,0266	0,0326

Tabla 4.1. Cuantiles empíricos y normales de los logretorns diarios del índice FTSE 100.

5. AGREGACIÓN GAUSSIANA

Coloquialmente la agregación gaussiana es el fenómeno por el cual la densidad de una variable empírica tiende a converger a la de una distribución Normal a medida que se van ampliando los intervalos de tiempo entre observaciones. En lo relativo a la agregación Gaussiana, se ha de tener presente que debido a la propiedad aditiva que proporciona la escala logarítmica a las variaciones entre periodos (logretorns), el valor de la variable en un determinado intervalo puede obtenerse como la suma de los valores de la variable en cada intervalo en los que la primera se divide, por tanto, los logretorns semanales y mensuales se pueden deducir de los logretorns diarios.

Con cinco días de cotización en cada semana, el logretorn x_i^w para la semana i es

$$X_i^w = \sum_{n=1}^5 x^{d(5(i-1) + n)}$$

Si suponemos que los logretorns diarios son muestras independientes de la misma distribución (no necesariamente una distribución normal), el Teorema Central del Límite (consultar por ejemplo García Barbancho (1992)) implica que los logretorns semanales y mensuales tienden a una distribución normal. Es un hecho estadístico que los logretorns se acercan a una distribución normal cuando los intervalos de tiempo se hacen más grandes (como mensuales, por ejemplo). Sin embargo, también es un hecho empírico que en intervalos de tiempo cortos (como días), los logretorns están lejos de la normal. La Figura 4.2 muestra la densidad empírica para el índice FTSE 100 diario, semanal y mensual, junto con las correspondientes distribuciones normales ajustadas, y en la Figura 4.3 aparecen las mismas gráficas pero en escala

logarítmica para apreciar mejor las colas. Se observa un acercamiento hacia una distribución normal a medida que el periodo de tiempo entre observaciones es más largo, este fenómeno es la agregación gaussiana. Sin embargo, en los datos mensuales se observa una asimetría que no puede ser descrita por la distribución normal.

5.1 TEST DE LA NORMALIDAD

Existen varios test para comprobar si una distribución sigue una distribución normal. El contraste en sí es el siguiente:

H_0 : Sigue una distribución normal
 H_1 : No sigue una distribución normal

En este trabajo van a usar dos de los más conocidos.

5.1.1 Test Shapiro-Wilk

El Test de Shapiro–Wilk se usa para contrastar la normalidad de un conjunto de datos. Se plantea como hipótesis nula que una muestra proviene de una población normalmente distribuida. Fue publicado en 1965 por Samuel Shapiro y Martin Wilk. Se considera uno de los test más potentes para el contraste de normalidad, sobre todo para muestras pequeñas ($n < 30$).

Para llevar a cabo el contraste, se calcula la media y la varianza muestral y se ordenan las observaciones de menor a mayor. A continuación se calculan las diferencias entre: el primero y el último; el segundo y el penúltimo; el tercero y el antepenúltimo, etc. y se corrigen con unos coeficientes tabulados por Shapiro y Wilk. El estadístico de prueba es:

$$W = \frac{D^2}{nS^2}$$

donde D es la suma de las diferencias corregidas.

Se rechaza la hipótesis nula de normalidad si el estadístico W es menor que el valor crítico proporcionado para el tamaño muestral y el nivel de significación dado.

Para nuestro caso en concreto, según este test la distribución de la muestra estudiada de los logreturns del FTSE 100 está lejos de ser Normal. Para los datos mensuales se observa un p-valor mucho mayor que en los otros dos casos, lo que se puede interpretar como que como que la muestra del FTSE 100 presenta, en cierta medida, el fenómeno de la agregación Gaussiana.

	W	P
Diario	0,9299	< 2,2e-16
Semanal	0,9083	< 2,2e-16
Mensual	0,9655	0,000367

Tabla 5.1. Valores de los estadísticos y p-values del test de normalidad de S-W para las series diarias, semanales y mensuales del FTSE 100.

5.1.2 Test Kolmogorov-Smirnov (Corrección de Lilliefors).

Cuando la prueba Kolmogorov-Smirnov se aplica para contrastar la hipótesis de normalidad de la población, el estadístico de prueba es la máxima diferencia:

$$D = \max | F_n(x) - F_0(x) |$$

siendo $F_n(x)$ la función de distribución muestral y $F_0(x)$ la función teórica o correspondiente a la población normal especificada en la hipótesis nula.

La distribución del estadístico de Kolmogorov-Smirnov es independiente de la distribución poblacional especificada en la hipótesis nula y los valores críticos de este estadístico están tabulados. Si la distribución postulada es la normal y se estiman sus parámetros, los valores críticos se obtienen aplicando la corrección de significación propuesta por Lilliefors.

	D	P
Diario	0,0780	< 2,2e-16
Semanal	0,0665	4,02e-08
Mensual	0,0740	0,02631

Tabla 5.2 Valores del estadísticos y p-values del contraste de K-S para las series diarias, semanales y mensuales del FTSE 100.

Cuanto más se aproxime el estadístico D a 0 mayor será el grado de ajuste de normalidad de la muestra y viceversa. Según los valores observados en la Tabla 5.2, los logreturns del FTSE 100 para datos diarios y semanales distan mucho de ser normales. Sin embargo, se acepta la hipótesis de normalidad al 2.5% para datos mensuales. Vemos que el p-valor es mayor conforme se aumenta el tiempo entre observaciones, lo cual se puede interpretar como que la muestra del FTSE 100 presenta el fenómeno de la agregación Gaussiana.

6. AJUSTES DE UNA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA INVERSA NORMAL

A la luz del análisis hecho hasta aquí, la distribución normal no parece ser un buen modelo para los logreturns del FTSE 100, sobre todo en intervalos de tiempo cortos. No es capaz de modelizar las colas pesadas observadas y no tiene flexibilidad para capturar la asimetría. Por esta razón se va a introducir un tipo de distribución de probabilidad que describe mejor estas características tan típicas de las distribuciones temporales financieras.

Existen numerosos estudios empíricos sobre los logreturn financieros, y muchos autores han sugerido alternativas a la distribución normal, una de estas alternativas es la distribución gaussiana inversa normal (en adelante denominada NIG), en esta sección vamos a presentarla con más detalle y a estimarla para los datos del FTSE 100.

La distribución NIG fue introducida en Barndorff-Nielsen (1977) como un modelo para la distribución del tamaño del grano de arena en las muestras tomadas de las playas danesas. Más tarde se aplicó a las finanzas y ahora es un modelo estadístico bien establecido para los logreturns. Es una distribución que se puede representar como una distribución normal con media y varianza estocástica.

La distribución NIG tiene cuatro parámetros, α , β , μ y δ . El parámetro μ es de posición central, mientras que la asimetría de la distribución NIG está controlada por β . Cuando $\beta > 0$, la distribución es asimétrica a la derecha, mientras que un β negativo significa asimetría a la izquierda. El caso de $\beta = 0$ corresponde a una distribución NIG simétrica. El parámetro de escala es δ , que desempeña casi el mismo papel que la desviación estándar de la distribución normal. El peso de la cola de la distribución se modeliza a través de α .

La densidad de probabilidad de la distribución NIG tiene la siguiente expresión:

$$f_{nig}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) = k \exp(\beta(x - \mu)) \frac{k_1(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2})}{\delta^2 + (x - \mu)^2}$$

donde k es la constante de escala $k = \pi^{-1} \delta \alpha \exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$ y $k_1(x)$ es la función de Bessel modificada (O'Neil, Peter, 2008) de tercera clase con el índice 1, es decir:

$$k_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x(z + z^{-1})\right) dz$$

De la definición de la función de densidad se deduce que los parámetros α y β deben satisfacer $0 \leq |\beta| \leq \alpha$. Además, $\delta > 0$.

Si la distribución de una variable aleatoria L es una NIG con parámetros α , β , μ y δ , escribimos $L \sim \text{NIG}(\alpha, \beta, \mu, \delta)$. La media y la varianza de L vienen dadas por:

$$E[L] = \mu + \frac{\delta\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}, \quad \text{Var}[L] = \frac{\delta\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En la Figura 6.1 se han representado cuatro ejemplos de la distribución NIG para diferentes valores de los parámetros. Las cuatro distribuciones están centradas en el origen con un parámetro de escala $\delta = 0,015$. La variación de las colas pesadas se puede observar en las dos graficas superiores. Cuando $\alpha = 30$ (izquierda) las colas tienen una forma hiperbólica, mientras que para $\alpha = 150$ (derecha) son casi lineales. La densidad de la distribución normal, es decir, la distribución normal con media y varianza igual a la de la NIG, siempre tiene colas en forma parabólica cuando se utiliza una escala logarítmica. Estas gráficas muestran la flexibilidad de la distribución NIG junto con las diferencias estadísticas con la distribución normal. En las gráficas inferiores vemos la asimetría, la de la izquierda es asimétrica a la derecha debido a que $\beta = 10 > 0$, mientras que la de la derecha es asimétrica a la izquierda ya que $\beta = -10 < 0$.

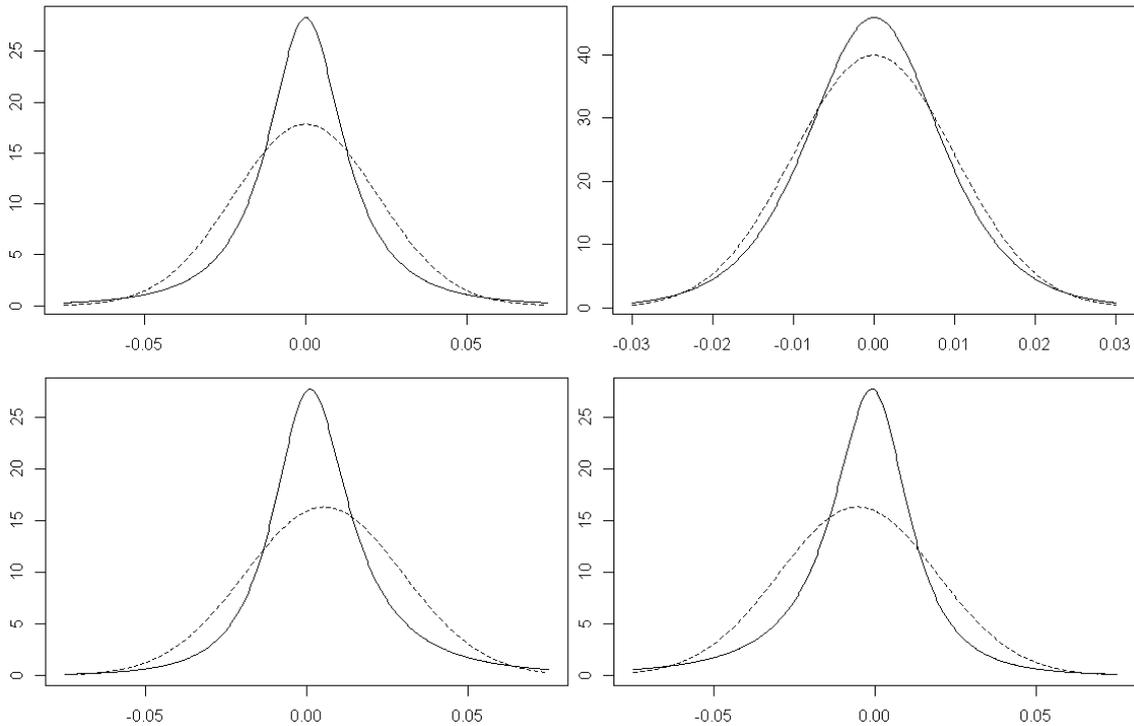


Figura 6.1. Cuatro distribuciones NIG diferentes con $\delta = 0,015$ y $\mu = 0$. En la fila superior las distribuciones son simétricas con $\alpha = 30$ (izquierda) y $\alpha = 150$ (derecha). En la fila inferior se muestran dos distribuciones asimétricas NIG con colas pesadas $\alpha = 30$ y asimetría $\beta = 10$ (izquierda) y $\beta = -10$ (derecha). Las líneas de puntos muestran la distribución normal con la misma media y varianza que la correspondiente distribución NIG.

Dado que la densidad de la distribución NIG es conocida, se puede realizar la estimación de máxima verosimilitud para encontrar los parámetros α , β , μ y δ . Sin embargo, como se puede ver en la expresión de $k_1(x)$, esto es un problema que no permite una solución explícita como en el caso de la distribución normal.

En la Figura 6.2 se ha representado la distribución NIG ajustada junto con la densidad empírica y la distribución normal estimada, para datos diarios, semanales y

mensuales. Se observa cómo la distribución NIG se ajusta a la empírica tanto en las colas y con respecto a la asimetría, cosa que no ocurre con la distribución normal.

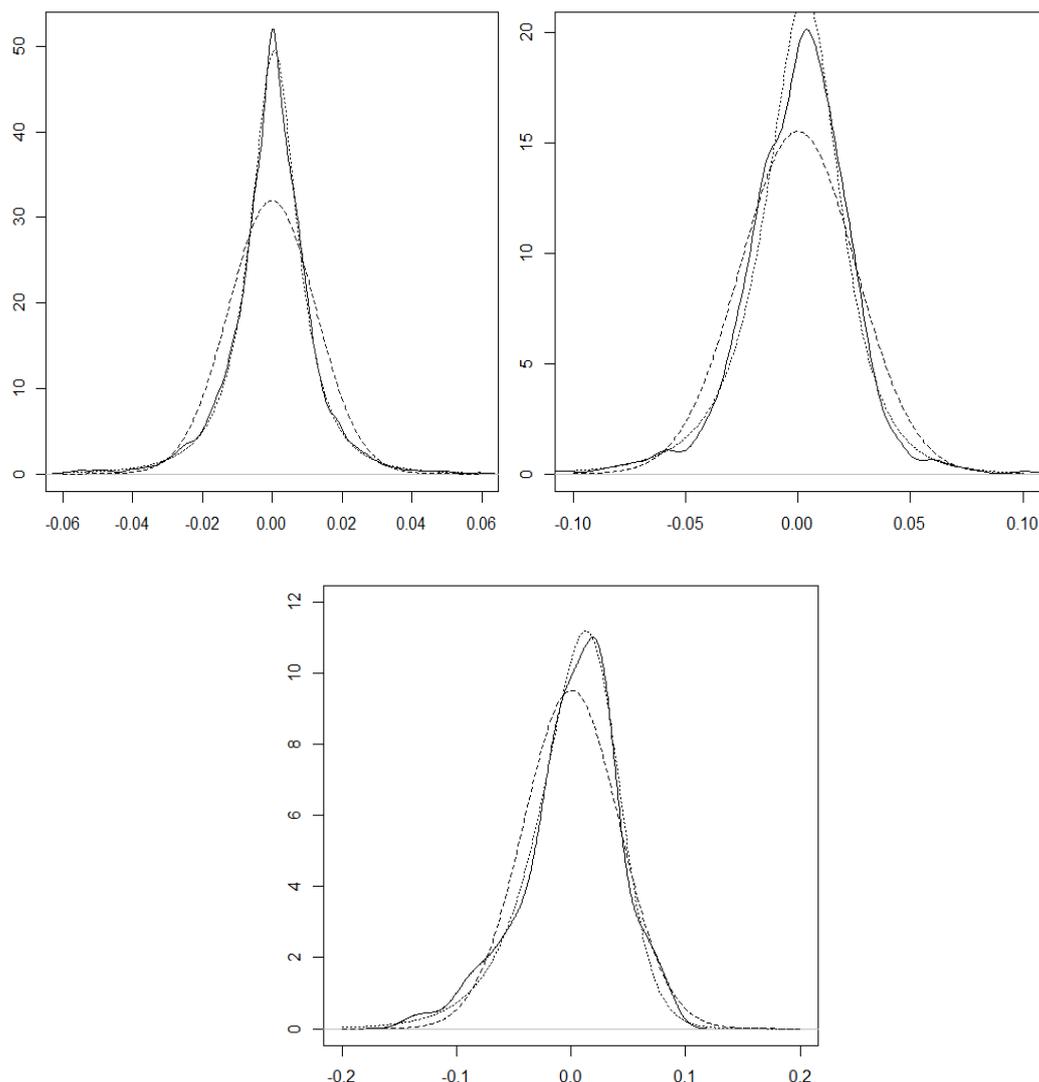


Figura 6.2. Distribución NIG ajustada (línea de puntos), junto con la densidad empírica (línea continua) y la distribución normal ajustada (línea discontinua) para los datos diarios semanales y mensuales del FTSE 100.

FTSE 100	α	B	μ	Δ
Diario	57.0552	-4.9360	0.0087	0.0007
Semanal	40.1920	-7.7774	0.0235	0.0046
Mensual	50.6356	-24.457	0.0604	0.0337

Tabla 6.1. Resultados de la estimación de máxima verosimilitud de la distribución NIG para el FTSE 100.

Terminamos esta sección mencionando un resultado de la convolución de variables aleatorias NIG independientes. Si X e Y son dos variables NIG independientes con parámetros $(\alpha, \beta, \mu_x, \delta_x)$ y $(\alpha, \beta, \mu_y, \delta_y)$ respectivamente, Entonces $X + Y$ es una NIG distribuida con parámetros $(\alpha, \beta, \mu_x + \mu_y, \delta_x + \delta_y)$. La distribución NIG tiene la

propiedad de la convolución de las distribuciones normales, siempre y cuando α y β sean iguales.

7. UNA ALTERNATIVA AL MODELO B-S

Como ya se ha visto, la distribución normal, al contrario que la NIG, no es un buen modelo para los logreturns de los activos. En esta sección se va a presentar una alternativa al modelo de B-S que se adapta mejor a los logreturns observados, haciendo uso de la distribución NIG.

Se considera una evolución de los precios de forma exponencial:

$$S(t) = S(0) \exp(L(t))$$

donde $L(t)$ es un proceso estocástico con incrementos independientes y estacionarios, siendo así un proceso de Lévy. Por otra parte, en lugar de suponer incrementos normales, asumimos que $L(t)-L(s)$ sigue una distribución NIG para todo $t > s \geq 0$. El proceso resultante se denomina proceso de Lévy gaussiano inverso normal.

Transformando los precios $S(t)$ a logreturns con incrementos de tiempo iguales a 1, se obtiene

$$X(t) = L(t) - L(t-1)$$

Las variables aleatorias $X(1), X(2), \dots$ son independientes y siguen una distribución NIG, ya que $L(t)-L(t-1)$ tiene la misma distribución que $L(1)$. Al igual que la sección anterior, los parámetros α, β, μ y δ de $L(1)$ se pueden estimar a partir de los logreturns observados. Utilizando la propiedad de convolución de las distribuciones NIG, se tiene que $L(t)$ es de nuevo una variable NIG con parámetros $\alpha, \beta, \mu t$ y δt .

A diferencia del movimiento browniano, el proceso de Lévy gaussiano inverso normal tiene caminos muestrales discontinuos.

A la luz de lo visto en las secciones anteriores, un proceso de Lévy gaussiano inverso normal parece más adecuado que un modelo de B-S para describir los precios de un activo financiero. Sin embargo, el análisis de este proceso discontinuo es mucho más complicado que el de un modelo de B-S y cae fuera de los objetivos del presente trabajo.

8. AUTOCORRELACIÓN DE LOS LOGRETURNS

De la asunción de un modelo de B-S para la evolución en el tiempo del precio de un activo financiero, se deduce que los logreturns son independientes y, por tanto, no existe correlación entre ellos. Sin embargo, en los mercados de valores a menudo se observa que las fluctuaciones de precios se agrupan en períodos con grandes fluctuaciones y períodos con variaciones menores. Por tanto, parece que los tamaños de los logreturns pueden ser dependientes, esto de hecho se confirma empíricamente, y es lo que se va a analizar en esta sección.

Consideremos la serie de tiempo $X(t)$ de los logreturns y supongamos que es estacionaria en el sentido de que la esperanza de $X(t)$ no es una función de tiempo, es decir, es constante, y que la covarianza entre $X(t)$ y $X(t + s)$ sólo depende de s , el incremento de tiempo. De esta manera, la covarianza viene dada por

$$\text{Cov}(X(t), X(t+s)) = \gamma(s)$$

para una función $\gamma(s)$ donde $\gamma(0) = \sigma^2 > 0$. La autocorrelación con retardo s viene dada por

$$\text{corr}(X(t), X(t+s)) = \frac{\text{Cov}(X(t), X(t+s))}{\sqrt{\text{Var}(X(t)) \text{Var}(X(t+s))}} = \frac{\gamma(s)}{\sigma^2}$$

La autocorrelación describe la intensidad con la que el logreturn actual se relaciona linealmente con los logreturns anteriores. Si, por ejemplo, $X(t)$ y $X(t+1)$ están correlacionados positivamente, $X(t+1)$ tenderá a ser grande cuando $X(t)$ sea grande.

En la Figura 8.1 se han representado las autocorrelaciones estimadas para $X(t)$. Como se puede observar, los logreturns parecen ser independientes, ya que la función de autocorrelación empírica fluctúa aleatoriamente alrededor de cero y la gran mayoría de ellos están dentro de la banda de confianza al 95% centrada en el cero.

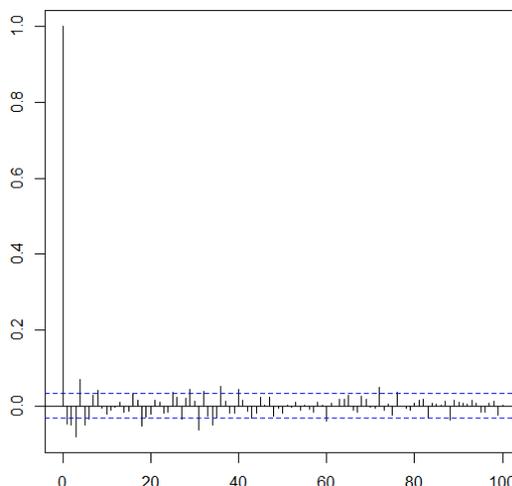


Figura 8.1. Auto correlaciones empíricas del FTSE 100 diario con retardos hasta 100.

Sin embargo, si consideramos las series $Y(t)=|X(t)|$ o $Z(t)=X^2(t)$, todo cambia. En primer lugar estas series eliminan el signo de $X(t)$ y, por tanto, no se está

considerando la dirección de los cambios, sino solo las dependencias entre los tamaños de los logreturns. En la Figura 8.2 se han representado las dos funciones de autocorrelación empíricas para el FTSE 100. Las autocorrelaciones para $Y(t)$ y $Z(t)$ no son ahora tan pequeñas, llegando a valores cercanos a 0.3. Además, se observa una autocorrelación consistentemente positiva. Incluso para retardos grandes hay una correlación positiva y significativa entre los tamaños de los logreturns. Si el modelo de B-S fuera correcto, incluso los valores absolutos y los cuadrados de los logreturns serían independientes, y no se tendrían autocorrelaciones significativamente diferentes de cero.

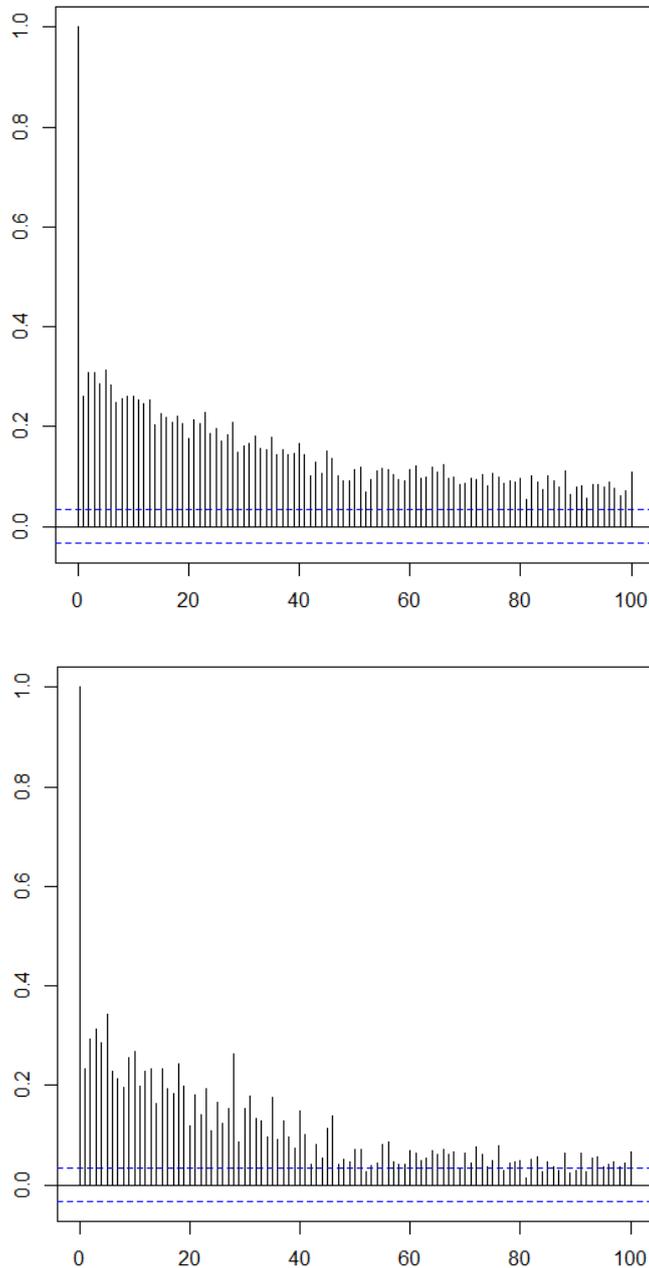


Figura 8.2. La autocorrelación empírica de los valores absolutos (arriba) y cuadrados (abajo) de los logreturns diarios del FTSE 100 con retardos hasta 100

9. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha realizado un estudio empírico de la serie de datos del principal índice de referencia de la Bolsa de Londres (London Stock Exchange), el FTSE 100, tomando datos (diarios, semanales y mensuales) desde el 1 de Enero de 2000 hasta el 31 de Diciembre de 2013.

Uno de los modelos más usados para la evolución en el tiempo de los precios de un activo financiero es el modelo de Black-Scholes o movimiento browniano geométrico. En el estudio realizado, se prueba que como modelo para los logreturns no resulta adecuado por varios motivos, y existen modelos, como el basado en la distribución Normal Inversa Gaussiana, que modelizan mejor los logreturns del FTSE 100. Algunas propiedades teóricas que se desprenden de la consideración del modelo de Black-Scholes no se ven respaldadas por los resultados empíricos. En este trabajo, se han usado los logreturns del FTSE 100 para mostrar esta discrepancia entre lo teórico (lo que se deduce del modelo de B-S) y lo observado en la realidad.

En primer lugar, bajo un modelo de B-S los logreturns para un incremento de tiempo dado son realizaciones de una variable aleatoria normal. Sin embargo, la densidad normal estimada por máxima verosimilitud muestra un comportamiento muy diferente de la densidad estimada con los datos observados, siendo esta última asimétrica y con colas pesadas. Mediante los test de normalidad realizados (Shapiro-Wilk y Kolmogorov-Smirnov), puesto que el p_valor siempre es inferior a 0.05, no existen evidencias significativas para aceptar la hipótesis nula, por tanto, no podemos aceptar normalidad en los datos. A pesar de este hecho, se observa que, a medida que aumenta el tiempo entre observaciones, la distribución teórica normal del modelo de B-S y la observada en los datos del FTSE 100 se van pareciendo más (agregación gaussiana). Esto también se ha probado analizando las diferencias entre las curvas de densidad de las muestras del FTSE 100 y las curvas de densidad normales con parámetros estimados a partir de los datos del FTSE 100.

Dada esta incapacidad de la distribución normal de explicar el comportamiento de los logreturns observados en el FTSE 100, sobre todo cuando el periodo entre observaciones es pequeño (cuando se trata de días y semanas), se propone una alternativa (una distribución más flexible), la conocida distribución Gaussiana Inversa normal (NIG). Al hacer la comparación de las curvas de densidad empíricas del FTSE 100 con la Normal y la Normal Inversa Gaussiana estimadas, se observa que no presenta las deficiencias mencionadas, al menos tan acusadamente, que presentaba para la distribución Normal. El planteamiento de un modelo para la evolución temporal de los valores de un activo que lleve a logreturns siguiendo una distribución NIG, nos lleva a la consideración de procesos estocásticos de Lévy, los cuales son más difíciles de analizar y caen fuera del objetivo de este trabajo.

Para terminar, bajo el modelo de B-S las autocorrelaciones de los logreturns no deben ser significativamente diferentes de cero, ya que los logreturns son independientes. Esto se ve, en cierta medida, corroborado por los datos del FTSE 100. Sin embargo, la misma propiedad debería observarse si se consideran los valores absolutos o los cuadrados de los logreturns y, en este caso, lo observado empíricamente con los datos del FTSE 100 es muy distinto, mostrando una autocorrelación significativa y positiva incluso para retardos grandes, llevando a una dependencia entre los tamaños de los logreturns observados para el FTSE 100.

En resumen, y siguiendo con la crítica hacia el modelo Black-Scholes, se puede afirmar, como se ve en este trabajo, que algunos planteamientos de dicho modelo no

se ven corroborados empíricamente y por tanto deben buscarse modelos distintos y en ocasiones más complejos para modelizar las variaciones de precios.

BIBLIOGRAFÍA

- Barndorff-Nielsen, O.E. ; Halgreen, C. (1977): Infinite Divisibility of the Hyperbolic and Generalized Inverse Gaussian Distributions. University of Aarhus, Dinamarca.
- Black, F.; Scholes, M. (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". Journal of Political Economy, 81, 637-54.
- García Barbancho, Alfonso. (1992): Estadística teórica básica: probabilidad y modelos probabilísticos. Ariel, Barcelona.
- Martínez Barbeito, Josefina; G. Villalón, Julio (2003): Introducción al cálculo estocástico aplicado a la modelización Económico- Financiero- Actuarial. Netbiblo, A Coruña.
- O'Neil, Peter V. (2008): Matemáticas avanzadas para ingeniería. Cengage Learning Editores, México D.F.
- Paradis, Emmanuel. (2003): R para principiantes. Institut des Sciences de l'Évolution, France.
- Silverman, B.W. (1986): Density estimation for statistics and data analysis. Chapman and Hall, London.
- Knop, Roberto (2005): Manual de instrumentos derivados, tres décadas de Black Scholes. Editorial Escuela de Finanzas Aplicadas.

APÉNDICE

Para la realización de este trabajo se ha utilizado el software estadístico R (Paradis (2003) es un manual básico), en su versión 2.15.2, el cual se puede obtener del sitio web www.r-project.org.

A continuación, se muestran y se comentan las instrucciones usadas para llevar a cabo el estudio empírico presentado.

Las siguientes líneas, permiten reproducir dos de las tres trayectorias simuladas del movimiento browniano estándar presentadas en la Figura 3.1., ejecutando nuevamente las tres últimas líneas se obtiene la tercera trayectoria

```
B0 <- 0
set.seed(250)

I <- rnorm(500, mean = 0, sd = 1)
B <- cumsum(I)

plot(x=c(0:500), y=c(0, B), type="l", lty=1, xlab="", ylab="",
ylim=c(-28, 28))

I <- rnorm(500, mean = 0, sd = 1)
B <- cumsum(I)

lines(x=c(0:500), y=c(0, B), type="l", lty=1, xlab="", ylab="",
ylim=c(-28, 28))
```

Los datos utilizados para este estudio son desde el 1 de enero de 2000 hasta el 31 de diciembre de 2013. El código utilizado en R para la realización de los distintos gráficos son los siguientes:

Descarga de las cotizaciones históricas del FTSE 100 desde el 1 de enero del 2000 hasta el 31 de diciembre del 2013 en intervalos diarios, semanales y mensuales de la base de datos de la página web <http://es.finance.yahoo.com/> y representación gráfica de las cotizaciones diarias:

```
library("tseries")
library("zoo")
```

```

sd <- get.hist.quote(instrument = "^FTSE", start = "2000-01-
01", end = "2013-12-31", compression = "d", quote = "Close")

sw <- get.hist.quote(instrument = "^FTSE", start = "2000-01-
01", end = "2013-12-31", compression = "w", quote = "Close")

sm <- get.hist.quote(instrument = "^FTSE", start = "2000-01-
01", end = "2013-12-31", compression = "m", quote = "Close")

nd=length(sd); nw=length(sw); nm=length(sm);
par(mar=c(2,2,1,1))
plot(sd)

```

Con las siguientes líneas se obtienen los logreturns diarios, semanales y mensuales del FTSE 100, además de obtener las estimaciones por el método de máxima verosimilitud de los dos parámetros del modelo de B-S.

```

xd <- diff(log(sd))
xw <- diff(log(sw))
xm <- diff(log(sm))

mud <- mean(xd)
sigmad <- apply(xd,2,sd); sigma2d <- sigmad^2;

muw <- mean(xw)
sigmaw <- apply(xw,2,sd); sigma2w <- sigmaw^2;

mum <- mean(xm)
sigmam <- apply(xm,2,sd); sigma2m <- sigmam^2;

```

Con las siguientes líneas se reproducen las dos trayectorias del movimiento browniano geométrico con los parámetros obtenidos a partir de los datos diarios del FTSE 100, las cuales se presentan en la Figura 4.1.

```

set.seed(1500)
lzd0=log( as.numeric(sd[1]) )

I <- rnorm(nd-1, mean = mud, sd = sigmad) # los incrementos
ssimul <- exp( cumsum( c(lzd0,I) ) )

```

```
ssimul <- zoo(ssimul,index(sd))

plot(ssimul,type="l",lty=1,ylim=c(5000,16000))
I <- rnorm(nd-1, mean = mud, sd = sigmad) # los incrementos
ssimul <- exp( cumsum( c(lsd0,I) ) )
ssimul <- zoo(ssimul,index(sd))
lines(ssimul,type="l",lty=2)
```

Para apreciar la diferencia entre la densidad empírica y la normal, se ha llevado a cabo la representación gráfica de la densidad de los logreturns diarios para el FTSE 100 junto con la distribución normal con parámetros estimados mediante el método de máxima verosimilitud, que se presenta en la Figura 4.2. (primer conjunto de instrucciones). Esta representación se hace también tomando una escala logarítmica en el eje vertical, Figura 4.3. (segundo conjunto de instrucciones). De manera similar se obtienen las estimaciones usando datos semanales y mensuales del FTSE 100, Figura 5.1.

```
densityxd <- density(xd,n=500)

plot(densityxd, type="l", lty=1, xlab="", ylab="", main="",
xlim=c(-0.06,0.06))

curve(          dnorm(x,mean=mud,sd=sigmad),add=TRUE,n=500,
type="l",lty=2,xlab="",ylab="",main="")

x<- seq(from=-0.06,to=0.06,length.out=500)
plot(densityxd$x,log(densityxd$y),type="l",lty=1,xlab="",
ylab="",main="",xlim=c(-0.06,0.06),ylim=c(-4,4))
y<- log( dnorm(x,mean=mud,sd=sigmad) )
lines(x,y,lty=2)

densityxw <- density(xw,n=500)

plot(densityxw, type="l", lty=1, xlab="", ylab="", main="",
xlim=c(-0.06,0.06))

curve(          dnorm(x,mean=muw,sd=sigmaw),add=TRUE,n=500,
type="l",lty=2,xlab="",ylab="",main="")

x<- seq(from=-0.06,to=0.06,length.out=500)
plot(densityxw$x,log(densityxw$y),type="l",lty=1,xlab="",
```

```

ylab="",main="",xlim=c(-0.06,0.06),ylim=c(-4,4))
y<- log( dnorm(x,mean=muw,sd=sigmaw) )
lines(x,y,lty=2)

densityxm <- density(xm,n=500)

plot(densityxm, type="l", lty=1, xlab="", ylab="", main="",
xlim=c(-0.06,0.06))

curve(          dnorm(x,mean=mum,sd=sigman),add=TRUE,n=500,
type="l",lty=2,xlab="",ylab="",main="")

x<- seq(from=-0.06,to=0.06,length.out=500)
plot(densityxm$x,log(densityxm$y),type="l",lty=1,xlab="",
ylab="",main="",xlim=c(-0.06,0.06),ylim=c(-4,4))
y<- log( dnorm(x,mean=mum,sd=sigman) )
lines(x,y,lty=2)

```

Además de las representaciones gráficas, los cuantiles también sirven para analizar la diferencia entre la densidad empírica y la normal, pudiendo comprobar más fácilmente la existencia de colas pesadas y asimetría. Las siguientes órdenes nos generan los cuantiles normales teóricos y los empíricos con datos diarios del FTSE 100, Tabla 4.1.:

```

qnorm(p=c(0.01,0.02,0.98,0.99),mean=mud,sd=sigmad)
quantile(x=xd,probs=c(0.01,0.02,0.98,0.99))

```

En la Figura 6.1. se han representado cuatro ejemplos de la distribución NIG para diferentes opciones de parámetros junto con la distribución normal de la misma media y varianza. La primera de ellas se obtiene de las siguientes instrucciones, las demás se obtienen de manera similar. Es necesario instalar y cargar el paquete “fBasics”

```

library(fBasics)

alpha=30;          beta=0;          mu=0;          delta=0.015;
curve(dnig(x,alpha,beta,delta,mu),xlim=c(-0.075,0.075),n=500,

type="l",lty=1,xlab="",ylab="",main="")          temp=sqrt(alpha^2-
beta^2)

mean <- mu +( (delta*beta)/(temp));

```

```
sigma2= (delta*(alpha^2))/(temp^3); sigma=sqrt(sigma2); curve(  
dnorm(x,mean=mean,sd=sigma),add=TRUE,n=500,  
type="l",lty=2,xlab="",ylab="",main="")
```

```
alpha=150;          beta=0;          mu=0;          delta=0.015;  
curve(dnig(x,alpha,beta,delta,mu),xlim=c(-0.075,0.075),n=500,  
type="l",lty=1,xlab="",ylab="",main="")  
temp=sqrt(alpha^2-beta^2)  
mean <- mu + ( (delta*beta)/(temp));
```

```
sigma2= (delta*(alpha^2))/(temp^3); sigma=sqrt(sigma2); curve(  
dnorm(x,mean=mean,sd=sigma),add=TRUE,n=500,  
type="l",lty=2,xlab="",ylab="",main="")
```

```
alpha=30;          beta=10;          mu=0;          delta=0.015;  
curve(dnig(x,alpha,beta,delta,mu),xlim=c(-0.075,0.075),n=500,  
type="l",lty=1,xlab="",ylab="",main="")  
temp=sqrt(alpha^2-beta^2)  
mean <- mu + ( (delta*beta)/(temp));
```

```
sigma2= (delta*(alpha^2))/(temp^3); sigma=sqrt(sigma2); curve(  
dnorm(x,mean=mean,sd=sigma),add=TRUE,n=500,  
type="l",lty=2,xlab="",ylab="",main="")
```

```
alpha=30;          beta=-10;          mu=0;          delta=0.015;  
curve(dnig(x,alpha,beta,delta,mu),xlim=c(-0.075,0.075),n=500,  
type="l",lty=1,xlab="",ylab="",main="")  
temp=sqrt(alpha^2-beta^2)  
mean <- mu + ( (delta*beta)/(temp));
```

```
sigma2= (delta*(alpha^2))/(temp^3); sigma=sqrt(sigma2); curve(  
dnorm(x,mean=mean,sd=sigma),add=TRUE,n=500,  
type="l",lty=2,xlab="",ylab="",main="")
```

Estimación de los parámetros para la Normal Inversa Gaussiana de la muestra del FTSE 100 con intervalos diarios, semanales y mensuales:

```
NIGD <- nigFit(xd,alpha=100,beta=-3,delta=0.01,mu=0.0001)  
NIGW <- nigFit(xw,alpha=70,beta=-3,delta=0.03,mu=0)
```

```
NIGM <- nigFit(xm,alpha=70,beta=-26,delta=0.1,mu = 0)
```

Con las siguientes instrucciones obtenemos las estimaciones de máxima verosimilitud de la distribución NIG usando datos del FTSE 100, Tabla 6.1.

```
nigFit(xd, alpha = 57, beta = -4.9, delta = 0.0, mu = 0)
nigFit(xw, alpha = 40, beta = -7.7, delta = 0.02, mu = 0)
nigFit(xm, alpha = 50, beta = -24.4, delta = 0.06, mu=0.03)
```

En la Figura 6.2. se han representado las gráficas de las densidades NIG ajustada, empírica y normal ajustada para datos diarios, semanales y mensuales del FTSE 100. La gráfica correspondiente a los datos diarios se obtiene ejecutando las siguientes instrucciones, para datos semanales y mensuales se haría de forma similar:

```
densityxd <- density(xd,n=500)

plot(densityxd,          type="l",lty=1,xlab="",ylab="",main="",
xlim=c(-0.06,0.06))

curve(                   dnorm(x,mean=mud,sd=sigmad),add=TRUE,n=500,
type="l",lty=2,xlab="",ylab="",main="")

alpha=53.469348248;beta=-4.658200529;delta=0.013140799;
mu=0.001042253;
curve(dnig(x,alpha,beta,delta,mu),n=500,add=TRUE, type="l",
lty=3,xlab="",ylab="",main="")
```

Por último las autocorrelaciones presentadas en la Figura 8.1. y 8.2. se obtienen con las siguientes instrucciones:

```
apply(xd,2,acf,lag.max=100)
apply(abs(xd),2,acf,lag.max=100)
apply(xd^2,2,acf,lag.max=100)
```