Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

DOCTORADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA

(Línea de investigación “Lógica, Computación e Inteligencia Artificial”)

HACIA UNA CONCEPCIÓN GENERALIZADA DE LA ABDUCCIÓN, SU MODELIZACIÓN EN LÓGICAS NO CLÁSICAS Y SU IMPLEMENTACIÓN EN HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS

Dirigida por los Profesores
Dr. D. Ángel Nepomuceno Fernández
y Dr. D. Fernando Soler Toscano.

Tesis presentada para
acceder al título de Doctor por
D. Enrique Sarrión Morillo

Sevilla, a 27 de mayo de 2016.

A mi madre y a mi padre. Haberlo perdido mientras afrontaba la última etapa de este trabajo ha sido un golpe durísimo, pero el ejemplo de su optimismo vital ha sido una ayuda para superarlo. Ninguno de ellos ha llegado a conocer el concepto de abducción *y, sin embargo, esta investigación les debe muchísimo.*

Resumen

Comenzamos esbozando de modo informal una propuesta muy general del concepto de *abducción*, señalando cuáles son los caracteres esenciales de este tipo de inferencia y qué otros rasgos que tradicionalmente se le han impuesto deben ser eliminados. A continuación, ya desde una perspectiva puramente lógica, y partiendo de una modelización formal muy próxima a la que hemos considerado como *versión canónica* de la *abducción ordinaria*, hemos presentado en un nivel metalingüístico (no vinculado a ningún sistema lógico concreto) diversas propuestas que, además de liberar este concepto de sus dependencias de las lógicas clásicas, lo generalizan de distintas maneras –por ejemplo, contemplando la posibilidad de que el problema abductivo o/y la solución sean todo un conjunto de fórmulas, o también incorporando la posibilidad de que se establezcan condiciones adicionales a las que ya debe cumplir la versión inicial (a la que hemos etiquetado como *plana*)–. A partir de la citada posibilidad que admite nuevas condiciones, y que constituye lo que hemos denominado como *abducción ordinaria cualificada*, hemos elaborado los conceptos de *abducción ordinaria cualificada preferencial* y *abducción ordinaria cualificada preferencial estratégica*. Además, en todo este proceso de generalización y diversificación se han incorporado componentes que no se recogen en las formalizaciones que encontramos en la literatura lógica consultada e igualmente se han hecho distinciones novedosas respecto de algunos elementos que sí han sido considerados con anterioridad. Todo ello ha permitido que se pueda expandir considerablemente la tipología de inferencias que aparecen en los estudios sobre esta materia. En el caso de la *abducción sistémica* también hemos acometido esa doble tarea de sacar a la luz ciertas componentes que no habían sido previamente contempladas y de elaborar una versión que, partiendo de la que aquí es considerada como canónica, permita

aplicarla en muchas otras situaciones que no reúnen los requisitos que tácitamente se recogen en las escasas publicaciones que hasta la fecha han abordado esta cuestión. Extendemos a ella algunas de las distinciones que ya fueron consideradas en relación con la abducción ordinaria y, de este modo, reforzamos los argumentos que defienden la naturaleza esencialmente abductiva de este tipo de inferencia. Similar proceso hemos seguido y similares logros hemos alcanzado en el caso de la novedosa *abducción holística*, la cual presentamos como una manera de unificar y superar a los dos grandes modos que ya hemos señalado: ordinario y sistémico. Creemos que un estudio profundo de una relación inferencial debe afrontar su nivel puramente estructural, aunque somos conscientes que en el mismo no queda todo determinado y en cualquier caso hay que completarlo con otros estudios en los que ya se ha agregado información acerca del lenguaje o de la semántica concreta del sistema lógico. Nuestro estudio estructural, que se aparta en algunas exigencias de los más comunes en la literatura, fijó inicialmente la mirada en las relaciones inferenciales binarias y dentro de ellas, de manera especial, en la deducción clásica y en una más novedosa que aquí denominamos *deducción plural*. Ambas, junto a la también novedosa relación de *deducción cualificada*, son estudiadas por nosotros con un fin puramente instrumental. Para cada uno de los tipos de relaciones inferenciales binarias que hemos distinguido se ha presentado un buen número de propiedades y hemos indagado cuáles se derivan de otras consideradas básicas. En el caso de las relaciones inferenciales ternarias, dado que son nuestro objetivo, el estudio tipológico es más detallado si cabe. En todos los casos hemos indicado qué restricciones se tienen que imponer y qué propiedades se satisfacen en cada uno de los tipos. El haberlo hecho paso a paso, 'aislando' cada uno de los requisitos elementales que se pueden agregar al caso base (que es una relación inferencial que coincide con la que Atocha Aliseda denomina *inferencia abductiva*), nos permite tener intuiciones sobre otros tipos aquí no abordamos explícitamente pero que se pueden construir mediante la adecuada combinación de los citados caracteres básicos. Del mismo modo, hemos probado de manera rigurosa importantes resultados (llamados teoremas de representación) sobre la caracterización estructural de ciertos tipos de relaciones inferenciales abductivas, dando con ello respuesta a problemas que han permanecido abiertos casi dos décadas. Finalmente hemos presentado varias aportaciones que o bien facilitan la modelización de ciertos tipos de inferencia abductiva en sistemas lógicos pertenecientes al ámbito de la Lógica Epistémica Dinámica (entendida en sentido amplio) o bien mejoran varias de sus propiedades con el objetivo de posibilitar su implementación en herramientas informáticas. En concreto nuestro tratamiento lógico de la acción de olvidar se muestra como un buen candidato para la modelización de la abducción ante anomalía en el ámbito citado.

Prólogo

Probablemente, los que de un modo u otro nos hemos ejercitado en el estudio tanto de la Ciencia (*sensu lato*) como de la Filosofía compartamos la idea de que las diversas disciplinas científicas ofrecen un material de partida extraordinario para la reflexión filosófica, a la vez que ésta contribuye a 'iluminar' numerosos aspectos de aquéllas. Pero, entre todos los que pertenecemos al colectivo antes designado, quizás no despierte la misma unanimidad la siguiente declaración de principios: el tratamiento lógico-formal de una cuestión y la reflexión filosófica sobre la misma a menudo se auxilian mutuamente, e incluso en ocasiones se necesitan la una a la otra –ello ha sucedido en el pasado, tiene lugar en el presente y, previsiblemente, también ocurrirá en el futuro–.

En particular, esta última (la reflexión filosófica) frecuentemente se convierte en el material intuitivo que inspira cierta elaboración lógico-formal, sin que ello sea obstáculo para que otras veces el desarrollo de la Lógica responda a motivaciones puramente internas. Del mismo modo, también es habitual que la reflexión filosófica sobre cierto desarrollo formal contribuya a una mejor comprensión de sus asunciones tácitas, su aplicabilidad, sus logros y sus limitaciones. Más adelante señalaremos cómo la abducción es un ejemplo paradigmático de estos dos 'movimientos de sentido contrario' (digamos 'de ida y vuelta') y en qué medida cada uno de ellos ha contribuido a convertir dicha cuestión en uno de los conceptos claves de la investigación lógica y filosófica en las últimas décadas.

Refiriéndonos al primero de los procesos citados (es decir, al tratamiento lógico de asuntos sugeridos por la Filosofía), una vez alcanzada la modelización formal de una cuestión, ella aporta claridad, precisión y rigor a la reflexión filosófica que le sirvió de punto de partida. Por supuesto, con ello no se resuelven todas las controversias relativas a la citada cuestión, lo cual sigue estando en manos de los especialistas en el asunto correspondiente. Por ejemplo, podemos formalizar de varios modos lo que entendemos por *creencia* y cada sistema formal nos permitirá obtener unos resultados; pero, decidir cuál de esos sistemas formales es el que mejor representa la cuestión doxástica en determinado ámbito, es algo que queda en manos de los estudiosos de esta última parcela del saber. Del mismo modo, en relación a la cuestión que aquí nos ocupa –la abducción–, valorar la ventaja de usar uno u otro esquema formal para caracterizar determinados procesos inferenciales en cierta parcela de la Ciencia es algo que estará en manos de los filósofos de la Ciencia y de los científicos que trabajando en esa área reflexionan sobre su quehacer. Lo que sí podrá señalar el lógico es la incompatibilidad de ciertas pretendidas conclusiones con el punto de partida elegido, lo cual al menos puede liberarles de ciertos resultados erróneos o de ciertas aspiraciones vanas.

Este planteamiento coincide con la visión aristotélica de la Lógica como «órganon»; sin embargo, el hecho de que en algunos casos tenga este carácter instrumental para otros campos (como también lo tiene el Álgebra o la Geometría para varias disciplinas), no impide su autonomía a la hora de generalizar sus conceptos y de obtener sus resultados. Retomando el anterior ejemplo de la Lógica Modal, sabemos que en ella se postulan sistemas que hasta ahora no modelizan el tratamiento de la noción de creencia adoptado por pensador alguno ni subyacente en ámbito de conocimiento alguno, pero que han surgido explorando las distintas variantes que las herramientas formales permiten concebir (del mismo modo que la Geometría estudia espacios que no están implícitos en ninguna teoría científica conocida; es más, en algunos casos no sólo que no están, sino que ni siquiera es previsible que lo 'estén' en un futuro cercano). Así pues, una ventaja del enfoque lógico-formal es que se goza de una libertad creadora mucho mayor que en los enfoques propios de otras disciplinas, por cuanto no se está constreñido a referirse a lo que acontece o ha acontecido en la realidad (por ejemplo, nuestros conceptos en relación a la abducción no tienen por qué limitarse al modo en que concibieron la cuestión uno o varios pensadores, ni a las maneras particulares en que actualmente trabajan los distintos colectivos científicos, ni a los distintos usos que se hayan hecho de la misma en cualesquiera ámbitos del pensamiento a lo largo del devenir histórico,...). Es decir, la Lógica también puede construir herramientas aptas para 'escenarios posibles' de los que aún no se conocen correlatos reales.

Por otra parte, al menos en el presente siglo y en el inmediatamente anterior, a menudo ha ocurrido que las elaboraciones lógicas han motivado nuevas reflexiones filosóficas y que éstas han contribuido a 'interpretar' diversos aspectos de los modelos formales (pensemos, por ejemplo, en la Filosofía de la Lógica). Así pues, estamos ante una relación simbiótica entre saberes con objetivos y metodologías diferentes, pero vinculados en un ciclo que se retroalimenta positivamente.

Para evidenciar la fecundidad de estas relaciones interdisciplinares en sus distintas 'direcciones', en relación al asunto que nos ocupa, recordemos de forma resumida algunas etapas en la historia de su estudio: la abducción es un concepto que fue tratado por la Filosofía desde la Antigüedad; a partir de la Revolución Científica jugó un papel crucial en el quehacer de la Ciencia y se convirtió en una herramienta imprescindible en su método; más tarde, a partir de la década de los 30 del siglo XIX, fue nuevamente objeto de reflexión filosófica, tras resultar muy enriquecida por la experiencia de uso de varios siglos; a finales del siglo XX fue modelizada con herramientas lógicas y sus desarrollos inspiraron nuevas reflexiones filosóficas a la vez que permitieron su implementación en dispositivos automáticos diseñados para el avance del conocimiento en varias áreas de las Ciencias Empíricas.

Haber explicitado las reivindicaciones anteriores, que para algunos deben resultar obvias, tiene como intención poner de manifiesto los supuestos profundos bajo los que se han abordado los dos objetivos generales que sirven de grandes ejes en esta investigación: a) dilucidar qué es desde un punto de vista lógico la abducción, tanto en su versión ordinaria como en un enfoque sistémico (por otros denominado *estructural*), así como modelizarlas de modo más general que en los tratamientos hasta ahora publicados (de este modo, las diferentes propuestas serán hechas en un nivel metalingüístico que no estará vinculado a ningún sistema lógico en particular); y b) investigar en herramientas formales que permitan nuevas modelizaciones de la abducción en sistemas lógicos proposicionales específicos que incorporen aspectos interesantes que, aun estando algunos de ellos ya presentes en estudios informales, todavía no han sido recogidos en tratamientos formales previos. El restringirnos a sistemas lógicos proposicionales está motivado porque hasta el momento el funcionamiento de la abducción sólo se ha conseguido que sea satisfactorio en dicho nivel.

En relación con el primer gran objetivo de esta investigación, estamos interesados en elaborar un concepto de abducción que acoja clases más amplias de operaciones epistémicas mediante las que se puedan generar explicaciones (entendida esta palabra en un sentido puramente lógico). Con este fin tendremos que: 1) generalizar y diversificar la noción de abducción ordinaria clásica, independizándola a la vez del lenguaje de sistemas lógicos específicos (en particular, de los sistemas lógicos clásicos, dado que las formulaciones tradicionales son fuertemente dependientes de éstos); 2) generalizar la versión sistémica de la abducción para permitir su uso en clases de sistemas lógicos más amplias; y 3) encontrar una modelización que unifique las correspondientes relaciones inferenciales ordinarias y sistémicas bajo un tipo común más general (la abducción holística). En algunos casos dichas propuestas vendrán sugeridas por el tratamiento de la abducción en otras disciplinas de conocimiento, aunque en la mayoría de las ocasiones las motivaciones son puramente internas.

Este 'movimiento' hacia un planteamiento más amplio que permita unificar bajo un mismo tratamiento formal diversos enfoques particulares resulta crucial dado que en los últimos 20 años han proliferado las modelizaciones en diversos sistemas lógicos y con propósitos diferentes, pero no ha existido un esfuerzo paralelo por responder, a la luz de todas esas propuestas, a la pregunta de qué es entonces la abducción desde el punto de vista de la Lógica y cómo esa noción común puede desplegarse en la multiplicidad de versiones específicas que se han propuesto. No se entienda lo anterior en el sentido de que no se ha avanzado nada al respecto: de hecho, sí se han alcanzado ciertos importantes resultados en la caracterización estructural de la relación de consecuencia abductiva, pero ciertamente quienes investigan la abducción desde un punto de vista lógico han volcado sus esfuerzos mayoritariamente en el tratamiento formal de la abducción en los diversos marcos lógicos particulares.

En el mencionado estudio, cuyo enfoque es eminentemente general y conceptual, también abordamos la tarea de sacar a la luz nuevos 'ingredientes' que explícita o implícitamente están presentes en múltiples inferencias abductivas y establecemos distinciones que nos permitirán hacer una tipología del variado abanico de relaciones inferenciales abductivas que podemos encontrar. Todo ello redundará igualmente en la posibilidad de adquirir una visión más completa de este tipo de consecuencia lógica que tan a menudo se presenta en el ámbito lógico de forma excesivamente simplificada y monolítica.

En relación con el segundo gran objetivo, estamos especialmente interesados en herramientas que permitan efectuar las modelizaciones en el seno de sistemas lógicos que desbordan el marco de la Lógica Clásica, en la medida que ellos puedan dar cuenta de aspectos que no resulta posible representar en el marco clásico. Si se observa 'con distancia', éste es, en cierto modo, un 'movimiento de sentido contrario' al del anterior objetivo, puesto que en el presente lo que hacemos pretende facilitar la particularización a sistemas concretos, mientras que en el primer objetivo se buscaba la mayor generalidad posible. No es contradictorio perseguir ambos objetivos: de los logros alcanzados en cada uno de ellos podemos obtener un provecho diferente.

Como se desprende de lo hasta ahora expuesto, esta investigación tiene un enfoque eminentemente lógico-formal, sin renunciar por ello a tomar en consideración, al menos brevemente, las aportaciones relevantes para nuestros objetivos que provienen de la *Historia de la Ciencia y de la Lógica* así como de la *Filosofía de la Ciencia y de la Lógica*. Y ello no sólo por el gran respeto y aprecio que le profesamos a estas disciplinas, sino por lo que contribuyen al cabal entendimiento de los conceptos en los que se inspiran algunos de los que aquí se proponen, así como a tomar conciencia de la gran riqueza de matices inherentes al asunto.

Sin embargo, aunque los rótulos de las diversas construcciones formales no se han asignado con indiferencia hacia el uso de dichos nombres en el acervo histórico y filosófico, para la correcta comprensión de este trabajo debe tomarse cada uno de ellos con el exacto significado que en el texto se le asigna y no atribuirles otros rasgos que no se deriven necesariamente de los anteriores, aunque los posean en las concepciones de otros autores (por cierto, a menudo diferentes también entre sí en muchos aspectos). Con el fin de evitar estas 'interferencias', en varias ocasiones hemos preferido acuñar nuevos nombres, lo cual parece ajustarse a una indicación dada por el propio Peirce: «Assign to every scientific conception a scientific name of its own, preferably a new word rather than one already appropriated to an unscientific and dubious conception.» (CP 7.494 Fn 9).

Entrando ya en la organización de esta memoria, comenzaremos en el primer capítulo presentando las raíces filosóficas del concepto peirceano de abducción y de otro, histórica y temáticamente emparentado con éste, pero distinto: la inferencia a la mejor explicación. A continuación presentaremos algunas pinceladas sobre nuestra concepción general de ambas cuestiones, indicando en qué medida las liberamos de algunas de las limitaciones que habitualmente se le imponen.

El segundo capítulo arranca exponiendo informalmente la caracterización lógica de la abducción ordinaria que actualmente es tomada como canónica. En la segunda sección, y partiendo de una modelización formal próxima a dicha caracterización, se suceden distintas propuestas que generalizan la inicial en diversos sentidos (en particular, ampliándola a lógicas no clásicas y también contemplando la posibilidad de que el problema abductivo o/y la solución sean todo un conjunto de fórmulas). El proceso de generalización continúa con el tránsito de la mera abducción ordinaria plana a la abducción ordinaria cualificada y, dentro de esta última, a una abducción ordinaria cualificada preferencial. Daremos también algunas pinceladas (sin profundizar en ello) sobre una ampliación que contemple tanto la estrategia seguida en el proceso abductivo como la limitación de los recursos disponibles en su realización. Con todo ello se amplía enormemente el elenco de inferencias deductivas que hasta ahora habían sido estudiada dentro del ámbito de la Lógica y además se proponen tipologías más amplias tanto de los problemas abductivos como de las soluciones abductivas. Aunque no sea el objetivo de esta investigación, las necesidades conceptuales y simbólicas nos han conducido a estudiar al hilo de los anteriores desarrollos dos novedosas relaciones inferenciales de la familia de la deducción: la deducción cualificada y la deducción plural.

En la tercera sección del mismo capítulo presentamos el concepto intuitivo de abducción sistémica (noción que fue denominada *abducción estructural* por el pionero en su tratamiento lógico), con la cual será posible dar cuenta de modificaciones más profundas de las teorías científicas (en particular de ciertos cambios de paradigmas) y que se muestra especialmente interesante en el ámbito de la Metafísica Computacional en el sentido en que ésta es abordada por Edward N. Zalta. Tras presentar la formalización de la versión canónica, seguiremos con el estudio de ciertas cuestiones instrumentales acerca de los sistemas lógicos, las cuales nos permitirán una modelización más general de este tipo de inferencia. También abordaremos por vez primera el establecimiento de una tipología de las soluciones abductivas sistémicas. En la cuarta y última sección del capítulo formularemos nuestra propuesta, inicialmente también a nivel informal, de un concepto general unificador de la abducción ordinaria y la abducción sistémica: la abducción holística.

Los capítulos tercero a quinto conforman la segunda parte de nuestra memoria de investigación, dedicada a la aplicación del Análisis Estructural Lógico a distintas relaciones de consecuencia lógica. En este bloque se presentan numerosos resultados formales acerca de las distintas relaciones de consecuencia deductivas y abductivas, algunos de ellos bastante importantes en cuanto que vienen a dar respuesta a problemas que aún permanecían abiertos en el campo.

El capítulo tercero comienza presentado las cuestiones conceptuales y notacionales que resultan necesarias para la comprensión del material que se presenta en todo el bloque y reflexiona acerca del sentido de algunos de los conceptos involucrados y de las limitaciones que habitualmente se le imponen a un estudio de este tipo –algunas de las cuales son criticadas y no serán asumidas en nuestras propuestas–. A continuación se presentan las propiedades estructurales de la relación inferencial deductiva, comenzando con las de la versión clásica y siguiendo con la formulación novedosa que hemos denominado *deducción plural*.

En el capítulo cuarto y quinto se estudian con detalle las correspondientes propiedades estructurales de distintas versiones de relaciones inferenciales abductivas, probando teoremas de representación para varias de ellas. El modo de proceder en ambos ha sido el siguiente: arrancar del estudio de un concepto de inferencia que esté a la base tanto de nuestra noción de inferencia abductiva como de la propuesta que está a la base de los resultados estructurales que hasta ahora han sido publicados (es decir, la noción que propugna Atocha Aliseda). A partir de esa propuesta base estudiamos otras que añaden alguna otra condición, de modo que esto permite ver qué nuevas propiedades se 'ganan' y cuáles se 'pierden' con cada uno de esos requisitos adicionales. El elenco de casos estudiados no abarca todas las situaciones posibles, pero sí que presenta las situaciones que son más relevantes para el objetivo de nuestra investigación y algunas más que conjuntamente permiten 'vislumbrar' las características de otras situaciones concretas.

En cada uno de estos tres capítulos, la terminología puede ser una dificultad adicional: buena parte de los rótulos son de nuevo cuño y a menudo resultan largos. De ambas circunstancias, la última es consecuencia de haber optado por reducir el número de denominaciones necesarias, no creando términos para situaciones que podríamos considerar 'intermedias' (es decir, términos que de un modo jerárquico o estratificado acumulan cualidades anteriores –digamos metafóricamente, términos que a modo de «matrioskas» 'engloban' todas las cualidades que está en niveles inferiores–), y en su lugar haber construido dichos rótulos enumerando todas los adjetivos que se agregan como cualificación sobre el caso base. Este modo de proceder puede hacer menos fluida la lectura frente al que crea nuevos términos 'desconectados' entre cada 'nivel' y sus 'ramificaciones', pero además de ser más económico en cuanto al elenco terminológico tiene también la ventaja de que en todo momento pone claramente de manifiesto los vínculos entre los distintos conceptos (digamos, en terminología aristotélica, que revelan cristalinamente tanto su 'género común' como sus 'diferencias específicas'). Eso sí, la cantidad de resultados, junto a la citada complejidad terminológica, conllevan el peligro de que nos ocurra aquello de lo que intenta prevenirnos el proverbio: “que los árboles nos impidan ver el bosque”. Para facilitar esta visión sinóptica se han insertado junto al texto principal un buen número de diagramas en los que que se presentan de un modo muy intuitivo cuáles son los vínculos entre diversos conjuntos de reglas, tanto de un modo general como para ciertas relaciones inferenciales que cumplen determinadas condiciones. Con el mismo fin, en un apéndice se han recogido todas las denominaciones abreviadas correspondientes a los conjuntos de reglas que aparecen en el texto y se ha indicado a qué relaciones inferenciales corresponden.

En el capítulo sexto presentamos una aportación que mejora, en relación al estado del arte anterior, las propiedades computacionales (en situaciones promedio típicas) de un sistema lógico muy potente: la lógica de la comunicación y el cambio (a la cual nos referiremos más brevemente como LCC). Éste resulta especialmente indicado para la modelización de la inferencia abductiva ordinaria en tanto que, a diferencia de la lógica epistémica dinámica en sentido convencional (DEL), permite dar cuenta no sólo del conocimiento que los sujetos tienen de la realidad sino también de los cambios que pueden ocurrir en la misma. LCC es una extensión propia tanto de la lógica proposicional clásica como de la lógica de anuncios públicos (en el sentido de que toda inferencia válida en alguna de estas últimas lo seguirá siendo en aquélla, pero no viceversa), aunque su mayor potencia expresiva la ‘pagará’ con un aumento de la complejidad computacional de cualquier algoritmo que quiera probar en ella satisfacibilidad. La aportación presenta también otras ventajas de índole práctico como su formulación matricial y la presentación de operaciones que eliminan aún más ‘ruido’ en los procesos de obtención de los transformadores de programas, redundando todo ello en su mayor usabilidad.

En el séptimo capítulo se modeliza en el ámbito de la Lógica Epistémica Dinámica una operación que, a pesar de su relevancia gnoseológica, apenas ha sido tratada hasta la fecha dentro del ámbito señalado: la acción de olvidar. Este concepto y el aparato desarrollado para su modelización formal permite, por ejemplo tratar, de una manera novedosa en relación a la literatura lógica, la abducción ante anomalía. Se presentan diversos modos de olvidar y se estudian los vínculos entre algunos de ellos. Incluso para la que se toma como núcleo de la propuesta (la acción de *olvidar-si es verdadera una proposición*) se ha obtenido un sistema axiomático correcto y completo. La modelización formal abordada en este capítulo se presenta únicamente para escenarios monoagnetes, por lo que en el siguiente acometemos la tarea de hacer la correspondiente propuesta para sistemas con múltiples agentes.

Sin embargo, en el capítulo octavo no nos limitamos a una formulación que tenga la expresividad indicada, sino que aprovechamos para hacer otra presentación que consiga reducir el tamaño de los modelos (que en la anterior crecían de modo exponencial) y que a la vez sea máximamente respetuoso con el estado epistémico de los agentes previo a la ejecución de la operación de olvido. Así pues, tanto en este último como en el primero de los capítulos de este tercer bloque no sólo se ha tenido en cuenta la adecuada modelización teórica sino que ha sido una preocupación constante la implementabilidad de la propuesta en herramientas informáticas reales.

Finalmente se exponen los principales logros que se siguen de esta investigación, valorándolos a la luz de los objetivos que nos hemos propuesto.

Se incluyen en la presente memoria dos apéndices que pretenden facilitar la cabal comprensión de lo aquí expuesto: en el primero de ellos se presenta una relación de los diferentes símbolos que han sido empleados a lo largo del texto, e igualmente se recogen algunas abreviaturas y convenciones tipográficas (su consulta previa a la lectura del texto puede ayudar a evitar ciertas confusiones que pueden surgir si se asumen tácitamente los 'interpretaciones' que en otros textos pueda tener la misma notación); en el segundo, ya mencionado, se recogen todas las denominaciones abreviadas correspondientes a los conjuntos de reglas que aparecen en el texto. Además de la bibliografía consultada para esta investigación, cierran el texto sendas listas de las tablas y figuras que aparecen a lo largo de la obra.

La motivación de este trabajo parte de la necesidad de profundizar desde un punto de vista lógico en una cuestión crucial para varias disciplinas, pero que últimamente está siendo abordada con más intensidad desde otros ámbitos (especialmente la Filosofía de la Ciencia y la Inteligencia Artificial) y cuyo tratamiento en el ámbito de la Lógica se centra más en el cómo caracterizarla e implementarla de modo efectivo en sistemas lógicos concretos, con un cierto descuido por la indagación sobre la misma en una perspectiva lo más general posible. Los objetivos concretos y la metodología de esta investigación han sido ya expuestos en este prólogo que ya se acerca a su final. Retomando las ideas que se exponían en sus primeros párrafos, podemos afirmar que, a la luz del plan de trabajo que ha sido expuesto, nuestra investigación aparece como fiel reflejo de esa relación simbiótica entre saberes: tomando en cuenta, además de las puramente internas, motivaciones intuitivas que nos proporcionan otras disciplinas y las aportaciones más relevantes que se han realizado a lo largo de la historia del pensamiento en relación a la cuestión que nos ocupa, formulamos propuestas formales que superan el estado de la cuestión en el ámbito de la Lógica, propuestas que a su vez trascienden lo puramente formal y podrán proporcionar un nuevo impulso en el tratamiento intuitivo que desde la Filosofía de la Ciencia o desde la Inteligencia Artificial se hace de esta cuestión. En cuanto a la presentación del estado del arte hemos optado por fragmentarla de modo que anteceda en cada caso a cada aspecto concreto (normalmente al inicio del capítulo o de la sección).

Algunas de las ideas recogidas en esta memoria han sido presentadas y discutidas con otros participantes en los congresos, jornadas, workshops..., que a continuación se enumeran en orden cronológico inverso:

- Nepomuceno Fernández, A.; Sarrión Morillo, E.; Soler Toscano, F. & Velázquez Quesada, F.R.: *Public and Secret Forgetting of Propositional Formulas*. Conferencia CAEPIA'2015. Universidad de Castilla-La Mancha. 2015.

- Sarrión Morillo, E.: *Nuevas modelizaciones formales de la abducción y sus aplicaciones*. VIII Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España. Facultad de Filosofía - Universidad de Barcelona. 2015.

- Sarrión Morillo, E.: *Forgetting complex propositions*. Workshop "Logic on Computation". Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática - Universidad de Málaga. 2015.

- Sarrión Morillo, E.: *Transformadores eficientes de programas para traducir LCC a PDL*. Workshop "Lógica, Lenguaje e Información". Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática - Universidad de Málaga. 2014.

- Pardo Ventura, P.; Sarrión Morillo, E.; Soler Toscano, F. & Velázquez Quesada, F.R.: *Efficient program transformers for translating LCC to PDL*. 14^{th} European Conference on Logics in Artificial Intelligence - JELIA'14. Universidade da Madeira. 2014.

- Sarrión Morillo, E.: *Abducción y cambio de marco lógico*. I Congreso Internacional de la Red Española de Filosofía. Facultad de Filosofía - Universidad de Valencia y Red Española de Filosofía. 2014.

- Sarrión Morillo, E.: *Para seguir pensando en torno a la abducción*. VIII Jornadas Ibericas - “Debates da Filosofia da Ciência Contemporânea”. Tec Labs - Centro de Inovação da Fac.Ciências - Universidade de Lisboa. 2014.

- Sarrión Morillo, E.: *Concepción generalizada de la abducción y su implementación*. Simposio sobre Lógica y Computación. Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática - Universidad de Málaga. 2104.

- Sarrión Morillo, E.: *Abducción en el retículo de los sistemas normales de la Lógica Modal Proposicional*. International Symposium of Epistemology, Logic and Language. Faculdade de Ciências - Universidade de Lisboa. 2012.

- Sarrión Morillo, E.; Hernández Antón, I. & Nepomuceno Fernández, A.: *Tratamiento multimodal de contextos*. VII Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España. Santiago de Compostela. 2012.

- Hernández Antón, I.; Sarrión Morillo, E. & Soler Toscano, F.: *Abducción y Semántica de Teoría de Juegos*. VII Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España. Santiago de Compostela. 2012.

- Sarrión Morillo, E.: *Utilidad de la Lógica de Contextos en la Filosofía de la Ciencia*. II Brainstorming de Epistemología, Lógica y Lenguaje. Facultad de Filosofía - Universidad de Sevilla. 2012.

- Hernández Antón, I.; Nepomuceno Fernández, A. & Sarrión Morillo, E.: *La inferencia científica relativa al contexto*. VI Jornadas Ibéricas - Lógica, Lenguaje, Mente y Ciencia. Facultad de Filosofía - Universidad Complutense de Madrid. 2011.

Además, muchos de los contenidos de esta memoria han dado lugar a diferentes publicaciones, las cuales se presentan a continuación agrupadas en tres tipos y, dentro de cada uno de ellos, enumeradas en orden cronológico inverso:

▶ ARTÍCULOS DE REVISTAS:

- Pardo Ventura, P.; Sarrión Morillo, E.; Soler Toscano, F. & Velázquez Quesada, F.R.: Tuning the program transformers from LCC to PDL. [bajo revisión en *Journal of Applied Logic*, ISSN: 1570-8683 (fecha de presentación: 22-01-2016)].

- Fernández Duque, D.; Nepomuceno Fernández, A.; Sarrión Morillo, E.; Soler Toscano, F. & Velázquez Quesada, F.R.: Forgetting complex propositions. *Journal of IGPL*, 23 (6), pp. 942-965. 2015. ISSN: 1367-0751 y e-ISSN: 1368-9894.

- Sarrión Morillo, E.: LCC-program transformers through Brzozowski's equations. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, 116, pp. 220-229. 2015. ISSN: 0252-9742. [Recoge trabajos ampliados seleccionados con posterioridad entre los presentados en el Workshop "Lógica, Lenguaje e Información".]

▶ CAPÍTULOS DE LIBROS:

- Hernández Antón, I.; Nepomuceno Fernández, A. & Sarrión Morillo, E.: La inferencia científica relativa al contexto. En Fernández Moreno, L.; Salguero Lamillar, F.J.; Barés Gómez, C. (eds.): *Ensayos sobre Lógica, Lenguaje, Mente y Ciencia*, pp. 17-30. Ediciones Alfar. 2012. ISBN: 9788478984626.

- Nepomuceno Fernández, A.; Sarrión Morillo, E.; Soler Toscano, F. & Velázquez Quesada, F.R.: Investigar con lógicas no clásicas. En López-Cózar Delgado, R. (ed.): *Aplicaciones Multidisciplinares de Sistemas de Diálogo*, pp. 157-173. Red Temática en Sistemas de Diálogo Avanzados. 2015. ISBN: 9788494012853.

▶ ACTAS DE CONGRESOS Y OTRAS PUBLICACIONES:

- Sarrión Morillo, E.: Para seguir pensando en torno a la abducción. En Pombo, O. (ed.): *VIII Jornadas Ibericas - "Debates da Filosofia da Ciência Contemporânea"*. Centro de Filosofia das Ciências - Universidade de Lisboa. En prensa. [Recoge trabajos ampliados seleccionados con posterioridad entre los presentados en las citadas jornadas.]

- Nepomuceno Fernández, A.; Sarrión Morillo, E.; Soler Toscano, F. & Velázquez Quesada, F.R.: Public and Secret Forgetting of Propositional Formulas. En Puerta, J.M.; Gámez, J.A.; Dorronsoro, B.; Barrenechea, E.; Troncoso, A.;

Baruque, B. & Galar, M. (ed.): *Advances in Artificial Intelligence (16th Conference of the Spanish Association for Artificial Intelligence, CAEPIA 2015. Albacete, Spain, November 9-12, 2015. Proceedings)*, pp. 139-149. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 9422. Springer. 2015. ISBN: 9783319245973 y e-ISBN: 9783319245980. [Reducida selección de trabajos de la citada conferencia.]

- Sarrión Morillo, E.: Nuevas modelizaciones formales de la abducción y sus aplicaciones. En Díez, J.; García-Carpintero, M.; Martínez, J. & Oms, S. (eds.): *Actas del VIII Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, pp. 57-64. Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España y Universitat de Barcelona. 2015. ISBN: 9788460693031.

- Pardo Ventura, P.; Sarrión Morillo, E.; Soler Toscano, F. & Velázquez Quesada, F.R.: Efficient program transformers for translating LCC to PDL. En Fermé, E. & Leite, J. (eds.): *Logics in Artificial Intelligence (14th European Conference, JELIA 2014. Funchal, Madeira, Portugal, September 24-26, 2014. Proceedings)*, pp. 253-266. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 8761. Springer. 2014. ISBN: 9783319115573 y e-ISBN: 9783319115580.

- Sarrión Morillo, E.: Abducción y cambio de marco lógico. En Campillo, A. & Manzanero, D. (coords.): *Los retos de la Filosofía en el siglo XXI*, vol. X –Corredor, C. (ed.): *Lógica, Lenguaje y Argumentación*–, pp. 71-85. Publicacions de la Universitat de València y Red Española de Filosofía. 2015. ISBN: 9788437096803. [Recoge trabajos ampliados y revisados que fueron seleccionados con posterioridad entre los presentados en el I Congreso Internacional de la Red Española de Filosofía.]

- Sarrión Morillo, E.; Hernández Antón, I. & Nepomuceno Fernández, A.: Tratamiento multimodal de contextos. En Martínez Vidal, C.; Falguera, J.L.; Sagüillo, J.M.; Verdejo, V.M. & Pereira-Fariña, M.: *VII Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, pp. 81-87. Servicio de Publicacions da Universidade de Santiago de Compostela. 2012. ISBN: 9788498879391.

- Hernández Antón, I.; Sarrión Morillo, E. & Soler Toscano, F.: Abducción y Semántica de Teoría de Juegos. En Martínez Vidal, C.; Falguera, J.L.; Sagüillo, J.M.; Verdejo, V.M. & Pereira-Fariña, M.: *VII Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, pp. 60-66. Servicio de Publicacions da Universidade de Santiago de Compostela. 2012. ISBN: 9788498879391.

Quienes tienen ya una amplia experiencia en el ámbito de la investigación dicen que la elaboración de la tesis doctoral es sólo el comienzo del camino, una etapa preparatoria que a su término permite acreditar que se han adquirido las habilidades indispensables para ejercer de forma competente la investigación en algún campo de conocimiento. Siendo esto así, parece que haber afrontado retos de índole muy diversa es el mejor modo de aproximarse a lo que será el ejercicio profesional real en este polifacético ámbito, el de la Lógica, en el que lo mismo hay que habérselas con las ideas de un pensador que realizó sus propuestas hace más de 2000 años, que hay que afanarse en la demostración rigurosa de un resultado expresado en un simbolismo muy alejado del lenguaje natural humano.

Parte I

Abducción: Filosofía y Lógica

(capítulos 1 y 2)

Capítulo 1

Introducción: breve bosquejo histórico-filosófico del concepto de abducción

Abrimos este capítulo inicial presentando algunas de las aportaciones que a lo largo de la historia del pensamiento han ido configurando el concepto central de nuestra investigación –la abducción– y pondremos de manifiesto las coincidencias y diferencias con otro que está estrechamente conectado con él: la inferencia a la mejor explicación. No cabe aquí el intento de agotar los diferentes tratamientos de dichas cuestiones, pero sí, al menos, presentar las líneas maestras de las aportaciones más influyentes y reflexionar sobre las notas esenciales de esos conceptos. Finalizaremos el capítulo con una discusión crítica de la que ha sido considerada entre los estudiosos de la abducción como la caracterización informal de la versión paradigmática.

1.1. La abducción en su sentido clásico

Lo que en Lógica se entiende comúnmente por *abducción* –y en esta investigación llamaremos *abducción ordinaria*[1]–, es un concepto que fue explícitamente teorizado por Charles Sanders Peirce en textos que van desde 1866 a 1907. Dicho autor puso de manifiesto que esta noción ya se encontraba apuntada con idéntico sentido,

[1] También se le puede llamar *abducción clásica* o *abducción estándar* o, por razones que se comprenderán mejor posteriormente, *abducción elemental*.

bajo el rótulo de *hipótesis*, en diversos escritos publicados con anterioridad por William Whewell (especialmente en sus obras, que cabría tildar de 'monumentales', [Whe37] y [Whe40], con 3 y 2 volúmenes respectivamente), aunque debemos decir que en ellas no fue suficientemente desarrollada. Otros autores de su época trataron también la cuestión (entre ellos destaca especialmente John Stuart Mill [Mil43][2]), pero no cabe la menor duda de que es Peirce el referente fundacional para todos los investigadores actuales de la abducción, adopten éstos un enfoque formal o no formal, y en ambos casos, tanto de los que suscriben fielmente sus propuestas como de quienes sólo parten de éstas para desarrollarlas e incluso de quienes discrepan en mayor o menor grado de ellas.

La palabra *abducción* deriva del vocablo latino «abductio», el cual fue empleado por el humanista Julius Pacius para traducir en 1597 el término griego «apagogé», que había sido el usado por Aristóteles en el capítulo 25 del libro II de los *Analíticos primeros* [Ari82] –siendo éste el precedente más remoto del que tenemos constancia en relación al estudio del concepto central de nuestra investigación–. En dicha obra el estagirita abordó las tres formas de razonamiento siguientes: «apodeixis» (traducida como *deducción* o *demostración apodíctica'*), «epagogé» (traducida como *inducción* o *comprobación*) y «apagogé» (traducida inicialmente como *abducción* o *reducción* y vinculada a lo largo de la historia, en mayor o menor grado, con las expresiones *deducción en reversa*, *retroducción*, *presunción*, *hipótesis*, *conjetura*, *explicación*, *hipótesis explicativa*, *razonamiento explicativo* y *razonamiento hipotético*, entre otras).

El propio Peirce utilizó a lo largo de su obra varias de esas expresiones y algunas más con la intención de destacar en cada momento unos aspectos u otros; hasta ocho maneras distintas encontramos en la obra peirceana para referirse a este concepto: *razonamiento a posteriori*, *hipótesis*, *razonamiento por signos*, *retroducción*, *presunción*, *conjetura*, *adivinación* y *abducción*. No todas ellas tuvieron exactamente la misma significación, e incluso una misma expresión fue caracterizada con distintos rasgos en diferentes épocas; pero todas están vinculadas al concepto de razonamiento[3] a un antecedente. Curiosamente, Peirce abandonó el uso de la pa-

[2] En el texto citado Stuart Mill abordó la cuestión de la inducción, pero en el seno de sus reflexiones se refirió también a la elaboración de hipótesis. Tras la publicación de esa obra el citado William Whewell escribió dos monografías, [Whe49] y [Whe58], en las que presentó sus objeciones a las propuesta del anterior, en particular distinguiendo claramente entre las relaciones inferenciales que hoy reciben los rótulos de *inducción* y *abducción*.

[3] En todas las obras de la ingente producción peirceana, salvo en una, *razonamiento* e *inferen-*

labra *abducción* en sus últimos escritos sobre la cuestión, probablemente para evitar la identificación directa de su concepto con el aristotélico, a pesar de que él mismo había defendido esta relación años atrás.

El planteamiento peirceano no fue diacrónicamente homogéneo, de hecho es habitual entre los estudiosos de éste considerar la existencia de distintas etapas en su concepción de la cuestión que aquí nos ocupa, dado que presenta una notable evolución en los más de 40 años en los que escribió sobre ella. Así, por ejemplo, una de las propuestas más influyentes, la de Fann [Fan70], distingue las tres siguientes:

- Una primera, que abarcaría desde 1860 hasta 1890, en la que la abducción (al igual que la deducción y la inducción) está ligada al silogismo aristotélico.

- Una segunda etapa, concebida como un periodo de transición entre las dos principales y que abarcaría desde 1891 hasta 1898. En ésta se usa preferentemente la expresión *retroducción*, designando ello la adopción de una hipótesis y asumiendo los nuevos rasgos de ser verificable y explicar hechos. Esto, a su vez, le condujo a la tematización de nuevas ideas, tales como la de economía de la investigación.

- Una última etapa, que iría desde 1901 hasta 1914, en la que las tres formas de inferencia constituyen las tres etapas del método científico, repitiéndose cíclicamente en los procesos de investigación: con la abducción se propone una hipótesis para explicar algunos hechos observados, mediante la deducción se derivan las consecuencias de dicha hipótesis y, finalmente, la inducción contrasta estas consecuencias con la experiencia[4].

cia aparecen usados como sinónimos. Aunque es posible diferenciarlos, en este texto también los usaremos de forma indistinta.

[4] Enfatizamos el hecho de que Peirce usa en esta etapa el término *inducción* en un sentido estrechamente vinculado al de nuestra contrastación empírica, mientras que en el ámbito lógico actual la inducción es un proceso inferencial por el que se generaliza un predicado para los objetos de cierto conjunto a partir de la constatación de que los elementos de un subconjunto propio del mismo satisfacen esa propiedad; dicho más formalmente: dado un conjunto no vacío de objetos **A** y un subconjunto propio **B** del anterior, si todos los términos que representan a los elementos de **B** satisfacen el predicado P –es decir, si $\forall x(B(x) \rightarrow P(x))$–, entonces podemos inferir por inducción que todos los términos que representan a los elementos de **A** satisfacen el mismo predicado P –es decir, se infiere $\forall x(A(x) \rightarrow P(x))$–. Por supuesto, la inducción está sujeta a una serie de condiciones adicionales, pero aquí sólo se ha señalado la anterior para poner de manifiesto la notable divergencia entre las dos acepciones del término indicado. Algunos autores denominan *inducción enumerativa* a una inferencia con un enfoque análogo al presentado pero sin exigencias adicionales.

Su concepción en la primera etapa queda magníficamente ilustrada por una terna de ejemplos, convertida hoy en arquetípica, que Peirce presenta en 1878 dentro del texto titulado *Deduction, induction, and hypothesis* (CP 2.623)[5], la cual muestra con sencillez las diferencias entre tres modos de inferencia básicos, quedando en evidencia el distinto rol que juegan las proposiciones comunes involucradas (veáse la tabla 1 (1.1), en la cual se ha seguido la convención usual según la cual sobre la raya se indican las premisas y bajo ella la conclusión):

Deducción:

Regla:	Todas las alubias de este saco son blancas.
Caso:	Estas alubias son de este saco.
Resultado:	Estas alubias son blancas.

Inducción:

Caso:	Estas alubias son de este saco.
Resultado:	Estas alubias son blancas.
Regla:	Todas las alubias de este saco son blancas.

Abducción:

Regla:	Todas las alubias de este saco son blancas.
Resultado:	Estas alubias son blancas.
Caso:	Estas alubias son de este saco.

Tabla 1 (1.1): Terna de ejemplos que permite distinguir de modo sencillo los tipos de inferencia básicos que acepta C.S. Peirce.

Sin embargo, la concepción peirceana presenta una filiación compleja con la no-

[5] Mediante las iniciales CP –seguidas del número del volumen y, tras un punto, del número del parágrafo–, se acostumbran a citar los textos de la recopilación *The collected papers of Charles S. Peirce* [Pei94].

ción de «apagogé» aristotélica. Esto es debido a dos factores: primero, la evolución que tanto las ideas del estagirita como las de Peirce tuvieron en relación al concepto; y segundo, la diversidad de interpretaciones que los comentadores del filósofo griego hicieron a lo largo del tiempo, las cuales presentaban la «apagogé» más o menos próxima, según el caso, a la inferencia inductiva o a la inferencia por analogía. A este respecto, los estudiosos del pensamiento peirceano han puesto de manifiesto que la concepción de la abducción profesada inicialmente por éste está muy condicionada por la interpretación escolástica de la propuesta aristotélica –en particular, por la teoría medieval de las «consequentiae» y por las ideas de Duns Scoto– (lo cual no resulta extraño a tenor del gran conocimiento de la Filosofía Medieval que poseía el pensador norteamericano). No obstante, fue el propio Peirce quien se esforzó por vincular su concepto de abducción con el presentado en el capítulo 25 de los *Analíticos primeros*: "Busqué más allá y encontré que... Aristóteles abre el citado capítulo con una descripción de la inferencia de la premisa menor a partir de la mayor y la conclusión..."[6].

Aproximadamente durante tres décadas se sintió Peirce seducido por la regularidad de esta formulación, que mediante simples permutaciones a partir de un patrón silogístico inicial le permitía caracterizar tres tipos de inferencia distintos. La insistencia en esta tricotomía tendrá un doble coste: por un lado, tener que forzar o no considerar algunos rasgos de cada una de las formas de razonamiento señaladas con el fin de mantener unos componentes comunes (a saber, la regla, el caso y el resultado); por otro, descuidar otras posibles formas de inferencia o empeñarse en subsumirlas bajo una de las tres anteriores (así ocurrió, por ejemplo, con la inferencia por analogía[7]).

No obstante, el concepto de abducción que desde la Filosofía de la Ciencia actual se toma como paradigma, y que está a la base de la modelización lógica que en este trabajo tomamos como punto de partida en el ámbito formal, es el que Peirce sostiene en la tercera fase mencionada, más concretamente el que da en sus *Conferencias* de 1903: "El hecho sorprendente, C, es observado; pero, si A fuese verdadero, C sería obvio. Por tanto, hay razón para sospechar que A es verdadero" (CP 5.189). Con esta presentación Peirce enfatiza la idea de que la abducción es un proceso inferencial mediante el que se generan explicaciones a partir de observaciones.

[6] Traducción realizada a partir del texto incluido en el libro de Murphey [Mur61].

[7] Peirce sostendrá en este punto que no encuentra motivo para aceptar un cuarto tipo de inferencia básico, de modo que considera que la analogía puede ser caracterizada como una composición de las tres formas de inferencia elementales: deducción, inducción y abducción.

Pero, salta a la vista, que entendido el anterior como razonamiento deductivo, éste no sería válido, puesto que su conclusión es falible: es posible describir situaciones en las que, aun considerando que las proposiciones de la teoría y la proposición que describe el hecho sorprendente son verdaderas, y siendo la lógica deductiva subyacente correcta, se puede obtener una conclusión falsa. De hecho, visto de esa manera sería un calco de la conocida falacia de afirmación del consecuente. Así pues, como el mismo filósofo pragmatista señala (y en ello coinciden todas las propuestas y todas las interpretaciones desde la del estagirita), la abducción es un tipo de inferencia no apodíctica[8], de modo que su conclusión tiene un carácter puramente hipotético (lo cual la distingue claramente del silogismo aristotélico en sentido propio). Más concretamente, la conclusión era concebida por él como una conjetura que se muestra útil en la explicación[9] de alguna proposición de la que previamente no se dispone de su 'soporte teórico' (es decir, permite dar cuenta de la proposición que enuncia un hecho sorprendente) y que se aspira a justificar teóricamente. Naturalmente, dicha conclusión debe ser contrastada, y eventualmente puede ser cambiada, tras la adquisición de nueva información por parte del razonador; por tanto, se trata de un razonamiento revisable. Más aún, Peirce insiste en que la conclusión abductiva no puede tomarse ni siquiera como una creencia, sino como una mera sugerencia, una mera sospecha que hay que poner a prueba experimentalmente: sólo en el caso de que dicha sospecha pase con éxito el proceso de contrastación estaríamos justificados para creer en ella.

[8] El carácter apodíctico de la deducción consiste en que la relación de consecuencia entre premisas y conclusión es incondicionalmente cierta y necesaria. Desde un punto de vista informativo esto se traduce en que toda la información que tiene la conclusión está ya, al menos implícitamente, en la premisas. Sin embargo, la abducción es una modalidad de inferencia ampliativa, de manera que la solución abductiva tiene información que no contiene, ni explícita ni implícitamente, la teoría inicial –por lo que no resulta posible garantizar la necesidad de la conclusión–.

[9] Algunos pensadores, entre ellos Searle [Sea01], distinguen entre *justificar* y *explicar*: una justificación es una secuencia de enunciados que operan como cadena de razones para aceptar o realizar algo (respectivamente, cierto conjunto de enunciados o cierto conjunto de acciones); mientras que una explicación es una secuencia no vacua de enunciados sobre un hecho o una ley tal que dicha secuencia da cuenta de otro hecho u otra ley, en el sentido de que en aquélla se expresa por qué ocurre éste o ésta. En el presente texto usaremos indistintamente ambos términos, aunque, obviamente, si asumiésemos la distinción anterior, el rol de la inferencia abductiva, visto desde la exclusiva 'óptica' de la Lógica, estaría mucho más próximo al de la justificación del problema abductivo que al de la explicación de éste.

Tomis Kapitan propuso en [Kap97] la caracterización informal de la versión paradigmática de la abducción peirceana mediante las siguientes cuatro tesis:

- Tesis inferencial: la abducción es, o incluye, uno o varios procesos inferenciales (CP 5.188-189; CP 7.202).
- Tesis del propósito: el propósito de una abducción científica es: (i) generar nuevas hipótesis; y (ii) seleccionar de entre dichas hipótesis cuáles deben pasar un posterior examen (CP 6.525).
- Tesis de la comprehensión: la abducción científica incluye todas las operaciones por las que las teorías son generadas (CP 5.590).
- Tesis de la autonomía: la abducción es un razonamiento distinto e irreductible a la inducción y a la deducción (CP 5.146).

Las dos últimas tesis han sido contestadas por distintos autores; pero, entre ambas, es sin duda la última la que más críticas ha recibido. En ella, por supuesto, el término clave es *irreductible*, pues dependiendo de lo que por él se entienda puede resultar o no aceptable aquélla. En este sentido, en la actualidad, al menos en el ámbito de la Lógica, la inmensa mayoría de los intentos de caracterizar la abducción mantienen una fuerte vinculación entre ésta y la deducción (de hecho, en algunos casos, los métodos de cálculo efectivo de la solución abductiva no son sino un uso especial de métodos ampliamente usados en las lógicas deductivas).

Douglas Niño, en su tesis doctoral [Niñ], señala tres rasgos, correspondientes a otras tantas dimensiones, mediante los que se puede caracterizar a la abducción en Peirce y, por tanto, distinguirla de las otras formas de razonamiento básicas para dicho autor:

- En su dimensión formal, la abducción es una inferencia a un 'antecedente' a partir de una 'relación de consecuencia' y un 'consecuente'[10]).
- En su dimensión metodológica, la abducción tiene siempre como primera premisa la constatación de un hecho sorprendente (es decir, un hecho respecto del que hay cierta ausencia de conocimiento) y del cual se debe dar cuenta. Si no existiese esta duda inicial, carecería de sentido acudir a este modo de inferencia.

[10] Los términos de estos tres rasgos que aparezcan encerrados entre comillas simples deben entenderse en el sentido medieval que tuvieron esas expresiones.

- Y, en su dimensión epistemológica, esta forma de inferencia mantiene en la conclusión (el 'antecedente') el estado de ignorancia inicial (es decir, el estado epistémico del 'consecuente'), por cuanto dicha conclusión surge como una solución posible al reto de explicar el hecho sorprendente, pero ella no tiene la suficiente garantía de certeza para convertirse en una creencia justificada.

1.2. La inferencia a la mejor explicación

Las propuestas de Peirce prepararon el camino y en cierto modo ya anticiparon el concepto que más tarde recibió el rótulo de *inferencia a la mejor explicación*, pero es erróneo identificar sin más esta última con la abducción peirceana. No han faltado tampoco quienes han vinculado, o incluso identificado, a la inferencia a la mejor explicación con otro tipo de argumentos: por ejemplo, para Josephson [Jos95] la inducción es un tipo extremo de inferencia a la mejor explicación. Ciertamente, si analizamos la formulación que dimos de la inducción en la sección anterior, podemos constatar que la generalización inductiva alcanzada permite expandir la teoría de modo que se pueden inferir las proposiciones que forman la base de inducción[11]; pero Josephson afirma que no sólo se trata de un proceso abductivo (es decir, de una inferencia que concluye proponiendo una posible explicación), sino que constituye verdaderamente una inferencia a la mejor explicación, por cuanto resulta más razonable pensar que objetos del mismo tipo coincidan en esa cualidad que se induce que pensar en otra posible explicación de distinto tipo. Para quienes defienden este planteamiento, en la generalización inductiva hay dos premisas adicionales tácitas, cuya explicitación permite constatar que realmente se trata de una inferencia del tipo indicado:

1) Todos los elementos del subconjunto **B** tienen la propiedad P.
2) La hipótesis de que todos los elementos del conjunto **A** tienen la propiedad P explica que todos los elementos del subconjunto **B** tienen la propiedad P.
3) Ninguna otra explicación posible del hecho de que todos los elementos del subconjunto **B** tienen la propiedad P es mejor que la que proporciona la afirmación de

[11] Nosotros consideraremos que para poder hablar propiamente de una inferencia abductiva habría que establecer además que al menos una de las proposiciones que componen la base inductiva no se siga de la teoría.

que todos los elementos del conjunto **A** tienen la propiedad P.
4) Por lo tanto, todos los elementos del conjunto **A** tienen la propiedad P.

Esta propuesta ha sido contestada por diversos autores e incluso había sido ya analizada antes que él, pero rechazada, por otros investigadores (en particular por Ennis [Enn68]).

Por nuestra parte, con el fin de precisar el alcance del nuevo concepto y determinar qué vínculos tendría en el pensamiento peirceano tanto con la abducción como con la inducción, comenzaremos presentando brevemente las características generales que este último modo de inferencia tiene en la producción del filósofo pragmatista norteamericano. Acudiendo nuevamente al texto citado de Douglas Niño [Niñ], en él encontramos los siguientes tres rasgos, correspondientes a las mismas dimensiones que antes ya señalamos para la abducción, que caracterizarían a la inducción peirceana:

- En su dimensión formal, la inducción es la inferencia a una 'relación de consecuencia'.
- En su dimensión metodológica, necesariamente una de sus premisas es obtenida por predesignación[12].
- Y, en su dimensión epistemológica, esta forma de inferencia justifica la conclusión y permite que desaparezca la duda acerca de ella [13].

Así pues, para Peirce, en el punto de partida, tanto de la abducción como de la inducción, existe un desconocimiento, pero en la inducción la ignorancia es respecto a qué otros objetos pueden poseer cierta característica compartida por un determinado grupo de objetos explorados, mientras que en la abducción la ignorancia es relativa a qué otras características (que no se siguen de las ya conocidas) pueden compartir dicho grupo de objetos explorados.

Peirce, a diferencia de autores posteriores (entre ellos, Rudolf Carnap y Karl Popper, quienes consideraban irrelevante cómo se hubiese alcanzado una propuesta teórica), muestra preocupación no sólo por el asunto de la justificación de las

[12] Este requisito, tomado probablemente de William Rowan Hamilton, propone que los 'caracteres comunes' que se quieran generalizar se deben establecer antes de observar la muestra.
[13] Recuérdese que la inducción está ligada en esta etapa del pensamiento peirceano a la contrastación empírica.

teorías científicas a la luz de la evidencia empírica, sino también por la cuestión de cómo se elaboran dichas teorías, lo cual apunta directamente a lo que se ha llamado la *lógica del descubrimiento científico* (expresión que se hace cargo de la famosa distinción entre contexto de descubrimiento y contexto de justificación[14]). Se podría pensar que, dado que Carnap escribió diversas obras sobre la lógica inductiva –especialmente [Car50], [Car52] y [Car55]–, debió considerar la existencia de un método de dicha naturaleza para generar propuestas teóricas. Sin embargo, como indica de modo esclarecedor Andrés Rivadulla ([RF91], pág. 72): "Para Rudolf Carnap (1891-1970), en efecto, la tarea de la lógica inductiva no consiste en el descubrimiento de leyes generales, sino en la determinación del grado de confirmación o probabilidad lógica de una hipótesis dada en base a la experiencia disponible. La función de la lógica inductiva comienza para Carnap sólo cuando se dispone de una hipótesis explicativa de determinados fenómenos, cuya probabilidad *a posteriori* se trata de averiguar". Por su parte, Popper niega la posibilidad de una lógica del descubrimiento por un doble motivo, en ambos casos fruto de una concepción reduccionista: el primero es la identificación del descubrimiento científico con un golpe de inspiración o '¡ajá!' (así pues, según dice en [Pop59], el descubrimiento científico es una cuestión que pertenece al ámbito de la Psicología) y el segundo es una idea de la Lógica que la reduce a la Lógica Deductiva. Frente a ellos tenemos la postura de Hempel ([HO48], [Hem62] y [Hem65a]), quien pretende fundamentar el razonamiento explicativo desde un punto de vista lógico, e incluso, inicialmente lo identifica con un particular modo de inferencia de la lógica clásica –claro está, sujeto a ciertas condiciones adicionales (las cuales se fueron haciendo progresivamente más complejas a medida que los filósofos de la Ciencia iban encontrando 'situaciones extrañas' a la luz de la propuesta inicial)–.

Tal como se ha puesto de manifiesto, a Carnap y Popper no les interesa, en particular, determinar si una hipótesis ha sido alcanzada por inducción, mediante abducción, por analogía o mediante el concurso de una o varias de las anteriores en conjunción o no con la deducción: el motivo es que ellos defienden que, independientemente del modo en que se haya conseguido, no está garantizada la idoneidad, siquiera provisional, de la misma; por tanto, sólo le concederán importancia a las relaciones que existan entre la teoría y los enunciados que representan a los hechos de experiencia. Pero entre estos dos últimos autores, a su vez, surge una diferen-

[14] Estos rótulos fueron propuestos por Hans Reichenbach [Rei38], aunque la distinción ya estaba presente en una obra popperiana [Pop59].

cia fundamental: Carnap asigna valores cuantitativos de probabilidad a las hipótesis científicas a partir del repertorio de evidencias disponibles y asume como criterio metodológico que el científico debe adoptar las hipótesis con mayor índice de probabilidad; por su parte, Popper propone como criterio metodológico la preferencia por las hipótesis que 'se arriesguen más' a ser falsadas en el proceso de contrastación –lo que puede desembocar en la adopción de aquéllas que, a tenor de la experiencia previa, resultan más improbables–.

Por su parte, el filósofo pragmatista norteamericano, opuesto al bayesianismo, había sostenido que la mejor explicación no tiene por qué ser la más probable sino la que proporciona más consecuencias que pueden fácilmente ponerse a prueba (idea que está muy cerca del falibilismo popperiano). De entre dos explicaciones, Peirce preferirá la más 'económica', pero ello no conlleva que también sea la más plausible, sino sólo que es la más apropiada para ponerla a prueba. Por ello hay ocasiones en las que recomienda tomar la hipótesis más implausible para someterla a contrastación, dado que presumiblemente será la más fácilmente refutable.

Diversos autores, entre ellos Kapitan [Kap97], retomando en este punto una objeción ya presentada en 1958 por Harry G. Frankfurt [Fra58], han criticado que el esquema peirceano de la abducción no tiene en cuenta en sí mismo el hecho de que a menudo la hipótesis que se quiere obtener como conclusión no es una cualquiera de entre las que pertenecen a un conjunto, sino la más plausible de ellas (esto contrasta con el planteamiento de Peirce, para el cual las abducciones son las únicas conclusiones inferenciales para las que, después de haber admitido que son aceptables, aún queda por investigar en un proceso ulterior si son ventajosas o no[15]). En este sentido, el filósofo pragmatista recogió justamente en su economía de la investigación los diversos criterios para preferir una hipótesis sobre otras, pero para Kapitan esto debería conseguirse en el mismo proceso de abducción si no se quiere que ésta sea un tipo de inferencia para la que es suficiente el requisito meramente justificativo y que no distingue los diferentes grados de plausibilidad de las distintas hipótesis posibles.

El pionero en el tratamiento lógico de la inferencia a la mejor explicación fue

[15] Tengamos en cuenta que, a diferencia de la deducción, la inducción, la analogía y otros tipos de argumentos, la abducción es un modo de inferencia en el que a menudo la conclusión no viene claramente sugerida por las premisas, siendo necesario para obtener aquélla el concurso de la imaginación. Es por ello que varios de los autores que estudian informalmente la abducción han intentado encontrar el vínculo entre abducción y pensamiento creativo (sirva de ejemplo [Kap90]).

Gilbert Harman, en su artículo *The inference to the best explanation* de 1965 [Har65], y formulaciones distintas de esta misma noción han sido dadas por Paul Thagard en 1978 [Tha78a] y Peter Lipton en 1991 [Lip91]. Para autores tan reputados como Mika Kiikeri [Kii01b], Dov Gabbay y John Woods [GW05], la abducción y la inferencia a la mejor explicación son semejantes; aunque otros, no menos relevantes, como Jaako Hintikka [Hin98] y Sami Paavola [Paa06a], consideran que no se las puede asimilar. Este último señala que, dado que la abducción es la inferencia a una posible explicación y no a la mejor, la inferencia a la mejor explicación es un concepto refinado en relación al primero que se muestra más apto para su incorporación en el ciclo de las tres etapas del método de investigación científica. Por su parte, para Atocha Aliseda [AL06], la labor de la lógica en la abducción terminaría en la determinación de los abducibles (es decir, de las posibles soluciones abductivas) y a partir de aquí cualquier proceso de preferencia de una solución sobre otra sería un proceso extralógico.

Una cuestión central para este tipo de inferencia, pero muy problemática, será poder determinar cuándo una explicación es mejor que otra: Harman [Har92] enumera, como criterios que propician esto, los de simplicidad, mayor explicatividad, menor carácter *ad hoc* y, por supuesto, mayor ajuste a la experiencia. Thagard [Tha78a] señala los tres siguientes: consiliencia, simplicidad y analogía. La consiliencia de una teoría consiste en su capacidad de explicar una mayor o menor clase de hechos o leyes en ámbitos distintos (por lo que representa su poder de unificación y sistematización); la simplicidad exige que la teoría tenga el menor número posible de hipótesis *ad hoc*; por último, la analogía se entiende en el sentido inferencial del término[16].

En palabras de Douglas Niño [Niñ], la diferencia entre abducción e inferencia a la mejor explicación en Thagard estriba en su 'fuerza' en relación a la cantidad de hechos explicados y a la cantidad de hipótesis eliminadas, de modo que dados cierto conjunto de datos empíricos y cierto conjunto de hipótesis, la inferencia será llamada *abducción* si la fuerza de la inferencia es poca y será llamada *inferencia a la mejor explicación* si dicha fuerza es mucha. El autor colombiano destaca también, en la obra ya citada, la siguiente diferencia entre el planteamiento de Peirce y el de

[16] La analogía, en tanto que mecanismo inferencial lógico, resulta de la ejecución de un tipo de argumento no apodíctico –realmente habría que referirse a ella como una colección de mecanismos inferenciales, dado que se pueden establecer muchos y muy diversos modos dentro de este tipo, no todos ellos con el mismo grado de plausibilidad–.

Thagard: mientras que este último establece la comparación entre diferentes hipótesis con respecto a toda la evidencia empírica disponible (trivial y no trivial), para escoger la que mejor explica toda esa evidencia, en la economía de la investigación peirceana la comparación entre diferentes hipótesis es previa a la experimentación (así pues, no con respecto a toda la evidencia), para seleccionar la que haga avanzar la investigación de la forma menos onerosa.

La abducción de Peirce no es la inferencia a la mejor explicación, sino la selección de la mejor hipótesis disponible para ser contrastada. Los criterios que guían esta búsqueda de una posible explicación son criterios estratégicos (en el sentido que tiene dicha expresión para Hintikka [Hin98] y Paavola [Paa04a]) y deben propiciar el éxito del intento. Sin embargo, la inferencia a la mejor explicación deja de lado el aspecto estratégico, que es esencial en la abducción peirceana.

Los seguidores de la inferencia a la mejor explicación hacen, análogamente a Carnap, que su aceptación se dé en el marco del grado de creencia que es modificado por la evidencia según lo establecido por el *teorema de Bayes* (que se refiere a la probabilidad subjetiva), y no por el que se deriva de una teoría frecuentista amparada en la concepción de Neyman-Pearson (que se refiere a la probabilidad objetiva); esto último está más cerca de la línea de Peirce, puesto que éste siempre criticó un enfoque de tipo bayesiano. Así pues, la inferencia a la mejor explicación puede hacerse compatible con un enfoque bayesiano, mientras que la abducción peirceana no.

1.3. Nuestra concepción general de la abducción

Antes de que en los próximos capítulos entremos en el desarrollo y los detalles concretos de nuestras elaboraciones sobre distintas relaciones inferenciales que están vinculadas a la abducción plana –de forma particular, la inferencia a la mejor explicación–, parece necesario presentar cuáles son los caracteres generales de aquélla (aunque, ciertamente, no podamos ser todo lo precisos que más adelante sí estará a nuestro alcance gracias a nuestra simbolización, nuestras definiciones y ciertas precisiones terminológicas). Desarrollaremos esta concepción general señalando algunos de los puntos de coincidencia y discrepancia entre nuestra propuesta y la que hemos considerado como caracterización informal de la versión paradigmática (es decir, las cuatro tesis de Tomis Kapitan [Kap97] ya citadas), pero insistiremos sobre todo en los aspectos divergentes por cuanto suponen una manera de liberar al tratamiento previo de algunas de las limitaciones que se le venían imponiendo.

Tesis 1. Coincidimos de entrada con la tesis inferencial de Kapitan y concebimos la abducción con el siguiente doble aspecto:

- Estáticamente: como un tipo de argumento.
- Dinámicamente: como un tipo de mecanismo (o proceso) inferencial (así pues, como una operación lógica que obtiene expresiones a partir de otras expresiones).

Explicaremos a continuación el sentido que tienen los conceptos involucrados en estos enunciados. Tradicionalmente se ha considerado que un argumento es un conjunto de expresiones en el que todas ellas pertenecen al conjunto de premisas (es decir, expresiones que recogen los puntos de partida, tanto si éstos son datos como si son meras asunciones tentativas) o al conjunto unitario de la conclusión, siendo ambos disjuntos. Dado un conjunto de expresiones que coincide exactamente con el conjunto de las premisas de un argumento, al proceso de obtención de la conclusión lo denominamos una inferencia (o una ejecución del argumento). A menudo, por abuso de lenguaje, usaremos en este texto estos términos indistintamente.

Hemos hablado de expresiones[17] –de las que serán casos particulares los enunciados– porque en algunos argumentos, tanto si éstos son deductivos como si son de otro tipo, algunos de sus componentes pueden ser entidades lingüísticas no veritativas (por ejemplo, acciones, instrucciones particulares o normas), aunque hay que decir que probablemente no son los casos arquetípicos ni los más frecuentes. Así pues, se pretende poner de manifiesto que los productos del acto lingüístico que están involucrados en las inferencias no necesariamente tienen que tener función referencial, sino que pueden tener función conativa. En esta misma línea, hablaremos de la *idoneidad* de una expresión, que en el caso de un enunciado se 'traducirá' en su verdad.

En lugar del vocablo *expresión*, podríamos haber optado por el término *proferencia*, pero en la Filosofía del Lenguaje actual este término es usado mayoritariamente para designar la acción de proferir, aunque en algunos filósofos del lenguaje

[17] Esta noción sería en el lenguaje natural la análoga a la de *fórmula* en el lenguaje formal.

se observa a veces un uso laxo por el que también se designa como *proferencia* al producto de dicho acto lingüístico. Al redactar su magno diccionario, José Ferrater Mora ya constataba que la palabra era usada en algunos autores para designar la acción misma, en otros para referirse a lo que produce el acto y en otros a ambos indistintamente, aunque señalaba que era esta última opción la mayoritaria en esa época. En esta investigación, dado los objetivos que se ha marcado, nos limitamos a abordar la cuestión del desencadenante del proceso de inferencia abductiva en tanto que producto lingüístico, pero reconocemos el interés que tendría en la Filosofía del Lenguaje desarrollar la cuestión del acto lingüístico (con todos los elementos no verbales e intencionales que forman parte del mismo) como detonante abductivo[18]. Usando la terminología de Grice podemos ahora decir que en nuestros argumentos podrían ocurrir tanto proferencias exhibitivas como proferencias protrépticas.

Así pues, en este punto la existencia o no de diferencia esencial con la citada tesis depende de que la propuesta de Kapitan se entienda o no restringida a que los elementos del argumento abductivo sean o no puramente referenciales.

Tesis 2. La segunda tesis establecía el propósito de la abducción en tanto que abducción científica.

Hemos indicado que la abducción es un tipo de argumento (o inferencia) y ahora añadimos que ese producto lingüístico tiene como propósito o bien generar justificaciones de creencias o conocimientos que carecían de explicación o bien encontrar justificaciones distintas de las ya conocidas en los casos en que dichas creencias o dichos conocimientos contasen con alguna explicación previa. A este respecto vale la pena que nos detengamos a hacer una precisión. Todos los autores están de acuerdo en que la conclusión abductiva tiene un carácter puramente conjetural, e igualmente en que las fórmulas del conjunto de partida son retractables (de hecho, esto último ocurre con algunas de ellas en el planteamiento clásico de la abducción cuando a partir de dicho conjunto de partida se infiere deductivamente lo contradictorio del detonante abductivo); sin embargo, muchos de esos autores asumen que dicho detonante debe tener el estatus de conocimiento. A nuestro entender esto no

[18] Con ello también se contribuiría a poner de relieve la enorme importancia de la abducción en relación a la competencia lingüística de un hablante y el uso del lenguaje: si mediante la inducción y la analogía se generan ciertos patrones lingüísticos y mediante la deducción se particularizan dichos patrones en la ejecución de ciertas proferencias, mediante la abducción se seleccionan cuáles son los mejores medios para alcanzar los objetivos globales (o intenciones primarias) de dichas proferencias –estos medios son la materialización concreta de las denominadas *intenciones secundarias* en términos griceanos–.

es necesario y nada se opone a que lo que motive el inicio de un proceso de inferencia abductiva pueda ser también una mera creencia: por ejemplo, si un individuo cree que $p \to q$ y además cree que q, es plausible pensar que dicho individuo cree que p. Incluso, el problema abductivo puede ser una mera proposición que se toma de manera tentativa (es decir, el argumento involucra un condicional futuro[19]): de esta última forma tendríamos que la abducción podría ser útil como mecanismo anticipativo, por el cual se predicen posibles objetivos sobre los que poder actuar[20]; la solución abductiva aquí podría ser una actuación determinada, poniendo esto de manifiesto la pertinencia de consideraciones anteriores en las que sosteníamos que los componentes de la inferencia abductiva pueden ser entidades no veritativas. Lo anterior entra en conflicto y viene a enmendar cierta visión consolidada en la Filosofía de la Ciencia según la cual se contraponen *predecir* y *explicar*, atribuyéndole a la primera su anterioridad y a la segunda su posterioridad a la ocurrencia de los hechos o de las situaciones a los que quieren dar cobertura. Como vemos, la explicación hipotética también puede ser una estrategia anticipativa, claro está que sin gozar del carácter apodíctico que tienen, en relación a sus premisas, las predicciones deductivas.

Llegados a este punto podemos distinguir entre las dos siguientes orientaciones: una abducción motivada teóricamente y una que carece de tal motivación. Con el fin de entender la distinción valgámonos del siguiente 'experimento mental' (en el sentido que tiene esta expresión en la llamada Filosofía Práctica). Supongamos que dos jugadores participan en un juego y que uno de ellos (al que designaremos como A) ha registrado con el nivel de detalle requerido un conjunto de sucesos[21]. Este último revisa los registros y tras ello le transmite al otro jugador (el B) lo siguiente: en todos los sucesos se satisface que siempre que se cumple la proposición p entonces se cumple la proposición q (en símbolos, tenemos que el conjunto de sucesos satisface

[19] Otra opción que no debe excluirse y que resulta especialmente interesante es que involucrase un condicional contrafáctico.

[20] Pensemos, entre otras posibilidades, en el chequeo de las condiciones de seguridad de unas instalaciones consideradas críticas y en la necesidad de buscar posibles causas ante la ocurrencia hipotética de ciertos eventos problemáticos.

[21] Usamos el término *suceso* en lugar de *hecho* para poner de manifiesto que no es necesario que el mismo haya acaecido realmente, sino que basta con que sea una posibilidad imaginable (tal y como ocurre en los mencionados experimentos mentales). De hecho ya hemos apuntado que el razonamiento abductivo se puede usar, por ejemplo, para determinar qué sería razonable concluir si tuviésemos cierto conjunto de fórmulas de partida y cierta fórmula que no se deduce de las anteriores, no teniendo *de facto* ninguno de esos elementos, los cuales se consideran sólo tentativamente.

$p \rightarrow q$) y además cierto suceso satisface q. En esta situación, si se le pide al jugador B que conjeture razonablemente acerca de alguna proposición que satisface dicho suceso, éste puede usar su 'astucia inferencial natural' y proponer la proposición p. Nuestras intuiciones nos permiten decir que estamos ante un ejemplo de inferencia abductiva, aunque no haya teoría alguna (sólo una regularidad constatada para un conjunto de sucesos limitado).

Otro ejemplo 'extremo' es el siguiente: si en cierta teoría matemática somos capaces de derivar que cualquier objeto que tenga la propiedad M tendrá también la propiedad N e igualmente podemos derivar que cierto objeto a tiene la propiedad N (es decir, que es verdadero $N(a)$) podemos conjeturar que en dicha teoría igualmente se puede derivar que ese objeto tiene la propiedad M (es decir, que es verdadero $M(a)$)[22]. En cualquier caso, la inferencia abductiva sólo nos invita a emprender el intento de derivación, pero es esta última la que nos dará la certeza acerca de si dicha proposición es o no sostenible dentro de esa teoría.

Un ejemplo intermedio es de índole similar a los que con mayor habitualidad se encuentran en la literatura sobre el tema: un investigador experimental que investiga en cierto ámbito y ha asumido cierta teoría científica al respecto, se encuentra con el resultado de un experimento que no es posible explicar en el seno de la misma –e igualmente tampoco se puede explicar la negación de esa situación–; para resolver dicha situación asume conjeturalmente una nueva proposición que junto al resto de la teoría sí permite conseguir dicha justificación.

Como se colige de los anteriores ejemplos, en la abducción hay múltiples maneras de articularse teoría y experiencia (de hecho hay otras además de las tres indicadas) y no puede atribuirse sin más el carácter teórico al conjunto inicial de fórmulas y el carácter fáctico a la fórmula que se quiere explicar, lo cual parece que viene sugerido por la incardinación de este tipo de inferencia en el proceso de elaboración de teorías científicas. En cualquier caso, con motivación teórica o no, la abducción puede jugar un papel importante en el cambio de nuestro estado epistémico, puesto que mediante su concurso podemos ampliar nuestras creencias racionales.

Otro punto en el que nos apartamos de la tesis de Kapitan es consecuencia de que nosotros vamos a distinguir entre la mera generación de una hipótesis (a lo que

[22] Como queda de manifiesto a partir de lo indicado, en nuestra noción de teoría no sólo pueden existir enunciados generales, sino que también son acogidos enunciados particulares, sean éstos condicionales o no; la noción de teoría que aquí se asume es ésa de la Lógica que la define como un conjunto de fórmulas cerrada bajo consecuencia deductiva.

responderá cualesquiera de las formas de abducción plana que mencionaremos) de la generación de una hipótesis bajo cierto conjunto no vacuo de criterios adicionales (que será modelada en alguna de las formas de abducción cualificada). Es justamente como un caso especial de abducción cualificada preferencial como nosotros concebimos a la inferencia a la mejor explicación: en dicho caso no bastará, por tanto, que se alcance una conclusión que permita justificar el objeto del problema abductivo, sino que además dicha conclusión debe satisfacer que es máximo el valor de cierta propiedad o el valor del balance de cierto conjunto de propiedades en las que haremos descansar la idea de bondad explicativa.

Por otra parte, entendemos que la abducción es un mecanismo inferencial lógico[23] que no está limitado al ámbito de la Ciencia (y aquí usamos este término con un alcance que no se restringe a las Ciencias Empíricas). Nos encontramos una situación extraña respecto a la abducción, en la que su éxito en el ámbito científico ha sido a menudo el motivo que ha inhibido una visión más general y plural de este tipo de consecuencia lógica (algo análogo hubiese sido que el éxito de los resultados alcanzados por el Cálculo Infinitesimal en relación a los problemas mecánicos que impulsaron su desarrollo hubiesen inhibido su concepción como una herramienta independiente de la temática inicial que resulta muy útil para multitud de cuestiones procedentes de ámbitos diversos). En este sentido, consideramos que la abducción es un tipo de argumento que puede ser empleado en cualquier sistema informativo dotado de otro mecanismo inferencial lógico[24].

Un buen ejemplo del uso de la inferencia abductiva fuera del quehacer de las Ciencias aparece justamente en el ámbito de la reflexión filosófica sobre aquéllas

[23] Una inferencia (o un mecanismo inferencial) entendido en su acepción más general es un proceso por el cual a partir de cierta información inicial se obtiene cierta otra información derivada, pero todos sabemos que en el mundo no todos esos procesos de extracción satisfacen criterios de racionalidad que permitan calificarlos como lógicos (pensemos, por ejemplo, en las predicciones que hacían en el mundo romano los augures). Por otro lado, un mecanismo inferencial lógico no tiene por qué ser necesariamente deductivo: así pues, cabe hablar de, por ejemplo, *lógica abductiva* y *lógica inductiva* sin que sean expresiones figuradas y sin que esto suponga tampoco diluir la neta distinción entre la lógica deductiva y las otras lógicas.

[24] No empleamos la expresión *sistema de información* por ser ésta usada también con otros significados en otros autores. Además, entendemos que éste puede pertenecer a cualesquiera áreas intelectuales en las que pueda establecerse un marco lógico subyacente que regule dicho mecanismo inferencial –en particular, puede representar diversos sistemas de varias áreas de la Filosofía (Epistemología, Doxología, Deontología, Ontología...)–. La ya citada Metafísica Computacional de Edward Zalta es un fiel reflejo de lo que aquí indicamos.

nos referimos al denominado *argumento abductivo del no milagro* que han esgrimido algunos pensadores que sostienen un planteamiento realista de la Ciencia. No deja de ser curioso que el anterior sea a menudo contestado, por quienes defienden una concepción instrumentalista de la Ciencia, mediante un argumento de un tipo diferente: el llamado *argumento inductivo del reiterado fracaso y abandono de las teorías científicas previas*. A veces al primero de los expuestos se le aplica la expresión *argumento metaabductivo* y a éste se le denomina *argumento metainductivo*, pero esto no afecta en nada a la verdadera naturaleza de los mismos y quizás sólo sea una manera de avisar al interlocutor de que las proposiciones que ocurren en los mismos no tienen el mismo carácter empírico que las proposiciones que ocurren cuando se los usa cotidianamente en las Ciencias Empíricas.

Una circunstancia más que apoya nuestro posicionamiento es que algunas de las formas de abducción que en esta memoria tratamos apenas cuentan con ejemplos de su uso en las Ciencias Empíricas, pero sí es posible pensar en situaciones en las que puedan ser útiles en otras áreas intelectuales.

Tesis 3 y 4. La tesis de la comprehensión establecía que la abducción científica incluye todas las operaciones por las que las teorías son generadas. Aquí no sólo divergimos en restringir la abducción al ámbito científico (atendiendo a lo ya señalado respecto de la segunda tesis) sino que también lo hacemos por cuanto no aceptamos que todas las operaciones por las que se puedan generar nuevas teorías puedan ser consideradas procesos abductivos. Explicaremos nuestras objeciones a la vez que presentamos nuestras precisiones a la cuarta y última tesis (según la cual la abducción es un razonamiento distinto e irreductible a la inducción y a la deducción).

Nosotros concebimos una inferencia abductiva como un proceso que siempre arranca con un problema abductivo[25] y, para que podamos hablar de tal situación, exigimos que en cierto sistema lógico[26] no sea posible concluir, mediante algún mecanismo inferencial lógico que incorpore, determinada fórmula a partir de la teoría inicial –en el caso del problema abductivo cualificado, lo que debe ocurrir es que no sea posible inferir deductivamente dicha fórmula de modo que se satisfagan

[25] Por ello, al problema abductivo se le denomina también el detonante (o desencadenante) de la inferencia abductiva.

[26] Señalemos que diversos autores, siguiendo en ello a Raymundo Morado [Mor84] (pág. 238), distinguen entre *una lógica* y *un sistema lógico*, en la medida que la primera incluye también las propiedades metalógicas y la orientación filosófica de este último. Esta distinción resulta de gran interés con otros fines distintos a los de esta investigación, pero no será decisiva en lo que aquí se aborda, por lo que en esta memoria usaremos ambas expresiones como sinónimas.

ciertas cualidades adicionales–.

Hablando de un modo más preciso, pero sin perder generalidad, una inferencia abductiva queda caracterizada por los componentes de la tupla (problema abductivo, solución abductiva,...), exigiéndose que la solución abductiva satisfaga el requisito justificativo –es decir, que disuelva el problema abductivo– y, según sea una abducción cualificada o plana, que se satisfagan otras condiciones adicionales o no, respectivamente (por lo que la oportuna componente de la tupla que recoja esto deberá ocurrir necesariamente o no, respectivamente). A su vez, el problema abductivo está caracterizado por los componentes de la tupla (fracaso inferencial en la relación mediadora, teoría inicial, objeto del problema,...), nuevamente con o sin la exigencia de que se satisfagan ciertas cualidades adicionales, según sea una abducción cualificada o plana, respectivamente[27].

Hemos evitado intencionadamente incluir el requisito de que el fracaso inferencial debe ser en el marco de un relación de consecuencia lógica de cierto tipo. Como ya fue indicado por Atocha Aliseda, dicho mecanismo inferencial lógico no necesariamente es deductivo clásico, citando ella en [AL06] tres casos diferentes que acogen la posibilidad de que ni siquiera se trate de una inferencia deductiva, a saber: estadístico-probabilista, relación inferencial de la Programación Lógica y consecuencia dinámica. Queremos enfatizar este hecho y poner de manifiesto que dicho fracaso inferencial inicial puede darse en otros tipos de relaciones de consecuencia si cabe menos esperables: inductiva, analógica, polar, por defecto, imprecisa, etc. Vista como proceso, toda inferencia abductiva tiene un primer 'momento' en el que constata el intento infructuoso de realizar cierta inferencia lógica (cumpliéndose o no ciertos requisitos adicionales, según corresponda) y un segundo 'momento', en el que se genera una propuesta que hace que esta última sea viable. Por tanto, es característica esencial de la abducción el estar mediada por otro tipo de inferencia y no consideramos posible hablar de una inferencia abductiva si no ha fallado previamente la correspondiente inferencia de otro tipo.

Veamos un ejemplo de lo anterior involucrando un tipo de argumento (el analógico) distinto al señalado por la pensadora mexicana como alternativa a la inferencia

[27] En varios de sus escritos, por ejemplo [AL97], [AL03] y [AL06], Atocha Aliseda sitúa el citado fracaso inferencial previo como requisito de un problema abductivo; pero, al hablar de los diferentes estilos de explicación abductiva, no incluye la anterior exigencia para todos ellos: de hecho, de los cinco que distingue –plano, consistente, explicativo, minimal y preferencial– sólo aparecerá como requisito en el tercero.

deductiva. La modelización de uno de los posibles modos de la analogía en un lenguaje de predicados de primer orden podría ser la siguiente:
Sean dadas dos 'configuraciones' $\mathscr{S}$ y $\mathscr{S}'$ que 'tienen en común' un conjunto finito no vacío de propiedades distintas $\{P_1, ..., P_n\}$ predicadas de objetos (o individuos) correspondientes a cada una de dichas configuraciones, no necesariamente distintos internamente en cada de ellas aunque deben existir al menos dos objetos, uno de cada 'configuración', distintos entre sí –es decir, expresando todo lo anterior más formalmente, si $(x_1, ..., x_n)$ es una secuencia de términos que designan objetos de $\mathscr{S}$ y $(x'_1, ..., x'_n)$ es una secuencia de términos que designan objetos de $\mathscr{S}'$, ocurriendo que para algún x_i de $\mathscr{S}$ y algún x'_j de $\mathscr{S}'$ se tiene que $x_i \neq x'_j$, entonces se satisface el conjunto de proposiciones $\{P_1(x_1), P_1(x'_1), ..., P_n(x_n), P_n(x'_n)\}$–. Asimismo, sea dada otra propiedad P_{n+1} que posee un objeto de $\mathscr{S}$ designado por x_{n+1}, tal que la proposición $P_{n+1}(x_{n+1})$ esté 'vinculada de un modo relevante' con el conjunto de proposiciones $\{P_1(x_1), ..., P_n(x_n)\}$; entonces es plausible tomar a P_{n+1} como una propiedad del objeto de $\mathscr{S}'$ designado por x'_{n+1}. En este contexto, si el objeto del problema abductivo fuese la proposición $P_{n+2}(x'_{n+2})$, la inferencia abductiva nos señalaría como solución la proposición $P_{n+2}(x_{n+2})$.

Como consecuencia de lo anteriormente expuesto, podemos decir que, aunque compartimos con Kapitan ([Kap92] y [Kap97]) que la inferencia abductiva es distinta e irreductible a la deducción e inducción (puesto que el segundo 'momento' –el de la generación de la propuesta de solución– es completamente diferente a lo que se hace en éstos), consideramos que las relaciones inferenciales abductivas no pueden ser en ningún caso independientes de cualquier otro tipo de relación de consecuencia lógica, es decir: las relaciones inferenciales abductivas son necesariamente mediadas por otras relaciones inferenciales lógicas y, en particular, una de estas últimas puede ser la relación deductiva.

No obstante, en esta investigación, nos restringiremos a los casos en los que el fracaso inferencial inicial acontece en el marco de un sistema lógico deductivo, por ser la relación inferencial que aporta mayor seguridad a sus conclusiones. Por ello, en lo que sigue, salvo indicación en otro sentido, entenderemos que las expresiones *lógica*, *sistema lógico*, *marco lógico*, *consecuencia lógica* e *inferencia lógica* se están usando en favor de la brevedad en lugar de usar, respectivamente, *lógica deductiva*, *sistema lógico deductivo*, *marco lógico deductivo*, *consecuencia lógica deductiva* e *inferencia lógica deductiva*. Incluso en numerosas ocasiones diremos *inferencia* o *mecanismo inferencial* en lugar de, respectivamente, *inferencia lógica* o *mecanismo inferencial lógico*. En el caso de la expresión *consecuencia lógica* no parece satisfactoria la posibilidad análoga dado que el término *consecuencia* tiene en el lenguaje cotidiano y en las Ciencias Empíricas unos rasgos que se apartan notablemente del sentido lógico. Además, si en adelante hay algún caso en el que queramos que una expresión de las anteriormente indicadas tenga el alcance más amplio y no el que sobreentenderemos tácitamente restringido, con el fin de evitar ambigüedades, añadiremos las palabras “en general” a dicha expresión. Por otro lado, aunque algunos autores identifican consecuencia lógica con consecuencia lógica semántica –llamándola más brevemente *consecuencia semántica*–, nosotros consideramos que la consecuencia lógica designa tanto a una relación inferencial dada semánticamente como a una dada sintácticamente.

Retomando la cuestión, en relación a la tesis de la comprehensión y restringida al ámbito científico, su asunción conlleva que la abducción debería acoger cualquier manera de generar una nueva teoría (entendiendo ésta como un constructo complejo, uno de cuyos elementos es su marco lógico), es decir debe explicar el paso de una teoría $\mathcal{T}_1$ a otra $\mathcal{T}_2$ distinta de la anterior en al menos uno de sus componentes. Sin embargo, en el elenco de componentes que la concepción estructuralista de las teorías científicas señala, algunos de ellos (citemos, como ejemplo, el conjunto de modelos potenciales) pueden ser modificados sin que acontezca previamente fracaso inferencial alguno. *A fortiori*, si no nos restringimos al ámbito científico, tampoco aceptamos que la abducción deba acoger cualquier proceso mediante el que se puede transitar de un sistema informativo (del que es un tipo particular una teoría científica) a otro distinto del anterior en al menos uno de sus componentes.

En el extremo opuesto están quienes sólo conciben la abducción como una manera de incorporar nuevos elementos a su núcleo enunciativo (es decir, añadir fórmulas a lo que llamaremos su teoría-base). Esta manera de concebir la abducción, mayoritaria hasta ahora entre quienes investigan en su tratamiento lógico, restringe esa operación lógica a la que en esta memoria llamamos abducción ordinaria, quedando en evidencia la necesidad imperiosa de ‘ensanchar’ su concepción y dar cuenta de otras posibilidades que se contemplan en el quehacer científico. Por tanto, nosotros sostenemos que la abducción puede dar cuenta de muchas de las maneras de elaborar nuevas teorías y de muchos de los modos de elaborar nuevos sistemas informativos (por supuesto, de muchos más que aquéllos que son modelizados por la abducción ordinaria), pero no de todos.

También es discutible la aceptabilidad de la tesis comprehensiva incluso si nos restringimos al núcleo enunciativo de una teoría científica o, más generalmente, de un sistema informativo. En este sentido, pensemos en un investigador que generaliza una serie de resultados no porque los mismos no sean explicables en su teoría (es decir, sin mediar fracaso inferencial alguno) sino influido por una concepción filosófica que aspira a describir la naturaleza con un alto nivel de 'simetrías'. La expansión resultante de añadir dicho resultado general (que puede haber sido alcanzado por inducción, por preducción teórica[28], por analogía, por 'pura serendipia' o incluso por deducción a partir de creencias erróneas.), es un cambio teórico (cuya teoría resultante debe ser sometida a contrastación del mismo modo que si se hubiese alcanzado con el concurso de la abducción) y no se puede afirmar que este proceso haya involucrado a la inferencia abductiva.

Sea $\mathscr{S}_1 = (\mathscr{L}_1, (\mathscr{T}_1, \mathscr{E}_1))$ un sistema informativo cuya primera componente es puramente formal –el sistema lógico subyacente–, y cuya segunda componente, no puramente formal, es un complejo teórico-empírico[29] cuya primera subcomponente es la información teórica y cuya segunda subcomponente recoge la información empírica del sistema[30]. Tras una inferencia abductiva lo que obtenemos es un nuevo sistema $\mathscr{S}_2 = (\mathscr{L}_2, (\mathscr{T}_2, \mathscr{E}_2))$ en el que puede haber variado una o las dos componentes, teniendo en cuenta que la inferencia abductiva no cambia la información empírica (de hecho, sólo contribuye a que en el sistema informativo esta última reciba una explicación satisfactoria). Por ejemplo, si en el curso de ciertas observaciones celestes se encontrase un nuevo planeta cuya justificación no es posible en el sistema informativo aceptado previamente, mediante la abducción podríamos transitar hacia una propuesta de un nuevo sistema que sí resulte satisfactorio para ese fin. Está claro que la abducción no ha modificado nuestra información empírica. Se podría objetar contra esto el caso del 'descubrimiento' de Neptuno por Le Verrier, donde el planteamiento de la hipótesis precedió a su determinación observacional, pues fue de hecho dicha solución abductiva la que guió su búsqueda. Pero, en este

[28] Esta forma de inferencia, cuyo pionero en el estudio es Andrés Rivadulla [RF06], es una distinguida forma de analogía entre áreas de conocimiento que pueden ser conectables.

[29] Aunque somos conscientes de las numerosas dificultades que a menudo conlleva la distinción entre ambos aspectos en muchísimas cuestiones –hasta tal punto que la distinción es imposible en términos globales–, sí merece la pena tratarlos separadamente en la medida en que, al menos en ciertos casos límites, sí pueden ser distinguidos.

[30] Cada una de estas componentes está a su vez estructurada, probablemente en distintos niveles, y también puede darse el caso de que se trate de una estructura vacía. Por ejemplo, si el sistema informativo cuenta con un mecanismo deductivo y representa a una disciplina puramente formal (digamos, por ejemplo, a la Ontología Formal) la componente empírica es obviamente vacua.

caso la inferencia abductiva tampoco modifica el subcomponente empírico, puesto que este último sólo se amplió tras su observación (considerar la cuestión del otro modo conduciría a sostener que la propuesta hipotética, también hecha por Le Verrier, de la existencia de un planeta que afectaba a la órbita de Mercurio –al que se le denominó Vulcano–, y que luego fue rechazada, también supuso una modificación de la información empírica, lo cual resulta obviamente absurdo). Por tanto, en el ejemplo de la hipótesis de Neptuno (que algunos han incluido en una categoría a la que se le ha dado el nombre de *abducción existencial*) no se puede haber modificado otra cosa que el subcomponente teórico, en el cual se incorporó un nuevo planeta al Sistema Solar. Ejemplos de naturaleza muy distinta surgen a partir de lo expuesto en la sección tercera del segundo capítulo, en el cual trataremos la abducción sistémica: si se plantea un problema abductivo en un ámbito puramente lógico formal, una solución abductiva sistémica supondría cambiar de relación inferencial y, por tanto, de sistema lógico, dejando inalterados los restantes subcomponentes. En la última sección de este mismo capítulo mencionamos el caso de la adopción de la Mecánica Cuántica, proceso en el que encontramos que fueron cambiadas las dos componentes.

Concluimos este capítulo diciendo que en absoluto es arriesgado afirmar que la abducción es un tipo de inferencia mucho más diverso de lo que su concepción estándar ha podido hacernos pensar hasta ahora, pero también que algunos autores le han atribuido un protagonismo en el cambio de las teorías científicas, el cual no se discute aquí, pero que, según nuestra consideración, no debe asumir en exclusiva: dicho de otro modo, la inferencia abductiva es decisiva en el razonamiento científico, pero ni toda abducción es un razonamiento científico ni todo razonamiento científico es abductivo.

Capítulo 2

Estudio lógico de la abducción

En el anterior capítulo nos acercamos al concepto central de nuestro trabajo, la abducción, desde un punto de vista que no estaba restringido al ámbito de la Lógica. En éste abordamos con mayor profundidad su estudio exclusivamente desde la perspectiva de esta última disciplina y, en particular, sólo en el marco de las lógicas deductivas. En cada caso comenzaremos por exponer las propuestas informalmente y, tras señalar las carencias de que adolece el tratamiento actual, iremos introduciendo progresivamente diversas propuestas que introducen novedades en éste.

2.1. Aproximación intuitiva al estudio lógico de la abducción ordinaria

Es sorprendente que, a pesar del prestigio que desde muy pronto tuvo Peirce en los ámbitos de la Filosofía de la Ciencia y de la Lógica, así como de su énfasis en que la abducción es el modo de inferencia crucial en el desarrollo del conocimiento científico[1], esta noción recibiera durante bastantes décadas una atención insuficiente por parte de los filósofos de la ciencia y casi nula por parte de los lógicos. En el caso de la Lógica esta situación cambió drásticamente a partir de mediados de los años 80 y principios de los 90 del siglo pasado, período en el que aparecen numerosos

[1] Peirce afirma que la abducción es el verdadero modo de avanzar de la Ciencia. Algunos autores sostienen, incluso, que ella es la única inferencia lógica que puede proporcionar nuevas ideas y que, en este sentido, es la única inferencia sintética en el razonamiento científico. Sin embargo, Peirce sostenía en 1910 que todo argumento no deductivo es ampliativo, por lo que esta última consideración no parece ser compartida por el filósofo pragmatista.

artículos en los que se ensaya un tratamiento formal de la noción peirceana y, como consecuencia de ello, surgen múltiples distinciones –que conforman un despliegue de los conceptos originales– así como propuestas de cálculos de diversos tipos que intentan conseguir su mecanización.

Los tratamientos formales de la abducción han encontrado en la Filosofía de la Ciencia tanto una fuente de inspiración para sus elaboraciones como un campo de aplicación de las mismas. La realimentación mutua ha sido constante y el esfuerzo conjunto de ambos acercamientos ha contribuido a situar a esta cuestión en un primer plano lógico-filosófico: un autor de talla intelectual excepcional como Hintikka, lo calificó en un artículo de 1998 [Hin98] como "el problema fundamental de la Epistemología contemporánea"[2]. En este sentido, la inferencia abductiva ha tenido la virtud de servir de 'punto de encuentro' para pensadores de orientación más lógico-formal con otros de orientación más filosófica, contribuyendo a romper la tendencia al aislamiento que se había ido consolidando en la segunda mitad del siglo XX.

La primera gran dificultad que hay que afrontar cuando se desea modelizar lógicamente la abducción peirceana proviene, como ya se comentó, de que dicha noción experimentó una notable evolución a lo largo de los más de 40 años en los que la estudió el filósofo norteamericano. En el ámbito de la Lógica la mayoría de los autores asumen como punto de partida la formulación que Peirce hizo de este concepto en las *Conferencias* de 1903 (CP 5.189), la cual ya hemos presentado en el capítulo anterior. El sustrato teórico informal sobre el que se construyen los modelos formales suele completarse con algunas precisiones realizadas por autores posteriores, como por ejemplo las antecitadas cuatro tesis de Tomis Kapitan [Kap97], constituyendo lo que hemos denominado en este trabajo la caracterización informal de la versión paradigmática[3].

Todo ello ha fraguado en al menos dos grandes enfoques dentro del ámbito lógico-formal: a) el denominado *modelo AKM*[4], magistralmente expuesto por Atocha Aliseda en [AL06], que es el más conocido y que propone un tratamiento de

[2] Aunque este autor ha matizado posteriormente sus palabras, hay bastantes autores que lo seguirían eligiendo como uno, aunque no el único, de los conceptos fundamentales de la Epistemología de finales del siglo XX y comienzos del XXI.

[3] A ello contribuyó la consideración que un autor como Hintikka le concedió a tal formulación en [Hin98].

[4] Acrónimo acuñado por Dov Gabbay a partir de las iniciales de algunos de sus más importantes impulsores: Aliseda, Kakas, Kowalski, Kuipers, Magnani y Meheus.

la abducción como cambio epistémico –éste será, de hecho, el que aquí tomaremos como versión canónica y desarrollaremos–; y b) el llamado *modelo GW*[5], propuesto por Gabbay y Woods en [GW05] y [GW06], quienes presentan la abducción en relación a una lógica práctica de agentes con capacidades cognitivas, en la que la abducción tiene el particular papel de cerrar provisionalmente las agendas cognitivas de dichos agentes apoyándose éstos en la conclusión abductiva que se toma como presunción.

Por otro lado, dado que toda modelización lógica se hace en el seno de un lenguaje simbólico concreto, la limitación expresiva de éste condicionará decisivamente la posibilidad de representar o no ciertos rasgos que aparecen en la propuesta informal. Podemos aceptar sin complejos que hasta ahora ninguna modelización lógica da cuenta de todos los matices que del concepto de abducción se han señalado en la Filosofía de la Ciencia, pero que al menos sí se recogen en casi todas ellas buena parte de sus rasgos principales.

Concretemos la anterior reflexión en la primera premisa de la citada versión paradigmática ("El hecho sorprendente, **C**, es observado") y supongamos que no queremos hacer uso de otros recursos expresivos que los de la lógica proposicional clásica. En primer lugar, el acto de observar un hecho tendremos que transformarlo en la proposición que describe dicho acto de observación. Y llegados a este punto nos encontramos con un primer gran escollo: nuestro lenguaje no tiene poder expresivo para representar modalidades, por lo que en particular no podemos hacer uso de ningún operador que refiera operación epistémica alguna. Así pues, para modelizar la idea de que la proposición representa un hecho que ha resultado sorprendente no queda otro remedio que establecer que dicha proposición no sea consecuencia lógica[6] de cierto conjunto de proposiciones que representan los hechos conocidos por el sujeto (lo cual supone que la modelización se hace en un nivel metalógico con respecto al lenguaje de la lógica proposicional, que era el sistema simbólico que habíamos elegido para efectuar la representación). Pero con esta propuesta estamos más cerca de recoger la cualidad de que una proposición no es conocida que el rasgo de ser sorprendente[7]. Además, la idea de modelo *conocer* que estamos

[5] Acrónimo formado a partir de las iniciales de sus dos proponentes: Dov Gabbay y John Woods.

[6] Dado que la lógica proposicional clásica es correcta y completa, podemos formular la cuestión indistintamente con la noción de consecuencia lógica semántica o con la noción de consecuencia lógica sintáctica (en sistemas lógicos que no sean completos sí será relevante que se adopte uno u otro punto de vista).

[7] De todos modos, es éste un rasgo que muchos autores posteriores a Peirce discuten: para

modelizando está bastante alejada de las capacidades epistémicas limitadas de los seres humanos (e incluso de las máquinas), puesto que tiene entre sus propiedades una que establece que conocemos todas las fórmulas que son consecuencia lógica semántica / sintáctica de un conjunto vacío de premisas así como que, dada una base de conocimientos cualquiera, también conocemos todas las fórmulas consecuencia lógica semántica / sintáctica de ésta (es decir, entre sus rasgos está la omnisciencia lógica). Otro aspecto insatisfactorio es que el desconocimiento se postula de forma genérica, sin que se haya podido incluir referencia alguna al sujeto que es titular de la misma. Por último, al identificar conocimiento con proposición inferida y estar en el marco de una lógica monótona, se vuelve imposible la retractación del conocimiento (y justamente esto es lo que algunos autores descalifican como conocimiento no revisable o ucrónico).

Similares problemas surgen cuando queremos modelizar lo que se entiende por *obvio* en la segunda premisa de la formulación peirceana ("pero, si **A** fuese verdadero, **C** sería obvio") y el término *sospechar* en la conclusión ("Por tanto, hay razón para sospechar que **A** es verdadero"). Análogamente a lo hecho anteriormente, identificamos que una proposición sea obvia con que sea consecuencia lógica semántica / sintáctica de una base de conocimientos (en este caso ampliada convenientemente con la proposición que aspira a convertirse en la conclusión abductiva del razonamiento). La formulación peirceana tiene la virtud de no permitir que **A** sea falsa, lo que la libera de una posibilidad trivial (si se pudiese tomar como **A** una proposición contradictoria o una proposición de la que se nos informa que es falsa, entonces cualquier proposición **C** podría ser inferida lógicamente a partir de ella[8]). Sin embargo, cuando se dice que **C** sería obvio si **A** fuese verdadero, se está queriendo decir no sólo que **C** se tiene siempre que se tiene **A**, sino que el hecho de que se dé esta última es relevante para que se dé la primera. Nos enfrentamos de nuevo a una incapacidad de nuestro sistema de representación, dado que la lógica propo-

ellos lo importante no es que el hecho provoque extrañeza –lo cual es un fenómeno psicológico asociado con la no satisfacción de ciertas expectativas del observador–, sino que este último no tenga una justificación para el hecho observado. La sorpresa quedaría como un rasgo de las situaciones arquetípicas en las que entra en juego la inferencia abductiva –en buena medida por influencia de su relevancia en la investigación detectivesca y por la analogía que a menudo hacemos entre ésta y la investigación científica–, pero no sería un requisito imprescindible.

[8] Esto es lo que habitualmente se describe diciendo que la lógica clásica tiene los principios explosivos denominados «ex falso sequitur quodlibet» y «ex contradictione sequitur quodlibet» –literalmente, "de una falsedad se sigue cualquier cosa" y "de una contradicción se sigue cualquier cosa", respectivamente–.

sicional clásica no tiene mecanismos suficientes para garantizar dicha relevancia en la inferencia de la conclusión a partir de las premisas.

En cuanto al otro término problemático, *sospechar*, Peirce afirmaba en sus escritos que la conclusión abductiva no se podía entender como creencia, puesto que se trata de una situación epistémicamente aún más débil. En cualquier caso nuestra lógica proposicional no nos permite modelizar, ni siquiera indirectamente, la posibilidad de que una proposición sea creída. Así pues, con nuestra asociación entre conocimiento y consecuencia lógica sólo nos resultan dos posibilidades, a saber: que sea conocida o que no sea conocida.

Un apunte más para terminar de dibujar el marco general de la propuesta de modelización lógica que aquí asumimos como formulación canónica. Ésta fija sus requisitos tanto para la fórmula que constituye el objeto del problema abductivo como para la que constituye la solución abductiva, pero deja entera libertad en relación al procedimiento mediante el que haya sido alcanzada esta última. Es decir, esta modelización paradigmática es no procesual y sólo atiende a los estados inicial y final[9].

El gran consenso que ha obtenido la formulación canónica ha provocado que en las dos décadas siguientes apenas se hayan presentado aportaciones que extiendan o rivalicen con ella (excepción hecha de las ya citadas de Gabbay y Woods). En este trabajo, intentando avanzar en la citada línea de investigación, presentamos nuevas propuestas de modelización que generalizan la anterior e igualmente ponemos de manifiesto nuevos 'ingredientes' que deben ser tenidos en cuenta en dichos modelos formales.

Veamos ahora en detalle, aunque también informalmente, la citada formulación canónica, la cual coincide en buena parte con la propugnada en 2006 por Atocha Aliseda [AL06], aunque en algunos casos nuestra terminología difiere de la de ésta. Al hacer la primera propuesta formal de la formulación lógica, que será etiquetada como *versión 1*, partiremos de la formulación de Atocha con las modificaciones terminológicas que en nuestra previa presentación informal ya habíamos incorporado e incluso con muchas otras de mayor calado, especialmente en lo que se refiere a la introducción de nuevas cuestiones a tratar o la consideración de distinciones y la adopción de un enfoque al menos parcialmente distinto en los aspectos ya tratados por la pensadora mexicana.

[9] A menudo, en la literatura lógica existente se utiliza la dicotomía *abducción entendida como proceso / abducción entendida como producto* para referirse a la distinción aquí señalada.

En la inferencia abductiva ordinaria[10], dada una proposición (a la que llamaremos *objeto del problema abductivo*[11]) que no se sigue de cierta teoría inicial (denominada *teoría-base*[12]), queremos obtener como solución una nueva proposición (a la que llamaremos *solución abductiva* o, cuando el contexto no permita confusiones, simplemente *solución*) de tal modo que el citado problema pase a ser inferible a partir de la teoría-base junto con la solución obtenida.

Como se puede observar, la terminología es deudora del vínculo existente entre la mencionada idea de abducción y el método hipotético-deductivo: en el contexto de una teoría de partida es hallado (tras una etapa de experimentación o de observación) determinado resultado sorprendente (bien porque éste contradice lo esperado[13], bien porque no se tenía expectativa alguna sobre ello) que no se puede justificar a partir del corpus teórico aceptado; ante esta situación, el investigador lanza una hipótesis que junto con el citado corpus teórico (cuyo núcleo enunciativo ha sido previamente contraído o no, respectivamente, según que el resultado contradijese o no las consecuencias lógicas de la teoría precedente) permite inferir el resultado experimental obtenido. En muchos otros casos el proceso de elaboración teórica permuta el orden temporal indicado entre la etapa de recopilación de datos empíricos y el proceso de obtención de consecuencias lógicas de la teoría: es decir, a menudo, se parte de la propuesta de una hipótesis que junto con el resto del corpus teórico aceptado permite inferir una serie de resultados que tienen la consideración

[10] En el resto del presente capítulo a veces omitiremos el término *ordinaria* / *ordinario* y entenderemos que el mismo está implícito si no hay ningún otro adjetivo que se le oponga (es decir, si no se le ha calificado como *sistémica* / *sistémico* u *holística* / *holístico*).

[11] Habitualmente a la proposición misma se le denomina *problema abductivo*, pero nosotros preferimos reservar este rótulo para la situación problemática –es decir, para el hecho de que cierta fórmula no se infiere en cierto sistema lógico a partir de cierta teoría-base–. No en vano, la expresión *ser un problema abductivo* es relacional (una fórmula no es un problema abductivo en sí misma, sino que lo es en la medida en que no puede justificarse atendiendo a una teoría-base y lógica concretas). A partir de ahora frecuentemente usaremos las expresiones más breves *problema* y *objeto del problema* en lugar de las anteriormente mencionadas.

[12] Nos parece más adecuado hablar a partir de ahora de *teoría-base* para distinguir el uso 'vago' del término *teoría* de su sentido técnico: según este último, una teoría es un constructo complejo del que su teoría-base –el conjunto de enunciados que forman parte de la teoría, al cual también se le llama el núcleo enunciativo de la teoría– es sólo uno de sus componentes. Quede claro pues, que nuestra propuesta ni asume ni se limita a la noción de teoría sostenida por la llamada *Concepción Heredada* y, de hecho, es plenamente compatible con la noción que de dicho concepto sostiene el Estructuralismo.

[13] Esta posibilidad, a la que se le dará el nombre de *abducción ante anomalía*, fue por primera vez tratada en el ámbito lógico por Atocha Aliseda [AL97].

de predicciones que deben ser contrastadas posteriormente con la experiencia. Sin embargo, la etapa de cotejo entre consecuencias lógicas de la teoría y datos empíricos, así como la relación metodológica entre ambos tipos de 'elementos' no cambia en otros aspectos. Es obvio, por tanto, que en todos los casos es la adecuación de las consecuencias teóricas a los datos empíricos –dicho de otro modo, el que los datos empíricos corroboren o no las previsiones teóricas– el criterio último de aceptación o rechazo de la hipótesis.

Ahora, haciendo uso de la terminología más habitual en Filosofía de la Ciencia, podemos decir que lo que se pretende conseguir es una expansión del núcleo enunciativo de la teoría inicial con una nueva fórmula, de tal modo que la teoría resultante se convierta en suficientemente explicativa del hecho sorprendente. El término *expansión* remite a una noción central en el modelo AGM[14] de revisión de creencias (no en vano, se puede establecer un vínculo muy estrecho entre las operaciones epistémicas de expansión, contracción y revisión que incorpora el modelo AGM y ciertos procesos abductivos).

La modelización de la abducción que hemos asumido conlleva que el papel de conclusión a menudo pueda ser ostentado por más de una fórmula. De hecho, es fácil probar que, si el lenguaje del sistema lógico contiene un conjuntor clásico y no se impone ninguna restricción adicional, siempre que exista al menos una solución existirán infinitas (basta con tomar una cualquiera de dichas soluciones y conectar conjuntivamente dicha fórmula con cualquier otra), e incluso infinitas no equivalentes entre sí (en este caso es suficiente con que, además de los anteriores requisitos, contemos con un conjunto infinito de variables proposicionales para poder unirlas conjuntivamente de modo sucesivo a una solución cualquiera)[15].

Una modificación decisiva será exigir que la teoría-base, el objeto del problema y la solución abductiva cumplan determinados requisitos que se consideran obligatorios (por ejemplo, en relación a su consistencia intrínseca o a la consistencia relativa de alguno de los componentes mencionados con respecto de otro), de modo que se les pueda retirar la consideración de problema abductivo a ciertas situaciones que no resultan relevantes y, del mismo modo, que se pueda excluir como posible

[14] Acrónimo formado a partir de las iniciales de los autores de su artículo fundacional [AGM85]: Alchourrón, Gardenfors y Makinson.

[15] Obviamente, tampoco es un problema que el resultado de cualquiera de las conjunciones indicadas sea una fórmula que al agregarla a la teoría inicial la vuelva trivial, puesto que, *a fortiori*, la teoría resultante de la expansión permitiría inferir cualquier fórmula.

solución a ciertas opciones no deseadas. Por otro lado, se pueden establecer un conjunto de condiciones deseables de modo que una fórmula pueda ser considerada como objeto del problema abductivo, aun no existiendo fracaso inferencial, si no se satisface alguna de esas condiciones que se desea alcanzar.

Lo dicho hasta ahora pone en pie de igualdad todas las soluciones posibles, a pesar de que intuitivamente podemos expresar preferencias por algunas de ellas (por ejemplo, por las que tienen una longitud menor, o por las que involucran un menor número de variables proposicionales diferentes, o por las que no incluyen variables proposicionales que no ocurren en la teoría-base...). Con el fin de intentar incorporar este elemento preferencial parece necesario dotar al conjunto de las potenciales soluciones de algún tipo de estructura de orden (en particular, una de las posibilidades hacia las que dirigimos nuestra mirada es ésa en la que la solución es única, de modo que estaríamos ante una modelización formal de una relación inferencial que justamente podríamos considerar como inferencia a la mejor explicación). Pero, dado que nuestra propuesta formal en este caso puede apartarse en aspectos sustanciales de los rasgos que distintos autores le han atribuido a este último tipo de razonamiento, y con el fin de evitar posibles 'interferencias' en su justa comprensión, acuñaremos un nuevo rótulo para referirnos a él.

En el desarrollo de nuestra investigación usaremos una serie de símbolos metalingüísticos para representar los operadores lógicos de dicho nivel. En concreto, el negador, el conjuntor, el conjuntor iterado, el disyuntor inclusivo, el disyuntor exclusivo, el disyuntor iterado, el implicador, el coimplicador, el cuantificador universal, el cuantificador existencial y el cuantificador unitario serán, respectivamente: "$\sim$", "$\&$", "$\bigwedge$", "$\triangledown$", "$\underline{\triangledown}$", "$\bigvee$", "$\Rightarrow$", "$\Leftrightarrow$", "$\forall$", "$\exists$" y "$!\exists$". En el caso de la equivalencia metalingüística y su negación también usaremos, respectivamente, los símbolos "$\equiv$" y "$\not\equiv$" con el fin de mejorar la legibilidad de las expresiones simbólicas. Además, usaremos como signos metalingüísticos los símbolos habituales de la Teoría de Conjuntos (en particular, los de pertenencia, inclusión, igualdad y las operaciones conjuntistas): $\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\not\subseteq$, $\subsetneq$, $=$, $\neq$,... Dado que necesitaremos también símbolos para los operadores meta-metalingüísticos (concretamente, los análogos a los ya mencionados, pero para este nuevo nivel), emplearemos para cada uno de ellos el correspondiente operador metalingüístico distinguido con un punto sobre él (por ejemplo, "$\dot{\Rightarrow}$" para el implicador meta-metalingüístico).

2.2. Tratamiento formal de la abducción ordinaria

Pasemos ahora a presentar formalmente la que hemos asumido como versión canónica de la abducción ordinaria en sentido lógico (a la que llamaremos a partir de este momento *versión 1*), la cual, como ya se ha indicado, parte de la formulación de Atocha Aliseda en [AL06], aunque con notables diferencias (no sólo en que algunas denominaciones de un mismo concepto son distintas, sino también en que se introducen nuevas cuestiones y distinciones, así como en el enfoque de algunas de las cuestiones que sí son tratadas por la pensadora mexicana). Con el fin de mostrar claramente la relación de generalización / particularización o alternatividad entre unas y otras, las versiones que le sigan a ésta las numeraremos mediante una notación de tipo Gorn pero en la que emplearemos sólo números enteros positivos escritos de la forma convencional –es decir, sin la ocurrencia de ceros a la izquierda–. En particular, una versión cuyo número de Gorn sea una supercadena de otra será una generalización de ésta.

En toda esta sección vamos a considerar que está expresamente determinado el sistema lógico deductivo en cuyo marco se va a realizar la inferencia abductiva, por lo que de manera particular están fijados el lenguaje lógico $\mathcal{L}$ y la relación inferencial deductiva $\Vdash \subseteq \wp(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})$. La expresión $(\bar{\Theta}, \pi) \in \Vdash$ es una proposición metalingüística que indica que la inferencia deductiva es exitosa (es decir, que la fórmula π se puede inferir del conjunto de fórmulas $\bar{\Theta}$ en la relación de consecuencia lógica deductiva $\Vdash$). Además de la anterior notación, que podríamos calificar de netamente conjuntista, también se puede encontrar en la literatura lógico-matemática otras presentaciones en las que el deductor aparece en notación relacional: bien en posición prefija ($\Vdash (\bar{\Theta}, \pi)$), bien en posición interfija ($\bar{\Theta} \Vdash \pi$), siendo esta última la que más frecuentemente aparece en los textos de Lógica y la que aquí usaremos por resultar más intuitiva[16].

Si no se satisfaciese la mencionada relación inferencial deductiva, siempre dentro del lenguaje lógico fijado, podríamos escribir $\sim((\bar{\Theta}, \pi) \in \Vdash)$ o, más abreviadamente, $(\bar{\Theta}, \pi) \notin \Vdash$. Atendiendo a las otras notaciones indicadas, esto puede ser asimismo escrito de las siguientes maneras: $\sim\Vdash (\bar{\Theta}, \pi)$, $\nVdash (\bar{\Theta}, \pi)$, $\sim(\bar{\Theta} \Vdash \pi)$ o $\bar{\Theta} \nVdash \pi$, siendo esta última nuevamente la opción por la que habitualmente nos decantaremos. Así pues, $\nVdash$ es la relación complementaria de $\Vdash$ (dicho formalmente

[16] Aunque no tan frecuentemente como las anteriores, algunos autores también anotan la relación inferencial deductiva como una terna $(\Vdash, \bar{\Theta}, \pi)$.

$\nVdash := (\wp(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})) \setminus \Vdash)$, por lo que además del anterior símbolo podríamos usar también $\Vdash^{\complement}$.

2.2.1. Abducción clásica (*v. 1*)

Comenzaremos presentando las definiciones de los conceptos sobre los que se articula cualquier tipo de inferencia abductiva que sea considerada, a saber las correspondientes a la noción de problema abductivo y a la de solución abductiva.

Definición 1 (Problema abductivo clásico (*v. 1*))**.**
Dado un conjunto de fórmulas $\bar{\Theta}$ (al que denominamos teoría-base*), un* problema abductivo clásico *(*v. 1*), cuyo* objeto del problema *es la fórmula π, es una situación (o un hecho)*[17] *en la que π no se infiere de $\bar{\Theta}$ en la relación de consecuencia deductiva clásica –proposicional, de primer orden o de orden superior– representada por $\Vdash$ (la cual decimos que es su* parámetro inferencial*)*[18]*. De manera más formal podemos escribir el* definiens *como:*

$$\bar{\Theta} \nVdash \pi.$$

En este capítulo sólo abordamos la posibilidad de que dicho parámetro inferencial sea deductivo, aunque, como se ha indicado anteriormente, Atocha Aliseda ya señaló la posibilidad de usar alguna relación de consecuencia lógica no clásica. Además, como el mismo rótulo indica, en esta *versión 1* asumimos además que dicha relación inferencial es clásica, pero en versiones posteriores ampliaremos esta posibilidad.

De esta definición se extrae como consecuencia que la relación inferencial $\Vdash$ no puede ser completamente trivial[19] (es decir, debe ocurrir que $\Vdash \neq \wp(FOR(\mathcal{L})) \times$

[17] Usar las expresiones *situación problemática abductiva* o *hecho problemático abductivo* en lugar de la expresión *problema abductivo* contribuiría a que el rótulo evocase más claramente su referencia, a la vez que mostraría su filiación con lo que Peirce denominaba *hecho sorprendente*. La preferencia de uso por la anteriormente empleada sobre las dos que acabamos de mencionar se apoya en la menor longitud de aquélla.

[18] Con el fin de poner de manifiesto el lenguaje lógico sobre el que se define la relación inferencial, aparece anotado como subíndice del relator inferencial, pero cuando no exista duda de cuál es se puede suprimir dicha indicación.

[19] Algunos autores adjetivan a este tipo de relaciones como banales, delicuescentes o disolutivas, en el sentido de que en ellas todas las situaciones tienen una consideración indistinguible de las restantes. Dichos términos, que en Lógica adquieren una significación precisa establecida definicio-

$FOR(\mathcal{L})$). Obviamente $\bar{\Theta}$ tampoco puede ser un conjunto de fórmulas para el que se trivialice la relación (es decir, debe ocurrir que $\{\bar{\Theta}\} \times FOR(\mathcal{L}) \nsubseteq \Vdash$).

Si la teoría-base tiene todas sus fórmulas universalmente aceptables[20], entonces toda fórmula que no posea dicha cualidad es para ella el objeto de un problema abductivo. También se puede concluir que una fórmula universalmente aceptable nunca puede ser el objeto de un problema abductivo y que una fórmula inconsistente[21] siempre lo será para una teoría-base consistente.

Es importante poner de manifiesto que nuestra propuesta no se ha hecho restringida a sentencias sino que se ha planteado para fórmulas cualesquiera. Esto queda justificado por el hecho de que, si un sistema lógico es tal que su lenguaje admite fórmulas abiertas y éstas no son meros 'floreros' de esa lógica, entonces en su semántica se debe haber arbitrado una forma de otorgarles significado[22] y en su cálculo sintáctico se deben haber establecido las reglas de derivación oportunas.

Definición 2 (Inferencia abductiva clásica // Solución abductiva clásica (*v. 1*))**.** *En la* inferencia abductiva clásica *(*v. 1*) dado un problema abductivo clásico* $\bar{\Theta} \nVdash \pi$*, queremos obtener como* solución abductiva clásica *(*v. 1*) una fórmula* σ *tal que el citado problema deje de serlo (es decir, tal que el objeto del problema pueda inferirse mediante la relación inferencial clásica de que se trate a partir de la teoría-base junto con la solución encontrada). De manera más formal podemos decir que una inferencia abductiva clásica es* $(\bar{\Theta}, \pi) \Vdash_{ao} \sigma$ *y esto es equivalente a:*

$$(\bar{\Theta} \nVdash \pi) \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Theta} \cup \{\sigma\} \Vdash \pi).$$

Una rápida conclusión que se obtiene de las dos definiciones precedentes es

nalmente y parcialmente distinta de la que tienen en la vida cotidiana o en las Ciencias Empíricas, se toman por analogía con su uso en estas últimas. A este respecto, una buena denominación, también con raíces metafóricas, sería la de *relaciones máximamente entrópicas*, dado que la citada indistinción evoca a la entropía.

[20] Con esta expresión inespecífica queremos referirnos, según sea el enfoque elegido, a una fórmula universalmente válida (enfoque semántico) o teoremática (enfoque sintáctico). Para esta cuestión y otras que encontraremos más adelante, renunciamos a emplear una pareja de expresiones, una correspondiente a cada punto de vista, para no tornar obscuros los contenidos que se explican en el resto del capítulo apoyándose sobre esta consideración.

[21] Nuevamente usamos este término de modo inespecífico para referirnos, según sea el enfoque elegido, a una fórmula insatisfacible (enfoque semántico) o contradictoria (enfoque sintáctico).

[22] Por ejemplo, considerarlas que tácitamente están clausuradas universalmente y, por tanto, que tienen el mismo valor que si se las cerrase mediante cuantificación universal de las variables abiertas–.

que la solución abductiva no puede ser universalmente aceptable; también resulta obvio que, aun no siendo habitualmente una opción deseable, cualquier fórmula inconsistente es una solución abductiva. Otras fórmulas que suelen desdeñarse como solución, a pesar de que siempre satisfacen las condiciones hasta ahora presentadas, son la que representa al objeto del problema mismo o cualquier otra fórmula que por sí sola permita deducir a ésta. Podemos inferir también que la resolución de un problema abductivo cuyo objeto es inconsistente conlleva necesariamente alcanzar una teoría-base expandida inconsistente.

Dada la naturaleza de las distintas entidades que intervienen en este tipo de inferencia abductiva, a la teoría-base también se le puede llamar conjunto-base, al objeto del problema abductivo podemos denominarlo fórmula-problema y a la solución abductiva podemos llamarla fórmula-solución. La relación inferencial abductiva será $\Vdash_{ao} \subseteq (\wp(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})$ por lo que una inferencia abductiva la podemos escribir como $((\bar{\Theta}, \pi), \sigma) \in \Vdash_{ao}$ en notación netamente conjuntista; también se puede escribir en notación relacional, bien con el símbolo inferencial en posición prefija ($\Vdash_{ao} ((\bar{\Theta}, \pi), \sigma)$), bien en posición interfija ($(\bar{\Theta}, \pi) \Vdash_{ao} \sigma$), que es como se hizo en la definición anterior por ser el modo en le que lo haremos a lo largo de esta memoria. Incluso podríamos escribir $\bar{\Theta}|\pi \Vvdash_{ao} \sigma$ en lugar de $(\bar{\Theta}, \pi) \Vdash_{ao} \sigma$: aunque $\Vdash_{ao}$ es una relación binaria y $\Vvdash_{ao}$ una relación ternaria, las dos notaciones apuntan a una misma concepción por cuanto se puede establecer un isomorfismo entre ambas relaciones, de modo que la diferencia entre ellas se reduce a una mera cuestión de estilo. Todas estas notaciones coinciden en asumir que se ha establecido de modo inequívoco cuál es la relación inferencial mediadora.

También es importante que contemos con una notación para referirnos al conjunto de todas las soluciones abductivas para cierto problema abductivo (las cuales también son a menudo llamadas abducibles): $SOL_{ao}(\bar{\Theta} \nVdash \pi)$[23].

Los conceptos usados en las definiciones precedentes (cuyos rótulos constituyen el 'vocabulario' básico de la Lógica Abductiva Formal) tienen una larga tradición en Filosofía de la Ciencia, por lo que antes de su tratamiento formal ya se habían acuñado expresiones para referirse a ellos. Reflejamos en la tabla 1 (2.2) la corres-

[23] Algunos autores usan expresiones análogas a $\sigma = SOL_{ao}(\bar{\Theta} \nVdash \pi)$ para designar a cierta solución abductiva, pero pensamos que sería mejor anotar $\sigma \in SOL_{ao}(\bar{\Theta} \nVdash \pi)$ en la medida que esta última expresión no es una fórmula sino un conjunto ellas (normalmente no unitario –sabemos que para un mismo problema abductivo habitualmente existe más de una solución–, de hecho dicho conjunto es potencialmente infinito aunque también puede ser vacío).

pondencia entre dichas denominaciones de uno y otro ámbito.

***Expresiones usadas en Lógica Abductiva Formal* (versión clásica)**	***Terminología más habitual en Filosofía de la Ciencia***
inferencia abductiva (o abducción)	razonamiento explicativo
teoría-base	núcleo enunciativo de la teoría
problema abductivo	hecho sorprendente
parámetro inferencial (o marco lógico)	lógica subyacente
solución abductiva	hipótesis explicativa

Tabla 1 (2.2): Correspondencia entre algunas expresiones usadas en Lógica Abductiva Formal y la terminología más habitual en Filosofía de la Ciencia.

Podemos distinguir varios tipos de problemas abductivos, atendiendo a la posibilidad de inferir la fórmula contradictoria a partir del objeto del problema o bien a partir de la teoría-base y atendiendo también a que se satisfaga que esta última es finita y que es universalmente aceptable la conjunción iterada de sus fórmulas[24].

Definición 3 (Tipos de problemas abductivos clásicos (*v. 1*))**.**
Dado un problema abductivo clásico $\bar{\Theta} \nVdash \pi$), decimos que éste es:
· Consistente *si y sólo si* $\{\pi\} \nVdash \neg\pi$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* inconsistente.
· Novedoso *si y sólo si* $\bar{\Theta} \nVdash \neg\pi$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* anómalo.
· Usual *si y sólo si* $(card(\bar{\Theta}) \lneq card(\mathbb{N}))\ \dot{\&}\ (\nVdash \bigwedge \bar{\Theta})$[25]. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* inusual[26]

[24] A este respecto recordemos que la conjunción iterada de un conjunto vacío es una fórmula universalmente aceptable ($\bigwedge \varnothing = \widetilde{\top}$) y que la conjunción iterada de un conjunto unitario de fórmulas coincide con el único elemento del conjunto ($\bigwedge\{\varphi\} = \varphi$).

[25] En la lógica proposicional clásica podemos definir el conjuntor iterado, el cual es finitario, a partir de un conjuntor binario, dado que éste es conmutativo, asociativo e idempotente. Si no nos restringimos a la lógica clásica podemos encontrar un conjuntor generalizado, el cual es infinitario (para un conjunto infinito numerable).

[26] Ello ocurre en particular cuando $\bar{\Theta} = \varnothing$, como se desprende de lo indicado en una nota previa,

Así pues, el problema abductivo indicado es consistente si y sólo si para el conjunto unitario que contiene a su objeto no se trivializa la relación inferencial; es novedoso si y sólo si la contradictoria de dicho objeto del problema es también un problema abductivo; y, finalmente, es usual si y sólo si la teoría-base es finita, no vacía y al menos una de sus fórmulas no es universalmente aceptable.

Análogamente, podemos distinguir varios tipos de soluciones abductivas atendiendo a su consistencia intrínseca, a su compatibilidad (en el sentido de consistencia relativa) con la teoría-base, a su capacidad de justificar ella sola el objeto del problema, a que consista en una fórmula condicional cuyo antecedente es la conjunción iterada de un subconjunto de la teoría-base y cuyo consecuente es justamente el problema abductivo y también atendiendo a la existencia de alguna otra solución que sea consecuencia lógica de ella pero no equivalente e igualmente a que se cumpla que toda posible solución la implica.

Definición 4 (Tipos de soluciones abductivas clásicas (*v. 1*))**.**
Sea $\bar{\Theta} \nVdash \pi$ un problema abductivo clásico y σ una solución abductiva clásica, decimos que ésta es:
· Consistente *si y sólo si* $\{\sigma\} \nVdash \neg\sigma$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* inconsistente.
· Compatible *si y sólo si* $\bar{\Theta} \cup \{\sigma\} \nVdash \neg\sigma$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* incompatible.
· Explicativa *si y sólo si* $\{\sigma\} \nVdash \pi$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no explicativa.
· Ingeniosa *si y sólo si* $\dot{\sim}\dot{\exists}\varphi((\sigma \equiv \varphi \rightarrow \pi) \mathbin{\dot{\&}} (\varphi \equiv \bigwedge\bar{\Theta}') \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Theta}' \subseteq \bar{\Theta}) \mathbin{\dot{\&}} (card(\bar{\Theta}') \lneq card(\mathbb{N})))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no ingeniosa.
· Deductivamente minimal *si y sólo si* $\dot{\sim}\dot{\exists}\sigma'((\sigma' \in SOL_{ao}(\bar{\Theta} \nVdash \pi)) \mathbin{\dot{\&}} (\{\sigma\} \Vdash \sigma') \mathbin{\dot{\&}} (\{\sigma'\} \nVdash \sigma))$[27]. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* deductivamente no minimal.
· Deductivamente mínima[28] *si y sólo si* $\dot{\forall}\sigma'((\sigma' \in SOL_{ao}(\bar{\Theta} \nVdash \pi)) \mathbin{\dot{\Rightarrow}} (\{\sigma'\} \Vdash \sigma))$.

así como cuando $card(\bar{\Theta}) \geq card(\mathbb{N})$.

[27] O, equivalentemente, $\dot{\forall}\sigma'(((\sigma' \in SOL_{ao}(\bar{\Theta} \nVdash \pi)) \mathbin{\dot{\&}} (\{\sigma\} \Vdash \sigma')) \mathbin{\dot{\Rightarrow}} (\{\sigma'\} \Vdash \sigma))$. Y teniendo en cuenta que $(\sigma \equiv \sigma') \mathbin{\dot{\Leftrightarrow}} ((\{\sigma\} \Vdash \sigma') \mathbin{\dot{\&}} (\{\sigma'\} \Vdash \sigma))$, también son equivalentes las dos formulaciones siguientes:
a) $\dot{\sim}\dot{\exists}\sigma'((\sigma' \in SOL_{ao}(\bar{\Theta} \nVdash \pi)) \mathbin{\dot{\&}} (\{\sigma\} \Vdash \sigma') \mathbin{\dot{\&}} (\sigma \not\equiv \sigma'))$.
b) $\dot{\forall}\sigma'(((\sigma' \in SOL_{ao}(\bar{\Theta} \nVdash \pi)) \mathbin{\dot{\&}} (\{\sigma\} \Vdash \sigma')) \mathbin{\dot{\Rightarrow}} (\sigma \equiv \sigma'))$.

[28] Atocha Aliseda impone este requisito a la abducción minimal, pero creemos que dicha condi-

En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es deductivamente no mínima.

Así pues, la solución abductiva indicada es consistente si y sólo si para el conjunto unitario que la contiene no se trivializa la relación inferencial; es compatible si y sólo si para el conjunto resultante de expandir la teoría-base con la solución tampoco ocurre dicha trivialización; es explicativa si y sólo si la solución no es tan fuerte deductivamente que resulte autosuficiente para justificar el problema abductivo[29]; es ingeniosa si y sólo si no es una solución obvia que se ha construido de la manera que se indica en la anterior definición (la cual resulta siempre posible independientemente de cuál sea la teoría-base y el objeto del problema, inclusive si aquélla es un conjunto vacío); es deductivamente minimal si no hay otras soluciones no equivalentes a ella misma que la impliquen deductivamente; y es deductivamente mínima si cualquier solución la implica deductivamente.

Señalemos dos casos particulares destacables:
1. $\sigma = \pi$ es siempre una solución no explicativa y no ingeniosa (para esto último basta tener en cuenta que $\pi \equiv \widetilde{\top} \to \pi$ y que $\bigwedge \varnothing = \widetilde{\top}$).
2. Si $card(\bar{\Theta}) \lneq card(\mathbb{N})$ entonces la solución deductivamente mínima es $\sigma \equiv ((\bigwedge \bar{\Theta}) \to \pi)$. En primer lugar, resulta obvio que $(\bigwedge \bar{\Theta}) \to \pi$ es una solución abductiva en una lógica clásica: $\bar{\Theta} \cup \{(\bigwedge \bar{\Theta}) \to \pi\} \Vdash \pi$. En segundo lugar podemos justificar que cualquier otra solución abductiva σ' es tal que $\{\sigma'\} \Vdash (\bigwedge \bar{\Theta}) \to \pi$. Para ello basta observar que por ser $\sigma' \in SOL_{ao}(\bar{\Theta} \nVdash \pi)$ se tiene que $\bar{\Theta} \cup \{\sigma'\} \Vdash \pi$ y por satisfacer la relación inferencial deductiva clásica el metateorema de la deducción se tiene que $\{\sigma'\} \Vdash (\bigwedge \bar{\Theta}) \to \pi$.

Podemos colegir fácilmente que si el problema abductivo es inusual y es finita su teoría-base (es decir, si ésta tiene todas las fórmulas universalmente aceptables), entonces no puede existir ninguna solución explicativa.

2.2.2. Abducción ordinaria s-s plana (*v. 1.1*)

La anterior noción de problema abductivo singular plano recoge explícitamente que el parámetro inferencial es una relación de consecuencia deductiva clásica.

ción lo que hace es garantizar la existencia de un elemento mínimo en el conjunto y no sólo de un elemento minimal.

[29] Es decir, la explicatividad quiere garantizar la relevancia de la teoría-base en dicho proceso justificativo.

Además la definición de inferencia abductiva ordinaria s-s plana sostiene que la solución abductiva ordinaria singular plana satisface el requisito justificativo para la misma relación inferencial en la que surge el problema abductivo. Esto nos ha permitido hacer una presentación más sencilla de distintos tipos de tales problemas y soluciones abductivas.

En esta nueva versión (la *1.1*) haremos una propuesta más general que permanecerá dentro del ámbito de las lógicas deductivas (en particular, dará cabida a ciertas lógicas que admiten paraconsistencias[30]) y que conseguirá ser independiente del lenguaje y las propiedades metalógicas de las lógicas clásicas. Tal como deseábamos, la versión anterior quedará como un caso particular de la que seguidamente presentaremos.

En relación a los mencionados conceptos de problema abductivo, inferencia abductiva y solución abductiva, basta para su generalización con eliminar en el primero de ellos su restricción a relaciones inferenciales deductivas clásicas, eliminando este último adjetivo. Para proceder a la correspondiente generalización de los requisitos que se exigieron a algunos de los tipos de problemas abductivos y soluciones abductivas que fueron distinguidos, necesitamos desarrollar previamente algunas cuestiones instrumentales conexas.

Definición 5 (Conjunto de fórmulas débilmente consistente / fuertemente inconsistente)**.**
Si un conjunto de fórmulas $\bar{\Gamma}$ *cumple que* $\dot{\exists}\varphi((\varphi \in FOR(\mathcal{L})) \,\dot{\&}\, (\bar{\Gamma} \nVdash \varphi))$, *decimos que es* débilmente consistente *en la relación de consecuencia lógica* $\Vdash$*; en caso contrario decimos que es* fuertemente inconsistente *en dicha relación inferencial. Por abuso de lenguaje podemos decir que una fórmula* φ *es débilmente consistente / fuertemente inconsistente en una relación inferencial si y sólo si el conjunto unitario* $\{\varphi\}$ *lo es.*

Así pues, un conjunto de fórmulas fuertemente inconsistente tiene la peculiaridad de que para él se trivializa la relación inferencial (motivo por el que le podríamos también llamar conjuntos *máximamente entrópicos*).

[30] Piénsese en la importancia de este logro a tenor de que la abducción es un tipo de inferencia crucial en el quehacer teórico, el cual raramente discurre con los requisitos de consistencia que exigen las lógicas clásicas.

Definición 6 (Conjunto de fórmulas fuertemente consistente / débilmente inconsistente)**.**
Si un conjunto de fórmulas $\bar{\Gamma}$ cumple que $\bar{\Gamma} \nVdash \widetilde{\bot}$[31]*, decimos que es* fuertemente consistente *en la relación de consecuencia lógica $\Vdash$; en caso contrario decimos que es* débilmente inconsistente *en dicha relación inferencial. Por abuso de lenguaje podemos decir que una fórmula φ es débilmente consistente / fuertemente inconsistente en una relación inferencial si y sólo si el conjunto unitario $\{\varphi\}$ lo es.*

Obviamente, para que un conjunto de fórmulas sea débilmente consistente o fuertemente consistente en una relación inferencial, ésta no puede ser completamente trivial. Además, si la relación inferencial posee algún 'principio explosivo' (tales como, por ejemplo, el «ex contradictione sequitur quodlibet» o el «ex falso sequitur quodlibet» de la lógica clásica[32]) cualquier conjunto de fórmulas débilmente inconsistente trivializa la teoría (es decir, es también fuertemente inconsistente), de modo que ambas definiciones colapsan en una sola.

Señalemos un par de conclusiones inmediatas de las anteriores definiciones:
1. Todo conjunto de fórmulas fuertemente consistente en una relación inferencial *a fortiori* es débilmente consistente en la misma; igualmente, todo conjunto de fórmulas fuertemente inconsistente en una relación inferencial *a fortiori* es débilmente inconsistente en la misma. Esto nos permite decir que los rótulos elegidos para cada propiedad siguen la regla intuitiva de que 'lo que puede lo más también puede lo menos'.
2. Por otra parte, en las lógicas clásicas se cumple que $\bar{\Theta} \nVdash \pi$ permite inferir $\bar{\Theta} \nVdash \widetilde{\bot}$, dado que ellas contienen los principios explosivos mencionados, pero ahora no podemos ahora garantizar tal cosa. Sí podemos en cambio sostener que un conjunto de fórmulas fuertemente inconsistente para una relación inferencial no puede ser el conjunto-base de un problema abductivo cuyo parámetro inferencial es la relación aludida. En consecuencia, todas las tipologías de problemas abductivos y soluciones abductivas que en adelante se presentan conllevan que la teoría-base es al menos débilmente consistente.

Veamos cómo, a la luz de estos nuevos conceptos, podemos reformular la carac-

[31] Advirtamos que en estas definiciones y en adelante $\widetilde{\bot}$ es un símbolo metalingüístico que representa cualquier fórmula inconsistente del lenguaje correspondiente y no sólo a la constante lógica falsa / contradicción de un lenguaje concreto.

[32] Estos principios se reproducen en cualquier sistema lógico cuyo único operador de negación sea de tipo clásico, al cual también podemos llamar *contradictor* a tenor de su semántica.

terización de los distintos tipos de problemas abductivos:

Definición 7 (Tipos de problemas abductivos singulares planos (*v. 1.1*))**.**
Dado un problema abductivo $\bar{\Theta} \nVdash \pi$, decimos que éste es:
· Débilmente consistente *si y sólo si* $\dot{\exists}\varphi((\varphi \in FOR(\mathcal{L})) \mathbin{\dot{\&}} (\{\pi\} \nVdash \varphi))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* fuertemente inconsistente.
· Fuertemente consistente *si y sólo si* $\{\pi\} \nVdash \widetilde{\bot}$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* débilmente inconsistente.
· Débilmente novedoso[33] *si y sólo si* $\dot{\exists}\varphi((\varphi \in FOR(\mathcal{L})) \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Theta} \cup \{\pi\} \nVdash \varphi))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* fuertemente anómalo.
· Fuertemente novedoso *si y sólo si* $\bar{\Gamma} \cup \{\pi\} \nVdash \widetilde{\bot}$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* débilmente anómalo.
· Conservador por partes de la novedad fuerte[34] *si y sólo si* $\dot{\forall}\bar{\Gamma}(((\bar{\Gamma} \subseteq \bar{\Theta}) \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Gamma} \nVdash \widetilde{\bot})) \mathrel{\dot{\Rightarrow}} (\bar{\Gamma} \cup \{\pi\} \nVdash \widetilde{\bot}))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no conservador por partes de la novedad fuerte.
· Formulado sobre una teoría-base fuertemente consistente *si y sólo si* $\bar{\Theta} \nVdash \widetilde{\bot}$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* formulado sobre una teoría-base débilmente inconsistente.
· Usual *si y sólo si* $(card(\bar{\Theta}) \lneq card(\mathbb{N})) \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Theta} \neq \varnothing \mathrel{\dot{\Rightarrow}} \dot{\exists}\varphi((\varphi \in \bar{\Theta}) \mathbin{\dot{\&}} (\nVdash \varphi)))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* inusual[35].

La cualidad de ser débilmente novedoso lo que exige es que la expansión de la teoría-base con el objeto del problema no torne trivial la relación inferencial para ese conjunto expandido. Análogamente la cualidad de ser fuertemente novedoso reclama que la citada expansión de la teoría-base no sea un conjunto inconsistente. En cuanto a la cualidad de ser conservador por partes de la consistencia fuerte, en ella

[33] También podríamos decir que el objeto del problema es *débilmente novedoso en esa teoría-base dentro del marco lógico indicado*. Análoga versión se podría dar de los conceptos que se delimiten en adelante a partir de un problema abductivo, pero dado que vuelve muy onerosa la lectura, no lo haremos. Lo hemos realizado en este caso para poner de manifiesto que la cualidad de novedad / anomalía es atribuible al objeto del problema en relación a los otros dos componentes señalados.

[34] En una lógica deductiva no tiene interés la formulación de la análoga propiedad para la consistencia débil, porque, tal como ya anunciamos, todo problema abductivo es tal que su teoría-base es al menos débilmente consistente.

[35] De nuevo, ello ocurre en particular cuando $\bar{\Theta} = \varnothing$ así como cuando $card(\bar{\Theta}) \geq card(\mathbb{N})$.

se exige que ningún subconjunto de fórmulas de la teoría-base que sea fuertemente consistente deje de serlo tras expandirlo con el objeto del problema. Podemos decir, por tanto, que los dos tipos de novedad y la cualidad de conservación por partes aludida –propiedades que se predican de una fórmula que constituye el objeto de un problema– no son más que distintos modos de consistencia relativa de dicha fórmula con la teoría-base o con ciertas partes de ésta.

A partir de las definiciones precedentes es fácil concluir que todo problema fuertemente novedoso es débilmente novedoso y, teniendo en cuenta además que toda lógica deductiva satisface la propiedad estructural de monotonía, que la primera de esas propiedades también conlleva la propiedad conservativa que antes fue presentada (puesto que, en particular, todos sus subconjuntos satisfacen que son fuertemente consistentes); sin embargo, dicha propiedad conservativa no garantiza la novedad débil (ver figura 1 (2.2)). A su vez, teniendo en cuenta nuevamente la propiedad de monotonía, se infiere que todo problema abductivo débilmente novedoso necesariamente es débilmente consistente y que todo problema fuertemente novedoso es fuertemente consistente. También está garantizado que la cualidad de ser conservador por partes de la consistencia fuerte no puede satisfacerla un problema abductivo por mera falsedad del antecedente de la implicación que constituye la matriz que se cuantifica universalmente en dicha definición, dado que toda relación inferencial deductiva cumple que $\varnothing \nVdash \widetilde{\bot}$. Además, justamente ese caso, $\bar{\Gamma} = \varnothing$, es el que muestra claramente que todo problema abductivo con esta propiedad conservativa necesariamente tienen la propiedad de consistencia fuerte. Es fácil concluir a partir de las definiciones que todo problema fuertemente consistente es débilmente consistente e igualmente que toda teoría-base fuertemente consistente es débilmente consistente. La mera existencia de un problema abductivo, sea cual sea su consistencia, conlleva que la teoría-base es débilmente consistente. La monotonía permite además afirmar que un problema fuertemente novedoso está formulado sobre una teoría-base fuertemente consistente. Por último, en los casos que se satisfaga esta última propiedad, la monotonía nos permite asegurar que todos los subconjuntos de dicha teoría-base son fuertemente consistentes y, por tanto, que la propiedad conservativa mencionada es equivalente a la novedad fuerte.

Definición 8 (Tipos de soluciones abductivas ordinarias singulares planas (*v. 1.1*))**.** *Sea* $\bar{\Theta} \nVdash \pi$ *un problema abductivo singular plano y* σ *una solución abductiva ordinaria singular plana, decimos que ésta es:*
· Débilmente consistente *si y sólo si* $\dot{\exists}\varphi((\varphi \in FOR(\mathcal{L})) \mathbin{\dot{\&}} (\{\sigma\} \nVdash \varphi))$*. En el caso*

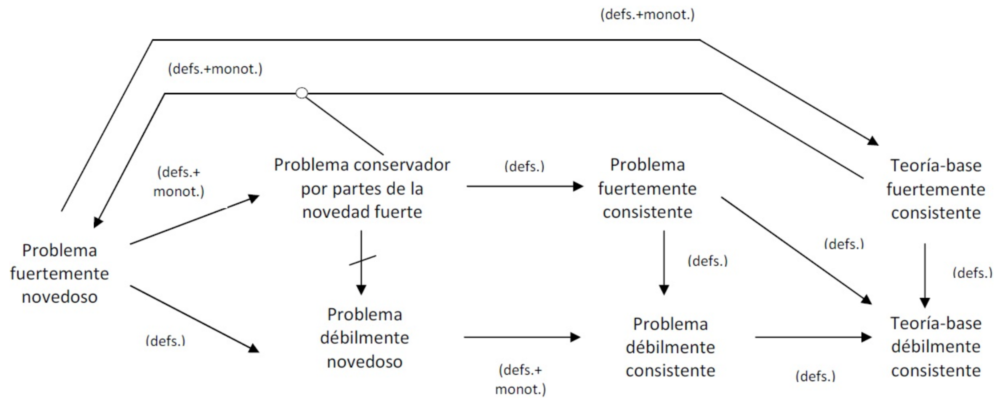

Fig. 1 (2.2): Algunos tipos de problemas abductivos y de teorías-base.

de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es fuertemente inconsistente.

· Fuertemente consistente *si y sólo si* $\{\sigma\} \nVdash \widetilde{\bot}$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* débilmente inconsistente.

· Débilmente compatible *si y sólo si* $\dot{\exists}\varphi((\varphi \in FOR(\mathcal{L}))\ \dot{\&}\ (\bar{\Theta} \cup \{\sigma\} \nVdash \varphi))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* fuertemente incompatible.

· Fuertemente compatible *si y sólo si* $\bar{\Theta} \cup \{\sigma\} \nVdash \widetilde{\bot}$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* débilmente incompatible.

· Conservadora por partes de la compatibilidad fuerte *si y sólo si* $\dot{\forall}\bar{\Gamma}(((\bar{\Gamma} \subseteq \bar{\Theta})\ \dot{\&}\ (\bar{\Gamma} \nVdash \widetilde{\bot}))\ \dot{\Rightarrow}\ (\bar{\Gamma} \cup \{\sigma\} \nVdash \widetilde{\bot}))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no conservadora por partes de la compatibilidad fuerte.

· Explicativa *si y sólo si* $\{\sigma\} \nVdash \pi$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no explicativa.

· Ingeniosa *si y sólo si* $\dot{\sim}\dot{\exists}\varphi(\pi \equiv \varphi\ \dot{\&}\ \varphi \in SUBFORM(\sigma))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no ingeniosa.

· Deductivamente minimal *si y sólo si* $\dot{\sim}\dot{\exists}\sigma'((\sigma' \in SOL_{ao}(\bar{\Theta} \nVdash \pi))\ \dot{\&}\ (\{\sigma\} \Vdash \sigma')\ \dot{\&}\ (\{\sigma'\} \nVdash \sigma))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* deductivamente no minimal.

· Deductivamente mínima *si y sólo si* $\dot{\forall}\sigma'((\sigma' \in SOL_{ao}(\bar{\Theta} \nVdash \pi))\ \dot{\Rightarrow}\ (\{\sigma'\} \Vdash \sigma))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que* *es* deductivamente no mínima.

La compatibilidad débil establece que la expansión de la teoría-base con la solución abductiva no puede tornar trivial la relación inferencial para ese conjunto expandido. Análogamente la compatibilidad fuerte exige que la citada expansión de la teoría-base no sea un conjunto inconsistente (ver figura 2 (2.2)). En cuanto a la cualidad de ser conservadora por partes de la consistencia fuerte, en ella se exige que ningún subconjunto de fórmulas de la teoría-base que sea fuertemente consistente deje de serlo tras expandirlo con la solución abductiva. Así pues, los dos tipos de compatibilidad y la cualidad de conservación por partes –propiedades predicadas de una fórmula que constituye la solución de un problema abductivo– nuevamente no son más que distintos modos de consistencia relativa de dicha fórmula con la teoría-base o con ciertas partes de ésta. La ingeniosidad lo que quiere evitar es que la solución sea un recurso *ad hoc* que involucre de una manera decisiva al propio objeto del problema[36] (cuyo caso más evidente en una lógica clásica y ante una teoría-base finita es aquél en el que para resolver el problema planteado tomamos como solución la proposición condicional asociada al meta-enunciado contradictorio del que es presentado en la condición del fracaso inferencial).

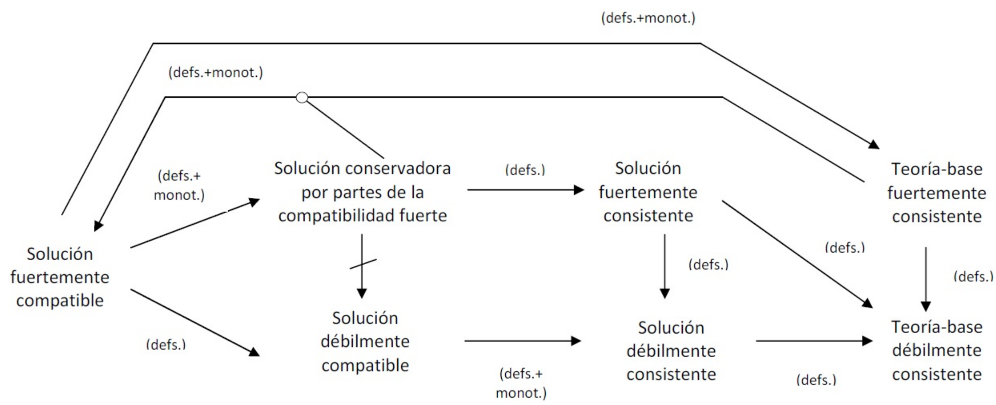

Fig. 2 (2.2): Algunos tipos de soluciones abductivos y de teorías-base.

Fácilmente se concluye que toda solución fuertemente compatible es débilmente compatible y, dado que toda lógica deductiva satisface la propiedad estructural de

[36] Una versión más próxima a nuestra intuición sería decir que con este requisito se pretende que la explicación no involucre de modo alguno al enunciado dudoso que debe ser explicado.

monotonía, se concluye además que la primera de esas propiedades también conlleva la propiedad conservativa de la solución que fue expuesta; sin embargo, dicha propiedad conservativa no garantiza la compatibilidad débil. A su vez, teniendo en cuenta nuevamente la propiedad de monotonía, se infiere que toda solución abductiva débilmente compatible necesariamente es débilmente consistente y que toda solución fuertemente compatible es fuertemente consistente. También está garantizado que la conservación por partes de la consistencia fuerte no puede satisfacerla una solución abductiva por mera falsedad del antecedente de la implicación que constituye la matriz que se cuantifica universalmente en dicha definición, dado que toda relación inferencial deductiva cumple que $\varnothing \nVdash \widetilde{\bot}$. Además, justamente ese caso, $\bar{\Gamma} = \varnothing$ permite establecer que toda solución abductiva con esta propiedad conservativa necesariamente tienen la propiedad de compatibilidad fuerte. Por otro lado, es fácil concluir a partir de las definiciones que toda solución fuertemente consistente es débilmente consistente. La mera existencia de una solución abductiva, sea cual sea su consistencia, conlleva que la teoría-base es débilmente consistente. La monotonía permite además afirmar que una solución fuertemente compatible lo es de un problema abductivo cuya teoría-base es fuertemente consistente. Por último, en los casos que se satisfaga esta última propiedad, ella junto a la monotonía nos permiten asegurar que la propiedad conservativa de la solución es equivalente a la compatibilidad fuerte.

2.2.3. Abducción ordinaria s-s cualificada (*v. 1.1.1*)

La propuesta presentada en la subsección anterior tiene la virtud de liberar a la abducción de su vinculación exclusiva con las lógicas deductivas clásicas; sin embargo, hay tres cuestiones claves en las que sigue siendo insatisfactoria: en primer lugar, admite como teoría-base, como objeto del problema o como solución abductiva ciertas posibilidades que, en algunos casos, querríamos excluir; en segundo lugar, y de forma contraria, excluye algunas situaciones en las que, a pesar de no cumplirse el requisito del fracaso inferencial (al que calificaremos como *plano*), podríamos considerar que el objeto del problema está insatisfactoriamente explicado en la teoría-base –es decir, existen situaciones en las que una fórmula puede ser inferida en sentido plano a partir de la teoría-base en el marco de cierta relación inferencial mediadora (de modo que no existe problema abductivo plano), pero no se satisfacen ciertas condiciones deseadas y, por tanto, querríamos que se pudiese hablar de la existencia de un problema abductivo de otra índole (al que adjetivaremos con el término *cualificado*)–[37]; en tercer lugar, en muchos casos estamos interesados en obtener no una mera solución abductiva (a la que calificaremos como *plana*), sino una que satisfaga ciertas condiciones adicionales (a la que adjetivaremos con el término *cualificada*). Por ello, a una inferencia abductiva que dé cuenta adecuadamente de todas estas cuestiones la denominaremos *abducción ordinaria s-s cualificada*, siendo ésta especialmente idónea en el ámbito científico: las distintas condiciones que se impongan pueden modelizar las particularidades de los núcleos enunciativos de las teorías científicas y de los problemas que en ellos son relevantes.

Al plantear nuestra propuesta debemos tener en cuenta que el nuevo tipo inferencial abductivo debe seguir respondiendo al esquema precedente, el cual exigía el cumplimiento de dos requisitos fundamentales: en primer lugar, la existencia de un fracaso inferencial previo; y, en segundo, la posterior satisfacción de una condición justificativa. Así pues, este nuevo tipo de inferencia abductiva estará mediada también por otra relación inferencial, pero tendremos que introducir algunos cambios en ésta si queremos dar cumplimiento a los requisitos indicados. Y, por supuesto, tendremos que modificar nuestros conceptos de *problema abductivo* y *solución abductiva*, dado que a menudo las definiciones previas no resultarán adecuadas para nuestro propósito.

Como ya dijimos al comienzo de este capítulo, en esta investigación abordamos sólo el caso en el que la inferencia mediadora es la deducción, pero su concepción estándar no resultará idónea a tenor de lo mencionado en los párrafos precedentes de esta subsección. Necesitamos, por tanto, una nueva modalidad de inferencia deductiva a la que llamaremos *deducción cualificada* (nos estaremos refiriendo a la concepción estándar cuando no le añadamos ningún adjetivo al término *deducción* y también, si queremos destacar este rasgo, cuando usemos el rótulo *deducción plana*). Una inferencia deductiva cualificada exitosa $\bar{\Gamma} \Vdash^{\mathscr{C}} \varphi$, donde $\Vdash^{\mathscr{C}}$ es el relator deductivo cualificado (sin especificar si está definido semánticamente o sintácticamente), debe garantizar no sólo que es exitosa la correspondiente inferencia deductiva plana ($\bar{\Gamma} \Vdash \varphi$) sino también que el par $\langle \bar{\Gamma}, \varphi \rangle$ satisface todas las condiciones del

[37] A este respecto hay que mencionar que, en relación al cambio del núcleo enunciativo de una teoría y tomando en consideración el material intuitivo que nos proporciona la Filosofía de la Ciencia, la abducción debería al menos dar cuenta de las siguientes operaciones epistémicas: la expansión de teorías hasta poder explicar ciertos hechos antes no explicados, la revisión de teorías orientada a hacer compatibles sus predicciones con ciertos hechos, así como la revisión de teorías con el objetivo de obtener una mejor explicación de ciertos hechos que ya tenían alguna previamente.

conjunto $\mathscr{C}$.

Dado que una relación inferencial puede ser vista como un conjunto de pares, para la definición de la deducción cualificada podemos valernos de la idea de selección de los elementos de un conjunto mediante un conjunto finito de condiciones (posibilidad que queda legitimada por la aplicación iterada del axioma de especificación conjuntista): dado un conjunto $\bar{\Gamma}$ y un conjunto finito de condiciones $\mathscr{C} = \{C_i \ / \ i \in I \subsetneq \mathbb{N}\}$ sobre sus elementos, las cuales han sido enunciadas en un nivel metalingüístico, obtenemos el conjunto $\bar{\Gamma}^{\mathscr{C}} \ := \ \{\varphi \ / \ \varphi \in \ \Gamma \ \dot{\&} \ \dot{\forall} i(i \in I \dot{\Rightarrow} C_i(\varphi))\}$. De manera sencilla el conjunto complementario del anterior se puede expresar como: $(\bar{\Gamma}^{\mathscr{C}})^{\complement} = \{\varphi \ / \ \varphi \notin \ \Gamma \ \dot{\nabla} \ \dot{\exists} i(i \in I \ \dot{\&} \ {\sim} C_i(\varphi))\}$.

Si A es el *ámbito* en el que se desarrolla una cuestión –por ejemplo, en el caso de la inferencia abductiva el ámbito de los problemas abductivos es $A = \wp(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})$– al conjunto $A^{\mathscr{C}}$ lo llamaremos el *subámbito relevante bajo las condiciones* $\mathscr{C}$. Si $\mathscr{C} = \varnothing$ entonces $A^{\mathscr{C}} = A$ –de ahí que, siguiendo con el ejemplo, el subámbito relevante para los problemas abductivos planos sea tácitamente $A^{\mathscr{C}} = \wp(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})$–. Si el ámbito A se construye sobre un dominio (o universo) de objetos D –en el ejemplo citado $D = FOR(\mathcal{L})$– el subámbito relevante puede inducir una serie de subdominios relevantes –nuevamente referido al ejemplo anterior, hay dos subdominios relevantes, uno para cada componente (concretamente $D_1^{\mathscr{C}^o} \ = \ \{\varphi \ / \ \varphi \in \bar{\Gamma} \ \ \& \ \ \bar{\Gamma} \in Proy_2(A^{\mathscr{C}^o})\}$ para la primera componente y $D_2^{\mathscr{C}^o} \ = \ Proy_2(A^{\mathscr{C}^o})$ para la segunda)–.

Aplicamos ahora estas ideas a las relaciones inferenciales deductivas.

Definición 9 (Relación inferencial deductiva cualificada)**.**
Sean $\Vdash \subseteq \wp(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})$ *una* relación de consecuencia lógica deductiva plana *y* $\mathscr{C} = \{C_i \ / \ i \in I \subsetneq \mathbb{N}\}$ *un conjunto finito de condiciones sobre los pares* $(\bar{\Gamma}, \varphi)$ *enunciadas en un nivel metalingüístico (cada condición* $C_i \in \mathscr{C}$ *es una función proposicional sobre* $\wp(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})$*); definimos una* relación inferencial deductiva cualificada $\Vdash^{\mathscr{C}}$ *como sigue:*

$$\Vdash^{\mathscr{C}} := \ \{(\bar{\Gamma}, \varphi) \ / \ ((\bar{\Gamma}, \varphi) \in \Vdash) \ \dot{\&} \ \dot{\forall} i(i \in I \dot{\Rightarrow} C_i(\bar{\Gamma}, \varphi))\}.$$

Dado que $\mathscr{C}$ es un conjunto finito, entonces $card(I) = n \in \mathbb{N}$ y la anterior definición podría transformarse de la siguiente manera:

$$\Vdash^{\mathscr{C}} := \ \{(\bar{\Gamma}, \varphi) \ / \ ((\bar{\Gamma}, \varphi) \in \Vdash) \ \dot{\&} \ C_1(\bar{\Gamma}, \varphi) \ \dot{\&} \ ... \ \dot{\&} \ C_n(\bar{\Gamma}, \varphi)\}.$$

Desde un punto de vista conjuntista, la relación $\Vdash^{\mathscr{C}}$ es una restricción de $\Vdash$ y, por tanto, seguimos estando ante una verdadera relación binaria entre conjuntos de fórmulas y fórmulas: $\Vdash^{\mathscr{C}} \subseteq \Vdash \subseteq \wp(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})$. En este sentido, la adjetivación *cualificada* / *cualificado* no se presenta como una propiedad absoluta de una relación inferencial, sino como una propiedad relativa que indica que cierta relación inferencial puede ser vista como una restricción de otra y obtenida a partir de la primera mediante el 'filtrado' que resulta de tomar en consideración un conjunto finito de condiciones. Obviamente si el conjunto de condiciones impuestas es vacío, estamos ante la clase de casos particulares que viene dado por la relación inferencial plana.

La relación complementaria de $\Vdash^{\mathscr{C}}$ la podríamos representar como $(\Vdash^{\mathscr{C}})^{\complement}$ o, de manera más familiar, como $\not\Vdash^{\mathscr{C}}$. Se concluye fácilmente que:

$$\not\Vdash^{\mathscr{C}} := \{(\bar{\Gamma}, \varphi) \;/\; ((\bar{\Gamma}, \varphi) \notin \Vdash) \;\dot{\triangledown}\; \dot{\exists} i(i \in I \;\dot{\&}\; {\sim}C_i(\bar{\Gamma}, \varphi))\}.$$

Equivalentemente podríamos escribir:

$$\not\Vdash^{\mathscr{C}} := \{(\bar{\Gamma}, \varphi) \;/\; ((\bar{\Gamma}, \varphi) \in \not\Vdash) \;\dot{\triangledown}\; \dot{\exists} i(i \in I \;\dot{\&}\; {\sim}C_i(\bar{\Gamma}, \varphi))\}.$$

O también:

$$\not\Vdash^{\mathscr{C}} := \{(\bar{\Gamma}, \varphi) \;/\; ((\bar{\Gamma}, \varphi) \in \not\Vdash) \;\dot{\triangledown}\; {\sim}C_1(\bar{\Gamma}, \varphi) \;\dot{\triangledown}\; ... \;\dot{\triangledown}\; {\sim}C_n(\bar{\Gamma}, \varphi)\}.$$

Pero dado que la relación complementaria de una relación inferencial no es otra cosa que un conjunto (en particular, de pares ordenados), si se desea podemos sobre ella aplicar también condiciones adicionales. Supongamos que a la relación $\not\Vdash^{\mathscr{C}}$ anterior le imponemos otro conjunto finito de condiciones $\mathscr{C}' = \{C'_j \;/\; j \in J \subsetneq \mathbb{N}\}$, obtendríamos el resultado que a continuación se indica:

$$\not\Vdash^{\mathscr{C}\mathscr{C}'} := (\not\Vdash^{\mathscr{C}})^{\mathscr{C}'} = \{(\bar{\Gamma}, \varphi) \;/\; (((\bar{\Gamma}, \varphi) \in \not\Vdash) \;\dot{\triangledown}\; \dot{\exists} i(i \in I \;\dot{\&}\; {\sim}C_i(\bar{\Gamma}, \varphi))) \;\dot{\&}$$
$$\dot{\forall} j(j \in J \;\dot{\Rightarrow}\; C'_j(\bar{\Gamma}, \varphi))\}.$$

Por supuesto, la relación deductiva cualificada puede ser a su vez objeto de la imposición de nuevas condiciones, resultando en este caso que todas las condiciones aparecen unidas conjuntivamente, motivo por el cual se justifica la conmutatividad y la asociatividad en la realización de restricciones mediante el establecimiento de condiciones. Así pues, si a la relación $\Vdash^{\mathscr{C}}$ anterior le imponemos otro conjunto finito de condiciones $\mathscr{C}' = \{C'_j \; / \; j \in J \subsetneq \mathbb{N}\}$, obtendríamos como resultado:

$$\Vdash^{\mathscr{C}\mathscr{C}'} := (\Vdash^{\mathscr{C}})^{\mathscr{C}'} = \{(\bar{\Gamma}, \varphi) \; / \; ((\bar{\Gamma}, \varphi) \in \Vdash) \mathbin{\dot{\&}} \dot{\forall} i (i \in I \dot{\Rightarrow} C_i(\bar{\Gamma}, \varphi)) \mathbin{\dot{\&}}$$

$$\dot{\forall} j (j \in J \dot{\Rightarrow} C'_j(\bar{\Gamma}, \varphi))\}.$$

Estas nociones nos permiten crear fácilmente nuevas relaciones inferenciales deductivas más complejas a partir de relaciones deductivas planas o cualificadas más simples por un mero ‘cribado’ sobre los elementos de la relación plana que satisfacen las condiciones adicionales, siendo muy flexible en cuanto al conjunto propiedades que pueden ser impuestas. En particular, es posible que las condiciones versen sobre criterios puramente lógicos o bien asuman criterios extralógicos; que sean sólo relativas a la conclusión, sólo relativas a las premisas o relativas a todos ellos conjuntamente; se puede hacer uso de condiciones puramente sintácticas y también de otras que involucren al plano semántico; además, en cada uno de estos dos planos, las condiciones pueden referirse a aspectos puramente lingüísticos o a cualidades inferenciales). Veremos seguidamente algunos ejemplos de criterios puramente lógicos:

1. Concernientes exclusivamente a la conclusión:

   a) Concernientes a aspectos puramente lingüísticos:

   - Acerca de la normalización de la conclusión (especialmente del alcance del negador).
   - Acerca de la longitud total de la conclusión.
   - Acerca del número de variables proposicionales diferentes que ocurren en la fórmula.
   - Acerca del número total de ocurrencias de variables proposicionales en la fórmula.

   b) Concernientes a aspectos inferenciales:

   - Acerca de su tipo de consistencia en el marco de la relación inferencial.

2. Concernientes exclusivamente a las premisas:

   a) Concernientes a aspectos puramente lingüísticos:

   - Acerca de la normalización de las fórmulas (especialmente del alcance del negador).

   b) Concernientes a aspectos inferenciales:

   - Acerca de la aceptabilidad universal de sus fórmulas en el marco de la relación inferencial.
   - Acerca de su tipo de consistencia en el marco de la relación inferencial.

3. Concernientes a la conclusión y a las premisas:

   a) Concernientes a aspectos puramente lingüísticos:

   - Acerca de la no ocurrencia en la conclusión de variables proposicionales que no ocurren en las premisas.

   b) Concernientes a aspectos inferenciales:

   - Acerca de la compatibilidad entre las premisas y la conclusión en el marco de la relación inferencial[38].
   - Acerca de que la derivación de la conclusión en la relación inferencial correspondiente involucre menor número de premisas.
   - Acerca de que la derivación de la conclusión en la relación inferencial correspondiente involucre necesariamente cierto subconjunto de las premisas.
   - Acerca de la longitud de la derivación canónica de la conclusión a partir de las premisas en un cálculo de la relación inferencial correspondiente[39].

[38] Obviamente esta cualidad sólo resulta relevante en el caso de que no se satisfaga la relación inferencial.

[39] La longitud de una derivación canónica es una función que devuelve un número natural no nulo correspondiente a la cantidad de pasos que tiene la derivación más corta posible de una fórmula a partir de un conjunto de fórmulas en la relación inferencial correspondiente. Podemos simbolizar dicha función como: $long(\Vdash\ (\bar{\Gamma},\varphi))$. En general, si $long(\Vdash\ (\bar{\Gamma},\varphi)) = 1$ entonces $\varphi \in Ax(\Vdash)$ –y, por tanto, $\bar{\Gamma}$ no es relevante para φ en $\Vdash$, pues φ sería teoremática en $\Vdash$– o $\dot{\exists}\bar{\Gamma}'(\bar{\Gamma}' \subseteq \bar{\Gamma}\ \dot{\&}\ (\bar{\Gamma}',\varphi) \in Reg(\Vdash))$. Por supuesto, se requiere que se haya establecido un cálculo –que tendrá reglas y, eventualmente, axiomas– para la relación inferencial. Tengamos en cuenta que

Como botón de muestra de criterios extralógicos –por supuesto, dicha información debería ser proporcionada por una fuente externa (normalmente, cuando se trata del uso de la abducción en cierta materia científica, por personal competente en ésta)– podemos señalar el alcanzar un grado de relevancia mínimo en la relación de los elementos de la teoría-base con el objeto del problema abductivo.

Las nueva definición de problema abductivo es la siguiente:

Definición 10 (Problema abductivo singular cualificado (*v. 1.1.1*))**.**
Dada una teoría-base $\bar{\Theta} \subseteq FOR(\mathcal{L})$*, un* problema abductivo singular cualificado *(*v. 1.1.1*), cuyo* objeto del problema *es la fórmula* $\pi \in FOR(\mathcal{L})$*, es una situación en la que* $(\bar{\Theta}, \pi)$ *satisface todas las condiciones del conjunto* $\mathscr{C}^o = \{C_i^o \ / \ i \in I \subsetneq \mathbb{N}\}$ *(denominadas* condiciones obligatorias*) y además o bien* π *no se infiere de* $\bar{\Theta}$ *en la relación de consecuencia deductiva* $\Vdash$ *o bien* $(\bar{\Theta}, \pi)$ *no satisface al menos una de las condiciones del conjunto* $\mathscr{C}^d = \{C_j^d \ / \ j \in J \subsetneq \mathbb{N}\}$ *(denominadas* condiciones deseables*). De manera más formal podemos escribir el* definiens *como:*

$$\dot{\forall} i (i \in I \dot{\Rightarrow} C_i^o(\bar{\Theta}, \pi)) \mathrel{\dot{\&}} ((\bar{\Theta} \nVdash \pi) \mathrel{\dot{\nabla}} \dot{\exists} j (j \in J \mathrel{\dot{\&}} {\sim} C_j^d(\bar{\Theta}, \pi))).$$

Y haciendo uso de las cuestiones instrumentales explicadas en esta sección podemos escribir más brevemente dicha condición necesaria y suficiente como:

$$\bar{\Theta} \ \not\Vdash^{\mathscr{C}^d \mathscr{C}^o} \ \pi.$$

Tal como habíamos reivindicado, esta definición nos permite excluir de la dilucidación del asunto a fórmulas que no deseamos que intervengan (por ejemplo, a las que no satisfagan cierto requisito de consistencia): de hecho siendo el ámbito de los problemas abductivos planos $A = \wp(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})$, el subámbito relevante para los análogos cualificados será $A^{\mathscr{C}^o}$. A tenor de esto podemos escribir:

$$\not\Vdash^{\mathscr{C}^d \mathscr{C}^o} \ = \ A^{\mathscr{C}^o} \cap \ (\nVdash \cup \, (A^{\mathscr{C}^d})^{\complement}) \ = \ A^{\mathscr{C}^o} \cap \ (\Vdash \cap \, (A^{\mathscr{C}^d}))^{\complement}.$$

Por otro lado, la nueva definición definición de problema abductivo nos permite considerar como su objeto a una fórmula que se infiere a partir de la teoría-base mediante la relación inferencial correspondiente pero que no reúne alguna de las

es posible definir una tal relación sin establecer cálculo alguno, y ello es posible tanto si la relación inferencial está dada desde un punto de vista semántico como si está dada desde un punto de vista sintáctico (véase un ejemplo en el capítulo 12 de [GW03]).

condiciones deseadas (por ejemplo, a ciertas fórmulas cuya longitud de la derivación canónica es superior a cierta cantidad de pasos[40]).

Anunciábamos también al comienzo de la subsección que a menudo la solución abductiva buscada no es una cualquiera que satisfaga el requisito justificativo, sino una que además cumpla algunas condiciones adicionales. Sin duda, entre éstas se encontrarán las citadas condiciones obligatorias que las parejas formadas por la teoría-base y el objeto del problema deben satisfacer (no en vano la resolución del problema sobreviene cuando la solución abductiva se agrega a la teoría-base para formar una nueva teoría-base expandida). Y, justamente por este mismo motivo, es en el conjunto de las condiciones deseables donde estarán incluidas las que establezcan ciertos criterios cuya total satisfacción, junto a la derivación inferencial, permitirán afirmar que cierta fórmula está adecuadamente justificada por cierta teoría-base en la relación inferencial.

Ahora ya estamos en condiciones de poder dar la definición de inferencia abductiva ordinaria:

Definición 11 (Inferencia abductiva ordinaria s-s cualificada // Solución abductiva ordinaria singular cualificada (*v. 1.1.1*))**.**
En la inferencia abductiva ordinaria s-s cualificada *(*v. 1.1.1*), dado un problema abductivo singular cualificado* $\bar{\Theta} \;\not\Vdash^{\mathscr{C}^{d}\mathscr{C}^{o}} \pi$ *queremos obtener como* solución abductiva ordinaria singular cualificada *(*v. 1.1.1*) una fórmula* $\sigma \in FOR(\mathcal{L})$ *tal que el objeto del problema pueda inferirse mediante la relación inferencial de que se trate a partir de la teoría-base junto con la solución encontrada y que* $(\bar{\Theta} \cup \{\sigma\}, \pi)$ *satisfaga las condiciones obligatorias* $\mathscr{C}^{o}$ *y las condiciones adicionales* $\mathscr{C}^{d}$*. Escrito de manera más formal* $(\bar{\Theta}, \pi) \Vdash^{\mathscr{C}^{d}\mathscr{C}^{o}}_{aoc} \sigma$ *es una inferencia abductiva ordinaria s-s cualificada (*v. 1.1.1*) y ello es equivalente a que se satisfaga:*

$$(\bar{\Theta} \;\not\Vdash^{\mathscr{C}^{d}\mathscr{C}^{o}} \pi) \;\dot{\&}\; (\bar{\Theta} \cup \{\sigma\} \;\Vdash^{\mathscr{C}^{d}\mathscr{C}^{o}} \pi)$$

[40] Esto abre la puerta a la utilización de la abducción en investigaciones acerca de fórmulas universalmente aceptables; por ejemplo, en la confección de un cálculo tal que todos los elementos de un conjunto de tautologías dado sean derivables en dicho cálculo en un número de pasos inferior o igual a un número fijado.

2.2.4. Abducción ordinaria s-s cualificada preferencial (*v. 1.1.1.1* y *v. 1.1.1.2*)

La anterior versión ya nos ha permitido que garanticemos que la solución abductiva no sea cualquiera que satisfaga el mero requisito justificativo, sino una que además satisfaga ciertas condiciones adicionales; pero, de momento, si existiesen varias posibilidades que reúnan todos los requisitos, nuestra relación inferencial no establece ninguna preferencia por una o varias de ellas en función de una o varias cualidades que modelizan la bondad explicativa[41]. Atocha Aliseda considera que la preferencia de una solución sobre otra sale fuera del ámbito de la Lógica por no ser posible su caracterización por medios puramente matemáticos, siendo necesario considerar aspectos pragmáticos. Sin embargo, nosotros queremos matizar dicha consideración. Coincidimos con la pensadora mexicana en que la motivación intuitiva que inspiran los criterios de preferencia a menudo tienen esa naturaleza extralógica (por ejemplo, ello ocurre con el grado de ajuste a una colección de datos fácticos). Sin embargo, creemos que algunos criterios podrían y deberían ser modelizados como una cuestión propiamente lógico-matemática –véanse los criterios que en la subsección anterior se indicaron que se podían usar para imponer ciertas condiciones obligatorias o deseables, resultando ahora especialmente interesantes aquéllos para los que se pueda establecer algún tipo de graduación–. De hecho algunos de los criterios son propiamente lógicos[42] y en relación con aquéllos que no lo son la Lógica simplemente asume la valoración que se le transmite desde el ámbito de conocimiento material en el que se esté usando la inferencia abductiva[43].

Un mecanismo preferencial es matemáticamente una relación que compara en un conjunto de entidades una cualidad simple o compleja y que establece un orden

[41] No hay acuerdo en la comunidad científica sobre qué debemos entender por este concepto, ni qué ‘ingredientes’ debe reunir (pertinencia, relevancia, simplicidad, autosuficiencia, generalidad, economía, probabilidad, poder predictivo,...), pero en cualquier caso, en nuestra modelización lógica será una cualidad comparable que vendrá determinada por el ‘valor’ de cierta propiedad o el resultado de una evaluación multifactorial que atiende a cierto conjunto de propiedades en las que haremos descansar dicho concepto.

[42] Por ejemplo, una propuesta que hace descansar la bondad explicativa en la menor longitud de las derivaciones canónicas ya fue formulada por D’Agostino, Finger y Gabbay en [DFG08].

[43] A este respecto la situación no es muy distinta de lo que ocurre en la Lógica Deductiva, donde el lógico sí conoce la verdad de ciertas fórmulas sólo por su ‘forma lógica’, pero en muchísimos casos cuando se usa la deducción como mecanismo inferencial den cierta parcela del conocimiento dicha información la debe recibir el lógico de las personas que son competentes en ella.

atendiendo al valor que en cada elemento tiene dicha cualidad. Así pues, para conseguir nuestro objetivo, debemos tener una estructura matemática de orden parcial no estricto, siendo dos los componentes de esta estructura: en primer lugar un conjunto sobre al que se dota de estructura (al que también llamaremos *conjunto asociado a la estructura*) y, en segundo lugar, una relación binaria entre los elementos del conjunto satisfaciendo las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. A esta estructura de las soluciones potenciales la llamaremos *espacio de potenciales soluciones abductivas ordinarias* y la denotaremos como $\mathscr{E}$ y si queremos referirnos a su conjunto asociado lo haremos con el símbolo E.

En la subsección anterior vimos que existían unas condiciones obligatorias para todos los problemas abductivos, por lo que con ello se establecía un subdominio relevante para la solución abductiva. En concreto, dado que el dominio es $D = FOR(\mathcal{L})$ y el conjunto de las condiciones obligatorias es $\mathscr{C}^o$ –las cuales están enunciadas sobre el ámbito $A = \wp(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})$–, obtenemos que el subdominio relevante para la solución abductiva es $D_1^{\mathscr{C}^o} = \{\varphi \ / \ \varphi \in \bar{\Gamma} \ \& \ \bar{\Gamma} \in Proy_2(A^{\mathscr{C}^o})\}$. El conjunto asociado al espacio de potenciales soluciones sólo tiene como requisito el ser una parte, propia o impropia, del dominio (es decir, $E \subseteq FOR(\mathcal{L})$, pero si lo deseamos podríamos restringirlo a un subdominio –sea éste $D_1^{\mathscr{C}^o}$ o alguno parcialmente distinto de él (en cualquier caso la solución pertenecerá finalmente a $E \cap D_1^{\mathscr{C}^o}$). Obviamente en la versión plana dicho conjunto asociado al espacio es, de modo tácito, el conjunto de todas las fórmulas del lenguaje ($E = FOR(\mathcal{L})$).

El papel crucial del citado espacio de potenciales soluciones queda de manifiesto en el hecho de que, dependiendo de que estemos ante uno u otro, podremos decir que estamos o no ante un problema abductivo y, en caso afirmativo, de que exista solución o no. Un caso límite podría ser, si la estructura que posee no lo impide, que el conjunto asociado a dicho espacio fuese vacío ($E = \varnothing$), aunque, obviamente, en ese caso no sería posible encontrar solución abductiva ordinaria alguna. Otro caso límite sería aquél en el que todos los elementos de E tienen la misma preferencia, lo cual sirve, por ejemplo, para dar cuenta de la clase de casos particulares representado por la abducción ordinaria singular plana, de manera que podemos decir que la versión que en esta subsección presentamos es una generalización de aquélla.

El espacio de potenciales soluciones abductivas puede adoptar estructuras (y a veces es necesario que las adopte atendiendo al fin que nos hemos propuesto) que no son meros órdenes parciales no estrictos, aunque en cualquier caso se debe cumplir que o bien tiene a ésta como subestructura de la adoptada o bien esta última puede inducir aquélla. Entre las posibles estructuras que puede adoptar señalaremos las siguientes a modo de ejemplo: retículo, retículo complementado, álgebra de Boole, orden total, espacio métrico, espacio pseudométrico, espacio topológico y filtro.

Como veremos a continuación, la definición de problema abductivo (*v. 1.1.1.1*) ha sido modificada para permitir contar entre sus objetos a las fórmulas que se deducen de la teoría-base y cumplen las condiciones obligatorias y deseables, pero de las que se sabe que dan lugar a una explicación que tiene menor bondad explicativa que la generada por al menos otra fórmula que es distinta de ella:

Definición 12 (Problema abductivo singular cualificado preferencial (*v. 1.1.1.1*))**.** *Dados una* teoría-base $\bar{\Theta} \subseteq FOR(\mathcal{L})$ *y un* espacio de potenciales soluciones abductivas ordinarias $\mathscr{E} = (E, \rhd_E)$ *–siendo* $E \subseteq FOR(\mathcal{L})$ *su* conjunto asociado *y* $\rhd_E$ *una relación de orden parcial no estricto sobre* E *tal que* $\beta \rhd_E \alpha$ *indica que* β *es preferible a* α*–, un* problema abductivo singular cualificado preferencial *(*v. 1.1.1.1*), cuyo* objeto del problema *es la fórmula* $\pi \in FOR(\mathcal{L})$*, es una situación que queda descrita en alguna de las dos posibilidades siguientes:*
a) $(\bar{\Theta}, \pi)$ *satisface todas las condiciones del conjunto* $\mathscr{C}^o = \{C_i^o \ / \ i \in I \subsetneq \mathbb{N}\}$ *(denominadas* condiciones obligatorias*) y además o bien* π *no se infiere de* $\bar{\Theta}$ *en la relación de consecuencia deductiva* $\Vdash$ *o bien* $(\bar{\Theta}, \pi)$ *no satisface al menos una de las condiciones del conjunto* $\mathscr{C}^d = \{C_j^d \ / \ j \in J \subsetneq \mathbb{N}\}$ *(denominadas* condiciones deseables*).*
b) $(\bar{\Theta}, \pi)$ *satisface todas las condiciones del conjunto* $\mathscr{C}^o$[44] *y existe al menos una fórmula* $\alpha \in \bar{\Theta}$ *y al menos otra* $\beta \in E$*, de modo que la teoría-base revisada* $\bar{\Theta}'$ *(que se obtiene al añadir* β *al conjunto resultante de eliminar* α *en* $\bar{\Theta}$*) es tal que* $(\bar{\Theta}', \pi)$ *satisface todas las condiciones de los conjuntos* $\mathscr{C}^o$ *y* $\mathscr{C}^d$ *indicados en el apartado anterior,* π *se infiere de* $\bar{\Theta}'$ *en la relación de consecuencia deductiva* $\Vdash$ *y* β *es preferible a* α *según la relación* $\rhd_E$*, siendo ambas fórmulas distintas.*
De manera más formal podemos escribir el definiens *como:*

$$(\bar{\Theta} \not\Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi) \ \dot{\nabla} \ (\dot{\forall} i(i \in I \dot{\Rightarrow} C_i^o(\bar{\Theta}, \pi)) \ \dot{\&} \ \dot{\exists}\alpha\dot{\exists}\beta(\alpha \in \bar{\Theta} \ \dot{\&} \ \beta \in E \ \dot{\&}$$

$$(\bar{\Theta}' = (\bar{\Theta} \setminus \{\alpha\}) \cup \{\beta\}) \ \dot{\&} \ (\bar{\Theta}' \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi) \ \dot{\&} \ (\beta \rhd_E \alpha) \ \dot{\&} \ (\beta \neq \alpha))).$$

[44] Este requisito podría haber sido cambiado por el siguiente, que es equivalente: $(\bar{\Theta}, \pi)$ satisface todas las condiciones del conjunto $\mathscr{C}^o = \{C_i^o \ / \ i \in I \subsetneq \mathbb{N}\}$ y además π se infiere de $\bar{\Theta}$ en la relación de consecuencia deductiva $\Vdash$ y $(\bar{\Theta}, \pi)$ satisface todas las condiciones del conjunto $\mathscr{C}^d = \{C_j^d \ / \ j \in J \subsetneq \mathbb{N}\}$. De manera más formal y breve ello se habría escrito como: $\bar{\Theta} \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi$.

Para poder referirnos de forma más breve a esta condición necesaria y suficiente designémosla con la etiqueta $\dot{\mho}$.

Veamos que ahora pueden presentarse dos distintas versiones de inferencia abductiva ordinaria s-s cualificada preferencial, una menos exigente que la otra, a las que tildaremos de *no-extrema* y *extrema*, respectivamente:

Definición 13 (Inferencia abductiva ordinaria s-s cualificada preferencial no-extrema // Solución abductiva ordinaria singular cualificada preferencial no-extrema (*v. 1.1.1.1*))**.**
En la inferencia abductiva ordinaria s-s cualificada preferencial no-extrema *(*v. 1.1.1.1*), dado un problema abductivo singular cualificado preferencial* $\dot{\mho}$ *sobre el* espacio de potenciales soluciones abductivas ordinarias $\mathscr{E} = (E, \rhd_E)$*, queremos obtener como* solución abductiva ordinaria singular cualificada preferencial no-extrema *(*v. 1.1.1.1*) una fórmula* $\sigma \in E$ *tal que:*
a) Si se tenía que $\bar{\Theta} \nVdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi$*, entonces* $\bar{\Theta} \cup \{\sigma\} \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi$*.*
b) Si se tenía $\bar{\Theta} \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi$*, entonces* $\dot{\exists}\alpha(\alpha \in \bar{\Theta} \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Theta}' = (\bar{\Theta} \setminus \{\alpha\}) \cup \{\sigma\}) \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Theta}' \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi) \mathbin{\dot{\&}} (\sigma \rhd_E \alpha) \mathbin{\dot{\&}} (\sigma \neq \alpha)))$*.*
Escrito de manera más formal $((\bar{\Theta}, \pi), \mathscr{E}) \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o}_{aocpn} \sigma$ *es una inferencia abductiva ordinaria s-s cualificada preferencial no-extrema (*v. 1.1.1.1*) y ello es equivalente a que se satisfaga:*

$$\dot{\mho} \;\&\; ((\bar{\Theta} \nVdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi) \mathbin{\dot{\Rightarrow}} (\bar{\Theta} \cup \{\sigma\} \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi)) \;\&\; ((\bar{\Theta} \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi) \mathbin{\dot{\Rightarrow}} \dot{\exists}\alpha(\alpha \in \bar{\Theta} \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Theta}' = (\bar{\Theta} \setminus \{\alpha\}) \cup \{\sigma\}) \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Theta}' \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi) \mathbin{\dot{\&}} (\sigma \rhd_E \alpha) \mathbin{\dot{\&}} (\sigma \neq \alpha))).$$

A esta relación de consecuencia lógica le podemos llamar también *inferencia a una mejor explicación* (entendiendo que, ante un hecho problemático que no ha sido previamente explicado, una explicación cualquiera es una mejor explicación).

Definición 14 (Inferencia abductiva ordinaria s-s cualificada preferencial extrema // Solución abductiva ordinaria singular cualificada preferencial extrema (*v. 1.1.1.2*))**.**

En la inferencia abductiva ordinaria s-s cualificada preferencial extrema *(*v. 1.1.1.2*), dado un problema abductivo singular cualificado preferencial* $\dot{\mho}$ *sobre el* espacio de potenciales soluciones abductivas ordinarias $\mathscr{E} = (E, \rhd_E)$*, que debe ser un retículo complementado, queremos obtener como* solución abductiva ordinaria singular cualificada preferencial extrema *(*v. 1.1.1.2*) una fórmula* $\sigma \in E$ *tal que:*
a) Si se tenía que $\bar{\Theta} \nVdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi$*, entonces* $\sigma = max_{\rhd_E}\{\varphi \mathbin{/} \bar{\Theta} \cup \{\varphi\} \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi\}$.

b) Si se tenía $\bar{\Theta} \quad \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \quad \pi$*, entonces* $\sigma = max_{\rhd_E}\{\varphi \;/\; \dot{\exists}\alpha(\alpha \in \bar{\Theta} \;\dot{\&}\; (\bar{\Theta}' = (\bar{\Theta} \setminus \{\alpha\}) \cup \{\varphi\}) \;\dot{\&}\; (\bar{\Theta}' \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi) \;\dot{\&}\; (\varphi \rhd_E \alpha) \;\dot{\&}\; (\varphi \neq \alpha))\}$.
Escrito de manera más formal $((\bar{\Theta}, \pi), \mathscr{E}) \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o}_{aocpe} \sigma$ *es una inferencia abductiva ordinaria s-s cualificada preferencial extrema (*v. 1.1.1.2*) y ello es equivalente a que se satisfaga:*

$$\dot{\mho} \;\&\; ((\bar{\Theta} \nVdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi) \dot{\Rightarrow} (\sigma = max_{\rhd_E}\{\varphi \;/\; \bar{\Theta} \cup \{\varphi\} \quad \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \quad \pi\})) \;\&$$
$$((\bar{\Theta} \quad \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \quad \pi) \dot{\Rightarrow} (\sigma = max_{\rhd_E}\{\varphi \;/\; \dot{\exists}\alpha(\alpha \in \bar{\Theta} \;\dot{\&}\; (\bar{\Theta}' = (\bar{\Theta} \setminus \{\alpha\}) \cup \{\varphi\}) \;\dot{\&}$$
$$(\bar{\Theta}' \Vdash^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \pi) \;\dot{\&}\; (\varphi \rhd_E \alpha) \;\dot{\&}\; (\varphi \neq \alpha))\})).$$

A esta relación de consecuencia lógica le podemos llamar también *inferencia a la mejor explicación*, puesto que ante cualquier problema abductivo siempre consigue la solución con mayor bondad explicativa. Para garantizar la existencia de dicha mejor explicación (es decir, del máximo del conjunto de las fórmulas que explican el hecho –que es un elemento único y alcanzable–) hemos tenido que imponer que la estructura sea un retículo complementado.

Por ejemplo, si estamos en una lógica clásica[45] y a la la solución le exigimos que se trate de la deductivamente más débil (es decir, nuestro criterio de máxima bondad explicativa descansa en el menor poder deductivo[46]) y el espacio de potenciales soluciones abductivas ordinarias está ordenado bajo dicha relación de consecuencia deductiva[47], etc., entonces estamos ante una relación inferencial a la mejor explicación –eso sí, según ya probamos anteriormente, se trata de un tipo de inferencia que, si no se le exige alguna otra condición, siempre obtiene como solución una fórmula no ingeniosa equivalente a $(\bigwedge \bar{\Theta}) \to \pi$, motivo por el que habitualmente se suele imponer que no se trate de ninguna de las que verifican dicha equivalencia[48]–.

En el caso de que el espacio de potenciales soluciones abductivas tenga estructura de retículo complementado finito la inferencia a la mejor explicación puede ser

45 Podríamos extenderlo a cualquier sistema lógico deductivo tal que su relación inferencial satisfaga el *metateorema de la deducción* y las propiedades estructurales de permutación, contracción por la derecha y contracción por la izquierda, así como que su alfabeto cuente con un conjuntor conmutativo, asociativo e idempotente.

46 Un indicio de que es un buen criterio es que las fórmulas fuertemente inconsistentes son las que tienen mayor poder deductivo y, por tanto, menor bondad explicativa.

47 Lo cual dota al conjunto de estructura de retículo complementado.

48 Con dicha eliminación el espacio de potenciales soluciones abductivas ordinarias deja de ser un retículo complementado, por lo que, si se decide eliminar la citada fórmula, hay que modificar solidariamente el criterio de bondad explicativa.

también simulada por una secuencia finita de inferencias a una mejor explicación en la que la solución abductiva de cada iteración de la secuencia, salvo la última, es tomada como el problema abductivo de la siguiente ejecución (así pues, como un proceso de 'refinamiento' en la inferencia a una mejor explicación hasta alcanzar el elemento máximo). La cardinalidad finita del espacio y la existencia de un máximo garantizan que el proceso termine y que se alcance el resultado deseado.

2.2.5. Abducción ordinaria s-s cualificada preferencial estratégica (*v. 1.1.1.1.1* y *v. 1.1.1.2.1*)

Todo lo dicho hasta ahora sólo tiene en cuenta el resultado de la inferencia abductiva (esto es lo que habíamos denominado la concepción de la abducción como producto); sin embargo, en el uso real de este tipo de la abducción es crucial el aspecto procesual, entre cuyos ingredientes destaca, siguiendo en ello a autores como Hintikka [Hin98] y Paavola [Paa04a], lo que llamaremos la *estrategia abductiva*. Añadamos nosotros otro más: este proceso requiere del empleo de recursos espaciales y temporales que en cualquier implementación son necesariamente limitados.

Aunque esta cuestión se escapa de los objetivos particulares que nos habíamos fijado en esta investigación, haremos en esta subsección un brevísimo apunte (sin tener ocasión de profundizar en el estudio de la cuestión) de cómo deberíamos modificar la definición de solución abductiva –la noción de problema abductivo (*v. 1.1.1.1*) puede mantenerse sin alteración alguna– aunque no será presentada con el nivel de formalización que se ha empleado en las anteriores ocasiones, toda vez que requeriría tener que presentar el tratamiento desde esta óptica de conceptos que nos llevarían muy lejos de nuestros propósitos (entre ellos los de procedimiento, procedimiento mecánico, regla heurística, recurso material, espacio de almacenamiento, tiempo de ejecución,...).

La noción de *inferencia abductiva ordinaria s-s cualificada preferencial no-extrema estratégica* (*v. 1.1.1.1.1*) se construye a partir de la *versión 1.1.1.1* añadiendo los dos nuevos 'ingredientes': la solución debe ser el resultado de la ejecución sobre los datos de partida (constituidos por el problema abductivo) de un procedimiento[49] $\mathscr{P}$ que satisface las limitaciones de recursos espaciales y temporales

[49] Que no necesariamente tiene que ser puramente mecánico ni determinista, de modo que puede incorporar heurísticas y opciones elegibles.

establecidas en el conjunto de restricciones $\mathscr{R}$. Así pues, más formalmente:

$$((\bar{\Theta}, \pi), \mathscr{E}, \mathscr{P}, \mathscr{R}) \Vdash_{aocpns}^{\mathscr{C}^d\mathscr{C}^o} \sigma.$$

Análogamente para la *inferencia abductiva ordinaria s-s cualificada preferencial extrema estratégica* (*v. 1.1.1.2.1*) a partir de la *versión 1.1.1.2*.

Obviamente si la estrategia es vacua y los recursos espacio-temporales se consideran ilimitados obtenemos la modelización de los casos particulares representados por la abducción ordinaria singular plana. Por otro lado, la estrategia a menudo se aprovechará de la estructura del espacio de potenciales soluciones para una localización efectiva y eficaz de una solución abductiva –el impacto de dicha estructura sobre la eficacia de la estrategia es más notoria cuando se trate de averiguar todas las posibles soluciones abductivas (por ejemplo, en un espacio de potenciales soluciones con estructura de retículo generada por la relación de deducibilidad, una vez encontrada una solución plana, cualquier elemento que la mayore en la citada relación será igualmente una solución plana del mismo problema)–.

2.2.6. Abducción ordinaria s-s plana cuya solución es fuertemente compatible (*v. 1.1.2*)

Esta subsección no será un paso más en el proceso de generalización creciente que hemos realizado hasta ahora, sino que vamos a detenernos a considerar una clase de casos especialmente interesantes: aquéllos en los que la solución es fuertemente compatible[50]. Hay una fuerte motivación intuitiva para ello: realmente los casos en los que habitualmente se interesan las diversas disciplinas científicas en las que se usa la abducción son de este tipo y ello ocurre así independientemente de que el problema abductivo que pone en marcha el proceso abductivo sea de uno u otro tipo en relación con la novedad / anomalía. A este respecto, en los planteamientos anteriores las inferencias abductivas que parten de problemas abductivos anómalos tienen un tratamiento muy insatisfactorio, pues, en particular, toda solución abductiva ordinaria singular plana será al menos débilmente incompatible.

Por ello, inspirándonos en ciertas intuiciones provenientes de las Ciencias (especialmente de las Ciencias Empíricas) elaboraremos una nueva propuesta que permita en todos los casos alcanzar una solución con la cualidad mencionada, aunque

[50] Es muy similar la versión análoga a ésta pero para la clase de casos en los que la solución es débilmente compatible, motivo por el que no incluiremos esa nueva ramificación en esta memoria.

aquí no priorizaremos entre las posibles soluciones –a diferencia de lo que podría hacerse en la versión cualificada preferencial–. En una formulación de esta última[51], entre las condiciones adicionales que se pueden establecer para la solución abductiva pueden aparecer una serie de criterios de preferencia para determinar qué fórmulas deben incorporarse al conjunto-contractor y cuáles deben permanecer en la teoría-base contraída (lo cual recoge nuevamente un aspecto relativo a la bondad explicativa de la solución).

Para que resulten más inteligibles las novedades que se introducen en esta versión con respecto a otras formulaciones estudiadas, la presentaremos sin incorporar la cuestión de la cualificación (así pues, será una generalización elaborada a partir de la *1.1* y quedará como una rama colateral de la *1.1.1*), considerando que la consecución de una nueva versión que incorpore dicho aspecto cualificacional (digamos la *1.1.2.1*) a partir de lo aquí expuesto es ciertamente asequible. Incidamos en un punto a este respecto: la *versión 1.1.1* nos permite excluir como problemas abductivos a los casos en los que la teoría-base no satisfaga cierto requisito de consistencia o el objeto del problema cierto requisito de novedad, e igualmente podemos garantizar el tipo de compatibilidad de la solución abductiva, pero no resulta posible partir de una situación en la que no se satisfaga alguna de las condiciones indicadas y se desemboque en una situación final que sí lo haga. Así pues, el presente tipo de inferencia abductiva resulta necesaria y no puede entenderse como una particularización de la versión cualificada que fue expuesta.

En la inferencia abductiva ordinaria s-s plana (*v. 1.1.2*), dado un problema abductivo singular plano, querremos obtener como solución abductiva ordinaria un par ordenado tal que su primera componente sea un subconjunto, propio o impropio, de la teoría-base (al que llamaremos *conjunto contractor*), y su segunda componente sea una fórmula (a la que denominaremos *elemento expansor*), tal que el objeto del problema pase a poderse inferir en dicho marco lógico a partir del conjunto fuertemente consistente que se obtenga tras detraer de la teoría-base el conjunto contractor (llamémosle a este resultado parcial la *teoría-base contraída*) y unirle a dicho resultado el conjunto formado por el elemento expansor (pudiendo denominar al conjunto así obtenido como *teoría-base revisada*). Así pues, lo que se pretende conseguir en este caso, dicho en una terminología más clásica (y en buena medida heredera del modelo AGM de cambio de creencias), es una revisión fuertemente

[51] Que aquí no presentamos, al igual que haremos con muchas otras situaciones particulares y con la mayoría de combinaciones de los tipos estudiados, por no ser excesivamente prolijos.

consistente de la teoría inicial por medio de la realización de los siguientes dos pasos: 1) obtener una contracción de la teoría inicial; y 2) hacer una expansión con una fórmula del mismo lenguaje, de tal modo que la teoría resultante tras la contracción y expansión sea fuertemente consistente y justificativa del hecho sorprendente contando con la misma lógica subyacente. Tanto el proceso de contracción como el elemento expansor no están sujetos en esta versión a condiciones adicionales, por lo que habitualmente existirán múltiples soluciones posibles. Una opción en principio diferente a la aquí adoptada habría sido hacer primero la expansión de la teoría-base hasta obtener la justificación del objeto del problema abductivo y a continuación hacer una contracción hasta conseguir que se torne consistente.

Presentemos ahora formalmente las nuevas versiones de los conceptos de inferencia abductiva y solución abductiva (la noción de problema abductivo no tiene cambio alguno respecto de la *versión 1.1*):

Definición 15 (Inferencia abductiva ordinaria s-s plana cuya solución es fuertemente compatible // Solución abductiva ordinaria singular plana fuertemente compatible (*v. 1.1.2*))**.**
En la inferencia abductiva ordinaria s-s plana cuya solución es fuertemente compatible *(*v. 1.1.2*) dado un problema abductivo singular plano* $\bar{\Theta} \not\Vdash \pi$*, queremos obtener como* solución abductiva ordinaria singular plana fuertemente compatible *(*v. 1.1.2*) un par ordenado* $(\bar{\Delta}, \sigma) \in \wp(\bar{\Theta}) \times FOR(\mathcal{L})$ *(cuyos componentes son denominados, respectivamente,* conjunto contractor *y* elemento expansor*) tal que el objeto del problema pueda inferirse mediante la relación inferencial de que se trate a partir de un conjunto fuertemente consistente* $\bar{\Theta}''$ *al que denominamos* teoría-base revisada *y cuyo procedimiento de cálculo es* $\bar{\Theta}'' = \bar{\Theta}' \cup \{\sigma\}$*, siendo* $\bar{\Theta}'$ *la* teoría-base contraída *que se ha obtenido del siguiente modo* $\bar{\Theta}' = \bar{\Theta} \setminus \bar{\Delta}$*. Escrito de manera más formal* $(\bar{\Theta}, \pi) \Vdash_{ao(fc)} (\bar{\Delta}, \sigma)$ *es una inferencia abductiva ordinaria s-s cualificada cuya solución es fuertemente compatible (*v. 1.1.2*) y ello es equivalente a que se satisfaga:*

$$(\bar{\Theta} \not\Vdash \pi) \;\dot{\&}\; ((\bar{\Theta} \setminus \bar{\Delta}) \cup \{\sigma\} \not\Vdash \widetilde{\bot}) \;\dot{\&}\; ((\bar{\Theta} \setminus \bar{\Delta}) \cup \{\sigma\} \Vdash \pi).$$

Obviamente, si el problema abductivo es anómalo (débilmente o fuertemente), $\bar{\Delta}$ no puede ser vacío, pero en cualquier otro caso sí lo podrá ser –aunque en esta versión no queda excluida la posibilidad de que el conjunto contractor sea no vacuo en casos en los que el problema sea incluso fuertemente novedoso (en la versión cualificada las condiciones de preferencia sobre el conjunto contractor podrían impedirlo, comportamiento que es el más habitual cuando la inferencia abductiva es usada en el ámbito científico)–.

2.2.7. Abducción ordinaria s-p plana (*v. 2.1*)

Existen sistemas lógicos deductivos en los que no es posible resolver con una sola fórmula de su lenguaje un problema abductivo al que se le exige alguna característica adicional y, sin embargo, sí se conseguiría dicha resolución con un conjunto de ellas. Presentamos un ejemplo (que, como se verá, se vale de una lógica que es un fragmento de la lógica proposicional clásica):

Ejemplo 16.
Sea $\mathfrak{L}$ un lenguaje proposicional cuyo alfabeto consta de un conjunto de átomos $ATOM_{\mathfrak{L}} = \{p, \neg p, q, \neg q, r, \neg r, s, \neg s, ...\}$ ($ATOM_{\mathfrak{L}}$ es un conjunto infinito numerable que consta de variables proposicionales y sus contradictorias) y de un conjunto de conectores $CON_{\mathfrak{L}} = \{\vee, \rightarrow\}$ (es decir, es un conjunto de conectores que no permite obtener todos los de la lógica proposicional clásica, de ahí que algunos autores lo adjetiven como 'incompleto' o 'insuficiente). La gramática de $\mathfrak{L}$ es la restricción de la correspondiente al lenguaje de la lógica proposicional a dicho alfabeto (por supuesto, en el conjunto $FOR(\mathfrak{L})$ no aparecerán fórmulas no atómicas negadas ni se puede definir como símbolo derivado el conjuntor clásico). La relación inferencial $\Vdash$ es la correspondiente a la lógica clásica restringida a $FOR(\mathfrak{L})$. Sean $\bar{\Theta} = \{p \rightarrow q \vee r; s \rightarrow \neg r\}$ la teoría-base y $\pi = q$ el objeto del problema. El intento de encontrar una solución abductiva singular σ que sea fuertemente consistente y no involucre a q[52] resulta infructuoso[53]. Sin embargo, si se busca una solución abductiva plural $\bar{\Sigma}$ que satisfaga ese mismo requisito, nos encontramos rápidamente con una posible solución, a saber: $\bar{\Sigma} = \{p, s\}$.

Con este ejemplo queda acreditado que ciertas ocasiones no sólo es ventajoso, sino necesario, pensar en un nuevo tipo de abducción que concibe la componente de la solución como un conjunto. Esta nueva posibilidad que no ha sido considerada por otros autores (al menos, no tenemos constancia de ello), puede también concebirse como una generalización de la *versión 1*: esta última sería la clase de casos

[52] Dicho con más precisión, que sea fuertemente compatible, explicativa e ingeniosa.
[53] Si se permitiese involucrar a q una posibilidad sería ella misma y otra $\neg q \rightarrow q$.

particulares en los que el conjunto-solución es necesariamente unitario[54]. A pesar de esto último, en nuestra presentación hemos rotulado esta versión con un nombre que no revela esa relación de generalización que hemos mencionado porque queremos que exista una 'estructuración' idéntica de las distinciones que se pueden hacer en los cuatro tipos de abducción que se pueden concebir según sean el objeto del problema, la solución o ambas una sola fórmula o un conjunto de ellas.

La noción de inferencia abductiva ordinaria s-p plana (*v. 2.1*) se construye sobre un concepto de problema abductivo singular plano ya estudiado: la *versión 1*. Sin embargo, sí es distinta la correspondiente noción de solución abductiva y, con ello, la de inferencia abductiva. Su presentación informal es la siguiente: en la *inferencia abductiva ordinaria s-p plana*, dado un problema abductivo singular plano, queremos obtener como *solución abductiva ordinaria singular plana* un conjunto no vacío de fórmulas tal que el objeto del problema pasa a poderse inferir en dicho marco lógico a partir de la unión de la teoría-base y la solución abductiva (a la que ahora podemos llamar *conjunto-solución*). Dicho en terminología más clásica, lo que se pretende conseguir es, nuevamente, una expansión de la teoría inicial con una o más fórmulas del mismo lenguaje, de tal modo que la teoría resultante se convierta en suficientemente explicativa del hecho sorprendente contando con el mismo marco lógico.

Definición 17 (Inferencia abductiva ordinaria s-p plana // Solución abductiva ordinaria plural plana (*v. 2.1*))**.**
En la inferencia abductiva ordinaria s-p plana *(*v. 2.1*) dado un problema abductivo singular plano* $\bar{\Theta} \not\Vdash \pi$*, queremos obtener como* solución abductiva ordinaria plural plana *(*v. 2.1*) un conjunto de fórmulas* $\bar{\Sigma} \subseteq FOR(\mathcal{L})$ *(al que también denominamos* conjunto-solución*) tal que el citado problema deje de serlo (es decir, tal que el objeto del problema pueda inferirse mediante la relación inferencial de que se trate a partir de la teoría-base unido al conjunto-solución encontrado). De manera más formal podemos escribir el* definiens *como:*

$$(\bar{\Theta} \not\Vdash \pi) \;\dot{\&}\; (\bar{\Theta} \cup \bar{\Sigma} \Vdash \pi).$$

Ahora anotamos la inferencia abductiva como $(\bar{\Theta}, \pi) \Vdash_{aO} \bar{\Sigma}$. Además, de las definiciones de problema abductivo y de solución abductiva que han sido empleadas se deriva que necesariamente se cumple que $\bar{\Sigma} \neq \varnothing$.

[54] Formalmente es diferente un conjunto unitario de su único elemento, pero se puede probar la existencia de una isomorfía entre las relaciones inferenciales formuladas de uno y otro modo.

Por supuesto, además de los casos cuyo conjunto-solución es unitario, hay otras situaciones en las que esta versión puede ser convertida en la correspondiente versión s-s: todos aquéllos que se desenvuelvan en el marco de un sistema lógico en el que sea factible obtener una sola premisa que sea 'equivalente' a un conjunto de premisas –y hemos hablado de equivalencia porque realmente el proceso se puede realizar en los dos sentidos (es decir, podemos tomar cualquier elemento del conjunto de premisas cuyo conector principal sea el conjuntor y sustituirlo por las subfórmulas que constituían el miembro izquierdo y el derecho de la conjunción inicial, pudiendo repetir el proceso hasta que ninguna fórmula del conjunto de premisas tenga al conjuntor como símbolo principal)–. Esto ocurre, por ejemplo, en la lógica proposicional clásica, pues ésta cuenta con un conjuntor de tipo clásico (que posee las propiedades conmutativa, asociativa e idempotente) y, por tanto, en ella se puede demostrar el metateorema que establece la equivalencia metateórica entre una inferencia con un conjunto de premisas que cuente con un número finito cualquiera (eventualmente vacío) de fórmulas y una inferencia con un conjunto de premisas unitario (si el primero de estos conjuntos es vacío, entonces el conjunto unitario tendrá como única fórmula a una que sea universalmente aceptable, y, si el primero es no vacío, entonces el conjunto unitario tendrá como única fórmula a la obtenida mediante la conjunción de las premisas, repitiendo el proceso tantas veces como resulte necesario):

$$card(\bar{\Gamma}) \lneq card(\mathbb{N}) \dot{\Rightarrow} ((\bar{\Gamma} \Vdash \varphi) \dot{\Leftrightarrow} (\{\bigwedge \bar{\Gamma}\} \Vdash \varphi)).$$

Y ello nos permite asegurar en el caso que ahora nos ocupa que:

$$card(\bar{\Sigma}) \lneq card(\mathbb{N}) \dot{\Rightarrow} (((\bar{\Theta}, \pi) \Vdash_{aO} \bar{\Sigma}) \dot{\Leftrightarrow} ((\bar{\Theta}, \pi) \Vdash_{ao} \bigwedge \bar{\Sigma})).$$

Pero no es cierta la viabilidad universal de reducir la versión s-p a la s-s puesto que existen no sólo sistemas lógicos cuyo alfabeto no contiene conjuntor alguno sino también otros en los que existiendo algún conjuntor éste no se comporta de la manera indicada. Por ejemplo, desde un punto de vista dinámico el conjuntor más natural puede ser uno que no satisfaga la conmutatividad. Pero, incluso en los sistemas lógicos que cuentan con el mencionado conjuntor clásico y, por tanto, que satisfacen el citado metateorema para conjuntos finitos de premisas, es posible que no se pueda reproducir la situación en el caso de conjuntos infinitos de fórmulas –lo cual ocurre en, por ejemplo, en la lógica proposicional clásica misma, dado que no cuenta con un conjuntor generalizado infinitario–.

Definición 18 (Tipos de soluciones abductivas ordinarias plurales planas (*v. 2.1*)). *Sea $\bar{\Theta} \nVdash \pi$ un problema abductivo singular plano y $\bar{\Sigma}$ una solución abductiva ordinaria plural plana, decimos que ésta es:*

· Débilmente consistente *si y sólo si* $\dot{\exists}\varphi((\varphi \in FOR(\mathcal{L})) \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Sigma} \nVdash \varphi))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* fuertemente inconsistente.

· Fuertemente consistente *si y sólo si* $\bar{\Sigma} \nVdash \widetilde{\bot}$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* débilmente inconsistente.

· Débilmente compatible *si y sólo si* $\dot{\exists}\varphi((\varphi \in FOR(\mathcal{L})) \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Theta} \cup \bar{\Sigma} \nVdash \varphi))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* fuertemente incompatible.

· Fuertemente compatible *si y sólo si* $\bar{\Theta} \cup \bar{\Sigma} \nVdash \widetilde{\bot}$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* débilmente incompatible.

· Conservadora por partes de la compatibilidad fuerte *si y sólo si* $\dot{\forall}\bar{\Gamma}(((\bar{\Gamma} \subseteq \bar{\Theta}) \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Gamma} \nVdash \widetilde{\bot})) \mathbin{\dot{\Rightarrow}} (\bar{\Gamma} \cup \bar{\Sigma} \nVdash \widetilde{\bot}))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no conservadora por partes de la compatibilidad fuerte.

· Explicativa *si y sólo si* $\bar{\Sigma} \nVdash \pi$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no explicativa.

· Ingeniosa *si y sólo si* $\dot{\sim}\dot{\exists}\varphi(\pi \equiv \varphi \mathbin{\dot{\&}} \varphi \in \bigcup_{\sigma \in \bar{\Sigma}} SUBFORM(\sigma))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no ingeniosa.

· Deductivamente minimal *si y sólo si* $\dot{\sim}\dot{\exists}\bar{\Sigma}'((\bar{\Sigma}' \in SOL_{aO}(\bar{\Theta} \nVdash \pi)) \mathbin{\dot{\&}} (\dot{\forall}\sigma'(\sigma' \in \bar{\Sigma}' \mathbin{\dot{\Rightarrow}} \bar{\Sigma} \Vdash \sigma') \mathbin{\dot{\&}} (\exists\sigma(\sigma \in \bar{\Sigma} \mathbin{\dot{\&}} \bar{\Sigma}' \nVdash \sigma))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* deductivamente no minimal.

· Deductivamente mínima *si y sólo si* $\dot{\forall}\Sigma'((\Sigma' \in SOL_{aO}(\bar{\Theta} \nVdash \pi)) \mathbin{\dot{\Rightarrow}} (\dot{\forall}\sigma(\sigma \in \bar{\Sigma} \mathbin{\dot{\Rightarrow}} \bar{\Sigma}' \Vdash \sigma))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* deductivamente no mínima.

2.2.8. Abducción ordinaria p-s plana (*v. 3.1*)

La siguiente propuesta parte de una generalización de la noción de problema abductivo plano: ahora el objeto del problema será un conjunto de fórmulas tal que al menos una de ellas no se siga de la teoría-base en cierta relación de consecuencia lógica. Nos podemos preguntar qué sentido tiene que el objeto del problema (al que también podemos llamar *conjunto-problema*) pueda contener fórmulas que sí son derivables de la teoría-base en la relación inferencial (o, dicho de otro modo, ¿por qué no exigir que todas las fórmulas del conjunto-problema tengan la cualidad de dar lugar a un fracaso inferencial individualmente?

Veamos que existen varios motivos para ello. En primer lugar, y como motivación interna, nos gustaría que en este tipo de inferencia abductiva sucediese algo análogo a lo que ocurría en la subsección anterior en cuanto a la posibilidad de poder reducirlo al tipo s-s en el caso de que se cuente en el lenguaje lógico con un conjuntor con las propiedades que allí se indicaron. Como dijimos, este metateorema permite el 'recorrido' en los dos sentidos: o bien pasar de un conjunto finito cualquiera de premisas a un conjunto unitario equivalente o bien descomponer las premisas cuyo signo principal es el conjuntor hasta alcanzar un conjunto de premisas en la que ninguna de ellas sea una conjunción[55]. Es fácil darse cuenta de que en una fórmula conjuntiva que es el objeto de un problema abductivo singular no necesariamente los dos miembros reproducen esa situación.

En segundo lugar, y como motivación externa (concretamente procedente del ámbito de la Ciencia), sabemos que normalmente los enunciados de las teorías científicas no son elementos aislados, por lo que un desajuste entre las predicciones y la experiencia requerirá la modificación de un conjunto de enunciados que mantienen en mayor o menor medida ciertas interdependencias (de hecho, en las Ciencias Empíricas a menudo ni siquiera es posible contrastar ciertos enunciados aislados, sino que debe hacerse en conjunción de otros con los cuales está íntimamente conectado). Por ejemplo, ante un problema abductivo por anomalía la *versión 3.1.2* (es decir, la que se elaboraría a partir de lo que aquí expondremos pero transformada para garantizar que su solución sea fuertemente compatible) requeriría la contracción de la teoría-base y, según dijimos, esto en la mayoría de las ocasiones se puede hacer de múltiples maneras. El tomar el problema abductivo como un conjunto de fórmulas, que globalmente están afectadas por el fracaso inferencial (aunque no necesariamente ocurra así individualmente), nos permitirá garantizar que la teoría-base revisada seguirá justificando todas ellas.

Igualmente, en una versión cualificada (la *3.1.1*) en la que se impongan condiciones adicionales al problema abductivo y/o a la solución abductiva puede resultar relevante la inclusión o no en el conjunto-solución de fórmulas que sí se infieren a partir de la teoría-base.

[55] Recordemos que una fórmula decimos es del tipo que indica su signo principal.

Definición 19 (Problema abductivo plural plano (*v. 3.1*))**.**
Dada una teoría-base $\bar{\Theta}$*, un* problema abductivo plural plano *(*v. 3.1*), cuyo* objeto del problema *es el conjunto de fórmulas* $\bar{\Pi}$ *(al que también denominamos* conjunto-problema*), es una situación en la que al menos una fórmula de* $\bar{\Pi}$ *no se infiere de* $\bar{\Theta}$ *en la relación de consecuencia deductiva* $\Vdash$*. De manera más formal podemos escribir* el definiens *como:*

$$\dot{\exists}\pi(\pi \in \bar{\Pi} \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Theta} \nVdash \pi)).$$

La anterior condición necesaria y suficiente parece excesivamente larga para hacerla intervenir en otras expresiones en las que ella será sólo una de sus partes, pero podemos encontrar una manera mucho más corta de expresar esa misma idea mediante un nuevo tipo de relación inferencial a la que denominaremos *deducción plural* y que simbolizaremos con el símbolo $\Vdash_D$:

Definición 20 (Relación inferencial deductiva plural)**.**
La relación inferencial deductiva plural *se define a partir de la relación inferencial deductiva singular de la siguiente manera:*

$$\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Phi} \textit{ si y sólo si } \dot{\forall}\varphi(\varphi \in \bar{\Phi} \mathbin{\dot{\Rightarrow}} (\bar{\Gamma} \Vdash \varphi)).$$

Veamos el resultado de negar el miembro de la derecha en esta equivalencia definicional:

$$\bar{\Gamma} \nVdash_D \bar{\Phi} \text{ si y sólo si } \dot{\exists}\varphi(\varphi \in \bar{\Phi} \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Gamma} \nVdash \varphi)).$$

Ahora está claro que la condición necesaria y suficiente de la anterior definición de problema abductivo es:

$$\bar{\Theta} \nVdash_D \bar{\Pi}.$$

Nuevamente no se puede asegurar la viabilidad de reducir la versión p-s a la s-s en cualquier caso, y las razones son las mismas que se adujeron en la subsección anterior. Sin embargo, si en dicha definición el conjunto-problema tiene cardinal unitario, la noción de problema abductivo (*v. 3.1*) se reduce a la que antes habíamos etiquetado como (*v. 1.1*) –eso sí, siempre que medie la correspondiente prueba de isomorfía–. Pero, además de esos casos hay otros en los que esta versión puede ser convertida en la correspondiente versión s-s: nuevamente todos aquéllos que se desenvuelvan en el marco de un sistema lógico en el que sea factible obtener una sola fórmula 'equivalente' a un conjunto de fórmulas. Lo que sí brinda esta nueva propuesta es la posibilidad de que el conjunto-problema tenga cardinal infinito, posibilidad que en una lógica clásica no puede transformarse en un conjunto unitario por carecer de conectores infinitarios. El resultado es análogo al ya estudiado para la solución abductiva plural:

$$card(\bar{\Phi}) \lneq card(\mathbb{N}) \dot{\Rightarrow} ((\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Phi}) \dot{\Leftrightarrow} (\bar{\Gamma} \Vdash \bigwedge \bar{\Phi})).$$

Y ello nos permite asegurar en el caso que ahora nos ocupa que:

$$card(\bar{\Pi}) \lneq card(\mathbb{N}) \dot{\Rightarrow} (((\bar{\Theta}, \bar{\Pi}) \Vdash_{Ao} \sigma) \dot{\Leftrightarrow} ((\bar{\Theta}, \bigwedge \bar{\Pi}) \Vdash_{ao} \sigma)).$$

Por otro lado, dado que toda lógica deductiva es reflexiva, a partir de la definición de problema abductivo podemos concluir que no puede ocurrir que su objeto sea un conjunto vacío, pues éste es consecuencia de cualquier otro conjunto (inclusive el propio vacío), de modo que no se satisfaría el citado requisito del fracaso inferencial.

Los tipos de problemas ahora son:

Definición 21 (Tipos de problemas abductivos plurales planos (*v. 3.1*))**.**
Dado un problema abductivo $\bar{\Theta} \nVdash_D \bar{\Pi}$*, decimos que éste es:*
· Débilmente consistente *si y sólo si* $\dot{\exists}\varphi((\varphi \in FOR(\mathcal{L})) \dot{\&} (\bar{\Pi} \nVdash \varphi))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* fuertemente inconsistente.
· Fuertemente consistente *si y sólo si* $\bar{\Pi} \nVdash \widetilde{\bot}$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* débilmente inconsistente.
· Débilmente novedoso[56] *si y sólo si* $\dot{\exists}\varphi((\varphi \in FOR(\mathcal{L})) \dot{\&} (\bar{\Theta} \cup \bar{\Pi} \nVdash \varphi))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* fuertemente anómalo.
· Fuertemente novedoso *si y sólo si* $\bar{\Gamma} \cup \bar{\Pi} \nVdash \widetilde{\bot}$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* débilmente anómalo.
· Conservador por partes de la novedad fuerte[57] *si y sólo si* $\dot{\forall}\bar{\Gamma}(((\bar{\Gamma} \subseteq \bar{\Theta}) \dot{\&} (\bar{\Gamma} \nVdash$

[56] También podríamos decir que el objeto del problema es *débilmente novedoso en esa teoría-base dentro del marco lógico indicado*. Análoga versión se podría dar de los conceptos que se delimiten en adelante a partir de un problema abductivo, pero dado que vuelve muy onerosa la lectura, no lo haremos. Lo hemos realizado en este caso para poner de manifiesto que la cualidad de novedad / anomalía es atribuible al objeto del problema en relación a los otros dos componentes señalados.

[57] En una lógica deductiva no tiene interés la formulación de la análoga propiedad para la consistencia débil, porque, tal como ya anunciamos, todo problema abductivo es tal que su teoría-base es al menos débilmente consistente.

$\widetilde{\bot})) \dot{\Rightarrow} (\bar{\Gamma} \cup \bar{\Pi} \nVdash \widetilde{\bot}))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no conservador por partes de la novedad fuerte.
· Formulado sobre una teoría-base fuertemente consistente *si y sólo si* $\bar{\Theta} \nVdash \widetilde{\bot}$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* formulado sobre una teoría-base débilmente inconsistente.
· Usual *si y sólo si* $card(\bar{\Theta}) \lneq card(\mathbb{N}) \dot{\&} (\bar{\Theta} \neq \varnothing \dot{\Rightarrow} \dot{\exists}\varphi((\varphi \in \bar{\Theta}) \dot{\&} (\nVdash \varphi)))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* inusual[58].

Y la nueva definición de inferencia abductiva queda de la siguiente manera:

Definición 22 (Inferencia abductiva ordinaria p-s plana // Solución abductiva ordinaria singular plana (*v. 3.1*))**.**
En la inferencia abductiva ordinaria p-s plana *(*v. 1*) dado un problema abductivo plural plano* $\bar{\Theta} \nVdash_D \bar{\Pi}$*, queremos obtener como* solución abductiva ordinaria singular plana *(*v. 3.1*) una fórmula* $\sigma \in FOR(\mathcal{L})$ *tal que el objeto del problema pueda inferirse mediante la relación inferencial de que se trate a partir de la teoría-base junto con la solución encontrada. De manera más formal podemos escribir el* definiens *como:*

$$(\bar{\Theta} \nVdash_D \bar{\Pi}) \dot{\&} (\bar{\Theta} \cup \{\sigma\} \Vdash_D \bar{\Pi}).$$

Ahora anotamos la inferencia abductiva como $(\bar{\Theta}, \bar{\Pi}) \Vdash_{Ao} \sigma$.

En cuanto a los tipos de soluciones abductivas indicamos sólo aquéllas que presentan alguna diferencia con los de la *versión 2.1*:

Definición 23 (Tipos de soluciones abductivas ordinarias plurales planas (*v. 3.1*))**.**
Sea $\bar{\Theta} \nVdash_D \bar{\Pi}$ *un problema abductivo plural plano y* σ *una solución abductiva ordinaria singular plana, decimos que ésta es:*
· Explicativa *si y sólo si* $\{\sigma\} \nVdash_D \bar{\Pi}$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no explicativa.
· Ingeniosa *si y sólo si* $\dot{\exists}\pi(\pi \in \bar{\Pi}\ \&\ \dot{\sim}\dot{\exists}\varphi(\pi \equiv \varphi \dot{\&} \varphi \in SUBFORM(\sigma)))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no ingeniosa.
· Deductivamente minimal *si y sólo si* $\dot{\sim}\dot{\exists}\sigma'((\sigma' \in SOL_{Ao}(\bar{\Theta} \nVdash_D \bar{\Pi})) \dot{\&} (\{\sigma\} \Vdash \sigma') \dot{\&} (\{\sigma'\} \nVdash \sigma))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* deductivamente no minimal.

58 De nuevo, ello ocurre en particular cuando $\bar{\Theta} = \varnothing$ así como cuando $card(\bar{\Theta}) \geq card(\mathbb{N})$.

· Deductivamente mínima *si y sólo si* $\dot{\forall}\sigma'((\sigma' \in SOL_{Ao}(\bar{\Theta} \nVdash_D \bar{\Pi})) \dot{\Rightarrow} (\{\sigma'\} \Vdash \sigma))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* deductivamente no mínima.

2.2.9. Abducción ordinaria p-p plana (*v. 4.1*)

La última propuesta aúna a las motivaciones de las dos anteriores y, en el sentido que ya hemos mencionado en las subsecciones correspondientes, las generaliza: las *versiones 3.1, 2.1 y 1.1* son, respectivamente, las clases de casos particulares en los que el objeto del problema, la solución abductiva o ambos son conjuntos unitarios (con las diferencias que ya sabemos que son irrelevantes por la isomorfía entre las relaciones inferenciales).

La definición de problema abductivo plural plano y los correspondientes tipos de problemas son idénticos a los que fueron presentados en la anterior subsección. En cuanto a la nueva definición de inferencia abductiva sólo requiere un pequeño cambio:

Definición 24 (Inferencia abductiva ordinaria p-p plana // Solución abductiva ordinaria plural plana (*v. 4.1*))**.**
En la inferencia abductiva ordinaria p-p plana *(*v. 4.1*) dado un problema abductivo plural plano* $\bar{\Theta} \nVdash \Pi$ *(cuyo objeto es el* conjunto-problema Π*), queremos obtener como* solución abductiva ordinaria plural plana *(*v. 4.1*) un conjunto de fórmulas* $\bar{\Sigma} \subseteq FOR(\mathcal{L})$ *(al que también denominamos* conjunto-solución*) tal que el citado problema deje de serlo (es decir, tal que el objeto del problema pueda inferirse mediante la relación inferencial de que se trate a partir de la teoría-base unida al conjunto-solución encontrado). De manera más formal podemos escribir el* definiens *como:*

$$(\bar{\Theta} \nVdash \Pi) \,\dot{\&}\, (\bar{\Theta} \cup \bar{\Sigma} \Vdash \Pi).$$

Ahora anotamos la inferencia abductiva como $(\bar{\Theta}, \Pi) \Vdash_{AO} \bar{\Sigma}$. Además, de las definiciones de problema abductivo y de solución abductiva adoptadas se sigue derivando que necesariamente se cumplen que $\bar{\Pi} \neq \varnothing$ y $\bar{\Sigma} \neq \varnothing$.

Por otro lado, la reducibilidad de la versión p-p a las otras tres podrá hacerse, además de los casos unitarios señalados, cuando el lenguaje cuente con el conjuntor clásico que ya hemos señalado anteriormente y el correspondiente conjunto de fórmulas que se quiere 'reescribir' sea finito:

$$((card(\bar{\Pi}) \lneq card(\mathbb{N})) \mathbin{\dot{\&}} (card(\bar{\Pi}) \lneq card(\mathbb{N}))) \mathbin{\dot{\Rightarrow}} (((\bar{\Theta}, \bar{\Pi}) \Vdash_{AO} \Sigma) \mathbin{\dot{\Leftrightarrow}}$$

$$((\bar{\Theta}, \pi) \Vdash_{aO} \bigwedge \bar{\Sigma}) \mathbin{\dot{\Leftrightarrow}} ((\bar{\Theta}, \bigwedge \bar{\Pi}) \Vdash_{Ao} \sigma) \mathbin{\dot{\Leftrightarrow}} ((\bar{\Theta}, \bigwedge \bar{\Pi}) \Vdash_{ao} \bigwedge \bar{\Sigma})).$$

En cuanto a los tipos de soluciones abductivas indicamos sólo aquéllas que presentan alguna diferencia con los de las anteriores versiones:

Definición 25 (Tipos de soluciones abductivas ordinarias plurales planas (*v. 4.1*)**).** *Sea* $\bar{\Theta} \nVdash_D \Pi$ *un problema abductivo plural plano y* $\bar{\Sigma}$ *una solución abductiva ordinaria plural plana, decimos que ésta es:*
· Explicativa *si y sólo si* $\bar{\Sigma} \nVdash_D \bar{\Pi}$*. En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no explicativa.
· Ingeniosa *si y sólo si* $\dot{\exists}\pi(\pi \in \bar{\Pi} \;\&\; \dot{\sim}\dot{\exists}\varphi(\pi \equiv \varphi \mathbin{\dot{\&}} \varphi \in \bigcup_{\sigma \in \bar{\Sigma}} SUBFORM(\sigma)))$*. En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no ingeniosa.
· Deductivamente minimal *si y sólo si* $\dot{\sim}\dot{\exists}\bar{\Sigma}'((\bar{\Sigma}' \in SOL_{AO}(\bar{\Theta} \nVdash_D \bar{\Pi})) \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Sigma} \Vdash_D \bar{\Sigma}') \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Sigma}' \nVdash_D \bar{\Sigma}))$*. En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* deductivamente no minimal.
· Deductivamente mínima *si y sólo si* $\dot{\forall}\bar{\Sigma}'((\bar{\Sigma}' \in SOL_{AO}(\bar{\Theta} \nVdash_D \bar{\Pi})) \mathbin{\dot{\Rightarrow}} (\bar{\Sigma}' \Vdash_D \bar{\Sigma}))$*. En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* deductivamente no mínima.

2.3. Aproximación intuitiva y tratamiento formal de la abducción sistémica

Hasta hace pocos años los estudios lógicos han adoptado principalmente una visión que liga a la abducción con la revisión del núcleo enunciativo de las teorías, proceso que encaja perfectamente con lo que en terminología kuhniana se denomina *ciencia normal*. Sin embargo, para muchos autores la abducción debe incluir todas las operaciones por las que se generan nuevas teorías (recordemos la tesis de comprehensión de Kapitan).

Por otra parte, superada ya ampliamente la Concepción Heredada, hoy no concebimos las teorías científicas de manera monolítica, sino que pensamos en complejos estructurados en los que existen tanto componentes nucleares como periféricos, pudiendo estos últimos tener distintos grados de especificidad. Sin duda, un componente que es nuclear y altamente inespecífico (de hecho compartido por numerosísimas estructuras teóricas) será su lógica subyacente o marco lógico[59]. Por supuesto, el proceso de cambio teórico impulsado por el hallazgo de un hecho sorprendente intentará antes un cambio en los elementos periféricos que en el marco lógico, pero quizás después de numerosos intentos infructuosos se dirija la mirada también en esta última dirección. A este proceso de ciencia revolucionaria, de nuevo en terminología kuhniana, nada puede aportar la abducción en su formulación tradicional (es decir, la abducción ordinaria), pero sí la abducción sistémica y holística

La noción de abducción sistémica (aunque bajo el rótulo de *abducción estructural*[60]) está documentada por primera vez en la tesis doctoral de Laurent Keiff [Kei07]. Éste, tras elaborar una modelización de la inferencia abductiva ordinaria dentro de las lógicas dialógicas, plantea que en algunos casos es posible y preferible alcanzar la conclusión realizando un cambio de la lógica subyacente (que en el caso de estas lógicas se concreta en el cambio de algunas de sus reglas[61]). Posteriormente a la citada tesis doctoral, esta noción ha sido desarrollada por autores como Ángel Nepomuceno ([NFFD10] y [NFSLFD12]) y Fernando Soler ([ST13]), ambos codirectores de la presente investigación.

Veamos informalmente en qué consiste este nuevo tipo de abducción. En la *inferencia abductiva sistémica*, dado un problema abductivo, queremos obtener como *solución abductiva sistémica* una *relación de consecuencia lógica alternativa* tal que la citada fórmula-problema pase a poderse inferir en esta nueva relación inferencial a partir de la teoría-base inicial. Lo que se pretende en este caso, dicho en terminología más clásica, es encontrar otra lógica subyacente distinta de la de partida que consiga justificar el hecho sorprendente.

En este nuevo enfoque de la abducción tampoco podemos asegurar que la solu-

[59] Entendemos este último concepto como la lógica que implícita o explícitamente –y, en este segundo caso, presentada formalmente o no–, recoge los procesos de inferencia lógica que se admiten en cierta disciplina de conocimiento (así pues, ni siquiera es requisito que se trate de un área científica).

[60] Cuando en la lectura de esta memoria se alcance la segunda parte se entenderá mejor que esa denominación podría colisionar con el sentido que allí se le dará al término *estructural*. Por otro lado, creemos que el vocablo *sistémico* apunta mejor hacia lo que se obtiene como conclusión de esta modalidad de la abducción, pues todo cambio de relación inferencial conlleva necesariamente un cambio de sistema lógico.

[61] En las lógicas dialógicas se distinguen tres tipos de reglas: operatorias, estructurales y estratégicas.

ción abductiva sea única y, desde luego, no existe un criterio que permita preferir un sistema lógico sobre los restantes para cualesquiera ámbitos y usos: a este respecto, sólo podemos decir que *una lógica subyacente modeliza mejor que otra ciertos aspectos en función de ciertos fines* (por lo tanto, que *una lógica subyacente es útil en cierto ámbito y para cierto propósito*).

Pongamos un ejemplo. En la tradición filosófica se ha reflexionado ampliamente acerca de lo necesario, lo posible y lo contingente, existiendo variados planteamientos en torno a estas cuestiones; señalemos, entre otros: concebir que todo lo necesario es posible, o bien que todo lo necesario ocurre de hecho, o que lo necesario es necesariamente necesario, o que lo posible es necesariamente posible... La Lógica Modal posee las herramientas formales necesarias para dar cuenta de estos diversos planteamientos, pero no nos puede decir que exista uno de ellos privilegiado que sea 'fiel retrato' de la realidad. De hecho, dependiendo del asunto intuitivo que estemos tratando así se mostrará más ventajoso un sistema u otro: si estamos en el ámbito epistemológico, asumir que todo lo necesario ocurre de hecho se traduce en que todo lo conocido es verdadero, lo cual no resulta del todo descabellado si nuestro concepto de conocimiento es suficientemente fuerte[62]; sin embargo, en el ámbito doxástico sería inaceptable, puesto que conllevaría que todo lo que creemos es igualmente verdadero; también en el ámbito de lo deóntico parece inadecuado, puesto que la idea de que todo lo obligatorio es realizado de hecho por los agentes nos conduce a modelizar un 'universo' en el que no existe la voluntad humana ni la libertad de acción (así pues, un ámbito muy distinto de aquél que estudia el Derecho o la Ética)[63].

Se podría pensar en la idea de parámetro inferencial de la abducción, ya apuntada por Atocha Aliseda, como un precedente remoto de la de Keiff, pero un análisis más detallado revela las profundas diferencias entre ambas ideas. Es cierto que Atocha Aliseda había considerado la posibilidad de que dicho parámetro fuese un sistema lógico no clásico, pero con ello se refería a que se pudiese plantear y resolver un problema abductivo en una lógica no clásica. Por su parte, la abducción sistémica conlleva intentar resolver un problema abductivo en otro sistema lógico distinto de aquél en el que se planteó originalmente (pudiendo ser alguno de ellos,

[62] Tomando en consideración la noción de conocimiento que Platón presenta en el *Teeteto* (201e-210a), *creencia verdadera justificada*, la clave estaría en las exigencias que se le impongan a la justificación.

[63] En cambio, sí sería preciso asumir en estos dos ámbitos que todo lo necesario es posible, con el fin de garantizar la racionalidad del corpus normativo y moral.

eventualmente, no clásico).

Como se puede ver, la denominación de *inferencia abductiva* está plenamente justificada en este nuevo enfoque, más aún si tenemos en cuenta la pretensión de que la abducción sea el tipo de inferencia mediante el cual se elaboran las teorías científicas. En ese sentido, la abducción sistémica viene a 'llenar' una de las grandes lagunas que se presentaban en dicho proyecto cuando sólo se consideraba la abducción ordinaria. Además, como se verá más adelante, los elementos coincidentes entre ambos modos de inferencia son suficientemente relevantes para que, aplicando el esquema aristotélico, se les considere dos especies distintas de un mismo género: en los dos modos citados de abducción partimos de un mismo problema abductivo, pero seguimos dos 'caminos' diferentes para resolver la situación –en la abducción ordinaria buscamos una revisión de la teoría-base (contando con el mismo marco lógico) de tal modo que la teoría resultante se convierta en suficientemente explicativa del hecho sorprendente en el mismo marco lógico, mientras que en la abducción sistémica el objetivo será encontrar un marco lógico alternativo (manteniendo la misma teoría-base) que consiga justificar el paso de la teoría-base al hecho sorprendente–. Por ejemplo, un problema abductivo inicialmente planteado en una lógica proposicional no clásica se podría resolver cambiando la relación inferencial de aquélla por la de la lógica proposicional clásica. Veamos un caso concreto:

Ejemplo 26.
Sea $\mathscr{L}_1$ un sistema de lógica proposicional no clásica, donde $\mathcal{L}_1$ es su lenguaje y $\Vdash_1$ la relación inferencial. Éste sistema comparte el mismo lenguaje que la lógica proposicional clásica (tanto sintaxis como semántica), pero no así su relación inferencial. En particular en dicha relación inferencial (sea presentada sintácticamente o semánticamente) no es universalmente aceptable la disyunción de dos fórmulas una negada y otra sin negar. Sean $\bar{\Theta} = \{p \vee \neg p \rightarrow q; q \rightarrow r; \neg r \vee s\}$ la teoría-base y $\pi = s$ el objeto del problema. No es posible encontrar en el sistema $\mathcal{L}_1$ una solución que sea fuertemente compatible, explicativa e ingeniosa. Sin embargo, si el intento de derivar π a partir de $\bar{\Theta}$ aconteciese en un sistema de lógica proposicional clásica $\mathscr{L}_2$ que coincide con el anterior en todo salvo en la relación inferencial $\Vdash_2$, la cual admite el principio del tercio excluso, entonces la situación dejaría de ser problemática. Luego una solución abductiva sistémica es esta última lógica.

Obviamente, dada la menor frecuencia de procesos tan altamente revolucionarios, la Historia de la Ciencia no nos puede proporcionar de momento muchos ejemplos a cuya modelización formal contribuya la mencionada noción de abducción sistémica. No obstante, en el paso de la Mecánica Clásica a la Mecánica Cuántica sí parece tener un papel decisivo (claro está que con el concurso de otras diversas operaciones epistémicas, entre ellas, por supuesto, la abducción ordinaria[64]: esta revolución supuso el abandono de la lógica clásica (bivalente) como marco lógico y la adopción de uno alternativo que se dio en llamar justamente *lógica cuántica* (trivalente).

No obstante, la noción de abducción sistémica se muestra especialmente útil en un ámbito ajeno a las Ciencias Empíricas, que es en el que se sitúa su uso arquetípico: nos referimos a lo que Edward N. Zalta ha denominado *Metafísica Computacional*. Por ejemplo, tomando como 'campo de experimentación' los quince sistemas modales normales de la Lógica Proposicional Monomodal que se obtienen mediante la combinación de los axiomas D, T, B, 4 y 5[65], y aprovechando la estructura de retículo de que se puede dotar a dicho conjunto, mediante la abducción sistémica podemos definir nuevas operaciones epistémicas que contribuyan a la labor de análisis y reconstrucción formal (naturalmente hipotética) de los sistemas lógicos subyacentes a ciertas concepciones filosóficas, así como al estudio diacrónico de dichas concepciones de un mismo autor o al estudio comparado entre las de diversos autores. En particular las obras de ciertos filósofos –bien tomándolas individualmente o bien asumiendo una síntesis 'ideal' de las mismas– que se interesaron por cuestiones metafísicas relativas a las modalidades aléticas o epistémicas, constituyen un buen material de trabajo para poner en práctica este programa.

Hagamos ahora una presentación más formal de los conceptos básicos que acabamos de explicar, de modo que serán más claramente reconocibles las similitudes y diferencias con la abducción ordinaria. En esta labor nos ajustaremos a lo que podemos considerar como la versión canónica de este nuevo tipo de abducción (en el sentido de que es la que toman, implícita o explícitamente, los escasos textos que hasta ahora abordan la cuestión).

---

[64] Probablemente, en la práctica científica ocurre que la mayoría de los contextos inferenciales en los que se están produciendo cambios teóricos son suficientemente ricos como para mezclar diversos tipos de inferencia, de modo que nuestros modelos formales sólo dan cuenta de forma directa de situaciones límites muy simplificadas.

[65] En concreto estos sistemas son (figura 3 (2.3)): K, KD (abreviadamente D), KT (también llamado KDT y, abreviadamente, T), KB (abreviadamente B), K4, K5, KDB, KD4, KD5, KTB (abreviadamente TB), KT4 (abreviadamente S4), KB4 (también llamado KB5 y KB45), K45, KD45, KTB4 (también llamado KT5, KDB4, KDB5, KTB5, KT45, KTB45 y, abreviadamente, S5).

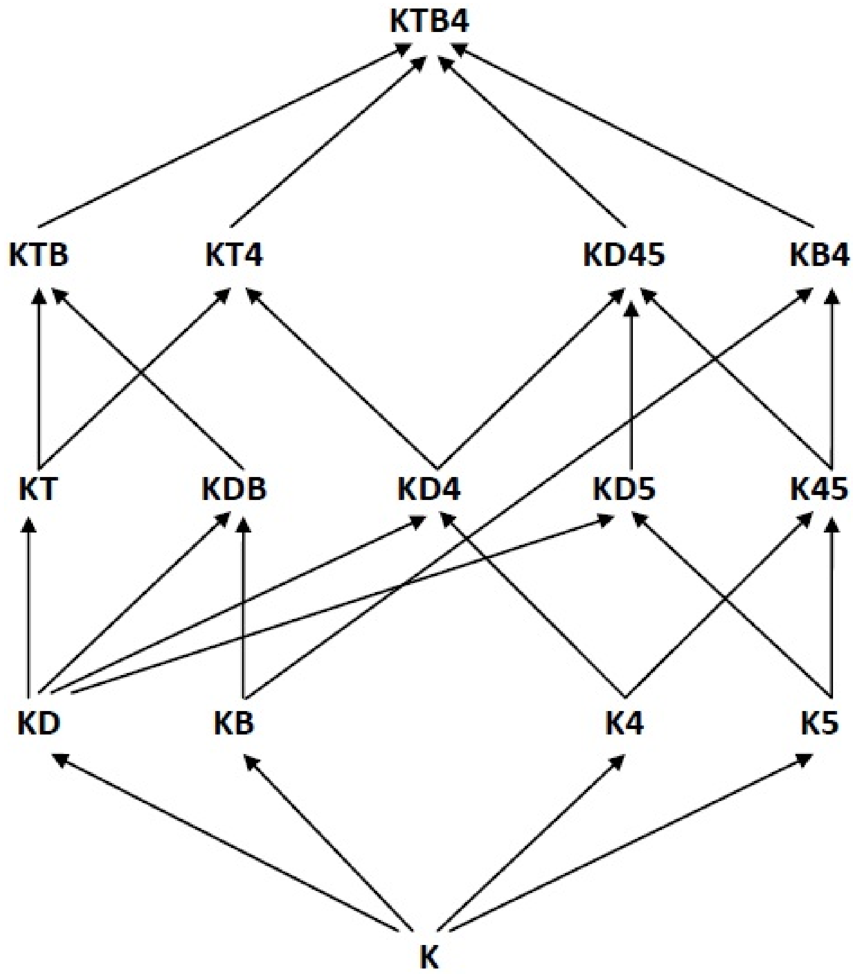

Fig. 3 (2.3): Diagrama de Hasse del retículo complementado formado por los quince sistemas modales normales de la Lógica Proposicional Monomodal que se obtienen mediante la combinación de los axiomas D, T, B, 4 y 5.

Definición 27 (Inferencia abductiva sistémica plural // Solución abductiva sistémica (*v. s.1*))**.**
En la inferencia abductiva sistémica *(*v. s.1*) dado un problema abductivo singular plano* $\bar{\Theta} \nVdash_1 \pi$*, queremos obtener como* solución abductiva sistémica[66] *(*v. s.1*) una* relación inferencial alternativa $\Vdash_2$ *(siendo el sistema lógico* $\mathscr{L}_2$ *cuya relación inferencial es* $\Vdash_2$ *en todo coincidente con el sistema lógico* $\mathscr{L}_1$ *cuya relación inferencial es* $\Vdash_1$*, salvo en las citadas relaciones de consecuencia lógica) tal que el*

[66] A la cual también denominaremos *marco lógico alternativo*.

*citado problema deje de serlo (es decir, tal que el objeto del problema pueda inferirse mediante la nueva relación inferencial a partir de la teoría-base inicial). De manera más formal podemos decir que una inferencia abductiva sistémica (*v. s.1*) es* $(\Vdash_1, \bar{\Theta}, \pi) \Vdash_{as} (\Vdash_2)$*, y esto es equivalente a:*

$$(\bar{\Theta} \nVdash_1 \pi) \mathbin{\dot{\&}} (\bar{\Theta} \Vdash_2 \pi).$$

En esta definición se exige que la solución abductiva sistémica sea una relación inferencial cuyo sistema lógico tenga en común con el sistema inicial tanto la sintaxis como la semántica del lenguaje. Obviamente, a partir de esta definición se deduce que $\Vdash_1 \neq \Vdash_2$, puesto que les distingue al menos un elemento (es decir una inferencia); así pues, los dos sistemas lógicos no son el mismo. Además, ahora entre las premisas figura la relación inferencial de partida, toda vez que ésta será distinta de la que se obtiene como conclusión (en la abducción ordinaria no era necesario explicitarla porque se mantenía constante en todo el proceso de inferencia abductiva).

En los textos que estudian la abducción sistémica se observa que la relación inferencial sobre la que elaboran la investigación está dada en todos los casos en el plano sintáctico. Además, ambas relaciones sintácticas son formuladas sobre un mismo lenguaje y cada una de ellas es caracterizada por un conjunto consistente de axiomas (o postulados) independientes –es decir, por un conjunto consistente y decidible de fórmulas del lenguaje que son independientes entre sí y tal que mediante la aplicación a ellas de las reglas de inferencia se puedan generar todos los teoremas del sistema–. Así pues, la situación (a menudo planteada implícitamente) es la siguiente: sea $A_1 \subseteq FOR(\mathcal{L})$ tal que A_1 *es decicible*, $\dot{\forall}\alpha_1(\alpha_1 \in A_1 \Rightarrow A_1 \setminus \{\alpha_1\} \nvdash_1 \alpha_1)$ y $CON(A_1) = \{\varphi_1 \ / \ \varphi_1 \in FOR(\mathcal{L}) \ \& \ A_1 \vdash_1 \varphi_1\} = TEO(\vdash_1)$, e igualmente sea $A_2 \subseteq FOR(\mathcal{L})$ tal que A_2 *es decicible*, $\dot{\forall}\alpha_2(\alpha_2 \in A_2 \Rightarrow A_2 \setminus \{\alpha_2\} \nvdash_2 \alpha_2)$ y $CON(A_2) = \{\varphi_2 \ / \ \varphi_2 \in FOR(\mathcal{L}) \ \& \ A_2 \vdash_2 \varphi_2\} = TEO(\vdash_2)$; el cumplimiento de $A_1 \subsetneq A_2$, garantiza (gracias a la monotonía de la relación de consecuencia deductiva) que $TEO(\vdash_1) \subsetneq TEO(\vdash_2)$.

Esta manera de enfocar la abducción estructural conlleva varias dificultades:

1. Las relaciones de deducibilidad de los sistemas lógicos pueden tener o no asociado un cálculo y, en el caso de tenerlo, éste pude adoptar distintos tipos de presentación (axiomático, de secuentes, deductivo-natural, de tableros, de resolución...), con numerosas variantes estilísticas dentro de cada uno de ellos,

por lo que no siempre es posible compararlos a partir de sus conjuntos de axiomas.

2. Si nos restringimos a sistemas presentados axiomáticamente, éstos deben coincidir en el conjunto de sus reglas de inferencia para poder así comparar convenientemente sus conjuntos de axiomas.

3. En particular, habrá que garantizar que en ambos sistemas el conjunto de axiomas es independiente (y, por supuesto, consistente).

4. Sabemos que a menudo diferentes conjuntos de axiomas independientes de un mismo lenguaje generan exactamente el mismo conjunto de teoremas.

Por tanto, el planteamiento presentado en las referencias consultadas permite caracterizar un cierto tipo de abducción sistémica; pero, es posible generalizar esta noción atendiendo a las siguientes indicaciones:

1. En primer lugar, permitiendo que la relación inferencial pueda estar dada semánticamente o sintácticamente, y en ambos casos que pueda poseer un cálculo asociado o no.

2. No exigiendo que el marco lógico alternativo comparta la sintaxis y la semántica del lenguaje con el marco lógico inicial, sino que será suficiente que ambos sean lingüísticamente compatibles de forma restringida. De esta manera, el planteamiento precedente puede ser visto como la clase de casos especiales en los que el cambio de sistema lógico es una 'evolución muy conservativa' y no 'el paso a una propuesta más o menos divergente'.

3. Cuando nos interese comparar las correspondientes relaciones de consecuencia lógica de sendos sistemas lógicos cuyas sintaxis y semántica del lenguaje son respectivamente idénticas, con el fin de no tener que hacer consideraciones acerca de los postulados de una y otra relación, compararemos el conjunto de todos los elementos de las relaciones inferenciales (lo cual, sin duda, es una condición más fuerte o igual que la relativa al conjunto de todos sus teoremas).

4. Dado que la relación inferencial alternativa no está sujeta inicialmente a una restricción tan fuerte como lo estaba anteriormente (y, por lo tanto, el número

de potenciales candidatos crece significativamente en relación a las propuestas precedentes), el espacio de potenciales soluciones sistémicas ya no puede establecerse tácitamente, sino que debe señalarse expresamente (bien sea por enumeración, bien sea por comprensión a partir de ciertas propiedades estructurales).

Expongamos a continuación los desarrollos teóricos que nos permitirán presentar con precisión nuestra propuesta. Comenzamos exponiendo qué entendemos por sistema lógico pleno.

Definición 28 (Sistema lógico formal[67])**.**
Un sistema lógico formal es una tetra-upla ordenada $\mathscr{L} = (\mathbb{S}_i, \mathbb{S}_e, \vdash, \vDash)$ *en la que las dos primeas componentes conforman el plano lingüístico y las dos siguientes el plano inferencial. A su vez, en cada una de esas parejas la primera componente es la dimensión sintáctica de ese plano y la segunda componente es su dimensión semántica.*

Diremos que es un *sistema lógico pleno* si ninguna de sus componentes es vacua, en caso contrario diremos que es un *sistema lógico no pleno*. Si la segunda componente es vacua diremos que es un *sistema lógico no interpretado* y si además también es vacua la cuarta diremos que es un *sistema puramente logístico*. Nuestra generalización de la noción de abducción sistémica se presentará para sistemas lógicos plenos, dado que queremos garantizar que el cambio de lenguaje no ha supuesto un cambio del sentido del problema abductivo.

Al par ordenado $\mathcal{L} = (\mathbb{S}_i, \mathbb{S}_e)$ lo denominamos el *lenguaje formal* del sistema lógico, pero si la segunda componente del plano lingüístico es vacua diremos que se trata de un *lenguaje formal no interpretado*, o mejor de un *código formal*.

$\mathbb{S}_i$ es la sintaxis formal del lenguaje e incluye el alfabeto formal –acogiendo tanto los símbolos primitivos como los derivados, y en cualquiera de los dos casos tanto los símbolos lógicos como los no lógicos de cualesquiera de los tipos– y la gramática formal –incluyendo las reglas de formación de cadenas admitidas, las reglas de determinación de cada tipo de cadenas (especialmente de las cadenas privilegiadas)– y las reglas auxiliares de simplificación notacional, y en los tres casos tanto de símbolos primitivos como de símbolos derivados).

[67] En adelante, lo llamaremos simplemente *sistema lógico*.

$\mathcal{S}_e$ es la semántica formal del lenguaje y en ella se recoge todo el mecanismo interpretativo del lenguaje (incluyendo las funciones de interpretación de símbolos constantes, las funciones de asignación de símbolos variables, las reglas de evaluación de símbolos lógicos y la designación de la clase de estructuras interpretativas sobre los que se interpreta el lenguaje[68]).

$\vdash$ es una relación de consecuencia lógica dada sintácticamente (es decir, que involucra exclusivamente al aspecto sintáctico del lenguaje), la cual habitualmente, pero no necesariamente, está provista de un cálculo –que incluirá reglas de derivación (al menos estructurales y operatorias y, eventualmente, estratégicas y auxiliares) y, según el caso, también axiomas– y, en el caso de que posea éste, que puede estar provista también un procedimiento automático de derivación (en el cual se pueden incluir reglas heurísticas).

$\vDash$ es una una relación de consecuencia lógica dada semánticamente, la cual es formulada involucrando la interpretación de los elementos lingüísticos, pudiendo estar o no provista de un cálculo cuyas reglas de inferencia trabajan con las evaluaciones establecidas en la dimensión semántica del plano lingüístico. Muchos autores incluyen toda la componente lingüístico-semántica dentro de esta última (la inferencial-semántica), pero ello sería poco recomendable en nuestro estudio porque no permitiría distinguir adecuadamente ciertas situaciones en las que la primera de las componentes señaladas coincide pero no la segunda.

Veamos ahora una de las definiciones cruciales para poder presentar nuestra propuesta generalizadora:

Definición 29 (Compatibilidad lingüística global de sistemas lógicos)**.**
Dados los sistemas lógicos plenos $\mathscr{L}_1 = (\mathcal{S}_{i_1}, \mathcal{S}_{e_1}, \vdash_1, \vDash_1)$ *y* $\mathscr{L}_2 = (\mathcal{S}_{i_2}, \mathcal{S}_{e_2}, \vdash_1, \vDash_1)$*, ambos interpretados sobre la misma clase de estructuras* $\mathfrak{M}$*, decimos que el segundo de dichos sistemas es* lingüísticamente compatible de forma global *respecto del primero en la citada clase de estructuras interpretativas si y sólo si* $\forall\varphi_1\exists\varphi_2\forall\mathscr{M}$ $((\varphi_1 \in FOR(\mathcal{L}_1)\ \&\ \varphi_2 \in FOR(\mathcal{L}_2)\ \&\ \mathscr{M} \in \mathfrak{M}) \Rightarrow \|\varphi_1\|_{\mathscr{M},\mathcal{L}_1} = \|\varphi_2\|_{\mathscr{M},\mathcal{L}_2})$*, siendo* $\|\varphi_i\|_{\mathscr{M},\mathcal{L}_j}$ *el valor semántico de la fórmula* φ_i *en el modelo* $\mathscr{M}$ *otorgado por la semántica del lenguaje* $\mathcal{L}_j$*.*

A partir de lo establecido en esta definición podemos construir al menos una

[68] En la literatura lógica las estructuras sobre las que se puede interpretar cierto lenguaje son denominadas *estructuras interpretativas homólogas al lenguaje*, indicándose con ello que el lenguaje y las estructuras tienen el mismo *tipo de similaridad*.

correspondencia de traducción global ($\mathcal{T}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2}$) entre los lenguajes $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, a saber: $\mathcal{T}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2}$: $FOR(\mathcal{L}_1) \longrightarrow FOR(\mathcal{L}_2)$, cuyos elementos son aquéllos que satisfacen que $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2} \Leftrightarrow (\varphi_1 \in \bar{\Gamma}_1 \subseteq FOR(\mathcal{L}_1)\ \&\ \varphi_2 \in FOR(\mathcal{L}_2)\ \&\ \forall \mathscr{M}(\|\varphi_1\|_{\mathscr{M},\mathcal{L}_1} = \|\varphi_2\|_{\mathscr{M},\mathcal{L}_2}))$. La correspondencia de traducción tiene naturaleza metalingüística, lo cual está en sintonía con el carácter metalógico de la abducción sistémica (que no es un mecanismo inferencial 'interno' de un sistema lógico, sino 'interlógico'). Si los lenguajes del sistema lógico inicial y final coinciden, entonces una posible correspondencia de traducción es, obviamente, la función identidad. En este último caso diremos que los sistemas lógicos son *homolingüísticos*.

Adoptando el anterior requisito de compatibilidad lingüística global, que vincula la capacidad expresiva (o expresividad) de dos lenguajes lógicos formales, se permite que un problema abductivo que se presenta en un sistema con cierto lenguaje pueda ser resuelto en otro sistema con un lenguaje distinto garantizado que no se ha alterado el sentido inicial del problema abductivo. A la clase de los sistemas lógicos plenos lingüísticamente compatibles de forma global con $\mathscr{L}_i$ para la clase de estructuras interpretativas $\mathfrak{M}$ la podemos designar como $LCG(\mathscr{L}_i, \mathfrak{M})$ –así pues, $LCG(\mathscr{L}_i, \mathfrak{M})$ es una subclase de $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}}$, que es la clase de todos los sistemas lógicos plenos interpretados sobre la clase de estructuras $\mathfrak{M}$–.

Volviendo nuestra mirada nuevamente sobre la anterior definición, constatamos que tomar esa cualidad como condición requerida es menos exigente que la condición que subyace en el enfoque canónico de la abducción sistémica; sin embargo, teniendo en cuenta cuál es nuestro propósito (garantizar que al intentar resolver el problema original en el nuevo sistema lógico la traducción no haya cambiado su sentido) aún parece demasiado fuerte. Realmente la elección de la anterior o de la siguiente característica como condición a imponer va a depender de cierta postura filosófica en torno a las teorías científicas: si se defiende un cierto contextualismo, según el cual el sentido de una cuestión es dependiente también de todo el 'contexto' teórico, entonces la opción sería la anterior. No obstante, aquí vamos a presentar la inferencia abductiva sistémica empleando la condición análoga pero restringido a un ámbito local puesto que esta opción exige un poco más de elaboración formal y, por tanto, a partir de ella se puede generar la otra posibilidad con sólo realizar algunos cambios evidentes. Otro motivo es que en Lógica, donde los significados se establecen 'por decreto', podemos encontrar ejemplos para los que bastaría dicha condición local. Pensemos en el que ha aparecido anteriormente para ilustrar la abducción sistémica: en el problema abductivo no ocurren el conjuntor ni el bicondicionador, por lo que no parece necesario tener que encontrar una correspondencia de traducción para todo el lenguaje; de hecho existe al menos una correspondencia de traducción y además ésta es obvia, puesto que ambos sistemas lógicos tienen el mismo lenguaje, pero no sería exigible ese hecho. Para ver más claramente esta cuestión, pensemos que el sistema lógico solución podría haber tenido un lenguaje cuyo alfabeto fuese unitario (siendo su único conector la barra de Sheffer o la flecha de Peirce), por lo que se infiere que los sistemas lógicos inicial y final podría tener intersección vacía entre sus alfabetos (aunque cualquier fórmula del lenguaje original puede ser reescrita en el final).

Presentamos pues la ya anunciada definición del requisito restringido a las $\mathcal{L}_1$-fórmulas involucradas en el problema:

Definición 30 (Compatibilidad lingüística local de sistemas lógicos)**.**
Dados los sistemas lógicos plenos $\mathscr{L}_1 = (\mathcal{S}_{i_1}, \mathcal{S}_{e_1}, \vdash_1, \models_1)$ *y* $\mathscr{L}_2 = (\mathcal{S}_{i_2}, \mathcal{S}_{e_2}, \vdash_1, \models_1)$*, ambos interpretados sobre la misma clase de estructuras* $\mathfrak{M}$*, y dado el conjunto de fórmulas* $\bar{\Gamma}_1 \subseteq FOR(\mathcal{L}_1)$*, decimos que el segundo de dichos sistemas es* lingüísticamente compatible de forma local *respecto del primero en la citada clase de estructuras interpretativas y restringido al citado conjunto de fórmulas (del primer lenguaje) si y sólo si* $\forall\varphi_1\exists\varphi_2\forall\mathscr{M}((\varphi_1 \in FOR(\mathcal{L}_1)\ \&\ \varphi_2 \in FOR(\mathcal{L}_2)\ \&\ \mathscr{M} \in \mathfrak{M}) \Rightarrow \|\varphi_1\|_{\mathscr{M},\mathcal{L}_1} = \|\varphi_2\|_{\mathscr{M},\mathcal{L}_2})$*, siendo nuevamente* $\|\varphi_i\|_{\mathscr{M},\mathcal{L}_j}$ *el valor semántico de la fórmula* φ_i *en el modelo* $\mathscr{M}$ *otorgado por la semántica del lenguaje* $\mathcal{L}_j$*.*

A partir de lo establecido en esta definición podemos construir al menos una correspondencia de traducción local ($\mathcal{T}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Gamma}_1}$) entre los lenguajes $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ que está restringida al conjunto de fórmulas $\bar{\Gamma}_1 \subseteq FOR(\mathcal{L}_1)$, a saber:
$\mathcal{T}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Gamma}_1}\colon \bar{\Gamma}_1 \longrightarrow FOR(\mathcal{L}_2)$, cuyos elementos satisfacen que $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Gamma}_1}$ $\Leftrightarrow (\varphi_1 \in \bar{\Gamma}_1 \subseteq FOR(\mathcal{L}_1)\ \&\ \varphi_2 \in FOR(\mathcal{L}_2)\ \&\ \forall\mathscr{M}(\|\varphi_1\|_{\mathscr{M},\mathcal{L}_1} = \|\varphi_2\|_{\mathscr{M},\mathcal{L}_2}))$.

Hablando con precisión, $\mathcal{T}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Gamma}_1}$ es una función cuyo argumento es una fórmula y no permite que se introduzca como «input» un conjunto de fórmulas. Sin embargo, no es difícil definir a partir de la anterior una función que sí lo permita: $\bar{\Delta}_1 \subseteq \bar{\Gamma}_1 \subseteq FOR(\mathcal{L}_1) \Rightarrow \bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Gamma}_1}(\bar{\Delta}_1) = \{\psi \mathbin{/} \varphi \in \bar{\Delta}_1\ \&\ (\varphi, \psi) \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Gamma}_1}\}$.

A la clase de los sistemas lógicos plenos lingüísticamente compatibles de forma local respecto de $\mathscr{L}_i$ para la clase de estructuras interpretativas $\mathfrak{M}$ y el conjunto de fórmulas $\bar{\Gamma}_i \subseteq FOR(\mathcal{L}_i)$ la podemos designar como $LCL(\mathscr{L}_i, \bar{\Gamma}_i, \mathfrak{M})$ –por tanto, $LCL(\mathscr{L}_i, \bar{\Gamma}_i, \mathfrak{M})$ es una subclase de $LCG(\mathscr{L}_i, \mathfrak{M})$–.

Ahora ya estamos en condiciones de poder dar una nueva definición de la inferencia abductiva sistémica, la cual la formularemos para un problema abductivo plural con el deseo de ser más general también en este punto.

Definición 31 (Inferencia abductiva sistémica plural // Solución abductiva sistémica (*v. s.1.1*)). [69]
En la inferencia abductiva sistémica plural *(*v. s.1.1*) tenemos:*
a) *un problema abductivo plural* $\bar{\Theta}_1 \not\Vdash_{D_1} \bar{\Pi}_1$ *formulado en un sistema lógico pleno* $\mathscr{L}_1 = (\mathcal{S}_{i_1}, \mathcal{S}_{e_1}, \vdash_{D_1}, \models_{D_1})$*, cuyo lenguaje* $\mathcal{L}_1$ *se interpreta sobre una clase de estructuras* $\mathfrak{M}$*, y*
b) *un* espacio de potenciales soluciones abductivas sistémicas $\mathfrak{E}$*, siendo este espacio una estructura cuyo conjunto asociado es* $c\_asoc(\mathfrak{E}) = \mathcal{E} \subseteq LCL(\mathscr{L}_1, \bar{\Psi}_1, \mathfrak{M})$*, siendo* $LCL(\mathscr{L}_1, \bar{\Psi}_1, \mathfrak{M})$ *el conjunto de los sistemas lógicos plenos que son lingüísticamente compatibles de forma local respecto de* $\mathscr{L}_1$ *en la clase de estructuras interpretativas* $\mathfrak{M}$ *para el conjunto de fórmulas* $\bar{\Psi}_1 = \bar{\Theta}_1 \cup \bar{\Pi}_1$.
A partir de esta situación queremos obtener como solución abductiva sistémica *(*v. s.1.1*) una* relación inferencial alternativa $\Vdash_{D_2}$ *tal que:*
1) $\Vdash_{D_2}$ *sea la relación de consecuencia lógica de un sistema lógico pleno* $\mathscr{L}_2 = (\mathcal{S}_{i_2}, \mathcal{S}_{e_2}, \vdash_{D_2}, \models_{D_2})$*,*
2) $\mathscr{L}_2$ *sea miembro de* $\mathcal{E}$*, siendo* $\mathcal{T}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}\colon \bar{\Psi}_1 \longrightarrow FOR(\mathcal{L}_2)$ *una correspondencia de traducción local para dicho conjunto de fórmulas,*
3) $\bar{\Pi}_2 = \bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}(\bar{\Pi}_1)$ *pueda inferirse a partir de* $\bar{\Theta}_2 = \bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}(\bar{\Theta}_1)$ *mediante* $\Vdash_{D_2}$.
*De manera más formal podemos decir que una inferencia abductiva sistémica (*v. s.1.1*) es* $((\Vdash_{D_1}, \bar{\Theta}_1, \bar{\Pi}_1), \mathfrak{E}) \Vdash_{as} (\Vdash_{D_2})$*, y esto es equivalente a:*

$$(\bar{\Theta}_1 \not\Vdash_{D_1} \bar{\Pi}_1) \dot{\&} (\bar{\Theta}_2 \Vdash_{D_2} \bar{\Pi}_2)$$

Y análogamente a lo que hicimos en la abducción ordinaria, el conjunto de todas las soluciones sistémicas del problema $\bar{\Theta}_1 \not\Vdash_{D_1} \bar{\Pi}_1$ lo anotaremos como $SOL_{as}(\bar{\Theta}_1 \not\Vdash_{D_1} \bar{\Pi}_1)$. El espacio de potenciales soluciones abductivas sistémicas ($\mathfrak{E}$) podría tener como caso límite, si la estructura que posee no lo impide, su conjunto asociado vacío (aunque, obviamente, en ese caso no sería posible encontrar solución abductiva sistémica alguna).

[69] El calificativo de *singular* o *plural* en este tipo de inferencia abductiva sólo depende de cómo sea el problema abductivo, por lo que no haremos distinción análoga para la solución.

También podemos distinguir diferentes tipos de soluciones en la inferencia abductiva sistémica:

Definición 32 (Tipos de soluciones abductivas sistémicas (*v. s.1.1*)).
Sea $\bar{\Theta}_1 \not\Vdash_{D_1} \bar{\Pi}_1$ *un problema abductivo plural y* $\Vdash_{D_2}$ *una solución abductiva sistémica –lo que conlleva en particular que* $(\bar{\Theta}_2 \Vdash_{D_2} \bar{\Pi}_2)\ \dot{\&}\ \bar{\Pi}_2 = \bar{\mathfrak{T}}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}(\bar{\Pi}_1)$ $\dot{\&}\ \bar{\Theta}_2 = \bar{\mathfrak{T}}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}(\bar{\Theta}_1)$*, con* $\bar{\Psi}_1 = \bar{\Theta}_1 \cup \bar{\Pi}_1$*–, decimos que ésta es:*
· No completamente trivial *si y sólo si* $\dot{\exists}\bar{\Gamma}_2\dot{\exists}\bar{\Phi}_2((\bar{\Gamma}_2, \bar{\Phi}_2 \subseteq FOR(\mathcal{L}_2))\ \dot{\&}\ (\bar{\Gamma}_2 \not\Vdash_{D_2} \bar{\Phi}_2))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* completamente trivial.
· Paraconsistente *si y sólo si* $\dot{\exists}\bar{\Gamma}_2\dot{\exists}\bar{\Phi}_2((\bar{\Gamma}_2, \bar{\Phi}_2 \subseteq FOR(\mathcal{L}_2))\ \dot{\&}\ (\bar{\Gamma}_2 \Vdash_{D_2} \{\widetilde{\bot_2}\})\ \dot{\&}\ (\bar{\Gamma}_2 \not\Vdash_{D_2} \bar{\Phi}_2))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no paraconsistente.
· Débilmente compatible *si y sólo si* $\dot{\exists}\bar{\Phi}_2((\bar{\Phi}_2 \subseteq FOR(\mathcal{L}_2))\ \dot{\&}\ (\bar{\Theta}_2 \not\Vdash_{D_2} \bar{\Phi}_2))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* fuertemente incompatible.
· Fuertemente compatible *si y sólo si* $\bar{\Theta}_2 \not\Vdash_{D_2} \{\widetilde{\bot_2}\}$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* débilmente incompatible.
· Conservadora por partes de la compatibilidad fuerte *si y sólo si* $\dot{\forall}\bar{\Gamma}_1(((\bar{\Gamma}_1 \subseteq \bar{\Theta}_1)\ \dot{\&}\ (\bar{\Gamma}_1 \not\Vdash_{D_1} \{\widetilde{\bot_1}\})) \dot{\Rightarrow} (\bar{\mathfrak{T}}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}(\bar{\Gamma}_1) \not\Vdash_{D_2} \{\widetilde{\bot_2}\}))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no conservadora por partes de la compatibilidad fuerte.
· Explicativa *si y sólo si* $\not\Vdash_{D_2} \bar{\Pi}_2$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no explicativa.
· Deductivamente minimal *si y sólo si* $\dot{\sim}\dot{\exists} \Vdash_{D_{2'}} ((\Vdash_{D_{2'}} \in SOL_{as}(\bar{\Theta}_1 \not\Vdash_{D_1} \bar{\Pi}_1))\ \dot{\&}\ (\Vdash_{D_{2'}} \subsetneq \Vdash_{D_2}))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* deductivamente no minimal.
· Deductivamente mínima *si y sólo si* $\dot{\forall} \Vdash_{D_{2'}} ((\Vdash_{D_{2'}} \in SOL_{as}(\bar{\Theta}_1 \not\Vdash_{D_1} \bar{\Pi}_1)) \dot{\Rightarrow} (\Vdash_{D_2} \subsetneq \Vdash_{D_{2'}}))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* deductivamente no mínima.

2.4. Aproximación intuitiva y tratamiento formal de la abducción holística

No son pocas las situaciones en las que puede ser conveniente para la resolución de un problema abductivo realizar simultáneamente las dos 'operaciones' ya estudiadas: expansión / revisión de la teoría-base y cambio del sistema lógico; sin embargo, no tenemos conocimiento de que se haya presentado un tratamiento unificado de ambos tipos de abducción. Entre sus motivaciones intuitivas estaría la siguiente: es posible que en alguna ocasión optar sólo por la revisión de la teoría-base conduzca a tener que eliminar una o varias proposiciones de las que no deseamos desprendernos (al menos antes de explorar otras posibilidades), debido a, entre otros factores, su concordancia con la intuición, o su alto grado de contrastación, o su carácter nuclear para una o varias teorías (piénsese, por ejemplo, en enunciados acerca de la simultaneidad de ciertos eventos que se encuentran en la Mecánica Clásica); por otro lado, un cambio sólo en el sistema lógico puede conllevar en ciertas ocasiones asumir un marco lógico especialmente complejo y poco estudiado.

A este nuevo tipo de inferencia abductiva, que aglutina a los dos tipos ya estudiados, lo podríamos llamar *abducción holística*, puesto que permite cambio en todos los elementos que son susceptibles de contribuir a la resolución del problema abductivo: la teoría-base y la relación inferencial. Así pues, la abducción ordinaria y la abducción sistémica representarán a dos clases de casos particulares en los que sólo se actúa sobre uno de los citados componentes (si queremos poner de manifiesto esta circunstancia podríamos hablar de *abducción holística ordinaria* y *abducción holística sistémica*).

En la sección anterior citamos el paso de la Mecánica Clásica a la Mecánica Cuántica como un ejemplo histórico en el que el problema abductivo requirió del cambio de marco lógico; y allí mismo señalamos que ese tuvo lugar en concurrencia con otras operaciones epistémicas. Ahora ya podemos decir que, en realidad, dicho proceso se ajusta mejor a la modelización mediante la abducción holística, por cuanto no sólo supuso un cambio de lógica subyacente sino también la revisión de la teoría-base.

Una gran cantidad de ejemplos de este nuevo tipo de inferencia proceden tanto de distintos fragmentos de la lógica proposicional clásica como de múltiples posibles extensiones conservativas de la misma. Veamos un ejemplo del primer tipo (es decir, un fragmento del sistema lógico mencionado) por ser más sencilla su presentación (en la medida de que no hay que introducir 'ingredientes' nuevos):

Ejemplo 33.
Sea $\mathscr{L}_1$ un sistema lógico tal que $\mathcal{L}_1$ es un lenguaje proposicional cuyo alfabeto consta de un conjunto de átomos $ATOM_{\mathcal{L}_1} = \{p, \neg p, q, \neg q, r, \neg r, s, \neg s, t, \neg t, ...\}$ ($ATOM_{\mathcal{L}_1}$ es un conjunto infinito numerable que consta de variables proposicionales y sus contradictorias) y de un conjunto de conectores $CON_{\mathcal{L}_1} = \{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ (es decir, es un conjunto de conectores que no permite obtener todos los de la lógica proposicional clásica, de ahí que algunos autores lo adjetiven como 'incompleto' o 'insuficiente). La gramática de $\mathcal{L}_1$ es la restricción de la correspondiente al lenguaje de la lógica proposicional a dicho alfabeto (por supuesto, en el conjunto $FOR(\mathcal{L}_1)$ no aparecerán fórmulas no atómicas negadas ni se puede definir como símbolo derivado el conjuntor clásico). La relación inferencial $\Vdash_1$ es la correspondiente a la lógica clásica restringida a $FOR(\mathcal{L}_1)$. Sean $\bar{\Theta}_1 = \{p \rightarrow \neg q; r \rightarrow \neg s; q \vee (s \vee t)\}$ la teoría-base y $\pi_1 = t$ el objeto del problema. No es posible encontrar en el sistema $\mathcal{L}_1$ una solución que sea fuertemente compatible, explicativa e ingeniosa. Sin embargo, sí existe una tal solución (a saber, $\sigma_2 = p \wedge r$) si este mismo problema se intenta resolver en el sistema $\mathscr{L}_2$ que coincide con el anterior en todo salvo en que $CON_{\mathcal{L}_2} = \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ (y, por supuesto, los cambios que de ello se deriven en $FOR(\mathcal{L}_2)$, así como en su semántica y en la relación inferencial $\Vdash_2$). Así pues, ahora la solución es $(p \wedge r, \Vdash_2)$.

La formulación lógica de la abducción holística también la haremos directamente para un problema abductivo plural y una solución abductiva holística cuya componente ordinaria sea también plural. Además, fijándonos bien, fácilmente alcanzamos la conclusión de que realmente tenemos dos tipos de inferencia holística, a las cuales podremos denominar ordinario-sistémica y sistémico-ordinaria, dependiendo del orden de 'actuación' con el que se proceda para alcanzar la conclusión.

Comenzando con el primero de los dos citados, podemos describirlo en lenguaje natural diciendo que en la *inferencia abductiva holística ord-sist p-p*, dado un *problema abductivo plural*, queremos obtener como *solución abductiva holística ord-sist plural* un par ordenado cuya primera componente es el *conjunto-expansor* (que será una parte del conjunto asociado al *espacio de potenciales soluciones abductivas ordinarias* del primer sistema lógico) y cuya segunda componente es el *marco lógico alternativo* (que será un elemento del *espacio de potenciales soluciones abductivas sistémicas*), tal que la traducción del objeto del problema pase a ser deducible en el marco lógico alternativo a partir de la traducción de la unión de la teoría-base y del conjunto-solución.

Definición 34 (Inferencia abductiva holística ord-sist p-p // Solución abductiva holística ord-sist plural (*v. h.1.1*)). [70]
En la inferencia abductiva holística ord-sist p-p *(*v. h.1.1*) tenemos:*
a) *un problema abductivo plural* $\bar{\Theta}_1 \nVdash_{D_1} \bar{\Pi}_1$ *formulado en un sistema lógico pleno* $\mathscr{L}_1 = (\mathcal{S}_{i_1}, \mathcal{S}_{e_1}, \vdash_{D_1}, \vDash_{D_1})$*, cuyo lenguaje* $\mathcal{L}_1$ *se interpreta sobre una clase de estructuras* $\mathfrak{M}$*, y*
b) *un* espacio de potenciales soluciones abductivas holísticas $(\mathscr{E}_1, \mathfrak{F}^{\mathfrak{E}})$*, siendo la primera componente de este par ordenado una estructura cuyo conjunto asociado es* $c\_asoc(\mathscr{E}_1) = E_1 \subseteq \wp(FOR(\mathcal{L}_1))$ *y cuya segunda componente es una familia de estructuras, cada una de las cuales tiene como conjunto asociado un conjunto de sistemas lógicos:* $\mathfrak{F}^{\mathfrak{E}} = \{\mathfrak{E} \,/\, c\_asoc(\mathfrak{E}) = \mathcal{E} \subseteq LCL(\mathscr{L}_1, \bar{\Xi}_1, \mathfrak{M}) \;\&\; \bar{\Xi}_1 \subseteq E_1\}$*, siendo* $LCL(\mathscr{L}_1, \bar{\Xi}_1, \mathfrak{M})$ *el conjunto de los sistemas lógicos plenos que son lingüísticamente compatibles de forma local respecto de* $\mathscr{L}_1$ *en la clase de estructuras interpretativas* $\mathfrak{M}$ *para el conjunto de fórmulas* $\bar{\Xi}_1 \subseteq E_1$*, satisfaciendo además que* $\forall x(E_x \subseteq \wp(FOR(\mathcal{L}_x)) \;\Rightarrow !\exists y(\mathcal{E}_y \subseteq LCL(\mathscr{L}_x, \bar{\Xi}_x, \mathfrak{M})))$.
A partir de esta situación queremos obtener como solución abductiva holística ord-sist plural *(*v. h.1.1*) un par* $(\bar{\Sigma}_1, \Vdash_{D_2})$ *tal que:*
1) $\bar{\Sigma}_1 \subseteq E_1$ *es el conjunto-expansor,*
2) $\Vdash_{D_2}$*, denominada* relación inferencial alternativa*, sea la relación de consecuencia lógica de un sistema lógico pleno* $\mathscr{L}_2 = (\mathcal{S}_{i_2}, \mathcal{S}_{e_2}, \vdash_{D_2}, \vDash_{D_2})$*,*
3) $\mathscr{L}_2$ *sea miembro de* $\mathcal{E}$*, siendo* $\mathcal{T}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}\colon \bar{\Psi}_1 \longrightarrow FOR(\mathcal{L}_2)$ *una correspondencia de traducción local para el conjunto de fórmulas* $\bar{\Psi}_1 = \bar{\Theta}_1 \cup \bar{\Pi}_1 \cup \bar{\Sigma}_1$*,*
4) $\bar{\Pi}_2 = \bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}(\bar{\Pi}_1)$ *pueda inferirse a partir de la unión de los conjuntos* $\bar{\Theta}_2 = \bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}(\bar{\Theta}_1)$ *y* $\bar{\Sigma}_2 = \bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}(\bar{\Sigma}_1)$ *mediante* $\Vdash_{D_2}$.
*De manera más formal podemos decir que una inferencia abductiva sistémica ord-sist p-p (*h. 1.1*) es* $((\Vdash_{D_1}, \bar{\Theta}_1, \bar{\Pi}_1), (\mathscr{E}_1, \mathfrak{F}^{\mathfrak{E}})) \Vdash_{ah} (\bar{\Sigma}_1, \Vdash_{D_2})$*, y esto equivale a:*

$$(\bar{\Theta}_1 \nVdash_{D_1} \bar{\Pi}_1) \;\dot{\&}\; (\bar{\Theta}_2 \cup \bar{\Sigma}_2 \Vdash_{D_2} \bar{\Pi}_2).$$

De todo ello se infiere que, a diferencia de lo que ocurría en ocasiones anteriores, el conjunto expansor de la teoría-base puede ser vacío (y, con ello, la teoría-base

[70] El calificativo *p-p* en este tipo de inferencia abductiva sólo depende de cómo sea el problema abductivo y la componente ordinaria de la solución, pero no de cómo sea la componente sistémica de la solución.

expandida en el lenguaje inicial puede ser igual a la de partida) y el marco lógico alternativo puede coincidir con el inicial, aunque, obviamente, no se pueden dar ambas circunstancias simultáneamente. Por otro lado, dado que la solución abductiva ordinaria y la solución abductiva sistémica no tienen por qué ser únicas, *a fortiori* la solución abductiva holística tampoco lo será. Además, el espacio de potenciales soluciones abductivas holísticas podría, como caso límite, tener los dos componentes vacíos, pero en ese caso no sería posible encontrar solución abductiva holística alguna.

Los diferentes tipos de soluciones en esta modalidad son:

Definición 35 (Tipos de soluciones abductivas holísticas ord-sist plurales (*v. h.1.1*)). *Sea* $\bar{\Theta}_1 \nVdash_{D_1} \bar{\Pi}_1$ *un problema abductivo plural y* $(\bar{\Sigma}_1, \Vdash_{D_2})$ *una solución abductiva holística ord-sist plural –lo que conlleva en particular que* $(\bar{\Theta}_2 \cup \bar{\Sigma}_2 \Vdash_{D_2} \bar{\Pi}_2)\ \dot{\&}\ \bar{\Pi}_2 = \bar{\mathfrak{T}}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}(\bar{\Pi}_1)\ \dot{\&}\ \bar{\Theta}_2 = \bar{\mathfrak{T}}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}(\bar{\Theta}_1)\ \dot{\&}\ \bar{\Sigma}_2 = \bar{\mathfrak{T}}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}(\bar{\Sigma}_1)$, *con* $\bar{\Psi}_1 = \bar{\Theta}_1 \cup \bar{\Pi}_1 \cup \bar{\Sigma}_1$*–, decimos que ésta es:*

· No completamente trivial *si y sólo si* $\dot{\exists}\bar{\Gamma}_2\dot{\exists}\bar{\Phi}_2((\bar{\Gamma}_2, \bar{\Phi}_2 \subseteq FOR(\mathcal{L}_2))\ \dot{\&}\ (\bar{\Gamma}_2 \nVdash_{D_2} \bar{\Phi}_2))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* completamente trivial.

· Paraconsistente *si y sólo si* $\dot{\exists}\bar{\Gamma}_2\dot{\exists}\bar{\Phi}_2((\bar{\Gamma}_2, \bar{\Phi}_2 \subseteq FOR(\mathcal{L}_2))\ \dot{\&}\ (\bar{\Gamma}_2 \Vdash_{D_2} \{\widetilde{\bot}_2\})\ \dot{\&}\ (\bar{\Gamma}_2 \nVdash_{D_2} \bar{\Phi}_2))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no paraconsistente.

· Débilmente consistente *si y sólo si* $\dot{\exists}\bar{\Phi}_2((\bar{\Phi}_2 \in FOR(\mathcal{L}_2))\ \dot{\&}\ (\bar{\Sigma}_2 \nVdash_{D_2} \bar{\Phi}_2))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* fuertemente inconsistente.

· Fuertemente consistente *si y sólo si* $\bar{\Sigma}_2 \nVdash_{D_2} \{\widetilde{\bot}_2\}$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* débilmente inconsistente.

· Débilmente compatible *si y sólo si* $\dot{\exists}\bar{\Phi}_2((\bar{\Phi}_2 \subseteq FOR(\mathcal{L}_2))\ \dot{\&}\ (\bar{\Theta}_2 \cup \bar{\Sigma}_2 \nVdash_{D_2} \bar{\Phi}_2))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* fuertemente incompatible.

· Fuertemente compatible *si y sólo si* $\bar{\Theta}_2 \cup \bar{\Sigma}_2 \nVdash_{D_2} \{\widetilde{\bot}_2\}$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* débilmente incompatible.

· Conservadora por partes de la compatibilidad fuerte *si y sólo si* $\dot{\forall}\bar{\Gamma}_1(((\bar{\Gamma}_1 \subseteq \bar{\Theta}_1)\ \dot{\&}\ (\bar{\Gamma}_1 \nVdash_{D_1} \{\widetilde{\bot}_1\})) \dot{\Rightarrow} ((\bar{\mathfrak{T}}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}(\bar{\Gamma}_1)) \cup \bar{\Sigma}_2 \nVdash_{D_2} \{\widetilde{\bot}_2\}))$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no conservadora por partes de la compatibilidad fuerte.

· Explicativa *si y sólo si* $\bar{\Sigma}_2 \nVdash_{D_2} \bar{\Pi}_2$. *En el caso de que no se satisfaga esta condición necesaria y suficiente diremos que es* no explicativa.

El segundo de los dos modos citados podemos describirlo en lenguaje natural diciendo que en la *inferencia abductiva holística sist-ord p-p*, dado un problema de igual naturaleza que en el anterior caso, queremos obtener como *solución abductiva holística sist-ord plural* un par ordenado cuya primera componente es el *marco lógico alternativo* (que será un elemento del *espacio de potenciales soluciones abductivas sistémicas*) y cuya segunda componente es el *conjunto-expansor* (que será una parte del conjunto asociado al *espacio de potenciales soluciones abductivas ordinarias* del segundo sistema lógico), tal que la traducción del objeto del problema pase a ser deducible en el marco lógico alternativo a partir de la unión del conjunto-solución y de la traducción de la teoría-base.

Definición 36 (Inferencia abductiva holística sist-ord p-p // Solución abductiva holística sist-ord plural (*v. h.1.2*))**.**
En la inferencia abductiva holística sist-ord p-p *(*v. h.1.2*) tenemos:*
a) *un problema abductivo plural* $\bar{\Theta}_1 \nVdash_{D_1} \bar{\Pi}_1$ *formulado en un sistema lógico pleno* $\mathscr{L}_1 = (\mathcal{S}_{i_1}, \mathcal{S}_{e_1}, \vdash_{D_1}, \vDash_{D_1})$*, cuyo lenguaje* $\mathcal{L}_1$ *se interpreta sobre una clase de estructuras* $\mathfrak{M}$*, y*
b) *un* espacio de potenciales soluciones abductivas holísticas $(\mathfrak{E}, \mathscr{F}^{\mathscr{E}_2})$*, siendo la primera componente de este par ordenado una estructura cuyo conjunto asociado es* $c\_asoc(\mathfrak{E}) = \mathcal{E} \subseteq LCL(\mathscr{L}_1, \bar{\Psi}_1, \mathfrak{M})$*, con* $LCL(\mathscr{L}_1, \bar{\Psi}_1, \mathfrak{M})$ *el conjunto de los sistemas lógicos plenos que son lingüísticamente compatibles de forma local respecto de* $\mathscr{L}_1$ *en la clase de estructuras interpretativas* $\mathfrak{M}$ *para el conjunto de fórmulas* $\bar{\Psi}_1 = \bar{\Theta}_1 \cup \bar{\Pi}_1$*; y la segunda componente es una familia de estructuras, cada una de las cuales tiene como conjunto asociado un conjunto de fórmulas:* $\mathscr{F}^{\mathscr{E}_2} = \{\mathscr{E}_2 \ / \ c\_asoc(\mathscr{E}_2) = E_2 \subseteq \wp(FOR(\mathcal{L}_2)) \ \& \ \mathscr{L}_2 = (\mathcal{S}_{i_2}, \mathcal{S}_{e_2}, \vdash_{D_2}, \vDash_{D_2}) \ \& \ \mathscr{L}_2 \in LCL(\mathscr{L}_1, \bar{\Psi}_1, \mathfrak{M})\}$*, satisfaciendo además que* $\forall x(\mathscr{L}_x \in \mathcal{E} \ \Rightarrow !\exists y(E_y \subseteq FOR(\mathcal{L}_x)))$.
A partir de esta situación queremos obtener como solución abductiva holística sist-ord plural *(*v. h.1.2*) un par* $(\Vdash_{D_2}, \bar{\Sigma}_2)$ *tal que:*
1) $\Vdash_{D_2}$*, denominada* relación inferencial alternativa*, sea la relación de consecuencia lógica de un sistema lógico pleno* $\mathscr{L}_2 = (\mathcal{S}_{i_2}, \mathcal{S}_{e_2}, \vdash_{D_2}, \vDash_{D_2})$*,*
2) $\bar{\Sigma}_2 \subseteq E_2$ *es el conjunto-expansor,*

3) $\mathscr{L}_2$ *sea miembro de* $\mathcal{E}$*, siendo* $\mathcal{T}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}\colon \bar{\Psi}_1 \longrightarrow FOR(\mathcal{L}_2)$ *una correspondencia de traducción local para el conjunto de fórmulas* $\bar{\Psi}_1$*,*
4) $\bar{\Pi}_2 = \bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}(\bar{\Pi}_1)$ *pueda inferirse a partir de la unión de los conjuntos* $\bar{\Theta}_2 = \bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_2|\bar{\Psi}_1}(\bar{\Theta}_1)$ *y* $\bar{\Sigma}_2\bar{\Sigma}_2 \subseteq E_2$ *mediante* $\Vdash_{D_2}$*.*
*De manera más formal podemos decir que una inferencia abductiva sistémica sist-ord p-p (*h. 1.2*) es* $((\Vdash_{D_1}, \bar{\Theta}_1, \bar{\Pi}_1), (\mathfrak{E}, \mathscr{E}_2)) \Vdash_{ah} (\Vdash_{D_2}, \bar{\Sigma}_2)$*, y esto equivale a:*

$$(\bar{\Theta}_1 \nVdash_{D_1} \bar{\Pi}_1) \,\dot{\&}\, (\bar{\Theta}_2 \cup \bar{\Sigma}_2 \Vdash_{D_2} \bar{\Pi}_2).$$

Nuevamente el conjunto expansor de la teoría-base puede ser vacío (y, con ello, la teoría-base expandida en el lenguaje final puede ser igual a la traducción de la teoría-base de partida) y el marco lógico alternativo puede coincidir con el inicial, aunque, obviamente, no se pueden dar ambas circunstancias simultáneamente.

En cuanto a los tipos de soluciones en esta modalidad, todos ellos coinciden exactamente con los indicados al hacer el estudio del modo inferencial anterior.

Parte II

Análisis Estructural Lógico

(capítulos 3 a 5)

Capítulo 3

Análisis estructural de la deducción

Para profundizar en el tratamiento lógico de la relación inferencial abductiva ordinaria cuyo parámetro inferencial es la relación deductiva, acudiremos al llamado Análisis Estructural Lógico. Éste hunde sus raíces en los primeros intentos de estudiar desde un punto de vista abstracto la naturaleza de la deducción, teniendo como principales precedentes las investigaciones de Alfred Tarski sobre la relación de consecuencia lógica deductiva (especialmente [Tar83], [Tar86] y [Tar02]) y los trabajos de Gerhard Gentzen sobre el cálculo de secuentes y el cálculo deductivo-natural[1] (de forma particular [Gen69]), aunque algunas de sus ideas seminales se pueden retrotraer hasta Bernard Bolzano[2]. Pero, sin duda es tras un artículo de Dana Scott [Sco71] cuando se produce la cristalización del Análisis Estructural Lógico como una metodología de estudio transversal a distintas relaciones de consecuencia lógica.

En la obra citada, Scott [Sco71] afirma que "una noción de inferencia lógica puede ser caracterizada completamente por sus propiedades combinatorias básicas, expresadas por reglas estructurales". El propio título del artículo en el que se declaran tales aspiraciones, *On Engendering an Illusion of Understanding*, pone de manifiesto las enormes expectativas que sobre este enfoque se pusieron por parte de algunos lógicos a partir de los años 70. Con ese entusiasmo se intentó encontrar la diferencia específica (en el sentido de la expresión aristotélica) entre la inferencia deductiva y otros tipos de inferencia lógica (por ejemplo, en Gabbay [Gab94] y Dosen *et al.* [DSH93]).

[1] De hecho la noción de regla estructural se la debemos a él.
[2] Para más detalles en torno a la cuestión remitimos a [vP14].

En nuestra opinión el objetivo debe ser más modesto: el Análisis Estructural permite señalar propiedades (que, por motivos obvios, adjetivaremos como *estructurales*) que poseen las diferentes nociones de consecuencia lógica con independencia del lenguaje lógico concreto que adopte el sistema lógico. A partir de dichas propiedades, podemos acercarnos al conocimiento de la verdadera naturaleza de una relación inferencial, contribución que, claro está, necesita completarse con el concurso de resultados obtenidos mediante otros enfoques y correspondientes a múltiples ingredientes, tanto de naturaleza sintáctica como de naturaleza semántica (no debemos olvidar que algunas de las características de un sistema lógico vienen determinadas por otros componentes del mismo distintos de su relación de consecuencia lógica: la cardinalidad o la capacidad de representar entidades de distintos órdenes que tiene el lenguaje lógico, la semántica de que se le dote, las reglas que regulen sus operadores lógicos...). Igualmente las propiedades estructurales permiten la determinación de similitudes y diferencias entre las relaciones inferenciales en un nivel muy general –lo cual permitirá, en particular, establecer clasificaciones que permitan ‘orientarse’ en el ya muy ‘frondoso árbol de las lógicas’–.

Estas pretensiones más modestas también han tenido reflejo en la producción lógica: tanto en relación con la pretensión de iluminara la naturaleza de una relación de consecuencia lógica (citamos los trabajos de Etchemendy [Etc88] y [Etc90] y [Etc08]), como en cuanto metodología para organizar el ya amplio abanico de lógicas subestructurales, de forma particular las no monótonas (por ejemplo, en el capítulo de Dov Gabbay [Gab85] y en las referencia de David Makinson [Mak94, Mak03, Mak05]) y la inferencia por defecto(por ejemplo, en Kraus *et al.* [KLM]). Su uso se ha ido incorporando también en textos introductorios a las lógicas no clásicas por sus innegables bondades pedagógicas (por ejemplo, [Pal09]), pero en el seno de la comunidad lógica se instaló durante el último lustro del siglo XX y el primero del siglo XXI un cierto pesimismo en cuanto a la consecución de sus objetivos iniciales (claramente sobreestimados). Esto provocó que algunos de sus impulsores se fuesen progresivamente desinteresando por este enfoque y entre ellos destaca el caso de Dov Gabbay (véase el libro de Ohlbach y Reyle [OR99b]), proceso que corrió paralelo a la hipertrofia de sistemas lógicos (a menudo hechos desde ámbitos cercanos a la Informática) junto a un inferior esfuerzo por encontrar sus elementos comunes y dilucidar su naturaleza. Cual movimiento pendular, esa tendencia parece que vuelve a cambiar de sentido y, así, vuelven estas cuestiones generales a estar en el ‘punto de mira’ de las investigaciones lógicas (valgan como ejemplos las aportaciones de [Per08] y [Ang15] y la celebración este mismo año del *Second Taiwan Philosophical Logic Colloquium* bajo el título *Structural Analysis of Non-Classical Logics* [YDL16]).

Desde el punto de vista del Análisis Estructural, la lógica abductiva ordinaria se situará entre las llamadas lógicas subestructurales –es decir, entre los sistemas lógicos cuya relación inferencial no satisface al menos una de las propiedades estructurales que se consideran necesarias para estar ante una relación de consecuencia deductiva–. Como veremos a lo largo de los dos próximos capítulos, su estudio puede hacer más precisa y enriquecer enormemente nuestra concepción acerca de este particular modo de inferencia lógica.

3.1. Cuestiones conceptuales y notacionales previas

Antes de entrar en ese estudio estructural haremos algunas aclaraciones respecto del significado de algunos conceptos y símbolos, evitando así hacer un uso acrítico, obscuro o impreciso de los mismos. Ello contribuye a la inteligibilidad del texto de las dos secciones principales del presente capítulo y de todas las secciones de los dos siguientes, e igualmente a la 'justificación' de ciertas opciones terminológicas y notacionales implementadas en ellos.

En el Análisis Estructural Lógico se adopta una perspectiva muy general, intentando que las descripciones sean aplicables a clases de sistemas lógicos lo más amplias posible. Con este fin, mediante el símbolo "$\Longrightarrow$" designaremos una relación de consecuencia lógica, sea o no de tipo deductivo, que no ha sido fijada como una en particular, aunque sobre ella se pueden haber establecido ciertas propiedades que debe cumplir. Más adelante introduciremos otros símbolos que se distinguen del anterior mediante la yuxtaposición de una o más marcas en posición superíndice o/y subíndice; así, por ejemplo: "$\Longrightarrow^{\mathtt{C}}$", "$\Longrightarrow^{*}$", "$\Longrightarrow^{*\mathtt{C}}$", "$\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$", "$\Longrightarrow^{\bullet *}_{m}$",... Su sentido será debidamente delimitado en el momento en que los utilicemos por primera vez.

Usaremos los símbolos "$\Vdash_{\_}$", "$\models_{\_}$" y "$\vdash_{\_}$" –donde en lugar de "$\_$" irá la etiqueta que corresponda ("d", "D", "ao", "aO", "Ao" o "AO")– si queremos indicar que se trata de un tipo de relación inferencial particular. La diferencia entre los tres símbolos inferenciales es la siguiente: cuando queramos indicar que se trata de una relación de consecuencia, pero no deseemos precisar si está dada semánticamente o sintácticamente, usaremos el símbolo “$\Vdash_{\_}$”; en el caso de que sí se quiera indicar dicho carácter, usaremos “$\models_{\_}$” y “$\vdash_{\_}$” para la versión semántica y sintáctica, respectivamente. La letra “d” como subíndice de la relación inferencial quiere señalar que se trata de la deducción clásica (la cual a menudo se omite cuando por el contexto esté claro de cuál se trata) y la correspondiente mayúscula indica que es la relación inferencial deductiva plural. La relación de consecuencia abductiva ordinaria s-s plana es simbolizada por “$\Vvdash_{ao}$”, la análoga s-p por “$\Vvdash_{aO}$”, la p-s por “$\Vvdash_{Ao}$” y la p-p por “$\Vvdash_{AO}$”.

A menudo las proposiciones metalingüísticas cuyo símbolo principal es el operador metalingüístico “$\sim$” y cuyo símbolo secundario es un relator inferencial serán escritas ‘fusionando’ ambos símbolos en uno solo; por ejemplo: “$\not\Longrightarrow$”, “$\not\Longrightarrow^{\mathtt{C}}$”, “$\not\Longrightarrow^{*}$”, “$\not\Longrightarrow^{*\mathtt{C}}$”, “$\not\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$”, “$\not\Longrightarrow^{\bullet *}_{m}$”, “$\nVdash_{\_}$”, “$\not\models_{\_}$”, “$\nvdash_{\_}$”...

En un sistema lógico el símbolo de consecuencia lógica es de naturaleza metalingüística (es decir, no pertenece al lenguaje de ese sistema sino al metalenguaje con el que hablamos de dicho sistema), de modo que la representación simbólica que establece que de ciertas premisas se sigue cierta conclusión es un enunciado del citado nivel.

En la literatura lógica se consideran varios tipos de reglas, en particular se distinguen las denominadas estructurales de las denominadas operatorias (u operativas)[3]. La diferencia más visible estriba en que cada regla operatoria es específica de uno o varios operadores lógicos[4], ocurriendo necesariamente dichos símbolos constructores en al menos una de las fórmulas involucradas en la regla; por su parte, las reglas estructurales *sensu stricto* se formulan sin referencia a operador lógico alguno. No obstante, la diferencia fundamental entre ambos tipos de reglas está en su distinta naturaleza: las reglas operatorias representan leyes de composición interna sobre el conjunto de fórmulas del lenguaje correspondiente[5] (por tanto, representan esquemáticamente una multiplicidad de instancias de una relación inferencial (definida sintácticamente) que son justificables de manera inmediata[6]); así pues, las

[3] En los cálculos lógicos también se pueden establecer otros tipos de reglas de las que aquí no hablaremos, tales como las estratégicas y las auxiliares.

[4] Es decir, de al menos un símbolo con el que se pueda construir una nueva cadena de símbolos admitida a partir de otra cadena de símbolos admitida, en ambos casos correspondiente a un mismo lenguaje.

[5] No en vano se les puede llamar también *reglas de trasformación (de fórmulas)*, *reglas de reescritura (de fórmulas)* o *reglas de producción (de fórmulas)*.

[6] Entiéndase esta expresión en el sentido de *justificables en un solo paso*.

reglas operatorias son necesariamente inherentes a un sistema lógico concreto y contribuyen a su 'regulación interna'. Por su parte, las reglas estructurales describen 'patrones' muy generales de las relaciones de consecuencia lógica. En particular, muchos de esos patrones se refieren a transformaciones básicas de esquemas de inferencias en otros esquemas de inferencias (es decir, representan a una multiplicidad de transformaciones básicas sobre las instancias de una clase de relaciones inferenciales definidas sobre un mismo lenguaje). Como veremos en los dos próximos capítulos, las reglas estructurales también pueden describir transformaciones básicas permitidas de esquemas de una relación inferencial a partir de otros esquemas de relaciones inferenciales distintas, a condición de que todas ellas satisfagan el mencionado requisito de estar definidas sobre el mismo lenguaje. Así pues, aunque las reglas estructurales habitualmente se usan para modelizar la relación inferencial propia de un sistema lógico, también pueden usarse para expresar vínculos entre relaciones inferenciales de sistemas lógicos distintos que tienen en común su lenguaje.

En relación con los dos párrafos precedentes, hagamos algunas precisiones. A veces se dice que tal operador lógico tiene cierta propiedad (por ejemplo, que el conjuntor tiene la propiedad conmutativa) y se codifica ello mediante la correspondiente regla de reescritura. Esto es plenamente compatible con todo lo dicho anteriormente y no hay que entenderlo como una forma figurada de hablar o como un abuso del lenguaje, puesto que en realidad se trata de un esquema de enunciado metalógico que expresa una propiedad relacional, la cual remite a la posibilidad de transformar de cierta manera predeterminada un esquema de fórmula en otro esquema de fórmula (idea que concuerda plenamente con la de regla operatoria que hemos expuesto anteriormente). Así pues, no hay licencia alguna en hablar de propiedades o de reglas de los operadores lógicos y en este texto usaremos ambas palabras como sinónimas. Del mismo modo, hablaremos indistintamente de reglas estructurales de la relación de consecuencia lógica o de propiedades estructurales que satisface dicha relación inferencial.

Sin embargo, lo que sí resulta nocivo es no distinguir entre el carácter de las reglas operatorias y el de las reglas estructurales; a esta confusión contribuye notablemente el que a menudo se use para ambos tipos una notación de apariencia similar (aunque, visto en profundidad, algunos de sus símbolos coincidentes no tienen el mismo significado). Así ocurre, de hecho, con la raya horizontal alargada (a la manera de una raya fraccionaria) que se usa con la finalidad de separar las precondiciones de las postcondiciones en la notación estándar ‘vertical’ de las reglas: en el caso de las reglas operatorias dicha raya no es otra cosa que un signo de consecuencia lógica (es decir, un signo metalingüístico) en nada distinto de los que en notación horizontal habitualmente representamos mediante alguno de los símbolos indicados en uno de los párrafos precedentes. Pero en el caso de las reglas estructurales dicha raya tiene naturaleza meta-metalingüística (las propiedades estructurales son, de hecho, esquemas de enunciados meta-metalingüísticos que señalan propiedades relacionales entre relaciones de consecuencia lógica[7]). Así pues, si quisiésemos evitar confusiones, a las reglas estructurales las podríamos llamar más propiamente *metareglas*; sin embargo, aunque sea un uso abusivo del lenguaje, frecuentemente, cuando el contexto permita averiguarlo sin dificultad o no resulte decisivo para la cuestión que se aborda, y con el fin de hacer más fluida la lectura del texto, eliminaremos el prefijo *meta* de las palabras en las que debiera aparecer.

Algunos autores, a menudo de manera tácita, parecen no permitir la existencia de reglas estructurales que contengan símbolos inferenciales negados. A tenor del planteamiento general que acabamos de exponer, ésta parece una restricción innecesaria y, como se mostrará en los dos capítulos siguientes, con efectos ‘mutiladores’. Es cierto que en una regla operatoria, en tanto que regla de reescritura, no parece tener sentido la anterior posibilidad (dentro de un sistema lógico sólo nos interesan los modos en que se pueden reescribir las fórmulas modificando los símbolos que en ellas ocurren, pero no tiene interés conocer algunas de las infinitas maneras en las que ello no se puede hacer). Ahora bien, tal como ya hemos dicho, las reglas estructurales representan ‘patrones’ muy generales de las relaciones de consecuencia lógica, y a veces esos ‘patrones’ muy generales codifican ‘situaciones negativas’ (o, si se quiere decir con más precisión, a veces la regularidad de una cierta relación de consecuencia lógica está en la satisfacción de cierto tipo de enunciados meta-metalingüísticos negativos, situación que viene representada por ciertos esquemas de meta-metaenunciados cuyo operador principal será, por tanto, un negador meta-metalingüístico). En esta investigación nos liberamos de esta limitación y sus consecuencias son altamente fructíferas.

Todas las letras que aparezcan en las reglas estructurales estarán tácitamente tomadas universalmente (mostraremos explícitamente el cuantificador existencial me-

[7] Esta naturaleza meta-metalógica es si cabe más evidente cuando las precondiciones involucran relaciones inferenciales de sistemas lógicos distintos, puesto que en ese caso las reglas ‘hablan’ de relaciones entre lógicas distintas.

talingüístico cuando sea éste el caso). Por supuesto, en la presentación de las reglas frecuentemente aparecerán conectores meta-metalingüísticos: lo habitual es usar el símbolo “;” en lugar del conjuntor meta-metalingüístico y aquí hemos seguido esa costumbre en la notación vertical, pero en la notación horizontal usaremos “$\dot{\&}$”. Recordemos que los símbolos que usaremos para los operadores metalingüísticos y meta-metalingüísticos (negador, disyuntor inclusivo, disyuntor exclusivo, implicador, coimplicador, cuantificador universal, cuantificador existencial y cuantificador unitario serán) serán los que ya indicamos en el segundo capítulo. Eventualmente pueden aparecer también, usados como signos metalingüísticos, los símbolos de la Teoría de Conjuntos (en particular, los de pertenencia, inclusión, igualdad y las operaciones conjuntistas).

Nuestra presentación de todas las propiedades estructurales se hará en el ya citado formato de reglas –con el conjunto (necesariamente finito) de precondiciones anotado sobre la raya horizontal y el conjunto (igualmente finito) de postcondiciones anotado bajo ésta). Cuando queramos escribir en notación horizontal dichas reglas estructurales, obtendremos una meta-metaproposición implicativa[8] (por ello la función de la citada raya horizontal la cumplirá el citado implicador meta-metalingüístico que simbolizamos como “$\dot{\Rightarrow}$”). Esa naturaleza implicativa que tienen las reglas desde un punto de vista ‘descriptivo’ se manifiesta en todas sus cualidades: en particular, ellas representan la garantía de que asumir la ‘globalidad’ de sus precondiciones conlleva asumir la ‘globalidad’ de sus postcondiciones [9]. Otra consecuencia de la citada naturaleza es que, dada una regla estructural, podemos leerla en ‘sentido directo’ (es decir, de la manera antes indicada) o bien en ‘sentido contrapuesto’ (es decir, concibiendo que la negación meta-metalingüística[10] de la ‘globalidad’ de las postcondiciones conlleva la negación meta-metalingüística de la ‘globalidad’ de las precondiciones). Contempladas las reglas desde un punto de vista manipulativo-transformacional, éstas sólo pueden (pero no necesariamente deben) ser aplicadas en el caso de que se satisfagan las precondiciones.

[8] Entendiendo ello como una meta-metaproposición condicional que siempre se cumple.

[9] Cómo afecta la asunción o no de la ‘globalidad’ de las precondiciones sobre la necesaria asunción o no de cada una de sus condiciones componentes, dependerá de cómo estén conectadas dichas condiciones: ‘conjuntivamente’, ‘disyuntivamente’ o ‘implicativamente’. Análogamente ocurre en cuanto a cómo afecta la consecución o no de la ‘globalidad’ de las postcondiciones sobre la consecución o no de cada una de sus condiciones componentes.

[10] Que se formará anteponiendo un operador meta-metalingüístico de negación de tipo contradictor.

A la luz de lo anterior, analicemos varias situaciones cuya dilucidación será muy útil en múltiples ocasiones en las que tendremos que razonar acerca de reglas de estructurales:

- Una regla con todas sus precondiciones conectadas 'conjuntivamente' se puede descomponer en un número de reglas igual al de las postcondiciones –cada una de ellas con todas las precondiciones y sólo una postcondición–, conectando dichas reglas del mismo modo que lo estaban las postcondiciones[11] (llamaremos a este proceso *descomposición de una reglas según sus postcondiciones*):

  - Postcondiciones conectadas 'conjuntivamente':

$$\frac{A_1; ...; A_m}{C_1; ...; C_n} \doteqdot$$

$$\doteqdot (A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m) \dot{\Rightarrow} (C_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} C_n) \doteqdot$$

$$\doteqdot \dot{\sim}(A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m) \mathbin{\dot{\triangledown}} (C_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} C_n) \doteqdot$$

$$\doteqdot (\dot{\sim}(A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m) \mathbin{\dot{\triangledown}} C_1) \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} \; (\dot{\sim}(A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m) \mathbin{\dot{\triangledown}} C_n) \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m}{C_1} \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} \; \frac{A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m}{C_n} \; .$$

  - Postcondiciones conectadas 'disyuntivamente':

$$\frac{A_1; ...; A_m}{C_1 \dot{\triangledown} ... \dot{\triangledown} C_n} \doteqdot$$

$$\doteqdot (A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m) \dot{\Rightarrow} (C_1 \dot{\triangledown} ... \dot{\triangledown} C_n) \doteqdot$$

$$\doteqdot \dot{\sim}(A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m) \mathbin{\dot{\triangledown}} (C_1 \dot{\triangledown} ... \dot{\triangledown} C_n) \doteqdot$$

$$\doteqdot (\dot{\sim}(A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m) \mathbin{\dot{\triangledown}} C_1) \mathbin{\dot{\triangledown}} ... \mathbin{\dot{\triangledown}} (\dot{\sim}(A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m) \mathbin{\dot{\triangledown}} C_n) \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m}{C_1} \mathbin{\dot{\triangledown}} ... \mathbin{\dot{\triangledown}} \frac{A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m}{C_n} \; .$$

[11] Aquí presentaremos sólo los casos en los que todas las postcondiciones están conectadas de la misma manera, pero a partir de lo aquí expuesto se puede obtener fácilmente el resultado de otras posibles combinaciones.

- El ‘sentido contrapuesto’ de una regla con m precondiciones conectadas ‘conjuntivamente’ y una sola postcondición[12], es una ‘disyunción’ de reglas cada una de las cuales tiene como precondición a la negación de la postcondición inicial y como postcondición a la negación de una de las precondiciones iniciales:

$$\frac{A_1; ...; A_m}{C} \doteq$$
$$\doteq (A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m) \mathbin{\dot{\Rightarrow}} C \doteq$$
$$\doteq \dot{\sim}C \mathbin{\dot{\Rightarrow}} \dot{\sim}(A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m) \doteq$$
$$\doteq \dot{\sim}C \mathbin{\dot{\Rightarrow}} (\dot{\sim}A_1 \dot{\triangledown} ... \dot{\triangledown} \dot{\sim}A_m) \doteq$$
$$\doteq \frac{\dot{\sim}C}{\dot{\sim}A_1 \dot{\triangledown} ... \dot{\triangledown} \dot{\sim}A_m} .$$

- En algunos casos podemos determinar que cierta postcondición se sigue de ciertas precondiciones razonando por reducción al absurdo, lo cual queda justificado atendiendo a lo siguiente (particularizado para una regla con m precondiciones conectadas ‘conjuntivamente’ y una sola postcondición):

$$\frac{A_1; ...; A_m}{C} \doteq$$
$$\doteq \dot{\sim}(A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m) \mathbin{\dot{\triangledown}} C \doteq$$
$$\doteq (\dot{\sim}(A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m) \mathbin{\dot{\triangledown}} C) \mathbin{\dot{\triangledown}} \dot{\perp} \doteq$$
$$\doteq \dot{\sim}((A_1 \mathbin{\dot{\&}} ... \mathbin{\dot{\&}} A_m) \mathbin{\dot{\&}} \dot{\sim}C) \mathbin{\dot{\triangledown}} \dot{\perp} \doteq$$
$$\doteq \frac{A_1; ...; A_m; \dot{\sim}C}{\dot{\perp}} .$$

A partir de las dos primeras situaciones presentadas podemos colegir que cuando analicemos una regla podremos pensar en si se sigue cada postcondición de forma independiente de las restantes postcondiciones que eventualmente existan. A continuación, dependiendo de cómo estuviesen conectadas las postcondiciones, habría que comprobar que ello ocurre en todas las reglas obtenidas por la citada descomposición o sólo en al menos una de ellas. La tercera situación nos permitirá que al pensar en el ‘sentido contrapuesto’ de una regla tomemos en cuenta sólo

[12] No abordamos los casos con más de una postcondición porque el anterior análisis nos muestra cómo podemos transformar la situación para que se cumpla este requisito.

si a partir de la negación de cierta postcondición se sigue la negación de alguna precondición. Es claro que, combinando todo lo anterior, se puede hacer una descomposición ‘canónica’ de las reglas en otras, conectadas adecuadamente, que sólo tengan una precondición y una postcondición.

Dada su peculiaridad, hagamos un inciso acerca de un caso ‘degenerado’: la regla de reflexividad. Ésta no tiene requisitos previos (es decir, su aplicación no está sujeta al cumplimiento de precondición alguna), por lo que es usual que otros autores la presenten en el formato de principio[13]. Que no haya requisitos previos conlleva que cualquiera que sea la situación previa, se puede introducir la postcondición. Para entender las consecuencias de esto pensemos en la situación extrema en la que tenemos en las precondiciones una metaproposición (o condición) verdadera en todos los casos[14]; dado que una metaregla se puede escribir como una meta-metaproposición implicativa, tendríamos que un metaprincipio tendría su antecedente siempre verdadero, por lo que –dado que la implicación es un condicional tautológico–, el consecuente es necesariamente verdadero. Ahora es más evidente que el ‘sentido contrapuesto’ de un metaprincipio es una metaregla ‘explosiva’ (que sólo es aplicable si estamos en una situación contradictoria):

$$\frac{}{\Gamma \Longrightarrow \Omega}\ \dot{\equiv}$$

$$\dot{\equiv}\ \dot{\top} \dot{\Rightarrow} (\Gamma \Longrightarrow \Omega)\ \dot{\equiv}$$

[13] Aunque, hablando propiamente, habría que llamarlo *metaprincipio*.

[14] Usaremos con tal fin el símbolo meta-metalingüístico $\dot{\top}$ –así, por ejemplo, $\dot{\top} \dot{\equiv} (\Gamma \Longrightarrow \Omega)\ \dot{\triangledown}\ \dot{\sim}(\Gamma \Longrightarrow \Omega)$–; pero hay que distinguir claramente éste del símbolo metalingüístico $\widetilde{\top}$ –que designa una fórmula teoremática / válida cualquiera (concretamente se comporta como un parámetro de fórmulas teoremáticas / válidas)–, de $\bar{\top}$ –que designa a cualquier conjunto que contenga todas sus fórmulas teoremáticas / válidas– y de $\widehat{\top}$ –que designa a cualquier subfamilia que contenga todas sus fórmulas teoremáticas / válidas–. Si transformamos la regla en su ‘sentido contrapuesto’, dicho símbolo pasaría a ser en las postcondiciones $\dot{\bot}$ (la condición siempre falsa) –así, por ejemplo, $\dot{\bot} \dot{\equiv} (\Gamma \Longrightarrow \Omega)\ \dot{\&}\ \dot{\sim}(\Gamma \Longrightarrow \Omega)$–; pero, nuevamente, distinguimos éste del símbolo metalingüístico $\widetilde{\bot}$ –que designa una fórmula inconsistente / insatisfacible cualquiera (concretamente se comporta como un parámetro de fórmulas inconsistentes / insatisfacibles)–, de $\bar{\bot}$ –que designa a cualquier conjunto que contenga al menos una fórmula inconsistente / insatisfacible– y de $\widehat{\bot}$ –que designa a cualquier subfamilia que contenga al menos una fórmula inconsistente / insatisfacible–. Es una cuestión peliaguda decidir si los símbolos con tilde o con ‘angulo’ superior pueden aparecer o no en reglas estructurales, puesto que en ambos casos se introducen cualidades que son inherentes a los lenguajes / lenguajes interpretados –de hecho su ocurrencia en las reglas estructurales conlleva la asunción de que en el lenguaje correspondiente existen fórmulas con ciertas características sintácticas / semánticas concretas–.

$$\dot{\equiv}\ \dot{\sim}(\Gamma \Longrightarrow \Omega) \mathrel{\dot{\Rightarrow}} \dot{\sim}\dot{\top}\ \dot{\equiv}$$

$$\dot{\equiv}\ (\Gamma \not\Longrightarrow \Omega) \mathrel{\dot{\Rightarrow}} \dot{\bot}\ \dot{\equiv}$$

$$\dot{\equiv}\ \frac{\Gamma \not\Longrightarrow \Omega}{\dot{\bot}}\ .$$

En el Análisis Estructural Lógico, considerando éste de manera ‘estricta’, las condiciones de las reglas sólo pueden ser uno de los tipos siguientes:
a) Enunciados inferenciales (entendidos en un sentido amplio que acoja también a sus negaciones).
b) Enunciados relacionales en los que sus relatores son conjuntistas y las entidades que aparecen relacionadas son del mismo tipo que las que componen los correspondientes enunciados inferenciales (por ejemplo, según sea el caso, fórmulas, conjuntos de fórmulas, cadenas de fórmulas o subfamilias de fórmulas).
c) Enunciados complejos en los que dos enunciados de los anteriores tipos son conectados con operadores lógicos meta-metalingüísticos.

En el citado nivel ‘estricto’ ninguna regla posee condición alguna en la que se indique qué conectivas ocurren en sus fórmulas, por lo que sólo se puede considerar la verdad o falsedad de un enunciado inferencial si estamos en una de las siguientes situaciones:
1) Se nos indica externamente. 2) Se asume tentativamente en el curso de algún razonamiento metateórico. 3) Es consecuencia de haberle atribuido determinada propiedad estructural a la relación de consecuencia lógica de que se trate.

Así pues, no podemos hablar a nivel estructural de enunciados inferenciales que sean por su ‘forma’ necesariamente válidos, aunque sí podemos hablar, apelando a una semántica intuitiva del nivel meta-metalingüístico, de conjuntos de enunciados inferenciales estructuralmente incompatibles (o estructuralmente ‘contradictorios’). En el caso de los otros enunciados relacionales la determinación de su valor de verdad dependerá de la información particular que se nos proporcione y de los resultados de la Teoría de Conjuntos. Por último, el valor de verdad de los enunciados obtenidos mediante la conexión con operadores meta-metalingüísticos de dos enunciados depende del valor de verdad de dichos componentes y de la citada semántica intuitiva.

Para los tres tipos de enunciados mencionados se cumple que, dada una condición A, su condición contradictoria es la condición negativa $\dot{\sim}A$. Establecemos que una condición considerada falsa (consideración que puede ser alcanzada de cualquiera de las tres maneras antes indicadas) es incompatible con cualquier otra. Asimismo, enfatizamos el hecho de que dos condiciones son estructuralmente incompatibles cuando son incompatibles (es decir, 'contradictorias') en todas las situaciones posibles, de modo que no se puede producir tal incompatibilidad estructural si una de las condiciones es estrictamente más general que la otra. Así pues, a esta compatibilidad estructural cabría calificarla de *primaria* y la usaremos como un filtro inicial de las posibles condiciones que pueden ocurrir en una regla, sin que ello impida que ciertas condiciones estructuralmente compatibles generen situaciones 'contradictorias' cuando se incorpore cierta información adicional. En este sentido, la adopción de ciertas propiedades estructurales para cierta relación de consecuencia lógica o la concreción de otras cualidades metateóricas de ésta (en particular, pero no sólo, de propiedades relativas a su semántica) puede poner de manifiesto que ciertas condiciones estructuralmente compatibles no lo son en todas las 'situaciones' posibles.

Atendiendo a lo indicado en el párrafo anterior, si tenemos la conjunción de dos condiciones, una de las cuales es 'negativa' (o sea, si tenemos $A \dot{\&} \dot{\sim}B$) y nos dicen que las correspondientes condiciones 'positivas' (es decir, A y B) son tales que una de ellas se puede obtener como especificación[15] de la otra, entonces dicha conjunción de condiciones representa el sostenimiento de la condición más general para todos los casos salvo los que están en conflicto con la condición más particular (de hecho a partir de la citada conjunción se puede inferir otra nueva condición que establece el requisito de compatibilidad de ambos miembros conjuntados). Sirva como ejemplo (el cual todavía resultará algo críptico por cuanto no se conoce el significado preciso de los símbolos que están involucrados en sendos enunciados inferenciales) la siguiente situación: si tenemos las condiciones $\Gamma \cdot \Delta \implies \varphi$ y $\Gamma \not\Longrightarrow \varphi$, de su conjunción podemos inferir $\Delta \ddot{\neq} \langle\ \rangle$ –es decir, la conjunción de las dos primeras condiciones se puede sostener en todos los casos en que se satisface la primera salvo en aquéllos en los que no se cumple la condición inferida–.

En la literatura lógica (por ejemplo, en Aliseda [AL06]) podemos encontrar que en algunas reglas estructurales aparecen condiciones que no son enunciados de los tipos antes mencionados: tal como ya podemos sospechar, en algunos casos puede resultar conveniente 'abandonar' el nivel estructural *sensu stricto* y presentar reglas semi-estructurales que incorporen condiciones que incluyan referencias a la

[15] En particular, una condición es una especificación (diremos que impropia) de sí misma.

ocurrencia de ciertas conectivas en las fórmulas o que introduzcan determinados criterios 'extralógicos'. En esta investigación intentaremos no 'apartarnos' del nivel estricto: en todo caso, quizás sí lo hagamos (aunque es una cuestión discutible) en ciertas reglas que incluyen una condición en la que ocurre una fórmula necesariamente contradictoria.

Por otro lado, debemos decir que nosotros estamos interesados en reglas cuyas precondiciones sean estructuralmente compatibles de forma 'global', puesto que de otro modo estaríamos ante una regla 'explosiva'. Realmente, dada la naturaleza implicativa de las reglas, y a pesar de su nombre, estas reglas no 'corrompen' las relaciones de consecuencia lógicas, pero aúnan el ser poco útiles (puesto que sólo se aplicarían en situaciones 'contradictorias', las cuales están descartadas por haber asumido una semántica intuitiva de tipo clásico –así pues, serían reglas que subsisten vacuamente–) con ser un obstáculo para la consecución de ciertos resultados generales acerca de los conjuntos de reglas que las incluyan. Así pues, en particular estaremos atentos para que ninguna de nuestras reglas sea del tipo:

$$\frac{...; A_i; ...; \dot{\sim} A_i; ...}{...C_j...}\ .$$

Además, cada una de las reglas debe ser tal que garantice que no se alcancen resultados extraños y, concretamente, que las postcondiciones no sean estructuralmente incompatibles de forma 'global' ni en sí mismas ni con respecto a las precondiciones. Así pues, en el caso particular de que las precondiciones, por un lado, y las postcondiciones, por otro, estén unidas conjuntivamente, y asumiendo de que se trate de una regla no 'explosiva', hemos de constatar que en el conjunto formado por la unión de los dos citados no hay al menos dos condiciones (explícitas o implícitas) estructuralmente incompatibles entre sí (en el caso de reglas sin precondiciones, esta comprobación, obviamente, se limita al conjunto de las postcondiciones).

En particular estaremos atentos para que ninguna de nuestras reglas sea de alguno de los siguientes tipos:

1. $$\frac{...A_i...}{...; C_j; ...; \dot{\sim} C_j; ...}\ .$$

2. $$\frac{...; A_i; ...}{...; \dot{\sim} A_i; ...}\ .$$

3. $$\frac{...; \dot{\sim} A_i; ...}{...; A_i; ...}\ .$$

Nuestras reglas deben también garantizar que ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar nuevas post-condiciones que sean incompatibles entre sí o incompatibles con las nuevas pre-condiciones, salvo en el caso de que las nuevas precondiciones sean igualmente incompatibles entre sí.

Resulta interesante determinar qué reglas estructurales, de entre las que figuren en un cierto elenco, tienen el carácter de básicas para cierta relación inferencial con una signatura concreta –en tanto que, si una relación inferencial con dicha signatura cumple esas reglas básicas, podemos asegurar que cumple todas las restantes del elenco–. Así pues, lo primero que debemos hacer es definir qué entendemos por la signatura de una relación inferencial:

Definición 37 (Signatura de una relación inferencial)**.**
Dada una relación inferencial llamamos su signatura a un par cuyas componentes son:

- *Primera: un número natural n mayor o igual que 2, el cual indica la aridad de la relación inferencial.*
- *Segunda: una n-upla (siendo n la aridad antes mencionada), en la que cada miembro recoge la información de la correspondiente componente de la relación inferencial. Esta información de cada componente vendrá a su vez codificada como un par: el primer miembro indicará el conjunto de entidades de donde proceden sus elementos y el segundo miembro indicará mediante alguna de las siguientes expresiones el requisito de cardinalidad al que está sujeto dicha componente:*
  1. *"$c = n$" (con $n \in \mathbb{N}$), si es un número natural determinado.*
  2. *"$c < card(\mathbb{N})$", si se trata de una cantidad finita.*
  3. *"$c \leq card(\mathbb{N})$", si se trata de una cantidad numerable.*
  4. *"$c = \_$", si se trata de una cantidad arbitraria.*

Por ejemplo, la relación inferencial deductiva clásica tiene como signatura el par (2,(($\wp(FOR(\mathcal{L}))$,$c = \_$),($FOR(\mathcal{L})$,$c = 1$))).

Resulta muy importante también precisar qué debemos entender por derivar cierta regla estructural a partir de otras reglas de igual naturaleza.

Definición 38 (Derivación de una regla estructural a partir de otras reglas estructurales)**.**
Decimos que de ciertas reglas estructurales de una relación de inferencia con determinada signatura se deriva otra regla para la misma relación inferencial si, tomando las precondiciones de esta última regla como hipótesis iniciales (así pues, no tomando ninguna en el caso de los metaprincipios), podemos alcanzar su postcondición mediante un número finito de pasos, cada uno de los cuales materializa una inferencia meta-metalógica que puede ser de uno de los siguientes tipos:

1. *La introducción de una condición nueva que esté permitida por algún metaprincipio asumido.*

2. *La obtención de una condición transformada a partir de una o más condiciones que hayan aparecido con anterioridad. Las transformaciones permitidas deben corresponder a uno de los siguientes procesos:*

   a) *La aplicación de una regla estructural que haya sido asumida.*

   b) *La especificación (o particularización) de una condición.*

   c) *La aplicación de propiedades conjuntistas de las entidades de que se trate (conjuntos, cadenas o subfamilias).*

3. *La aplicación de propiedades que están amparadas por la meta-metalógica intuitiva (la cual es de tipo deductivo clásico) sobre los operadores meta-metalingüísticos que vinculan las distintas condiciones.*

Las derivaciones pueden ser directas o indirectas (a estas últimas las llamamos también *derivaciones por reducción al absurdo*). En estas últimas tomamos como hipótesis auxiliar la negación de alguna condición y progresamos en la derivación hasta alcanzar un par de condiciones estructuralmente incompatibles que estén unidas conjuntivamente[16], momento en el cual clausuramos la citada hipótesis y obtenemos como conclusión la condición que se tomó como hipótesis auxiliar pero sin negar. La diferencia con las derivaciones directas está en que en estas últimas no

[16] Recordemos que en el Análisis Estructural no hay condiciones no válidas en sí mismas (dado que en el seno de las condiciones que ocurren en las reglas estructurales no aparecen operadores lógicos) y las únicas situaciones necesariamente 'repudiables' que se pueden presentar son aquéllas en las que hay al menos un par de condiciones estructuralmente incompatibles entre sí que están unidas conjuntivamente.

incorporamos hipótesis auxiliares, por lo que intentamos alcanzar el objetivo directamente a partir de las hipótesis iniciales. Por supuesto, ambos modos se pueden combinar anidando uno dentro de otro para cierto objetivo parcial. En todos los casos, las reglas se pueden usar en su 'sentido directo' o en su 'sentido contrapuesto', aunque en el caso de reglas con una sola postcondición y más de una precondición resulta ventajoso emplearlas en su 'sentido directo' (lo cual hace que el proceso sea determinista), mientras que si las usamos en su 'sentido contrapuesto' surgen expresiones disyuntivas que representan 'bifurcaciones' (aunque, también es cierto que, actuando hábilmente, podemos hacer que ambas posibilidades converjan en una sola condición); en el caso de los metaprincipios, su uso en 'sentido contrapuesto' es evitado porque genera la postcondición $\dot{\perp}$.

Toda derivación que se pueda hacer por reducción al absurdo se puede hacer también directamente, de ahí que podamos presentar enunciados metateóricos relativos a la imposibilidad de derivar una regla a partir de otras restringiéndonos a las derivaciones directas. La conveniencia de que las derivaciones sean de uno u otro modo depende de que en la regla a derivar o en las reglas que se usan para la derivación ocurran o no al menos una condición negativa (debemos tener en cuenta que en estos procesos de derivación no tenemos premisas, sólo hipótesis –así pues, salvo en el caso de los metaprincipios, siempre tendremos hipótesis iniciales y, según que el modo sea siempre indirecto o no, aparecerán o no también hipótesis auxiliares–). Cuando en todas las reglas involucradas no exista al menos una condición negativa, entonces lo ventajoso es el método directo. Sin embargo, si ocurre una sola condición negativa y ella es la que se desea alcanzar como objetivo, una opción a menudo ventajosa es el método de reducción al absurdo a partir de la suposición de la correspondiente condición positiva –de esta manera las reglas involucradas en la derivación pueden ser usadas todas en 'sentido directo'–.

En un aspecto importante existe una clara diferencia entre la situación a la que estamos acostumbrados cuando investigamos los vínculos deductivos entre fórmulas en una lógica clásica y la situación que nos encontramos en nuestros procesos de determinación de los vínculos justificativos entre las reglas estructurales. Así, dadas dos reglas estructurales tales que la primera sea más general que la otra[17], entonces la primera también tendrá mayor poder de justificación de otras reglas que

[17] También podemos decir que la primera tiene mayor capacidad de representación que la segunda, o incluso que la primera es menos específica (o menos particular) que la otra. Esta cualidad se concreta en que toda relación inferencial que cumpla esta última también satisfará la primera –es decir, al particularizar las reglas restringimos la clase de relaciones inferenciales que satisfacen dichas

la segunda. Sin embargo, con la derivabilidad de fórmulas en la lógica clásica la situación es distinta: dadas dos fórmulas, la primera de las cuales es menos restrictiva que la otra[18], se tiene que la más restrictiva implica formalmente (es decir, permite derivar en sentido deductivo) a la otra[19]. El enunciado en términos sencillos de lo que acabamos de decir es que particularizar una fórmula es exigir menos, mientras que particularizar una regla estructural es exigir más[20]. Todo esto tendrá una influencia decisiva en los llamados teoremas de representación de los distintos tipos de relación inferencial que demostraremos en esta investigación: dado uno de estos teoremas que ha sido probado usando cierto elenco de reglas estructurales, *a fortiori* también puede ser probado con un elenco de reglas estructurales que conjuntamente tengan mayor poder de justificación. Éste es un buen motivo para que estemos interesados en encontrar conjuntos de reglas estructurales que son estrictamente más generales, puesto que permite que seamos conscientes de un mayor número de relaciones inferenciales que pueden ser representadas mediante cierta relación de consecuencia que es mejor conocida. Otra consecuencia interesante que podemos extraer de ello es que, dados dos conjuntos de reglas que permiten probar un teorema de representación para la misma relación inferencial, ello no nos permite asegurar que ambos conjuntos coincidan en su capacidad justificativa, puesto que dichas reglas son condiciones suficientes, pero no son condiciones necesarias (así pues, los teoremas de representación no caracterizan completamente a las relaciones inferenciales para las que se enuncian).

Como se puede apreciar claramente en la definición que anteriormente fue pre-

---

reglas–.

[18] A veces decimos también que la primera es más débil que la segunda, o también que la primera es menos fuerte que la otra (por ejemplo, porque la primera se ha obtenido a partir de la segunda eliminando algún miembro unido conjuntivamente, o introduciendo algún miembro unido disyuntivamente, o eliminando por particularización algún cuantificador universal, o introduciendo algún cuantificador existencial).

[19] Esto se ve claramente con su caracterización en términos de modelos, puesto que las operaciones lógicas que hemos indicado permiten agregar interpretaciones a la clase de modelos de partida, con lo cual eliminamos posibles clases de modelos de las cuales la primera sea una subclase –es decir, al debilitar las fórmulas ampliamos la clase de modelos que satisfacen aquéllas–.

[20] La clave profunda de esta situación aparentemente anómala está en que en el caso de la deducción entre fórmulas a lo que estamos apuntando es a las garantías de la verdad de la conclusión a partir de la verdad de las premisas mediante las que se ha deducido dicha conclusión, mientras que en justificación de las reglas apuntamos a la capacidad de representación una regla derivada a partir de la capacidad de representación de las reglas primitivas mediante las que se ha justificado aquélla.

sentada, toda derivación es un procedimiento efectivo de justificación[21] y sólo es aplicable entre propiedades estructurales de relaciones inferenciales con la misma signatura. Sin embargo, en este texto presentaremos también ciertos resultados que establecen que una relación inferencial satisface ciertas propiedades estructurales si posee determinadas cualidades en relación a cierta relación inferencial con la que está asociada, siendo ambas de distinta signatura y satisfaciendo esta última relación inferencial otras propiedades estructurales que se señalan. En estos casos, no podemos decir que estas últimas propiedades estructurales permitan derivar las primeras, pero sí podemos seguir diciendo que las últimas justifican las primeras para dos relaciones que mantienen el vínculo señalado. En ese proceso de justificación no exigiremos que el procedimiento sea efectivo y además admitiremos el empleo de cualesquiera recursos lógico-matemáticos que resulten adecuados. Por supuesto, en estas pruebas se pueden usar cualesquiera propiedades correspondientes a dichas relaciones inferenciales y, en particular, las que establezcan vínculos entre ambas en las oportunas definiciones de los distintos tipos de relaciones de consecuencia lógica.

Vamos ahora a entrar de lleno en el estudio de las propiedades estructurales y, aunque nuestro objetivo final es el estudio estructural de la abducción ordinaria que está mediada por la relación inferencial deductiva, es imprescindible comenzar por el estudio de esta última por cuanto algunas de las propiedades de aquélla están condicionadas por la circunstancia de que ésta las posea o no. Además, como se verá en los dos próximos capítulos, para modelizar algunas de las variantes de la abducción ordinaria que queremos investigar, resulta preciso considerar un tipo de inferencia deductiva distinta de la habitual en los textos de Lógica.

3.2. Propiedades estructurales de la deducción clásica

En 1991 van Benthem [vB91] probó que la relación de consecuencia deductiva clásica podía caracterizarse mediante ciertas propiedades estructurales. Atocha Aliseda recogió en su tesis doctoral [AL97] y posteriormente en otros escritos (en particular el artículo [AL03] y el libro [AL06]) tanto las propiedades estructurales que le sirvieron al lógico holandés de punto de partida como la prueba del resultado.

[21] Así pues, toda derivación es una justificación pero no viceversa.

Dado que tanto unas (las propiedades) como la otra (la demostración) se presentan en dichos textos restringidas a cadenas finitas de fórmulas[22], adoptamos inicialmente dicho planteamiento. En esos textos no se especifica cómo se construyen formalmente dichas cadenas ni cómo se define la operación de concatenación de dos de ellas, sino que se apela a la noción intuitiva que tenemos de esas cuestiones. Sin embargo, en favor del rigor y también con intención propedéutica para el enfoque que posteriormente adoptaremos, parece razonable que indiquemos sucintamente cómo construimos y operamos esos objetos lógicos.

3.2.1. Deducción con una cadena finita de fórmulas como premisas

Definamos $SEGF(\mathbb{N}^*)$ como el conjunto de los segmentos[23] finitos de números naturales mayores que 0:

$$SEGF(\mathbb{N}^*) = \{S \ / \ S = \{x \in \mathbb{N}^* \ / \ m \leq x \leq n \ \ \& \ \ m, n \in \mathbb{N}^*\}\}.$$

Dado el lenguaje lógico $\mathcal{L}$ cuyo conjunto de fórmulas no vacío es $FOR(\mathcal{L})$, obtenemos el conjunto de las cadenas finitas de elementos de dicho conjunto del siguiente modo:

$$\begin{aligned} CADF(FOR(\mathcal{L})) = \{F \ / \ (F : S \longrightarrow FOR(\mathcal{L})) \ \& \ S \in SEGF(\mathbb{N}^*) \\ \& \ F \text{ es una función}\}. \end{aligned}$$

Obviamente, si $S = \varnothing$, entonces F es la cadena vacía, la cual representaremos como "$\lceil \ \ \rceil$". Una cadena de n elementos será anotada como $\{(i_1, A_1), ..., (i_n, A_n)\}$ (obviamente, como se desprende de la definición, $i_j \in \mathbb{N}^*$ y $A_j \in FOR(\mathcal{L})$), o también como $\lceil (i_1, A_1), ..., (i_n, A_n) \rceil$ o, incluso mejor, con la etiqueta posicional en notación de subíndice: $\lceil A_{i_1}, ..., A_{i_n} \rceil$. Por otra parte, $\lceil A \rceil$ será otra manera de escribir la cadena unitaria $\{(i, A)\}$ sin preocuparnos por la primera componente del par. Dada una cadena finita de fórmulas X, designaremos mediante $\bar{X}$ a su conjunto

[22] Aunque en algunos momentos, en lugar de hablar de secuencias de fórmulas, se refiere, quizás por abuso de lenguaje, a conjuntos de fórmulas.

[23] La palabra *segmento* se usa a menudo en la literatura matemática para designar genéricamente a un conjunto convexo finito. Consideraremos al conjunto vacío y a los conjuntos unitarios como casos degenerados de segmentos.

de fórmulas asociado, el cual se define como la segunda proyección de dicha cadena (es decir, el conjunto imagen de la misma).

Para poder establecer relaciones entre cadenas finitas (inclusión no estricta, inclusión estricta, igualdad y desigualdad) que tengan en cuenta la multiplicidad y el orden relativos de las segundas componentes de sus elementos, pero que no exijan que las etiquetas sean coincidentes, definiremos nuevas relaciones para las cuales usaremos los símbolos especiales $\subseteq_c$, $\subsetneq_c$, $=_c$ y $\neq_c$, respectivamente.

Definición 39 (Relaciones 'en bloque' entre cadenas finitas)**.**
Sean $X : I \longrightarrow FOR(\mathcal{L})$*, con* $I \in SEGF(\mathbb{N}^*)$*, e* $Y : J \longrightarrow FOR(\mathcal{L})$*, con* $J \in SEGF(\mathbb{N}^*)$*, dos cadenas finitas cuyas segundas componentes son elementos del conjunto no vacío* $FOR(\mathcal{L})$*; decimos que se verifica la relación con el nombre que en cada apartado se menciona si y sólo si se cumplen todas las condiciones que en cada caso se indican:*

- *Relación de inclusión 'en bloque' no estricta de la primera en la segunda (lo cual anotamos como* $X \subseteq_c Y$*):*
  $\exists J' \exists g(J' \subseteq J \;\&\; (g : I \longrightarrow J')$ *es una función biyectiva* $\&\; (i_1 = min(I) \;\&\; (i_1, A_1) \in X \;\Rightarrow\; ((g(i_1), A_1) \in Y \;\&\; \forall i_k, i_l((i_k, i_l \in I \;\&\; i_l = sg(i_k) \;\&\; (i_l, A_l) \in X) \;\Rightarrow\; (g(i_l) = sg(g(i_k)) \;\&\; (g(i_l), A_l) \in Y)))))$[24].

- *Relación de igualdad 'en bloque' entre ambas (lo cual anotamos como* $X =_c Y$*):*
  $(X \subseteq_c Y) \;\&\; (Y \subseteq_c X)$.

- *Relación de desigualdad 'en bloque' entre ambas (lo cual anotamos como* $X \neq_c Y$*):*
  $\sim(X \subseteq_c Y) \;\nabla\; \sim(X \subseteq_c Y)$.

- *Relación de inclusión 'en bloque' estricta de la primera en la segunda (lo cual anotamos como* $X \subsetneq_c Y$*):*
  $(X \subseteq_c Y) \;\&\; (X \neq_c Y)$.

Dadas dos cadenas finitas X e Y, su concatenación (que designaremos mediante el símbolo "**.**") será una nueva cadena Z que se construye según la siguiente definición.

[24] En particular, consideramos biyectiva a la función que va del conjunto vacío al conjunto vacío.

Definición 40 (Concatenación de cadenas de fórmulas)**.**
Sean $X, Y \in CADF(FOR(\mathcal{L}))$; la concatenación de ambas en el orden en el que se las ha nombrado ($X \centerdot Y$) será $Z \in CADF(FOR(\mathcal{L}))$ tal que:

1. *Si $X =_c \lceil\ \rceil$, entonces $Z = Y$.*
2. *Si $X \neq_c \lceil\ \rceil$ e $Y =_c \lceil\ \rceil$, entonces $Z = X$.*
3. *Si $X \neq_c \lceil\ \rceil$ e $Y \neq_c \lceil\ \rceil$ –por tanto, si $X : I \longrightarrow FOR(\mathcal{L})$ (con $I = \{i_1, ..., i_m\}$) e $Y : J \longrightarrow FOR(\mathcal{L})$ (con $J = \{j_1, ..., j_n\}$)–, entonces la cadena $Z : K \longrightarrow FOR(\mathcal{L})$ es una función tal que $K = \{i_1, ..., i_{m+n}\}$, $K \in SEGF(\mathbb{N}^*)$, satisfaciéndose $\forall k((i_1 \leq k \leq i_m \Rightarrow Z(k) = X(k))$ & $(i_{m+1} \leq k = i_{m+l} \leq i_{m+n} \Rightarrow Z(k) = Y(j_l)))$.*

Dado que esta operación sobre el conjunto de las cadenas finitas de fórmulas de un lenguaje es asociativa podemos iterar la citada operación binaria sin necesidad de escribir paréntesis para indicar cómo se agrupan las cadenas finitas operadas:

Proposición 41.
Sean $X, Y, Z \in CADF(FOR(\mathcal{L}))$, se satisface la siguiente propiedad:

$$(X \centerdot Y) \centerdot Z =_c X \centerdot (Y \centerdot Z).$$

En consecuencia, cualquiera de los miembros de la anterior igualdad 'en bloque' entre cadenas finitas puede ser escrito más brevemente como $X \centerdot Y \centerdot Z$.

La prueba de esta proposición es obvia aunque laboriosa, pues su única dificultad radica en que la notación que se debe usar se vuelve alambicada. Sin embargo, la idea nuclear es muy clara (recordemos que la concatenación de dos subfamilias es una unión de las mismas garantizando que ambas son disjuntas, que el orden de los elementos en cada una de ellas no se altera y que todos los elementos de la primera son anteriores a los de la segunda): entre ambas expresiones a lo sumo varían las etiquetas de algunas fórmulas, pero en ningún caso las fórmulas que la componen ni el orden relativo de las mismas. Teniendo en cuenta que la prueba de este resultado se puede encontrar fácilmente en textos en los que se explica el manejo de las cadenas finitas, la omitimos aquí.

Sean X, Y y Z elementos cualesquiera del conjunto $CADF(FOR(\mathcal{L}))$ y sean A, B y C elementos cualesquiera del conjunto $FOR(\mathcal{L})$ –al decir que son fórmulas o cadenas finitas de fórmulas cualesquiera estamos indicando que están tácitamente cuantificadas universalmente, de modo que aunque no escribiremos los símbolos correspondientes a dichos cuantificadores metalingüísticos, debemos asumir que ellos están implícitos en la formulación de las reglas–. $X \Longrightarrow_{cf} A$ representará un enunciado inferencial que indica que a partir de la cadena finita de fórmulas X se puede concluir lógicamente la fórmula A. Si quisiésemos, con el fin de poner de manifiesto claramente su verdadero carácter, podríamos escribir el relator inferencial en posición prefija en lugar de hacerlo en posición interfija (que es como apareció anteriormente y también como resulta más habitual): $\Longrightarrow_{cf} (X, A)$. No en vano tenemos que $\Longrightarrow_{cf}$ es una relación de aridad 2 del siguiente tipo:

$$\Longrightarrow_{cf} \subseteq CADF(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L}).$$

Las relaciones de consecuencia lógica cuyas premisas forman una cadena finita pueden satisfacer, entre otras, algunas de las reglas estructurales que seguidamente se enumeran:

I.1- ***Reflexividad [At-c1]***[25]***:***

$$\lceil C \rceil \Longrightarrow_{cf} C.$$

I.2- ***Monotonía [At-c1]:***

$$\frac{X \centerdot Y \Longrightarrow_{cf} C}{X \centerdot \lceil A \rceil \centerdot Y \Longrightarrow_{cf} C}.$$

I.3- ***Corte [At-c1]:***

$$\frac{X \centerdot \lceil A \rceil \centerdot Y \Longrightarrow_{cf} C;\; Z \Longrightarrow_{cf} A}{X \centerdot Z \centerdot Y \Longrightarrow_{cf} C}.$$

I.4- ***Contracción [At-c1]:***

$$\frac{X \centerdot \lceil A \rceil \centerdot Y \centerdot \lceil A \rceil \centerdot Z \Longrightarrow_{cf} C}{X \centerdot \lceil A \rceil \centerdot Y \centerdot Z \Longrightarrow_{cf} C}.$$

[25] A lo largo del texto una misma expresión en lengua natural será usada para formar distintos nombres de reglas las cuales no coinciden entre sí, motivo por el que para formar aquéllos le añadimos a las citadas expresiones una marca entre corchetes que permitirá poder referirnos a cada una de ellas sin ambigüedad. "At-c" indica que se trata de la versión propuesta por Atocha Aliseda para cadenas finitas con ligeros cambios notacionales: a diferencia de dicha autora, hemos distinguido entre una fórmula y una cadena unitaria cuyo único miembro tiene como segunda componente del par a dicha fórmula; también hemos explicitado la operación de concatenación de cadenas cuando ocurren varias de ellas en el miembro izquierdo del enunciado inferencial. El acompañar la marca "At-c" con un número apunta al hecho de que posteriormente se presentará otra versión distinta de reglas propuestas por la mismas autora.

En el elenco de reglas que presenta Atocha Aliseda no se distinguen dos casos que realmente son distintos en una formulación en términos de cadenas (aunque, por los motivos que más adelante se indicarán, no es crucial esta ausencia): nos referimos, concretamente, a que la anterior regla de contracción [At-c1] (a la que nosotros en adelante llamaremos *contracción (por la derecha) [At-c1]*) es diferente de la siguiente (a la cual llamaremos *contracción por la izquierda*):

I.5- ***Contracción por la izquierda:***

$$\frac{X \centerdot \lceil A \rceil \centerdot Y \centerdot \lceil A \rceil \centerdot Z \Longrightarrow_{cf} C}{X \centerdot Y \centerdot \lceil A \rceil \centerdot Z \Longrightarrow_{cf} C}\ .$$

Los motivos a los que aludíamos unas líneas más atrás son los siguientes: primero, que esta última propiedad la podríamos derivar a partir de las cuatro anteriores; y segundo, que obtendríamos una situación simétrica en el elenco de reglas si cambiásemos la contracción por la izquierda por la contracción (por la derecha) [At-c1], de modo que la elección de una u otra no tiene repercusión sobre la relación de consecuencia que es modelizada de una u otra forma.

Proposición 42.
Una relación de consecuencia lógica para una cantidad finita de premisas que satisfaga monotonía [At-c1] y contracción (por la derecha) [At-c1], necesariamente satisface contracción por la izquierda.

Demostración. Partimos de la precondición de la regla de contracción por la izquierda:

$$X \centerdot \lceil A \rceil \centerdot Y \centerdot \lceil A \rceil \centerdot Z \Longrightarrow_{cf} C.$$

Dado que X y Y son finitos, $card(X) = m$ y $card(Y) = n$, con $m, n \in \mathbb{N}$. Ahora, aplicando $m + n$ veces de la regla de la monotonía [At-c1], podemos introducir en el extremo izquierdo las fórmulas de las secuencias X e Y:

$$X \centerdot Y \centerdot X \centerdot \lceil A \rceil \centerdot Y \centerdot \lceil A \rceil \centerdot Z \Longrightarrow_{cf} C.$$

Y, finalmente, aplicando $m + n + 1$ veces la regla de contracción (por la derecha) [At-c1], se pueden eliminar por dicho lado las ocurrencias repetidas tanto de las fórmulas de las secuencias X e Y como de la fórmula A:

$$X \centerdot Y \centerdot \lceil A \rceil \centerdot Z \Longrightarrow_{cf} C.$$

El resultado obtenido coincide con la postcondición de la regla de contracción por la izquierda. ■

Durante algún tiempo, con anterioridad a que fuese publicado el libro de van Benthem [vB91], era frecuente que se incluyese como requisito de la consecuencia deductiva clásica una quinta propiedad estructural:

I.6- ***Permutación [At-c1]:***

$$\frac{X \centerdot \lceil A \rceil \centerdot \lceil B \rceil \centerdot Y \Longrightarrow_{cf} C}{X \centerdot \lceil B \rceil \centerdot \lceil A \rceil \centerdot Y \Longrightarrow_{cf} C}\ .$$

Sin embargo, es fácil justificar que, para el citado fin, no es necesario su inclusión si se contase con las cuatro primeras, puesto que se puede probar el siguiente resultado:

Proposición 43.
Una relación de consecuencia lógica para una cantidad finita de premisas que satisfaga monotonía [At-c1] y contracción (por la derecha) [At-c1], necesariamente satisface permutación [At-c1].

Demostración. Partimos de la precondición de la regla de permutación [At-c1] y a continuación anotamos el resultado de aplicar la propiedad estructural que en cada caso se indica entre paréntesis:

1. $X \centerdot \lceil A \rceil \centerdot \lceil B \rceil \centerdot Y \Longrightarrow_{cf} C$ (hipótesis).
2. $X \centerdot \lceil B \rceil \centerdot \lceil A \rceil \centerdot \lceil B \rceil \centerdot Y \Longrightarrow_{cf} C$ (por monotonía [At-c1] sobre 1).
3. $X \centerdot \lceil B \rceil \centerdot \lceil A \rceil \centerdot Y \Longrightarrow_{cf} C$ (por contracción (por la derecha) [At-c1] sobre 2).

El resultado obtenido coincide con la postcondición de la regla de permutación [At-c1]. ■

Una vez vistas las relaciones de derivación entre las distintas propiedades estructurales presentamos la siguiente definición.

Definición 44 (Relación inferencial de tipo RMCCd [At-c1]).
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow_{cf}$*, diremos que es de tipo RMCCd [At-c1] si y sólo si satisface las siguientes propiedades estructurales:*

1. *Reflexividad [At-c1].*

2. *Monotonía [At-c1].*

3. *Corte [At-c1].*

4. *Contracción (por la derecha) [At-c1].*

Al conjunto de estas cuatro propiedades estructurales, consideradas básicas, lo designamos $\mathbb{P}^B_{\text{[At-c1]}}$*. Al conjunto de todas las reglas derivadas a partir de las anteriores lo denominamos* $\mathbb{P}_{\text{[At-c1]}}$[26].

Ahora ya estamos en condiciones de presentar de manera precisa el importante resultado aludido al inicio de la sección:

Teorema 45 (Teorema de representación de la relación inferencial deductiva clásica (van Benthem)).
Las propiedades de reflexividad [At-c1], monotonía [At-c1], corte [At-c1] y contracción (por la derecha) [At-c1] son condiciones suficientes de la relación de consecuencia deductiva clásica para cadenas finitas de premisas, en el sentido de que cualquier relación inferencial con dicha cantidad de premisas que satisfaga las cuatro propiedades mencionadas se puede representar como si fuese la relación de consecuencia deductiva indicada.

Demostración. La prueba que presenta Atocha Aliseda en [AL97], [AL03] y [AL06] es muy esquemática, por lo que se expondremos aquí una 'reconstrucción' detallada de la misma que nos 'allane el camino' para las que se presenten más adelante de otros resultados de similar naturaleza.

Sean $\Longrightarrow_{cf}$ una relación de consecuencia lógica cuyas premisas forman una cadena finita ($X \in CADF(FOR(\mathcal{L}))$) y cuya conclusión es un solo elemento del conjunto $FOR(\mathcal{L})$ ($A \in FOR(\mathcal{L})$). Asumimos que la relación inferencial deductiva clásica está caracterizada semánticamente por la siguiente propiedad relativa a

[26] Diremos que el primero es una base generadora de este último.

modelos:

$$X \vDash A \text{ si y sólo si } (\bigcap_{B \in \bar{X}} Mod(B)) \subseteq Mod(A)^{27}.$$

Así pues, debemos probar que:

$$X \Longrightarrow_{cf} A \text{ si y sólo si } (\bigcap_{B \in \bar{X}} Mod(B)) \subseteq Mod(A),$$

siendo $\Longrightarrow_{cf}$ una relación de consecuencia lógica que satisface las propiedades de reflexividad [At-c1], monotonía [At-c1], corte [At-c1] y contracción (por la derecha) [At-c1].

Para ello adoptamos una semántica según la cual los modelos de cada fórmula son las cadenas finitas de fórmulas con las cuales se pueden establecer enunciados inferenciales correctos tales que las premisas vengan dadas por una de esas cadenas y la conclusión por la mencionada fórmula. Es decir, siendo Y una cadena finita cualquiera de fórmulas, para cada fórmula $C \in \bar{Y}$ su conjunto de modelos es:

$$Mod(C) = \{Z \;/\; Z \in CADF(FOR(\mathcal{L})) \;\dot{\&}\; Z \Longrightarrow_{cf} C\}.$$

Probaremos el anterior *si y sólo si* descomponiéndolo en dos implicaciones recíprocas:

1. Si $X \Longrightarrow_{cf} A$ entonces $(\bigcap_{B \in \bar{X}} Mod(B)) \subseteq Mod(A)$:
   Por hipótesis tenemos que $X \Longrightarrow_{cf} A$ y analizaremos el siguiente conjunto: $\bigcap_{B \in \bar{X}} Mod(B)$. Caben dos posibilidades:

   a) Que sea $(\bigcap_{B \in \bar{X}} Mod(B)) = \varnothing$: en cuyo caso, obviamente, $(\bigcap_{B \in \bar{X}} Mod(B)) \subseteq Mod(A)$.

   b) Que sea $(\bigcap_{B \in \bar{X}} Mod(B)) \neq \varnothing$: en ese caso elegimos un elemento cualquiera (Z_0) de dicho conjunto (por tanto, Z_0 es una cadena finita de fórmulas). Dado que Z_0 es un elemento de $Mod(B)$ para cada $B \in \bar{X}$ y dado que la relación de consecuencia $\Longrightarrow_{cf}$ satisface la propiedad de corte [At-c1], podemos substituir (usando sólo un número finito de pasos) en $X \Longrightarrow_{cf} A$ cada cadena unitaria $\lceil B \rceil \subseteq_c X$ por

[27] Esta expresión recoge perfectamente el carácter apodíctico de la relación inferencial deductiva: el rasgo de que es imposible que se satisfagan las premisas y no se satisfaga la conclusión queda aquí formalizado en la cualidad de que, necesariamente, todos los modelos de las premisas son modelos de la conclusión.

Z_0. Luego, por la iteración un número finito de veces de la regla de contracción (por la derecha) [At-c1], eliminamos de cada una de las fórmulas repetidas todas las ocurrencias salvo la que está más a la izquierda. De este modo obtenemos $Z_0 \Longrightarrow_{cf} A$ y de aquí, teniendo en cuenta la definición de $Mod(A)$, concluimos que $Z_0 \in Mod(A)$. Y como Z_0 era un elemento cualquiera de $\bigcap_{B \in \bar{X}} Mod(B)$, se infiere que $(\bigcap_{B \in \bar{X}} Mod(B)) \subseteq Mod(A)$.

2. Si $(\bigcap_{B \in \bar{X}} Mod(B)) \subseteq Mod(A)$ entonces $X \Longrightarrow_{cf} A$:
En esta segunda parte nuestra hipótesis es que $(\bigcap_{B \in \bar{X}} Mod(B)) \subseteq Mod(A)$. Por la reflexividad [At-c1] de la relación de consecuencia $\Longrightarrow_{cf}$ tenemos que para cada $B \in \bar{X}$ el conjunto $Mod(B)$ es no vacío, de hecho a él pertenece al menos la cadena unitaria $\lceil B \rceil$. Ahora aplicando iteradamente la monotonía [At-c1] a partir de $\lceil B \rceil \Longrightarrow_{cf} B$ podemos ir concatenando cada una las restantes cadenas unitarias $B \subseteq_c X$ en la posición adecuada hasta que en un número finito de pasos obtengamos $X \Longrightarrow_{cf} B$; por tanto, hemos determinado que $X \in Mod(B)$. Y este proceso lo podemos repetir con cada una de las fórmulas B de $\bar{X}$, por lo que concluimos que $X \in \bigcap_{B \in \bar{X}} Mod(B)$. Ahora bien, si $X \in Mod(B)$ y, por hipótesis, $(\bigcap_{B \in \bar{X}} Mod(B)) \subseteq Mod(A)$, entonces $X \in Mod(A)$; y por definición de $Mod(A)$ tenemos que $X \Longrightarrow_{cf} A$.

■

Reflexionando ahora sobre el 'marco general' en el que se ha enunciado y demostrado este teorema de representación sobresale la circunstancia de que ha sido restringido a relaciones de consecuencia lógica con un número finito de premisas. Sin embargo, nosotros consideramos que aquélla debiera ser eliminada, por cuanto es habitual en ciertas partes de la Matemática y de la Lógica (especialmente en la Teoría de Conjuntos y la Metalógica) el uso de inferencias con un número infinito, incluso no numerable, de premisas. Esto es una necesidad real y no un mero anhelo teórico: por ejemplo, teniendo como universo de discurso el conjunto de los números reales, podría ser necesario en algún caso representar que, si se toman como premisas las fórmulas que indican para cada uno de los números reales que éste satisface cierto predicado P, ello permite inferir una sola fórmula en la que su operador principal es un cuantificador universal cuyo índice cuantificacional recorre el citado conjunto y en la que su matriz cuantificacional consiste en predicar la cualidad indicada de los elementos que son designados por la mencionada variable individual.

Obviamente en la lógica proposicional clásica no podemos encontrarnos una situación en la que las premisas sean una cantidad infinita no numerable (puesto que, de hecho, el conjunto de fórmulas bien formadas del lenguaje de dicha lógica tiene una cardinalidad estrictamente inferior). Se podría pensar entonces que, dado que nuestra finalidad inmediata es caracterizar estructuralmente la relación de consecuencia deductiva sobre la que se apoya la relación inferencial abductiva ordinaria, y dado que en esta investigación nos hemos centrado en el ámbito proposicional, no sería necesario tal grado de generalidad. Sin embargo, lo presentado en éste y los dos capítulos siguientes está pensado desde la óptica del Análisis Estructural Lógico y, como ya se mencionó, en dicho tratamiento no se introducen restricciones relativas ni a los símbolos lógicos ni tampoco a los símbolos peculiares de los lenguajes lógicos (así pues, en particular, no se distingue entre orden cero –o proposicional–, primer orden y orden superior; igualmente tampoco se hace distinción entre los sistemas que cuentan sólo con operadores asertóricos y los que a éstos añaden al menos uno modal). Así pues, lo presentado desde esta perspectiva estructural debería mantenerse también en el caso de que pudiesen existir una cantidad no numerable de premisas.

3.2.2. Deducción con una subfamilia arbitraria de fórmulas como premisas

Para describir con el nivel deseado de generalidad las propiedades estructurales ya citadas, y otras que presentaremos en adelante, no podremos usar la notación inferencial más habitual, según la cual en la relación de consecuencia lógica las premisas forman un mero conjunto de fórmulas en el que no es relevante si un elemento ocurre más de una vez y tampoco lo es en qué orden relativo ocurren los mismos; así pues, la citada relación inferencial es un conjunto que satisface lo siguiente:

$$\Longrightarrow_{cj} \subseteq \wp(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L}).$$

Tampoco es suficiente contar con la no tan usual notación secuencial, ni siquiera llevándola 'más lejos' de lo contemplado en el planteamiento anterior y con ello admitiendo cadenas infinitas de premisas, puesto que las cadenas son, atendiendo a su definición, necesariamente numerables y, por este motivo, no consiguen toda la generalidad que se requiere. Por todo ello, desembocamos en la necesidad de tratar a las familias como familias indexadas de fórmulas de cardinalidad arbitraria, lo cual supone aunar la posibilidad de una cantidad infinita supernumerable de premisas (que sí era posible en la versión con conjuntos) con la relevancia de la multiplicidad y el orden relativo de las fórmulas (de lo que sí daba cuenta la versión secuencial).

Ahora seguirán unos párrafos en los que expondremos de forma precisa cómo se obtienen y manipulan todos los 'ingredientes' que aparecen en este nuevo tratamiento lógico formal de la cuestión (sobre todo teniendo en cuenta que nuestra aspiración de que sea adecuada para subfamilias cualesquiera, eventualmente con cardinalidad infinita no numerable, nos pone de frente a dificultades de gran calado.).

Dado el lenguaje lógico $\mathcal{L}$ cuyo conjunto $FOR(\mathcal{L})$ es no vacío y dado un conjunto $\mathcal{E}$[28] de cardinalidad arbitraria y totalmente ordenado por la relación $\preccurlyeq_{\mathcal{E}}$, la función f de $\mathcal{E}$ en el conjunto $FOR(\mathcal{L})$ es una familia totalmente ordenada por el orden inducido por $\preccurlyeq_{\mathcal{E}}$. Definamos $FAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))$ como el conjunto de las funciones que tienen como conjunto inicial $\mathcal{E}$ y como conjunto final $FOR(\mathcal{L})$ (es decir, $FAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})) = \{f \;/\; (f : \mathcal{E} \longrightarrow FOR(\mathcal{L}))$ es una función$\}$). A continuación obtenemos el conjunto de las subfamilias[29] totalmente ordenadas –eventualmente vacías o infinitas, y en el segundo caso numerables o no– de fórmulas que se pueden construir a partir de $\mathcal{E}$[30]. Dicho conjunto de las subfamilias totalmente ordenadas es:

$$SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})) = \{\hat{f} \;/\; \hat{f} \subseteq f \;\;\&\;\; f \in FAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))\}.$$

En este caso hemos optado por presentar al conjunto de las subfamilias como el de los subconjuntos de elementos de cada una de las familias definidas a partir del conjunto de etiquetas; pero podríamos haber procedido de otra manera y haber obtenido un resultado similar: el conjunto de las subfamilias podría ser delimitado como el de las funciones que se pueden definir a partir de los subconjuntos del conjunto de etiquetas inicial. Obviamente, si el conjunto de etiquetas es el conjunto de los números naturales u otro cualquiera que sea numerable las familias serían sucesiones; además, si se impusiesen las condiciones adicionales de que los subconjuntos del conjunto numerable de etiquetas fuesen convexos y finitos, entonces

[28] A $\mathcal{E}$ se le suele llamar *conjunto de etiquetas* o *conjunto de índices*.

[29] En realidad toda subfamilia es una familia, pero nos interesa darle este nombre diferente para distinguir cuándo una es subconjunto de otra.

[30] A partir de ahora, y con el objetivo de mayor brevedad, con el rótulo escueto *subfamilias* nos referiremos exclusivamente a éstas.

las subfamilias serían las cadenas finitas que anteriormente fueron presentadas.

En adelante, $\Gamma \Longrightarrow \varphi$ –o, si se quiere escribir el relator en posición prefija, $\Longrightarrow (\Gamma, \varphi)$– representará un enunciado inferencial que indica que a partir de la subfamilia de fórmulas Γ se puede concluir lógicamente la fórmula φ. Visto de modo general, la relación inferencial $\Longrightarrow$ es una relación binaria del tipo que seguidamente se indica:

$$\Longrightarrow \subseteq SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L}).$$

Dada una familia Γ, designaremos mediante $\bar{\Gamma}$ a su conjunto de fórmulas asociado, o sea al conjunto-imagen de la subfamilia (el conjunto de las segundas componentes de los elementos de la subfamilia). Por otra parte, $\langle\gamma\rangle$ no será sino otra manera de escribir $\{(\varepsilon, \gamma)\}$ sin preocuparnos de la etiqueta que ocupa la primera posición del par –puesto que éste es el único elemento de la familia unitaria, realmente no perdemos con ello ninguna información relevante–. Mediante el símbolo "$\langle\ \rangle$" designaremos a la familia vacía[31].

Nosotros estamos interesados en relaciones entre subfamilias (en particulara en las de inclusión no estricta, inclusión estricta, igualdad y desigualdad) que mantengan la multiplicidad y el orden relativos de las segundas componentes de sus elementos, pero que no exijan que las etiquetas sean coincidentes. Esto nos llevará a definir nuevas relaciones binarias sujetas a consideraciones más complicadas y, con el fin de poner en aviso sobre esta circunstancia, usaremos los símbolos especiales $\ddot{\subseteq}$, $\ddot{\subsetneq}$, $\ddot{=}$ y $\ddot{\neq}$, respectivamente.

Definición 46 (Relaciones 'en bloque' entre subfamilias)**.**
Sean Γ y Δ dos subfamilias de elementos del conjunto no vacío $FOR(\mathcal{L})$, etiquetadas respectivamente por los conjuntos totalmente ordenados $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$; decimos que se verifica la relación con el nombre que en cada apartado se menciona si y sólo si se cumplen todas las condiciones que en cada caso se indican:

- *Relación de inclusión 'en bloque' no estricta de la primera en la segunda (lo cual anotamos como $\Gamma \ddot{\subseteq} \Delta$):*
  $\exists\Lambda\exists g(\Lambda \subseteq \Delta\ \&\ (g : \Gamma \longrightarrow \Lambda)$ *es una función biyectiva* $\&\ \forall\gamma_1, \gamma_2, \lambda_1, \lambda_2$ $((\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma\ \&\ \gamma_1 = (p_1, \varphi_1)\ \&\ \gamma_2 = (p_2, \varphi_2)\ \&\ \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda\ \&\ \lambda_1 =$

[31] Dado que una familia es un conjunto, también podríamos haber usado el habitual símbolo "$\varnothing$" para designar a la citada familia vacua, pero en ciertas ocasiones resultará preferible no usar ese símbolo por distintos motivos, entre ellos por su parecido con alguna de las letras griegas usadas con otros fines.

$g(\gamma_1) = (q_1, \psi_1)$ & $\lambda_2 = g(\gamma_2) = (q_2, \psi_2)) \Rightarrow (p_1 \preccurlyeq_{\mathcal{P}} p_2 \Leftrightarrow q_1 \preccurlyeq_{\mathcal{Q}} q_2))$ & $\forall \delta_1, \delta_2, \delta((\delta_1, \delta_2 \in \Lambda$ & $\delta \in \Delta$ & $\delta_1 = (q_3, \psi_3)$ & $\delta_2 = (q_4, \psi_4)$ & $\delta = (q, \psi)$ & $q_3 \preccurlyeq_{\mathcal{Q}} q \preccurlyeq_{\mathcal{Q}} q_4) \Rightarrow \delta \in \Lambda))$[32].

- *Relación de igualdad 'en bloque' entre ambas (lo cual anotamos como* $\Gamma \ddot{=} \Delta$*):*
  $(\Gamma \ddot{\subseteq} \Delta)$ & $(\Delta \ddot{\subseteq} \Gamma)$.

- *Relación de desigualdad 'en bloque' entre ambas (lo cual anotamos como* $\Gamma \ddot{\neq} \Delta$*):*
  $\sim(\Gamma \ddot{\subseteq} \Delta) \triangledown \sim(\Delta \ddot{\subseteq} \Gamma)$.

- *Relación de inclusión 'en bloque' estricta de la primera en la segunda (lo cual anotamos como* $\Gamma \ddot{\subsetneq} \Delta$*):*
  $(\Gamma \ddot{\subseteq} \Delta)$ & $(\Delta \ddot{\neq} \Gamma)$.

En la anterior definición de la relación de inclusión 'en bloque' no estricta entre subfamilias, los tres primeros miembros que están unidos conjuntivamente establecen que existe al menos un isomorfismo entre una subfamilia Γ y una parte (propia o impropia) Λ de otra Δ; el cuarto miembro unido conjuntivamente exige que esa parte Λ sea un 'bloque' (o mejor, un conjunto convexo). De hecho, las condiciones definen en cualquier caso un recubrimiento disjunto de Δ en tres subfamilias (eventualmente vacías o coincidentes con Δ): un 'bloque' inicial (Σ_1), un 'bloque' intermedio (Λ) y un 'bloque' final (Σ_2).

En el desarrollo de estos capítulos en los que abordamos el análisis estructural de relaciones inferenciales usaremos una notación con la que pondremos de manifiesto cuándo existen tales relaciones entre las subfamilias sin tener que hacer consideraciones complejas como las que se indican en la definición previa. Concretamente, para la consecución de este objetivo será crucial la operación de concatenación de subfamilias que seguidamente se explica. Dicha operación es diferente de la mera unión de las mismas, aunque en algunos casos pueda coincidir el resultado. En particular, la concatenación tiene que mantener la multiplicidad y el orden relativo de las segundas componentes de los elementos de las subfamilias así como el orden en el que se operan estas últimas. Por ello, la concatenación reetiqueta de modo conveniente los elementos de las subfamilias, de modo que cada uno de ellos tendrá como primera componente del par otro par ordenado en el que la primera subcomponente

[32] En particular, consideramos biyectiva a la función que va del conjunto vacío al conjunto vacío.

indicará cuál es la subfamilia de la que procede y la segunda subcomponente será la que antes era la primera componente del par.

Definición 47 (Concatenación generalizada de una familia de subfamilias)**.**
Sea $\mathcal{F} = \{\Gamma_p \ / \ p \in \mathcal{P}\}$ *una familia de elementos de* $SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))$ *etiquetada por el conjunto* $\mathcal{P}$*, este último totalmente ordenado por la relación* $\preccurlyeq_{\mathcal{P}}$*. La concatenación generalizada de los elementos de* $\mathcal{F}$ *en el orden que se establece en* $\mathcal{P}$ *es otra subfamilia* Δ *de elementos del conjunto no vacío* $FOR(\mathcal{L})$ *etiquetada por el conjunto* $\mathcal{Q}$*, este último totalmente ordenado por la relación* $\preccurlyeq_{\mathcal{P}\times\mathcal{E}}$ *(inducida por* $\preccurlyeq_{\mathcal{P}}$ *y* $\preccurlyeq_{\mathcal{E}}$*) tal que:*

1. $(\cdot\mathcal{F}) := \{(q,\gamma) \ / \ q \in \mathcal{Q} \ \& \ q = (p,\varepsilon) \ \& \ (\varepsilon,\gamma) \in \Gamma_p\} = \Delta$.
2. $\mathcal{Q} := \{(p,\varepsilon) \ / \ p \in \mathcal{P} \ \& \ \varepsilon \in \mathcal{E}\}$.
3. $\forall q_1 \forall q_2((q_1, q_2 \in \mathcal{Q} \ \& \ q_1 = (p_1,\varepsilon_1) \ \& \ q_2 = (p_2,\varepsilon_2) \ \& \ p_1 \preccurlyeq_{\mathcal{P}} p_2) \Rightarrow q_1 \preccurlyeq_{\mathcal{P}\times\mathcal{E}} q_2)$.
4. $\forall q_1 \forall q_2((q_1, q_2 \in \mathcal{Q} \ \& \ q_1 = (p,\varepsilon_1) \ \& \ q_2 = (p,\varepsilon_2) \ \& \ \varepsilon_1 \preccurlyeq_{\mathcal{E}} \varepsilon_2) \Rightarrow q_1 \preccurlyeq_{\mathcal{P}\times\mathcal{E}} q_2)$.

Cuando la familia de subfamilias que se concatenan sea finita en lugar de la notación anterior (con el operador en posición prefija) usaremos otra en la que el símbolo "·" aparecerá en posición interfija, mediando entre cada par de subfamilias concatenadas. Dado que esta operación sobre el conjunto de las subfamilias arbitrarias de fórmulas de un lenguaje es asociativa podemos iterar la citada operación binaria sin necesidad de escribir paréntesis para indicar cómo se agrupan las subfamilias operadas:

Proposición 48.
Sean $\Gamma, \Delta, \Lambda \in SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))$*, se satisface la siguiente propiedad:*

$$(\Gamma \cdot \Delta) \cdot \Lambda \doteqdot \Gamma \cdot (\Delta \cdot \Lambda).$$

En consecuencia, cualquiera de los miembros de la anterior igualdad 'en bloque' entre subfamilias puede ser escrito más brevemente como $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda$.

Nuevamente, la prueba de esta proposición es obvia aunque laboriosa y también tiene como única dificultad el aspecto notacional. La idea nuclear vuelve a ser que entre ambas expresiones a lo sumo varían las etiquetas de algunas fórmulas, pero en ningún caso las fórmulas que la componen ni el orden entre ellas. Por tanto, se satisface la relación 'en bloque' $\ddot{=}$ entre subfamilias arbitrarias. Dado que se puede encontrar fácilmente en textos en los que se explica el manejo de las subfamilias finitas, la omitimos aquí.

Como ejemplo de los últimos aspectos expuestos, y retomando lo dicho anteriormente a tenor de la relación de inclusión 'en bloque' no estricta, podemos anotar el hecho de que Λ sea un 'bloque' inicial, intermedio o final de Δ, respectivamente como:

- $\Delta \ddot{=} \Lambda \cdot \Sigma_1$.
- $\Delta \ddot{=} \Sigma 1 \cdot \Lambda \cdot \Sigma_2$.
- $\Delta \ddot{=} \Sigma 1 \cdot \Lambda$.

Presentemos ya de un modo más general las citadas propiedades estructurales, señalando que nuestra propuesta se puede apartar de otras que se encuentran en libros y artículos sobre el tema no sólo en cuanto a que lo que en ellas son secuencias aquí son subfamilias; en particular, con respecto a las versiones anteriormente mostradas existen las siguientes diferencias: de la reflexividad, la monotonía, la contracción y la permutación presentamos una versión más fuerte (de tal modo que las análogas anteriores son, respectivamente, casos particulares de éstas) –de la contracción daremos las dos versiones distintas que resultan según el lado en el que se efectúe la eliminación–; por último, la que antes se llamaba *corte* nosotros la nombramos como *transitividad*, dado que aparece otra diferente bajo el primer nombre[33]. A este respecto, es importante señalar que, aunque en algunas lógicas,

[33] En las disciplinas formales más que en ninguna otra podemos nombrar las cosas despreocupados de la significación que habitualmente tienen esas palabras, puesto que lo realmente decisivo son las determinaciones que explícitamente se establecen en las correspondientes definiciones. Sin embargo, siquiera por ser un elemento facilitador de la comprensión y la conservación en la memoria de ciertas informaciones, nos parece conveniente que al nombrar tengamos en cuenta los sentidos prefijados en la lengua cotidiana. Es justamente por esto que nos ha parecido justificado cambiar la asignación del nombre previamente indicado para una regla, buscando con ello que el ahora fijado sea más ilustrativo de lo que realmente se consigue con la aplicación de la misma. Así queda de manifiesto si se contemplan las dos reglas mencionadas a la luz de las siguientes acepciones extraídas del diccionario de la R.A.E.: "que pasa y se transfiere de uno a otro" (primera acepción del adjetivo *transitivo*) y *recortar* (uno de los múltiples significados del verbo *cortar*).

entre ellas las deductivas clásicas, ambas propiedades coinciden, ello no ocurre en general, de modo que existen sistemas lógicos que satisfacen una de ellas y no la otra.

En lo que sigue dentro de este capítulo y en los dos siguientes, Γ, Δ, Θ, Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ, Υ y Ω serán subfamilias cualesquiera de elementos del conjunto no vacío $FOR(\mathcal{L})$ y las correspondientes letras minúsculas designarán elementos cualesquiera de este último conjunto[34]. He aquí una nueva presentación de reglas estructurales, algunas de las cuales, entre otras, pueden ser satisfechas por las relaciones de consecuencia lógica binaria (esta vez con familias cualesquiera de premisas[35]):

II.1- ***Reflexividad [NP-s1]***[36]***:***

$$\frac{}{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}\ .$$

II.2- ***Monotonía [NP-s1]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}\ .$$

II.3- ***Transitividad [NP-s1]:***

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi;\ \Delta \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi}\ .$$

II.4- ***Corte [NP-s1]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi;\ \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}{\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi}\ .$$

II.5- ***Contracción por la derecha [NP-s1]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}\ .$$

II.6- ***Contracción por la izquierda [NP-s1]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}\ .$$

[34] Al decir que son fórmulas o subfamilias de fórmulas cualesquiera estamos indicando que están tácitamente cuantificadas universalmente, de modo que aunque no escribiremos los símbolos correspondientes a dichos cuantificadores metalingüísticos, debemos asumir que ellos están implícitos.

[35] Eventualmente puede ser una familia vacía, sin que ello suponga ningún inconveniente. Así, por ejemplo, en la lógica deductiva clásica las fórmulas universalmente válidas / los teoremas se pueden inferir a partir de un conjunto vacuo de premisas.

[36] "NP-s" va en lugar de "Nuestra propuesta-versión con subfamilias". El que aparezca a continuación un número viene motivado porque haremos más adelante otra presentación de estas mismas reglas.

II.7- ***Reemplazo de repeticiones por la derecha [NP-s1]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Psi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}\,.$$

II.8- ***Reemplazo de repeticiones por la izquierda [NP-s1]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}{\Gamma \cdot \Psi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}\,.$$

II.9- ***Permutación [NP-s1]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}\,.$$

Proposición 49.
Cada una de las anteriores reglas [NP-s1] cumple que en el conjunto formado por sus precondiciones y su postcondición no hay al menos dos condiciones estructuralmente incompatibles entre sí e igualmente ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar condiciones incompatibles.

Demostración. Su prueba es elemental: simple inspección ocular de que ninguna de las reglas tiene una condición negativa, por lo que no puede haber un par de condiciones estructuralmente incompatibles ni pueden surgir enunciados inferenciales contradictorios tras la especificación de dichas condiciones. ■

Comenzaremos indicando cuáles serán las propiedades a partir de las que derivaremos las demás:

Definición 50 (Relación inferencial de tipo RTCd [NP-s1])**.**
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow$, diremos que es de tipo RTCd [NP-s1] si y sólo si satisface las siguientes propiedades estructurales:

1. *Reflexividad [NP-s1].*
2. *Transitividad [NP-s1].*
3. *Contracción por la derecha [NP-s1].*

Al conjunto de estas tres propiedades estructurales, consideradas básicas, lo designamos $\mathbb{P}^{B}_{\text{[NP-s1]}}$. *Al conjunto de todas las reglas derivadas a partir de las anteriores lo denominamos* $\mathbb{P}_{\text{[NP-s1]}}$.

A partir de dichas propiedades básicas podremos derivar las restantes que tienen la etiqueta [NP-s1]. En ese proceso comenzaremos con la derivación de las propiedades de monotonía [NP-s1] y de corte [NP-s1] por requerir sólo dos de las propiedades básicas.

Proposición 51.
Una relación de consecuencia lógica que satisfaga reflexividad [NP-s1] y transitividad [NP-s1], necesariamente satisface monotonía [NP-s1].

Demostración. Tomamos como hipótesis la precondición de la propiedad de monotonía [NP-s1]:

$$1.\ \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi.$$

Distinguimos dos casos:

a) $\Gamma \cdot \Lambda \doteqdot \langle\ \rangle$. En este caso tenemos que la hipótesis se convierte en:

$$2.\ \langle\ \rangle \Longrightarrow \varphi.$$

Ahora, aplicando la reflexividad [NP-s1], que no está sujeta a condiciones previas, podemos introducir:

$$3.\ \Delta \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \varphi.$$

A continuación, aplicando la transitividad [NP-s1] sobre 2 y 3, obtenemos:

$$4.\ \Delta \cdot \langle\ \rangle \Longrightarrow \varphi.$$

Lo cual, operando la subfamilia vacía, da como resultado:

$$5.\ \Delta \Longrightarrow \varphi.$$

Y, dado que $\Gamma \cdot \Lambda \doteqdot \langle\ \rangle$, por propiedades elementales de la concatenación de subfamilias tenemos que $\Gamma \doteqdot \langle\ \rangle$ y $\Lambda \doteqdot \langle\ \rangle$, por lo que, de nuevo operando con la subfamilia vacía, se sigue que $\Delta \doteqdot \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda$. De este modo, reescribimos la línea 5 como sigue:

$$6.\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi.$$

b) $\Gamma \cdot \Lambda \mathrel{\ddot{\neq}} \langle\ \rangle$. De esto, por propiedades elementales de la concatenación de familias, se sigue que $\Gamma \mathrel{\ddot{\neq}} \langle\ \rangle$ o $\Lambda \mathrel{\ddot{\neq}} \langle\ \rangle$. Distingamos ahora dos subcasos:

b,1) $\Gamma \mathrel{\ddot{\neq}} \langle\ \rangle$. Ahora, aplicando propiedades elementales de la concatenación de familias, podemos encontrar un recubrimiento disjunto de Γ, por ejemplo: $\Gamma \mathrel{\ddot{=}} \Sigma \cdot \langle\psi\rangle$. En este caso tenemos que la hipótesis se convierte en:

$$2.\ \Sigma \cdot \langle\psi\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi.$$

Y aplicando la reflexividad [NP-s1] podemos introducir:

$$3.\ \langle\psi\rangle \cdot \Delta \Longrightarrow \psi.$$

A continuación, aplicando la transitividad [NP-s1] sobre 3 y 2, obtenemos:

$$4.\ \Sigma \cdot \langle\psi\rangle \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi.$$

Y, dado que $\Gamma \mathrel{\ddot{=}} \Sigma \cdot \langle\psi\rangle$, reescribimos la línea 4 como sigue:

$$5.\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi.$$

b,2) $\Lambda \mathrel{\ddot{\neq}} \langle\ \rangle$. Ahora, aplicando propiedades elementales de la concatenación de familias, podemos encontrar un recubrimiento disjunto de Λ, por ejemplo: $\Lambda \mathrel{\ddot{=}} \langle\psi\rangle \cdot \Sigma$. En este caso tenemos que la hipótesis se convierte en:

$$2.\ \Gamma \cdot \langle\psi\rangle \cdot \Sigma \Longrightarrow \varphi.$$

Y aplicando la reflexividad [NP-s1] podemos introducir:

$$3.\ \Delta \cdot \langle\psi\rangle \Longrightarrow \psi.$$

A continuación, aplicando la transitividad [NP-s1] sobre 3 y 2, obtenemos:

$$4.\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \langle\psi\rangle \cdot \Sigma \Longrightarrow \varphi.$$

Y, dado que $\Lambda \mathrel{\ddot{=}} \langle\psi\rangle \cdot \Sigma$, reescribimos la línea 4 como sigue:

$$5.\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi.$$

Y, en cualquiera de las tres situaciones, la última línea coincide con la postcondición de la citada propiedad de monotonía [NP-s1]. ■

Así pues, a diferencia de lo que ocurría con las propiedades estructurales [At-c1], la monotonía [NP-s1] es derivable a partir de las otras propiedades básicas de esta nueva propuesta de reglas. Veamos ahora qué ocurre con las restantes propiedades [NP-s1].

Proposición 52.
Una relación de consecuencia lógica que satisfaga transitividad [NP-s1] y contracción por la derecha [NP-s1], necesariamente satisface la propiedad de corte [NP-s1].

Demostración. Partimos de las dos precondiciones de la regla de corte [NP-s1] y a continuación anotamos el resultado de aplicar la propiedad estructural que en cada línea se indica entre paréntesis:

1. $\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi$ (hipótesis).
2. $\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (hipótesis).
3. $\Gamma \cdot \Gamma \cdot \Lambda \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi$ (por transitividad [NP-s1] sobre 1 y 2).
4. $\Gamma \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi$ (por contracción por la derecha [NP-s1] sobre 3).
5. $\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi$ (por contracción por la derecha [NP-s1] sobre 4).

Y esto último coincide con la postcondición de la propiedad de corte [NP-s1]. ■

A continuación hacemos las derivaciones de aquellas propiedades que requieren las tres propiedades estructurales que hemos considerado básicas.

Proposición 53.
Una relación de consecuencia de tipo RTCd [NP-s1] necesariamente satisface las siguientes propiedades estructurales:
a) Contracción por la izquierda [NP-s1].
b) Reemplazo de repeticiones por la derecha [NP-s1].
c) Reemplazo de repeticiones por la izquierda [NP-s1].
d) Permutación [NP-s1].

Demostración. En cada uno de los casos partimos de la precondición de la propiedad que se quiere probar y a continuación anotamos el resultado de aplicar la propiedad estructural que en cada línea se indica entre paréntesis. Encadenamos las pruebas de manera que podamos hacer uso de las propiedades ya derivadas en las siguientes pruebas.

a) Contracción por la izquierda [NP-s1]:

1. $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (hipótesis).
2. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por monotonía [NP-s1] sobre 1).
3. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por contracción por la derecha [NP-s1] sobre 2).
4. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Gamma \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por contracción por la derecha [NP-s1] sobre 3).
5. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por contracción por la derecha [NP-s1] sobre 4).

Esta última es la postcondición de la citada propiedad de contracción por la izquierda [NP-s1].

b) Reemplazo de repeticiones por la derecha [NP-s1]:

1. $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (hipótesis).
2. $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por contracción por la derecha [NP-s1] sobre 1).
3. $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Psi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por monotonía [NP-s1] sobre 2).

Siendo esta última la postcondición de la citada propiedad de reemplazo de repeticiones por la derecha [NP-s1].

c) Reemplazo de repeticiones por la izquierda [NP-s1]:

1. $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (hipótesis).
2. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por contracción por la izquierda [NP-s1] sobre 1).
3. $\Gamma \cdot \Psi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por monotonía [NP-s1] sobre 2).

Lo cual coincide con la postcondición de la citada propiedad de reemplazo de repeticiones por la izquierda [NP-s1].

d) Permutación [NP-s1]:

1. $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (hipótesis).
2. $\Gamma \cdot \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por monotonía [NP-s1] sobre 1).
3. $\Gamma \cdot \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Omega \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por monotonía [NP-s1] sobre 2).
4. $\Gamma \cdot \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por contracción por la derecha [NP-s1] sobre 3).
5. $\Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por contracción por la izquierda [NP-s1] sobre 4).

Finalmente, el resultado obtenido coincide con la postcondición de la regla de permutación [NP-s1]. ■

Como ha quedado de manifiesto, en la presentación [NP-s1] hemos podido derivar la contracción por la izquierda [NP-s1] a partir de la monotonía [NP-s1] y hemos derivado la contracción por la derecha [NP-s1] con un procedimiento que no ha dependido del tamaño de las familias que flanquean a la que se contrae, dado que en esta presentación podemos introducir o eliminar una familia de fórmulas en un solo paso.

Ya dijimos que uno de nuestros objetivos era generalizar el citado *teorema de van Benthem*, lo cual hacemos justamente a continuación:

Teorema 54 (Teorema de representación de la relación inferencial deductiva clásica [NP-s1])**.**
Las propiedades de reflexividad [NP-s1], transitividad [NP-s1] y contracción por la derecha [NP-s1] son condiciones suficientes de la relación de consecuencia deductiva clásica para subfamilias de premisas con un cardinal arbitrario, en el sentido de que cualquier relación inferencial con dicha cantidad de premisas que satisfaga las tres propiedades indicadas se puede representar como si fuese la relación de consecuencia deductiva indicada.

Demostración. Seguiremos el esquema de demostración que para el caso de cadenas finitas presentamos anteriormente, aunque obviamente habrá que introducir cambios en algunos puntos. Sean $\Longrightarrow$ una relación de consecuencia lógica,

$\varphi \in FOR(\mathcal{L})$ y $\Gamma \in SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))$. Asumimos que la relación inferencial deductiva singular está caracterizada semánticamente por la siguiente propiedad relativa a modelos:

$$\Gamma \models_d \varphi \text{ si y sólo si } (\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \subseteq Mod(\varphi)^{37}.$$

Así pues, debemos probar que:

$$\Gamma \Longrightarrow \varphi \text{ si y sólo si } (\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \subseteq Mod(\varphi),$$

siendo $\Longrightarrow$ una relación de consecuencia lógica que satisface las propiedades de reflexividad [NP-s1], transitividad [NP-s1] y contracción por la derecha [NP-s1].

Para ello adoptamos una semántica según la cual los modelos de cada fórmula son subfamilias de fórmulas con las cuales se pueden establecer enunciados inferenciales correctos tales que las premisas vengan dadas por una de esas subfamilias y la conclusión por la mencionada fórmula. Es decir, siendo Ψ una subfamilia cualquiera de fórmulas, para cada fórmula $\psi \in \bar{\Psi}$ su conjunto de modelos es:

$$Mod(\psi) = \{\Sigma \;/\; \Sigma \in SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))\ \dot{\&}\ \Sigma \Longrightarrow \psi\}.$$

Probaremos el anterior *si y sólo si* descomponiéndolo en dos implicaciones recíprocas:

1. Si $\Gamma \Longrightarrow \varphi$ entonces $(\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \subseteq Mod(\varphi)$:
   Por hipótesis tenemos que $\Gamma \Longrightarrow \varphi$ y analizamos el conjunto $\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}} Mod(\gamma)$. Caben dos posibilidades:

   a) Que sea $(\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) = \varnothing$: en cuyo caso, obviamente, $(\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \subseteq Mod(\varphi)$.

   b) Que sea $(\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \neq \varnothing$: en ese caso elegimos un elemento cualquiera (Σ_0) de dicho conjunto (por tanto, Σ_0 es una subfamilia de fórmulas). Dado que Σ_0 es un elemento de $Mod(\gamma)$ para cada γ y dado que la relación de consecuencia $\Longrightarrow$ satisface la propiedad de transitividad [NP-s1], podemos substituir en $\Gamma \Longrightarrow \varphi$ cada subfamilia unitaria

[37] Esta expresión recoge perfectamente el carácter apodíctico de la relación inferencial deductiva: el rasgo de que es imposible que se satisfagan las premisas y no se satisfaga la conclusión queda aquí formalizada en la cualidad de que, necesariamente, todos los modelos de las premisas son modelos de la conclusión.

$\langle\gamma\rangle \ddot{\subseteq} \Gamma$ por Σ_0. Para más detalles, si $\Gamma \doteqdot \Delta \cdot \langle\gamma\rangle \cdot \Lambda$, el resultado de una de esas substituciones es $\Gamma' \doteqdot \Delta \cdot \Sigma_0 \cdot \Lambda$. Por tanto, Γ' es una nueva subfamilia. Ahora, por la regla de contracción por la derecha [NP-s1] eliminamos cada una de las subfamilias Σ_0 salvo la primera y obtenemos que $\Sigma_0 \Longrightarrow \varphi$ y de aquí, teniendo en cuenta la definición de $Mod(\varphi)$, concluimos que $\Sigma_0 \in Mod(\varphi)$. Y como Σ_0 era un elemento cualquiera de $\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)$, se infiere que $(\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \subseteq Mod(\varphi)$.

2. Si $(\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \subseteq Mod(\varphi)$ entonces $\Gamma \Longrightarrow \varphi$:
En esta segunda parte nuestra hipótesis es que $(\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \subseteq Mod(\varphi)$. Por la reflexividad [NP-s1] de la relación de consecuencia $\Longrightarrow$ tenemos que para cada $\gamma \in \bar{\Gamma}$ el conjunto $Mod(\gamma)$ es no vacío, de hecho a él pertenecen al menos cualesquiera subfamilias Σ tales que $\gamma \in \bar{\Sigma}$; en particular, para cada subfamilia unitaria $\langle\gamma\rangle \ddot{\subseteq} \Gamma$, tenemos que al conjunto $Mod(\gamma)$ pertenecen al menos las subfamilias Σ tales que $\langle\gamma\rangle \ddot{\subseteq} \Sigma$. Por lo tanto, a $\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)$ pertenece al menos la subfamilia $\{(\varepsilon,\gamma) \,/\, (\varepsilon,\gamma) \in \Gamma \,\&\, \varepsilon \in \mathcal{E})\}$, la cual no es otra que la propia subfamilia Γ. Ahora bien, si $\Gamma \in Mod(\gamma)$ y, por hipótesis, $(\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \subseteq Mod(\varphi)$, entonces $\Gamma \in Mod(\varphi)$; y por definición de $Mod(\varphi)$ tenemos que $\Gamma \Longrightarrow \varphi$.

■

Hagamos tres comentarios respecto de este resultado. El primero es que, a diferencia del primer teorema de representación, y como cabía esperar, esta prueba no usa métodos puramente finitistas. El segundo es que, el igual que ocurría en el sistema de reglas de Atocha Aliseda, de las dos formas de contracción nos ha bastado con tener la contracción por la derecha [NP-s1] (se obtendría una situación simétrica si, en lugar de esa regla, hubiésemos contado con la contracción por la izquierda [NP-s1]). El tercero es que, a diferencia del anterior, nuestro teorema de representación no exige monotonía [NP-s1], puesto que su uso no resulta necesario en la prueba de aquél. De hecho, a tenor de las versiones de las propiedades estructurales que hemos presentado, tanto la propiedad de monotonía [NP-s1], como las restantes que no han sido usadas en dicho teorema, se pueden derivar usando a lo sumo las tres que se han exigido como requisito del mismo, motivo por el cual las hemos considerado básicas.

El tercer comentario suscita una cuestión crucial: ¿qué pasaría si tuviésemos reglas análogas a las [At-c1] (podríamos decir 'iguales en su forma') pero en las que las letras que antes representaban cadenas finitas de fórmulas ahora representasen subfamilias de fórmulas de cualquier cardinalidad? En el fondo, lo que se intenta esclarecer es cuál es la diferencia 'esencial' entre las reglas [At-c1] y las [NP-s1] más allá de la consabida limitación de la cardinalidad que existe en la primera. Para poder referirnos a ellas más brevemente, llamaremos *reglas ['At'-s1]* a la nueva versión de reglas, análogas a las [At-c1] pero aptas para subfamilias.

Proposición 55.

1. *La reflexividad [NP-s1] permite derivar a la la reflexividad ['At'-s1], pero esta última no permite derivar a la primera.*
2. *La monotonía [NP-s1] permite derivar a la monotonía ['At'-s1] y esta última permite justificar a la primera.*
3. *La transitividad [NP-s1] y la propiedad de corte ['At'-s1] representan la misma regla.*
4. *La contracción por la derecha [NP-s1] permite derivar a la contracción (por la derecha) ['At'-s1] y esta última permite justificar a la primera.*
5. *Es posible justificar la reflexividad [NP-s1] a partir de la reflexividad ['At'-s1] y la monotonía ['At'-s1]; por lo tanto, las cuatro reglas básicas ['At'-s1] permiten conjuntamente justificar las mismas reglas que las tres reglas básicas [NP-s1].*

Demostración.

1. La reflexividad ['At'-s1] es
$$\langle \varphi \rangle \Longrightarrow \varphi,$$
mientras que la reflexividad [NP-s1] es
$$\frac{}{\Gamma \cdot \langle \varphi \rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}\ ,$$
por lo que la primera es la particularización de esta última para $\Gamma \doteqdot \Lambda \doteqdot \langle\ \rangle$. Por otra parte, la primera no permite por aplicación iterada derivar a esta última, puesto que aquélla siempre exige la coincidencia exacta entre el miembro izquierdo y el derecho de la relación inferencial.

2. Siendo la monotonía [‘At’-s1]

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}{\Gamma \cdot \langle\delta\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}$$

y la monotonía [NP-s1]

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi},$$

la primera es la particularización de esta última para $\Delta \doteqdot \langle\delta\rangle$. Por otro lado, a partir de la versión [‘At’-s1] y aplicando de manera conveniente dicha regla una cantidad de veces igual a $card(\Delta)$ podemos justificar [NP-s1] mediante la anterior.

3. Siendo la regla de corte [‘At’-s1]

$$\frac{\Delta \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi;\ \Gamma \Longrightarrow \psi}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi}$$

y la transitividad [NP-s1]

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi;\ \Delta \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi},$$

dichas reglas coinciden salvo en el orden de las precondiciones, lo cual resulta irrelevante por ser intuitivamente conmutativo el conjuntor meta-metalingüístico que las vincula.

4. Siendo la contracción (por la derecha) [‘At’-s1]

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\xi\rangle \cdot \Delta \cdot \langle\xi\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}{\Gamma \cdot \langle\xi\rangle \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}$$

y la contracción por la derecha [NP-s1]

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi},$$

la primera es la particularización de esta última para $\Xi \doteqdot \langle\xi\rangle$. Por otra parte, a partir de la versión [‘At’-s1] y aplicando de manera conveniente dicha regla una cantidad de veces igual a $card(\Xi)$ podemos justificar [NP-s1] a partir de la anterior.

5. Es posible justificar la reflexividad [NP-s1] a partir de la reflexividad [‘At’-s1] y la monotonía [‘At’-s1]. De este modo, introducimos incondicionalmente la postcondición de la reflexividad [‘At’-s1] y aplicando de manera conveniente

la monotonía ['At'-s1] una cantidad de veces igual a $card(\Gamma) + card(\Lambda)$ podemos justificar la reflexividad [NP-s1]. Y ahora, teniendo en cuenta que la monotonía [NP-s1] es consecuencia de la reflexividad [NP-s1] y la transitividad [NP-s1], podemos afirmar que las cuatro reglas básicas ['At'-s1] permiten conjuntamente justificar las mismas reglas que las tres reglas básicas [NP-s1].

■

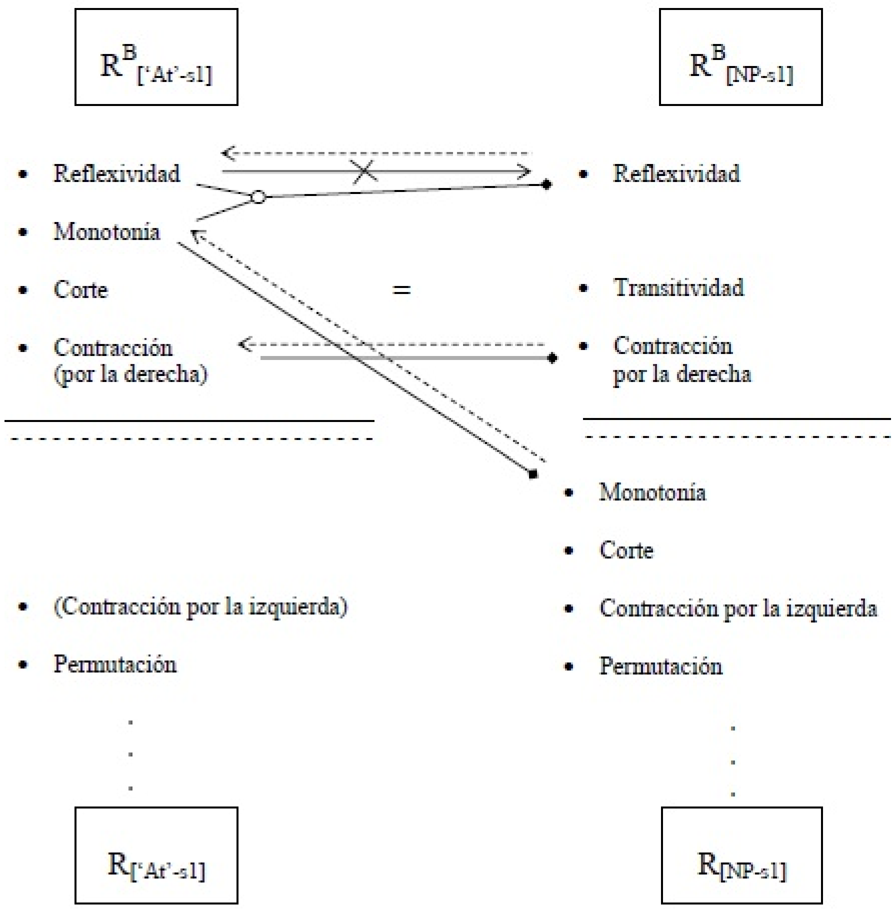

Fig. 1 (3.2): Vínculos entre reglas ['At'-s1] y [NP-s1].

Así pues, la diferencia clave entre ambos elencos de reglas –mostramos gráficamente los vínculos entre dichas reglas en la figura 1 (3.2) para una visión sinóptica[38]– (es decir, el hecho de que podamos prescindir de la monotonía [NP-s1] como regla básica) está en la distinta generalidad de las dos formulaciones de la reflexividad, resultado que es a la vez sorprendente y ‘tranquilizador’. Sorprendente porque de entrada no era esperable que fuese el cambio crucial y ‘tranquilizador’ en el sentido de que la regla de reflexividad es una de las que tiene un mayor grado de apoyo intuitivo: asumir que se puede inferir cualquiera de las fórmulas que se toman como premisas parece algo bastante natural (aunque, como sabemos, no se mantiene en cualquier relación inferencial –un ejemplo de esto último es, concretamente, la lógica de la relevancia–).

Por supuesto, asumir uno u otro conjunto de reglas también influye en la longitud de las justificaciones de nuevas reglas que se pueden hacer a partir de ellas: en general, con [NP-s1] resultarán iguales o más cortas que con [‘At’-s1]. Además, tal como hemos visto, las reglas [‘At’-s1] son derivables a partir [NP-s1] pero no sería posible hacer lo recíproco salvo para el caso de la transitividad [NP-s1] (ciertamente hemos podido justificarlas, pero dichas justificaciones no tienen un número finito de pasos). Las reglas que sí forman ‘cálculos’ con igual capacidad de derivación, con la única diferencia de la menor longitud de las derivaciones en favor del segundo, son las cuatro básicas [At-c1] y las tres básicas [NP-c1] (que son análogas a las tres reglas básicas [NP-s1], pero en las que las letras que antes representaban subfamilias de fórmulas ahora representarían cadenas finitas de fórmulas) –véase la figura 2 (3.2)–.

Proposición 56.
A) La reflexividad [NP-c1] permite derivar a la la reflexividad [At-c1], pero esta última no permite derivar a la primera.
B) Se pueden derivar mutuamente los siguientes pares de propiedades estructurales:

1. *La monotonía [NP-c1] y la monotonía [At-c1].*
2. *La transitividad [NP-c1] y la propiedad de corte [At-c1].*
3. *La contracción por la derecha [NP-c1] y la contracción (por la derecha) [At-c1].*

[38] En todos los gráficos de esta memoria que muestren vínculos entre reglas seguimos el siguiente criterio: la punta de flecha con forma de ángulo indica que las reglas de los extremos iniciales permiten *derivar* a las reglas de los extremos finales; la punta de flecha con forma de rombo relleno indica que las reglas de los extremos iniciales permiten *justificar* a las reglas de los extremos finales.

C) Es posible derivar la reflexividad [NP-c1] a partir de la reflexividad [At-c1] y la monotonía [At-c1]; por lo tanto, las cuatro reglas básicas [At-c1] permiten conjuntamente derivar las mismas reglas que las tres reglas básicas [NP-c1].

Demostración.
A) La prueba es idéntica a la del teorema anterior substituyendo subfamilias por cadenas finitas y las reglas [NP-s1] y [‘At’-s1] por las correspondientes [NP-c1] y [At-c1], respectivamente.

B) Veamos lo relativo a las derivaciones mutuas entre los pares de reglas mencionados:

1. Nuevamente la prueba es similar a la del teorema anterior substituyendo subfamilias por cadenas finitas y las reglas [NP-s1] y [‘At’-s1] por las correspondientes [NP-c1] y [At-c1], respectivamente. Pero ahora, justamente por esto, $card(\Delta) \in \mathbb{N}$, por lo que la anterior justificación se torna en derivación.

2. Esto es obvio por tratarse de la misma regla.

3. También la prueba es similar a la del teorema anterior substituyendo subfamilias por cadenas finitas y las reglas [NP-s1] y [‘At’-s1] por las correspondientes [NP-c1] y [At-c1], respectivamente. Así pues, $card(\Xi) \in \mathbb{N}$, por lo que la anterior justificación se torna en derivación.

C) Otra vez ocurre que la prueba es similar a la del teorema anterior substituyendo subfamilias por cadenas finitas y las reglas [NP-s1] y [‘At’-s1] por las correspondientes [NP-c1] y [At-c1], respectivamente. De este modo $(card(\Gamma) + card(\Lambda)) \in \mathbb{N}$, por lo que la anterior justificación se torna en derivación. Y ahora, teniendo en cuenta que la monotonía [NP-c1] es consecuencia de la reflexividad [NP-c1] y la transitividad [NP-c1], podemos afirmar que las cuatro reglas básicas [At-c1] permiten conjuntamente derivar las mismas reglas que las tres reglas básicas [NP-c1]. ■

Es importante también que reflexionemos brevemente sobre la regla de transitividad [NP-s1], la cual coincide, como ya vimos, con la de corte [‘At’-s1]. Podríamos haber pensado en presentar otra versión alternativa (que nombraremos como *transitividad [NP-s1b]*[39]):

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \varphi;\ \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \psi}{\Gamma \Longrightarrow \psi}.$$

[39] El rótulo será *transitividad [NP-c1b]* cuando esté restringido a cadenas finitas.

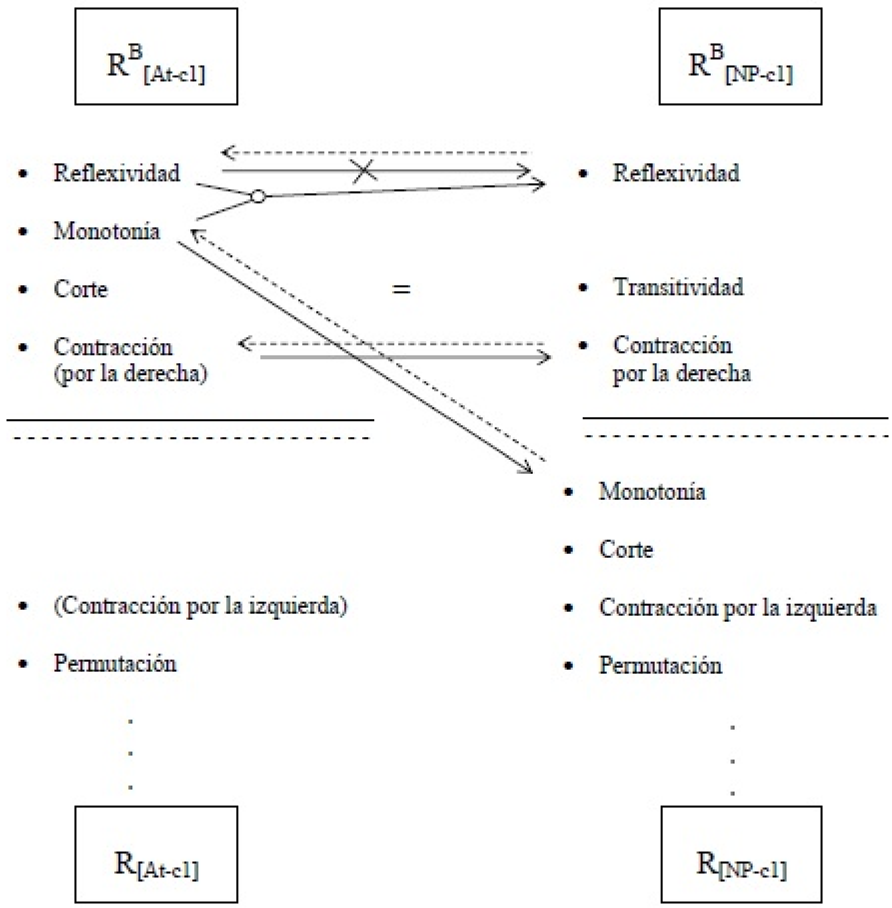

Fig. 2 (3.2): Vínculos entre reglas [At-c1] y [NP-c1].

Proposición 57.
En relación a las distintas formulaciones de la propiedad de transitividad, se tiene que –véanse las figuras 3 (3.2) y 4 (3.2)–:

1. *La transitividad [NP-s1] permite derivar la transitividad [NP-s1b].*

2. *No es posible recíprocamente ni siquiera conjuntamente con las otras propiedades básicas [NP-s1].*

3. *La situación es similar entre la propiedad de corte [At-c1] y la transitividad [NP-c1b], de manera que se satisfacen las proposiciones análogas a las dos anteriores.*

Demostración.

1. Obviamente [NP-s1b] representa una clase de casos particulares de [NP-s1]: aquéllos en los que $\Delta \doteqdot \Lambda \doteqdot \langle\ \rangle$.

2. Es sencillo probar que la transitividad [NP-s1b] junto con la reflexividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1] no permiten derivar de manera directa la transitividad [NP-s1]. La prueba es una reducción al absurdo desde el supuesto de que sí existe la mencionada derivación directa. Ésta partiría de las precondiciones de la última regla mencionada ($\Gamma \Longrightarrow \varphi$ y $\Delta \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi$) y terminaría cuando se alcanzase por primera vez su postcondición ($\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi$) mediante el uso de las otras reglas mencionadas.

   Ahora bien, observando la reflexividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1], vemos que ninguna de ellas pudo ser la que permitió conseguir por primera vez una condición con la ocurrencia de Δ, Γ y Λ sólo en el miembro izquierdo y de ψ sólo en el miembro derecho: la reflexividad [NP-s1] obliga a que ψ ocurra en el miembro izquierdo de la condición si queremos que ocurra también en el derecho; por su parte, la contracción por la derecha [NP-s1] sólo permite eliminar subfamilias en el miembro izquierdo de la postcondición, por lo que debería haberse obtenido previamente otra condición que ya satisfaría los requisitos mencionados. Así pues, sólo resta analizar si ello habría sido posible mediante la propia regla de transitividad [NP-s1b]: ésta sólo habría permitido obtener una condición como la citada si hubiésemos tenido una precondición con Δ, Γ y Λ sólo en el miembro izquierdo y de φ sólo en el miembro derecho. Pero nuevamente una condición tal no se podría haber obtenido por primera vez ni por la reflexividad [NP-s1] ni por la contracción por la derecha [NP-s1] y asumir que lo hubiese sido por la transitividad [NP-s1b] nos introduciría en un bucle sin fin.

   Así pues, hemos de rechazar por contradictoria la posibilidad de que exista la mencionada derivación directa.

3. En el caso de [NP-c1b] y [At-c1] sólo hay que cambiar en los dos apartados anteriores las subfamilias por las cadenas finitas análogas.

■

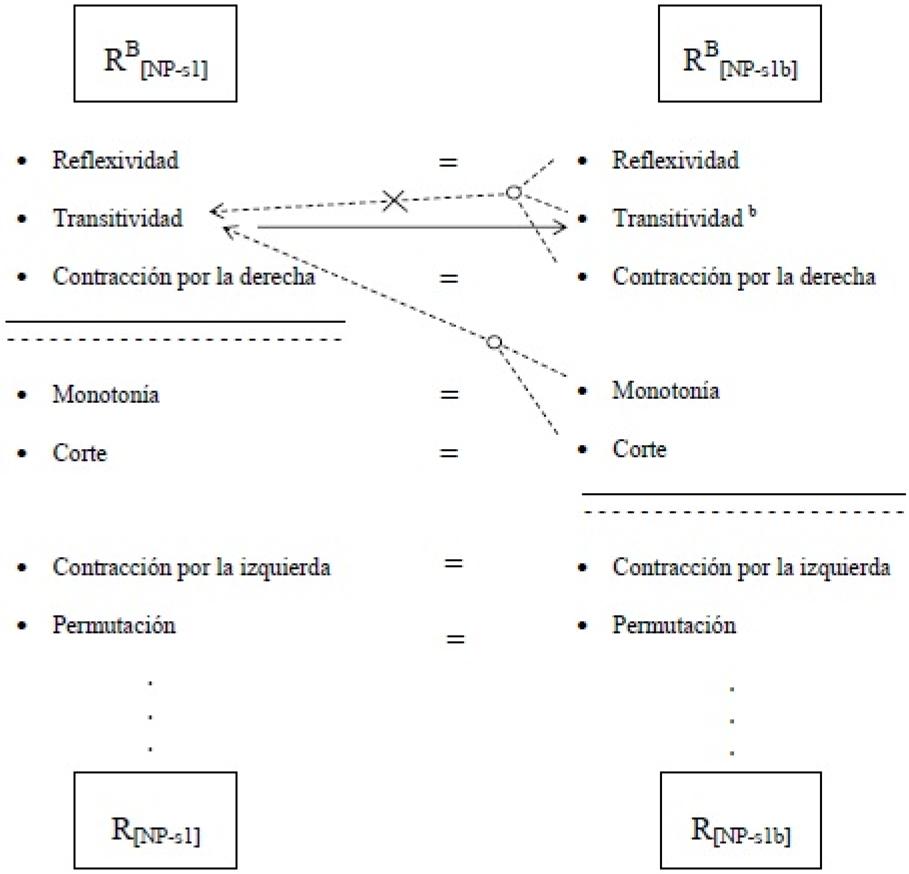

Fig. 3 (3.2): Vínculos entre reglas [NP-s1] y [NP-s1b].

Es importante señalar que con la nueva versión de la transitividad, la [NP-s1b] y la [NP-c1b], no se podrían probar los respectivos teoremas de representación de la relación inferencial deductiva clásica para subfamilias y cadenas finitas que han sido ya presentados. Análogamente sucedería con las respectivas propiedades de monotonía, corte, contracción por la izquierda y permutación. Sin embargo, la simple consulta de las pruebas precedentes de estas dos últimas propiedades nos permiten saber que si se añadiese la monotonía como regla básica sí se podrían derivar. Por tanto, tendremos que incluir en sus respectivos conjuntos de reglas básicas las correspondientes reglas de monotonía y de corte. Se puede ver también que no hace falta añadir ninguna otra regla.

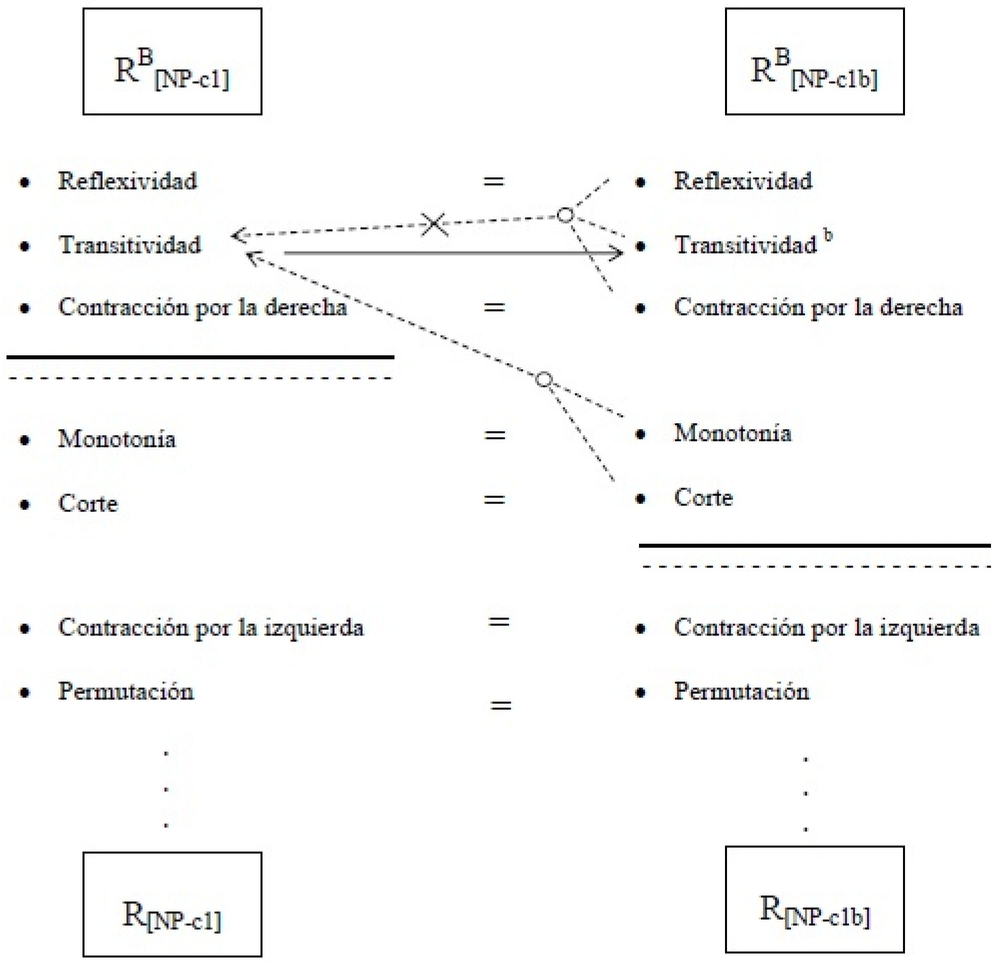

Fig. 4 (3.2): Vínculos entre reglas [NP-c1] y [NP-c1b].

Proposición 58.
Una relación de consecuencia lógica que satisfaga monotonía [NP-s1] y corte [NP-s1], necesariamente satisface la propiedad de transitividad [NP-s1].

Demostración. Partimos de las dos precondiciones de la regla de transitividad [NP-s1] y a continuación anotamos el resultado de aplicar la propiedad estructural que en cada línea se indica entre paréntesis.

1. $\Gamma \Longrightarrow \varphi$ (hipótesis).
2. $\Delta \cdot \langle \varphi \rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi$ (hipótesis).

3. $\Delta \cdot \Gamma \Longrightarrow \varphi$ (por monotonía [NP-s1] sobre 1).

4. $\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por monotonía [NP-s1] sobre 3).

5. $\Delta \cdot \Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi$ (por monotonía [NP-s1] sobre 2).

6. $\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \psi$ (por corte [NP-s1] sobre 4 y 5).

Y esto último coincide con la postcondición de la transitividad [NP-s1]. ■

Los nuevos resultados motivan que presentemos nuevas versiones de una definición previa:

Definición 59 (Relación inferencial de tipo RMTbCCd [NP-s1b] / RTbCd [NP-s1b])**.**
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow$, diremos que es de tipo RMTbCCd [NP-s1b] si y sólo si satisface las siguientes propiedades estructurales:

1. *Reflexividad [NP-s1].*

2. *Monotonía [NP-s1].*

3. *Transitividad [NP-s1b].*

4. *Corte [NP-s1].*

5. *Contracción por la derecha [NP-s1].*

Diremos que es de tipo RTbCd [NP-s1b] si y sólo si satisface la primera, tercera y quinta propiedad.
Al conjunto de estas cinco propiedades estructurales, consideradas básicas, lo designamos $\mathbb{P}^{B}_{[\text{NP-s1b}]}$. Al conjunto de todas las reglas derivadas a partir de las anteriores lo denominamos $\mathbb{P}_{[\text{NP-s1b}]}$.

Definición 60 (Relación inferencial de tipo RMCCd [‘At’-s1])**.**
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow$, diremos que es de tipo RMCCd [‘At’-s1] si y sólo si satisface las siguientes propiedades estructurales:

1. *Reflexividad [‘At’-s1].*

2. *Monotonía [‘At’-s1].*

3. *Corte [‘At’-s1].*

4. *Contracción (por la derecha) [‘At’-s1].*

Al conjunto de estas cuatro propiedades estructurales, consideradas básicas, lo designamos $\mathbb{P}^{B}_{[\text{‘At’-s1}]}$. *Al conjunto de todas las reglas derivadas a partir de las anteriores lo denominamos* $\mathbb{P}_{[\text{‘At’-s1}]}$.

Definición 61 (Relación inferencial de tipo RTCd [NP-c1]).
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow_{cf}$, *diremos que es de tipo RTCd [NP-c1] si y sólo si satisface las siguientes propiedades estructurales:*

1. *Reflexividad [NP-c1].*
2. *Transitividad [NP-c1].*
3. *Contracción por la derecha [NP-c1].*

Al conjunto de estas tres propiedades estructurales, consideradas básicas, lo designamos $\mathbb{P}^{B}_{[\text{NP-c1}]}$. *Al conjunto de todas las reglas derivadas a partir de las anteriores lo denominamos* $\mathbb{P}_{[\text{NP-c1}]}$.

Definición 62 (Relación inferencial de tipo RMTbCCd [NP-c1b]).
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow_{cf}$, *diremos que es de tipo RMTbCCd [NP-c1b] si y sólo si satisface las siguientes propiedades estructurales:*

1. *Reflexividad [NP-c1].*
2. *Monotonía [NP-c1].*
3. *Transitividad [NP-c1b].*
4. *Corte [NP-c1].*
5. *Contracción por la derecha [NP-c1].*

Al conjunto de estas cinco propiedades estructurales, consideradas básicas, lo designamos $\mathbb{P}^{B}_{[\text{NP-c1b}]}$. *Al conjunto de todas las reglas derivadas a partir de las anteriores lo denominamos* $\mathbb{P}_{[\text{NP-c1b}]}$.

A la luz de todos los resultados presentados podemos establecer una proposición que, a modo de resumen, los agrupe.

Proposición 63.

1. *Dada una relación de consecuencia lógica* $\Longrightarrow_{cf}$*:*

    a) *Es RMCCd [At-c1] si y sólo si es RTCd [NP-c1].*

    b) *Es RTCd [NP-c1] si y sólo si es RMTbCCd [NP-c1b].*

    c) *Los tres siguientes conjuntos de reglas tienen la misma capacidad de derivación:* $\mathbb{P}^{B}_{\text{[At-c1]}}$, $\mathbb{P}^{B}_{\text{[NP-c1]}}$ *y* $\mathbb{P}^{B}_{\text{[NP-c1b]}}$.

2. *Dada una relación de consecuencia lógica* $\Longrightarrow$*:*

    a) *Es RMCCd ['At'-s1] si y sólo si es RTCd [NP-s1].*

    b) *Es RTCd [NP-s1] si y sólo si es RMTbCCd [NP-s1b].*

    c) *Los dos siguientes conjuntos de reglas tienen la misma capacidad de derivación:* $\mathbb{P}^{B}_{\text{[NP-s1]}}$ *y* $\mathbb{P}^{B}_{\text{[NP-s1b]}}$. *El siguiente conjunto de reglas tiene una capacidad de derivación estrictamente menor que los anteriores:* $\mathbb{P}^{B}_{\text{['At'-s1]}}$.

Presentamos ahora un corolario del teorema de representación que fue probado con anterioridad:

Corolario 64.
La relación inferencial deductiva clásica es de tipo RTCd [NP-s1].

Teniendo en cuenta que la relación de consecuencia deductiva clásica es de tipo RTCd [NP-s1] y, por tanto, que satisface tanto permutación [NP-s1] (es decir, el orden de aparición de las fórmulas-premisas es irrelevante) como las dos formas de contracción [NP-s1] (es decir, no es importante el número de ocurrencias de cada una de las fórmulas-premisas si dicho número es no nulo), en lugar de una presentación en la que una relación de consecuencia lógica es un conjunto de pares cuya primera componente es una subfamilia de fórmulas y cuya segunda componente es una fórmula, dicha relación puede entenderse como un conjunto de pares cuya primera componente es un mero conjunto de fórmulas (concretamente el conjunto-imagen de la subfamilia) y cuya segunda componente es una fórmula. Hacemos esto con las cuatro primeras reglas etiquetadas con la marca "[NP-s1]"[40] y las reetiquetaremos

[40] Para efectuar esta adaptación comenzamos por tomar de cada subfamilia su correspondiente conjunto-imagen y a continuación podemos hacer ciertas simplificaciones de 'ingredientes' que han dejado de tener valor significativo por no cumplir la finalidad de contribuir a describir situaciones distintas.

con la marca “[NP:d]”, donde la “d” quiere señalar que son reglas correspondientes a la deducción clásica (la cual simbolizaremos como “$\Vdash_d$” o, simplemente, como “$\Vdash$”). En lo que sigue en este capítulo y en los dos próximos $\bar{\Gamma}$, $\bar{\Delta}$, $\bar{\Theta}$, $\bar{\Lambda}$, $\bar{\Xi}$, $\bar{\Pi}$, $\bar{\Sigma}$, $\bar{\Phi}$, $\bar{\Psi}$, $\bar{\Upsilon}$ y $\bar{\Omega}$ serán subconjuntos cualesquiera –eventualmente vacíos– del conjunto no vacuo $FOR(\mathcal{L})$. Con esta opción notacional, las reglas estructurales más interesantes que satisface la relación inferencial deductiva clásica son:

III.1- ***Reflexividad [NP:d]:***

$$\frac{}{\bar{\Gamma} \cup \{\varphi\} \Vdash_d \varphi}\ .$$

III.2- ***Monotonía [NP:d]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \Vdash_d \varphi}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta} \Vdash_d \varphi}\ .$$

III.3- ***Transitividad [NP:d]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \Vdash_d \varphi;\ \ \{\varphi\} \cup \bar{\Delta} \Vdash_d \psi}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta} \Vdash_d \psi}\ .$$

III.4- ***Corte [NP:d]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \cup \{\varphi\} \Vdash_d \psi;\ \ \bar{\Gamma} \Vdash_d \varphi}{\bar{\Gamma} \Vdash_d \psi}\ .$$

No lo hacemos aquí, pero se puede probar que cada una de las anteriores reglas [NP:d] satisface la caracterización en términos de modelos que se ha dado de la relación inferencial deductiva clásica.

Es importante también que señalemos que, dada una relación de consecuencia deductiva clásica que ha sido establecida sintácticamente, la satisfacción de las anteriores siete propiedades [NP-s1] no garantiza su corrección ni su completitud. De hecho la relación inferencial $\Vdash \; = \wp(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})$ (es decir, la relación inferencial completamente trivial) satisface todas ellas. Ambas propiedades metalógicas (corrección y completitud) requerirán que se cuente con una relación de consecuencia lógica definida semánticamente y otra tal relación definida sintácticamente; además, para esto último, se necesitan también propiedades operativas (ciertamente parece razonable que la caracterización de un sistema lógico no sea posible a partir de sólo uno de sus ingredientes, por más que éste sea uno de los cruciales).

Quizás el que resultasen defraudadas las expectativas tan altas que algunas reivindicaciones, como la de Dana Scott ya citada, haya hecho que algunos autores perdiesen interés por este enfoque. Sin embargo, no parece que pueda considerarse carente de interés el poder determinar qué propiedades de la relación de consecuencia lógica son independientes del lenguaje lógico adoptado y cuáles están vinculadas a éste o a algún otro componente del sistema lógico (como, por ejemplo, la semántica adoptada).

3.3. Propiedades estructurales de la deducción plural

Para muchas de las cuestiones que vamos a tratar en los dos capítulos que siguen a éste resulta imprescindible hacer uso de una relación inferencial cuyo miembro de la derecha es una subfamilia de fórmulas (en lugar de una sola fórmula, como venía siendo hasta ahora). A esta nueva relación de consecuencia entre subfamilias de fórmulas la adjetivaremos como *plural* –y la simbolizaremos como "$\Longrightarrow^*$ "–, y a la habitual la calificaremos, cuando convenga destacar tal carácter, como *singular* o *clásica* –para ella mantendremos el símbolo "$\Longrightarrow$" ya usado– (si no añadimos adjetivo alguno se entiende que, por defecto, se trata de este tipo). Así pues tenemos que $\Longrightarrow^*$ es la relación de aridad 2:

$$\Longrightarrow^* \subseteq SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})) \times SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})).$$

Conviene que antes de avanzar hagamos algunas precisiones en torno a este nuevo concepto. El repertorio de propiedades estructurales de la relación inferencial plural no es un cálculo de secuentes del estilo de los de Gerhard Gentzen. Aunque en ambos casos se establecen enunciados meta-metalingüísticos que indican las propiedades de una relación de consecuencia lógica, y también ambos coinciden en presentar dichos enunciados 'metadescriptivos' en forma de reglas en las cuales no ocurren símbolos lógicos de una lógica particular, las diferencias son cruciales. En primer lugar, en la relación inferencial plural tanto las premisas como la conclusión pueden ser familias no numerables y no meras secuencias. Pero, la diferencia más importante estriba en que en el caso del cálculo de secuentes de Gentzen las fórmulas de la secuencia del lado derecho del secuente se consideran tácitamente conectadas mediante un operador metalingüístico de disyunción, mientras que en nuestra propuesta no hay necesariamente una conexión entre las fórmulas que subyazca implícitamente. Ya veremos que una opción interesante sería que estuviesen tácitamente conectadas mediante un operador metalingüístico de conjunción, de modo que todas las fórmulas de las conclusiones se sigan necesariamente de las premisas; pero, en cualquier caso, esto es sólo una opción. De hecho podemos pensar en una relación de consecuencia lógica plural de tipo probabilístico en la que los modelos de las conclusiones sean sólo un subconjunto relevante de los modelos de las premisas. En esta situación, dada una relación de consecuencia lógica plural no podemos expresarla en términos de una relación de consecuencia singular tal que todas las conclusiones sean consecuencia probabilística –con el mismo nivel de relevancia– de dichas premisas.

Las relaciones de consecuencia lógica plural cuyas premisas y conclusiones son subfamilias de fórmulas pueden satisfacer, entre otras, algunas de las reglas estructurales que seguidamente se enumeran:

IV.1- ***Reflexividad [NP-s2]:***

$$\frac{}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Delta}\ .$$

IV.2- ***Monotonía en las premisas [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega}\ .$$

IV.3- ***Monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Lambda;\ \Gamma \Longrightarrow^{*} \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi}{\Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda}\ .$$

IV.4- ***Monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Phi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi}\ .$$

IV.5- ***Monotonía no homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Phi;\ \Delta \Longrightarrow^{*} \Xi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Xi \cdot \Phi}\ .$$

IV.6- ***Repetición por la derecha en las conclusiones [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow^* \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi}{\Gamma \Longrightarrow^* \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Phi} \; .$$

IV.7- ***Repetición por la izquierda en las conclusiones [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow^* \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Phi}{\Gamma \Longrightarrow^* \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Phi} \; .$$

IV.8- ***Transitividad [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow^* \Xi \cdot \Omega \cdot \Psi; \;\; \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi} \; .$$

IV.9- ***Corte en las premisas [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Omega; \;\; \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Delta}{\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Omega} \; .$$

IV.10- ***Corte directo en las conclusiones [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow^* \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda}{\Gamma \Longrightarrow^* \Delta \cdot \Lambda} \; .$$

IV.11- ***Contracción por la derecha en las premisas [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi} \; .$$

IV.12- ***Contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi} \; .$$

IV.13- ***Contracción por la derecha en las conclusiones [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow^* \Phi \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}{\Gamma \Longrightarrow^* \Phi \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda} \; .$$

IV.14- ***Contracción por la izquierda en las conclusiones [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow^* \Phi \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}{\Gamma \Longrightarrow^* \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda} \; .$$

IV.15- ***Reemplazo de repeticiones por la derecha [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Psi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi} \; .$$

IV.16- ***Reemplazo de repeticiones por la izquierda [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Phi}{\Gamma \cdot \Psi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Phi}.$$

IV.17- ***Permutación en las premisas [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Phi}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Phi}.$$

IV.18- ***Permutación en las conclusiones [NP-s2]:***

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow^{*} \Phi \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda}{\Gamma \Longrightarrow^{*} \Phi \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}.$$

Proposición 65.
Cada una de las anteriores reglas [NP-s2] cumple que en el conjunto formado por sus precondiciones y su postcondición no hay al menos dos condiciones estructuralmente incompatibles entre sí e igualmente ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar condiciones incompatibles.

Su prueba es nuevamente elemental (idéntica a la de las reglas NP-s1).

De forma análoga a lo que ocurrió en ocasiones anteriores, podríamos probar que no es necesario contar con la propiedad estructural de monotonía en las premisas [NP-s2] como primitiva, pero ahora es notablemente más sencilla.

Proposición 66.
La propiedad estructural de monotonía en las premisas [NP-s2] es derivable a partir de la reflexividad [NP-s2] y la transitividad [NP-s2].

Demostración. Partimos de la precondición de la propiedad de monotonía en las premisas [NP-s2]:

$$1.\ \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega.$$

Ahora, por propiedades elementales de la concatenación de subfamilias podemos escribir lo anterior con la ocurrencia de la subfamilia vacía:

$$2.\ \Gamma \cdot \langle\ \rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega.$$

Por aplicación de la reflexividad [NP-s2] podemos introducir incondicionalmente la siguiente fórmula (recordemos que nuestro planteamiento permite que la primera componente de la relación inferencial sea una subfamilia vacía):

$$3.\ \Delta \Longrightarrow^{*} \langle\ \rangle.$$

A continuación, aplicando la propiedad de transitividad [NP-s2] sobre las líneas 3 y 2 (concretamente, colocando las premisas del enunciado inferencial que aparece en esta última línea en lugar de la ocurrencia de la subfamilia vacía en la anterior línea), obtenemos:

$$4.\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \varphi.$$

Y este resultado es justamente la postcondición de la citada propiedad de monotonía en las premisas [NP-s2]. ■

Si por algún motivo 'repugnase' que como subfamilia de conclusiones de la relación apareciese la subfamilia vacía (tengamos en cuenta que con esa expresión no se está diciendo que no se puedan encontrar consecuencias de las premisas, sino sólo que en esa subfamilia no hay ninguna de tales consecuencias[41]), y que con tal motivo se suprimiese esta posibilidad, se podría dar otra prueba de la propiedad estructural de monotonía en las premisas [NP-s2] a partir de las mismas reglas.

Proposición 67.
Una relación de consecuencia lógica que exija que las conclusiones sean no vacías

[41] Inferencias cuya subfamilia de conclusiones son vacías no representan ninguna dificultad en la relación inferencial deductiva desde un punto de vista semántico: en ella se asume que la subfamilia vacía es satisfecha por todos los modelos, por lo que es siempre cierto que los modelos de la subfamilia de premisas –incluso si ésta es también otra subfamilia vacía– son un subconjunto de los modelos de la subfamilia de conclusiones. En otros tipos de consecuencia lógica la situación es variada: mientras que en la relación inferencial probabilística no hay dificultades tampoco (de hecho, se trata de una situación con incertidumbre nula), en la relación inferencial abductiva ordinaria no es posible considerar solución abductiva a una subfamilia vacía –siendo éste el motivo por el que se ha suscitado aquí la cuestión–. Se puede asegurar, y su comprobación de hecho es sencilla, que todas las reglas así como los procesos de derivación entre ellas se mantienen intactos si se impone la condición de que las conclusiones no sean una subfamilia vacía. Incluso la situación es la misma si además de la anterior se exige la condición de que las premisas no sean una subfamilia vacía –esta última restricción no parece tan razonable porque en la deducción clásica todas las fórmulas universalmente válidas / teoremáticas se pueden inferir sin premisas y también porque en la abducción ordinaria no hay necesidad de establecer limitación alguna en este sentido–.

y que satisfaga reflexividad [NP-s2] y transitividad [NP-s2], necesariamente satisface monotonía en las premisas [NP-s2].

Demostración. Partimos de la precondición de la regla de monotonía en las premisas [NP-s2] y a continuación anotamos el resultado de aplicar la propiedad estructural que en cada caso se indica entre paréntesis:

1. $\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega$ (hipótesis).

2. $\Gamma \cdot \Delta \Longrightarrow^{*} \Gamma$ (por reflexividad [NP-s2], incondicionalmente).

3. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega$ (por transitividad [NP-s2] sobre 2 y 1).

Y esto último coincide con la postcondición de la propiedad de monotonía en las premisas [NP-s2]. ■

Sin embargo, a pesar de no haber usado ninguna de las formas de contracción en el teorema de representación –a diferencia de lo que ocurrió en los casos de [NP-s1] y [At-c1]–, esto no se debe a que dicha propiedad sea en general consecuencia de las otras dos que sí han sido usadas en las tres ocasiones, y de hecho se puede probar que las primeras son independientes de estas últimas. El argumento ni siquiera requiere que indiquemos si se trata de la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] o de la análoga por la izquierda [NP-s2].

Proposición 68.
No existe al menos una derivación directa de la propiedad estructural de contracción en las premisas [NP-s2] a partir de la reflexividad [NP-s2] y la transitividad [NP-s2].

Demostración. Para el desarrollo de esta demostración tengamos en cuenta que si X e Y son dos subfamilias y $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ sus conjuntos de fórmulas asociados, entonces se tiene que $(X \ddot{\subseteq} Y) \Rightarrow (\bar{X} \subseteq \bar{Y})$, pero no se puede garantizar la implicación recíproca.

Hacemos ahora una presentación de las reglas que no desvirtúa en nada su contenido, pero que es más útil para los fines que nos proponemos. Sean I_x, I_y, I_z, D_x, D_y y D_z subfamilias de fórmulas cualesquiera:

1. ***Reflexividad [NP-s2']:***

$$\frac{}{I_x \Longrightarrow^* D_x \; (D_x \ddot{\subseteq} I_x)} \, .$$

2. ***Transitividad [NP-s2']:***

$$\frac{I_x \Longrightarrow^* D_x; \; I_y \Longrightarrow^* D_y \; ((D_x \doteqdot \Xi \cdot \Omega \cdot \Psi) \, \dot{\&} \, (I_y \doteqdot \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda))}{I_z \Longrightarrow^* D_z \; ((I_z \doteqdot \Delta \cdot I_x \cdot \Lambda) \, \dot{\&} \, (D_z \doteqdot D_y))} \, .$$

3. ***Contracción en las premisas [NP-s2']:***

$$\frac{I_x \Longrightarrow^* D_x}{I_y \Longrightarrow^* D_y \; ((I_y \ddot{\subsetneq} I_x) \, \dot{\&} \, (\bar{I}_y = \bar{I}_x) \, \dot{\&} \, (D_y \doteqdot D_x))} \, .$$

Es conveniente que sustituyamos los anteriores subíndices por etiquetas distintas entre unas y otras reglas, de modo que podamos referirnos a esas subfamilias de manera más breve pero sin perder precisión:

1. ***Reflexividad [NP-s2"]:***

$$\frac{}{I_1 \Longrightarrow^* D_1 \; (D_1 \ddot{\subseteq} I_1)} \, .$$

2. ***Transitividad [NP-s2"]:***

$$\frac{I_2 \Longrightarrow^* D_2; \; I_3 \Longrightarrow^* D_3 \; ((D_2 \doteqdot \Xi \cdot \Omega \cdot \Psi) \, \dot{\&} \, (I_3 \doteqdot \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda))}{I_4 \Longrightarrow^* D_4 \; ((I_4 \doteqdot \Delta \cdot I_2 \cdot \Lambda) \, \dot{\&} \, (D_4 \doteqdot D_3))} \, .$$

3. ***Contracción en las premisas [NP-s2"]:***

$$\frac{I_5 \Longrightarrow^* D_5}{I_6 \Longrightarrow^* D_6 \; ((I_6 \ddot{\subsetneq} I_5) \, \dot{\&} \, (\bar{I}_6 = \bar{I}_5) \, \dot{\&} \, (D_6 \doteqdot D_5))} \, .$$

Haremos una demostración de este teorema por reducción al absurdo, lo cual conlleva partir de la suposición de que existe al menos una derivación directa de la regla estructural indicada a partir de las otras dos y alcanzar una contradicción. Por ser una derivación directa de dicha regla, ésta habría comenzado tomando como hipótesis la precondición de la misma –es decir, $I_5 \Longrightarrow^* D_5$– y habría terminado en el momento que se hubiese alcanzado por primera vez su postcondición –o sea, $I_6 \Longrightarrow^* D_6$ $(I_6 \ddot{\subsetneq} I_5) \dot{\&} (\bar{I}_6 = \bar{I}_5) \dot{\&} (D_6 \ddot{=} D_5)$)–.

Ahora bien, es obvio que esta última línea no pudo ser introducida por aplicación de la reflexividad [NP-s2”] puesto que en ese caso se habría exigido la satisfacción de la condición $D_6 \ddot{\subseteq} I_6$ y esto es una restricción que no se impone en la regla de contracción en las premisas [NP-s2”]. Así pues, la única opción es que la última línea se hubiese obtenido por aplicación de la transitividad [NP-s2”] a otras anteriores. Si así hubiese sucedido, es porque se habría satisfecho que $D_6 \ddot{=} D_4 \ddot{=} D_3$ y también $I_6 \ddot{=} I_4 \ddot{=} \Delta \cdot I_2 \cdot \Lambda$.

Analicemos ahora los distintos casos que fueron posibles.

- Supongamos que $I_2 \ddot{=} \langle\ \rangle$. En ese caso $I_6 \ddot{=} I_4 \ddot{=} \Delta \cdot I_2 \cdot \Lambda \ddot{=} \Delta \cdot \Lambda$. Fijémonos en $I_3 \ddot{=} \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda$. Tenemos ahora dos nuevas posibilidades:
  - $\Omega \ddot{=} \langle\ \rangle$. En ese caso $I_3 \ddot{=} \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \ddot{=} \Delta \cdot \Lambda$, pero entonces $I_3 \ddot{=} I_6$ y esto contradice la hipótesis de que no se había alcanzado aún I_6.
  - $\Omega \ddot{\neq} \langle\ \rangle$. En ese caso, $I_2 \Longrightarrow^* D_2$ sería tal que $I_2 \ddot{=} \langle\ \rangle$ y $D_2 \ddot{\neq} \langle\ \rangle$ (pues $D_2 \ddot{=} \Xi \cdot \Omega \cdot \Psi$). La metaproposición $I_2 \Longrightarrow^* D_2$ no puede ser $I_5 \Longrightarrow^* D_5$, pues si fuese $I_5 \ddot{=} \langle\ \rangle$ llegaríamos a una contradicción, dado que hemos establecido que $I_6 \ddot{\subsetneq} I_5$. Dicha metaproposición no podría haberse obtenido directamente por una aplicación de la regla de reflexividad [NP-s2”], puesto que ésta habría exigido $D_2 \ddot{\subseteq} I_2$ (es decir, con la familia de las premisas vacía sólo podemos obtener por esta regla la metaproposición $\langle\ \rangle \Longrightarrow^* \langle\ \rangle$, pero ésta incumple la condición de que la familia de las conclusiones sea no vacía). Así pues, sólo habría sido posible obtenerla mediante la aplicación de la regla de transitividad [NP-s2”] a otras líneas anteriores. Pero esta propiedad exige, para obtener una postcondición con la familia de las premisas vacía y la familia de las conclusiones no vacía, que alguna de las dos precondiciones tenga justamente esas características, por lo que asumir que se obtuvo mediante la regla de transitividad [NP-s2”] nos conduciría a una regresión

al infinito que está en contradicción con la suposición de que se trata de una derivación directa (puesto que ello conlleva que sea efectiva).

- Supongamos que $I_2 \ddot{\neq} \langle\ \rangle$. Fijémonos otra vez en $I_3 \doteqdot \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda$. Tenemos nuevamente dos posibilidades:

  - $\Omega \ddot{\subseteq} I_2$. En ese caso, como $I_6 \doteqdot I_4 \doteqdot \Delta \cdot I_2 \cdot \Lambda$, $I_2 \ddot{\neq} \langle\ \rangle$ e $I_3 \doteqdot \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \doteqdot \Delta \cdot \Lambda$, tenemos que $I_3 \ddot{\subseteq} I_6$. Eso conlleva que la metaproposición $I_3 \Longrightarrow^* D_3$ no puede ser $I_5 \Longrightarrow^* D_5$, pues si fuese $I_3 \doteqdot I_5$, llegaríamos a una contradicción, dado que ya habíamos establecido que $I_6 \ddot{\subsetneq} I_5$. Dicha metaproposición tampoco podría haberse obtenido directamente por una aplicación de la regla de reflexividad [NP-s2"], puesto que ésta habría exigido $D_3 \ddot{\subseteq} I_3$, de modo que si quisiésemos que $D_3 \doteqdot D_5$ (y dado que previamente teníamos $D_5 \doteqdot D_6$) esto conduciría a que $D_6 \ddot{\subseteq} I_3$, que junto con $I_3 \ddot{\subseteq} I_6$ conllevaría $D_6 \ddot{\subseteq} I_6$, lo cual es una condición que no impone la regla de contracción de las premisas [NP-s2"]. Así pues, sólo habría sido posible obtenerla mediante la aplicación de la regla de transitividad [NP-s2"] a otras líneas anteriores. Pero bajo las condiciones de que $I_2 \ddot{\neq} \langle\ \rangle$ y $\Omega \ddot{\subseteq} I_2$ esta última regla sólo puede obtener una postcondición $I_3 \Longrightarrow^* D_3$ que cumpla las condiciones $D_3 \doteqdot D_6$ y $I_3 \ddot{\subseteq} I_6$ si su segunda precondición cumple exactamente las mismas condiciones, lo cual nos conduciría a una regresión al infinito que está en contradicción con la suposición de que se trata de una derivación directa (puesto que ello conlleva que sea efectiva).

  - $I_2 \ddot{\subsetneq} \Omega$. Esto supone que anteriormente debíamos haber alcanzado una metaproposición $I_2 \Longrightarrow^* D_2$ con $D_2 \doteqdot \Xi \cdot \Omega \cdot \Psi$ y, por tanto, con $I_2 \ddot{\subsetneq} D_2$. Eso conlleva que la metaproposición $I_2 \Longrightarrow^* D_2$ no puede ser $I_5 \Longrightarrow^* D_5$, puesto que esta última no está necesariamente sujeta a las condiciones que se indican en la que le precede. Tampoco podría haberse obtenido directamente por una aplicación de la regla de reflexividad [NP-s2"], puesto que ésta habría exigido $D_2 \ddot{\subseteq} I_2$. Así pues, sólo habría sido posible obtenerla mediante la aplicación de la regla transitividad [NP-s2"] a otras líneas anteriores. Pero para que la postcondición de esta regla sea tal que la subfamilia de las premisas esté estrictamente contenida en la subfamilia de las conclusiones esto mismo lo tiene que cumplir al menos una de sus precondiciones (analizando los cuatro casos que son posibles si para las precondiciones consideramos sólo dos opciones –una, que la subfamilia de la premisas esté estrictamente contenida en la subfamilia de las conclusiones, y la otra, que ambas subfamilias sean iguales–, se tiene que en todos esos casos la postcondición es tal que está garantizado que la subfamilia de la premisas esté contenida en la subfamilia de las conclusiones). Así pues, esta opción nos conduciría de nuevo a una regresión al infinito que está en contradicción con la suposición de que se trata de una derivación directa (puesto que ello conlleva que sea efectiva).

■

De hecho, podemos asegurar que las tres propiedades estructurales antecitadas son independientes; para poder establecer justificadamente esa consideración nos resta por enunciar y probar los dos siguientes teoremas:

Proposición 69.
No existe al menos una derivación directa de la propiedad estructural de transitividad [NP-s2] a partir de la reflexividad [NP-s2] y la contracción en las premisas [NP-s2] en cualquiera de sus formas.

Demostración. Para el desarrollo de esta demostración tengamos en cuenta que si X e Y son dos subfamilias y $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ sus conjuntos de fórmulas asociados, entonces se tiene que $(X \ddot{\subseteq} Y) \Rightarrow (\bar{X} \subseteq \bar{Y})$, pero no se puede garantizar la implicación recíproca.

Haremos una demostración de este teorema por reducción al absurdo. Supongamos que existe al menos una derivación directa de la regla estructural indicada a partir de las otras dos. Asumimos aquí la presentación de las reglas [NP-s2”] expuestas en la demostración anterior. Por ser una derivación directa de dicha regla, ésta habría comenzado tomando como hipótesis las dos precondiciones de la misma –es decir, $I_2 \Longrightarrow^* D_2;\ I_3 \Longrightarrow^* D_3\ ((D_2 \ddot{=} \Xi \cdot \Omega \cdot \Psi)\ \dot{\&}\ (I_3 \ddot{=} \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda))$– y habría terminado en el momento que se hubiese alcanzado por primera vez su postcondición –o sea, $I_4 \Longrightarrow^* D_4\ ((I_4 \ddot{=} \Delta \cdot I_2 \cdot \Lambda)\ \dot{\&}\ (D_4 \ddot{=} D_3))$–.

Ahora bien, es obvio que esta última línea no pudo ser introducida por aplicación de la reflexividad [NP-s2”] puesto que en ese caso se habría exigido la satisfacción de la condición $D_4 \ddot{\subseteq} I_4$ y esto es una restricción que no se impone en la regla de transitividad [NP-s2”]. Así pues, la única opción es que la última línea se hubiese obtenido por aplicación a otras anteriores de la contracción en las premisas [NP-s2] en cualquiera de sus formas. Pero esta última regla consiste exactamente en eliminar redundancias; así pues, expresándolo más formalmente, si así hubiese sucedido, es porque se habría satisfecho que $I_y \ddot{\subsetneq} I_x$, $\bar{I}_y = \bar{I}_x$ y $D_y \ddot{=} D_x$. Esto conlleva que la regla no se aplicó directamente sobre ninguna de las fórmulas de partida, puesto que en ellas no necesariamente existen tales redundancias. Tampoco se podría haber obtenido por aplicación de la citada regla sobre una línea introducida por reflexividad, puesto que en ellas se exige $D_x \ddot{\subseteq} I_x$ (lo cual implica $\bar{D}_x \subseteq \bar{I}_x$) y combinando ésta con las condiciones de la regla de contracción en las premisas [NP-s2], en cualquiera de sus formas, obtendríamos: $\bar{D}_y = \bar{D}_x \subseteq \bar{I}_x = \bar{I}_y$; por lo tanto, la conclusión habría satisfecho $\bar{D}_y \subseteq \bar{I}_y$, que es una restricción que no se impone en la regla de transitividad [NP-s2”]. ■

Proposición 70.
No existe al menos una derivación directa de la propiedad estructural de reflexividad [NP-s2] a partir de la transitividad [NP-s2] y la contracción en las premisas [NP-s2] en cualquiera de sus formas.

Demostración. Es bastante obvio que la reflexividad [NP-s2] no es posible obtenerla mediante una derivación directa a partir de la transitividad [NP-s2] y la contracción de las premisas [NP-s2] en cualquiera de sus formas, puesto que la primera regla se puede aplicar incondicionalmente y cualquiera de las otras dos exige que se cumpla al menos una precondición. ■

Estos tres resultados conjuntamente tienen importantes consecuencias, puesto que la constatación de que son tres propiedades estructurales independientes abre la posibilidad de que existan relaciones de consecuencia plural que satisfagan cualesquiera de ellas sin satisfacer las restantes.

Pensemos en una relación de consecuencia lógica plural para la que las premisas son consideradas como recursos que se agotan con su uso (concretamente, cada ocurrencia de una fórmula puede ser usada en una sola inferencia y una sola vez en dicha inferencia), pero en la que se admita el aumento de recursos sin que ello suponga tener que revisar las conclusiones[42]. Por tanto, en esta relación inferencial

[42] Un ‘modelo’ natural de esta relación vendría dado por la noción de ‘fabricabilidad’ de cierto

es relevante el número de ocurrencias de cada premisa, aunque no su orden relativo (formalmente diríamos que las premisas son un multiconjunto): en terminología de Troelstra [Tro92], estaríamos ante una lógica sensible a los recursos). Es obvio que dicha relación de consecuencia lógica satisfaría la reflexividad [NP-s2], la transitividad [NP-s2] –por tanto, también la monotonía en las premisas [NP-s2]–, la permutación en las premisas [NP-s2] y la permutación en las conclusiones [NP-s2], pero no la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] ni su análoga por la izquierda, y además tampoco mantendría la monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2][43]. Esta relación de consecuencia lógica se parece a la relación inferencial plural correspondiente a la lógica lineal, pero a diferencia de la anterior esta última no satisface en general la transitividad [NP-s2] ni la monotonía en las premisas [NP-s2][44].

Pensemos ahora en otra relación de consecuencia lógica plural, también sensible a los recursos, para la que cada ocurrencia de una premisa es tomada como un 'ingrediente' distinto, pero en la cual éstos no se agotan con su uso (es decir, cada ocurrencia de una fórmula puede ser usada en distintas inferencias cuantas veces se desee, pero no puede usarse varias veces en la misma inferencia); en este caso se admite también el aumento de recursos sin que ello suponga tener que revisar las conclusiones aunque se impone la condición de que las conclusiones de inferencias previas no se pueden usar como premisas de otras inferencias posteriores[45]. Asumiendo que cada fórmula alcanza el umbral de activación necesario para que pueda ser inferida ella misma, esta relación de consecuencia lógica satisfaría la reflexividad [NP-s2], la monotonía en las premisas [NP-s2], la permutación en las premisas [NP-s2], la monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2] y la permutación en las conclusiones [NP-s2], pero no la transitividad [NP-s2], la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] ni su análoga por la izquierda[46]

objeto atendiendo al stock de materiales fungibles existente.

[43] Su correspondiente relación de consecuencia lógica singular satisfaría la reflexividad [NP-s1], la transitividad [NP-s1] –por tanto, también la monotonía [NP-s1]– y la permutación [NP-s1], pero no la contracción por la derecha [NP-s1] ni la contracción por la izquierda [NP-s1].

[44] Su correspondiente relación de consecuencia lógica singular satisfaría la reflexividad [NP-s1] y la permutación [NP-s1], pero no la transitividad [NP-s1], la monotonía [NP-s1], la contracción por la derecha [NP-s1] ni la contracción por la izquierda [NP-s1].

[45] Un 'modelo' natural de esta relación vendría dado por un mecanismo parecido al *quorum sensii* –es decir, un proceso en el que existe un umbral de activación mínimo– en el que no se consumen los recursos pero en el que lo que se obtiene como resultado de un proceso está marcado de modo que no puede ser utilizado en nuevos procesos.

[46] Su correspondiente relación de consecuencia lógica singular satisfaría la reflexividad [NP-s1],

En la siguiente definición indicamos cuáles son las reglas básicas:

Definición 71 (Relación inferencial de tipo RTCd [NP-s2] / RT [NP-s2])**.**
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow^*$*, diremos que es de tipo RTCd [NP-s2] si y sólo si satisface las siguientes propiedades estructurales:*

1. *Reflexividad [NP-s2].*

2. *Transitividad [NP-s2].*

3. *Contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].*

Diremos que es de tipo RT [NP-s2] si y sólo si satisface las Al conjunto de estas tres propiedades estructurales, consideradas básicas, lo designamos $\mathbb{P}^{B}_{\text{[NP-s2]}}$. *Al conjunto de todas las reglas derivadas a partir de las anteriores lo denominamos* $\mathbb{P}_{\text{[NP-s2]}}$.

Nos será útil también tener la siguiente definición más general:

Definición 72 (Relación inferencial de tipo RT [NP-s2])**.**
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow^*$*, siguientes propiedades estructurales:*

1. *Reflexividad [NP-s2].*

2. *Transitividad [NP-s2].*

Obviamente, ninguna de las anteriormente mencionadas relaciones de consecuencia lógica en las que los recursos son relevantes es de tipo RTCd [NP-s2], aunque la primera sí es RT [NP-s2].

A continuación seguimos indagando los vínculos de derivabilidad entre las distintas propiedades estructurales, comenzando con las que sólo requieren dos de las propiedades básicas.

Proposición 73.
Una relación de consecuencia lógica que satisfaga transitividad [NP-s2] y contracción por la derecha en las premisas [NP-s2], necesariamente satisface la propiedad de corte en las premisas [NP-s2].

la monotonía [NP-s1] y la permutación [NP-s1], pero no la transitividad [NP-s1], la contracción por la derecha [NP-s1] ni la contracción por la izquierda [NP-s1].

Demostración. Partimos de las precondiciones de la propiedad que se quiere probar y a continuación anotamos el resultado de aplicar la propiedad estructural que en cada línea se indica entre paréntesis:

1. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega$ (hipótesis)

2. $\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Delta$ (hipótesis)

3. $\Gamma \cdot \Gamma \cdot \Lambda \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega$ (por transitividad [NP-s2] sobre 2 y 1)

4. $\Gamma \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega$ (por contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] sobre 3)

5. $\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega$ (por contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] sobre 4)

Y esto último coincide con la postcondición de la propiedad de corte en las premisas [NP-s2].

■

Proposición 74.
Una relación de consecuencia lógica de tipo RTCd [NP-s2] necesariamente satisface las siguientes propiedades:
a) Contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].
b) Reemplazo de repeticiones por la derecha en las premisas [NP-s2].
c) Reemplazo de repeticiones por la izquierda en las premisas [NP-s2].
d) Permutación en las premisas [NP-s2].
e) Monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2].
f) Monotonía no homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2].
g) Corte directo en las conclusiones [NP-s2].
h) Contracción por la derecha en las conclusiones [NP-s2].
i) Contracción por la izquierda en las conclusiones [NP-s2].
j) Monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2].
k) Repetición por la derecha en las conclusiones [NP-s2].
l) Repetición por la izquierda en las conclusiones [NP-s2].
m) Permutación en las conclusiones [NP-s2].

Demostración. En cada uno de los casos partimos de la precondición o las precondiciones de la propiedad que se quiere probar y a continuación anotamos el resultado de aplicar la propiedad estructural que en cada línea se indica entre paréntesis. Encadenamos las pruebas de manera que podamos hacer uso de las propiedades ya derivadas en las siguientes pruebas (por haber sido probado bajo requisitos incluidos entre los anteriores, podremos también usar la propiedad de monotonía en las premisas [NP-s2]):

a) Contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2]:

1. $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Phi$ (hipótesis).
2. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Phi$ (por monotonía en las premisas [NP-s2] sobre 1).
3. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Phi$ (por contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] sobre 2).
4. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Gamma \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Phi$ (por contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] sobre 3).
5. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Phi$ (por contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] sobre 4).

Lo cual coincide con la postcondición de la propiedad de contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

b) Reemplazo de repeticiones por la derecha en las premisas [NP-s2]:

1. $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Phi$ (hipótesis).
2. $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Phi$ (por contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] sobre 1).
3. $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Psi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Phi$ (por monotonía en las premisas [NP-s2] sobre 2).

Siendo esta última la postcondición de la citada propiedad de reemplazo de repeticiones por la derecha en las premisas [NP-s2].

c) Reemplazo de repeticiones por la izquierda en las premisas [NP-s2]:

1. $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi$ (hipótesis).
2. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi$ (por contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2] sobre 1).
3. $\Gamma \cdot \Psi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi$ (por monotonía en las premisas [NP-s2] sobre 2).

Lo cual coincide con la postcondición de la citada propiedad de reemplazo de repeticiones por la izquierda en las premisas [NP-s2].

d) Permutación en las premisas [NP-s2]:

1. $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (hipótesis).
2. $\Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por monotonía en las premisas [NP-s2] sobre 1).
3. $\Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] sobre 2).
4. $\Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Gamma \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] sobre 3).
5. $\Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ (por contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] sobre 4).

Finalmente, el resultado obtenido coincide con la postcondición de la regla de permutación en las premisas [NP-s2].

e) Monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2]:

1. $\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Omega \cdot \Phi$ (hipótesis).
2. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Omega \cdot \Phi$ (por monotonía en las premisas [NP-s2] sobre 1).
3. $\Omega \cdot \Delta \cdot \Phi \Longrightarrow^* \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi$ (por reflexividad [NP-s2], incondicionalmente).

4. $\Omega \cdot \Phi \cdot \Delta \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi$ (por permutación en las premisas [NP-s2] sobre 3).
5. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Delta \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi$ (por transitividad [NP-s2] sobre 2 y 4).
6. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi$ (por contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] sobre 5).

Conclusión que coincide con la postcondición de la monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2].

f) Monotonía no homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2]:

1. $\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Phi$ (hipótesis).
2. $\Delta \Longrightarrow^{*} \Xi$ (hipótesis).
3. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Phi$ (por monotonía en las premisas [NP-s2] sobre 1).
4. $\Omega \cdot \Xi \cdot \Phi \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Xi \cdot \Phi$ (por reflexividad [NP-s2], incondicionalmente).
5. $\Omega \cdot \Delta \cdot \Phi \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Xi \cdot \Phi$ (por transitividad [NP-s2] sobre 2 y 4).
6. $\Omega \cdot \Phi \cdot \Delta \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi$ (por permutación en las premisas [NP-s2] sobre 5).
7. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Delta \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi$ (por transitividad [NP-s2] sobre 3 y 6).
8. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi$ (por contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] sobre 7).

Siendo la conclusión obtenida la postcondición de la monotonía no homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2].

g) Corte directo en las conclusiones [NP-s2]:

1. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda$ (hipótesis).
2. $\Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Delta \cdot \Lambda$ (por reflexividad [NP-s2], incondicionalmente).
3. $\Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Delta \cdot \Lambda$ (por permutación en las premisas [NP-s2] sobre 2).
4. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Delta \cdot \Lambda$ (por transitividad [NP-s2] sobre 1 y 3).

Siendo el resultado obtenido coincidente con la postcondición del corte directo en las conclusiones [NP-s2].

h) Contracción por la derecha en las conclusiones [NP-s2]:

1. $\Gamma \Longrightarrow^* \Phi \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda$ (hipótesis).
2. $\Gamma \Longrightarrow^* \Phi \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda$ (por corte directo en las conclusiones [NP-s2] sobre 1).

Que es la postcondición de la contracción por la derecha en las conclusiones [NP-s2].

i) Contracción por la izquierda en las conclusiones [NP-s2]:

1. $\Gamma \Longrightarrow^* \Phi \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda$ (hipótesis).
2. $\Gamma \Longrightarrow^* \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda$ (por corte directo en las conclusiones [NP-s2] sobre 1).

Siendo ésta la postcondición de la contracción por la izquierda en las conclusiones [NP-s2].

j) Monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2]:

1. $\Gamma \Longrightarrow^* \Omega \cdot \Lambda$ (hipótesis).
2. $\Gamma \Longrightarrow^* \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi$ (hipótesis).
3. $\Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda$ (por reflexividad [NP-s2], incondicionalmente).
4. $\Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda$ (por monotonía en las premisas [NP-s2] sobre 3).
5. $\Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda$ (por monotonía en las premisas [NP-s2] sobre 4).
6. $\Omega \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda$ (por transitividad [NP-s2] sobre 2 y 5).
7. $\Omega \cdot \Lambda \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda$ (por monotonía en las premisas [NP-s2] sobre 6).
8. $\Omega \cdot \Lambda \cdot \Gamma \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda$ (por monotonía en las premisas [NP-s2] sobre 7).

9. $\Omega \cdot \Lambda \cdot \Gamma \cdot \Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda$ (por transitividad [NP-s2] sobre 1 y 8).

10. $\Gamma \cdot \Gamma \cdot \Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda$ (por transitividad [NP-s2] sobre 1 y 9).

11. $\Gamma \cdot \Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda$ (por contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] sobre 10).

12. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda$ (por contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] sobre 11).

Lo cual coincide con la postcondición de la monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2].

k) Repetición por la derecha en las conclusiones [NP-s2]:

1. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi$ (hipótesis).

2. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi$ (por corte directo en las conclusiones [NP-s2] sobre 1).

3. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Xi$ (por corte directo en las conclusiones [NP-s2] sobre 2).

4. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Phi$ (por monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2] sobre 3).

Siendo ésta la postcondición de la repetición por la derecha en las conclusiones [NP-s2].

l) Repetición por la izquierda en las conclusiones [NP-s2]:

1. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Phi$ (hipótesis).

2. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Xi \cdot \Phi$ (por corte directo en las conclusiones [NP-s2] sobre 1).

3. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Xi$ (por corte directo en las conclusiones [NP-s2] sobre 2).

4. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Phi$ (por monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2] sobre 3).

Lo cual coincide con la postcondición de la repetición por la izquierda en las conclusiones [NP-s2].

m) Permutación en las conclusiones [NP-s2]:

1. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Phi \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda$ (hipótesis).
2. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Phi \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Omega \cdot \Xi \cdot \Lambda$ (por monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2] sobre 1 y 1).
3. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Phi \cdot \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Omega \cdot \Xi \cdot \Lambda$ (por monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2] sobre 2 y 2).
4. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Phi \cdot \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda$ (por corte directo en las conclusiones [NP-s2] sobre 3).
5. $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Phi \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda$ (por corte directo en las conclusiones [NP-s2] sobre 4).

Finalmente, el resultado obtenido coincide con la postcondición de la regla de permutación en las premisas [NP-s2].

■

Ya anunciamos anteriormente que una posibilidad muy interesante surge cuando se considera que todas las conclusiones de la relación inferencial plural están tácitamente conectadas conjuntivamente. Esta clase de relaciones inferenciales plurales será fundamental en nuestro planteamiento, puesto que nos permitirá modelizar el tipo de relación inferencial que está a la base de la abducción ordinaria plural plana (en la cual se permite que tanto el objeto del problema abductivo como la solución abductiva ordinaria sean más de una fórmula). Con este fin procedemos a dar la siguiente definición:

Definición 75 (Relación inferencial plural de aridad 2 que es acumulativa en su segunda componente)**.**
Una relación inferencial plural de aridad 2 $\Longrightarrow^{*}$ *es acumulativa en su segunda componente respecto de una relación inferencial singular de igual aridad* $\Longrightarrow$

cuando se satisface que:

$$\Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega \textit{ si y sólo si } \dot{\forall}\omega(\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} \Omega \dot{\Rightarrow} (\Gamma \Longrightarrow \omega)).$$

Obviamente, de entre las anteriormente presentadas relaciones inferenciales plurales de aridad 2 que son sensibles a los recursos, las dos primeras (la que modeliza la 'fabricabilidad' relativa a los materiales fungibles y la de la lógica lineal) no son acumulativas en su segunda componente respecto de las correspondientes singulares, pero sí lo es la tercera relación de consecuencia lógica antes expuesta (la que modeliza el *quorum sensii* sin reutilización de resultados). Para las dos primeras podemos señalar otro tipo de vínculo entre la relación inferencial plural y su correspondiente singular:

Definición 76 (Relación inferencial plural de aridad 2 que es iterativa en su segunda componente)**.**
Sea Γ una subfamilia cualquiera de elementos del conjunto no vacío $FOR(\mathcal{L})$ y sea Ω una subfamilia de elementos del mismo conjunto que está indexada por el conjunto bien ordenado I (así pues, $\Omega = \{(i,\omega) \ / \ \omega \in FOR(\mathcal{L}) \ \& \ i \in I\}$). En lugar de (i,ω) escribiremos ω_i; además, al primer elemento de I lo designaremos como i_0 y al siguiente de un elemento cualquiera de $i \in I$ lo designaremos $sg(i)$. Una relación inferencial plural de aridad 2 $\Longrightarrow^{*}$ es iterativa en su segunda componente respecto de una relación inferencial singular de igual aridad $\Longrightarrow$ cuando se satisface que: $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega$ si y sólo si o bien $\Omega \ddot{=} \langle \ \rangle$ o bien, en caso contrario, existe la familia $(\Gamma_i)_{i\in I}$ tal que $\Gamma \ddot{=} \Gamma_{i_0}$, $\Gamma_i \Longrightarrow \omega_i$ y para cada $i \succcurlyeq i_0$ ocurre que $\Gamma_{sg(i)} \ddot{\subseteq} \Gamma_i$ contiene las fórmulas de Γ_i que no se han usado en la derivación de ω_i.

Veamos ahora tres resultados que indican qué propiedades de la correspondiente relación de consecuencia lógica singular son suficientes para que una relación inferencial plural de aridad 2 que es acumulativa en su segunda componente respecto de la primera mencionada satisfaga cada una de las propiedades que hemos considerado básicas para la relación inferencial plural.

Proposición 77.
La relación de consecuencia lógica plural de aridad 2 $\Longrightarrow^{*}$ que es acumulativa en su segunda componente satisface la reflexividad [NP-s2] si su correspondiente relación de consecuencia lógica singular $\Longrightarrow$ satisface la reflexividad [NP-s1] y la transitividad [NP-s1].

Demostración. La propiedad de reflexividad [NP-s1] establece que:

$$\overline{\Gamma \cdot \langle \delta \rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \delta}\ .$$

Sea $\Delta \doteqdot \Xi \cdot \langle \delta \rangle \cdot \Phi$ una superfamilia cualquiera de la familia unitaria $\langle \delta \rangle$. A partir de $\Gamma \cdot \langle \delta \rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \delta$ podemos derivar $\Gamma \cdot \Xi \cdot \langle \delta \rangle \cdot \Phi \cdot \Lambda \Longrightarrow \delta$ del siguiente modo:

1. $\Gamma \cdot \langle \delta \rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \delta$ (hipótesis)

2. $\Xi \cdot \langle \delta \rangle \Longrightarrow \langle \delta \rangle$ (por reflexividad [NP-s1], incondicionalmente)

3. $\Gamma \cdot \Xi \cdot \langle \delta \rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \delta$ (por transitividad [NP-s1] sobre 2 y 1)

4. $\langle \delta \rangle \cdot \Phi \Longrightarrow \langle \delta \rangle$ (por reflexividad [NP-s1], incondicionalmente)

5. $\Gamma \cdot \Xi \cdot \langle \delta \rangle \cdot \Phi \cdot \Lambda \Longrightarrow \delta$ (por transitividad [NP-s1] sobre 4 y 3)

Pero, dado que habíamos establecido que $\Delta \doteqdot \Xi \cdot \langle \delta \rangle \cdot \Phi$, tenemos que $\Gamma \cdot \Xi \cdot \langle \delta \rangle \cdot \Phi \cdot \Lambda \Longrightarrow \delta$ es lo mismo que $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \delta$ si $\langle \delta \rangle \ddot{\subseteq} \Delta$. Así pues, concluimos que:

$$\frac{\langle \delta \rangle \ddot{\subseteq} \Delta}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \delta}\ .$$

Y dado que $\langle \delta \rangle$ puede ser una subfamilia unitaria cualquiera de Δ y que $\Longrightarrow^*$ es una relación de aridad 2 que es acumulativa en su segunda componente respecto de $\Longrightarrow$, se tiene que:

$$\overline{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Delta}$$

Y la regla obtenida es, justamente, la reflexividad [NP-s1]. ■

Proposición 78.
La relación de consecuencia lógica plural de aridad 2 $\Longrightarrow^*$ que es acumulativa en su segunda componente satisface la transitividad [NP-s2] si su correspondiente relación de consecuencia lógica singular $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1].

Demostración. Tomemos como hipótesis las precondiciones de la propiedad de transitividad [NP-s2]:
1. $\Gamma \Longrightarrow^* \Xi \cdot \Omega \cdot \Psi$ (hipótesis).
2. $\Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi$ (hipótesis).

A partir de la línea 1 y de que $\Longrightarrow^*$ es una relación de aridad 2 que es acumulativa en su segunda componente respecto de $\Longrightarrow$, tenemos que:

$$\Gamma \Longrightarrow^* \Xi \cdot \Omega \cdot \Psi \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\rho(\langle\rho\rangle \mathrel{\ddot{\subseteq}} \Xi \cdot \Omega \cdot \Psi \mathrel{\dot{\Rightarrow}} (\Gamma \Longrightarrow \rho)).$$

En particular, sean $\Xi \doteqdot \Psi \doteqdot \langle\ \ \rangle$ y $\langle\omega\rangle$ una subfamilia unitaria cualquiera de Ω, podemos concluir que $\Gamma \Longrightarrow \omega$.

Análogamente, a partir de la línea 2 y el mencionado carácter acumulativo en su segunda componente de $\Longrightarrow^*$ respecto de $\Longrightarrow$, tenemos que:

$$\Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\varphi(\langle\varphi\rangle \mathrel{\ddot{\subseteq}} \Phi \mathrel{\dot{\Rightarrow}} (\Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi)).$$

En particular, si $\langle\omega\rangle$ es cualquier subfamilia unitaria de Ω, podemos concluir que:

$$\dot{\forall}\varphi(\langle\varphi\rangle \mathrel{\ddot{\subseteq}} \Phi \mathrel{\dot{\Rightarrow}} (\Delta \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi)).$$

Ahora, por la transitividad [NP-s1] sobre $\Gamma \Longrightarrow \omega$ y $\Delta \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$ derivamos $\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi$. Y como ello se cumple independientemente de cuál sea $\langle\varphi\rangle \mathrel{\ddot{\subseteq}} \Phi$, se obtiene:

$$\dot{\forall}\varphi(\langle\varphi\rangle \mathrel{\ddot{\subseteq}} \Phi \mathrel{\dot{\Rightarrow}} (\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi)),$$

lo cual es equivalente a $\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi$ atendiendo a la definición de $\Longrightarrow^*$ en función de $\Longrightarrow$.

Y esto último es, justamente, la postcondición de la transitividad [NP-s1]. ■

Proposición 79.
La relación de consecuencia lógica plural de aridad 2 $\Longrightarrow^*$ que es acumulativa en su segunda componente satisface la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] si su correspondiente relación de consecuencia lógica singular $\Longrightarrow$ satisface la contracción por la derecha [NP-s1].

Demostración. Tomemos como hipótesis la precondición de la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2]: $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi$. A partir de la línea 1 y de que $\Longrightarrow^*$ es una relación de aridad 2 que es acumulativa en su segunda componente respecto de $\Longrightarrow$, tenemos que:

$$\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\varphi(\langle\varphi\rangle \mathrel{\ddot{\subseteq}} \Phi \mathrel{\dot{\Rightarrow}} (\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi)).$$

Aplicando la contracción por la derecha [NP-s1], lo anterior permite inferir:

$$\dot{\forall}\varphi(\langle\varphi\rangle \mathrel{\ddot{\subseteq}} \Phi \mathrel{\dot{\Rightarrow}} (\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi)).$$

Y, aplicando otra vez la definición de $\Longrightarrow^*$ en función de $\Longrightarrow$, esto es equivalente a $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi$.

Y esto último es, justamente, la postcondición de la contracción por la derecha [NP-s1]. ■

Abordamos ahora tres resultados 'recíprocos', los cuales indican qué propiedades cumple necesariamente la correspondiente relación de consecuencia lógica singular si la relación inferencial plural de aridad 2 que es acumulativa en su segunda componente respecto de aquélla satisface cada una de las propiedades que hemos considerado básicas para la relación inferencial plural.

Proposición 80.
La relación de consecuencia lógica singular $\Longrightarrow$ satisface la reflexividad [NP-s1] si su relación de consecuencia lógica plural de aridad 2 $\Longrightarrow^*$ que es acumulativa en su segunda componente satisface la reflexividad [NP-s2].

Demostración. La propiedad de reflexividad [NP-s2] establece que:

$$\frac{}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Delta}\ .$$

En particular, si $\Delta \doteqdot \langle\delta\rangle$ se sigue que:

$$\frac{}{\Gamma \cdot \langle\delta\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \langle\delta\rangle}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^*$ una relación de consecuencia lógica de aridad 2 que es acumulativa en su segunda componente respecto de $\Longrightarrow$, se tiene que:

$$\dot{\forall}\delta(\langle\delta\rangle \mathrel{\ddot{\subseteq}} \langle\delta\rangle \mathrel{\dot{\Rightarrow}} (\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \delta)).$$

Lo cual es equivalente a:

$$\dot{\forall}\delta(\widetilde{\top} \mathrel{\dot{\Rightarrow}} (\Gamma \cdot \langle\delta\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \delta)).$$

A su vez, dicha expresión se puede presentar en formato de regla de la siguiente manera:

$$\frac{}{\Gamma \cdot \langle\delta\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \delta}\ .$$

Y esto último afirma que la relación de consecuencia lógica singular $\Longrightarrow$ satisface la reflexividad [NP-s1]. ■

Proposición 81.
La relación de consecuencia lógica singular $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1] si su relación de consecuencia lógica plural de aridad 2 $\Longrightarrow^*$ que es acumulativa en su segunda componente satisface la transitividad [NP-s2].

Demostración. La propiedad de transitividad [NP-s2] establece que:

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow^* \Xi \cdot \Omega \cdot \Psi;\ \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi}\ .$$

Si en ella hacemos que en particular sea $\Omega \doteqdot \langle\omega\rangle$, $\Phi \doteqdot \langle\varphi\rangle$ y $\Xi \doteqdot \Psi \doteqdot \langle\ \ \rangle$, obtenemos para la relación de consecuencia lógica plural:

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow^* \langle\omega\rangle;\ \Delta \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \langle\varphi\rangle}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \langle\varphi\rangle}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^*$ una relación de consecuencia lógica de aridad 2 que es acumulativa en su segunda componente respecto de $\Longrightarrow$, se tiene que:
1. $\Gamma \Longrightarrow^* \langle\omega\rangle$ si y sólo si $\dot{\forall}\omega(\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} \langle\omega\rangle \dot{\Rightarrow} (\Gamma \Longrightarrow \omega))$.
2. $\Delta \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \langle\varphi\rangle$ si y sólo si $\dot{\forall}\varphi(\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \langle\varphi\rangle \dot{\Rightarrow} (\Delta \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi))$.
3. $\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \langle\varphi\rangle$ si y sólo si $\dot{\forall}\varphi(\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \langle\varphi\rangle \dot{\Rightarrow} (\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi))$.

Por tanto, se satisface la siguiente regla de la relación de consecuencia lógica singular:

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \omega;\ \Delta \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}\ .$$

Y ésta es, justamente, la propiedad de transitividad [NP-s1]. ■

Para el caso de la contracción por la derecha [NP-s2] probaremos previamente un importante lema:

Lema 82.
Una relación de consecuencia lógica plural de aridad 2 $\Longrightarrow^*$ que es acumulativa en su segunda componente respecto de $\Longrightarrow$ y que satisface la reflexividad [NP-s2] y la transitividad [NP-s2] también satisface la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

Demostración. La reflexividad [NP-s2] permite afirmar $\Xi \cdot \Delta \Longrightarrow^{*} \Xi \cdot \Delta$.

Dado que $\Longrightarrow^{*}$ es una relación de consecuencia lógica de aridad 2 que es acumulativa en su segunda componente respecto de $\Longrightarrow$ se tiene que:

$$\dot{\forall}\varphi(\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \Xi \cdot \Delta \dot{\Rightarrow} (\Xi \cdot \Delta \Longrightarrow \varphi)).$$

Ahora la expresión $\langle\varphi\rangle$ la podemos presentar de forma más precisa así: $\{(\varepsilon_1, \varphi)\}$. Con ello queda más claramente de manifiesto que en la expresión

$$\dot{\forall}\varphi(\{(\varepsilon_1, \varphi)\} \ddot{\subseteq} \Xi \cdot \Delta \dot{\Rightarrow} (\Xi \cdot \Delta \Longrightarrow \varphi))$$

la primera componente de los elementos de las subfamilias no es relevante para la relación inferencial indicada. Y, teniendo en cuenta que $\bar{\Xi} \cup \bar{\Delta} = \bar{\Xi} \cup \bar{\Delta} \cup \bar{\Xi}$, se deduce que la siguiente será equivalente a la anterior expresión:

$$\dot{\forall}\varphi(\{(\varepsilon_1, \varphi)\} \ddot{\subseteq} \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \dot{\Rightarrow} (\Xi \cdot \Delta \Longrightarrow \varphi)).$$

Tomando esto último y aplicando de nuevo la definición de $\Longrightarrow^{*}$ en función de $\Longrightarrow$, resulta que $\Xi \cdot \Delta \Longrightarrow^{*} \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi$.

Por otro lado, sabemos que la precondición de la regla de contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] es $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \Phi$.

Aplicando la transitividad [NP-s2] a las dos anteriores expresiones obtenemos $\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \Phi$.

Y ésta es, justamente, la postcondición de la regla de contracción por la derecha en las premisas [NP-s2]. ■

Esto tendrá como consecuencia que en el *teorema de representación de la deducción plural* no sea necesario incluir la condición de que la relación de consecuencia lógica plural de aridad 2 que es acumulativa en su segunda componente satisfaga la propiedad de contracción por la derecha en las premisas [NP-s2], puesto que aunque en general es independiente de la reflexividad [NP-s2] y la transitividad [NP-s2], en el caso particular citado aquella propiedad se sigue de éstas.

Proposición 83.
La relación de consecuencia lógica singular $\Longrightarrow$ satisface la contracción por la derecha [NP-s1] si su relación de consecuencia lógica plural de aridad 2 $\Longrightarrow^{*}$ que es acumulativa en su segunda componente satisface la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

Demostración. La regla de contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] establece que:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi}\ .$$

Si en ella hacemos que en particular sea $\Phi \doteqdot \langle\varphi\rangle$, obtenemos para la relación de consecuencia lógica plural:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \langle\varphi\rangle}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \langle\varphi\rangle}\ .$$

Dado que $\Longrightarrow^*$ es una relación de consecuencia lógica de aridad 2 que es acumulativa en su segunda componente respecto de $\Longrightarrow$ se tiene que la precondición de la regla es equivalente a:

$$\dot{\forall}\varphi(\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \langle\varphi\rangle \dot{\Rightarrow} (\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi)).$$

Por igual motivo se tiene que la postcondición de la regla es equivalente a:

$$\dot{\forall}\varphi(\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \langle\varphi\rangle \dot{\Rightarrow} (\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi)).$$

Por todo ello, se tiene que la regla de contracción por la derecha [NP-s2] permite obtener la siguiente regla de la relación de consecuencia lógica singular:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi}\ .$$

Y ésta es, justamente, la regla de contracción por la derecha [NP-s1]. ■

De los dos anteriores se infiere de forma inmediata el resultado que presenta las condiciones suficientes que debe cumplir una relación de consecuencia lógica plural de aridad 2 que es acumulativa en su segunda componente para que la correspondiente relación singular satisfaga la contracción por la derecha [NP-s1]:

Corolario 84.
La relación de consecuencia lógica singular $\Longrightarrow$ satisface la contracción por la derecha [NP-s1] si su relación de consecuencia lógica plural de aridad 2 $\Longrightarrow^*$ que es acumulativa en su segunda componente satisface la reflexividad [NP-s2] y la transitividad [NP-s2].

Igualmente de los seis anteriores teoremas se infiere la siguiente consecuencia.

Corolario 85.
Una relación inferencial plural de aridad 2 $\Longrightarrow^*$ *que es acumulativa en su segunda componente es de tipo RT [NP-s2] si y sólo si su relación de consecuencia lógica singular* $\Longrightarrow$ *es de tipo RTCd [NP-s1] –véase la figura 5 (3.3)–.*

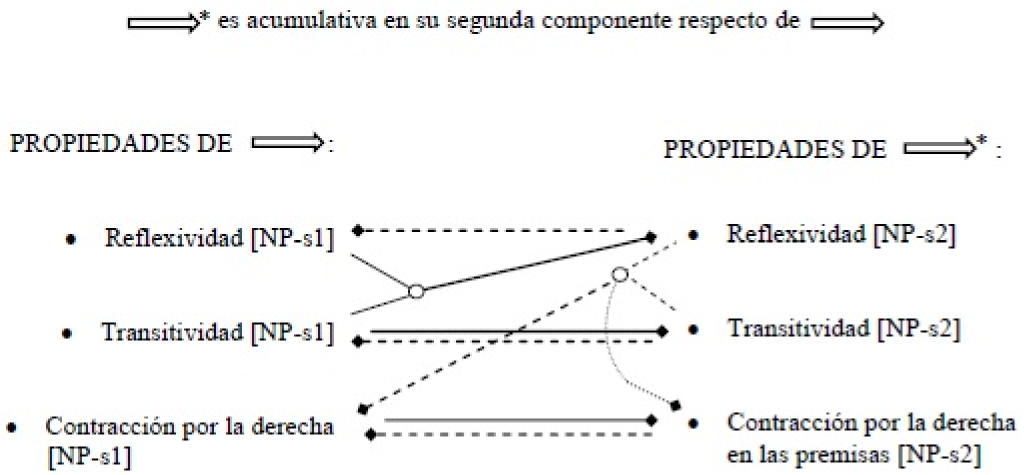

Fig. 5 (3.3): Vínculos entre reglas [NP-s1] de una relación inferencial singular y reglas [NP-s2] de una relación inferencial plural si esta última es acumulativa en su segunda componente respecto de aquélla.

Refiriéndonos nuevamente a las anteriormente presentadas relaciones inferenciales plurales de aridad 2 que son sensibles a los recursos, las dos primeras (la que modeliza la 'fabricabilidad' relativa a los materiales fungibles y la de la lógica lineal) no son acumulativas en su segunda componente respecto de las correspondientes singulares, por lo que no se les puede aplicar el anterior corolario (así pues, aunque la primera de las relaciones inferenciales plurales indicadas es de tipo RT [NP-s2], con sólo esta información no podemos garantizar que su correspondiente relación singular sea RTCd [NP-s1]). La tercera relación de consecuencia lógica plural sensible a los recursos antes mencionada (la que modeliza el *quorum sensii* sin reutilización de resultados) sí es acumulativa en su segunda componente respecto de su correspondientes singular, y dado que la relación plural no es de tipo RT [NP-s2], podemos garantizar que la relación singular no es de tipo RTCd [NP-s1].

Podemos pensar ahora en la relación inferencial deductiva plural, la cual podemos definir a partir de la relación inferencial deductiva clásica y que, como ya dijimos, será fundamental en la modelización de la abducción ordinaria plural plana que analizaremos en el quinto capítulo. Esta nueva relación inferencial deductiva la simbolizaremos como "$\Vdash_D$" (la relación inferencial deductiva clásica la seguiremos simbolizando simplemente como "$\Vdash$" o, cuando deseemos señalar esta circunstancia, como "$\Vdash_d$").

Definición 86 (Relación inferencial deductiva plural)**.**
La relación inferencial deductiva plural se define a partir de la relación inferencial deductiva singular de la siguiente manera:

$$\Gamma \Vdash_D \Omega \textit{ si y sólo si } \dot{\forall}\omega(\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} \Omega \dot{\Rightarrow} (\Gamma \Vdash_d \omega)).$$

Corolario 87.
La relación inferencial deductiva plural es acumulativa en su segunda componente respecto de la relación inferencial deductiva clásica.

Presentamos a continuación un *teorema de representación para la relación inferencial deductiva plural*, el cual, como en el caso de la respectiva singular, no requerirá de la correspondiente versión de la propiedad de monotonía en las premisas [NP-s2]; pero, además, ahora ni siquiera será necesaria la correspondiente versión de la contracción por la derecha [NP-s2].

Teorema 88 (Teorema de representación de la relación inferencial deductiva plural [NP-s2])**.**
Las propiedades de reflexividad [NP-s2] y transitividad [NP-s2] son condiciones suficientes de la relación de consecuencia deductiva plural para subfamilias de premisas y subfamilias de conclusiones con un cardinal arbitrario, en el sentido de que cualquier relación inferencial plural que satisfaga las dos propiedades indicadas se puede representar como si fuese la relación de consecuencia deductiva plural indicada.

Demostración. Sea $\Longrightarrow^*$ una relación de consecuencia lógica plural y sean Γ y Φ elementos de $SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))$.

Hemos establecido definicionalmente el vínculo entre una relación inferencial plural de aridad 2 que es acumulativa en su segunda componente y su correspondiente relación inferencial singular del siguiente modo:

$$\Gamma \Longrightarrow^* \Omega \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\omega(\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} \Omega \dot{\Rightarrow} (\Gamma \Longrightarrow \omega)).$$

Además, hemos asumido que la relación inferencial deductiva singular venía caracterizada semánticamente por la siguiente formulación relativa a modelos:

$$\Gamma \Longrightarrow \omega \text{ si y sólo si } (\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \subseteq Mod(\omega).$$

Y, dado que el conjunto de los modelos que satisfacen todas las fórmulas $\omega \in \bar{\Omega}$ es justamente $\bigcap_{\omega\in\bar{\Omega}} Mod(\omega)$, tenemos que la relación inferencial deductiva plural queda caracterizada semánticamente como:

$$\Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega \text{ si y sólo si } (\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \subseteq (\bigcap_{\omega\in\bar{\Omega}} Mod(\omega)).$$

Si Ψ es un elemento cualquiera de $SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))$ y definimos $Mod(\bar{\Psi}) = (\bigcap_{\psi\in\bar{\Psi}} Mod(\psi))$, dicha caracterización semántica queda como sigue:

$$\Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega \text{ si y sólo si } Mod(\bar{\Gamma}) \subseteq Mod(\bar{\Omega}).$$

Y esto último es, justamente, lo que debemos probar, siendo $\Longrightarrow^{*}$ una relación de consecuencia lógica plural que satisface las propiedades de reflexividad [NP-s2] y transitividad [NP-s2].

Para ello adoptaremos una semántica según la cual los modelos de cada subfamilia son las subfamilias que siendo tomadas como premisas permiten establecer inferencias correctas en las que justamente las familias de las que se buscan los modelos son las conclusiones. Es decir, si Ψ es un elemento cualquiera de $SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))$, entonces su conjunto de modelos es:

$$Mod(\bar{\Psi}) = \{\Sigma \mathbin{/} \Sigma \in SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})) \mathbin{\dot{\&}} \Sigma \Longrightarrow^{*} \bar{\Psi}\}.$$

Ahora probaremos el anterior *si y sólo si* descomponiéndolo en dos implicaciones recíprocas:

1. Si $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega$ entonces $Mod(\bar{\Gamma}) \subseteq Mod(\bar{\Omega})$:
   Por hipótesis tenemos que $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Omega$ y analizamos el conjunto $Mod(\bar{\Gamma})$. Caben dos posibilidades:

   a) Que sea $Mod(\bar{\Gamma}) = \varnothing$: en ese caso, obviamente, $Mod(\bar{\Gamma}) \subseteq Mod(\bar{\Omega})$.

   b) Que sea $Mod(\bar{\Gamma}) \neq \varnothing$: en ese caso elegimos un elemento cualquiera Σ_0 de dicho conjunto. Dado que Σ_0 es un elemento de $Mod(\bar{\Gamma})$, se tiene por la definición de este conjunto que $\Sigma_0 \Longrightarrow^{*} \Gamma$ y, dado que la relación de consecuencia $\Longrightarrow^*$ satisface la propiedad de transitividad [NP-s2] y que por hipótesis $\Gamma \Longrightarrow^* \Omega$, se tiene que $\Sigma_0 \Longrightarrow^* \Omega$. Así pues, a tenor de la definición de $Mod(\bar{\Omega})$, se concluye que $\Sigma_0 \in Mod(\bar{\Omega})$. Y como Σ_0 era un elemento cualquiera de $Mod(\bar{\Gamma})$, se infiere que $Mod(\bar{\Gamma}) \subseteq Mod(\bar{\Omega})$.

2. Si $Mod(\bar{\Gamma}) \subseteq Mod(\bar{\Omega})$ entonces $\Gamma \Longrightarrow^* \Omega$:
   Ahora nuestra hipótesis es que $Mod(\bar{\Gamma}) \subseteq Mod(\bar{\Omega})$. Por la reflexividad [NP-s2] de la relación de consecuencia $\Longrightarrow^*$ tenemos que $\Gamma \Longrightarrow^* \Gamma$, por lo tanto $\Gamma \in Mod(\bar{\Gamma})$. Además, como por hipótesis se tiene $Mod(\bar{\Gamma}) \subseteq Mod(\bar{\Omega})$, se infiere que $\Gamma \in Mod(\bar{\Omega})$. Y ahora, por la definición de $Mod(\bar{\Omega})$, se concluye que $\Gamma \Longrightarrow^* \Omega$.

■

Es importante también que reflexionemos un poco sobre la regla de transitividad [NP-s2], de la cual podríamos haber presentado otras dos versiones alternativas, cuyos rótulos respectivos se indican a continuación de cada una de ellas:

1. $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow^* \Omega;\ \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi}$ (transitividad [NP-s2b]).

2. $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow^* \Omega;\ \Omega \Longrightarrow^* \Phi}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi}$ (transitividad [NP-s2c]).

Proposición 89.
En relación a las distintas alternativas para la regla de transitividad tenemos la siguiente situación –véase la figura 6 (3.3)–:

1. *La transitividad [NP-s2] permite derivar la transitividad [NP-s2b].*
2. *La transitividad [NP-s2b] conjuntamente con la reflexividad [NP-s2] permite derivar la transitividad [NP-s2].*
3. *La transitividad [NP-s2b] permite derivar la transitividad [NP-s2c].*
4. *No es posible derivar de manera directa la transitividad [NP-s2b] mediante la transitividad [NP-s2c], la reflexividad [NP-s2] y la contracción por la derecha [NP-s2].*

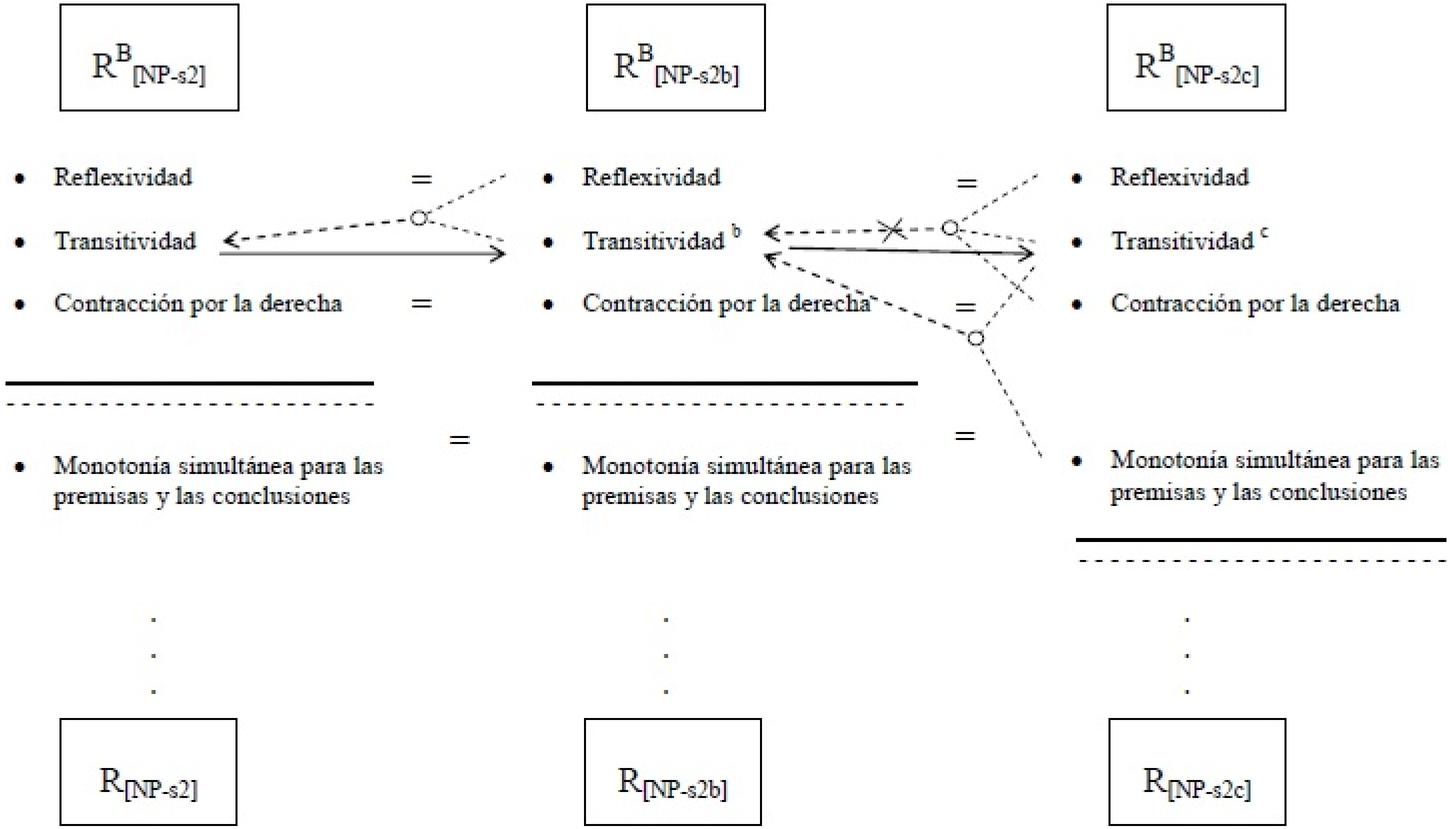

Fig. 6 (3.3): Vínculos entre reglas [NP-s2], [NP-s2b] y [NP-s2c].

Demostración.

1. Obviamente [NP-s2b] representa una clase de casos particulares de [NP-s2]: aquéllos en los que $\Xi \doteqdot \Psi \doteqdot \langle\ \rangle$.

2. La derivación de la transitividad [NP-s2] mediante la transitividad [NP-s2b] y la reflexividad [NP-s2] es casi inmediata:

   a) $\Gamma \Longrightarrow^* \Xi \cdot \Omega \cdot \Psi$ (hipótesis).

   b) $\Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi$ (hipótesis).

   c) $\Xi \cdot \Omega \cdot \Psi \Longrightarrow^* \Omega$ (por reflexividad [NP-s2], incondicionalmente).

   d) $\Gamma \Longrightarrow^* \Omega$ (por transitividad [NP-s2b] sobre a y c).

   e) $\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi$ (por transitividad [NP-s2b] sobre d y b).

   Y esto último es la conclusión de la transitividad [NP-s2].

3. Obviamente [NP-s2c] representa una clase de casos particulares de [NP-s2b]: aquéllos en los que $\Delta \doteqdot \Lambda \doteqdot \langle\ \rangle$.

4. Es sencillo probar que la transitividad [NP-s2c] junto con la reflexividad [NP-s2] y la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] no permiten derivar de manera directa la transitividad [NP-s2]. La prueba es una reducción al absurdo desde el supuesto de que sí existe la mencionada derivación directa. Ésta partiría de las precondiciones de la última regla mencionada ($\Gamma \Longrightarrow^* \Omega$ y $\Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi$) y terminaría cuando se alcanzase por primera vez su postcondición ($\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \Phi$) mediante el uso de las otras reglas mencionadas.

   Ahora bien, observando la reflexividad [NP-s2] y la contracción por la derecha [NP-s2], vemos que ninguna de ellas pudo ser la que permitió conseguir por primera vez una condición con la ocurrencia de Δ, Γ y Λ sólo en el miembro izquierdo y de Φ sólo en el miembro derecho: la reflexividad [NP-s2] obliga a que Φ ocurra en el miembro izquierdo de la condición si queremos que ocurra también en el derecho; por su parte, la contracción por la derecha [NP-s2] sólo permite eliminar subfamilias en el miembro izquierdo de la postcondición, por lo que debería haberse obtenido previamente otra condición que ya satisfaría los requisitos mencionados. Así pues, sólo resta analizar si ello habría sido posible mediante la propia regla de transitividad [NP-s2c]: ésta sólo habría permitido obtener una condición como la citada si hubiésemos tenido una precondición con Δ, Γ y Λ sólo en el miembro izquierdo y de Ω sólo en el miembro derecho. Pero nuevamente una condición tal no se podría haber obtenido por primera vez ni por la reflexividad [NP-s2] ni por la contracción por la derecha [NP-s2] y asumir que lo hubiese sido por la transitividad [NP-s2c] nos introduciría en un bucle sin fin. Así pues, hemos de rechazar por contradictoria la posibilidad de que exista la mencionada derivación directa.

■

Es importante señalar que con estas versiones alternativas de la transitividad se podría probar el *teorema de representación de la relación inferencial deductiva plural*, resultando llamativa la situación en el caso de la segunda, dado que a partir de ella no se puede derivar de manera directa la transitividad [NP-s2] ni siquiera en conjunción con las otras propiedades básicas [NP-s2]. En lo sorprendente de la situación abunda el hecho de que con la transitividad [NP-s2c] no se podría haber derivado de manera directa la propiedad de monotonía en las premisas [NP-s2] ni otras que se han obtenido con el uso de esta última. Lo que explica la anterior situación es el hecho de que en el citado teorema de representación se exige que la relación inferencial plural sea acumulativa en su segunda componente respecto de la correspondiente relación inferencial singular y que satisfaga la reflexividad [NP-s2], y en ese 'marco' ocurre que las tres versiones de la transitividad convergen. Veamos cómo se justifica la versión [NP-s2b] a partir de la [NP-s2c] bajo dichos supuestos:

Proposición 90.
Una relación de consecuencia lógica plural de aridad 2 $\Longrightarrow^*$ que es acumulativa en su segunda componente respecto de $\Longrightarrow$ y que satisface la reflexividad [NP-s2] y la transitividad [NP-s2c] también satisface la transitividad [NP-s2b].

Demostración. Tomamos como hipótesis las precondiciones de la transitividad [NP-s2b]:
1. $\Gamma \Longrightarrow^* \Omega$.
2. $\Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi$.

La reflexividad [NP-s2] nos permite afirmar incondicionalmente:
3. $\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Gamma$.

4. $\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Delta$.
5. $\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Lambda$.

Y aplicando la transitividad [NP-s2c] sobre 3 y 1 obtenemos:
6. $\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Omega$.

$\Longrightarrow^*$ es una relación de consecuencia lógica de aridad 2 que es acumulativa en su segunda componente con respecto a $\Longrightarrow$, por lo que a partir de las anteriores líneas 4, 5 y 6 se tiene, respectivamente:
7. $\dot{\forall}\varphi(\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \Delta \dot{\Rightarrow} (\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi))$.
8. $\dot{\forall}\varphi(\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \Lambda \dot{\Rightarrow} (\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi))$.
9. $\dot{\forall}\varphi(\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \Omega \dot{\Rightarrow} (\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi))$.

Por propiedades básicas del cuantificador universal metalingüístico inferimos:
10. $\dot{\forall}\varphi((\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \Delta \dot{\Rightarrow} (\Delta{\cdot}\Gamma{\cdot}\Lambda \Longrightarrow \varphi)) \dot{\&} (\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \Omega \dot{\Rightarrow} (\Delta{\cdot}\Gamma{\cdot}\Lambda \Longrightarrow \varphi)) \dot{\&} (\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \Lambda \dot{\Rightarrow} (\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi)))$.
11. $\dot{\forall}\varphi(((\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \Delta) \dot{\triangledown} (\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \Omega) \dot{\triangledown} (\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \Lambda)) \dot{\Rightarrow} (\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi))$.

Ahora bien, por propiedades elementales de las subfamilias tenemos:
12. $\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \dot{\Leftrightarrow} (\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \Delta) \dot{\triangledown} (\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \Omega) \dot{\triangledown} (\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \Lambda)$.

Por tanto, podemos inferir:
13. $\dot{\forall}\varphi(\langle\varphi\rangle \ddot{\subseteq} \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \dot{\Rightarrow} (\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow \varphi))$.

Y, nuevamente por la mencionada propiedad de acumulatividad, se sigue: 14. $\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda$.

Ahora, aplicando la transitividad [NP-s2c] sobre 14 y 2, obtenemos:
15. $\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi$.

Y ésta es justamente la postcondición de la transitividad [NP-s2]. ■

Proposición 91.
Una relación de consecuencia lógica que satisfaga transitividad [NP-s2c] y monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2], necesariamente satisface la transitividad [NP-s2b].

Demostración. Partimos de las precondiciones de la propiedad que se quiere probar y a continuación anotamos el resultado de aplicar la propiedad estructural que en cada línea se indica entre paréntesis:

1. $\Gamma \Longrightarrow^* \Omega$ (hipótesis)

2. $\Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi$ (hipótesis)

3. $\Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Omega \cdot \Lambda$ (por monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2] sobre 1)

4. $\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda$ (por monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2] sobre 3)

5. $\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Phi$ (por transitividad [NP-s2c] sobre 4 y 2)

Y esto último coincide con la postcondición de la propiedad de transitividad [NP-s2b].

■

Ahora presentamos nuevas definiciones incorporando estas últimas propiedades estructurales:

Definición 92 (Relación inferencial de tipo RTbCd [NP-s2b])**.**
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow^*$, diremos que es de tipo RTbCd [NP-s2b] si y sólo si satisface las siguientes propiedades estructurales:

1. *Reflexividad [NP-s2].*

2. *Transitividad [NP-s2b].*

3. *Contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].*

Al conjunto de estas tres propiedades estructurales, consideradas básicas, lo designamos $\mathbb{P}^B_{\text{[NP-s2b]}}$. Al conjunto de todas las reglas derivadas a partir de las anteriores lo denominamos $\mathbb{P}_{\text{[NP-s2b]}}$.

Definición 93 (Relación inferencial de tipo RMsTcCd [NP-s2c])**.**
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow^*$, diremos que es de tipo RMsTcCd [NP-s2c] si y sólo si satisface las siguientes propiedades estructurales:

1. *Reflexividad [NP-s2].*

2. *Monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2].*

3. *Transitividad [NP-s2c].*

4. *Contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].*

Al conjunto de estas cuatro propiedades estructurales, consideradas básicas, lo designamos $\mathbb{P}^B_{[\text{NP-s2c}]}$*. Al conjunto de todas las reglas derivadas a partir de las anteriores lo denominamos* $\mathbb{P}_{[\text{NP-s2c}]}$*.*

A la luz de todos los resultados presentados podemos establecer a modo de resumen:

Proposición 94.
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow^*$*:*

1. *Es RTCd [NP-s2] si y sólo si es RTbCd [NP-s2b].*
2. *Es RTbCd [NP-s2b] si y sólo si es RMsTcCd [NP-s2c].*
3. *Los tres siguientes conjuntos de reglas tienen la misma capacidad de derivación:* $\mathbb{P}^B_{[\text{NP-s2}]}$, $\mathbb{P}^B_{[\text{NP-s2b}]}$ *y* $\mathbb{P}^B_{[\text{NP-s2c}]}$*.*

Veamos ahora una consecuencia del último teorema de representación:

Corolario 95.
La relación inferencial deductiva plural es de tipo RTCd [NP-s2].

Para terminar esta sección, particularizaremos las reglas [NP-s2] al caso de la deducción plural. Al ser ésta de tipo RTCd [NP-s2] se tiene que también satisface las dos propiedades de contracción en las premisas y las conclusiones [NP-s2] y las dos propiedades de permutación en las premisas y las conclusiones [NP-s2]. Además, según ya vimos, la deducción clásica es de tipo RTCd [NP-s1]. Por ello, podríamos representar la condición necesaria y suficiente que liga ambos tipos de relaciones inferenciales mediante conjuntos de fórmulas:

Corolario 96.
$\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Omega}$ *si y sólo si* $\dot{\forall}\omega(\omega \in \bar{\Omega} \dot{\Rightarrow} \bar{\Gamma} \Vdash_d \omega)$.

No explicitamos aquí su demostración dado que ésta no es más que la invocación de la definición de la relación inferencial deductiva plural a partir de la correspondiente singular junto con las mencionadas propiedades estructurales de ambas.

Con esta opción notacional, las reglas estructurales más interesantes que satisface la relación inferencial deductiva plural son:

V.1- ***Reflexividad [NP:D]***[47]***:***

$$\frac{}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta} \Vdash_D \bar{\Gamma}} \ .$$

V.2- ***Monotonía en las premisas [NP:D]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Omega}}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta} \Vdash_D \bar{\Omega}} \ .$$

V.3- ***Monotonía cauta en las conclusiones [NP:D]***[48]***:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Omega} \cup \bar{\Lambda};\ \bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Delta} \cup \bar{\Xi}}{\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta}} \ .$$

V.4- ***Monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP:D]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Omega}}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta} \Vdash_D \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta}} \ .$$

[47] Su nombre es más ilustrativo de una clase de casos particulares de la anterior regla que ocurren cuando $\bar{\Delta} = \varnothing$:

$$\frac{}{\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Gamma}} \ .$$

[48] Su nombre es más ilustrativo de una clase de casos particulares de la anterior regla que ocurren cuando $\bar{\Lambda} = \bar{\Xi} = \varnothing$:

$$\frac{\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Omega};\ \bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Delta}}{\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta}} \ .$$

V.5- ***Transitividad [NP:D]***[49]***:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Omega} \cup \bar{\Xi};\ \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta} \Vdash_D \bar{\Phi}}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta} \Vdash_D \bar{\Phi}}\ .$$

V.6- ***Corte en las premisas [NP:D]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta} \Vdash_D \bar{\Omega};\ \bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Delta}}{\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Omega}}\ .$$

V.7- ***Corte directo en las conclusiones [NP:D]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta}}{\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Omega}}\ .$$

No lo hacemos aquí, pero se puede probar que cada una de estas reglas satisface la caracterización en términos de modelos que se ha dado de la relación inferencial deductiva plural.

[49] Su nombre es más ilustrativo de una clase de casos particulares de la anterior regla que ocurren cuando $\bar{\Xi} = \bar{\Delta} = \varnothing$:

$$\frac{\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Omega};\ \bar{\Omega} \Vdash_D \bar{\Phi}}{\bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Phi}}\ .$$

Capítulo 4

Análisis estructural de la abducción ordinaria clásica

Como anunciamos al comienzo del capítulo anterior, el objetivo de esta segunda parte de esta memoria de investigación es realizar el análisis estructural de la relación inferencial abductiva ordinaria cuando ella está mediada por la relación de consecuencia deductiva. Dicho estudio presenta algunas dificultades importantes, a lo cual se suma el hecho de que las propiedades estructurales son diferentes si nos referimos a la relación inferencial abductiva ordinaria plana o a las distintas relaciones inferenciales abductivas ordinarias cualificadas (es decir, dependerá de las condiciones adicionales que se exijan); en este trabajo nos interesaremos especialmente por la primera de las indicadas, por cuanto las demás se apoyan en ella.

Es unánime que la abducción ordinaria da lugar a un tipo de lógica subestructural, pero justificar esto de modo preciso y riguroso no es fácil en todos sus puntos (de hecho, en la mayoría de tratamientos intuitivos se sortean las mencionadas dificultades haciendo algún que otro cambio a conveniencia en la presentación de las reglas). Veamos de modo intuitivo algunos de los motivos para incluir a la relación inferencial abductiva ordinaria entre las llamadas relaciones de consecuencia subestructurales:

1. La no satisfacción de la reflexividad para las fórmulas de la teoría-base es bastante obvia, dado que una fórmula que ya se encontraba en aquélla no puede ser la solución abductiva ordinaria de un problema abductivo (téngase en cuenta que la relación de consecuencia deductiva satisface las dos formas de la propiedad de contracción y, por tanto, la agregación de cualquier fórmula

que ya perteneciese a dicha teoría-base dejaría una situación idéntica a la inicial).

2. Que no satisface la propiedad de monotonía con respecto a posibles expansiones de la teoría-base también resulta fácil de acreditar, puesto que si añadimos a aquélla una solución abductiva ordinaria, obviamente el problema abductivo inicial queda disuelto: la consideración de que una fórmula es el objeto de un problema abductivo depende en particular de cuál sea la teoría-base y, por tanto, dicha consideración debe ser revisada si varía ésta. La necesidad de retractar la conclusión[1] tras la expansión de la teoría-base queda claramente de manifiesto en algunas modalidades de la abducción ordinaria cualificada. Supongamos que en lugar de abducción ordinaria plana se exigiese también que la solución abductiva fuese fuerte compatible; si una solución abductiva ordinaria para cierto problema abductivo inicial es cierta fórmula y se piensa en un nuevo problema abductivo, igual al anterior salvo que a la teoría-base se le añade la negación de la anterior solución abductiva ordinaria, obviamente la solución previa no puede seguir siéndolo, so pena de incurrir en inconsistencia.

3. Para mostrar que tampoco se puede garantizar la transitividad habitualmente se usan versiones de las propiedades estructurales que son adaptaciones *ad hoc*, puesto que la presentación general de las reglas no se ajusta convenientemente al formato de la relación inferencial abductiva ordinaria. Analizaremos tres diferentes adaptaciones que se encuentran con cierta frecuencia en la literatura sobre la cuestión (en esos casos $\Vdash_{ao} \subseteq \wp(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})$, $\bar{\Theta}$ será un subconjunto del conjunto no vacío $FOR(\mathcal{L})$ y π, σ y σ' serán elementos de $FOR(\mathcal{L})$):

   a) Versión 1:

$$\frac{(\bar{\Theta}, \pi) \Vdash_{ao} \sigma; \ (\bar{\Theta}, \sigma) \Vdash_{ao} \sigma'}{(\bar{\Theta}, \pi) \Vdash_{ao} \sigma'} \, .$$

   En la abducción ordinaria plana esta regla sí se cumple siempre que la relación de consecuencia deductiva por la que está mediada satisfaga

[1] El carácter revisable de la inferencia abductiva ordinaria ha hecho que, a menudo, en el área de la Inteligencia Artificial se la haya vinculado al argumento por defecto (también llamado *de sentido común*).

la propiedad transitiva: esto queda de manifiesto si en la regla anterior sustituimos los enunciados inferenciales abductivos ordinarios por los correspondientes enunciados inferenciales equivalentes:

$$\frac{\bar{\Theta} \nVdash_d \pi;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma\} \Vdash_d \pi;\ \bar{\Theta} \nVdash_d \sigma;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma'\} \Vdash_d \sigma}{\bar{\Theta} \nVdash_d \pi;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma'\} \Vdash_d \pi}\ .$$

Esta propiedad también se mantiene (siempre que la relación inferencial deductiva por la que está mediada satisfaga la propiedad mencionada) en el caso de la abducción ordinaria a cuya solución se le exige que sea compatible, tanto si lo es en sentido fuerte

$$\frac{\begin{array}{c}\bar{\Theta} \nVdash_d \pi;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma\} \Vdash_d \pi;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma\} \nVdash_d \bot;\\ \bar{\Theta} \nVdash_d \sigma;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma'\} \Vdash_d \sigma;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma'\} \nVdash_d \bot\end{array}}{\bar{\Theta} \nVdash_d \pi;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma'\} \Vdash_d \pi;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma'\} \nVdash_d \bot}$$

o débil

$$\frac{\begin{array}{c}\bar{\Theta} \nVdash_d \pi;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma\} \Vdash_d \pi;\ \dot{\exists}\varphi(\bar{\Theta} \cup \{\sigma\} \nVdash_d \varphi);\\ \bar{\Theta} \nVdash_d \sigma;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma'\} \Vdash_d \sigma; \dot{\exists}\varphi(\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma'\} \nVdash_d \varphi)\end{array}}{\bar{\Theta} \nVdash_d \pi;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma'\} \Vdash_d \pi;\ \dot{\exists}\varphi(\bar{\Theta} \cup \{\sigma'\} \nVdash_d \varphi)}\ .$$

Sin embargo, en la abducción ordinaria a cuya solución se le exige que sea explicativa

$$\frac{\begin{array}{c}\bar{\Theta} \nVdash_d \pi;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma\} \Vdash_d \pi;\ \{\sigma\} \nVdash_d \pi;\\ \bar{\Theta} \nVdash_d \sigma;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma'\} \Vdash_d \sigma;\ \{\sigma'\} \nVdash_d \sigma\end{array}}{\bar{\Theta} \nVdash_d \pi;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma'\} \Vdash_d \pi;\ \{\sigma'\} \nVdash_d \pi},$$

dicha propiedad no se mantiene en general, como muestra el siguiente contraejemplo: $\bar{\Theta} = \{p, r\}, \pi = r \to q, \sigma = p \to q, \sigma' = r \to q$ y $\Vdash_d$ la relación inferencial, dada semánticamente o sintácticamente, de la lógica proposicional clásica (este ejemplo incumple la condición $\{\sigma'\} \nVdash_d \pi$).

b) Versión 2:

$$\frac{(\bar{\Theta}, \pi) \Vdash_{ao} \sigma;\ (\bar{\Theta}', \sigma) \Vdash_{ao} \sigma'}{(\bar{\Theta} \cup \bar{\Theta}', \pi) \Vdash_{ao} \sigma'}.$$

Esta propiedad no se mantiene en general para la abducción ordinaria plana, como muestra el siguiente contraejemplo: $\bar{\Theta} = \{p\}, \bar{\Theta}' = \{q\}, \pi = q, \sigma = p \wedge q, \sigma' = p$ y $\Vdash_d$ la relación inferencial, dada semánticamente o sintácticamente, de la lógica proposicional clásica (si en la regla anterior sustituimos los enunciados inferenciales abductivos ordinarios por sus correspondientes requisitos deductivos obtenemos:

$$\frac{\bar{\Theta} \nVdash_d \pi;\ \bar{\Theta} \cup \{\sigma\} \Vdash_d \pi;\ \bar{\Theta}' \nVdash_d \sigma;\ \bar{\Theta}' \cup \{\sigma'\} \Vdash_d \sigma}{\bar{\Theta} \cup \bar{\Theta}' \nVdash_d \pi;\ \bar{\Theta} \cup \bar{\Theta}' \cup \{\sigma'\} \Vdash_d \pi},$$

y es evidente que en el ejemplo indicado se incumple la condición $\bar{\Theta} \cup \bar{\Theta}' \nVdash_d \pi$). En este ejemplo las soluciones abductivas presentadas generan una teoría-base expandida que es consistente en sentido fuerte y en sentido débil, por lo que el mismo ejemplo vale para probar que la regla no se sostiene en la abducción ordinaria con solución débilmente compatible y fuertemente compatible. Sin embargo, no todas las soluciones abductivas que aparecen en las precondiciones de la regla son explicativas (concretamente $\sigma = p \wedge q$ no lo es para $\pi = p$), pero en el siguiente sí ocurre tal cosa, lo cual muestra que tampoco se sostiene dicha propiedad en este tipo de abducción ordinaria: $\bar{\Theta} = \{p \to q, q \to r\}, \bar{\Theta}' = \{q\}, \pi = r, \sigma = p, \sigma' = q \to p$, siendo igualmente $\Vdash_d$ la relación inferencial, dada semánticamente o sintácticamente, de la lógica proposicional clásica.

c) Versión 3:

$$\frac{(\bar{\Theta}, \pi) \Vdash_{ao} \sigma;\ (\{\sigma\}, \pi') \Vdash_{ao} \sigma'}{(\bar{\Theta} \cup \{\pi\}, \pi') \Vdash_{ao} \sigma'}.$$

Esta propiedad no se mantiene en general para la abducción ordinaria plana, ni para la abducción ordinaria a cuya solución se le exige que sea compatible –tanto si lo es en sentido fuerte o débil–, ni tampoco para la abducción ordinaria a cuya solución se le exige que sea explicativa, como muestra el siguiente contraejemplo: $\bar{\Theta} = \{p \rightarrow q, q \rightarrow r\}, \pi = r, \sigma = p, \pi' = r, \sigma' = p \rightarrow r$, siendo $\Vdash_d$ otra vez la relación inferencial, dada semánticamente o sintácticamente, de la lógica proposicional clásica.

4. Para justificar que se satisfacen las propiedades de permutación y contracción en las premisas basta tener en cuenta que la teoría-base es un conjunto de fórmulas, por lo que la consideración de que cierta fórmula es el objeto de un problema abductivo o de que cierta otra es una solución abductiva ordinaria no se ve alterada por la adición o supresión de fórmulas repetidas en la teoría-base ni por el orden relativo de dichas fórmulas en esta última.

En los textos ya citados de Atocha Aliseda ([AL97], [AL03] y [AL06]) aparece un importante resultado en relación a lo que ella llama *abducción consistente* (pero que no coincide con lo que nosotros llamamos de modo similar, por cuanto falta el requisito del fracaso inferencial en la relación de consecuencia lógica mediadora). Se trata de un teorema de representación mediante el cual caracteriza la relación inferencial abductiva ordinaria citada mediante tres reglas estructurales.

Sean X_i (para $1 \leq i \leq m; i, m \in \mathbb{N}$, siendo m constante), A_j (para $1 \leq j \leq n; j, n \in \mathbb{N}$, siendo n constante) y B elementos cualesquiera del conjunto no vacío $FOR(\mathcal{L})$, las mencionadas reglas son:

VI.1- ***Reflexividad condicionada [At-c2]:***

$$\frac{\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} B}{\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} X_i}.$$

VI.2- ***Corte simultáneo [At-c2]:***

$$\frac{(\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} A_1); ...; (\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} A_n); (\lceil A_1, ..., A_n \rceil \Longrightarrow_{cf} B)}{\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} B}.$$

VI.3- ***Conclusión consistente [At-c2]:***

$$\frac{(\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} A_1); ...; (\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} A_n)}{\lceil A_1, ..., A_n \rceil \Longrightarrow_{cf} A_j}.$$

Teorema 97 (Teorema de representación de la 'abducción consistente' (Aliseda)). *La reflexividad condicionada [At-c2], la propiedad de corte simultáneo [At-c2] y la conclusión consistente [At-c2] son condiciones suficientes de la relación de consecuencia abductiva ordinaria para cadenas finitas de premisas, en el sentido de que cualquier relación inferencial con dicha cantidad de premisas que satisfaga las tres propiedades mencionadas se puede representar como si fuese la relación de consecuencia abductiva ordinaria indicada.*

Demostración. Expondremos a continuación una prueba que, en sus líneas principales, coincide con la que presenta Atocha Aliseda en [AL97], [AL03] y [AL06], aunque aquí explicitaremos bastantes detalles de la misma, de modo que con ello resultarán más claras las semejanzas y diferencias que existen con otros resultados de igual naturaleza que veremos más adelante en esta sección y en las que le siguen.

Sea $\Longrightarrow_{cf}$ una relación de consecuencia lógica cuyas premisas forman una cadena finita ($X \in CADF(FOR(\mathcal{L}))$) y cuya conclusión es una sola fórmula ($B \in FOR(\mathcal{L})$).

Siendo X la teoría-base, B el objeto del problema abductivo y C la solución abductiva ordinaria, se cumple $X \centerdot \lceil C \rceil \vDash B$. Establecemos que $X' = X \centerdot \lceil C \rceil$.

Asumimos que la relación inferencial deductiva clásica está caracterizada semánticamente por la siguiente propiedad relativa a modelos:

$$X' \vDash B \text{ si y sólo si } (\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)) \subseteq Mod(B).$$

La consistencia de la cadena finita de fórmulas X' se traduce semánticamente en que tiene algún modelo:

$$X' \text{ es consistente si y sólo si } (\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)) \neq \varnothing.$$

Y, por propiedades de la Teoría de Conjuntos, sabemos que $M \neq \varnothing$ si y sólo si $\varnothing \subsetneq M$.

Así pues, debemos probar que:

$$X' \Longrightarrow_{cf} B \text{ si y sólo si } \varnothing \subsetneq (\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)) \subseteq Mod(B),$$

siendo $\Longrightarrow_{cf}$ una relación de consecuencia lógica que satisface las propiedades de reflexividad condicionada [At-c2], corte simultáneo [At-c2] y conclusión consistente [At-c2].

Para ello adoptamos una semántica según la cual los modelos de cada fórmula son las cadenas finitas de fórmulas con las cuales se pueden establecer enunciados inferenciales correctos tales que las premisas vengan dadas por una de esas cadenas y la conclusión por la mencionada fórmula. Es decir, siendo Y una cadena finita cualquiera de fórmulas, para cada fórmula $D \in \bar{Y}$ su conjunto de modelos es:

$$Mod(D) = \{Z \;/\; Z \in CADF(FOR(\mathcal{L})) \;\dot{\&}\; Z \Longrightarrow_{cf} D\}.$$

Probaremos el anterior *si y sólo si* descomponiéndolo en dos implicaciones recíprocas:

1. Si $X' \Longrightarrow_{cf} B$ entonces $\varnothing \subsetneq (\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)) \subseteq Mod(B)$:
Por hipótesis tenemos $X' \Longrightarrow_{cf} B$ y analizaremos el conjunto de modelos $\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)$. Éste no puede ser vacío, puesto que de la hipótesis $X' \Longrightarrow_{cf} B$ podemos inferir, por la regla de reflexividad condicionada [At-c2], $X' \Longrightarrow_{cf} A$ para cualquier $A \in \bar{X}'$ y, por lo tanto, $X' \in \bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)$. Por otro lado, dado que dicho conjunto no es vacío, podemos elegir un elemento cualquiera (Z_0) de dicho conjunto (por tanto, Z_0 es una cadena finita de fórmulas). Ahora, puesto que Z_0 es un elemento de $Mod(A)$ para cada $A \in \bar{X}'$, tenemos $Z_0 \Longrightarrow_{cf} A$; y por satisfacer la relación de consecuencia $\Longrightarrow_{cf}$ la propiedad de corte simultáneo [At-c2], junto con la hipótesis $X' \Longrightarrow_{cf} B$, tenemos $Z_0 \Longrightarrow_{cf} B$, de donde $Z_0 \in Mod(B)$. Y como Z_0 era un elemento cualquiera de $\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)$, se infiere que $(\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)) \subseteq Mod(B)$.

2. Si $\varnothing \subsetneq (\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)) \subseteq Mod(B)$ entonces $X' \Longrightarrow_{cf} B$:
En esta segunda parte nuestra hipótesis es $\varnothing \subsetneq (\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)) \subseteq Mod(B)$. Por ser $\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)$ un conjunto no vacío, podemos elegir un elemento cualquiera (Z_0) de dicho conjunto. Ahora, puesto que Z_0 es un elemento de $Mod(A)$ para cada $A \in \bar{X}'$, tenemos $Z_0 \Longrightarrow_{cf} A$; y por satisfacer la relación de consecuencia $\Longrightarrow_{cf}$ la propiedad de conclusión consistente [At-c2], tenemos $X' \Longrightarrow_{cf} A$ para cada $A \in \bar{X}'$. Por tanto, $X' \in \bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)$; y dado que, por hipótesis, $(\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)) \subseteq Mod(B)$, se infiere $X' \in Mod(B)$; así pues, por definición de $Mod(B)$, tenemos $X' \Longrightarrow_{cf} B$.

■

Definición 98 (Relación inferencial de tipo RcCsCc [At-c2]).
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow_{cf}$, diremos que es de tipo RcCsCc [At-c2] si y sólo si satisface las siguientes propiedades estructurales:

1. *Reflexividad condicionada [At-c2].*
2. *Corte simultáneo [At-c2].*
3. *Conclusión consistente [At-c2].*

Al conjunto de estas tres propiedades estructurales, consideradas básicas, lo designamos $\mathbb{P}^B_{\text{[At-c2]}}$. Al conjunto de todas las reglas derivadas a partir de las anteriores lo denominamos $\mathbb{P}_{\text{[At-c2]}}$.

Podemos pensar en que reglas análogas a las [At-c2], pero en las que las letras que antes representaban subfamilias de fórmulas ahora representarían cadenas finitas de fórmulas: las llamamos reglas [‘At’-s2].

Definición 99 (Relación inferencial de tipo RcCsCc [‘At’-s2]).
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow$, diremos que es de tipo RcCsCc [‘At’-s2] si y sólo si satisface las siguientes propiedades estructurales:

1. *Reflexividad condicionada [‘At’-s2].*
2. *Corte simultáneo [‘At’-s2].*
3. *Conclusión consistente [‘At’-s2].*

Al conjunto de estas tres propiedades estructurales, consideradas básicas, lo designamos $\mathbb{P}^B_{\text{[‘At’-s2]}}$. Al conjunto de todas las reglas derivadas a partir de las anteriores lo denominamos $\mathbb{P}_{\text{[‘At’-s2]}}$.

Algo que resulta muy sencillo de probar es que estas reglas [At-c2] tienen una capacidad de derivación estrictamente menor que las tres reglas básicas [NP-c1] –véase la figura 1 (4.0)–:

Proposición 100.
Dada una relación inferencial singular $\Longrightarrow_{cf}$ cuyas premisas forman una cadena finita, se tiene que:

1. *Las tres reglas básicas [NP-c1] permiten derivar las tres reglas [At-c2] antes indicadas.*

2. *Las tres reglas [At-c2] citadas permiten derivar la contracción por la derecha [NP-c1].*

3. *Mediante las tres reglas [At-c2] no se pueden derivar de manera directa la reflexividad [NP-c1] ni la transitividad [NP-c1].*

Demostración. Sea X_i (para $1 \leq i \leq m; i, m \in \mathbb{N}$, siendo m constante), Y_j (para $1 \leq j \leq p; j, p \in \mathbb{N}$, siendo p constante), Z_k (para $1 \leq k \leq q; k, q \in \mathbb{N}$, siendo q constante), U_l (para $1 \leq l \leq r; l, r \in \mathbb{N}$, siendo r constante), A y B elementos cualesquiera del conjunto no vacío $FOR(\mathcal{L})$.

1. Comenzamos derivando las reglas [At-c2] a partir de las reglas [NP-c1].

   a) *Reflexividad condicionada [At-c2].* Obviamente, ésta representa una clase de casos particulares de la reflexividad [NP-c1], dado que coincide la postcondición, pero en esta última no se exige ninguna precondición en particular.

   b) *Corte simultáneo [At-c2].* En este caso basta con aplicar n veces la transitividad [NP-c1], substituyendo cada una de las fórmulas A_j ($1 \leq j \leq n; j, n \in \mathbb{N}$, siendo n constante) del enunciado inferencial $\lceil A_1, ..., A_n \rceil \Longrightarrow_{cf} B$ por la cadena finita $\lceil X_1, ..., X_m \rceil$, y a continuación aplicar $n-1$ veces la propiedad de contracción por la derecha [NP-c1], eliminando todas las cadenas repetidas salvo la que ocurre más a la izquierda. Tras esto obtenemos como resultado $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} B$, que es la conclusión buscada.

   c) *Conclusión consistente [At-c2].* Del mismo modo que en la reflexividad condicionada [At-c2], dado que coincide la postcondición pero no se exige ninguna precondición en particular, la conclusión consistente [At-c2] representa una clase de casos particulares de la reflexividad [NP-c1].

2. La regla de contracción por la derecha [NP-c1] es:

$$\frac{\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} B}{\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} B}.$$

   La derivación sería la siguiente:

   1. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} B$

(hipótesis).

2. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} X_1$ (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre 1).

(...)

m+1. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} X_m$ (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre 1).

m+2. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} U_1$ (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre 1).

(...)

m+r+1. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} U_r$ (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre 1).

m+r+2. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} Y_1$ (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre 1).

(...)

m+r+p+1. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} Y_p$ (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre 1)

m+r+p+2. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} Z_1$ (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre 1).

(...)

m+r+p+q+1. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} Z_q$ (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre 1).

m+r+p+q+2. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} X_1$ (por conclusión consistente [At-c2] sobre las líneas que van desde la número 2 a la número m+r+p+q+1).

(...)

2m+r+p+q+1. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} X_m$ (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre m+r+p+q+2).

2m+r+p+q+2. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} U_1$ (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre m+r+p+q+2).

(...)

2m+2r+p+q+1. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} U_r$ (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre m+r+p+q+2).

2m+2r+p+q+2. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} Y_1$ (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre m+r+p+q+2).

(...)

2m+2r+2p+q+1. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf}$ Y_p (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre m+r+p+q+2)
2m+2r+2p+q+2. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf}$ U_1 (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre m+r+p+q+2).
(...)
2m+3r+2p+q+1. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf}$ U_r (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre m+r+p+q+2).
2m+3r+2p+q+2. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf}$ Z_1 (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre m+r+p+q+2).
(...)
2m+3r+2p+2q+1. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf}$ Z_q (por reflexividad condicionada [At-c2] sobre m+r+p+q+2).
2m+3r+2p+2q+2. $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil U_1, ..., U_r \rceil \centerdot \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf}$ B (por corte simultáneo [At-c2] sobre las líneas que van desde la número m+r+p+q+2 a la número 2m+3r+2p+2q+1 y la línea 1).

3. Ahora probamos por qué la reflexividad [NP-c1] y la transitividad [NP-c1] no se pueden derivar a partir de las [At-c2].

   a) La reflexividad [NP-c1] es:

   $$\frac{}{\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} X_i}\,.$$

   Y ella resulta imposible de obtener a partir de las [At-c2] puesto que estas últimas exigen en todos los casos la satisfacción de al menos una condición y aquélla es incondicional.

   b) La transitividad [NP-c1] es:

   $$\frac{\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} A;\ \lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil A \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} B}{\lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} B}\,.$$

   Para probar que con las reglas [At-c2] es imposible obtener mediante derivación directa la regla de la transitividad [NP-c1] hagamos el siguiente razonamiento por reducción al absurdo. Supongamos que existiese tal derivación, en cuyo caso ésta comenzaría con las precondiciones de dicha regla ($\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} A$ y $\lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil A \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf}$ B) y terminaría la primera vez que se alcanzase la postcondición de aquélla ($\lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil \Longrightarrow_{cf} B$). Ahora nos preguntamos cómo se ha obtenido la cadena que aparece en el miembro izquierdo de la postcondición (es decir, $\lceil Y_1, ..., Y_p \rceil \centerdot \lceil X_1, ..., X_m \rceil \centerdot \lceil Z_1, ..., Z_q \rceil$. Dicha cadena no coincide con el miembro izquierdo de ninguna de las dos hipótesis y tampoco es posible obtener una postcondición con dicha cadena como miembro izquierdo ni por medio de la regla de reflexividad condicionada [At-c2] ni por medio de la regla de corte simultáneo [At-c2], puesto que en ambos casos el miembro izquierdo de la postcondición coincide exactamente con el de alguna precondición suya. Por tanto, sólo podría haberse obtenido como postcondición por la regla de conclusión consistente [At-c2]. Sin embargo, ésta exige que todas las precondiciones coincidan en su miembro izquierdo y que cada una de las fórmulas de la secuencia que estamos buscando haya sido el miembro derecho de alguna precondición. Ahora nos fijamos en que sólo la regla de reflexividad condicionada [At-c2] permitiría obtener en el miembro derecho cada una de las fórmulas indicadas, pero ello exigiría que el miembro izquierdo fuese exactamente la cadena que queremos construir, por lo que entraríamos en un bucle indefinido. Debemos concluir, por tanto, que no es posible derivar de forma directa la propiedad de transitividad [NP-c1] a partir de las reglas [At-c2][2].

■

La versión para las propiedades [NP-s1] y [‘At’-s2] es muy parecida –véase la figura 2 (4.0)–:

Proposición 101.
Dada una relación inferencial singular $\Longrightarrow$ cuyas premisas forman una subfamilia, se tiene que:

1. *Las tres reglas básicas [NP-s1] permiten derivar las tres reglas [‘At’-s2] antes indicadas.*

[2] Idéntica conclusión se obtiene al constatar que en las reglas [At-c2] no es posible tener condición alguna cuyo miembro izquierdo sea la cadena vacía. Aquí hemos preferido usar en la prueba un argumento que subsistiría aunque estuviésemos en un ‘contexto’ en el que se garantizase que no existen enunciados inferenciales con el miembro izquierdo vacío –lo cual, según veremos, es una exigencia en ciertas relaciones inferenciales–.

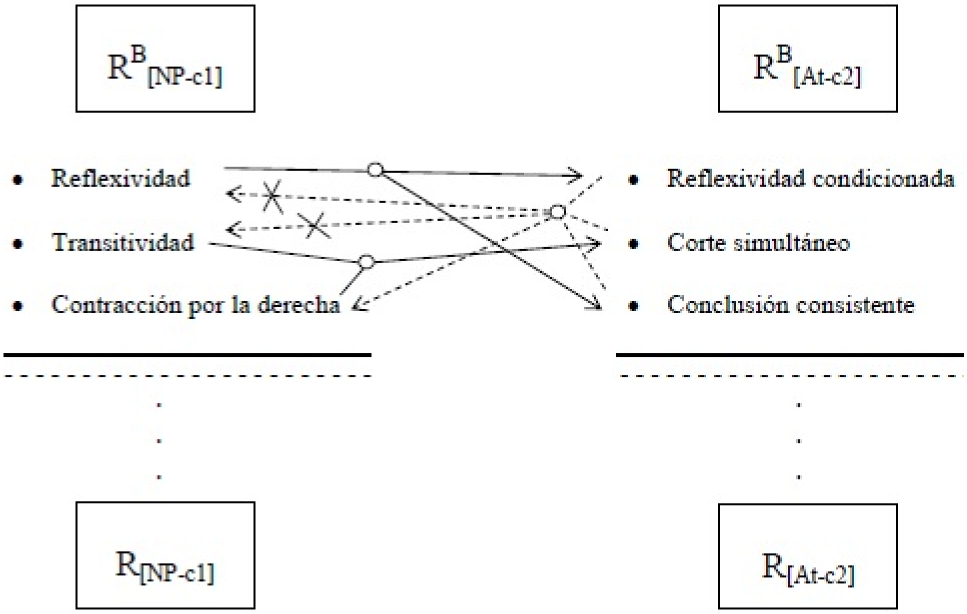

Fig. 1 (4.0): Vínculos entre reglas [NP-c1] y [At-c2].

2. *Las tres reglas [‘At’-s2] citadas permiten justificar la contracción por la derecha [NP-s1].*
3. *Mediante las tres reglas [‘At’-s2] no se pueden derivar de manera directa la reflexividad [NP-s1] ni la transitividad [NP-s1].*

Demostración. En todos los casos, la prueba de cada apartado es similar a la de su correspondiente en el anterior teorema substituyendo cadenas finitas por subfamilias y las reglas [NP-c1] y [At-c2] por [NP-s1] y [‘At’-s2], respectivamente. La prueba del segundo apartado dejará de ser una prueba para ser una mera justificación dado que no se tratará de un procedimiento finito. ■

La situación es distinta en el caso de la transitividad [NP-c1b] –véase la figura 3 (4.0)–:

Proposición 102.
Dada una relación inferencial singular $\Longrightarrow_{cf}$ cuyas premisas forman una cadena finita, se tiene que:

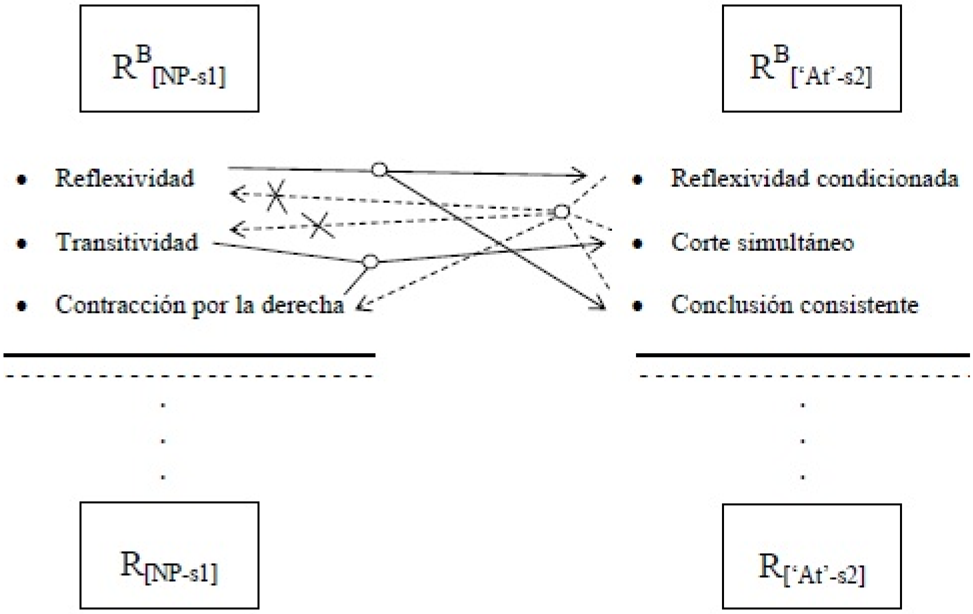

Fig. 2 (4.0): Vínculos entre reglas [NP-s1] y ['At'-s2].

1. *La regla de corte simultáneo [At-c2] permite derivar la transitividad [NP-c1b].*

2. *No es posible derivar de manera directa la regla de corte simultáneo [At-c2] mediante la transitividad [NP-c1b], la reflexividad [NP-c1] y la contracción por la derecha [NP-c1].*

3. *No es posible derivar de manera directa la regla de corte simultáneo [At-c2] mediante la transitividad [NP-c1b] y las otras reglas [At-c2].*

Demostración.

1. La transitividad [NP-c1b] es:
$$\frac{\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} A; \lceil A \rceil \Longrightarrow_{cf} B}{\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} B},$$
y su derivación es inmediata, puesto que la citada regla representa la clase de casos particulares de la propiedad de corte simultáneo [At-c2] en los que $((\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} A_1); ...; (\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} A_n))$ está particularizado como $(\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} A)$ y $\lceil A_1, ..., A_m \rceil$ está particularizado como $\lceil A \rceil$.

2. La prueba es una reducción al absurdo desde el supuesto de que sí existe la mencionada derivación directa. Ésta partiría de las precondiciones de la regla de corte simultáneo [At-c2] (desde $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} A_1$ hasta $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} A_n$ y $\lceil A_1, ..., A_n \rceil \Longrightarrow_{cf} B$) y terminaría cuando se alcanzase por primera vez su postcondición ($\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} B$) mediante el uso de las otras reglas mencionadas.

   Ahora bien, observando la reflexividad [NP-c1] y la contracción por la derecha [NP-c1], vemos que ninguna de ellas pudo ser la que permitió conseguir por primera vez una condición con la ocurrencia de las fórmulas X_1,...,X_m sólo en el miembro izquierdo y de B sólo en el miembro derecho: la reflexividad [NP-c1] obliga a que B ocurra en el miembro izquierdo de la condición si queremos que ocurra también en el derecho; por su parte, la contracción por la derecha [NP-c1] sólo permite eliminar cadenas finitas en el miembro izquierdo de la postcondición, por lo que debería haberse obtenido previamente otra condición que ya satisfaría los requisitos mencionados. Así pues, sólo resta analizar si ello habría sido posible mediante la propia regla de transitividad [NP-c1b]: ésta sólo habría permitido obtener una condición como la citada si hubiésemos tenido una precondición que estableciese $\lceil C \rceil \Longrightarrow_{cf} B$ y otra precondición con las fórmulas X_1,...,X_m sólo en el miembro izquierdo y de C sólo en el miembro derecho. Pero nuevamente una condición tal como esta última no se podría haber obtenido por primera vez ni por la reflexividad [NP-s1b] ni por la contracción por la derecha [NP-s1b] y asumir que lo hubiese sido por la transitividad [NP-c1b] nos introduciría en un bucle sin fin.

3. La prueba es una reducción al absurdo desde el mismo supuesto que antes y cuyo requisito de terminación sería también coincidente.

   Observando la reflexividad condicionada [At-c2] y la regla de conclusión consistente [At-c2], vemos que ninguna de ellas pudo ser la que permitió conseguir la postcondición, puesto que ambas obligan a que B ocurra en el miembro izquierdo de la condición si queremos que ocurra también en el derecho. Así pues, sólo resta analizar si ello habría sido posible mediante la propia regla de transitividad [NP-c1b]: ésta habría permitido obtener $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} B$ sólo si hubiésemos tenido $\lceil X_1, ..., X_m \rceil \Longrightarrow_{cf} A$ y $\lceil A \rceil \Longrightarrow_{cf} B$. De ambas condiciones la última no coincide con ninguna de las hipótesis iniciales y tampoco podría ser obtenida por la reflexividad condicionada [At-c2] ni por la regla de conclusión consistente [At-c2], puesto que ambas obligan a que B ocurra en el miembro izquierdo de la condición si queremos que ocurra en el derecho. Además, para obtener la última condición indicada por la transitividad [NP-s1b] necesitaríamos $\lceil A \rceil \Longrightarrow_{cf} A$ y $\lceil A \rceil \Longrightarrow_{cf} B$, lo que nos introduciría en un bucle sin fin. Así pues, hemos de rechazar por contradictoria la posibilidad de que exista la mencionada derivación directa.

■

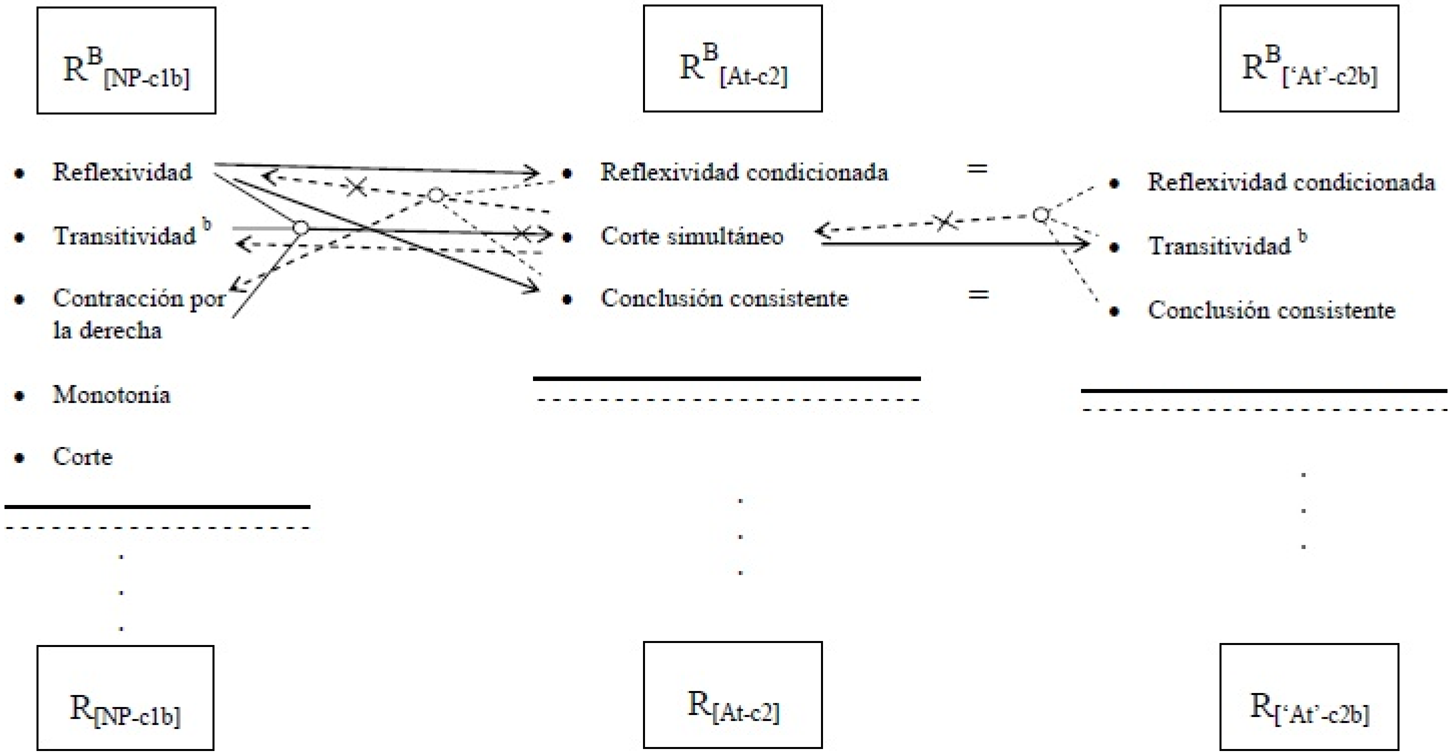

Fig. 3 (4.0): Vínculos entre reglas [NP-c1b], [At-c2] y [‘At’-c2b].

La versión para las propiedades [NP-s1b] y [‘At’-s2] es idéntica a la análoga para cadenas –véase la figura 4 (4.0)–:

Proposición 103.
Dada una relación inferencial singular $\Longrightarrow$ cuyas premisas forman una subfamilia, se tiene que:

1. *La regla de corte simultáneo [‘At’-s2] permite derivar la transitividad [NP-s1b].*
2. *No es posible derivar de manera directa la regla de corte simultáneo [‘At’-s2] mediante la transitividad [NP-s1b], la reflexividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1].*
3. *No es posible derivar de manera directa la regla de corte simultáneo [‘At’-s2] mediante la transitividad [NP-s1b] y las otras reglas [‘At’-s2].*

Demostración. En todos los casos, la prueba de cada apartado es similar a la de su correspondiente en el anterior teorema substituyendo cadenas finitas por subfamilias y las reglas [NP-c1], [NP-c1b] y [At-c2] por [NP-s1], [NP-s1b] y [‘At’-s2], respectivamente. ■

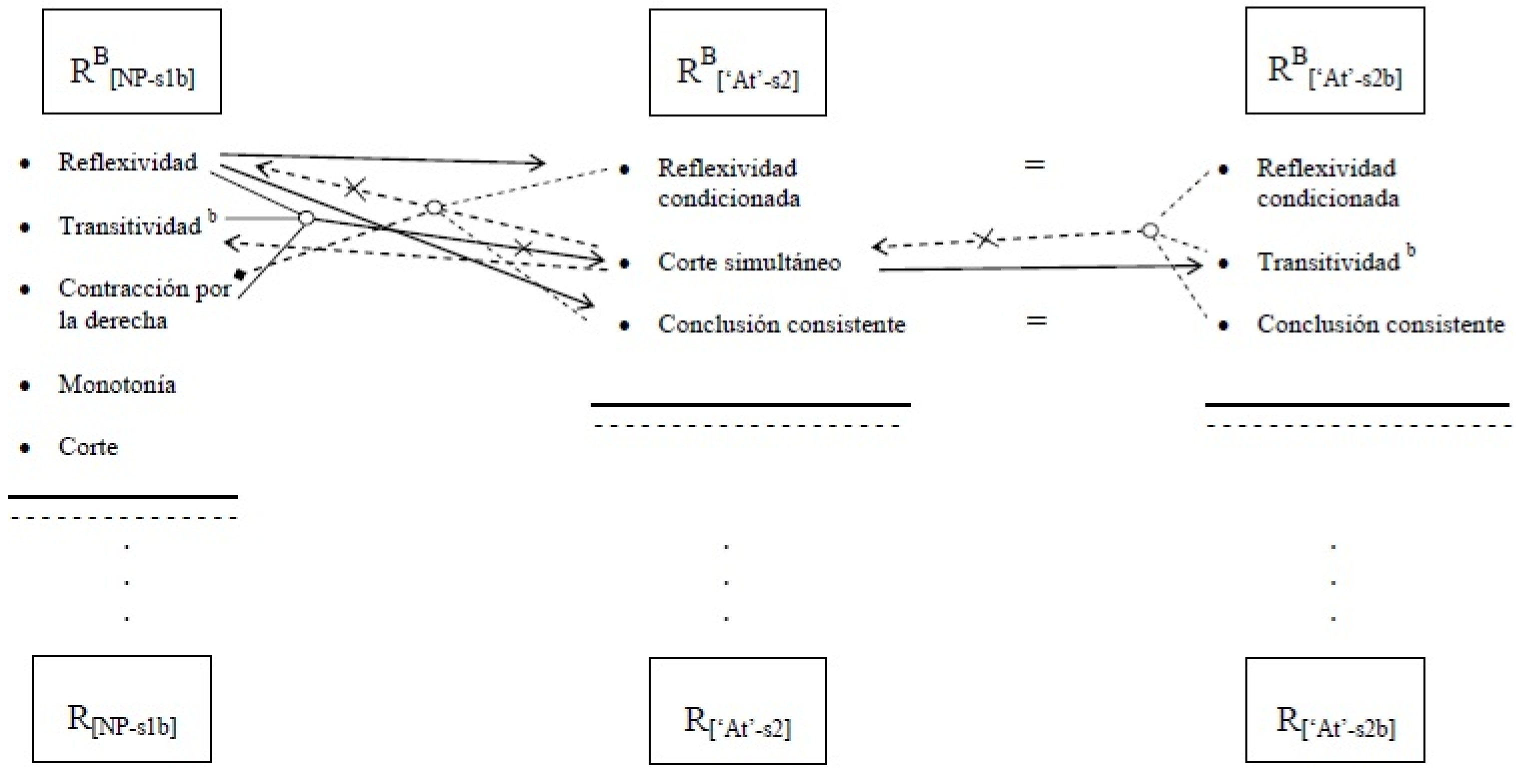

Fig. 4 (4.0): Vínculos entre reglas [NP-s1b], [‘At’-s2] y [‘At’-s2b].

Damos ahora las definiciones de los nuevos tipos de relaciones inferenciales:

Definición 104 (Relación inferencial de tipo RcTbCc [‘At’-c2b])**.**
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow_{cf}$*, diremos que es de tipo RcTbCc [‘At’-c2b] si y sólo si satisface las siguientes propiedades estructurales:*

1. *Reflexividad condicionada [At-c2].*
2. *Transitividad [NP-c1b].*
3. *Conclusión consistente [At-c2].*

Al conjunto de estas tres propiedades estructurales, consideradas básicas, lo designamos $\mathbb{P}^B_{[\text{‘At’-c2b}]}$*. Al conjunto de todas las reglas derivadas a partir de las anteriores lo denominamos* $\mathbb{P}_{[\text{‘At’-c2b}]}$*.*

Definición 105 (Relación inferencial de tipo RcTbCc [‘At’-s2b])**.**
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow_{cf}$*, diremos que es de tipo RcTbCc [‘At’-s2b] si y sólo si satisface las siguientes propiedades estructurales:*

1. *Reflexividad condicionada [‘At’-s2].*
2. *Transitividad [NP-s1b].*
3. *Conclusión consistente [‘At’-s2].*

Al conjunto de estas tres propiedades estructurales, consideradas básicas, lo designamos $\mathbb{P}^B_{[\text{‘At’-s2b}]}$*. Al conjunto de todas las reglas derivadas a partir de las anteriores lo denominamos* $\mathbb{P}_{[\text{‘At’-s2b}]}$*.*

A la luz de los resultados presentados podemos establecer a modo de resumen:

Proposición 106.
Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow_{cf}$*:*

1. *Si es RTCd [NP-c1] entonces es RcCsCc [At-c2], pero no ocurre necesariamente lo recíproco.*
2. *Si es RcCsCc [At-c2] entonces es RcTbCc [‘At’-c2b], pero no ocurre necesariamente lo recíproco.*

3. *Si es RTCd [NP-c1] entonces es RTbCd [NP-c1b], pero no ocurre necesariamente lo recíproco.*

4. *Si es RTbCd [NP-c1b] entonces es RcTbCc ['At'-c2b], pero no ocurre necesariamente lo recíproco.*

Dada una relación de consecuencia lógica $\Longrightarrow$:

1. *Si es RTCd [NP-s1] entonces es RcCsCc ['At'-s2], pero no ocurre necesariamente lo recíproco.*

2. *Si es RcCsCc ['At'-s2] entonces es RcTbCc ['At'-s2b], pero no ocurre necesariamente lo recíproco.*

3. *Si es RTCd [NP-s1] entonces es RTbCd [NP-s1b], pero no ocurre necesariamente lo recíproco.*

4. *Si es RTbCd [NP-s1b] entonces es RcTbCc ['At'-s2b], pero no ocurre necesariamente lo recíproco.*

Con estos datos, y analizando la prueba del *teorema de representación de la 'abducción consistente'* (Aliseda), fácilmente se puede colegir que se podría enunciar un teorema similar al citado para una relación de tipo RTCd [NP-c1], pero no para una relación de tipo RTbCd [NP-c1b] ni de tipo RcTbCc ['At'-c2b].

Teorema 107 (Teorema de representación de la 'abducción consistente' [NP-c1])**.** *La reflexividad [NP-c1], la transitividad [NP-c1] y la contracción por la derecha [NP-c1] son condiciones suficientes de la relación de consecuencia abductiva ordinaria para cadenas finitas de premisas, en el sentido de que cualquier relación inferencial con dicha cantidad de premisas que satisfaga las tres propiedades mencionadas se puede representar como si fuese la relación de consecuencia abductiva ordinaria indicada.*

Demostración. La prueba es idéntica a la anteriormente presentada para el *teorema de Atocha Aliseda* salvo en muy pocos puntos.

Lo que ahora debemos probar es:

$$X' \Longrightarrow_{cf} B \text{ si y sólo si } \varnothing \subsetneq \Big(\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)\Big) \subseteq Mod(B),$$

siendo $\Longrightarrow_{cf}$ una relación de consecuencia lógica que satisface las propiedades de reflexividad [NP-c1], transitividad [NP-c1] y contracción por la derecha [NP-c1] y adoptando la misma semántica que en el teorema precedente que se ha indicado.

Probaremos el anterior *si y sólo si* descomponiéndolo en dos implicaciones recíprocas:

1. Si $X' \Longrightarrow_{cf} B$ entonces $\varnothing \subsetneq (\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)) \subseteq Mod(B)$:
Por hipótesis tenemos $X' \Longrightarrow_{cf} B$ y analizaremos el conjunto de modelos $\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)$. Éste no puede ser vacío, puesto que, por la regla de reflexividad [NP-c1], $X' \Longrightarrow_{cf} A$ para cualquier $A \in \bar{X}'$ y, por lo tanto, $X' \in \bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)$. Por otro lado, dado que dicho conjunto no es vacío, podemos elegir un elemento cualquiera (Z_0) de dicho conjunto (por tanto, Z_0 es una cadena finita de fórmulas). Ahora, puesto que Z_0 es un elemento de $Mod(A)$ para cada $A \in \bar{X}'$, tenemos $Z_0 \Longrightarrow_{cf} A$; y por satisfacer la relación de consecuencia $\Longrightarrow_{cf}$ la transitividad [NP-c1] podemos substituir en la hipótesis $X' \Longrightarrow_{cf} B$ cada subcadena unitaria $X'_i \subseteq_c X'$ por Z_0. A continuación, aplicando repetidamente la contracción por la derecha [NP-c1] nos quedamos sólo con la ocurrencia de Z_0 que está más a la izquierda y obtenemos $Z_0 \Longrightarrow_{cf} B$, de donde $Z_0 \in Mod(B)$. Y como Z_0 era un elemento cualquiera de $\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)$, se infiere que $(\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)) \subseteq Mod(B)$.

2. Si $\varnothing \subsetneq (\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)) \subseteq Mod(B)$ entonces $X' \Longrightarrow_{cf} B$:
En esta segunda parte nuestra hipótesis es $\varnothing \subsetneq (\bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)) \subseteq Mod(B)$. Por la regla de reflexividad [NP-c1], $X' \Longrightarrow_{cf} A$ para cualquier $A \in \bar{X}'$ y, por lo tanto, $X' \in \bigcap_{A \in \bar{X}'} Mod(A)$. A partir de esto, y teniendo en cuenta la hipótesis, se sigue que $X' \in Mod(B)$. Y por la semántica que se ha establecido de eso se infiere $X' \Longrightarrow_{cf} B$.

■

Uno de nuestros objetivos en esta sección es presentar nuevos teoremas de representación, tanto para una relación inferencial análoga a la de Atocha Aliseda pero apta para subfamilias, como para otras relaciones que son de una signatura similar a esta última y con la cual difieren sólo en algunas características adicionales que aquélla o éstas poseen. A continuación señalamos algunos puntos que permiten un adecuado entendimiento del resultado de la autora mexicana y, a la vez, que ponen de manifiesto algunas coincidencias y algunas diferencias con los que nosotros presentaremos:

- Atocha Aliseda lo enuncia restringido a que la teoría-base sea una cadena finita de fórmulas y a que el objeto del problema abductivo y la solución abductiva ordinaria sea una sola fórmula. Por nuestra parte, generalizaremos los teoremas de representación de modo que la teoría-base sea una subfamilia de fórmulas de cardinal arbitrario y en cuanto al objeto del problema abductivo y la solución abductiva ordinaria abordaremos distintas posibilidades, tanto en las que son fórmulas como en las que son subfamilias arbitrarias de fórmulas.
- Su resultado está restringido a lo que la autora mexicana denomina *abducción consistente*, para la cual ella no exige la constatación de un problema abductivo pero sí la consistencia fuerte del resultado obtenido al añadir la solución abductiva ordinaria a la teoría-base. Por nuestra parte, presentaremos tanto una versión para dicho tipo de inferencia como otras versiones para distintos tipos de abducción ordinaria.
- Dado que para su concepto de *abducción consistente* sólo exige el requisito justificativo y el de consistencia de la teoría-base expandida, las fórmulas de la teoría-base y la solución abductiva ordinaria son intercambiables sin que se altere en nada el resultado (es decir, la teoría-base y la solución abductiva ordinaria tienen un comportamiento simétrico en esa situación); por ello, y con la finalidad de lograr la semejanza con el formato habitual de las propiedades estructurales, Aliseda concatena en el miembro izquierdo de la relación inferencial, y sin distinguir unas de otra, tanto las fórmulas de la teoría-base como la solución abductiva ordinaria (apareciendo en el miembro derecho la fórmula que constituye el objeto del problema abductivo). Por nuestra parte, ubicaremos a la solución abductiva ordinaria en el lado derecho, contribuyendo a destacar que ésa es la conclusión de este tipo de inferencia, y en el lado izquierdo estableceremos una nítida diferencia entre la/s fórmula/s de la teoría-base y la/s del objeto del problema abductivo.

Tal como acabamos de señalar, la presentación habitual de las propiedades estructurales no se adecua convenientemente al formato de la inferencia abductiva ordinaria, en donde es muy relevante distinguir, dentro del miembro izquierdo de la relación inferencial, la parte correspondiente a la teoría-base de la parte correspondiente al objeto del problema abductivo. Por ello, nosotros haremos una presentación en la que separaremos las dos partes mencionadas mediante una raya vertical, de modo que obtendremos un formato apto para relaciones ternarias. No emplearemos relaciones de mayor aridad porque cualquier condición adicional que se imponga quedará 'absorvida' en el relator inferencial vía la definición correspondiente que vinculará un enunciado inferencial genérico con el conjunto de condiciones que deberá satisfacer[3].

Por otro lado, en la tercera sección del primer capítulo, al exponer nuestra concepción general acerca de la abducción, dijimos que consideramos a ésta como una relación de consecuencia necesariamente mediada por otro tipo de relación inferencial. Y esto, necesariamente, tiene que tener reflejo en el tratamiento formal de la misma. Para distinguir las relaciones de consecuencia lógica que están mediadas de las relaciones de consecuencia lógica que son mediadoras, usaremos el símbolo "$\Longrightarrow_m$" con los superíndices y sub-subíndices que correspondan para aquéllas y reservaremos el hasta ahora usado ("$\Longrightarrow$") con los superíndices y sub-subíndices oportunos para éstas.

Ya hemos visto que las relaciones inferenciales mediadoras $\Longrightarrow$ y $\Longrightarrow^*$ tienen aridad 2:

$a, 1) \Longrightarrow \subseteq SUBFAM_{\mathfrak{E}}(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})$.

$a, 2) \Longrightarrow^* \subseteq SUBFAM_{\mathfrak{E}}(FOR(\mathcal{L})) \times SUBFAM_{\mathfrak{E}}(FOR(\mathcal{L}))$.

Por su parte, las relaciones inferenciales mediadas pueden tener aridad mayor o igual que 2, aunque las que aquí nos interesarán (por ser la usadas con el fin de analizar estructuralmente la abducción ordinaria) son las que tienen aridad 3. En este texto no vamos a manejar relaciones inferenciales mediadas de otra aridad que la citada y además todas las relaciones inferenciales ternarias que vamos a manejar son mediadas, por lo que usaremos el símbolo "$\Longrightarrow_m$" para referirnos exclusivamente a las relaciones inferenciales mediadas de aridad 3 y también habitualmente omitiremos la indicación de la aridad de la relación inferencial mediada por cualquier otro recurso lingüístico.

[3] Esta opción así como el usar el mismo símbolo inferencial en distintas secciones –a pesar de que las condiciones asumidas por él en unas y otras son distintas– tiene como finalidad facilitar la comprensión de las expresiones formales. En cualquier caso, la adición de una etiqueta para cada conjunto de reglas –etiqueta que acompañará a cada regla cada vez que se la mencione–, contribuirá a deshacer posibles equívocos.

En este punto debemos señalar que, aunque la literatura lógica hasta ahora ha abordado sólo el tipo de relación inferencial en el que la teoría-base es un conjunto de fórmulas y el objeto del problema abductivo y la solución abductiva ordinaria son cada uno de ellos una fórmula única, realmente, como ya se indicó en el segundo capítulo, existen varias posibilidades que, como veremos en lo que sigue, no son reducibles a una sola. Por ello, en nuestra presentación general de las relaciones inferenciales mediadas distinguiremos los siguientes cuatro tipos atendiendo a cómo sean sus dos últimos componentes:

1. **Singular-singular (o, más brevemente, s-s):**

$$\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \subseteq (FAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L}).$$

   Por ejemplo: $\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega$[4].

2. **Singular-plural (o, más brevemente, s-p):**

$$\Longrightarrow_m^{\bullet *} \subseteq (SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})) \times SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})).$$

   Por ejemplo: $\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet *} \Omega$.

3. **Plural-singular (o, más brevemente, p-s):**

$$\Longrightarrow_m^{* \bullet} \subseteq (SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})) \times SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))) \times FOR(\mathcal{L}).$$

   Por ejemplo: $\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{* \bullet} \omega$.

4. **Plural-plural (o, más brevemente, p-p):**

$$\Longrightarrow_m^{**} \subseteq (SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})) \times SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))) \times$$

$$SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})).$$

   Por ejemplo: $\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega$.

Al comienzo del capítulo anterior habíamos indicado que $\Gamma \not\Longrightarrow \varphi$ sería una manera más breve de escribir $\sim(\Gamma \Longrightarrow \varphi)$ –lo cual no es sino una metaproposición cuyo símbolo principal es un negador metalingüístico–; del mismo modo $\Gamma \not\Longrightarrow^* \Phi$

[4] Una notación en la que el relator inferencial vaya colocado en posición prefija pone claramente de manifiesto su carácter ternario en éste y en los siguientes tres tipos. Pongamos un ejemplo del presente tipo: $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} (\Gamma, \upsilon, \omega)$.

representa de una manera más intuitiva a $\sim(\Gamma \Longrightarrow^{*} \Phi)$. Es importante también que nos fijemos en que $\not\Longrightarrow$ y $\not\Longrightarrow^{*}$ representan sendas relaciones que son complementarias de la respectiva relación inferencial 'positiva' (si queremos, podemos decir que son relaciones de no-inferencia). Por ejemplo, $\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Phi$ indica que a partir de la subfamilia de fórmulas Γ no se puede concluir lógicamente la subfamilia Φ y, además de las dos formas ya vistas, también puede ser anotada como $\Gamma \Longrightarrow^{*\complement} \Phi$. Así pues, las dos mencionadas relaciones no-inferenciales, obviamente de aridad 2, son respectivamente:

$b,1)\ \not\Longrightarrow = (SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})) \times FOR(\mathcal{L})) \setminus \Longrightarrow.$

$b,2)\ \not\Longrightarrow^{*} = (SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})) \times SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))) \setminus \Longrightarrow^{*}.$

Análoga convención usaremos en el caso de las relaciones no-inferenciales mediadas que tienen aridad 3:

1) $\Gamma|\upsilon \not\Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \omega \ :=\ \sim(\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \omega).$

2) $\Gamma|\upsilon \not\Longrightarrow_{m}^{\bullet *} \Omega \ :=\ \sim(\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_{m}^{\bullet *} \Omega).$

3) $\Gamma|\Upsilon \not\Longrightarrow_{m}^{*\bullet} \omega \ :=\ \sim(\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_{m}^{*\bullet} \omega).$

4) $\Gamma|\Upsilon \not\Longrightarrow_{m}^{**} \Omega \ :=\ \sim(\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_{m}^{**} \Omega).$

Por ejemplo, $\Gamma|\Upsilon \not\Longrightarrow_{m}^{**} \Omega$ representa una relación ternaria que es complementaria de una relación de inferencia mediada p-p e indica que a partir de las subfamilias de fórmulas Γ e Υ no se puede concluir lógicamente la subfamilia de fórmulas Φ.

4.1. Relación de consecuencia lógica mediada s-s justificativa

Para esclarecer los vínculos que puedan existir entre el teorema de representación que Atocha Aliseda presenta para su 'abducción consistente' y nuestros posteriores teoremas de representación para diferentes tipos de abducción ordinaria, y teniendo en cuenta lo ya dicho acerca de que en el citado concepto de la pensadora mexicana no se exige como requisito el fracaso inferencial (que en nuestro caso es condición *sine qua non* para poder hablar de inferencia abductiva), vamos a presentar una noción, compatible con las nuestras. El calificativo *justificativa* que en dicha noción aparece viene a poner de manifiesto que la conclusión de la relación inferencial mediada de aridad 3 permite garantizar cierta relación inferencial mediadora de aridad 2 (sin exigir que previamente ello no se pudiese inferir de la teoría-base inicial).

Definición 108 (Relación de consecuencia lógica mediada s-s justificativa)**.**
Una relación de consecuencia lógica mediada s-s $\overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m$ *es justificativa respecto de una relación inferencial mediadora singular* $\Longrightarrow$ *cuando se satisface que:*

$$\Gamma|\upsilon \overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m \omega \textit{ si y sólo si } \Gamma \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon.$$

Las relaciones de consecuencia lógica mediadas s-s justificativas pueden satisfacer, entre otras, algunas de las reglas estructurales que seguidamente se enumeran[5]:

VII.1- ***Reflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s3]:***

$$\frac{}{\Gamma \cdot \langle \upsilon \rangle \cdot \Lambda|\upsilon \overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m \omega}\ .$$

VII.2- ***Identidad del objeto del problema y la solución [NP-s3]:***

$$\frac{}{\Gamma|\upsilon \overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m \upsilon}\ .$$

VII.3- ***Ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s3]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m \omega}{\Gamma \cdot \langle \omega \rangle \cdot \Lambda|\upsilon \overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m \varphi}\ .$$

VII.4- ***Monotonía en la teoría-base [NP-s3]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m \omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\upsilon \overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m \omega}\ .$$

VII.5- ***Transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s3]:***

$$\frac{\Gamma|\upsilon \overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m \omega;\ \Gamma|\omega \overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m \varphi}{\Gamma|\upsilon \overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m \varphi}\ .$$

[5] Se les han dado nombres que resulten significativos para la relación inferencial abductiva ordinaria; sin embargo, dado que estas reglas estructurales pretenden ser lo más generales posible, los mismos podrían ser formulados sustituyendo *teoría-base* por *primera componente de la parte izquierda*, *objeto del problema abductivo* –en adelante, para mayor brevedad nos referiremos a ello simplemente como el objeto del problema– por *segunda componente de la parte izquierda* y *solución abductiva ordinaria* –en adelante para mayor brevedad nos referiremos a ella simplemente como la solución– por *parte derecha*. Se entiende fácilmente por qué hemos renunciado a usar estos nombres aunque pudiesen transmitir una 'sensación' de mayor generalidad, más aún teniendo en cuenta el objetivo de nuestras investigaciones.

VII.6- ***Transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s3]:***

$$\frac{\Delta \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma|\omega \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

VII.7- ***Corte en la teoría-base [NP-s3]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda|\varphi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

VII.8- ***Corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s3]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda|\omega \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

VII.9- ***Permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP-s3]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \psi}{\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

VII.10- ***Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s3]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

VII.11- ***Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s3]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

VII.12- ***Permutación en la teoría-base [NP-s3]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Proposición 109.

Si una relación inferencial mediada s-s es justificativa entonces satisface las anteriores propiedades [NP-s3] si la correspondiente relación inferencial mediadora singular cumple las propiedades estructurales [NP-s1] que en cada una de ellas se indican.

VII.1- *Reflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s3]: reflexividad [NP-s1].*

VII.2- *Identidad del objeto del problema y la solución [NP-s3]: reflexividad [NP-s1].*

VII.3- *Ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s3]: monotonía [NP-s1] y permutación [NP-s1].*

VII.4- *Monotonía en la teoría-base [NP-s3]: monotonía [NP-s1].*

VII.5- *Transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s3]: transitividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1].*

VII.6- *Transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s3]: transitividad [NP-s1] y permutación [NP-s1].*

VII.7- *Corte en la teoría-base [NP-s3]: transitividad [NP-s1] y contracción por la izquierda [NP-s1].*

VII.8- *Corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s3]: transitividad [NP-s1] y contracción por la izquierda [NP-s1].*

VII.9- *Permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP-s3]: permutación [NP-s1].*

VII.10- *Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s3]: monotonía [NP-s1] y contracción por la derecha [NP-s1].*

VII.11- *Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s3]: monotonía [NP-s1] y contracción por la izquierda [NP-s1].*

VII.12- *Permutación en la teoría-base [NP-s3]: permutación [NP-s1].*

Demostración.

VII.1- *Reflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s3]:*

$$\frac{}{\Gamma \cdot \langle \upsilon \rangle \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega} \; .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{}{\Gamma \cdot \langle \upsilon \rangle \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon} \; .$$

La postcondición de la regla se tiene si $\Longrightarrow$ satisface la reflexividad [NP-s1].

VII.2- *Identidad del objeto del problema y la solución [NP-s3]:*

$$\frac{}{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \upsilon}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{}{\Gamma \cdot \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

La postcondición de la regla se tiene si $\Longrightarrow$ satisface la reflexividad [NP-s1].

VII.3- *Ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s3]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de la precondición si $\Longrightarrow$ satisface la monotonía [NP-s1] y la permutación [NP-s1].

VII.4- *Monotonía en la teoría-base [NP-s3]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

La postcondición de la regla se tiene a partir de la precondición si $\Longrightarrow$ satisface la monotonía [NP-s1].

VII.5- *Transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s3]:*

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma|\omega \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \omega}{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de las dos precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1].

VII.6- *Transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s3]:*

$$\frac{\Delta \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma | \omega \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Delta \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \omega}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de las dos precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1] y la permutación [NP-s1].

VII.7- *Corte en la teoría-base [NP-s3]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda | \varphi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \varphi}{\Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de las dos precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1] y la contracción por la izquierda [NP-s1].

VII.8- *Corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s3]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda | \omega \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}{\Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \omega}{\Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de las dos precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1] y la contracción por la izquierda [NP-s1].

VII.9- *Permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP-s3]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \psi}{\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda \cdot \langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

La postcondición de la regla se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la permutación [NP-s1].

VII.10- *Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s3]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega} \, .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon} \, .$$

La postcondición se sigue a partir de la precondición si $\Longrightarrow$ satisface la contracción por la derecha [NP-s1].

VII.11- *Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s3]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega} \, .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon} \, .$$

La postcondición se sigue a partir de la precondición si $\Longrightarrow$ satisface la contracción por la izquierda [NP-s1].

VII.12- *Permutación en la teoría-base [NP-s3]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega} \, .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon} \, .$$

La postcondición se sigue a partir de la precondición si $\Longrightarrow$ satisface la permutación [NP-s1].

■

Proposición 110.
Cada una de las anteriores versiones de las reglas [NP-s3] expresadas mediante la condición mediadora cumple que en el conjunto formado por sus precondiciones y sus postcondiciones no hay al menos dos condiciones estructuralmente incompatibles entre sí e igualmente ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar condiciones incompatibles.

Su prueba es elemental (idéntica a la de las proposiciones análogas anteriores).

Algunas de las anteriores reglas se pueden derivar a partir de otras; veamos a modo de ejemplo dos de tales derivaciones en las que están involucradas las cinco primeras reglas estructurales [NP-s3]:

Proposición 111.
Una relación de consecuencia lógica mediada s-s que satisfaga la reflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s3] y la transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s3], necesariamente satisface la propiedad de ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s3].

Demostración. Partimos de la precondición de la ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s3] y a continuación anotamos el resultado de aplicar la propiedad estructural que en cada línea se indica entre paréntesis:

1. $\Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \omega$ (hipótesis).
2. $\langle \omega \rangle | \omega \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \varphi$ (por reflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s3] incondicionalmente).
3. $\Gamma \cdot \langle \omega \rangle \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \varphi$ (por transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s3] sobre 1 y 2).

Y esto último coincide con la ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s3]. ∎

Proposición 112.
Una relación de consecuencia lógica mediada s-s[6] *que satisfaga la identidad del objeto del problema y la solución [NP-s3] y la transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s3], necesariamente satisface la propiedad de monotonía en la teoría-base [NP-s3].*

Demostración. Partimos de la precondición de la monotonía en la teoría-base [NP-s3] y a continuación anotamos el resultado de aplicar la propiedad estructural que en cada línea se indica entre paréntesis:

[6] Remarcamos el hecho de que al ser una derivación no hemos hecho uso de la condición de que la relación mediada sea justificativa, puesto que esta cualidad se enuncia en relación a su relación inferencial mediadora.

1. $\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega$ (hipótesis).

2. $\Delta|\omega \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega$ (por identidad del objeto del problema y la solución [NP-s3] incondicionalmente).

3. $\Gamma{\cdot}\Delta{\cdot}\Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega$ (por transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s3] sobre 1 y 2).

Y esto último coincide con la monotonía en la teoría-base [NP-s3]. ■

Podemos también presentar reglas 'mixtas' que incluyen precondiciones con la relación inferencial mediada y con la correspondiente mediadora de aridad 2. La ventaja de combinar ambos tipos de inferencia es que a menudo se consiguen simplificar las precondiciones que deben imponerse. Concretamente, las relaciones inferenciales del presente tipo pueden también satisfacer, entre otras, algunas de las reglas estructurales mixtas que seguidamente se enumeran::

VII.13- ***Debilitamiento del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s3]:***

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \psi}{\Gamma|\psi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

VII.14- ***Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s3]:***

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \omega}{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

Proposición 113.
Si una relación inferencial mediada s-s es justificativa entonces satisface las anteriores propiedades estructurales 'mixtas' [NP-s3] si la correspondiente relación inferencial mediadora singular cumple las propiedades estructurales [NP-s1] que en cada una de ellas se indican.

VII.13- Debilitamiento del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s3]: transitividad [NP-s1b].

VII.14- Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s3]: transitividad [NP-s1].

Demostración.

VII.13- *Debilitamiento del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s3]:*

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega;\ \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \psi}{\Gamma|\psi \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \psi}{\Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \psi}\ .$$

La postcondición de la regla se tiene a partir de las precondiciones si $\Longrightarrow^*$ satisface la transitividad [NP-s1b].

VII.14- *Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s3]:*

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega;\ \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \omega}{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \varphi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \omega}{\Gamma\cdot\langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

La postcondición de la regla se tiene a partir de las precondiciones si $\Longrightarrow^*$ satisface la transitividad [NP-s1].

■

Proposición 114.
Cada una de las anteriores versiones de las reglas 'mixtas' [NP-s3] expresadas mediante la condición mediadora cumple que en el conjunto formado por sus precondiciones y sus postcondiciones no hay al menos dos condiciones estructuralmente incompatibles entre sí e igualmente ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar condiciones incompatibles.

Su prueba es nuevamente elemental (idéntica a la de las proposiciones análogas anteriores).

Ya habíamos establecido que, en general, si una relación inferencial es RTCd [NP-c1] entonces es RcCsCc [At-c2], pero no necesariamente es cierto lo recíproco; también habíamos probado que, en general, que sea RcCsCc [At-c2] no garantiza que la relación inferencial sea RTbCd [NP-c1b]. Si embargo, en el caso de que dicha relación de consecuencia sea la mediadora de una relación de inferencia mediada s-s justificativa que es no vacua, entonces para el conjunto de elementos de dicha relación mediada sí se sigue que la relación inferencial mediadora es RTbCd [NP-c1b]:

Proposición 115.
Dada una relación de inferencia mediada s-s justificativa no vacua $\Longrightarrow_{cf_m}$, se tiene que si la relación inferencial mediadora $\Longrightarrow_{cf}$ es RcCsCc [At-c2] entonces dicha relación inferencial mediadora es necesariamente RTbCd [NP-c1b] –véase la figura 5 (4.1)–.

Demostración. Teniendo en cuenta que la relación inferencial $\Longrightarrow_{cf_m}$ no es vacua, podemos tomar un metaenunciado $X|B \Longrightarrow_{cf_m} A$ cualquiera. Además, por ser justificativa la relación de consecuencia mediada s-s, se tiene que se satisface X **.** $\lceil A \rceil \Longrightarrow_{cf} B$.

Ahora, dado que en este 'marco' la precondición de la regla de reflexividad condicionada [At-c2] de $\Longrightarrow_{cf}$ se satisface necesariamente, tenemos de forma incondicional la postcondición de la regla de reflexividad [NP-c1] para la relación inferencial mediadora. Por otro lado, sabemos que tanto la transitividad [NP-c1b] como la contracción por la derecha [NP-c1] son derivables de las propiedades [At-c2]. En consecuencia, la relación inferencial mediadora $\Longrightarrow_{cf}$ necesariamente es RTbCd [NP-c1b]. ■

Análogamente ocurre con la correspondiente versión con subfamilias, aunque debemos tener claro que ahora las reglas ['At'-s2] sólo permiten justificar (pero no derivar) la regla de contracción por la derecha [NP-s1]:

Proposición 116.
Dada una relación de inferencia mediada s-s justificativa no vacua $\Longrightarrow_m$, se tiene que si la relación inferencial mediadora $\Longrightarrow$ es RcCsCc ['At'-s2] entonces dicha relación inferencial mediadora es necesariamente RTbCd [NP-s1b] –véase la figura 6 (4.1)–.

Demostración. La prueba es similar a la del anterior teorema substituyendo cadenas finitas por subfamilias y las reglas [NP-c1], [NP-c1b] y [At-c2] por [NP-s1],

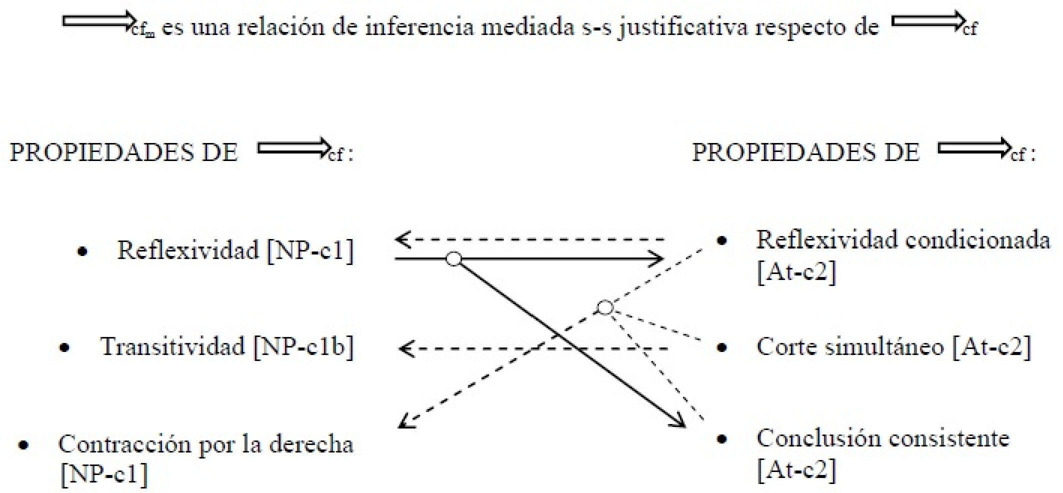

Fig. 5 (4.1): Vínculos entre reglas [NP-c1b] y [At-c2] de la relación inferencial mediadora si la relación inferencial mediada s-s es justificativa respecto de aquélla.

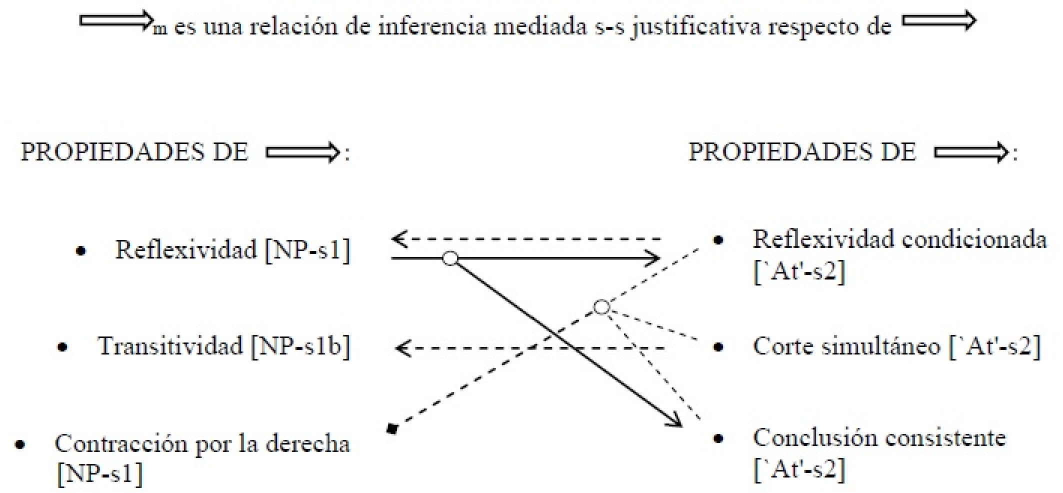

Fig. 6 (4.1): Vínculos entre reglas [NP-s1b] y ['At'-s2] de la relación inferencial mediadora si la relación inferencial mediada s-s es justificativa respecto de aquélla.

[NP-s1b] y [‘At’-s2], respectivamente. ■

En este punto ya podemos presentar un teorema de representación para la relación inferencial que Atocha denomina *abducción*, aunque formulado para subfamilias arbitrarias:

Teorema 117 (Teorema de representación mediante propiedades [NP-s1] de la relación inferencial mediada s-s que es justificativa respecto de la deducción clásica)**.** *La reflexividad [NP-s1], la transitividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1] de la relación inferencial mediadora singular son condiciones suficientes de una relación de consecuencia lógica mediada s-s, cuya primera componente es una subfamilia arbitraria, que es justificativa respecto de la deducción clásica, en el sentido de que cualquier relación inferencial mediada cuya relación inferencial mediadora y cuyas premisas sean las indicadas y que satisfaga las tres propiedades mencionadas, se puede representar como si fuese la relación mediada mencionada.*

Demostración. En esta demostración nos apoyaremos en el *teorema de representación de la relación inferencial deductiva clásica [NP-s1].* Sea $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ una relación de consecuencia lógica s-s justificativa que está mediada por la relación de consecuencia lógica singular $\Longrightarrow$. Sean Γ un elemento de $SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))$ e υ y ω elementos de $FOR(\mathcal{L})$.

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$ tenemos que:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega \text{ si y sólo si } \Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon.$$

Por otro lado, la relación inferencial mediadora es la deducción clásica y, atendiendo a su su caracterización mediante modelos, sabemos que:

$$\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \vDash_d \upsilon \text{ si y sólo si } (\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon).$$

Así pues, debemos probar que:

$$\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon \text{ si y sólo si } (\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon),$$

siendo $\Longrightarrow$ una relación de consecuencia lógica singular que satisface las propiedades de reflexividad [NP-s1], transitividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1].

Hagamos $\Gamma' \doteqdot \Gamma \cdot \langle \omega \rangle$; aplicando propiedades conjuntistas sencillas tenemos que:

$$(\bigcap_{\gamma' \in \bar{\Gamma}'} Mod(\gamma')) = (\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega).$$

Por tanto, lo que debemos probar se transforma en:

$$\Gamma' \Longrightarrow \upsilon \text{ si y sólo si } (\bigcap_{\gamma' \in \bar{\Gamma}'} Mod(\gamma')) \subseteq Mod(\upsilon),$$

siendo $\Longrightarrow$ una relación de consecuencia lógica singular que satisface las propiedades de reflexividad [NP-s1], transitividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1]. Y esto fue justamente lo que se probó en el *teorema de representación de la relación inferencial deductiva clásica [NP-s1].*

■

4.2. Relación de consecuencia lógica mediada s-s justificativa de modo posicionalmente indiferente

Sería muy interesante determinar cuáles son los vínculos que existen entre las propiedades [NP-s3] que satisface la relación inferencial mediada s-s justificativa y las propiedades [NP-s1] que satisface la relación inferencial mediadora singular. Con este fin necesitamos una nueva definición, la cual a su vez reclama que presentemos nuevas notaciones. La clave de la cuestión está en que nuestra definición de relación inferencial mediada s-s justificativa establece la concatenación 'en la cola' de la subfamilia unitaria formada por la 'solución' a la subfamilia que constituye la 'teoría-base' (es decir, la subfamilia unitaria formada por la 'solución' es un 'bloque' final de la subfamilia de las premisas). Pero se podría pensar también en una concatenación 'en la cabeza' (es decir, que la subfamilia unitaria formada por la 'solución' sea un 'bloque' inicial de la subfamilia de las premisas) o la concatenación 'en el cuerpo' (es decir, que la subfamilia unitaria formada por la 'solución' sea un 'bloque' intermedio de la subfamilia de las premisas).

Usaremos las siguientes notaciones:

Definición 118 (Concatenación posicionalmente indiferente en relaciones inferenciales singulares)**.**

1. $(\Gamma \circledast \Delta \Longrightarrow \omega) \ :\dot{\Leftrightarrow} (\forall \Sigma_1, \Sigma_2((\Gamma \doteqdot \Sigma_1 \cdot \Sigma_2) \dot{\Rightarrow} (\Sigma_1 \cdot \Delta \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow \omega)))$.

2. $(\Gamma \circledcirc \Delta \Longrightarrow \omega) \ :\dot{\Leftrightarrow} (\dot{\exists} \Sigma_1, \Sigma_2((\Gamma \doteqdot \Sigma_1 \cdot \Sigma_2) \dot{\Rightarrow} (\Sigma_1 \cdot \Delta \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow \omega)))$.

Claramente la concatenación de una subfamilia unitaria ‘en la cola’, ‘en la cabeza’ o ‘en el cuerpo’ son tres casos que son implicados por la posibilidad prevista en la primera de las definiciones que acabamos de presentar (así pues, dichos casos son más generales que la posibilidad citada). A su vez los tres casos mencionados (la concatenación ‘en la cola’, ‘en la cabeza’ o ‘en el cuerpo’) implican a la posibilidad prevista en la segunda de las definiciones que acabamos de presentar (así pues, dichos casos son más restringidos que la última posibilidad citada).

Definición 119 (Relación de consecuencia lógica mediada s-s justificativa de modo posicionalmente indiferente)**.**
Una relación de consecuencia lógica mediada s-s $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ *es justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de una relación inferencial mediadora singular* $\Longrightarrow$ *cuando se satisface que:*

$$\Gamma | \upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega \textit{ si y sólo si } \Gamma \circledast \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon.$$

Todas las propiedades [NP-s3] que fueron presentadas, tanto las ‘puras’ como las ‘mixtas’, se mantienen sin alteraciones con esta nueva exigencia (no desarrollamos explícitamente aquí la demostración porque coincide con la dada aplicando en cada condición de cada regla la definición en la que se ha introducido el símbolo $\circledast$ y, a lo sumo, añadiendo la propiedad de permutación [NP-s1] –dado que lo único que puede cambiar en este caso es la posición de la fórmula que antes se concatenaba en todos los casos ‘en la cola’–). Estructuralmente no se trata sin embargo de dos opciones alternativas al mismo ‘nivel’, sino que la presente es una versión sujeta a condiciones más fuertes que la anteriormente dada (de hecho aquélla puede verse como un caso particular de ésta)[7] –así pues, toda propiedad que se mantenga en esta situación, *a fortiori* se mantendrá en la anterior situación–. Una ventaja es que ahora podemos justificar en el sentido recíproco al que ya fue presentado los vínculos existentes entre las propiedades de la relación inferencial mediada y la mediadora:

[7] Recordemos que al particularizar las reglas restringimos la clase de relaciones inferenciales que satisfacen dichas reglas, a diferencia de lo que ocurre con la clase de modelos al particularizar una fórmula.

Proposición 120.
Si una relación inferencial mediada s-s $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ *es justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de* $\Longrightarrow$ *y satisface la identidad del objeto del problema y la solución [NP-s3], la transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s3] y la contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s3], entonces la restricción de su relación inferencial mediadora singular* $\Longrightarrow$ *a los elementos que satisfacen que la subfamilia de premisas es no vacía es una relación de consecuencia lógica de tipo RTCd [NP-s1] –véase la figura 7 (4.2)–.*

Demostración. Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de $\Longrightarrow$ tenemos que las antecitadas propiedades de la relación mediada se 'traducen' en las siguientes propiedades de la relación mediadora:

1. *Identidad del objeto del problema y la solución [NP-s3]:*

$$\frac{}{\Gamma \circledast \langle \upsilon \rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

2. *Transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s3]:*

$$\frac{(\Delta \cdot \Lambda) \circledast \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \circledast \langle \varphi \rangle \Longrightarrow \omega}{(\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda) \circledast \langle \varphi \rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

3. *Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s3]:*

$$\frac{(\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda) \circledast \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon}{(\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda) \circledast \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

Para probar que la relación inferencial $\Longrightarrow$ posee la reflexividad [NP-s1] hemos de establecer que ella satisface incondicionalmente $\Sigma_1 \cdot \langle \upsilon \rangle \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow \upsilon$, lo cual está garantizado sin precondiciones por la identidad del objeto del problema y la solución [NP-s3] (para ello basta con hacer $\Gamma \doteqdot \Sigma_1 \cdot \Sigma_2$).

Para probar que la relación inferencial, cuya subfamilia de premisas es siempre no vacía, posee la transitividad [NP-s1], partimos de sus precondiciones ($\Sigma_1 \cdot \langle \varphi \rangle \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow \omega$ y $\Sigma_3 \cdot \langle \omega \rangle \cdot \Sigma_4 \Longrightarrow \upsilon$) y justificamos que bajo ese supuesto necesariamente se cumple su postcondición ($\Sigma_3 \cdot \Sigma_1 \cdot \langle \varphi \rangle \cdot \Sigma_2 \cdot \Sigma_4 \Longrightarrow \upsilon$). Para ese fin, basta con hacer $\Gamma \doteqdot \Sigma_1 \cdot \Sigma_2$, $\Delta \doteqdot \Sigma_3$ y $\Lambda \doteqdot \Sigma_4$ para ver que esto está garantizado por la transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s3].

De nuevo, para probar que dicha relación inferencial, cuya subfamilia de premisas es siempre no vacía, posee la contracción por la derecha [NP-s1] partimos de su precondición ($\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \upsilon$, tal que $\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda$) y justificamos que bajo ese supuesto necesariamente se cumple su postcondición ($\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \upsilon$, tal que $\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda$). Para ese fin, basta con tener en cuenta que esto está garantizado por la contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s3] puesto que se cumplen $\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} (\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda) \circledast \langle\omega\rangle$ y $\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} (\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda) \circledast \langle\omega\rangle$. ■

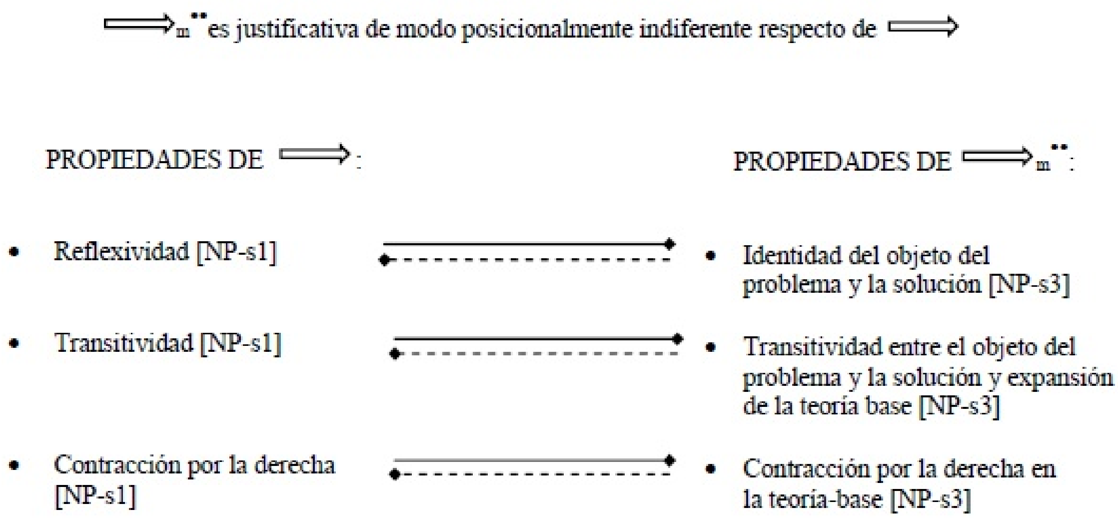

Fig. 7 (4.2): Vínculos entre reglas [NP-s1] de la relación inferencial mediadora y reglas [NP-s3] de la relación inferencial mediada s-s si esta última es justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de aquélla.

La anterior proposición hace evidente la posibilidad de enunciar un teorema de representación para la misma relación inferencial que allí se maneja, usando en este nuevo teorema propiedades [NP-s3]:

Teorema 121 (Teorema de representación mediante propiedades [NP-s3] de la relación inferencial mediada s-s que es justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de la deducción clásica)**.**
La identidad del objeto del problema y la solución [NP-s3], la transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s3] y la

contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s3] son condiciones suficientes de una relación de consecuencia lógica mediada s-s, cuya primera componente es una subfamilia arbitraria, que es justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de la deducción clásica, en el sentido de que cualquier relación inferencial mediada cuya relación inferencial mediadora y cuyas premisas sean las indicadas y que satisfaga las tres propiedades mencionadas, se puede representar como si fuese la relación mediada mencionada.

Demostración. Sea $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ una relación de consecuencia lógica s-s que tiene como primera componente una subfamilia arbitraria y que es justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de la relación de consecuencia lógica singular $\Longrightarrow$. Sean Γ un elemento de $SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))$ e υ y ω elementos de $FOR(\mathcal{L})$.

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de $\Longrightarrow$ tenemos que:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega \text{ si y sólo si } \Gamma \circledast \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon.$$

Por otro lado, la relación inferencial mediadora es la deducción clásica y, atendiendo a su su caracterización mediante modelos, sabemos que:

$$\Gamma \circledast \langle\omega\rangle \vDash_d \upsilon \text{ si y sólo si } (\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon).$$

Así pues, debemos probar que:

$$\Gamma \circledast \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon \text{ si y sólo si } (\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon),$$

siendo $\Longrightarrow$ una relación de consecuencia lógica mediadora singular cuya relación de consecuencia lógica mediada $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ satisface las propiedades de identidad del objeto del problema y la solución [NP-s3], transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s3] y contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s3].

Pero, a tenor de la definición del símbolo $\circledast$, se infiere que $\Gamma \circledast \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon$ es equivalente a $\forall\Sigma_1,\Sigma_2((\Gamma \doteqdot \Sigma_1 \cdot \Sigma_2) \Rrightarrow (\Sigma_1 \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow \upsilon))$. Y haciendo $\Gamma' \doteqdot \Sigma_1 \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Sigma_2$, por la aplicación de propiedades conjuntistas sencillas tenemos que:

$$(\bigcap_{\gamma'\in\bar{\Gamma}'} Mod(\gamma')) = (\bigcap_{\sigma_1\in\bar{\Sigma}_1} Mod(\sigma_1)) \cap Mod(\omega) \cap (\bigcap_{\sigma_2\in\bar{\Sigma}_2} Mod(\sigma_2)).$$

Por tanto, lo que debemos probar se transforma en:

$$\Gamma' \Longrightarrow \upsilon \text{ si y sólo si } (\bigcap_{\gamma' \in \bar{\Gamma}'} Mod(\gamma')) \subseteq Mod(\upsilon),$$

siendo $\Longrightarrow$ una relación inferencial singular mediadora que satisface la 'traducción' de las antecitadas tres propiedades [NP-s3] para relaciones inferenciales mediadas s-s que son justificativas de modo posicionalmente indiferente.

La demostración es a partir de aquí idéntica a la que dimos del *teorema de representación de la relación inferencial deductiva clásica [NP-s1]* con las únicas salvedades de que cuando en la que acabamos de citar se aplica alguna de las tres propiedades [NP-s1] que aparecen en su enunciado, en esta se usará la 'traducción' de la correspondiente propiedad [NP-s3]. ■

Para terminar esta sección reflexionaremos sobre la posibilidad de substituir la nueva condición de que la relación inferencial sea justificativa de modo posicionalmente indiferente por otras distintas. Se puede ver fácilmente que hay un conjunto de propiedades [NP-s3] que permiten garantizar que dicha relación inferencial es justificativa de modo posicionalmente indiferente:

Proposición 122.
Si una relación inferencial mediada s-s $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ es justificativa respecto de $\Longrightarrow$ y satisface la reflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s3], la permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP-s3] y la permutación en la teoría-base [NP-s3], entonces dicha relación inferencial mediada es justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de la misma relación inferencial mediadora.

Demostración. Sea $\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega$ un enunciado inferencial cualquiera correspondiente a una relación de consecuencia mediada s-s ($\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$) que es justificativa respecto de $\Longrightarrow$ y que satisface las tres propiedades indicadas. Al ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa se satisface que $\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon$.

Existen dos posibilidades:

- Que sea $\Gamma \doteqdot \langle\ \rangle$. En ese caso, tenemos que $\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \doteqdot \Sigma_1 \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Sigma_2$ para cualesquiera $\Sigma_1 \cdot \Sigma_2 \doteqdot \langle\ \rangle$. Es decir, se satisface que $\forall\Sigma_1, \Sigma_2((\Gamma \doteqdot \Sigma_1 \cdot \Sigma_2) \Rightarrow (\Sigma_1 \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow \upsilon))$. Y esta última es justamente la definición de $\Gamma \circledast \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon$.

- Que sea $\Gamma \ddot{\neq} \langle\ \rangle$. En ese caso, tenemos que $\Gamma \doteqdot \Delta \cdot \langle\varphi\rangle$ y substituyendo en el enunciado inferencial inicial correspondiente a la relación mediada obtenemos $\Delta \cdot \langle\varphi\rangle|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega$.

  Por otro lado, aplicando la identidad del objeto del problema y la solución [NP-s3], podemos garantizar incondicionalmente $\Delta\cdot\langle\omega\rangle|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \upsilon$. Y a partir de éste y del anterior enunciado inferencial, y aplicando la permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP-s3], obtenemos: $\Delta \cdot \langle\omega\rangle|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi$. Por tanto, para cualesquiera Λ_1 y Λ_2 tales que $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \doteqdot \Delta$, y aplicando la permutación en la teoría-base [NP-s3], se infiere: $\Lambda_1 \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda_2|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi$. Y como $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ es justificativa, la anterior expresión es equivalente a $\Lambda_1 \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda_2 \cdot \langle\varphi\rangle\cdot \Longrightarrow \upsilon$.

  De todo ello se sigue que se satisface que $\forall\Sigma_1, \Sigma_2((\Gamma \doteqdot \Sigma_1 \cdot \Sigma_2) \dot{\Rightarrow} (\Sigma_1 \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow \upsilon))$. Y esta última es justamente la definición de $\Gamma \circledast \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon$.

Por lo tanto, en ambos casos, $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ es justificativa de modo posicionalmente indiferente. ■

Por tanto, el teorema de representación anterior que fue probado para relaciones inferenciales mediadas s-s $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ que son justificativas de modo posicionalmente independientes respecto de $\Longrightarrow$ podría enunciarse eliminando el requisito que cualifica la propiedad de ser justificativa y, en su lugar, añadiendo las dos propiedades [NP-s3] que antes no se exigían y aquí sí, o bien habría que probar que estas dos las tiene necesariamente una relación inferencial mediada que satisfaga las condiciones del mencionado teorema.

4.3. Relación de consecuencia lógica mediada s-s justificativa de modo fuertemente compatible

Definimos la nueva cualidad que acabamos de mencionar[8]:

Definición 123 (Subfamilia de fórmulas fuertemente consistente / débilmente inconsistente)**.**

[8] En el segundo capítulo se dio una definición análoga pero restringida a conjuntos de fórmulas.

Dada una subfamilia de fórmulas Γ*, si cumple que* $\Gamma \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}$*, decimos que es fuertemente consistente respecto de la relación inferencial* $\Longrightarrow$*; en caso contrario decimos que es débilmente inconsistente respecto de dicha relación inferencial.*

La siguiente definición será indispensable para poder presentar un teorema de representación para una relación inferencial que generalice a la 'abducción consistente' de Atocha:

Definición 124 (Relación de consecuencia lógica mediada s-s justificativa de modo fuertemente compatible)**.**
Una relación de consecuencia lógica mediada s-s $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ *es justificativa de modo fuertemente compatible respecto de una relación de consecuencia lógica mediadora singular* $\Longrightarrow$ *cuando se satisface que:*

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega \textit{ si y sólo si } (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon) \;\dot{\&}\; (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}).$$

Es obvio que cualquier relación de consecuencia lógica del tipo que acabamos de definir debe satisfacer que $\upsilon \neq \widetilde{\bot}$[9], pero no es necesario añadirlo a las condiciones anteriores porque se deriva a partir de las ya impuestas.

Las relaciones de consecuencia lógica mediadas s-s justificativas de modo fuertemente compatible pueden satisfacer, entre otras, algunas de las reglas estructurales que seguidamente se enumeran:

VIII.1- ***Reflexividad condicionada de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s4]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\delta\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \delta \neq \widetilde{\bot}}{\Gamma \cdot \langle\delta\rangle \cdot \Lambda|\delta \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

VIII.2- ***Reflexividad condicionada del objeto del problema en la solución [NP-s4]:***

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \upsilon}\ .$$

VIII.3- ***Reflexividad condicionada de la solución en el objeto del problema [NP-s4]:***

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \omega \neq \widetilde{\bot}}{\Gamma|\omega \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

[9] Recordemos que $\widetilde{\bot}$ es un símbolo metalingüístico que se comporta como un parámetro de fórmulas inconsistentes / insatisfacibles.

VIII.4- ***Ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s4]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}.$$

VIII.5- ***Monotonía cauta en la teoría-base [NP-s4]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Xi \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Xi \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}.$$

VIII.6- ***Corte en la teoría-base [NP-s4]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda|\varphi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}.$$

VIII.7- ***Corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s4]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda|\omega \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}.$$

VIII.8- ***Permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP-s4]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \psi}{\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}.$$

VIII.9- ***Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s4]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}.$$

VIII.10- ***Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s4]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}.$$

VIII.11- ***Permutación en la teoría-base [NP-s4]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}.$$

Proposición 125.
Si una relación inferencial mediada s-s es justificativa de modo fuertemente compatible entonces satisface las anteriores propiedades [NP-s4] si la correspondiente relación inferencial mediadora singular cumple las propiedades estructurales [NP-s1] que en cada una de ellas se indican.

VIII.1- *Reflexividad condicionada de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s4]: reflexividad [NP-s1].*

VIII.2- *Reflexividad condicionada del objeto del problema en la solución [NP-s4]: reflexividad [NP-s1] y transitividad [NP-s1].*

VIII.3- *Reflexividad condicionada de la solución en el objeto del problema [NP-s4]: reflexividad [NP-s1].*

VIII.4- *Ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s4]: monotonía [NP-s1] y contracción por la izquierda [NP-s1].*

VIII.5- *Monotonía cauta en la teoría-base [NP-s4]: monotonía [NP-s1] y reemplazo de repeticiones por la derecha [NP-s1].*

VIII.6- *Corte en la teoría-base [NP-s4]: transitividad [NP-s1] y contracción por la izquierda [NP-s1].*

VIII.7- *Corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s4]: transitividad [NP-s1] y contracción por la izquierda [NP-s1].*

VIII.8- *Permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP-s4]: permutación [NP-s1].*

VIII.9- *Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s4]: monotonía [NP-s1] y contracción por la derecha [NP-s1].*

VIII.10- *Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s4]: monotonía [NP-s1] y contracción por la izquierda [NP-s1].*

VIII.11- *Permutación en la teoría-base [NP-s4]: permutación [NP-s1].*

Demostración.

VIII.1- *Reflexividad condicionada de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s4]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\delta\rangle \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \delta \neq \widetilde{\top}}{\Gamma \cdot \langle\delta\rangle \cdot \Lambda | \delta \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo fuertemente compatible respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma\cdot\langle\delta\rangle\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\delta\rangle\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot};\\ \delta\neq\widetilde{\bot}\end{array}}{\Gamma\cdot\langle\delta\rangle\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \delta;\ \Gamma\cdot\langle\delta\rangle\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}\ .$$

Sólo hay que señalara que la primera postcondición de la regla se tiene si $\Longrightarrow$ satisface la reflexividad [NP-s1].

VIII.2- *Reflexividad condicionada del objeto del problema en la solución [NP-s4]:*

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega}{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \upsilon}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo fuertemente compatible respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}{\Gamma\cdot\langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\upsilon\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}\ .$$

La primera postcondición de la regla se tiene si $\Longrightarrow$ satisface la reflexividad [NP-s1]; la segunda postcondición de la regla se tiene a partir de las dos precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1] (para llegar a esta conclusión podemos razonar por reducción al absurdo: supongamos que a partir de las precondiciones $\Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon$ y $\Gamma\cdot\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}$ se siguiese $\Gamma\cdot\langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \widetilde{\bot}$; entonces, por la transitividad [NP-s1] de $\Longrightarrow$ sobre este supuesto y la primera precondición obtendríamos $\Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \widetilde{\bot}$, lo cual es contradictorio con la segunda precondición; por lo tanto hemos de concluir $\Gamma\cdot\langle\upsilon\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}$).

VIII.3- *Reflexividad condicionada de la solución en el objeto del problema [NP-s4]:*

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega;\ \omega\neq\widetilde{\bot}}{\Gamma|\omega \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo fuertemente compatible respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot};\\ \omega\neq\widetilde{\bot}\end{array}}{\Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \omega;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}\ .$$

Sólo hay que señalar que la primera postcondición de la regla se tiene si $\Longrightarrow$ satisface la reflexividad [NP-s1].

VIII.4- *Ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s4]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \langle \omega \rangle \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega} .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa de modo fuertemente compatible respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\perp}}{\Gamma \cdot \langle \omega \rangle \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle \omega \rangle \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\perp}} .$$

La primera postcondición de la regla se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la monotonía [NP-s1]; la segunda postcondición se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow$ satisface la contracción por la izquierda [NP-s1] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto').

VIII.5- *Monotonía cauta en la teoría-base [NP-s4]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \langle \omega \rangle \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \langle \omega \rangle \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega} .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa de modo fuertemente compatible respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\perp};\\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \langle \omega \rangle \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \varphi \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \langle \omega \rangle \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \varphi \rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\perp}\end{array}}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \langle \omega \rangle \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \langle \omega \rangle \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\perp}} .$$

La primera postcondición de la regla se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la monotonía [NP-s1]; la segunda postcondición se tiene a partir de la cuarta precondición si $\Longrightarrow$ satisface la propiedad de reemplazo de repeticiones por la derecha [NP-s1] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto').

VIII.6- *Corte en la teoría-base [NP-s4]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \langle \varphi \rangle \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda | \varphi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega} .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo fuertemente compatible respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\cdot\langle\varphi\rangle\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\varphi\rangle\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot};\\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \varphi;\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}\end{array}}{\Gamma\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}\ .$$

Sólo hay que indicar que la primera postcondición de la regla se tiene a partir de la tercera y primera precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1] y la contracción por la izquierda [NP-s1].

VIII.7- *Corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s4]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\langle\varphi\rangle\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega;\ \Gamma\cdot\Lambda|\omega \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \varphi}{\Gamma\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \varphi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo fuertemente compatible respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\cdot\langle\varphi\rangle\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\varphi\rangle\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot};\\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\langle\varphi\rangle \Longrightarrow \omega;\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\langle\varphi\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}\end{array}}{\Gamma\cdot\Lambda\cdot\langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\langle\varphi\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}\ .$$

Sólo hay que indicar que la primera postcondición de la regla se tiene a partir de la tercera y primera precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1] y la contracción por la izquierda [NP-s1].

VIII.8- *Permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP-s4]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\langle\varphi\rangle\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \psi}{\Gamma\cdot\langle\omega\rangle\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \varphi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo fuertemente compatible respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\cdot\langle\varphi\rangle\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\varphi\rangle\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot};\\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle\cdot\Lambda\cdot\langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle\cdot\Lambda\cdot\langle\psi\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}\end{array}}{\Gamma\cdot\langle\omega\rangle\cdot\Lambda\cdot\langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle\cdot\Lambda\cdot\langle\varphi\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}\ .$$

La primera postcondición de la regla se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la permutación [NP-s1]; la segunda postcondición de la regla se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow$ satisface la citada regla (la cual leeremos ahora en 'sentido contrapuesto').

VIII.9- *Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s4]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega}.$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo fuertemente compatible respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}.$$

La primera postcondición se sigue a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la contracción por la derecha [NP-s1]; la segunda postcondición se sigue a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow$ satisface la monotonía [NP-s1] (la cual leeremos ahora en 'sentido contrapuesto').

VIII.10- *Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s4]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega}.$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo fuertemente compatible respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}.$$

La primera postcondición se sigue a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la contracción por la izquierda [NP-s1]; la segunda postcondición se sigue a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow$ satisface la monotonía [NP-s1] (la cual leeremos ahora en 'sentido contrapuesto').

VIII.11- *Permutación en la teoría-base [NP-s4]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega}{\Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega}.$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa de modo fuertemente compatible respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}{\Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}\ .$$

La primera postcondición se sigue a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la permutación [NP-s1]; la segunda postcondición se sigue a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow$ satisface la citada propiedad (la cual leeremos ahora en 'sentido contrapuesto'). ■

Proposición 126.
Cada una de las anteriores versiones de las reglas [NP-s4] expresadas mediante la condición mediadora cumple que en el conjunto formado por sus precondiciones y sus postcondiciones no hay al menos dos condiciones estructuralmente incompatibles entre sí e igualmente ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar condiciones incompatibles.

Demostración. Si observamos todas las mencionadas versiones veremos que tanto las precondiciones como las postcondiciones son de uno de los siguientes tipos:
1) $\Sigma^1_1 \cdot ... \cdot \Sigma^1_m \Longrightarrow \sigma$, con $\sigma \neq \widetilde{\bot}$ (esto último se cumple bien porque se haya impuesto expresamente, bien porque se derive de las precondiciones tomadas conjuntamente).
2) $\Sigma^2_1 \cdot ... \cdot \Sigma^2_n \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}$.

Y es evidente que dichas condiciones no son estructuralmente incompatibles ni pueden generar por especificación condiciones que sean incompatibles a nivel particular. ■

Las relaciones inferenciales del presente tipo pueden también satisfacer, entre otras, algunas de las reglas estructurales mixtas que seguidamente se enumeran:

VIII.12- ***Transitividad cauta entre el objeto del problema y la solución (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s4]:***

$$\frac{\Delta \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma|\omega \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi;\ \Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\varphi\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

VIII.13- ***Debilitamiento del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s4]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \langle \psi \rangle | \upsilon \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \omega;\ \langle \upsilon \rangle \Longrightarrow \psi;\ \psi \neq \widetilde{\bot}}{\Gamma \cdot \langle \psi \rangle | \psi \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \omega}\ .$$

VIII.14- ***Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s4]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \langle \varphi \rangle | \upsilon \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \omega;\ \langle \varphi \rangle \Longrightarrow \omega}{\Gamma | \upsilon \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \varphi}\ .$$

Proposición 127.
Si una relación inferencial mediada s-s es justificativa de modo fuertemente compatible entonces satisface las anteriores propiedades estructurales 'mixtas' [NP-s4] si la correspondiente relación inferencial mediadora singular cumple las propiedades estructurales [NP-s1] que en cada una de ellas se indican.

VIII.12- Transitividad cauta entre el objeto del problema y la solución (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s4]: transitividad [NP-s1] y permutación [NP-s1].

VIII.13- Debilitamiento del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s4]: reflexividad [NP-s1] (o bien transitividad [NP-s1b]).

VIII.14- Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s4]: transitividad [NP-s1], monotonía [NP-s1] y contracción por la derecha [NP-s1].

Demostración.

VIII.12- *Transitividad cauta entre el objeto del problema y la solución (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s4]:*

$$\frac{\Delta \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \omega;\ \Gamma | \omega \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \varphi;\ \Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle \varphi \rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \varphi}\ .$$

Por ser $\overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m$ justificativa de modo fuertemente compatible respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Delta\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Delta\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot};\\ \Gamma\cdot\langle\varphi\rangle \Longrightarrow \omega;\ \Gamma\cdot\langle\varphi\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot};\\ \Delta\cdot\Gamma\cdot\Lambda\cdot\langle\varphi\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}\end{array}}{\Delta\cdot\Gamma\cdot\Lambda\cdot\langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Delta\cdot\Gamma\cdot\Lambda\cdot\langle\varphi\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}\ .$$

Sólo hay que señalar que la primera postcondición de la regla se tiene a partir de la tercera y primera precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1] y la permutación [NP-s1].

VIII.13- *Debilitamiento del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s4]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\langle\psi\rangle|\upsilon \overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m \omega;\ \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \psi;\ \psi \neq \widetilde{\bot}}{\Gamma\cdot\langle\psi\rangle|\psi \overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m \omega}\ .$$

Por ser $\overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m$ justificativa de modo fuertemente compatible respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma\cdot\langle\psi\rangle\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\psi\rangle\cdot\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot};\\ \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \psi;\ \psi \neq \widetilde{\bot}\end{array}}{\Gamma\cdot\langle\psi\rangle\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \psi;\ \Gamma\cdot\langle\psi\rangle\cdot\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}\ .$$

Sólo hay que señalar que la primera postcondición de la regla se tiene si $\Longrightarrow$ satisface la reflexividad [NP-s1] (o bien a partir de la primera y tercera precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1b]).

VIII.14- *Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s4]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\langle\varphi\rangle|\upsilon \overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m \omega;\ \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \omega}{\Gamma|\upsilon \overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m \varphi}\ .$$

Por ser $\overset{\bullet\bullet}{\Longrightarrow}_m$ justificativa de modo fuertemente compatible respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \langle \varphi \rangle \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle \varphi \rangle \cdot \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot};\quad \langle \varphi \rangle \Longrightarrow \omega}{\Gamma \cdot \langle \varphi \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle \varphi \rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}\ .$$

La primera postcondición de la regla se tiene si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1]; la segunda postcondición se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow$ satisface la monotonía [NP-s1] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto').

■

Proposición 128.
Cada una de las anteriores versiones de las reglas 'mixtas' [NP-s4] expresadas mediante la condición mediadora cumple que en el conjunto formado por sus precondiciones y sus postcondiciones no hay al menos dos condiciones estructuralmente incompatibles entre sí e igualmente ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar condiciones incompatibles.

Su prueba es idéntica a la de la proposición análoga anterior, es decir la correspondiente a las reglas 'puras' [NP-s4].

El que sigue es el teorema de representación que anunciábamos, ampliado para subfamilias arbitrarias, pero en lugar de usar las versiones para subfamilias que son análogas a las reglas que maneja Atocha Aliseda –es decir, las ['At'-s2]–, se han usado las propiedades [NP-s1]:

Teorema 129 (Teorema de representación mediante propiedades [NP-s1] de la relación inferencial mediada s-s justificativa de modo fuertemente compatible respecto de la deducción clásica)**.**
La reflexividad [NP-s1], la transitividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1] de la relación inferencial mediadora singular son condiciones suficientes de una relación inferencial mediada s-s justificativa de modo fuertemente compatible respecto de la deducción clásica, cuya primera componente es una subfamilia

arbitraria y tal que su relación mediadora es la deducción clásica, en el sentido de que cualquier relación inferencial mediada con la relación inferencial mediadora y las premisas indicadas y que satisfaga las tres propiedades mencionadas, se puede representar como si fuese la relación mencionada.

Demostración. En esta demostración nos apoyaremos en el teorema de representación anterior. Sea $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ una relación de consecuencia lógica s-s justificativa de modo fuertemente compatible que está mediada por la relación de consecuencia lógica singular $\Longrightarrow$. Sean Γ un elemento de $SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))$ e υ y ω elementos de $FOR(\mathcal{L})$.

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo fuertemente compatible tenemos que:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega \text{ si y sólo si } (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon) \mathrel{\dot{\&}} (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}).$$

Por otro lado, la inferencia mediadora es la deducción clásica y, atendiendo a su caracterización mediante modelos, sabemos que:

$$(\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \vDash_d \upsilon) \mathrel{\dot{\&}} (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \nvDash_d \widetilde{\bot}) \text{ si y sólo si}$$

$$((\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon)) \mathrel{\dot{\&}} ((\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega) \nsubseteq Mod(\widetilde{\bot})).$$

Así pues, debemos probar que:

$$(\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon) \mathrel{\dot{\&}} (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}) \text{ si y sólo si}$$

$$((\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon)) \mathrel{\dot{\&}} ((\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega) \nsubseteq Mod(\widetilde{\bot})).$$

siendo $\Longrightarrow$ una relación de consecuencia lógica singular que satisface las propiedades de reflexividad [NP-s1], transitividad [NP-s1] y contracción por la derecha [NP-s1].

Hagamos $\Gamma' \doteqdot \Gamma \cdot \langle\omega\rangle$; aplicando propiedades conjuntistas sencillas tenemos que:

$$(\bigcap_{\gamma'\in\bar{\Gamma}'} Mod(\gamma')) = (\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega).$$

Ahora bien, el *teorema de representación de la relación inferencial deductiva clásica [NP-s1]* establece que:

$$\textbf{a)}\ \Gamma' \Longrightarrow \upsilon \text{ si y sólo si } (\bigcap_{\gamma'\in\bar{\Gamma}'} Mod(\gamma')) \subseteq Mod(\upsilon),$$

y, por igual motivo, también se cumple que

$$\textbf{b)}\ \Gamma' \not\Longrightarrow \widetilde{\bot} \text{ si y sólo si } (\bigcap_{\gamma' \in \bar{\Gamma}'} Mod(\gamma')) \nsubseteq Mod(\widetilde{\bot}),$$

en ambos casos bajo las mismas condiciones para $\Longrightarrow$ que en el teorema de representación en el cual nos apoyamos.

Por último, a) y b) conjuntamente implican lo que nos habíamos propuesto probar. ■

Antes de proseguir, hacemos un inciso sobre la relación del lado derecho de la equivalencia con el miembro análogo del teorema de representación probado por Atocha Aliseda. Nuestra elección permite ver de una manera rápida la aplicabilidad del *teorema de representación de la relación inferencial deductiva clásica [NP-s1]*, pero es fácil justificar que ambas versiones son realmente equivalentes si se tiene tiene en cuenta que $Mod(\widetilde{\bot}) = \varnothing$ y se aplican propiedades sencillas de la Teoría de Conjuntos: $M \nsubseteq \varnothing$ es equivalente a $M \neq \varnothing$ y esto a su vez equivalente a $\varnothing \subsetneq M$.

4.4. Relación de consecuencia lógica mediada s-s justificativa de modo fuertemente compatible y posicionalmente indiferente

Queremos ahora determinar cuáles son los vínculos que existen entre las propiedades [NP-s4] que satisface la relación inferencial mediada s-s que es justificativa de modo fuertemente compatible y las propiedades [NP-s1] que satisface la relación inferencial mediadora singular, para lo cual comenzamos viendo la siguiente definición:

Definición 130 (Relación de consecuencia lógica mediada s-s justificativa de modo fuertemente compatible y posicionalmente indiferente).
Una relación de consecuencia lógica mediada s-s $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ es justificativa de modo fuertemente compatible y posicionalmente indiferente respecto de una relación inferencial mediadora singular $\Longrightarrow$ cuando se satisface que:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega \textit{ si y sólo si } (\Gamma \circledast \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon) \;\dot{\&}\; (\Gamma \circledast \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}).$$

Nuevamente, cualquier relación de consecuencia lógica del tipo que acabamos de definir debe satisfacer que $\upsilon \neq \widetilde{\bot}$, pues esto se infiere de las condiciones que se han establecido.

Todas las propiedades [NP-s4] que fueron presentadas, tanto las 'puras' como las 'mixtas', se mantienen sin alteraciones con esta nueva exigencia (no desarrollamos explícitamente aquí la demostración por los motivos que ya se indicaron en la sección previa en la que se analizaron las consecuencias de introducir este requisito). Nuevamente la presente es una versión sujeta a condiciones más fuertes que la anteriormente dada: así pues, toda propiedad que se mantenga en esta situación, *a fortiori* se mantendrá en la anterior situación; pero ahora contamos con la ventaja de que podemos justificar en el sentido recíproco al que ya fue presentado los vínculos existentes entre las propiedades de la relación inferencial mediada y la mediadora:

Proposición 131.
Si una relación inferencial mediada s-s $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ es justificativa de modo fuertemente compatible y posicionalmente indiferente respecto de $\Longrightarrow$ y satisface la reflexividad condicionada del objeto del problema en la solución [NP-s4] y la contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s4], entonces la restricción de su relación inferencial mediadora singular $\Longrightarrow$ a los elementos que satisfacen que la subfamilia de premisas es no vacía y fuertemente compatible es una relación de consecuencia que satisface la reflexividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1].

Demostración. Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo fuertemente compatible y posicionalmente indiferente respecto de $\Longrightarrow$ tenemos que las antecitadas propiedades de la relación mediada se 'traducen' en las siguientes propiedades de la relación mediadora:

1. *Reflexividad condicionada del objeto del problema en la solución [NP-s4]:*

$$\frac{\Gamma \circledast \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \circledast \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}{\Gamma \circledast \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \circledast \langle\upsilon\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}\ .$$

2. *Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s4]:*

$$\frac{(\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda) \circledast \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ (\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda) \circledast \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}{(\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda) \circledast \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ (\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda) \circledast \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}}\ .$$

Para probar que la restricción antes indicada de la relación inferencial mediadora singular $\Longrightarrow$ (es decir, el conjunto de elementos de ésta que satisfacen que la subfamilia de premisas es no vacía y fuertemente compatible) posee la reflexividad [NP-s1], hemos de establecer que ella satisface incondicionalmente $\Sigma_1 \cdot \langle \upsilon \rangle \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow \upsilon$. Y esto viene garantizado por la reflexividad condicionada del objeto del problema en la solución [NP-s4] (para ello basta con hacer $\Gamma \doteqdot \Sigma_1 \cdot \Sigma_2$).

De nuevo, para probar que la citada restricción de la relación inferencial (la cual satisface que la subfamilia de premisas es siempre no vacía y fuertemente compatible) posee la contracción por la derecha [NP-s1] partimos de su precondición ($\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow \upsilon$, tal que $\langle \omega \rangle \ddot{\subseteq} \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda$) y justificamos que bajo ese supuesto necesariamente se cumple su postcondición ($\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow \upsilon$, tal que $\langle \omega \rangle \ddot{\subseteq} \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda$). Para ese fin, basta con tener en cuenta que esto está garantizado por la contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s4] puesto que se cumplen $\langle \omega \rangle \ddot{\subseteq} \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \circledast \langle \omega \rangle$ y $\langle \omega \rangle \ddot{\subseteq} \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \circledast \langle \omega \rangle$. ■

El hecho de no haber mencionado a la transitividad [NP-s1] en la proposición seguramente ya habrá hecho sospechar lo que a continuación exponemos. No parece existir ninguna propiedad ‘pura’ [NP-s4] que por sí misma permita garantizar la citada propiedad [NP-s1]. Si aceptamos intentarlo con alguna propiedad ‘mixta’ [NP-s4] (siendo consciente de que en ellas las condiciones no se dan exclusivamente en términos de la relación mediada), la única que parece buena candidata es la transitividad cauta entre el objeto del problema y la solución (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s4]. Sin embargo, ésta exige una precondición que no satisfacen necesariamente los elementos de la restricción que se indicó de la relación inferencial mediadora (además el hecho de que dicha precondición involucre a subfamilias de distintos enunciados inferenciales hace inviable encontrar otra restricción de la citada relación inferencial en la que sí se puedan garantizar los vínculos entre las propiedades de la relación de consecuencia mediada y las correspondientes propiedades de su relación de consecuencia mediadora). La situación se reproduce si en lugar de una sola propiedad, ‘pura’ o ‘mixta’ lo intentamos con dos o más de ellas conjuntamente.

Todo lo anterior desemboca en que tampoco resulte posible el enunciado de un teorema de representación para la relación inferencial mediada s-s que es justificativa de modo fuertemente compatible y posicionalmente indiferente respecto de la deducción clásica usando sólo propiedades [NP-s4]. Probablemente esto nos está indicando por qué otros autores han fracasado anteriormente en el intento de probar teoremas de representación para ciertos tipos de inferencia abductiva ordinaria con propiedades elaboradas para relaciones inferenciales ternarias. De hecho, como ya pudimos ver el teorema que presentó Atocha Aliseda en realidad usa propiedades relativas a relaciones inferenciales binarias cuya única diferencia con las [NP-c1] es el que tienen una menor capacidad de representación.

4.5. Relación de consecuencia lógica mediada s-s justificativa de modo débilmente compatible

Al comienzo del capítulo anterior comentamos que de entrada se rechaza que aparezcan en las reglas estructurales condiciones que sean relativas al lenguaje o lenguaje interpretado del sistema lógico, siendo discutible si el símbolo metalingüístico que designa a una fórmula inconsistente / insatisfacible de manera genérica incumple dicho requisito. Podemos pensar en un tipo de relación inferencial que evita esas posibles objeciones al cambiar el requisito de compatibilidad fuerte por el de compatibilidad débil:

Definición 132 (Subfamilia de fórmulas débilmente consistente / fuertemente inconsistente)**.**
Dada una subfamilia de fórmulas Γ*, si cumple que* $\dot{\exists}\varphi(\Gamma \not\Longrightarrow \varphi)$*, decimos que es débilmente consistente respecto de la relación inferencial* $\Longrightarrow$*; en caso contrario decimos que es fuertemente inconsistente respecto de dicha relación inferencial.*

Definición 133 (Relación de consecuencia lógica mediada s-s justificativa de modo débilmente compatible)**.**
Una relación de consecuencia lógica mediada s-s $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ *es justificativa de modo débilmente compatible respecto de una relación consecuencia lógica mediadora singular* $\Longrightarrow$ *cuando se satisface que:*

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega \textit{ si y sólo si } (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon)\ \dot{\&}\ (\dot{\exists}\varphi(\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \varphi)).$$

[10]

[10] En la segunda condición no nos hace falta indicar qué tipo de entidad es φ, a diferencia de lo que hicimos en el segundo capítulo, dado que en el tercer capítulo establecimos una notación que es común para todos los que componen la segunda parte de la tesis.

Es obvio que cualquier relación de consecuencia lógica del tipo que acabamos de definir debe satisfacer que $\upsilon \neq \varphi$, pero no es necesario añadirlo a las condiciones anteriores porque se deriva a partir de las ya impuestas.

Todas las propiedades [NP-s4] que fueron presentadas, tanto las 'puras' como las 'mixtas', se mantienen sin alteraciones con esta nueva exigencia (no desarrollamos explícitamente aquí la demostración porque coincide con la dada realizando el cambio de la condición de compatibilidad fuerte ($\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \widetilde{\bot}$) por la condición de compatibilidad débil ($\dot{\exists}\varphi(\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \varphi)$) en cada uno de los casos que aquélla apareciese en cada regla y, cuando corresponda, cambiando $\upsilon \neq \widetilde{\bot}$ por $\upsilon \neq \varphi$. Estructuralmente se trata de dos opciones al mismo 'nivel', salvo que se añada la información adicional (cuyo carácter estructural sería nuevamente discutible) de que la anterior condición exige estrictamente más que la presente –y, por tanto, aquélla implica a ésta, aunque no de manera recíproca–.

Del mismo modo, el teorema de representación enunciado para las relaciones de consecuencia lógica mediadas s-s justificativas de modo fuertemente compatible se mantiene para las análogas relaciones justificativas de modo débilmente compatibles.

En cuanto a la relación de consecuencia lógica mediada s-s justificativa de modo débilmente compatible y posicionalmente indiferente comencemos con su definición:

Definición 134 (Relación de consecuencia lógica mediada s-s justificativa de modo débilmente compatible y posicionalmente indiferente)**.**
Una relación de consecuencia lógica mediada s-s $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ *es justificativa de modo débilmente compatible y posicionalmente indiferente respecto de una relación inferencial mediadora singular* $\Longrightarrow$ *cuando se satisface que:*

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega \textit{ si y sólo si } (\Gamma \circledast \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon)\ \dot{\&}\ (\dot{\exists}\varphi(\Gamma \circledast \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \varphi)).$$

Nuevamente, cualquier relación de consecuencia lógica del tipo que acabamos de definir debe satisfacer que $\upsilon \neq \varphi$, pues esto se infiere de las condiciones que se han establecido.

Nos encontramos con que la situación en este caso es exactamente idéntica a la que tiene la relación de consecuencia análoga pero cuyo requisito de compatibilidad es el fuerte, por lo que damos por reproducidas aquí todo el fragmento debiendo únicamente cambiar, las menciones y los usos de la citada condición por la de compatibilidad débil.

4.6. Relación de consecuencia lógica mediada s-s justificativa de modo explicativo

Como en ocasiones anteriores comenzamos definiendo este tipo de inferencia:

Definición 135 (Relación de consecuencia lógica mediada s-s justificativa de modo explicativo)**.**
Una relación de consecuencia lógica mediada s-s $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ *es justificativa de modo explicativo respecto de una relación inferencial mediadora singular* $\Longrightarrow$ *cuando se satisface que:*

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega \textit{ si y sólo si } (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \upsilon).$$

Es obvio que cualquier relación de consecuencia lógica del tipo que acabamos de definir debe satisfacer que $\Gamma \mathrel{\ddot{\neq}} \langle\ \rangle$, pero no es necesario añadirlo a las condiciones anteriores porque se deriva a partir de las ya impuestas.

Las relaciones de consecuencia lógica mediadas s-s justificativas de modo explicativo pueden satisfacer, entre otras, algunas de las reglas estructurales que seguidamente se enumeran:

IX.1- ***Ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s5]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

IX.2- ***Monotonía en la teoría-base [NP-s5]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

IX.3- ***Corte en la teoría-base [NP-s5]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda|\varphi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

IX.4- ***Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s5]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

IX.5- ***Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s5]:***

$$\frac{\Gamma\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\;.$$

IX.6- ***Permutación en la teoría-base [NP-s5]:***

$$\frac{\Gamma\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\;.$$

Proposición 136.

Si una relación inferencial mediada s-s es justificativa entonces satisface las anteriores propiedades [NP-s5] si la correspondiente relación inferencial mediadora singular cumple las propiedades estructurales [NP-s1] que en cada una de ellas se indican.

IX.1- Ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s5]: monotonía [NP-s1] y permutación [NP-s1].

IX.2- Monotonía en la teoría-base [NP-s5]: monotonía [NP-s1].

IX.3- Corte en la teoría-base [NP-s5]: transitividad [NP-s1] y contracción por la izquierda [NP-s1].

IX.4- Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s5]: contracción por la derecha [NP-s1].

IX.5- Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s5]: contracción por la izquierda [NP-s1].

IX.6- Permutación en la teoría-base [NP-s5]: permutación [NP-s1].

Demostración.

IX.1- *Ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s5]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma\cdot\langle\omega\rangle\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\;.$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa de modo explicativo respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \upsilon}{\Gamma\cdot\langle\omega\rangle\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \upsilon}\;.$$

Sólo hay que señalar que la primera postcondición se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la monotonía [NP-s1] y la permutación [NP-s1].

IX.2- *Monotonía en la teoría-base [NP-s5]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \omega}\,.$$

Por ser $\Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo explicativo respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \upsilon}\,.$$

Sólo hay que señalar que la primera postcondición de la regla se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la monotonía [NP-s1].

IX.3- *Corte en la teoría-base [NP-s5]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \langle \varphi \rangle \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda | \varphi \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \omega}{\Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \omega}\,.$$

Por ser $\Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo explicativo respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \cdot \langle \varphi \rangle \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \upsilon; \\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \varphi;\ \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \varphi\end{array}}{\Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \upsilon}\,.$$

Sólo hay que señalar que la primera postcondición se tiene a partir de la tercera y la primera precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1] y la contracción por la izquierda [NP-s1].

IX.4- *Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s5]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \omega}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet} \omega}\,.$$

Por ser $\Longrightarrow_{m}^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo explicativo respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \upsilon}\,.$$

Sólo hay que señalar que la primera postcondición se sigue a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la contracción por la derecha [NP-s1].

IX.5- *Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s5]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega} \, .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa de modo explicativo respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon; \ \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon; \ \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \upsilon} \, .$$

Sólo hay que señalar que la primera postcondición se sigue a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la contracción por la izquierda [NP-s1].

IX.6- *Permutación en la teoría-base [NP-s5]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega} \, .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa de modo explicativo respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon; \ \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon; \ \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \upsilon} \, .$$

Sólo hay que señalar que la primera postcondición se sigue a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la propiedad de permutación [NP-s1].

■

Proposición 137.
Cada una de las anteriores versiones de las reglas [NP-s5] expresadas mediante la condición mediadora cumple que en el conjunto formado por sus precondiciones y sus postcondiciones no hay al menos dos condiciones estructuralmente incompatibles entre sí e igualmente ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar condiciones incompatibles.

Demostración. Si observamos todas las mencionadas versiones veremos que tanto las precondiciones como las postcondiciones son de uno de los siguientes tipos:
1) $\Sigma_1 \cdot ... \cdot \Sigma_m \cdot \langle \sigma_1 \rangle \Longrightarrow \sigma_2$, con $\Sigma_1 \cdot ... \cdot \Sigma_m \ddot{\neq} \langle \ \rangle$ (esto último se cumple porque se deriva de las precondiciones tomadas conjuntamente).
2) $\langle \sigma_1 \rangle \not\Longrightarrow \sigma_2$.

Y es evidente que dichas condiciones no son estructuralmente incompatibles ni pueden generar por especificación condiciones que sean incompatibles a nivel particular. ■

Las relaciones inferenciales del presente tipo pueden también satisfacer, entre otras, algunas de las reglas estructurales mixtas que seguidamente se enumeran:

IX.7- ***Corte en la teoría-base (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s5]:***

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\Lambda \ddot{\neq} \langle\ \rangle}{\Gamma\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

IX.8- ***Fortalecimiento cauto del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s5]:***

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \psi}{\Gamma|\psi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

IX.9- ***Cambio por equivalencia del objeto del problema [NP-s5]:***

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \psi;\ \langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \upsilon\neq\omega}{\Gamma|\psi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

IX.10- ***Cambio por equivalencia de la solución [NP-s5]:***

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\omega\rangle \Longrightarrow \psi;\ \langle\psi\rangle \Longrightarrow \omega;\ \upsilon\neq\omega}{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \psi}\ .$$

Proposición 138.
Si una relación inferencial mediada s-s es justificativa entonces satisface las anteriores propiedades estructurales 'mixtas' [NP-s5] si la correspondiente relación inferencial mediadora singular cumple las propiedades estructurales [NP-s1] que en cada una de ellas se indican.

IX.7- Corte en la teoría-base (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s5]: en cualquier caso.

IX.8- Fortalecimiento cauto del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s5]: transitividad [NP-s1b].

IX.9- Cambio por equivalencia del objeto del problema [NP-s5]: transitividad [NP-s1b].

IX.10- Cambio por equivalencia de la solución [NP-s5]: transitividad [NP-s1b].

Demostración.

IX.7- *Corte en la teoría-base (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s5]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Lambda \ddot{\not\equiv} \langle\ \rangle}{\Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa de modo explicativo respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \upsilon; \\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Lambda \ddot{\not\equiv} \langle\ \rangle\end{array}}{\Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \upsilon}\ .$$

Lo cual es evidente.

IX.8- *Fortalecimiento cauto del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s5]:*

$$\frac{\Gamma | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle \psi \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \psi}{\Gamma | \psi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa de modo explicativo respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \upsilon; \\ \langle \psi \rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \psi\end{array}}{\Gamma \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \psi;\ \langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \psi}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición de la regla se tiene a partir de la segunda y tercera precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1b] (para llegar a esta conclusión podemos razonar por reducción al absurdo: supongamos que a partir de las precondiciones $\langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \upsilon$ y $\langle \psi \rangle \Longrightarrow \upsilon$ se siguiese $\langle \omega \rangle \Longrightarrow \psi$; entonces, por la transitividad [NP-s1b] de $\Longrightarrow$ sobre este supuesto y la tercera precondición obtendríamos $\langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon$, lo cual es contradictorio con la primera precondición; por lo tanto hemos de concluir $\langle \omega \rangle \not\Longrightarrow \psi$).

IX.9- *Cambio por equivalencia del objeto del problema [NP-s5]:*

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \psi;\ \langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \upsilon \neq \omega}{\Gamma|\psi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa de modo explicativo respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \upsilon;\\ \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \psi;\ \langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \upsilon \neq \omega\end{array}}{\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \psi;\ \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \psi}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición de la regla se tiene a partir de la segunda y cuarta precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1b] (para llegar a esta conclusión podemos razonar por reducción al absurdo: supongamos que a partir de las precondiciones $\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \upsilon$ y $\langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon$ se siguiese $\langle\omega\rangle \Longrightarrow \psi$; entonces, por la transitividad [NP-s1b] de $\Longrightarrow$ sobre este supuesto y la cuarta precondición obtendríamos $\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon$, lo cual es contradictorio con la segunda precondición; por lo tanto hemos de concluir $\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \psi$).

IX.10- *Cambio por equivalencia de la solución [NP-s5]:*

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\omega\rangle \Longrightarrow \psi;\ \langle\psi\rangle \Longrightarrow \omega;\ \upsilon \neq \omega}{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \psi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ justificativa de modo explicativo respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \upsilon;\\ \langle\omega\rangle \Longrightarrow \psi;\ \langle\psi\rangle \Longrightarrow \omega;\ \upsilon \neq \omega\end{array}}{\Gamma \cdot \langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \langle\psi\rangle \not\Longrightarrow \upsilon}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición de la regla se tiene a partir de la segunda y tercera precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1b] (para llegar a esta conclusión podemos razonar por reducción al absurdo: supongamos que a partir de las precondiciones $\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \upsilon$ y $\langle\omega\rangle \Longrightarrow \psi$ se siguiese $\langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon$; entonces, por la transitividad [NP-s1b] de $\Longrightarrow$ sobre este supuesto y la tercera precondición obtendríamos $\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon$, lo cual es contradictorio con la segunda precondición; por lo tanto hemos de concluir $\langle\psi\rangle \not\Longrightarrow \upsilon$).

■

Proposición 139.
Cada una de las anteriores versiones de las reglas 'mixtas' [NP-s5] expresadas mediante la condición mediadora cumple que:
1) En el conjunto formado por sus precondiciones y sus postcondiciones no hay al menos dos condiciones (explícitas o implícitas) estructuralmente incompatibles entre sí.
2) Ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar nuevas postcondiciones que sean incompatibles entre sí o incompatibles con las nuevas precondiciones, salvo en el caso de que las nuevas precondiciones sean igualmente incompatibles entre sí.

La prueba de esta proposición es laboriosa y creemos que no aporta nada sustancial presentarla con todo el detalle. En cualquier caso, podemos indicar las líneas maestras de la misma. El proceso requerirá de la indagación de cada regla y, para cada una de ellas, lo dividiremos en dos fases (que se corresponden respectivamente con los apartados que se distinguen en el enunciado de la proposición). Nuestras pesquisas se ven facilitadas por el hecho de que todas las precondiciones, por un lado, y todas las postcondiciones, por otro, están unidas conjuntivamente:
1) Determinación de que en el conjunto formado por sus precondiciones y sus postcondiciones no hay al menos dos condiciones (explícitas o implícitas) estructuralmente incompatibles entre sí. Con este fin comenzamos por explicitar los enunciados relacionales que sean consecuencia de las precondiciones y a continuación haremos lo propio con las postcondiciones (en ambos casos dichos enunciados relacionales sólo pueden versar sobre la vacuidad o no de cierta entidad o sobre la necesidad de que ciertas entidades sean distintas o iguales). A continuación agrupamos las condiciones iniciales y las explicitadas en dos conjuntos según sea o no el negador su 'signo' principal (las podemos llamar 'negativas' y 'positivas', respectivamente). Una vez hecho esto, cada elemento de uno de esos conjuntos se coteja con todos los elementos del otro conjunto que tengan igual 'naturaleza' (inferencial o relacional). 2) Determinación de que ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar nuevas postcondiciones que sean incompatibles entre sí o incompatibles con las nuevas precondiciones, salvo en el caso de que las nuevas precondiciones sean igualmente incompatibles entre sí. Para ello comenzamos determinando cuáles son las posibles especificaciones de las postcondiciones, las cuales se obtienen mediante la aplicación de sucesivas

operaciones de unificación[11] de las letras que ocurren en las postcondiciones con cualesquiera letras que ocurran en la regla y también con la subfamilia vacía, salvo cuando alguna de esas posibilidades esté expresamente excluida a tenor de las condiciones iniciales. Para cada conjunto de condiciones obtenidas por una misma especificación realizamos el proceso indicado en el apartado anterior.

Probamos ahora el correspondiente teorema de representación:

Teorema 140 (Teorema de representación mediante propiedades [NP-s1] de la relación inferencial mediada s-s justificativa de modo explicativo respecto de la deducción clásica)**.**
La reflexividad [NP-s1], la transitividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1] de la relación inferencial mediadora singular son condiciones suficientes de una relación inferencial mediada s-s justificativa de modo explicativo respecto de la deducción clásica, cuya primera componente es una subfamilia arbitraria y tal que su relación mediadora es la deducción clásica, en el sentido de que cualquier relación inferencial mediada con la relación inferencial mediadora y las premisas indicadas y que satisfaga las tres propiedades mencionadas, se puede representar como si fuese la relación mencionada.

Demostración. Sea $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ una relación de consecuencia lógica s-s justificativa de modo explicativo que está mediada por la relación de consecuencia lógica singular $\Longrightarrow$. Sean Γ un elemento de $SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))$ e υ y ω elementos de $FOR(\mathcal{L})$.

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ justificativa de modo explicativo tenemos que:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega \text{ si y sólo si } (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \upsilon).$$

Por otro lado, la relación inferencial mediadora es la deducción clásica y, atendiendo a su caracterización mediante modelos, sabemos que:

$$(\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \vDash_d \upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\langle\omega\rangle \nvDash_d \upsilon) \text{ si y sólo si}$$

$$((\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon)) \mathbin{\dot{\&}} (Mod(\omega) \nsubseteq Mod(\upsilon)).$$

Así pues, debemos probar que:

$$(\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\langle\omega\rangle \not\Longrightarrow \upsilon) \text{ si y sólo si}$$

[11] En el sentido que tiene esta expresión en Programación Lógica.

$$((\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon)) \mathbin{\dot{\&}} (Mod(\omega) \nsubseteq Mod(\upsilon)),$$

siendo $\Longrightarrow$ una relación de consecuencia lógica singular que satisface las propiedades de reflexividad [NP-s1], transitividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1].

Ahora bien, a partir de lo que se probó en el *teorema de representación de la relación inferencial deductiva clásica [NP-s1]*, sabemos que:

a) $\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon$ si y sólo si $(\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon)$,

bajo las mismas condiciones para $\Longrightarrow$.

Y, teniendo en cuenta nuevamente lo que se probó en el *teorema de representación de la relación inferencial deductiva clásica [NP-s1]*, sabemos que:

b) $\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon$ si y sólo si $Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon)$.

Por lo tanto, al tratarse de una equivalencia, las correspondientes negaciones de cada miembro también son equivalentes. Por último, a) y b) conjuntamente implican lo que nos habíamos propuesto probar. ■

4.7. Relación de consecuencia lógica mediada s-s resolutiva

Definiremos ahora una relación de consecuencia lógica mediada s-s resolutiva, la cual, aunque su nombre no lo muestre claramente como sí ocurría en pasadas ocasiones, será también un tipo particular de la justificativa antes definida[12]:

Definición 141 (Relación de consecuencia lógica mediada s-s resolutiva)**.**
Una relación de consecuencia lógica mediada s-s $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ *es resolutiva respecto de una relación consecuencia lógica mediadora singular* $\Longrightarrow$ *cuando se satisface que:*

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega \text{ si y sólo si } (\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon).$$

[12] Obviamente nuestra propuesta toma en consideración cómo definimos habitualmente la abducción ordinaria s-s plana a partir de la deducción singular, pero se hace en un nivel general de modo que podrían encontrarse otros ‘modelos’; más adelante, tras la prueba del correspondiente teorema de representación, ya si nos referiremos exclusivamente al caso particular que viene dado por la relación inferencial mediadora y mediada indicadas.

Las relaciones de consecuencia lógica mediadas s-s resolutivas pueden satisfacer, entre otras, algunas de las reglas estructurales que seguidamente se enumeran:

X.1- ***Reflexividad condicionada del objeto del problema en la solución [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \upsilon}\,.$$

X.2- ***Reflexividad condicionada de la solución en el objeto del problema [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma|\omega \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\,.$$

X.3- ***Monotonía cauta en la teoría-base [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\,.$$

X.4- ***Transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s6]:***

$$\frac{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma|\omega \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\,.$$

X.5- ***Corte en la teoría-base [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda|\varphi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \mathrel{\ddot{\neq}} \Lambda \cdot \langle\omega\rangle}{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\,.$$

X.6- ***Corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda|\omega \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi;\ \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \mathrel{\ddot{\neq}} \Lambda \cdot \langle\varphi\rangle}{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\,.$$

X.7- ***Permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \psi}{\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\,.$$

X.8- ***Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Xi \cdot \Lambda \mathrel{\ddot{\neq}} \Lambda \cdot \langle\omega\rangle}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\,.$$

X.9- ***Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \not\ddot{=} \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

X.10- ***Permutación en la teoría-base [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Proposición 142.

Si una relación inferencial mediada s-s es resolutiva entonces satisface dichas propiedades [NP-s6] si la correspondiente relación inferencial mediadora singular tiene las propiedades estructurales [NP-s1] que en cada una de ellas se indican.

X.1- Reflexividad condicionada del objeto del problema en la solución [NP-s6]: reflexividad [NP-s1].

X.2- Reflexividad condicionada de la solución en el objeto del problema [NP-s6]: reflexividad [NP-s1], transitividad [NP-s1] y contracción por la derecha [NP-s1].

X.3- Monotonía cauta en la teoría-base [NP-s6]: monotonía [NP-s1].

X.4- Transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s6]: transitividad [NP-s1] y contracción por la derecha [NP-s1].

X.5- Corte en la teoría-base [NP-s6]: monotonía [NP-s1], transitividad [NP-s1] y contracción por la izquierda [NP-s1].

X.6- Corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s6]: monotonía [NP-s1], transitividad [NP-s1] y contracción por la izquierda [NP-s1].

X.7- Permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP-s6]: permutación [NP-s1].

X.8- Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s6]: monotonía [NP-s1] y contracción por la derecha [NP-s1].

X.9- Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s6]: monotonía [NP-s1] y contracción por la izquierda [NP-s1].

X.10- Permutación en la teoría-base [NP-s6]: permutación [NP-s1].

Demostración.

X.1- *Reflexividad condicionada del objeto del problema en la solución [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \upsilon}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición de la regla se tiene si $\Longrightarrow$ satisface la reflexividad [NP-s1].

X.2- *Reflexividad condicionada de la solución en el objeto del problema [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma|\omega \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \not\Longrightarrow \omega;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \omega}\ .$$

La primera postcondición de la regla se tiene a partir de la primera y segunda precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1] (para llegar a esta conclusión podemos razonar por reducción al absurdo: supongamos que a partir de las precondiciones $\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon$ y $\Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon$ se siguiese $\Gamma \Longrightarrow \omega$; entonces, por la transitividad [NP-s1] de $\Longrightarrow$ sobre este supuesto y la segunda precondición obtendríamos $\Gamma\cdot\Gamma \Longrightarrow \upsilon$ y aplicando la contracción por la derecha [NP-s1] de $\Longrightarrow$ llegaríamos a $\Gamma \Longrightarrow \upsilon$, lo cual es contradictorio con la primera precondición; por lo tanto hemos de concluir $\Gamma \not\Longrightarrow \omega$); por su parte, la segunda postcondición de la regla se tiene si $\Longrightarrow$ satisface la reflexividad [NP-s1].

X.3- *Monotonía cauta en la teoría-base [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon; \\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon\end{array}}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición de la regla se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow$ satisface la monotonía [NP-s1].

X.4- *Transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s6]:*

$$\frac{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma | \omega \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon; \\ \Gamma \not\Longrightarrow \omega;\ \Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \omega\end{array}}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición de la regla se tiene a partir de la cuarta y segunda precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1].

X.5- *Corte en la teoría-base-1 [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda | \varphi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \overset{..}{\neq} \Lambda \cdot \langle\omega\rangle}{\Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon; \\ \Gamma \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \varphi;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \varphi; \\ \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \overset{..}{\neq} \Lambda \cdot \langle\omega\rangle\end{array}}{\Gamma \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

La primera postcondición de la regla se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la monotonía [NP-s1] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); la segunda postcondición se tiene a partir de la cuarta y la segunda precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1] y la contracción por la izquierda [NP-s1].

X.6- *Corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda|\omega \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi;\ \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \ddot{\neq} \Lambda \cdot \langle\varphi\rangle}{\Gamma \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\\ \Gamma \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \omega;\\ \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \ddot{\neq} \Lambda \cdot \langle\varphi\rangle\end{array}}{\Gamma \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

La primera postcondición de la regla se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la monotonía [NP-s1] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); la segunda postcondición se tiene a partir de la cuarta y la segunda precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1] y la contracción por la izquierda [NP-s1].

X.7- *Permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \psi}{\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\\ \Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda \cdot \langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon\end{array}}{\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle\omega\rangle \cdot \Lambda \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

Sólo es necesario señalar que la segunda postcondición de la regla se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow$ satisface la permutación [NP-s1].

X.8- *Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Xi \cdot \Lambda \mathrel{\ddot{\not\equiv}} \Lambda \cdot \langle \omega \rangle}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon; \\ \Xi \cdot \Lambda \mathrel{\ddot{\not\equiv}} \Lambda \cdot \langle \omega \rangle\end{array}}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

La primera postcondición de la regla se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la propiedad de monotonía [NP-s1] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se sigue a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow$ satisface la contracción por la derecha [NP-s1].

X.9- *Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \mathrel{\ddot{\not\equiv}} \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon; \\ \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \mathrel{\ddot{\not\equiv}} \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle\end{array}}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

La primera postcondición de la regla se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la propiedad de monotonía [NP-s1] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se sigue a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow$ satisface la contracción por la izquierda [NP-s1].

X.10- *Permutación en la teoría-base [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}{\Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

La primera postcondición de la regla se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la propiedad de permutación [NP-s1] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se sigue a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow$ satisface la citada propiedad (la cual leeremos en 'sentido directo').

■

Proposición 143.
Cada una de las anteriores versiones de las reglas [NP-s6] expresadas mediante la condición mediadora cumple que:
1) En el conjunto formado por sus precondiciones y sus postcondiciones no hay al menos dos condiciones (explícitas o implícitas) estructuralmente incompatibles entre sí.
2) Ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar nuevas postcondiciones que sean incompatibles entre sí o incompatibles con las nuevas precondiciones, salvo en el caso de que las nuevas precondiciones sean igualmente incompatibles entre sí.

La prueba de esta proposición sigue el mismo esquema de la correspondiente a las reglas 'mixtas' [NP-s5].

Las relaciones inferenciales del presente tipo pueden también satisfacer, entre otras, algunas de las reglas estructurales mixtas que seguidamente se enumeran:

X.11- ***Monotonía cauta en la teoría-base (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega}\ .$$

X.12- ***Corte en la teoría-base (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega}\ .$$

X.13- ***Fortalecimiento cauto del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \psi}{\Gamma|\psi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

X.14- ***Debilitamiento cauto del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \psi;\ \Gamma \not\Longrightarrow \psi}{\Gamma|\psi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

X.15- ***Cambio por equivalencia del objeto del problema [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \psi;\ \langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \ddot{\not\equiv} \langle\upsilon\rangle}{\Gamma|\psi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

X.16- ***Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \omega}{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

X.17- ***Debilitamiento cauto de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s6]:***

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon}{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

Proposición 144.

Si una relación inferencial mediada s-s es resolutiva entonces cada una de las anteriores propiedades estructurales 'mixtas' [NP-s6] cumple que en el conjunto formado por sus precondiciones y su postcondición no hay al menos dos condiciones estructuralmente incompatibles entre sí. Además, la relación inferencial mediada s-s resolutiva satisface dichas propiedades 'mixtas' [NP-s6] si la correspondiente relación inferencial mediadora singular tiene las propiedades estructurales [NP-s1] que en cada una de ellas se indican.

X.11- Monotonía cauta en la teoría-base (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s6]: monotonía [NP-s1].

X.12- Corte en la teoría-base (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s6]: monotonía [NP-s1].

X.13- *Fortalecimiento cauto del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s6]: transitividad [NP-s1b].*

X.14- *Debilitamiento cauto del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s6]: transitividad [NP-s1b].*

X.15- *Cambio por equivalencia del objeto del problema [NP-s6]: transitividad [NP-s1b].*

X.16- *Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s6]: transitividad [NP-s1].*

X.17- *Debilitamiento cauto de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s6]: en cualquier caso.*

Demostración.

X.11- *Monotonía cauta en la teoría-base (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon; \\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon\end{array}}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición de la regla se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow$ satisface la monotonía [NP-s1].

X.12- *Corte en la teoría-base (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon}{\Gamma \cdot \Lambda | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon; \\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon\end{array}}{\Gamma \cdot \Lambda \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

Sólo hay que señalar que la primera postcondición de la regla se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow$ satisface la monotonía [NP-s1] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto').

X.13- *Fortalecimiento cauto del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \psi}{\Gamma|\psi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\\ \langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \psi\end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow \psi;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \psi}\ .$$

Sólo hay que señalar que la primera postcondición de la regla se tiene a partir de la primera y tercera precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1b] (para llegar a esta conclusión podemos razonar por reducción al absurdo: supongamos que a partir de las precondiciones $\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon$ y $\langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon$ se siguiese $\Gamma \Longrightarrow \psi$; entonces, por la transitividad [NP-s1b] de $\Longrightarrow$ sobre este supuesto y la tercera precondición obtendríamos $\Gamma \Longrightarrow \upsilon$, lo cual es contradictorio con la primera precondición; por lo tanto hemos de concluir $\Gamma \not\Longrightarrow \psi$).

X.14- *Debilitamiento cauto del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \psi;\ \Gamma \not\Longrightarrow \psi}{\Gamma|\psi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\\ \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \psi;\ \Gamma \not\Longrightarrow \psi\end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow \psi;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \psi}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición de la regla se tiene a partir de la segunda y tercera precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1b].

X.15- *Cambio por equivalencia del objeto del problema [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \psi;\ \langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \not\stackrel{..}{=} \langle\upsilon\rangle}{\Gamma|\psi \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\\ \langle\upsilon\rangle \Longrightarrow \psi;\ \langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \not\stackrel{..}{=} \langle\upsilon\rangle\end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow \psi;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \psi}\ .$$

La primera postcondición de la regla se tiene a partir de la primera y cuarta precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1b] (para llegar a esta conclusión podemos razonar por reducción al absurdo: supongamos que a partir de las precondiciones $\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon$ y $\langle\psi\rangle \Longrightarrow \upsilon$ se siguiese $\Gamma \Longrightarrow \psi$; entonces, por la transitividad [NP-s1b] de $\Longrightarrow$ sobre este supuesto y la cuarta precondición obtendríamos $\Gamma \Longrightarrow \upsilon$, lo cual es contradictorio con la primera precondición; por lo tanto hemos de concluir $\Gamma \not\Longrightarrow \psi$); la segunda postcondición de la regla se tiene a partir de la segunda y tercera precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1b].

X.16- *Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \omega}{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon;\\ \langle\varphi\rangle \Longrightarrow \omega\end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma\cdot\langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición de la regla se tiene a partir de la segunda y tercera precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s1].

X.17- *Debilitamiento cauto de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s6]:*

$$\frac{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega;\ \Gamma\cdot\langle\varphi\rangle \Longrightarrow \upsilon}{\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \varphi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon; \\ \Gamma \cdot \langle \varphi \rangle \Longrightarrow \upsilon\end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon;\ \Gamma \cdot \langle \varphi \rangle \Longrightarrow \upsilon}\ .$$

Lo cual es evidente.

■

Proposición 145.
Cada una de las anteriores versiones de las reglas 'mixtas' [NP-s6] expresadas mediante la condición mediadora cumple que:
1) En el conjunto formado por sus precondiciones y sus postcondiciones no hay al menos dos condiciones (explícitas o implícitas) estructuralmente incompatibles entre sí.
2) Ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar nuevas postcondiciones que sean incompatibles entre sí o incompatibles con las nuevas precondiciones, salvo en el caso de que las nuevas precondiciones sean igualmente incompatibles entre sí.

La prueba de esta proposición sigue el mismo esquema de la correspondiente a las reglas 'mixtas' [NP-s5].

En particular, un tipo de relación inferencial mediada s-s es la relación de consecuencia abductiva ordinaria s-s plana (la cual simbolizaremos por "$\Vdash\!\vdash_{ao}$") cuya relación inferencial mediadora es la deducción clásica:

Definición 146 (Relación inferencial abductiva ordinaria s-s plana)**.**
La relación inferencial abductiva ordinaria s-s plana se define de la siguiente manera a partir de la relación inferencial deductiva clásica:

$$\Gamma|\upsilon \Vdash\!\vdash_{ao} \omega \textit{ si y sólo si } (\Gamma \nVdash_d \upsilon)\ \dot{\&}\ (\Gamma \cdot \langle \omega \rangle \Vdash_d \upsilon).$$

Obviamente la relación inferencial abductiva ordinaria s-s plana es resolutiva. En este sentido, una de las consecuencias ventajosas de que la abducción cuente entre sus requisitos con el fracaso inferencial, a diferencia de lo que hace la pensadora mexicana, es que se impide que la subfamilia vacía pueda ser considerada una solución abductiva.

Probamos ahora un nuevo teorema de representación para la relación inferencial abductiva ordinaria s-s plana. Éste es un problema abierto en el campo de la abducción, según se indica en el actual libro de referencia para la abducción ordinaria [AL06] (aunque ya figuraba en los mismos términos en [AL97] y [AL03])[13].

Teorema 147 (Teorema de representación mediante propiedades [NP-s1] de la abducción ordinaria s-s plana cuya relación inferencial mediadora es la deducción singular)**.**
La reflexividad [NP-s1], la transitividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1] de la relación inferencial mediadora singular son condiciones suficientes de la abducción ordinaria s-s plana para casos en los que la teoría-base es una subfamilia con un cardinal arbitrario (inclusive si éste es supernumerable), y siendo su relación inferencial mediadora la deducción singular, en el sentido de que cualquier relación de consecuencia lógica mediada s-s resolutiva, cuya relación de consecuencia lógica mediadora singular satisfaga las tres propiedades [NP-s1] mencionadas, se puede representar como si fuese la relación de consecuencia abductiva ordinaria indicada.

Demostración. Sea $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ una relación de consecuencia lógica s-s resolutiva que está mediada por la relación de consecuencia lógica singular $\Longrightarrow$. Sean Γ un elemento de $SUBFAM_{\mathfrak{E}}(FOR(\mathcal{L}))$ e υ y ω elementos de $FOR(\mathcal{L})$.

Por ser $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ resolutiva tenemos que:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega \text{ si y sólo si } (\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon).$$

Por otro lado, la abducción ordinaria s-s plana se define en términos de la deducción clásica del siguiente modo:

$$\Gamma|\upsilon \Vdash_{ao} \omega \text{ si y sólo si } (\Gamma \nVdash_d \upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Vdash_d \upsilon).$$

Adoptaremos una semántica según la cual los modelos de cada fórmula son las subfamilias que siendo tomadas como premisas permiten establecer enunciados

[13] Téngase en cuenta que en los escritos de Atocha Aliseda se le llama *inferencia abductiva débilmente explicativa* a lo que aquí llamamos *abducción ordinaria s-s plana*.

inferenciales correctos en los que las citadas fórmulas de las que se buscan los modelos son las conclusiones. Es decir, si ψ es un elemento cualquiera de $FOR(\mathcal{L})$, entonces su conjunto de modelos es:

$$Mod(\psi) = \{\Sigma \,/\, \Sigma \in SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})) \;\dot{\&}\; \Sigma \Longrightarrow \psi\}.$$

Así pues, debemos probar que:

$$(\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon) \;\dot{\&}\; (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon) \text{ si y sólo si}$$

$$(Mod(\bar{\Gamma}) \nsubseteq Mod(\upsilon)) \;\dot{\&}\; (Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon)),$$

siendo $\Longrightarrow$ una relación de consecuencia lógica mediadora singular que satisface las propiedades de reflexividad [NP-s1], transitividad [NP-s1] y la contracción por la derecha [NP-s1].

Ahora bien, a partir de lo que se probó en el *teorema de representación de la relación inferencial deductiva clásica [NP-s1]*, sabemos que:

$$\textbf{a)}\ \Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon \text{ si y sólo si } (\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon),$$

bajo las mismas condiciones para $\Longrightarrow$.

En cuanto al primer miembro de la conjunción que aparece en el lado derecho de la equivalencia citada, teniendo en cuenta nuevamente lo que se probó en el *teorema de representación de la relación inferencial deductiva clásica [NP-s1]*, sabemos que:

$$\textbf{b)}\ \Gamma \Longrightarrow \upsilon \text{ si y sólo si } (\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \subseteq Mod(\upsilon).$$

Por lo tanto, al tratarse de una equivalencia, las correspondientes negaciones de cada miembro también son equivalentes. Por último, a) y b) conjuntamente implican lo que nos habíamos propuesto probar. ■

En cuanto a la relación de consecuencia lógica mediada s-s resolutiva de modo posicionalmente indiferente comencemos con su definición:

Definición 148 (Relación de consecuencia lógica mediada s-s resolutiva de modo posicionalmente indiferente)**.**

Una relación de consecuencia lógica mediada s-s $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ *es resolutiva de modo posicionalmente indiferente respecto de una relación inferencial mediadora singular* $\Longrightarrow$ *cuando se satisface que:*

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega \textit{ si y sólo si } (\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma \circledast \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon).$$

Podemos afirmar que todas las propiedades [NP-s6] que han sido presentadas, tanto las 'puras' como las 'mixtas', se mantienen sin alteraciones con esta nueva exigencia (no desarrollamos explícitamente aquí la demostración por los motivos que ya se indicaron en la sección en la que se analizaron las consecuencias de introducir este requisito). Nuevamente la presente es una versión sujeta a condiciones más fuertes que la anteriormente dada: así pues, toda propiedad que se mantenga en esta situación, *a fortiori* se mantendrá en la anterior situación.

Sin embargo, esta condición adicional no nos permite justificar en el sentido recíproco al que ya fue presentado los vínculos existentes entre las propiedades de la relación inferencial mediada y la mediadora. Al menos son dos los motivos para esta nueva situación: el primero es que no resulta viable encontrar una restricción de la relación inferencial mediadora en la que se pueda garantizar la satisfacción del requisito del fracaso inferencial (podríamos hacerlo si la condición resolutiva no tuviese que ser posicionalmente indiferente –puesto que en ese caso bastaría restringir la relación inferencial mediadora a los pares en los que se satisfaga que la eliminación de la última premisa conlleva que no se siga la conclusión–, pero en ese caso no se tendría la necesaria generalidad que requieren las reglas [NP-s1], las cuales no se restringen a la ocurrencia de ciertas fórmulas en una 'ubicación' concreta de las premisas); el segundo motivo es que la regla de contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s6] está sujeta a una condición que no es posible trasladar como restricción de la relación inferencial mediadora sin desvirtuar completamente el objetivo inicialmente marcado.

Nuevamente esto conlleva que tampoco tengamos un teorema de representación para la relación inferencial mediada s-s que es resolutiva de modo posicionalmente indiferente respecto de la deducción clásica usando sólo propiedades [NP-s6].

Mirando 'a vista de pájaro' todo lo que hemos hecho hasta ahora en este capítulo, podemos darnos cuenta de que hemos indagado los tipos de inferencia mediada que son más relevantes para el objetivo de estudiar la inferencia abductiva ordinaria s-s plana. Pero quedan muchos otros tipos que pueden surgir a partir de las combinaciones de las condiciones aquí analizadas o bien añadiendo algunas otras nuevas (por ejemplo, que sólo la teoría-base sea fuertemente / débilmente compatible, que sólo el objeto del problema sea fuertemente / débilmente compatible, que sólo la solución sea fuertemente / débilmente compatible, que la solución sea ingeniosa,...). Sin embargo, hay características que no se pueden representar en un nivel estructural en sentido 'estricto' y que son fundamentales, entre otras la de que el problema sea novedoso o anómalo y, según el criterio de preferencia elegido, la de que una solución sea preferencial. Esto apunta en la dirección que ya se comentó: el estudio a nivel estructural de la relación de consecuencia lógica, aun siendo de una enorme importancia, no agota todas las características de los sistemas lógicos que incorporan dichas relaciones inferenciales.

Para terminar este capítulo, particularizaremos las anteriores reglas para la inferencia abductiva ordinaria s-s plana. Ya justificamos por qué se puede garantizar que esta última satisface las distintas propiedades de permutación y contracción [NP-s6] (es decir, tanto en las dos partes del miembro de la izquierda como en el miembro de la derecha). También sabemos que la deducción clásica satisface las correspondientes propiedades de permutación y contracción [NP-s1]. Así pues, en lugar de una presentación en la que una relación de consecuencia lógica es un conjunto de ternas cuya primera componente es una subfamilia de fórmulas, hacemos una presentación en la que dicha primera componente es un mero conjunto de fórmulas. Por ello, podríamos representar la condición necesaria y suficiente que liga ambos tipos de inferencia del siguiente modo:

Corolario 149.
$\Gamma|\upsilon \Vdash_{ao} \omega$ ***si y sólo si*** $(\Gamma \nVdash_d \upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma \cup \{\omega\} \Vdash_d \upsilon)$.

No explicitamos aquí su demostración dado que ésta no es más que la invocación de la definición de la inferencia abductiva ordinaria s-s plana a partir de la correspondiente deducción singular junto con las mencionadas propiedades estructurales de ambas.

Con esta opción notacional, las reglas estructurales más interesantes que satisface esta última relación inferencial son:

XI.1- ***Reflexividad condicionada del objeto del problema en la solución [NP:ao]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash_{ao} \omega}{\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash_{ao} \upsilon}\ .$$

XI.2- ***Reflexividad condicionada de la solución en el objeto del problema [NP:ao]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash_{ao} \omega}{\bar{\Gamma}|\omega \Vdash_{ao} \omega}\,.$$

XI.3- ***Monotonía cauta en la teoría-base [NP:ao]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash_{ao} \omega;\ \bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\upsilon \Vdash_{ao} \varphi}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\upsilon \Vdash_{ao} \omega}\,.$$

XI.4- ***Transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP:ao]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\upsilon \Vdash_{ao} \omega;\ \bar{\Gamma}|\omega \Vdash_{ao} \varphi}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\upsilon \Vdash_{ao} \varphi}\,.$$

XI.5- ***Corte en la teoría-base [NP:ao]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \cup \{\varphi\}|\upsilon \Vdash_{ao} \omega;\ \bar{\Gamma}|\varphi \Vdash_{ao} \omega}{\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash_{ao} \omega}\,.$$

XI.6- ***Permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP:ao]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \cup \{\varphi\}|\upsilon \Vdash_{ao} \omega;\ \bar{\Gamma} \cup \{\omega\}|\upsilon \Vdash_{ao} \psi}{\bar{\Gamma} \cup \{\omega\}|\upsilon \Vdash_{ao} \varphi}\,.$$

De manera semejante, las reglas ‘mixtas’ serían:

XI.7- ***Monotonía cauta en la teoría-base (condicionada por la inferencia mediadora) [NP:ao]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash_{ao} \omega;\ \bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta} \nVdash_{d} \upsilon}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\upsilon \Vdash_{ao} \omega}\,.$$

XI.8- ***Corte en la teoría-base (condicionado por la inferencia mediadora) [NP:ao]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\upsilon \Vdash\!\vdash_{ao} \omega;\ \bar{\Gamma} \cup \{\omega\} \Vdash_d \upsilon}{\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash\!\vdash_{ao} \omega}\ .$$

XI.9- ***Fortalecimiento cauto del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora [NP:ao]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash\!\vdash_{ao} \omega;\ \{\psi\} \Vdash_d \upsilon;\ \bar{\Gamma} \cup \{\omega\} \Vdash_d \psi}{\bar{\Gamma}|\psi \Vdash\!\vdash_{ao} \omega}\ .$$

XI.10- ***Debilitamiento cauto del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP:ao]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash\!\vdash_{ao} \omega;\ \{\upsilon\} \Vdash_d \psi;\ \bar{\Gamma} \nVdash_d \psi}{\bar{\Gamma}|\psi \Vdash\!\vdash_{ao} \omega}\ .$$

XI.11- ***Cambio por equivalencia del objeto del problema [NP:ao]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash\!\vdash_{ao} \omega;\ \{\upsilon\} \Vdash_d \psi;\ \{\psi\} \Vdash_d \upsilon;\ \bar{\Gamma} \neq \{\upsilon\}}{\bar{\Gamma}|\psi \Vdash\!\vdash_{ao} \omega}\ .$$

XI.12- ***Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora [NP:ao]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash\!\vdash_{ao} \omega;\ \{\varphi\} \Vdash_d \omega}{\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash\!\vdash_{ao} \varphi}\ .$$

XI.13- ***Debilitamiento cauto de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP:ao]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash\!\vdash_{ao} \omega;\ \bar{\Gamma} \cup \{\varphi\} \Vdash_d \upsilon}{\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash\!\vdash_{ao} \varphi}\ .$$

Como se habrá podido apreciar, entre las anteriores reglas 'puras' [NP:ao] no aparece la análoga a la de corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s6]. El motivo es que al pasar a términos conjuntistas la expresión que inicialmente está en términos de subfamilias, el resultado que se obtiene es una regla 'explosiva' y, por tanto, carente de interés. Por otro lado, atendiendo a las especiales características que se derivan de las propiedades que satisface la inferencia abductiva ordinaria s-s plana cuya relación mediadora es la deducción clásica[14], podemos presentar nuevas reglas que satisface esta relación de consecuencia lógica las cuales tienen la peculiaridad de incluir entre sus condiciones algún enunciado inferencial negativo cuyo relator es el correspondiente a la relación mediada:

XI.14- ***Irreflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP:ao]:***

$$\frac{}{\bar{\Gamma} \cup \{\upsilon\}|\upsilon \nVdash_{ao} \omega}\ .$$

XI.15- ***Irreflexividad condicionada de la teoría-base en la solución [NP:ao]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \cup \{\delta\}|\upsilon \Vvdash_{ao} \omega}{\bar{\Gamma} \cup \{\delta\}|\upsilon \nVdash_{ao} \delta}\ .$$

XI.16- ***Irreflexividad condicionada de la solución en la teoría-base [NP:ao]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\upsilon \Vvdash_{ao} \omega}{\bar{\Gamma} \cup \{\omega\}|\upsilon \nVdash_{ao} \varphi}\ .$$

XI.17- ***Consistencia de la teoría-base [NP:ao]:***

$$\frac{}{\bar{\Gamma} \cup \{\widetilde{\bot}\}|\upsilon \nVdash_{ao} \omega}\ .$$

[14] En particular, a la posibilidad de hacer una presentación de ambas en la que sus premisas sean meros conjuntos de fórmulas en los que no resulten relevantes ni la cantidad de ocurrencias de una cada una de ellas ni su posición relativa, y también gracias a que la deducción clásica satisface las propiedades estructurales de reflexividad y contracción por la derecha así como a otras propiedades metateóricas tales como la inadmisibilidad de paraconsistencias y la invariabilidad de la clase de modelos de un conjunto de fórmulas tras la adición de tautologías.

XI.18- ***No validez del objeto del problema [NP:ao]:***

$$\frac{}{\bar{\Gamma}|\widetilde{\top} \nVdash_{ao} \omega}\ .$$

XI.19- ***No validez de la solución [NP:ao]:***

$$\frac{}{\bar{\Gamma}|\upsilon \nVdash_{ao} \widetilde{\top}}\ .$$

No lo hacemos aquí, pero se puede probar que cada una de estas reglas satisface la caracterización en términos de modelos que se ha dado de la relación inferencial abductiva ordinaria s-s plana cuya relación de consecuencia mediadora es la deducción singular.

Capítulo 5

Análisis estructural de otras formas de abducción

En este trabajo queremos también abordar en profundidad el análisis estructural de distintos tipos de inferencia abductiva ordinaria p-p (como veremos en las siguientes secciones, pero en cierto sentido su estudio puede apoyarse sobre el que hicimos en las secciones del capítulo anterior y el que afrontaremos en ésta). Recordemos que se mantienen el criterio de omitir la indicación de la aridad de la relación inferencial mediada, puesto que en todos ellos se tratará de una relación ternaria.

5.1. Relación de consecuencia lógica mediada p-p justificativa

Nuevamente comenzamos con una noción más básica que aquélla que al final de este capítulo permitirá modelizar la nuestra de abducción ordinaria p-p plana, y que a su vez es estructuralmente compatible con ésta: la relación de consecuencia lógica mediada p-p justificativa. Además, tal como ocurrió en el caso s-s ésta será el tipo de relación inferencial básica, a partir del cual iremos generando nuevos conceptos mediante la adición de nuevas característica (esta forma de proceder permite también que podamos aquilatar cuál es la influencia que cada condición tiene sobre las propiedades de los distintos tipos de inferencia abductiva ordinaria p-p[1]).

[1] Digamos que viene a ser un proceso de deconstrucción que nos permite conocer el 'rol' de cada uno de los 'componentes'.

Definición 150 (Relación de consecuencia lógica mediada p-p justificativa)**.**
Una relación de consecuencia lógica mediada p-p $\Longrightarrow_m^{**}$ *es justificativa respecto de una relación inferencial mediadora singular* $\Longrightarrow$ *cuando se satisface que:*

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \textit{ si y sólo si } (\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon).$$

Las relaciones de consecuencia lógica mediadas p-p justificativas pueden satisfacer, entre otras, algunas de las reglas estructurales que seguidamente se enumeran:

XII.1- ***Vacuidad condicionada de la solución [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \langle\ \rangle}\ .$$

XII.2- ***Reflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s7]:***

$$\frac{}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Delta \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

XII.3- ***Reflexividad condicionada del objeto del problema en la teoría-base [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

XII.4- ***Reflexividad del objeto del problema en la solución [NP-s7]:***

$$\frac{}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Upsilon \cdot \Lambda}\ .$$

XII.5- ***Reflexividad de la solución en el objeto del problema [NP-s7]:***

$$\frac{}{\Gamma|\Delta \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda}\ .$$

XII.6- ***Reflexividad condicionada de la solución en el objeto del problema [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Psi}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Psi}\ .$$

XII.7- ***Ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Phi}\ .$$

XII.8- ***Monotonía en la teoría-base [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

XII.9- ***Monotonía cauta en el objeto del problema [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Gamma | \Delta \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}{\Gamma | \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

XII.10- ***Monotonía en la solución [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Lambda}{\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda}\ .$$

XII.11- ***Monotonía homogénea en la teoría-base y el objeto del problema [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

XII.12- ***Monotonía homogénea en el objeto del problema y la solución [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Lambda}{\Gamma | \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda}\ .$$

XII.13- ***Monotonía cauta no homogénea en el objeto del problema y la solución [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Lambda;\ \Gamma | \Xi \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}{\Gamma | \Upsilon \cdot \Xi \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Phi \cdot \Lambda}\ .$$

XII.14- ***Transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda;\ \Gamma | \Xi \cdot \Omega \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}{\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda}\ .$$

XII.15- ***Transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s7][2]:***

$$\frac{\Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Pi \cdot \Omega \cdot \Theta;\ \Gamma | \Xi \cdot \Omega \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}{\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Pi \cdot \Phi \cdot \Sigma}\ .$$

[2] Su nombre es más ilustrativo de una clase de casos particulares de la anterior regla que ocurren cuando: $\Delta \doteqdot \Lambda \doteqdot \Xi \doteqdot \Psi \doteqdot \langle\ \rangle$:

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Gamma | \Omega \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}{\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}\ .$$

XII.16- ***Corte en la teoría-base [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Gamma \cdot \Lambda | \Delta \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

XII.17- ***Corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Gamma \cdot \Lambda | \Omega \Longrightarrow_m^{**} \Delta}{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Delta}\ .$$

XII.18- ***Corte directo en la teoría-base y expansión en la solución [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Psi}{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Psi}\ .$$

XII.19- ***Corte directo en la teoría-base y expansiones homogéneas en el objeto del problema y la solución [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Xi}{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi}\ .$$

XII.20- ***Corte directo en el objeto del problema [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma | \Upsilon \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

XII.21- ***Corte en la solución [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda;\ \Gamma | \Delta \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Lambda}{\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Lambda}\ .$$

XII.22- ***Corte directo en la solución y expansión en la teoría-base [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Xi}\ .$$

XII.23- ***Contracción por la derecha considerando la teoría-base y la solución conjuntamente [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Phi}\ .$$

XII.24- ***Contracción por la izquierda considerando la teoría-base y la solución conjuntamente [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi}{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi}\ .$$

XII.25- ***Permutación entre la teoría-base y la solución [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Xi \cdot \Phi}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi}\ .$$

XII.26- ***Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

XII.27- ***Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

XII.28- ***Contracción por la derecha en el objeto del problema [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

XII.29- ***Contracción por la izquierda en el objeto del problema [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

XII.30- ***Contracción por la derecha en la solución [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda}\ .$$

XII.31- ***Contracción por la izquierda en la solución [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}\ .$$

XII.32- ***Permutación en la teoría-base [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

XII.33- ***Permutación en el objeto del problema [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

XII.34- ***Permutación en la solución [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda}\,.$$

Proposición 151.

Si una relación inferencial mediada p-p es justificativa entonces satisface las anteriores propiedades [NP-s7] si la correspondiente relación inferencial mediadora plural tiene las propiedades estructurales [NP-s2] que en cada una de ellas se indican.

XII.1- Vacuidad condicionada de la solución [NP-s7]: permutación en las premisas [NP-s2].

XII.2- Reflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s7]: reflexividad [NP-s2].

XII.3- Reflexividad condicionada del objeto del problema en la teoría-base [NP-s7]: monotonía en las premisas [NP-s2].

XII.4- Reflexividad del objeto del problema en la solución [NP-s7]: reflexividad [NP-s2].

XII.5- Reflexividad de la solución en el objeto del problema [NP-s7]: reflexividad [NP-s2].

XII.6- Reflexividad condicionada de la solución en el objeto del problema [NP-s7]: reflexividad [NP-s2] y monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2].

XII.7- Ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s7]: monotonía en las premisas [NP-s2] y permutación en las premisas [NP-s2].

XII.8- Monotonía en la teoría-base [NP-s7]: monotonía en las premisas [NP-s2].

XII.9- Monotonía cauta en el objeto del problema [NP-s7]: monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2].

XII.10- Monotonía en la solución [NP-s7]: monotonía en las premisas [NP-s2].

XII.11- Monotonía homogénea en la teoría-base y el objeto del problema [NP-s7]: monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2].

XII.12- Monotonía homogénea en el objeto del problema y la solución [NP-s7]: monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2].

XII.13- Monotonía cauta no homogénea en el objeto del problema y la solución [NP-s7]: monotonía no homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2].

XII.14- Transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s7]: transitividad [NP-s2] y permutación en las premisas [NP-s2].

XII.15- Transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s7]: transitividad [NP-s2] y permutación en las premisas [NP-s2].

XII.16- Corte en la teoría-base [NP-s7]: transitividad [NP-s2b] y contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XII.17- Corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s7]: transitividad [NP-s2b] y contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XII.18- Corte directo en la teoría-base y expansión en la solución [NP-s7]: permutación en las premisas [NP-s2].

XII.19- Corte directo en la teoría-base y expansiones homogéneas en el objeto del problema y la solución [NP-s7]: monotonía no homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2] y contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XII.20- Corte directo en el objeto del problema [NP-s7]: corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XII.21- Corte en la solución [NP-s7]: corte en las premisas [NP-s2].

XII.22- Corte directo en la solución y expansión en la teoría-base [NP-s7]: permutación en las premisas [NP-s2].

XII.23- Contracción por la derecha considerando la teoría-base y la solución conjuntamente [NP-s7]: contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XII.24- Contracción por la izquierda considerando la teoría-base y la solución conjuntamente [NP-s7]: contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XII.25- Permutación entre la teoría-base y la solución [NP-s7]: permutación en las premisas [NP-s2].

XII.26- Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s7]: contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XII.27- Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s7]: contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XII.28- Contracción por la derecha en el objeto del problema [NP-s7]: corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XII.29- Contracción por la izquierda en el objeto del problema [NP-s7]: corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XII.30- Contracción por la derecha en la solución [NP-s7]: contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XII.31- Contracción por la izquierda en la solución [NP-s7]: contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XII.32- Permutación en la teoría-base [NP-s7]: permutación en las premisas [NP-s2].

XII.33- Permutación en el objeto del problema [NP-s7]: permutación en las conclusiones [NP-s2].

XII.34- Permutación en la solución [NP-s7]: permutación en las premisas [NP-s2].

Demostración.

XII.1- *Vacuidad condicionada de la solución [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \langle\ \rangle}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Lambda \cdot \langle\ \rangle \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de la precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la permutación en las premisas [NP-s2].

XII.2- *Reflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s7]:*

$$\frac{}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Delta \Longrightarrow_m^{**} \Omega} \cdot$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Delta} \cdot$$

La postcondición se tiene si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la reflexividad [NP-s2].

XII.3- *Reflexividad condicionada del objeto del problema en la teoría-base [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega} \cdot$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow_m^{**} \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi} \cdot$$

La postcondición se tiene a partir de la precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la monotonía en las premisas [NP-s2].

XII.4- *Reflexividad del objeto del problema en la solución [NP-s7]:*

$$\frac{}{\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Upsilon \cdot \Lambda} \cdot$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Upsilon \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon} \cdot$$

La postcondición se tiene si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la reflexividad [NP-s2].

XII.5- *Reflexividad de la solución en el objeto del problema [NP-s7]:*

$$\frac{}{\Gamma | \Delta \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda} \cdot$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Delta} \cdot$$

La postcondición se tiene si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la reflexividad [NP-s2].

XII.6- *Reflexividad condicionada de la solución en el objeto del problema [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Delta \cdot \Psi}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Delta \cdot \Psi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow^{*} \Upsilon \cdot \Lambda}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow^{*} \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda}\ .$$

La postcondición se deriva a partir de la precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la reflexividad [NP-s2] y la monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2].

XII.7- *Ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Lambda \cdot \Phi \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de la precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la monotonía en las premisas [NP-s2] y la permutación en las premisas [NP-s2].

XII.8- *Monotonía en la teoría-base [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de la precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la monotonía en las premisas [NP-s2].

XII.9- *Monotonía cauta en el objeto del problema [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Gamma|\Delta \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon \cdot \Lambda;\ \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Delta}{\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda}\ .$$

La postcondición se deriva a partir de las dos precondiciones si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2].

XII.10- *Monotonía en la solución [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de la precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la monotonía en las premisas [NP-s2].

XII.11- *Monotonía homogénea en la teoría-base y el objeto del problema [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Psi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi}\ .$$

La postcondición se deriva a partir de la precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2].

XII.12- *Monotonía homogénea en el objeto del problema y la solución [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Lambda}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Psi}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi}\ .$$

La postcondición se deriva a partir de la precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2].

XII.13- *Monotonía cauta no homogénea en el objeto del problema y la solución [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Lambda;\ \Gamma|\Xi \Longrightarrow_m^{**} \Phi}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Xi \cdot \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Phi \cdot \Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Psi;\ \Gamma \cdot \Phi \Longrightarrow^* \Xi}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Phi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Xi \cdot \Psi}\ .$$

La postcondición se deriva a partir de las precondiciones si $\Longrightarrow^*$ satisface la monotonía no homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2].

XII.14- *Transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Delta\cdot\Omega\cdot\Lambda;\ \Gamma|\Xi\cdot\Omega\cdot\Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda}\ .$$

Por la definición de $\Longrightarrow^{**}_{m}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Omega\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Phi \Longrightarrow^{*} \Xi\cdot\Omega\cdot\Psi}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de las precondiciones si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la transitividad [NP-s2] y la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XII.15- *Transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s7]:*

$$\frac{\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Pi\cdot\Omega\cdot\Theta;\ \Gamma|\Xi\cdot\Omega\cdot\Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}{\Delta\cdot\Gamma\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Pi\cdot\Phi\cdot\Sigma}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Delta\cdot\Lambda\cdot\Pi\cdot\Omega\cdot\Theta \Longrightarrow^{**}_{m} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Phi \Longrightarrow^{*} \Xi\cdot\Omega\cdot\Psi}{\Delta\cdot\Gamma\cdot\Lambda\cdot\Pi\cdot\Phi\cdot\Sigma \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de las precondiciones si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la transitividad [NP-s2] y la permutación en las premisas [NP-s2].

XII.16- *Corte en la teoría-base [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Gamma\cdot\Lambda|\Delta \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}{\Gamma\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Delta}{\Gamma\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de las precondiciones si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la transitividad [NP-s2b] y la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XII.17- *Corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Gamma\cdot\Lambda|\Omega \Longrightarrow^{**}_{m} \Delta}{\Gamma\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Delta}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\Delta \Longrightarrow^{*} \Omega}{\Gamma\cdot\Lambda\cdot\Delta \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de las precondiciones si $\Longrightarrow^*$ satisface la transitividad [NP-s2b] y la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XII.18- *Corte directo en la teoría-base y expansión en la solución [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Psi}{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Delta \cdot \Psi} \,.$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Omega \cdot \Psi \Longrightarrow^* \Upsilon}{\Gamma \cdot \Lambda \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow^* \Upsilon} \,.$$

La postcondición se tiene a partir de la precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la permutación en las premisas [NP-s2].

XII.19- *Corte directo en la teoría-base y expansiones homogéneas en el objeto del problema y la solución [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Xi}{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi} \,.$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Omega \cdot \Xi \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Psi}{\Gamma \cdot \Lambda \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi} \,.$$

La postcondición postcondición se tiene a partir de la precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la monotonía no homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2] y la contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XII.20- *Corte directo en el objeto del problema [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_m \Omega}{\Gamma | \Upsilon \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_m \Omega} \,.$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda}{\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Lambda} \,.$$

La postcondición se tiene a partir de la precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la propiedad de corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XII.21- *Corte en la solución [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Delta\cdot\Lambda;\ \Gamma|\Delta \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Omega\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Delta}{\Gamma\cdot\Omega\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de las precondiciones si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la propiedad de corte en las premisas [NP-s2].

XII.22- *Corte directo en la solución y expansión en la teoría-base [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Delta\cdot\Xi}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Xi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Xi \Longrightarrow^{*} \Upsilon}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Xi \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de la precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la propiedad de permutación en las premisas [NP-s2].

XII.23- *Contracción por la derecha considerando la teoría-base y la solución conjuntamente [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Delta\cdot\Phi}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Phi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Phi \Longrightarrow^{*} \Upsilon}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Phi \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de la precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XII.24- *Contracción por la izquierda considerando la teoría-base y la solución conjuntamente [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Delta\cdot\Phi}{\Gamma\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Delta\cdot\Phi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Phi \Longrightarrow^{*} \Upsilon}{\Gamma\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Phi \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de la precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XII.25- *Permutación entre la teoría-base y la solución [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Xi \cdot \Phi}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi}\,.$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Omega \cdot \Xi \cdot \Phi \Longrightarrow^* \Upsilon}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi \Longrightarrow^* \Upsilon}\,.$$

La postcondición se tiene a partir de la precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la permutación en las premisas [NP-s2].

XII.26- *Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\,.$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon}\,.$$

La postcondición se sigue a partir de la precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XII.27- *Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\,.$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon}\,.$$

La postcondición se sigue a partir de la precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XII.28- *Contracción por la derecha en el objeto del problema [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma | \Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\,.$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}{\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda}\,.$$

La postcondición se sigue a partir de la precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la propiedad de corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XII.29- *Contracción por la izquierda en el objeto del problema [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_m \Omega}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_m \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}{\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}\ .$$

La postcondición se sigue a partir de la precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la propiedad de corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XII.30- *Contracción por la derecha en la solución [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se sigue a partir de la precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XII.31- *Contracción por la izquierda en la solución [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se sigue a partir de la precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XII.32- *Permutación en la teoría-base [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega}{\Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon}{\Gamma \cdot \Phi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se sigue a partir de la precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la permutación en las premisas [NP-s2].

XII.33- *Permutación en el objeto del problema [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda\Longrightarrow^{**}_{m}\Omega}{\Gamma|\Upsilon\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda\Longrightarrow^{**}_{m}\Omega}\,.$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Omega\Longrightarrow^{*}\Upsilon\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda}{\Gamma\cdot\Omega\Longrightarrow^{*}\Upsilon\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda}\,.$$

La postcondición se sigue a partir de la precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la permutación en las conclusiones [NP-s2].

XII.34- *Permutación en la solución [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon\Longrightarrow^{**}_{m}\Omega\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda}{\Gamma|\Upsilon\Longrightarrow^{**}_{m}\Omega\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda}\,.$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Omega\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda\Longrightarrow^{*}\Upsilon}{\Gamma\cdot\Omega\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda\Longrightarrow^{*}\Upsilon}\,.$$

La postcondición se tiene a partir de la precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la permutación en las premisas [NP-s2].

■

Proposición 152.
Cada una de las anteriores versiones de las reglas [NP-s7] expresadas mediante la condición mediadora cumple que en el conjunto formado por sus precondiciones y sus postcondiciones no hay al menos dos condiciones estructuralmente incompatibles entre sí e igualmente ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar condiciones incompatibles.

Su prueba es elemental (idéntica a la de las reglas NP-s1).

También en esta ocasión algunas de las anteriores reglas se pueden derivar a partir de otras; veamos a modo de ejemplo dos de tales derivaciones:

Proposición 153.
Una relación de consecuencia lógica mediada p-p que satisfaga la reflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s7] y la transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s7], necesariamente satisface la propiedad de ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s7].

Demostración. Partimos de la precondición de la ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s7] y a continuación anotamos el resultado de aplicar la propiedad estructural que en cada línea se indica entre paréntesis:

1. $\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega$ (hipótesis).

2. $\Omega|\Omega \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi$ (por reflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s7] incondicionalmente).

3. $\Gamma{\cdot}\Omega{\cdot}\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi$ (por transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s7] sobre 1 y 2).

Y esto último coincide con la ampliabilidad de la teoría-base con la solución [NP-s3].

$\blacksquare$

Proposición 154.
Una relación de consecuencia lógica mediada p-p[3] *que satisfaga la reflexividad del objeto del problema en la solución [NP-s7] y la transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s7], necesariamente satisface la propiedad de monotonía en la teoría-base [NP-s7].*

Demostración. Partimos de la precondición de la monotonía en la teoría-base [NP-s7] y a continuación anotamos el resultado de aplicar la propiedad estructural que en cada línea se indica entre paréntesis:

1. $\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega$ (hipótesis).

2. $\Delta|\Omega \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega$ (por reflexividad del objeto del problema en la solución [NP-s7] incondicionalmente).

3. $\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega$ (por transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s7] sobre 1 y 2).

[3] Remarcamos el hecho de que al ser una derivación no hemos hecho uso de la condición de que la relación mediada sea justificativa, puesto que esta cualidad se enuncia en relación a su relación inferencial mediadora.

Y esto último coincide con la monotonía en la teoría-base [NP-s7].

■

Las relaciones inferenciales del presente tipo pueden también satisfacer, entre otras, algunas de las reglas estructurales mixtas que seguidamente se enumeran:

XII.35- ***Monotonía cauta en el objeto del problema (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Delta}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

XII.36- ***Corte en la teoría-base (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Delta}{\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

XII.37- ***Corte en la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda;\ \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Delta}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Lambda}\ .$$

XII.38- ***Debilitamiento del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Upsilon \Longrightarrow^{*} \Psi}{\Gamma|\Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

XII.39- ***Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s7]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Phi \Longrightarrow^{*} \Omega}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}\ .$$

Proposición 155.

Si una relación inferencial mediada p-p es resolutiva entonces cada una de las anteriores propiedades estructurales 'mixtas' [NP-s7] cumple que en el conjunto formado por sus precondiciones y sus postcondición no hay al menos dos condiciones estructuralmente incompatibles entre sí. Además, la relación inferencial mediada p-p resolutiva satisface dichas propiedades 'mixtas' [NP-s7] si la correspondiente relación inferencial mediadora plural tiene las propiedades estructurales [NP-s2] que en cada una de ellas se indican.

XII.35- Monotonía cauta en el objeto del problema (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s7]: monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2].

XII.36- Corte en la teoría-base (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s7]: transitividad [NP-s2b] y la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XII.37- Corte en la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s7]: transitividad [NP-s2b] y la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XII.38- Debilitamiento del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s7]: transitividad [NP-s2c].

XII.39- Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s7]: transitividad [NP-s2b].

Demostración.

XII.35- *Monotonía cauta en el objeto del problema (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon\cdot\Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Delta}{\Gamma|\Upsilon\cdot\Delta\cdot\Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Lambda;\ \Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Delta}{\Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Delta\cdot\Lambda}\ .$$

La postcondición se sigue a partir de las precondiciones si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2].

XII.36- *Corte en la teoría-base (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Gamma\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Delta}{\Gamma\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Delta}{\Gamma\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de las precondiciones si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la transitividad [NP-s2b] y la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XII.37- *Corte en la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega\cdot\Delta\cdot\Lambda;\ \Omega\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Delta}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega\cdot\Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Omega\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Delta}{\Gamma\cdot\Omega\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición se tiene a partir de las precondiciones si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la transitividad [NP-s2b] y la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XII.38- *Debilitamiento del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Upsilon \Longrightarrow^{*} \Psi}{\Gamma|\Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Upsilon \Longrightarrow^{*} \Psi}{\Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Psi}\ .$$

La postcondición de la regla se tiene a partir de las precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s2c].

XII.39- *Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s7]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Phi \Longrightarrow^{*} \Omega}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Phi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa respecto de $\Longrightarrow$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon; \Phi \Longrightarrow^{*} \Omega}{\Gamma\cdot\Phi \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La postcondición de la regla se tiene a partir de las precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s2b].

■

Proposición 156.

Cada una de las anteriores versiones de las reglas 'mixtas' [NP-s7] expresadas mediante la condición mediadora cumple que en el conjunto formado por sus precondiciones y sus postcondiciones no hay al menos dos condiciones estructuralmente incompatibles entre sí e igualmente ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar condiciones incompatibles.

Su prueba es nuevamente elemental (idéntica a la de las reglas NP-s1).

Veamos ahora el correspondiente teorema de representación para este tipo de relación inferencial:

Teorema 157 (Teorema de representación mediante propiedades [NP-s2] de la relación inferencial mediada p-p que es justificativa respecto de la deducción plural)**.** *La reflexividad [NP-s2] y la transitividad [NP-s2] de la relación inferencial mediadora plural son condiciones suficientes de una relación de consecuencia lógica mediada p-p, cuya primera componente es una subfamilia arbitraria, que es justificativa respecto de la deducción plural, en el sentido de que cualquier relación inferencial mediada cuya relación inferencial mediadora y cuyas premisas sean las indicadas y que satisfaga las tres propiedades mencionadas, se puede representar como si fuese la relación mediada mencionada.*

Demostración. En esta demostración nos apoyaremos en el *teorema de representación de la relación inferencial deductiva plural [NP-s2]*. Sea $\Longrightarrow_m^{**}$ una relación de consecuencia lógica p-p justificativa que está mediada por la relación de consecuencia lógica plural $\Longrightarrow^*$. Sean Γ, Υ y Ω elementos de $SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))$.

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa tenemos que:

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \text{ si y sólo si } \Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^* \Upsilon.$$

Por otro lado, la relación inferencial mediadora es la deducción plural y, atendiendo a su su caracterización mediante modelos, sabemos que:

$$\Gamma\cdot\Omega \vDash_D \Upsilon \text{ si y sólo si } Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\bar{\Omega}) \subseteq Mod(\bar{\Upsilon}).$$

Así pues, debemos probar que:

$$\Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \text{ si y sólo si } Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\bar{\Omega}) \subseteq Mod(\bar{\Upsilon}),$$

siendo $\Longrightarrow^*$ una relación de consecuencia lógica mediadora plural que satisface las propiedades de reflexividad [NP-s2] y transitividad [NP-s2].

Hagamos $\Gamma' \doteqdot \Gamma\cdot\Omega$; aplicando propiedades conjuntistas sencillas tenemos que:

$$Mod(\bar{\Gamma}') = Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\bar{\Omega}).$$

Por lo tanto, lo que tenemos que probar se transforma en:

$$\Gamma' \Longrightarrow^{*} \Upsilon \text{ si y sólo si } Mod(\bar{\Gamma}') \subseteq Mod(\bar{\Upsilon}),$$

Y esto es justamente lo que fue probado en el *teorema de representación de la relación inferencial deductiva plural [NP-s2]* bajo las mismas condiciones que en el presente resultado.

■

5.2. Relación de consecuencia lógica mediada p-p justificativa de modo posicionalmente indiferente

Tal como hicimos en el capítulo anterior, queremos estudiar cuáles son los vínculos que existen entre las propiedades [NP-s7] que satisface la relación inferencial mediada p-p justificativa y las propiedades [NP-s2] que satisface la relación inferencial mediadora plural. Con este fin necesitamos extender algunas definiciones que ya fueron anteriormente presentadas, de modo que se considere la concatenación de la solución en una posición cualquiera de las premisas.

Usaremos las siguientes notaciones:

Definición 158 (Concatenación posicionalmente indiferente en relaciones inferenciales plurales)**.**

1. $(\Gamma \circledast \Delta \Longrightarrow^{*} \Omega) \;:\Leftrightarrow (\forall \Sigma_1, \Sigma_2((\Gamma \doteqdot \Sigma_1 \cdot \Sigma_2) \Rightarrow (\Sigma_1 \cdot \Delta \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow^{*} \Omega))).$

2. $(\Gamma \circledcirc \Delta \Longrightarrow^{*} \Omega) \;:\dot{\Leftrightarrow} (\dot{\exists} \Sigma_1, \Sigma_2((\Gamma \doteqdot \Sigma_1 \cdot \Sigma_2) \Rightarrow (\Sigma_1 \cdot \Delta \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow^{*} \Omega))).$

La concatenación de una subfamilia cualquiera ‘en la cola’, ‘en la cabeza’ o ‘en el cuerpo’ son tres casos que son implicados por la posibilidad prevista en la primera de las definiciones que acabamos de presentar (así pues, dichos casos son más generales que la posibilidad citada). A su vez los tres casos mencionados (la concatenación ‘en la cola’, ‘en la cabeza’ o ‘en el cuerpo’) implican a la posibilidad prevista en la segunda de las definiciones que acabamos de presentar (así pues, dichos casos son más restringidos que la última posibilidad citada).

Esta definición nos permite presentar un nuevo tipo de relación inferencial:

Definición 159 (Relación de consecuencia lógica mediada p-p justificativa de modo posicionalmente indiferente)**.**
Una relación de consecuencia lógica mediada p-p $\Longrightarrow_m^{**}$ *es justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de una relación inferencial mediadora plural* $\Longrightarrow^*$ *cuando se satisface que:*

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \textit{ si y sólo si } (\Gamma \circledast \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon).$$

Todas las propiedades [NP-s7] que fueron presentadas, tanto las 'puras' como las 'mixtas', se mantienen sin alteraciones con esta nueva exigencia (no desarrollamos explícitamente aquí la demostración porque coincide con la dada aplicando en cada condición de cada regla la definición en la que se ha introducido el símbolo $\circledast$ y, a lo sumo, añadiendo la propiedad de permutación en las premisas [NP-s2] –dado que lo único que puede cambiar en este caso es la ubicación de la subfamilia de fórmulas que antes se concatenaba en todos los casos 'en la cola'–). Nuevamente se trata de una versión sujeta a condiciones más fuertes que la dada en la sección anterior (de hecho aquélla puede verse como un caso particular de ésta). La razón de introducir estas nociones es que ahora podemos justificar en el sentido recíproco al que ya fue presentado los vínculos existentes entre las propiedades de la relación inferencial mediada y la mediadora:

Proposición 160.
Si una relación inferencial mediada p-p $\Longrightarrow_m^{**}$ *es justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de* $\Longrightarrow^*$ *y satisface la reflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s7], la transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s7] y la contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s7], entonces su relación inferencial mediadora plural* $\Longrightarrow^*$ *es una relación de consecuencia lógica de tipo RTCd [NP-s2].*

Demostración. Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de $\Longrightarrow^*$ tenemos que las antecitadas propiedades de la relación mediada se 'traducen' en las siguientes propiedades de la relación mediadora –véase la figura 1 (5.2)–:

1. *Reflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s7]:*

$$\frac{}{(\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda) \circledast \Omega \Longrightarrow^* \Delta}\ .$$

2. *Transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s7]:*

$$\frac{\begin{array}{l}(\Delta \cdot \Lambda) \circledast (\Pi \cdot \Omega \cdot \Theta) \Longrightarrow^{**}_{m} \Upsilon; \\ \Gamma \circledast \Phi \Longrightarrow^{*} \Xi \cdot \Omega \cdot \Psi\end{array}}{(\Delta \cdot \Gamma \cdot \Lambda) \circledast (\Pi \cdot \Phi \cdot \Sigma) \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

3. *Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s7]:*

$$\frac{(\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda) \circledast \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon}{(\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda) \circledast \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

Para probar que la relación inferencial $\Longrightarrow^{*}$ posee la reflexividad [NP-s2] hemos de establecer que ella satisface incondicionalmente $\Sigma_1 \cdot \Upsilon \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow^{*} \Upsilon$, lo cual está garantizado sin precondiciones por la identidad del objeto del problema y la solución [NP-s7] (para ello basta con hacer $\Gamma \doteqdot \Sigma_1$, $\Lambda \doteqdot \Sigma_2$ y $\Omega \doteqdot \langle\ \rangle$).

Para probar que la relación inferencial posee la transitividad [NP-s2], partimos de sus precondiciones ($\Gamma \Longrightarrow^{*} \Xi \cdot \Omega \cdot \Psi$ y $\Sigma_1 \cdot \Omega \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow^{*} \Upsilon$) y justificamos que bajo ese supuesto necesariamente se cumple su postcondición ($\Sigma_1 \cdot \Gamma \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow^{*} \Upsilon$). Para ese fin, basta con hacer $\Delta \doteqdot \Sigma_1$, $\Lambda \doteqdot \Sigma_2$ y $\Phi \doteqdot \Pi \doteqdot \Theta \doteqdot \langle\ \rangle$ para ver que esto está garantizado por la transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s7].

De nuevo, para probar que dicha relación inferencial posee la contracción por la derecha [NP-s2] partimos de su precondición ($\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon$) y justificamos que bajo ese supuesto necesariamente se cumple su postcondición ($\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon$). Para ese fin, basta con hacer $\Omega \doteqdot \langle\ \rangle$ para ver que esto está garantizado por la contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s7]. ■

La anterior proposición hace evidente la posibilidad de enunciar un teorema de representación para la misma relación inferencial que allí se maneja, usando en este nuevo teorema propiedades [NP-s7].

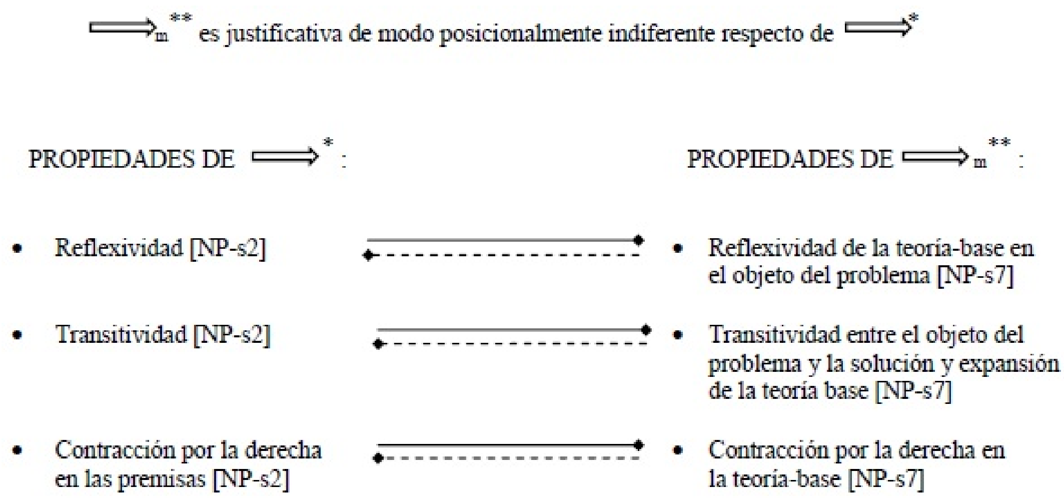

Fig. 1 (5.2): Vínculos entre reglas [NP-s2] de la relación inferencial mediadora y reglas [NP-s7] de la relación inferencial mediada p-p si esta última es justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de aquélla.

Teorema 161 (Teorema de representación mediante propiedades [NP-s7] de la relación inferencial mediada p-p que es justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de la deducción plural)**.**
La reflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s7] y la transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s7] son condiciones suficientes de una relación de consecuencia lógica mediada p-p, cuya primera componente es una subfamilia arbitraria, que es justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de la deducción plural, en el sentido de que cualquier relación inferencial mediada cuya relación inferencial mediadora y cuyas premisas sean las indicadas y que satisfaga las tres propiedades mencionadas, se puede representar como si fuese la relación mediada mencionada.

Demostración. Sea $\Longrightarrow_m^{**}$ una relación de consecuencia lógica p-p que tiene como primera componente una subfamilia arbitraria y que es justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de la relación de consecuencia lógica singular $\Longrightarrow^{*}$. Sean Γ un elemento de $SUBFAM_{\mathfrak{E}}(FOR(\mathcal{L}))$ e Υ y Ω elementos de $FOR(\mathcal{L})$.

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de

$\Longrightarrow^*$ tenemos que:

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \text{ si y sólo si } (\Gamma \circledast \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon).$$

Por otro lado, la relación inferencial mediadora es la deducción plural y, atendiendo a su su caracterización mediante modelos, sabemos que:

$$\Gamma \circledast \Omega \vDash_D \Upsilon \text{ si y sólo si } Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\bar{\Omega}) \subseteq Mod(\bar{\Upsilon}).$$

Así pues, debemos probar que:

$$\Gamma \circledast \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \text{ si y sólo si } Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\bar{\Omega}) \subseteq Mod(\bar{\Upsilon}),$$

siendo $\Longrightarrow^*$ una relación de consecuencia lógica mediadora plural cuya relación de consecuencia lógica mediada $\Longrightarrow_m^{**}$ satisface las propiedades de reflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP-s7] y la transitividad entre el objeto del problema y la solución y expansión de la teoría-base [NP-s7].

Pero, a tenor de la definición del símbolo $\circledast$, se infiere que $\Gamma \circledast \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon$ es equivalente a $\forall \Sigma_1, \Sigma_2((\Gamma \doteqdot \Sigma_1 \cdot \Sigma_2) \Rightarrow (\Sigma_1 \cdot \Omega \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow^* \Upsilon))$. Y haciendo $\Gamma' \doteqdot \Sigma_1 \cdot \Omega \cdot \Sigma_2$, por la aplicación de propiedades conjuntistas sencillas tenemos que:

$$Mod(\bar{\Gamma}') = Mod(\bar{\Sigma}_1) \cap Mod(\bar{\Omega}) \cap Mod(\bar{\Sigma}_2).$$

Por tanto, lo que debemos probar se transforma en:

$$(\Gamma' \Longrightarrow^* \Upsilon) \text{ si y sólo si } Mod(\bar{\Gamma}') \subseteq Mod(\bar{\Upsilon}),$$

siendo $\Longrightarrow^*$ una relación inferencial plural mediadora que satisface la 'traducción' de las antecitadas tres propiedades [NP-s7] para relaciones inferenciales mediadas p-p que son justificativas de modo posicionalmente indiferente.

Como en el anterior teorema de representación, la prueba se hace probando dos equivalencias. La demostración de la primera es idéntica a la que dimos del *teorema de representación de la relación inferencial deductiva clásica [NP-s2]* con las únicas salvedades de que cuando en la que acabamos de citar se aplica alguna de las dos propiedades [NP-s2] que aparecen en su enunciado, en esta se usará la 'traducción' de la correspondiente propiedad [NP-s7]. La demostración de la segunda es exactamente igual a la que se presentó en el último teorema de representación anterior al presente. ■

Para terminar esta sección reflexionaremos sobre la posibilidad de substituir la nueva condición de que la relación inferencial sea justificativa de modo posicionalmente indiferente por otras distintas. Se puede ver fácilmente que hay un conjunto de propiedades [NP-s7] que permiten garantizar que dicha relación inferencial es justificativa de modo posicionalmente indiferente (en esta ocasión, a diferencia de lo que ocurrió con la relación inferencial s-s análoga a la presente, bastan dos propiedades para obtener una situación en la que añadir el carácter justificativo de modo posicionalmente indiferente no altera aspecto alguno):

Proposición 162.
Si una relación inferencial mediada p-p $\Longrightarrow_m^{**}$ es justificativa respecto de $\Longrightarrow^*$ y satisface la permutación entre la teoría-base y la solución [NP-s7] y la permutación en la teoría-base [NP-s7], entonces dicha relación inferencial mediada es justificativa de modo posicionalmente indiferente respecto de la misma relación inferencial mediadora.

Demostración. Sea $\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega$ un enunciado inferencial cualquiera correspondiente a una relación de consecuencia mediada p-p ($\Longrightarrow_m^{**}$) que es justificativa respecto de $\Longrightarrow^*$ y que satisface las dos propiedades indicadas. Al ser $\Longrightarrow_m^{**}$ justificativa se satisface que $\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon$.

Existen dos posibilidades:

- Que sea $\Gamma \ddot{=} \langle\ \rangle$. En ese caso, tenemos que $\Gamma \cdot \Omega \ddot{=} \Sigma_1 \cdot \Omega \cdot \Sigma_2$ para cualesquiera $\Sigma_1 \cdot \Sigma_2 \ddot{=} \langle\ \rangle$. Es decir, se satisface que $\forall \Sigma_1, \Sigma_2((\Gamma \ddot{=} \Sigma_1 \cdot \Sigma_2) \dot{\Rightarrow} (\Sigma_1 \cdot \Omega \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow^* \Upsilon))$. Y esta última es justamente la definición de $\Gamma \circledast \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon$.

- Que sea $\Gamma \ddot{\neq} \langle\ \rangle$. En ese caso, tenemos que $\Gamma \ddot{=} \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda$ y substituyendo en el enunciado inferencial inicial correspondiente a la relación mediada obtenemos $\Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega$. Ahora, aplicando la permutación entre la teoría-base y la solución [NP-s7], se infiere: $\Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Phi$. Por tanto, para cualesquiera Σ_1 y Σ_2 tales que $\Sigma_1 \cdot \Sigma_2 \ddot{=} \Delta \cdot \Lambda$, y aplicando la permutación en la teoría-base [NP-s7], se infiere: $\Sigma_1 \cdot \Omega \cdot \Sigma_2|\Upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \Phi$. Y como $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ es justificativa, la anterior expresión es equivalente a $\Sigma_1 \cdot \Omega \cdot \Sigma_2 \cdot \Phi \Longrightarrow^* \Upsilon$.

  De todo ello se sigue que se satisface que $\forall \Sigma_1, \Sigma_2((\Gamma \ddot{=} \Sigma_1 \cdot \Sigma_2) \dot{\Rightarrow} (\Sigma_1 \cdot \Omega \cdot \Sigma_2 \Longrightarrow^* \Upsilon))$. Y esta última es justamente la definición de $\Gamma \circledast \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon$.

Por lo tanto, en ambos casos, $\Longrightarrow_m^{**}$ es justificativa de modo posicionalmente indiferente. ■

Por tanto, el teorema de representación anterior que fue probado para relaciones inferenciales mediadas p-p $\Longrightarrow_m^{**}$ que son justificativas de modo posicionalmente independientes respecto de $\Longrightarrow^*$ podría enunciarse eliminando el requisito que cualifica la propiedad de ser justificativa y, en su lugar, añadiendo las dos propiedades [NP-s7] que antes no se exigían y aquí sí, o bien habría que probar que estas dos las tiene necesariamente una relación inferencial mediada que satisfaga las condiciones del mencionado teorema.

5.3. Relación de consecuencia lógica mediada p-p resolutiva

Echando la vista atrás, nos damos cuenta que en este capítulo vamos a pasar directamente del estudio de la relación de consecuencia lógica mediada p-p justificativa de modo posicionalmente indiferente a la relación de consecuencia lógica mediada p-p resolutiva sin detenernos en el estudio de otros tipos de relaciones inferenciales mediadas p-p justificativas p-p análogos a los que fueron analizados en el caso de las relaciones inferenciales mediadas s-s. La razón está en que con lo visto en el cuarto capítulo y las dos primeras secciones de éste se puede ‘componer’ fácilmente una visión de cuál es la situación que se tendría en cada caso. Sí vamos a detenernos en la relación de consecuencia lógica mediada p-p resolutiva por cuanto es con ella con la que podremos presentar el *teorema de representación para la abducción ordinaria plural*. Comencemos pues con la definición que hará esto posible[4]:

Definición 163 (Relación de consecuencia lógica mediada p-p resolutiva)**.**
Una relación de consecuencia lógica mediada p-p $\Longrightarrow_m^{**}$ *es resolutiva respecto de*

[4] Obviamente, lo hacemos tomando en consideración cómo definimos habitualmente la abducción ordinaria p-p plana a partir de la deducción plural, pero nuestra definición pretende en este momento ser general y podría tener otros ‘modelos’; más adelante, tras la prueba del correspondiente teorema de representación, ya si nos referiremos exclusivamente al caso particular que viene dado por los dos tipos de inferencia indicados.

una relación consecuencia lógica mediadora plural $\Longrightarrow^*$ *cuando se satisface que:*

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \textit{ si y sólo si } (\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon) \;\dot{\&}\; (\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow \Upsilon).$$

En cualquier relación de consecuencia lógica mediada p-p resolutiva debe satisfacerse que $\Omega \ddot{\neq} \langle\ \rangle$, pero no es necesario añadirlo a las condiciones anteriores porque se deriva a partir de las otras que han sido impuestas.

Las relaciones de consecuencia lógica mediadas p-p resolutivas pueden satisfacer, entre otras, algunas de las reglas estructurales que seguidamente se enumeran:

XIII.1- ***Reflexividad condicionada del objeto del problema en la solución [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Delta \cdot \Upsilon \cdot \Lambda \ddot{\neq} \langle\ \rangle}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Delta \cdot \Upsilon \cdot \Lambda}\,.$$

XIII.2- ***Reflexividad condicionada de la solución en el objeto del problema [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Psi}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Psi}\,.$$

XIII.3- ***Identidad condicionada de la solución y el objeto del problema [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma|\Omega \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\,.$$

XIII.4- ***Monotonía cauta en la teoría-base [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Phi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\,.$$

XIII.5- ***Monotonía cauta en el objeto del problema [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Gamma|\Delta \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\,.$$

XIII.6- ***Monotonía en la solución [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda}\,.$$

XIII.7- ***Monotonía cauta homogénea en la teoría-base y el objeto del problema [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Phi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\,.$$

XIII.8- ***Monotonía homogénea en el objeto del problema y la solución [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Lambda}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda} \; .$$

XIII.9- ***Monotonía cauta no homogénea en el objeto del problema y la solución [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Lambda; \; \Gamma|\Xi \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Xi \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Phi \cdot \Lambda} \; .$$

XIII.10- ***Transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Delta \cdot \Omega \cdot \Lambda; \; \Gamma|\Xi \cdot \Omega \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Delta \cdot \Phi \cdot \Lambda} \; .$$

XIII.11- ***Corte en la teoría-base [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega; \; \Gamma \cdot \Lambda|\Delta \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega; \; \Delta \cdot \Lambda \ddot{\neq} \Lambda \cdot \Omega}{\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega} \; .$$

XIII.12- ***Corte directo en la teoría-base y expansión en la solución [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Psi}{\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Delta \cdot \Psi} \; .$$

XIII.13- ***Corte directo en la teoría-base y expansión homogénea en el objeto del problema y la solución [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Xi}{\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi} \; .$$

XIII.14- ***Corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega; \; \Gamma \cdot \Lambda|\Omega \Longrightarrow^{**}_{m} \Delta; \; \Delta \cdot \Lambda \ddot{\neq} \Lambda \cdot \Delta}{\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Delta} \; .$$

XIII.15- ***Corte en el objeto del problema [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega; \; \Gamma|\Upsilon \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega} \; .$$

XIII.16- ***Corte en la solución [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda; \; \Gamma|\Delta \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Lambda} \; .$$

XIII.17- ***Corte en la solución y expansión en la teoría-base [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi;\ \Omega \cdot \Xi \ddot{\neq} \langle\ \rangle}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Xi}\ .$$

XIII.18- ***Contracción por la derecha considerando la teoría-base y la solución conjuntamente [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi;\ \Omega \cdot \Phi \ddot{\neq} \langle\ \rangle}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Phi}\ .$$

XIII.19- ***Contracción por la izquierda considerando la teoría-base y la solución conjuntamente [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi;\ \Delta \cdot \Lambda \ddot{\neq} \Lambda \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi;\ \Delta \cdot \Lambda \ddot{\neq} \Lambda \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi}{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Delta \cdot \Phi}\ .$$

XIII.20- ***Permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega; \Gamma \cdot \Omega \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi;\ \Delta \ddot{\neq} \langle\ \rangle}{\Gamma \cdot \Omega \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Delta}\ .$$

XIII.21- ***Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Xi \cdot \Lambda \ddot{\neq} \Lambda \cdot \Omega}{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

XIII.22- ***Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \ddot{\neq} \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \cdot \Omega}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

XIII.23- ***Contracción por la derecha en el objeto del problema [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}{\Gamma | \Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

XIII.24- ***Contracción por la izquierda en el objeto del problema [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}{\Gamma | \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

XIII.25- ***Contracción por la derecha en la solución [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}{\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda}\ .$$

XIII.26- ***Contracción por la izquierda en la solución [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda}\,.$$

XIII.27- ***Permutación en la teoría-base [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}{\Gamma\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\,.$$

XIII.28- ***Permutación en el objeto del problema [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}{\Gamma|\Upsilon\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\,.$$

XIII.29- ***Permutación en la solución [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda}\,.$$

Proposición 164.
Si una relación inferencial mediada p-p es resolutiva entonces satisface las anteriores propiedades [NP-s8] si la correspondiente relación inferencial mediadora plural tiene las propiedades estructurales [NP-s2] que en cada una de ellas se indican.

XIII.1- Reflexividad condicionada del objeto del problema en la solución [NP-s8]: reflexividad [NP-s2].

XIII.2- Reflexividad condicionada de la solución en el objeto del problema [NP-s8]: reflexividad [NP-s2], monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2] y corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XIII.3- Identidad condicionada de la solución y el objeto del problema [NP-s8]: reflexividad [NP-s2], transitividad [NP-s2b] y contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XIII.4- Monotonía cauta en la teoría-base [NP-s8]: monotonía en las premisas [NP-s2].

XIII.5- Monotonía cauta en el objeto del problema [NP-s8]: monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2] y corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XIII.6- Monotonía en la solución [NP-s8]: monotonía en las premisas [NP-s2].

XIII.7- Monotonía cauta homogénea en la teoría-base y el objeto del problema [NP-s8]: monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2] y corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XIII.8- Monotonía homogénea en el objeto del problema y la solución [NP-s8]: monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2] y corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XIII.9- Monotonía cauta no homogénea en el objeto del problema y la solución [NP-s8]: monotonía no homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2] y corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XIII.10- Transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s8]: transitividad [NP-s2] y contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XIII.11- Corte en la teoría-base [NP-s8]: monotonía en las premisas [NP-s2], transitividad [NP-s2b] y contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XIII.12- Corte directo en la teoría-base y expansión en la solución [NP-s8]: monotonía en las premisas [NP-s2] y permutación en las premisas [NP-s2].

XIII.13- Corte directo en la teoría-base y expansión homogénea en el objeto del problema y la solución [NP-s8]: monotonía en las premisas [NP-s2], monotonía no homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2], corte directo en las conclusiones [NP-s2] y contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XIII.14- Corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s8]: monotonía en las premisas [NP-s2], transitividad [NP-s2b] y contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XIII.15- Corte en el objeto del problema [NP-s8]: corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XIII.16- Corte en la solución [NP-s8]: corte en las premisas [NP-s2].

XIII.17- Corte en la solución y expansión en la teoría-base [NP-s8]: permutación en las premisas [NP-s2].

XIII.18- Contracción por la derecha considerando la teoría-base y la solución conjuntamente [NP-s8]: contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XIII.19- Contracción por la izquierda considerando la teoría-base y la solución conjuntamente [NP-s8]: contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XIII.20- Permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP-s8]: permutación en las premisas [NP-s2].

XIII.21- Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s8]: monotonía en las premisas [NP-s2] y contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XIII.22- Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s8]: monotonía en las premisas [NP-s2] y contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XIII.23- Contracción por la derecha en el objeto del problema [NP-s8]: repetición por la derecha en las conclusiones [NP-s2] y corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XIII.24- Contracción por la izquierda en el objeto del problema [NP-s8]: monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2] y corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XIII.25- Contracción por la derecha en la solución [NP-s8]: contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XIII.26- Contracción por la izquierda en la solución [NP-s8]: contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XIII.27- Permutación en la teoría-base [NP-s8]: permutación en las premisas [NP-s2].

XIII.28- Permutación en el objeto del problema [NP-s8]: permutación en las conclusiones [NP-s2].

XIII.29- Permutación en la solución [NP-s8]: permutación en las premisas [NP-s2].

Demostración.

XIII.1- *Reflexividad condicionada del objeto del problema en la solución [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Delta\cdot\Upsilon\cdot\Lambda \ddot{\neq} \langle\ \rangle}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Delta\cdot\Upsilon\cdot\Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon;\\ \Delta\cdot\Upsilon\cdot\Lambda \ddot{\neq} \langle\ \rangle\end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Upsilon\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición se tiene si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la reflexividad [NP-s2].

XIII.2- *Reflexividad condicionada de la solución en el objeto del problema [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon\cdot\Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Delta\cdot\Psi}{\Gamma|\Upsilon\cdot\Delta\cdot\Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Delta\cdot\Psi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Lambda;\ \Gamma\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Psi \Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Lambda}{\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Delta\cdot\Lambda;\ \Gamma\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Psi \Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Delta\cdot\Lambda}\ .$$

La primera postcondición se deriva a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la propiedad de corte directo en las conclusiones [NP-s2] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); la segunda postcondición se deriva a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la reflexividad [NP-s2] y la monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2].

XIII.3- *Identidad condicionada de la solución y el objeto del problema [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}{\Gamma|\Omega \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon}{\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Omega;\ \Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Omega}\ .$$

La primera postcondición se tiene a partir de la primera y segunda precondiciones si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la transitividad [NP-s2b] y la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] (para llegar a esta conclusión podemos razonar por reducción al absurdo: supongamos que a partir de las precondiciones

$\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon$ y $\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon$ se siguiese $\Gamma \Longrightarrow^* \Omega$; entonces, por la transitividad [NP-s2b] de $\Longrightarrow^*$ sobre este supuesto y la segunda precondición obtendríamos $\Gamma \cdot \Gamma \Longrightarrow^* \Upsilon$ y aplicando la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2] de $\Longrightarrow^*$ llegaríamos a $\Gamma \Longrightarrow^* \Upsilon$, lo cual es contradictorio con la primera precondición; por lo tanto hemos de concluir $\Gamma \not\Longrightarrow^* \Omega$); por su parte, la segunda postcondición se tiene si $\Longrightarrow^*$ satisface la reflexividad [NP-s2].

XIII.4- *Monotonía cauta en la teoría-base [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Phi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \cdot \Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon; \\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Phi \Longrightarrow^* \Upsilon\end{array}}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la monotonía en las premisas [NP-s2].

XIII.5- *Monotonía cauta en el objeto del problema [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_m \Omega;\ \Gamma | \Delta \Longrightarrow^{**}_m \Omega}{\Gamma | \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_m \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Lambda;\ \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Lambda; \\ \Gamma \not\Longrightarrow^* \Delta;\ \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Delta\end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda;\ \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda}\ .$$

La primera postcondición se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la propiedad de corte directo en las conclusiones [NP-s2] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se deriva a partir de la segunda y la cuarta precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2].

XIII.6- *Monotonía en la solución [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon}{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la monotonía en las premisas [NP-s2].

XIII.7- *Monotonía cauta homogénea en la teoría-base y el objeto del problema [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Lambda|\Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_m \Omega;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_m \Phi}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_m \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \cdot \Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Psi;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Psi;\\[1em] \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Psi;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Phi \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Psi\end{array}}{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi}\ .$$

La primera postcondición se tiene a partir de la tercera precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la propiedad de corte directo en las conclusiones [NP-s2] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se deriva a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2].

XIII.8- *Monotonía homogénea en el objeto del problema y la solución [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Lambda}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Psi;\ \Gamma \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Psi}{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi;\ \Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Psi}\ .$$

La primera postcondición se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la propiedad de corte directo en las conclusiones [NP-s2] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se deriva a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la monotonía homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2].

XIII.9- *Monotonía cauta no homogénea en el objeto del problema y la solución [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon\cdot\Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Lambda;\ \Gamma|\Xi \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}{\Gamma|\Upsilon\cdot\Xi\cdot\Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Phi\cdot\Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Psi;\ \Gamma\cdot\Omega\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Psi;\\ \Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Xi;\ \Gamma\cdot\Phi \Longrightarrow^{*} \Xi\end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Xi\cdot\Psi;\ \Gamma\cdot\Omega\cdot\Phi\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Xi\cdot\Psi}\ .$$

La primera postcondición se tiene a partir de la tercera precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la propiedad de corte directo en las conclusiones [NP-s2] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se deriva a partir de la segunda y la cuarta precondiciones si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la monotonía no homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2].

XIII.10- *Transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Delta\cdot\Omega\cdot\Lambda;\ \Gamma|\Xi\cdot\Omega\cdot\Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Omega\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon;\\ \Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Xi\cdot\Omega\cdot\Psi;\ \Gamma\cdot\Phi \Longrightarrow^{*} \Xi\cdot\Omega\cdot\Psi\end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición se tiene a partir de la cuarta y segunda precondiciones si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la transitividad [NP-s2] y la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XIII.11- *Corte en la teoría-base [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Gamma\cdot\Lambda|\Delta \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Delta\cdot\Lambda \ddot{\neq} \Lambda\cdot\Omega}{\Gamma\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon;\\ \Gamma\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^{*} \Delta;\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Delta;\\ \Delta\cdot\Lambda \mathrel{\ddot{\neq}} \Lambda\cdot\Omega\end{array}}{\Gamma\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La primera postcondición se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la monotonía en las premisas [NP-s2] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); la segunda postcondición se tiene a partir de la segunda y la cuarta precondiciones si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la transitividad [NP-s2b] y la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XIII.12- *Corte directo en la teoría-base y expansión en la solución [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega\cdot\Psi}{\Gamma\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega\cdot\Delta\cdot\Psi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Psi \Longrightarrow^{*} \Upsilon}{\Gamma\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Psi \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

La primera postcondición se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la propiedad de monotonía en las premisas [NP-s2] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la permutación en las premisas [NP-s2].

XIII.13- *Corte directo en la teoría-base y expansión homogénea en el objeto del problema y la solución [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon\cdot\Psi \Longrightarrow^{**}_m \Omega\cdot\Xi}{\Gamma\cdot\Lambda|\Upsilon\cdot\Delta\cdot\Psi \Longrightarrow^{**}_m \Omega\cdot\Delta\cdot\Xi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Psi;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Xi \Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Psi}{\Gamma\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Delta\cdot\Psi;\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Xi \Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Delta\cdot\Psi}\ .$$

La primera postcondición se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la propiedad de monotonía en las premisas [NP-s2] y la de corte directo en las conclusiones [NP-s2] (las cuales leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la monotonía no homogénea en las premisas y las conclusiones [NP-s2] y la contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XIII.14- *Corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Gamma \cdot \Lambda | \Omega \Longrightarrow_m^{**} \Delta;\ \Delta \cdot \Lambda \ddot{\neq} \Lambda \cdot \Delta}{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Delta}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon; \\ \Gamma \cdot \Lambda \not\Longrightarrow^* \Omega;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \Delta \Longrightarrow^* \Omega; \\ \Delta \cdot \Lambda \ddot{\neq} \Lambda \cdot \Delta \end{array}}{\Gamma \cdot \Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \Delta \Longrightarrow^* \Upsilon}\ .$$

La primera postcondición se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la monotonía en las premisas [NP-s2] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); la segunda postcondición se tiene a partir de la segunda y la cuarta precondiciones si $\Longrightarrow^*$ satisface la transitividad [NP-s2b] y la contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XIII.15- *Corte en el objeto del problema [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Gamma | \Upsilon \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Phi}{\Gamma | \Upsilon \cdot \Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda;\ \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Lambda; \\ \Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Lambda;\ \Gamma \cdot \Phi \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Lambda \end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Lambda;\ \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Lambda}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la propiedad de corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XIII.16- *Corte en la solución [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega\cdot\Delta\cdot\Lambda;\ \Gamma|\Delta \Longrightarrow_m^{**} \Omega\cdot\Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega\cdot\Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon;\\ \Gamma \not\Longrightarrow^* \Delta;\ \Gamma\cdot\Omega\cdot\Lambda \Longrightarrow^* \Delta\end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Omega\cdot\Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición se tiene a partir de la segunda y cuarta precondiciones si $\Longrightarrow^*$ satisface la propiedad de corte en las premisas [NP-s2].

XIII.17- *Corte en la solución y expansión en la teoría-base [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega\cdot\Delta\cdot\Xi;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Phi;\ \Omega\cdot\Xi \ddot{\not=} \langle\ \rangle}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega\cdot\Xi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Xi \Longrightarrow^* \Upsilon;\\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Phi \Longrightarrow^* \Upsilon;\\ \Omega\cdot\Xi \ddot{\not=} \langle\ \rangle\end{array}}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Xi \Longrightarrow^* \Upsilon}\ .$$

La segunda postcondición se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la propiedad de permutación en las premisas [NP-s2].

XIII.18- *Contracción por la derecha considerando la teoría-base y la solución conjuntamente [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega\cdot\Delta\cdot\Phi;\ \Omega\cdot\Phi \ddot{\not=} \langle\ \rangle}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega\cdot\Phi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Phi \Longrightarrow^* \Upsilon;\\ \Omega\cdot\Phi \ddot{\not=} \langle\ \rangle\end{array}}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Phi \Longrightarrow^* \Upsilon}\ .$$

La segunda postcondición se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XIII.19- *Contracción por la izquierda considerando la teoría-base y la solución conjuntamente [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega\cdot\Delta\cdot\Phi;\ \Delta\cdot\Lambda \ddot{\neq} \Lambda\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Phi}{\Gamma\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega\cdot\Delta\cdot\Phi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Phi \Longrightarrow^* \Upsilon;\\ \Delta\cdot\Lambda \ddot{\neq} \Lambda\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Phi\end{array}}{\Gamma\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\Omega\cdot\Delta\cdot\Phi \Longrightarrow^* \Upsilon}\ .$$

La segunda postcondición se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XIII.20- *Permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega; \Gamma\cdot\Omega\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Phi;\ \Delta \ddot{\neq} \langle\ \rangle}{\Gamma\cdot\Omega\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Delta}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^* \Upsilon;\\ \Gamma\cdot\Omega\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Omega\cdot\Lambda\cdot\Phi \Longrightarrow^* \Upsilon;\\ \Delta \ddot{\neq} \langle\ \rangle\end{array}}{\Gamma\cdot\Omega\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Omega\cdot\Lambda\cdot\Delta \Longrightarrow^* \Upsilon}\ .$$

Sólo hay que indicar que la segunda postcondición se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la permutación en las premisas [NP-s2].

XIII.21- *Contracción por la derecha en la teoría-base [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega;\ \Xi\cdot\Lambda \ddot{\neq} \Lambda\cdot\Omega}{\Gamma\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^* \Upsilon;\\ \Xi\cdot\Lambda \mathrel{\ddot{\neq}} \Lambda\cdot\Omega\end{array}}{\Gamma\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^* \Upsilon}\,.$$

La primera postcondición se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la propiedad de monotonía en las premisas [NP-s2] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se sigue a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XIII.22- *Contracción por la izquierda en la teoría-base [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Xi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda \mathrel{\ddot{\neq}} \Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda\cdot\Omega}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\,.$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^* \Upsilon;\\ \Xi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda \mathrel{\ddot{\neq}} \Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda\cdot\Omega\end{array}}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^* \Upsilon}\,.$$

La primera postcondición se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la propiedad de monotonía en las premisas [NP-s2] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se sigue a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XIII.23- *Contracción por la derecha en el objeto del problema [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega}{\Gamma|\Upsilon\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Lambda \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\,.$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda;\ \Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^* \Upsilon\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda}{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Lambda;\ \Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^* \Upsilon\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Lambda}\,.$$

La primera postcondición se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la propiedad de repetición por la derecha en las conclusiones [NP-s2] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se sigue a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la propiedad de corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XIII.24- *Contracción por la izquierda en el objeto del problema [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_m \Omega}{\Gamma|\Upsilon \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^{**}_m \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda;\ \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda;\ \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}\ .$$

La primera postcondición se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la propiedad de repetición por la izquierda en las conclusiones [NP-s2] de $\Longrightarrow^*$ (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se sigue a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la propiedad de corte directo en las conclusiones [NP-s2].

XIII.25- *Contracción por la derecha en la solución [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon}{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon; \Gamma \cdot \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon}\ .$$

Sólo es necesario señalar que la segunda postcondición se sigue a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XIII.26- *Contracción por la izquierda en la solución [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Omega \cdot \Xi \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon}{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon; \Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Xi \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon}\ .$$

Sólo es necesario señalar que la segunda postcondición se sigue a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la contracción por la izquierda en las premisas [NP-s2].

XIII.27- *Permutación en la teoría-base [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}{\Gamma\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\,.$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon}{\Gamma\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\,.$$

La primera postcondición se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la propiedad de permutación en las premisas [NP-s2] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se sigue a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la citada propiedad (la cual leeremos en 'sentido directo').

XIII.28- *Permutación en el objeto del problema [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}{\Gamma|\Upsilon\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\,.$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda;\ \Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda}{\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda;\ \Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda}\,.$$

La primera postcondición se tiene a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la propiedad de permutación en las conclusiones [NP-s2] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se sigue a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la citada propiedad (la cual leeremos en 'sentido directo').

XIII.29- *Permutación en la solución [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda}\,.$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_{m}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Omega\cdot\Xi\cdot\Delta\cdot\Phi\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon}{\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Omega\cdot\Phi\cdot\Delta\cdot\Xi\cdot\Lambda \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\,.$$

Sólo es necesario señalar que la segunda postcondición se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la permutación en las premisas [NP-s2].

■

Proposición 165.
Cada una de las anteriores versiones de las reglas [NP-s8] expresadas mediante la condición mediadora cumple que:
1) En el conjunto formado por sus precondiciones y sus postcondiciones no hay al menos dos condiciones (explícitas o implícitas) estructuralmente incompatibles entre sí.
2) Ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar nuevas postcondiciones que sean incompatibles entre sí o incompatibles con las nuevas precondiciones, salvo en el caso de que las nuevas precondiciones sean igualmente incompatibles entre sí.

La prueba de esta proposición sigue el mismo esquema de la correspondiente a las reglas 'mixtas' [NP-s5].

Las relaciones inferenciales del presente tipo pueden también satisfacer, entre otras, algunas de las reglas estructurales mixtas que seguidamente se enumeran:

XIII.30- ***Monotonía cauta en la teoría-base (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma\cdot\Lambda|\Upsilon\Longrightarrow^{**}_{m}\Omega;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\not\Longrightarrow^{*}\Upsilon}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon\Longrightarrow^{**}_{m}\Omega}\ .$$

XIII.31- ***Monotonía cauta en el objeto del problema (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon\cdot\Lambda\Longrightarrow^{**}_{m}\Omega;\ \Gamma\cdot\Omega\Longrightarrow^{*}\Delta}{\Gamma|\Upsilon\cdot\Delta\cdot\Lambda\Longrightarrow^{**}_{m}\Omega}\ .$$

XIII.32- ***Corte en la teoría-base (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon\Longrightarrow^{**}_{m}\Omega;\ \Gamma\cdot\Lambda\Longrightarrow^{*}\Delta;\ \Delta\cdot\Lambda\ddot{\neq}\Lambda\cdot\Omega;\ \Delta\ddot{\neq}\Upsilon}{\Gamma\cdot\Lambda|\Upsilon\Longrightarrow^{**}_{m}\Omega}\ .$$

XIII.33- ***Corte en la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon\Longrightarrow^{**}_{m}\Omega\cdot\Delta\cdot\Lambda;\ \Omega\cdot\Lambda\Longrightarrow^{*}\Delta;\ \Omega\cdot\Lambda\ddot{\neq}\langle\ \rangle}{\Gamma|\Upsilon\Longrightarrow^{**}_{m}\Omega\cdot\Lambda}\ .$$

XIII.34- ***Debilitamiento cauto del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Upsilon \Longrightarrow^{*} \Psi;\ \Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Psi}{\Gamma|\Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

XIII.35- ***Cambio por equivalencia del objeto del problema [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Upsilon \Longrightarrow^{*} \Psi;\ \Psi \Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma \ddot{\neq} \Upsilon}{\Gamma|\Psi \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega}\ .$$

XIII.36- ***Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Phi \Longrightarrow^{*} \Omega;\ \Phi \ddot{\neq} \langle\ \rangle}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}\ .$$

XIII.37- ***Debilitamiento cauto de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s8]:***

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega;\ \Gamma \cdot \Phi \Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Phi \ddot{\neq} \langle\ \rangle}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Phi}\ .$$

Proposición 166.
Si una relación inferencial mediada p-p es resolutiva entonces cada una de las anteriores propiedades estructurales 'mixtas' [NP-s8] cumple que en el conjunto formado por sus precondiciones y sus postcondición no hay al menos dos condiciones estructuralmente incompatibles entre sí. Además, la relación inferencial mediada p-p resolutiva satisface dichas propiedades 'mixtas' [NP-s8] si la correspondiente relación de consecuencia mediadora plural tiene las propiedades estructurales [NP-s2] que en cada una de ellas se indica.

XIII.30- Monotonía cauta en la teoría-base (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s8]: monotonía en las premisas [NP-s2].

XIII.31- Monotonía cauta en el objeto del problema (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s8]: monotonía en las premisas [NP-s2] y monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2].

XIII.32- Corte en la teoría-base (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s8]: transitividad [NP-s2b] y contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XIII.33- *Corte en la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s8]: transitividad [NP-s2b] y contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].*

XIII.34- *Debilitamiento cauto del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s8]: transitividad [NP-s2c].*

XIII.35- *Cambio por equivalencia del objeto del problema [NP-s8]: transitividad [NP-s2c].*

XIII.36- *Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s8]: transitividad [NP-s2b].*

XIII.37- *Debilitamiento cauto de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s8]: en cualquier caso.*

Demostración.

XIII.30- *Monotonía cauta en la teoría-base (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_m \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon;\\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon\end{array}}{\Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon;\ \Gamma\cdot\Delta\cdot\Lambda\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición se tiene a partir de la segunda precondición si $\Longrightarrow^{*}$ satisface la monotonía en las premisas [NP-s2].

XIII.31- *Monotonía cauta en el objeto del problema (condicionada por la inferencia mediadora) [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon\cdot\Lambda \Longrightarrow^{**}_m \Omega;\ \Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Delta}{\Gamma|\Upsilon\cdot\Delta\cdot\Lambda \Longrightarrow^{**}_m \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow^{**}_m$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^{*}$, ello es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Lambda;\ \Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Lambda;\ \Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Delta}{\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Delta\cdot\Lambda;\ \Gamma\cdot\Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon\cdot\Delta\cdot\Lambda}\ .$$

La primera postcondición se deriva a partir de la primera precondición si $\Longrightarrow^*$ satisface la monotonía en las premisas [NP-s2] (la cual leeremos en 'sentido contrapuesto'); por su parte, la segunda postcondición se tiene a partir de la segunda y la tercera precondiciones si $\Longrightarrow^*$ satisface la monotonía cauta en las conclusiones [NP-s2].)

XIII.32- *Corte en la teoría-base (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Delta;\ \Delta \cdot \Lambda \ddot{\neq} \Lambda \cdot \Omega;\ \Delta \ddot{\neq} \Upsilon}{\Gamma \cdot \Lambda | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Delta \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon; \\ \Gamma \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Delta;\ \Delta \cdot \Lambda \ddot{\neq} \Lambda \cdot \Omega;\ \Delta \ddot{\neq} \Upsilon\end{array}}{\Gamma \cdot \Lambda \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Lambda \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon}\ .$$

La primera postcondición se tiene a partir de la tercera y la segunda precondiciones si $\Longrightarrow^*$ satisface la transitividad [NP-s2b] y la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XIII.33- *Corte en la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda;\ \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Delta;\ \Omega \cdot \Lambda \ddot{\neq} \langle\ \rangle}{\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \cdot \Lambda}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Omega \cdot \Delta \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon; \\ \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Delta;\ \Omega \cdot \Lambda \ddot{\neq} \langle\ \rangle\end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon; \Gamma \cdot \Omega \cdot \Lambda \Longrightarrow^* \Upsilon}\ .$$

La segunda postcondición se tiene a partir de la tercera y la segunda precondiciones si $\Longrightarrow^*$ satisface la transitividad [NP-s2b] y la contracción por la derecha en las premisas [NP-s2].

XIII.34- *Debilitamiento cauto del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Upsilon \Longrightarrow^* \Psi;\ \Gamma \not\Longrightarrow^* \Psi}{\Gamma | \Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon;\\ \Upsilon \Longrightarrow^* \Psi;\ \Gamma \not\Longrightarrow^* \Psi\end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Psi;\ \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Psi}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición de la regla se tiene a partir de la segunda y tercera precondiciones si $\Longrightarrow^*$ satisface la transitividad [NP-s2c].

XIII.35- *Cambio por equivalencia del objeto del problema [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Upsilon \Longrightarrow^* \Psi;\ \Psi \Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \ddot{\neq} \Upsilon}{\Gamma|\Psi \Longrightarrow_m^{**} \Omega}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon;\\ \Upsilon \Longrightarrow^* \Psi;\ \Psi \Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \ddot{\neq} \Upsilon\end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Psi;\ \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Psi}\ .$$

La primera postcondición de la regla se tiene a partir de la primera y cuarta precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s2c] (para llegar a esta conclusión podemos razonar por reducción al absurdo: supongamos que a partir de las precondiciones $\Gamma \not\Longrightarrow \Upsilon$ y $\Psi \Longrightarrow \Upsilon$ se siguiese $\Gamma \Longrightarrow \Psi$; entonces, por la transitividad [NP-s2c] de $\Longrightarrow$ sobre este supuesto y la cuarta precondición obtendríamos $\Gamma \Longrightarrow \Upsilon$, lo cual es contradictorio con la primera precondición; por lo tanto hemos de concluir $\Gamma \not\Longrightarrow \Psi$); la segunda postcondición de la regla se tiene a partir de la segunda y tercera precondiciones si $\Longrightarrow$ satisface la transitividad [NP-s2c].

XIII.36- *Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Phi \Longrightarrow^* \Omega;\ \Phi \ddot{\neq} \langle\ \rangle}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Phi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon; \\ \Phi \Longrightarrow^* \Omega;\ \Phi \ddot{\neq} \langle\ \rangle\end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Phi \Longrightarrow^* \Upsilon}\ .$$

Sólo hay que señalar que la segunda postcondición de la regla se tiene a partir de la tercera y la segunda precondiciones si $\Longrightarrow^*$ satisface la transitividad [NP-s2b].

XIII.37- *Debilitamiento cauto de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP-s8]:*

$$\frac{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega;\ \Gamma \cdot \Phi \Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Phi \ddot{\neq} \langle\ \rangle}{\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Phi}\ .$$

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ resolutiva respecto de $\Longrightarrow^*$, ello es equivalente a:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon; \\ \Gamma \cdot \Phi \Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Phi \ddot{\neq} \langle\ \rangle\end{array}}{\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon;\ \Gamma \cdot \Phi \Longrightarrow^* \Upsilon}\ .$$

Lo cual es evidente.

■

Proposición 167.

Cada una de las anteriores versiones de las reglas ‘mixtas’ [NP-s8] expresadas mediante la condición mediadora cumple que:

1) En el conjunto formado por sus precondiciones y sus postcondiciones no hay al menos dos condiciones (explícitas o implícitas) estructuralmente incompatibles entre sí.

2) Ninguna especificación propia de todas las condiciones (realizada de forma homogénea) puede generar nuevas postcondiciones que sean incompatibles entre sí o incompatibles con las nuevas precondiciones, salvo en el caso de que las nuevas precondiciones sean igualmente incompatibles entre sí.

La prueba de esta proposición sigue el mismo esquema de la correspondiente a las reglas ‘mixtas’ [NP-s5].

En particular, un tipo de relación inferencial mediada p-p es la relación de consecuencia abductiva ordinaria p-p plana (la cual simbolizaremos por "$\Vdash\!\vdash_{AO}$") cuya relación inferencial mediadora es la deducción plural:

Definición 168 (Relación inferencial abductiva ordinaria p-p plana)**.**
La relación inferencial abductiva ordinaria p-p plana se define de la siguiente manera a partir de la deducción plural:

$$\Gamma|\Upsilon \Vdash\!\vdash_{AO} \Omega \textit{ si y sólo si } (\Gamma \nVdash_D \Upsilon)\ \dot{\&}\ (\Gamma \cdot \Omega \Vdash_D \Upsilon).$$

Obviamente, esta nueva relación de consecuencia lógica es resolutiva y, como ya se puso de manifiesto, ello conlleva que no es posible que la solución abductiva sea la subfamilia vacía. Además, ahora podemos derivar que $\Upsilon \ddot{\neq} \langle\ \rangle$ a partir de la condición $\Gamma \nVdash_D \Upsilon$, puesto que para cualquier subfamilia Γ se tiene que $\Gamma \Vdash_D \langle\ \rangle$ por satisfacer $\Vdash_D$ la propiedad de reflexividad [NP-s2].

Veamos a continuación el correspondiente teorema de representación:

Teorema 169 (Teorema de representación mediante propiedades [NP-s1] de la abducción ordinaria p-p plana cuya relación inferencial mediadora es la deducción plural)**.**
La reflexividad [NP-s2] y la transitividad [NP-s2] de la relación inferencial mediadora plural son condiciones suficientes de la abducción ordinaria p-p plana para casos en los que la teoría-base, el objeto del problema y las soluciones son subfamilias con un cardinal arbitrario, y siendo su relación inferencial mediadora la deducción plural, en el sentido de que cualquier relación de consecuencia lógica mediada p-p resolutiva, cuya relación de consecuencia lógica mediadora plural satisfaga las dos propiedades [NP-s2] mencionadas, se puede representar como si fuese la relación de consecuencia abductiva ordinaria indicada.

Demostración. Sea $\Longrightarrow_m^{**}$ una relación de consecuencia lógica p-p resolutiva que está mediada por la relación de consecuencia lógica plural $\Longrightarrow^{*}$. Sean Γ, Υ y Ω elementos de $SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))$.

Por ser $\Longrightarrow_m^{**}$ resolutiva tenemos que:

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \text{ si y sólo si } (\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon)\ \dot{\&}\ (\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon).$$

Por otro lado, la abducción ordinaria p-p plana se define en términos de la deducción plural del siguiente modo:

$$\Gamma|\Upsilon \Vdash\!\vdash_{AO} \Omega \text{ si y sólo si } (\Gamma \nVdash_D \Upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma \cdot \Omega \Vdash_D \Upsilon).$$

Adoptaremos una semántica según la cual los modelos de cada subfamilia son las subfamilias que siendo tomadas como premisas permiten establecer enunciados inferenciales correctos en los que justamente las familias de las que se buscan los modelos son las conclusiones. Es decir, si Ψ es un elemento cualquiera de $SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L}))$, entonces su conjunto de modelos es:

$$Mod(\bar{\Psi}) = \{\Sigma \mathbin{/} \Sigma \in SUBFAM_{\mathcal{E}}(FOR(\mathcal{L})) \mathbin{\dot{\&}} \Sigma \Longrightarrow^{*} \Psi\}.$$

Por tanto, tenemos que la abducción ordinaria p-p plana está caracterizada a partir de modelos de la siguiente manera:

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \text{ si y sólo si } (Mod(\bar{\Gamma}) \nsubseteq Mod(\bar{\Upsilon})) \mathbin{\dot{\&}} (Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\bar{\Omega}) \subseteq Mod(\bar{\Upsilon})).$$

Así pues, debemos probar que:

$$(\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon) \text{ si y sólo si}$$

$$(Mod(\bar{\Gamma}) \nsubseteq Mod(\bar{\Upsilon})) \mathbin{\dot{\&}} (Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\bar{\Omega}) \subseteq Mod(\bar{\Upsilon})),$$

siendo $\Longrightarrow^{*}$ una relación de consecuencia lógica mediadora plural que satisface las propiedades de reflexividad [NP-s2] y transitividad [NP-s2].

Ahora bien, a partir de lo que se probó en el *teorema de representación de la relación inferencial deductiva plural [NP-s2]*, sabemos que:

a) $\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon$ si y sólo si $Mod(\Gamma) \cap Mod(\Omega) \subseteq Mod(\Upsilon)$,

bajo las mismas condiciones para $\Longrightarrow^{*}$.

En cuanto al primer miembro de la conjunción que aparece en el lado derecho de la equivalencia citada, teniendo en cuenta nuevamente el citado resultado, sabemos que:

b) $\Gamma \Longrightarrow^{*} \Upsilon$ si y sólo si $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Upsilon)$.

Por lo tanto, al tratarse de una equivalencia, las correspondientes negaciones de cada miembro también son equivalentes. Por último, a) y b) conjuntamente implican lo que nos habíamos propuesto probar. ■

En cuanto a la relación de consecuencia lógica mediada p-p resolutiva de modo posicionalmente indiferente comencemos con su definición:

Definición 170 (Relación de consecuencia lógica mediada p-p resolutiva de modo posicionalmente indiferente)**.**
Una relación de consecuencia lógica mediada p-p $\Longrightarrow_m^{\bullet\bullet}$ *es resolutiva de modo posicionalmente indiferente respecto de una relación inferencial mediadora plural* $\Longrightarrow^*$ *cuando se satisface que:*

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{**} \Omega \textit{ si y sólo si } (\Gamma \not\Longrightarrow^* \Upsilon)) \,\dot{\&}\, (\Gamma \circledast \Omega \Longrightarrow^* \Upsilon).$$

Podemos afirmar que todas las propiedades [NP-s8] que han sido presentadas, tanto las ‘puras’ como las ‘mixtas’, se mantienen sin alteraciones con esta nueva exigencia (no desarrollamos explícitamente aquí la demostración por los motivos que ya se indicaron en el anterior capítulo). Nuevamente la presente es una versión sujeta a condiciones más fuertes que la anteriormente dada: así pues, toda propiedad que se mantenga en esta situación, *a fortiori* se mantendrá en la anterior situación.

Sin embargo, en este caso tampoco la condición adicional nos permite justificar en el sentido recíproco al que ya fue presentado los vínculos existentes entre las propiedades de la relación inferencial mediada y la mediadora. Los motivos son idénticos a los indicados a la relación inferencial s-s análoga a la presente.

Nuevamente esto conlleva que tampoco tengamos un teorema de representación para la relación inferencial mediada p-p que es resolutiva de modo posicionalmente indiferente respecto de la deducción plural usando sólo propiedades [NP-s8].

Para terminar esta sección, particularizaremos las anteriores reglas para la relación inferencial abductiva ordinaria p-p plana. Ya justificamos por qué se puede garantizar que esta última satisface las distintas propiedades de permutación y contracción [NP-s8] (es decir, tanto en las dos partes del miembro de la izquierda como en el miembro de la derecha). También sabemos que la deducción plural satisface las correspondientes propiedades de permutación y contracción [NP-s2] (es decir, tanto en las premisas como en las conclusiones). Así pues, en lugar de una presentación en la que una relación de consecuencia lógica es un conjunto de ternas cuyas componentes son subfamilias de fórmulas, hacemos una presentación en la que dichas componentes son conjuntos de fórmulas. Por ello, podríamos representar la condición necesaria y suficiente que liga ambos tipos de inferencia del siguiente modo:

Corolario 171.
$\Gamma|\Upsilon \Vdash_{AO} \Omega$ *si y sólo si* $(\Gamma \nVdash_D \Upsilon) \dot{\&} (\Gamma \cup \Omega \Vdash_D \Upsilon)$.

No explicitamos aquí su demostración dado que ésta no es más que la invocación de la definición de la relación inferencial abductiva ordinaria p-p plana a partir de la correspondiente deducción plural junto con las mencionadas propiedades estructurales de ambas.

Con esta opción notacional, las reglas estructurales más interesantes de esta última relación inferencial son:

XIV.1- ***Reflexividad condicionada del objeto del problema en la solución [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Upsilon} \cup \bar{\Delta}}.$$

XIV.2- ***Reflexividad condicionada de la solución en el objeto del problema [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \cup \bar{\Delta} \Vdash_{AO} \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta}}.$$

XIV.3- ***Identidad condicionada de la solución y el objeto del problema [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Omega} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}}.$$

XIV.4- ***Monotonía cauta en la teoría-base [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega};\ \bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Phi}}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}}.$$

XIV.5- ***Monotonía cauta en el objeto del problema [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega};\ \bar{\Gamma}|\bar{\Delta} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \cup \bar{\Delta} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}}.$$

XIV.6- ***Monotonía en la solución [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta}}.$$

XIV.7- ***Monotonía cauta homogénea en la teoría-base y el objeto del problema [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega};\ \bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Phi}}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \cup \bar{\Delta} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}}.$$

XIV.8- ***Monotonía homogénea en el objeto del problema y la solución [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \cup \bar{\Delta} \Vdash_{AO} \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta}}.$$

XIV.9- ***Monotonía cauta no homogénea en el objeto del problema y la solución [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega};\ \bar{\Gamma}|\bar{\Xi} \Vdash_{AO} \bar{\Phi}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \cup \bar{\Xi} \Vdash_{AO} \bar{\Omega} \cup \bar{\Phi}}.$$

XIV.10- ***Transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta};\ \bar{\Gamma}|\bar{\Omega} \cup \bar{\Xi} \Vdash_{AO} \bar{\Phi}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Phi} \cup \bar{\Delta}}.$$

XIV.11- ***Corte en la teoría-base [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega};\ \bar{\Gamma}|\bar{\Delta} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}}.$$

XIV.12- ***Corte directo en la teoría-base y expansión en la solución [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta}}.$$

XIV.13- ***Corte directo en la teoría-base y expansión homogénea en el objeto del problema y la solución [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \cup \bar{\Delta} \Vdash_{AO} \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta}}.$$

XIV.14- ***Corte en el objeto del problema [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \cup \bar{\Delta} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}; \bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Phi}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}} \, .$$

XIV.15- ***Corte en la solución [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta};\ \bar{\Gamma}|\bar{\Delta} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}} \, .$$

XIV.16- ***Corte en la solución y expansión en la teoría-base [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta};\ \bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Phi};\ \bar{\Omega} \neq \varnothing}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}} \, .$$

XIV.17- ***Contracción por la derecha considerando la teoría-base y la solución conjuntamente [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta};\ \bar{\Omega} \neq \varnothing}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}} \, .$$

XIV.18- ***Contracción por la izquierda considerando la teoría-base y la solución conjuntamente [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta}} \, .$$

XIV.19- ***Permutación cauta entre la teoría-base y la solución [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega};\ \bar{\Gamma} \cup \bar{\Omega}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Phi};\ \bar{\Delta} \neq \varnothing}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Omega}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Delta}} \, .$$

De manera semejante, las reglas 'mixtas' serían:

XIV.20- ***Monotonía cauta en la teoría-base (condicionada por la inferencia mediadora) [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Omega};\ \bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta} \nVdash_D \bar{\Upsilon}}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Omega}}\ .$$

XIV.21- ***Monotonía en el objeto del problema (condicionada por la inferencia mediadora) [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Omega};\ \bar{\Gamma} \cup \bar{\Omega} \Vdash_D \bar{\Delta}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \cup \bar{\Delta} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Omega}}\ .$$

XIV.22- ***Corte en la teoría-base (condicionado por la inferencia mediadora) [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Omega};\ \bar{\Gamma} \Vdash_D \bar{\Delta}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Omega}}\ .$$

XIV.23- ***Corte en la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Omega} \cup \bar{\Delta};\ \bar{\Omega} \Vdash_D \bar{\Delta}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Omega}}\ .$$

XIV.24- ***Debilitamiento cauto del objeto del problema (condicionado por la inferencia mediadora) [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Omega};\ \bar{\Upsilon} \Vdash_D \bar{\Psi};\ \bar{\Gamma} \nVdash_D \bar{\Psi}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Psi} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Omega}}\ .$$

XIV.25- ***Cambio por equivalencia del objeto del problema [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Omega};\ \bar{\Upsilon} \Vdash_D \bar{\Psi};\ \bar{\Psi} \Vdash_D \bar{\Upsilon}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Psi} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Omega}}\ .$$

XIV.26- ***Fortalecimiento de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Omega};\ \bar{\Phi} \Vdash_D \bar{\Omega}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Phi}}\ .$$

XIV.27- ***Debilitamiento cauto de la solución (condicionado por la inferencia mediadora) [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Omega};\ \bar{\Gamma} \cup \bar{\Phi} \Vdash_D \bar{\Upsilon}}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Phi}}\ .$$

Como se habrá podido apreciar, entre las anteriores reglas 'puras' [NP:AO] no aparece la análoga a la de corte en la teoría-base y transitividad entre el objeto del problema y la solución [NP-s8]. El motivo es que al pasar a términos conjuntistas la expresión que inicialmente está en términos de subfamilias, el resultado que se obtiene es una regla 'explosiva' y, por tanto, carente de interés. Por otro lado, atendiendo a las especiales características que se derivan de las propiedades que satisface la inferencia abductiva ordinaria p-p plana cuya relación mediadora es la deducción plural[5], podemos presentar nuevas reglas para esta relación de consecuencia lógica que tienen la peculiaridad de incluir entre sus condiciones algún enunciado inferencial negativo cuyo relator es el correspondiente a la relación mediada:

XI.28- ***No vacuidad del objeto del problema [NP:AO]:***

$$\frac{}{\bar{\Gamma}|\varnothing \not\Vdash\!\vdash_{AO} \bar{\Omega}}\ .$$

[5] En particular, a la posibilidad de hacer una presentación de ambas en la que sus premisas sean meros conjuntos de fórmulas en los que no resulten relevantes ni la cantidad de ocurrencias de una cada una de ellas ni su posición relativa, y también gracias a que la deducción plural satisface las propiedades estructurales de reflexividad y contracción por la derecha en las premisas así como a otras propiedades metateóricas tales como la inadmisibilidad de paraconsistencias y la invariabilidad de la clase de modelos de un conjunto de fórmulas tras la adición conjuntos de tautologías.

XI.29- ***No vacuidad de la solución [NP:AO]:***

$$\frac{}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \nVdash_{AO} \varnothing}\,.$$

XI.30- ***Irreflexividad de la teoría-base en el objeto del problema [NP:AO]:***

$$\frac{}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Upsilon}|\bar{\Upsilon} \nVdash_{AO} \bar{\Omega}}\,.$$

XI.31- ***Irreflexividad condicionada de la teoría-base en la solución [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \Vvdash_{AO} \bar{\Omega}}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}|\bar{\Upsilon} \nVdash_{AO} \bar{\Delta}}\,.$$

XI.32- ***Irreflexividad condicionada de la solución en la teoría-base [NP:AO]:***

$$\frac{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vvdash_{AO} \bar{\Omega}}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Omega}|\bar{\Upsilon} \nVdash_{AO} \bar{\Phi}}\,.$$

XI.33- ***Consistencia de la teoría-base [NP:AO]:***

$$\frac{}{\bar{\Gamma} \cup \bar{\bot}|\bar{\Upsilon} \nVdash_{AO} \bar{\Omega}}\,.$$

XI.34- ***No validez del objeto del problema [NP:AO]:***

$$\frac{}{\bar{\Gamma}|\bar{\top} \nVdash_{AO} \bar{\Omega}}\,.$$

XI.35- ***No validez de la solución [NP:AO]:***

$$\frac{}{\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \nVdash_{AO} \bar{\top}}\,.$$

No lo hacemos aquí, pero se puede probar que cada una de las anteriores reglas [NP:AO] satisface la caracterización en términos de modelos que se ha dado de la relación inferencial abductiva ordinaria p-p plana cuya relación de consecuencia mediadora es la deducción plural.

5.4. Propiedades estructurales de otras formas de abducción

Hasta ahora (sumando lo visto en el anterior capítulo y en el presente) hemos estudiado los tipos de relaciones inferenciales mediadas cuyo objeto del problema y cuya solución son o bien una sola fórmula o bien una subfamilia de fórmulas cada uno de ellos. Pero existen otros dos grandes tipos que deben ser mencionados y cuyos vínculos con los ya estudiados queremos señalar (consideramos que los aspectos análogos a los abordados en las secciones anteriores se pueden extrapolar fácilmente a partir del material ya presentado):

- Relación de consecuencia lógica mediada s-p: $(\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet *} \Omega)$.
- Relación de consecuencia lógica mediada p-s: $(\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{* \bullet} \omega)$.

En cierto modo la relación inferencial p-p es más general que las otras, dado que mediante ésta podemos 'simular' a cualquiera de las otras, pero no ocurre lo recíproco. La idea es la siguiente: el tipo s-p puede ser considerado como la clase de casos particulares en los que la segunda componente tiene necesariamente como cardinal a la unidad; el tipo p-s como la clase de casos particulares en los que es la tercera componente la que es unitaria; y el tipo s-s como la correspondiente clase en la que ambas tienen cardinalidad unitaria. Es decir, las relaciones p-p colapsan en relaciones s-p cuando se cumple $\Upsilon \doteqdot \langle \upsilon \rangle$, en relaciones p-s cuando se tiene $\Omega \doteqdot \langle \omega \rangle$ y en relaciones s-s cuando se satisfacen ambas condiciones. Todo esto se apoya sobre la consideración de que son indistintos $\Gamma \Longrightarrow^* \langle \varphi \rangle$ y $\Gamma \Longrightarrow^* \varphi$. Sin embargo, en principio, desde un punto de vista formal es distinta una secuencia de un solo elemento de dicho miembro, pero parece claro que la situación tiene una similitud estructural que alcanza el grado de isomorfía entre una y otra relación inferencial.

Lo que hemos concluido hasta ahora es que todas las relaciones inferenciales con alguna de sus componentes singulares pueden ser tratadas con relaciones en las que dichas componentes son plurales y se imponen a las mismas los requisitos indicados. Sin embargo, parece interesante que nos preguntemos si existen circunstancias bajo las que pueda hacerse lo recíproco: que las relaciones con componentes plurales se puedan tratar como relaciones con dichas componentes singulares. Con este fin presentaremos las siguientes definiciones:

Definición 172 (Relación inferencial mediada de aridad 3 p-s / p-p que es acumulativa en su segunda componente)**.**
Una relación inferencial mediada de aridad 3 p-s / p-p $\Longrightarrow_m^{*\S}$ *(donde, respectivamente, "*$\S$*" es "*$\bullet$*" / "*$*$*") es acumulativa en su segunda componente respecto de otra relación inferencial mediada s-s / s-p de igual aridad* $\Longrightarrow_m^{\bullet\S}$ *(donde "*$\S$*" toma el mismo valor que antes) cuando se satisface que:*

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{*\S} \sharp \textit{ si y sólo si } \dot{\forall}\upsilon(\langle\upsilon\rangle \ddot{\subseteq} \Upsilon \dot{\Rightarrow} (\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\S} \sharp)),$$

siendo $\sharp = \omega$ *si* $\S = \bullet$ *y* $\sharp = \Omega$ *si* $\S = *$.

Definición 173 (Relación inferencial mediada de aridad 3 s-p / p-p que es acumulativa en su tercera componente)**.**
Una relación inferencial mediada de aridad 3 s-p / p-p $\Longrightarrow_m^{\S*}$ *(donde, respectivamente, "*$\S$*" toma el valor "*$\bullet$*" / "*$*$*") es acumulativa en su tercera componente respecto de otra relación inferencial mediada s-s / p-s de igual aridad* $\Longrightarrow_m^{\S\bullet}$ *(donde "*$\S$*" toma el mismo valor que antes) cuando se satisface que:*

$$\Gamma|\sharp \Longrightarrow^{\S*} \Omega \textit{ si y sólo si } \dot{\forall}\omega(\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} \Omega \dot{\Rightarrow} (\Gamma|\sharp \Longrightarrow^{\S\bullet} \omega)),$$

siendo $\sharp = \upsilon$ *si* $\S = \bullet$ *y* $\sharp = \Upsilon$ *si* $\S = *$.

Comenzamos estudiando dichos vínculos ente los distintos tipos de relaciones de consecuencia lógica mediadas que son justificativas:

1- Relación inferencial mediada s-s justificativa:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega \text{ si y sólo si } \Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon.$$

2- Relación inferencial mediada s-p justificativa:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet*} \Omega \text{ si y sólo si } \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow \upsilon.$$

Por otro lado, para que esta relación inferencial fuese acumulativa en su tercera componente tendría que satisfacerse:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet*} \Omega \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\omega(\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} \Omega \dot{\Rightarrow} (\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet} \omega)).$$

Además, por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}$ también justificativa, se tiene que:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet*} \Omega \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\omega(\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} \Omega \dot{\Rightarrow} (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon)).$$

El miembro derecho de esta equivalencia es en general distinto del miembro derecho de la primera equivalencia (es decir, de la caracterización que en términos de la relación inferencial mediadora singular corresponde a una relación inferencial mediada s-p que es justificativa). Así pues, este último tipo de inferencia no es en general acumulativa en su tercera componente respecto de una relación inferencial mediada s-s justificativa. En el caso de que la relación $\Longrightarrow$ sea monótona, el miembro derecho de esta última equivalencia es estrictamente más fuerte que el de la primera (es decir, este último implica al primero pero no viceversa).

Podríamos pensar en otros posibles vínculos generales, distintos de la acumulatividad, entre las relaciones inferenciales mediadas s-p y s-s que son justificativas. Se muestra a continuación dos posibilidades que parecen intuitivas, pero ninguna de ellas es satisfactoria:

a) Mediante cuantificación existencial:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet *} \Omega \text{ si y sólo si } \dot{\exists}\omega(\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} \Omega \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega)).$$

b) Mediante cuantificación unitaria:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet *} \Omega \text{ si y sólo si } \dot{\exists}!\omega(\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} \Omega \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega)).$$

Nuevamente, en el caso de que la relación $\Longrightarrow$ sea monótona, estas dos equivalencias satisfacen que su miembro derecho es estrictamente más fuerte que el de la primera (es decir, que este último implica al primero pero no viceversa).

3- Relación inferencial mediada p-s justificativa:

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{*\bullet} \omega \text{ si y sólo si } \Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow^{*} \Upsilon.$$

Ahora, para que esta relación inferencial fuese acumulativa en su segunda componente, tendría que satisfacerse:

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{*\bullet} \omega \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\upsilon(\langle\upsilon\rangle \ddot{\subseteq} \Upsilon \mathrel{\dot{\Rightarrow}} (\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega)).$$

Y por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}$ también justificativa se tiene que:

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{*\bullet} \omega \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\upsilon(\langle\upsilon\rangle \ddot{\subseteq} \Upsilon \mathrel{\dot{\Rightarrow}} (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon)).$$

Es evidente que el miembro de la derecha de esta última equivalencia coincide con el miembro análogo de la definición del concepto de relación inferencial mediadora plural que es acumulativa en su segunda componente con respecto a una relación singular (claro está, adaptada a la presente situación):

$$\Gamma \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow^{*} \Upsilon \text{ si y sólo si } \dot{\forall} \upsilon (\langle \upsilon \rangle \ddot{\subseteq} \Upsilon \dot{\Rightarrow} (\Gamma \cdot \langle \omega \rangle \Longrightarrow \upsilon)).$$

Así pues, una relación inferencial mediada p-s justificativa es acumulativa en su segunda componente respecto de otra relación similar s-s si y sólo si la correspondiente relación mediadora plural de la p-s es acumulativa en su segunda componente respecto de la correspondiente relación mediadora singular de la s-s.

4- Relación inferencial mediada p-p justificativa:

$$\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \text{ si y sólo si } \Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon.$$

Nuevamente, para que esta relación inferencial fuese acumulativa en su segunda componente tendría que satisfacerse:

$$\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow^{**}_{m} \Omega \text{ si y sólo si } \dot{\forall} \upsilon (\langle \upsilon \rangle \ddot{\subseteq} \Upsilon \dot{\Rightarrow} (\Gamma | \upsilon \Longrightarrow^{\bullet *}_{m} \Omega)).$$

Y por ser $\Longrightarrow^{\bullet *}$ también justificativa se tiene que:

$$\Gamma | \Upsilon \Longrightarrow^{**} \Omega \text{ si y sólo si } \dot{\forall} \upsilon (\langle \upsilon \rangle \ddot{\subseteq} \Upsilon \dot{\Rightarrow} (\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow \upsilon)).$$

Particularizamos para la presente situación la definición de relación inferencial binaria plural que es acumulativa en su segunda componente:

$$\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon \text{ si y sólo si } \dot{\forall} \upsilon (\langle \upsilon \rangle \ddot{\subseteq} \Upsilon \dot{\Rightarrow} (\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow \upsilon)).$$

A partir de lo anterior podemos asegurar que una relación inferencial mediada p-p justificativa es acumulativa en su segunda componente respecto de otra relación similar s-p si y sólo si la correspondiente relación mediadora plural de la p-p es acumulativa en su segunda componente respecto de la correspondiente relación mediadora singular de la s-p.

Por último, como respuesta a la cuestión de si la relación inferencial mediada p-p justificativa es o no acumulativa en su tercera componente respecto de otra relación similar p-s, bastaría con hacer un razonamiento análogo al realizado para el anterior tipo 2 con el fin de probar que estamos en una situación idéntica a la allí expuesta.

Pasamos ahora a estudiar los vínculos que pudiesen existir entre los distintos tipos de relaciones de consecuencia lógica mediadas que son resolutivas:

1'- Relación inferencial mediada s-s resolutiva:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega \text{ si y sólo si } (\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon).$$

2'- Relación inferencial mediada s-p resolutiva:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet *}_{m} \Omega \text{ si y sólo si } (\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow \upsilon).$$

Además, para que esta relación inferencial fuese acumulativa en su tercera componente tendría que satisfacerse:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet *} \Omega \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\omega(\langle\omega\rangle \mathrel{\ddot{\subseteq}} \Omega \mathrel{\dot{\Rightarrow}} (\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet} \omega)).$$

Y por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}$ también resolutiva se tiene que:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet *} \Omega \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\omega(\langle\omega\rangle \mathrel{\ddot{\subseteq}} \Omega \mathrel{\dot{\Rightarrow}} ((\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon))).$$

Podemos ahora transformar el miembro de la derecha de la anterior equivalencia mediante propiedades de la lógica clásica (que es la que subyace implícitamente en este nivel meta-metateórico):

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet *} \Omega \text{ si y sólo si } (\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\dot{\forall}\omega(\langle\omega\rangle \mathrel{\ddot{\subseteq}} \Omega \mathrel{\dot{\Rightarrow}} (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon))).$$

Y esto último nos permite ver más fácilmente que en general una relación inferencial mediada s-p resolutiva no es acumulativa en su tercera componente respecto de una relación similar s-s. Nuevamente, en el caso de que la relación $\Longrightarrow$ sea monótona, el miembro derecho de esta última equivalencia es estrictamente más fuerte que el de la primera (es decir, este último implica al primero pero no viceversa).

Podríamos pensar en otros posibles vínculos generales, pero ninguno de los que se muestran resultan exitosos:

a) Mediante cuantificación existencial:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet *}_{m} \Omega \doteq$$

$$\doteq \dot{\exists}\omega(\langle\omega\rangle \mathrel{\ddot{\subseteq}} \Omega \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma|\upsilon \Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m} \omega)) \doteq$$

$$\doteq \dot{\exists}\omega(\langle\omega\rangle \mathrel{\ddot{\subseteq}} \Omega \mathbin{\dot{\&}} ((\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon))) \doteq$$

$$\dot{\equiv} (\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon)\ \dot{\&}\ (\dot{\exists}\omega(\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} \Omega\ \dot{\&}\ (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon))).$$

b) Mediante cuantificación unitaria:

$$\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet *} \Omega\ \dot{\equiv}$$

$$\dot{\equiv}\ \dot{\exists}!\omega(\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} \Omega\ \dot{\&}\ (\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega))\ \dot{\equiv}$$

$$\dot{\equiv}\ \dot{\exists}!\omega(\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} \Omega\ \dot{\&}\ ((\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon)\ \dot{\&}\ (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon)))\ \dot{\equiv}$$

$$\dot{\equiv} (\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon)\ \dot{\&}\ (\dot{\exists}!\omega(\langle\omega\rangle \ddot{\subseteq} \Omega\ \dot{\&}\ (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon))).$$

Y, otra vez, en el caso de que la relación $\Longrightarrow$ sea monótona, estas dos equivalencias satisfacen que su miembro derecho es estrictamente más fuerte que el de la primera (es decir, que este último implica al primero pero no viceversa).

3'- Relación inferencial mediada p-s resolutiva:

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{*\bullet} \omega \text{ si y sólo si } (\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon)\ \dot{\&}\ (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow^{*} \Upsilon).$$

Ahora, para que esta relación inferencial fuese acumulativa en su segunda componente tendría que satisfacerse:

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_m^{*\bullet} \omega \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\upsilon(\langle\upsilon\rangle \ddot{\subseteq} \Upsilon \dot{\Rightarrow} (\Gamma|\upsilon \Longrightarrow_m^{\bullet\bullet} \omega)).$$

Y por ser $\Longrightarrow^{\bullet\bullet}$ también resolutiva se tiene que:

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{*\bullet} \omega \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\upsilon(\langle\upsilon\rangle \ddot{\subseteq} \Upsilon \dot{\Rightarrow} ((\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon)\ \dot{\&}\ (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon))).$$

Podemos nuevamente transformar el miembro de la derecha de la anterior condición necesaria y suficiente mediante propiedades de la lógica clásica:

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow^{*\bullet} \omega \text{ si y sólo si}$$

$$(\dot{\forall}\upsilon(\langle\upsilon\rangle \ddot{\subseteq} \Upsilon \dot{\Rightarrow} (\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon)))\ \dot{\&}\ (\dot{\forall}\upsilon(\langle\upsilon\rangle \ddot{\subseteq} \Upsilon \dot{\Rightarrow} (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon))).$$

Fijémonos en los dos miembros que aparecen en el lado derecho de esta condición necesaria y suficiente. El segundo de ellos coincide con el miembro derecho de la definición del concepto de relación inferencial mediadora plural que es acumulativa en su segunda componente con respecto a una relación singular (claro está, adaptada a la presente situación):

$$\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow^{*} \Upsilon \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\upsilon(\langle\upsilon\rangle \ddot{\subseteq} \Upsilon \dot{\Rightarrow} (\Gamma \cdot \langle\omega\rangle \Longrightarrow \upsilon)).$$

Sin embargo, apelando a la misma cualidad, concluimos que el primer miembro de la conjunción es, bajo el supuesto de que el objeto del problema es no vacío, estrictamente más fuerte que el primer miembro de la conjunción que aparece en el lado derecho de la primera equivalencia, tal como se muestra a continuación:

$$\Gamma \Longrightarrow^{*} \Upsilon \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\upsilon(\langle\upsilon\rangle \mathrel{\ddot{\subsetneq}} \Upsilon \mathrel{\dot{\Rightarrow}} (\Gamma \Longrightarrow \upsilon)).$$

Y por ser una equivalencia tenemos que:

$$\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon \text{ si y sólo si } \dot{\exists}\upsilon(\langle\upsilon\rangle \mathrel{\ddot{\subsetneq}} \Upsilon \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma \not\Longrightarrow \upsilon)).$$

Así pues, una relación inferencial mediada p-s resolutiva no es en general acumulativa en su segunda componente respecto de otra similar s-s.

4'- Relación inferencial mediada p-p resolutiva:

$$\Gamma|\Upsilon \Longrightarrow_{m}^{**} \Omega \text{ si y sólo si } (\Gamma \not\Longrightarrow^{*} \Upsilon) \mathbin{\dot{\&}} (\Gamma \cdot \Omega \Longrightarrow^{*} \Upsilon).$$

Con razonamientos análogos a los realizados en los tipos 2' y 3' podríamos concluir que una relación inferencial mediada p-p resolutiva en general no es acumulativa en su segunda componente respecto de otra similar s-p ni tampoco acumulativa en su tercera componente respecto de otra similar p-s.

Pasamos ahora a dilucidar si la situación que hemos analizado desde un punto de vista general se reproduce inalterada o no en el caso de los distintos tipos de inferencia abductiva ordinaria plana cuya inferencia mediadora es la deducción. Con este fin usaremos la caracterización en términos de modelos de la correspondiente inferencia abductiva:

1''- Relación inferencial abductiva ordinaria s-s plana:

$$\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash\!\vdash_{ao} \omega \text{ si y sólo si}$$

$$((\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \nsubseteq Mod(\upsilon)) \mathbin{\dot{\&}} ((\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon)).$$

Ahora, aplicando propiedades conjuntistas, el miembro derecho de la equivalencia se transforma en:

$$(Mod(\bar{\Gamma}) \nsubseteq Mod(\upsilon)) \mathbin{\dot{\&}} (Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon)).$$

2”- Relación inferencial abductiva ordinaria s-p plana:

$$\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash_{aO} \bar{\Omega} \text{ si y sólo si}$$

$$((\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \nsubseteq Mod(\upsilon)) \mathbin{\dot{\&}} ((\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap (\bigcap_{\omega\in\bar{\Omega}} Mod(\omega)) \subseteq Mod(\upsilon)).$$

Y, nuevamente, tras aplicar propiedades conjuntistas, el miembro derecho se transforma en:

$$(Mod(\bar{\Gamma}) \nsubseteq Mod(\upsilon)) \mathbin{\dot{\&}} (Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\bar{\Omega}) \subseteq Mod(\upsilon)).$$

Para que esta relación inferencial fuese acumulativa en su tercera componente tendría que satisfacerse:

$$\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash_{aO} \bar{\Omega} \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\omega(\omega \in \bar{\Omega} \dot{\Rightarrow} (\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash_{ao} \omega)).$$

Ahora, substituyendo en el miembro de la derecha de esta equivalencia el enunciado inferencial abductivo por su caracterización en términos de modelos obtendríamos:

$$\dot{\forall}\omega(\omega \in \bar{\Omega} \dot{\Rightarrow} ((Mod(\bar{\Gamma}) \nsubseteq Mod(\upsilon)) \mathbin{\dot{\&}} (Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon)))).$$

Lo cual es equivalente a:

$$(Mod(\bar{\Gamma}) \nsubseteq Mod(\upsilon)) \mathbin{\dot{\&}} (\dot{\forall}\omega(\omega \in \bar{\Omega} \dot{\Rightarrow} (Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon)))).$$

Y a partir de esto último se puede ver claramente que la relación inferencial abductiva ordinaria s-p plana no es acumulativa en su tercera componente respecto de la relación inferencial abductiva ordinaria s-s plana.

Tampoco ahora son satisfactorias las siguientes definiciones a partir de la versión s-s:

a) Mediante cuantificación existencial:

$$\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash_{aO} \bar{\Omega} \text{ si y sólo si } \dot{\exists}\omega(\omega \in \bar{\Omega} \dot{\Rightarrow} (\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash_{ao} \omega)).$$

En este caso el miembro derecho se transformaría en:

$$(Mod(\bar{\Gamma}) \nsubseteq Mod(\upsilon)) \mathbin{\dot{\&}} (\dot{\exists}\omega(\omega \in \bar{\Omega} \dot{\Rightarrow} (Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon)))).$$

b) Mediante cuantificación unitaria:

$$\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash_{aO} \bar{\Omega} \text{ si y sólo si } \dot{\exists}!\omega(\omega \in \bar{\Omega} \dot{\Rightarrow} (\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash_{ao} \omega)).$$

En este caso el miembro derecho se transformaría en:

$$(Mod(\bar{\Gamma}) \nsubseteq Mod(\upsilon)) \dot{\&} (\dot{\exists}!\omega(\omega \in \bar{\Omega} \dot{\Rightarrow} (Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon)))).$$

3''- Relación inferencial abductiva ordinaria p-s plana:

$$\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{Ao} \omega \text{ si y sólo si}$$

$$((\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \nsubseteq (\bigcap_{\upsilon\in\bar{\Upsilon}} Mod(\upsilon))) \dot{\&} ((\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap Mod(\omega) \subseteq (\bigcap_{\upsilon\in\bar{\Upsilon}} Mod(\upsilon))).$$

Y aplicando propiedades conjuntistas sobre el miembro derecho éste da lugar a:

$$(Mod(\bar{\Gamma}) \nsubseteq Mod(\bar{\Upsilon})) \dot{\&} (Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\bar{\Upsilon})).$$

Para que esta relación inferencial fuese acumulativa en su tercera componente debe satisfacerse:

$$\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{Ao} \omega \text{ si y sólo si } \dot{\forall}\upsilon(\upsilon \in \bar{\Upsilon} \dot{\Rightarrow} (\bar{\Gamma}|\upsilon \Vdash_{ao} \omega)).$$

Tras substituir en el miembro de la derecha de esta equivalencia el enunciado inferencial abductivo por su caracterización en términos de modelos obtendríamos:

$$\dot{\forall}\upsilon(\upsilon \in \bar{\Upsilon} \dot{\Rightarrow} ((Mod(\bar{\Gamma}) \nsubseteq Mod(\upsilon)) \dot{\&} (Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon)))).$$

Lo cual es equivalente a:

$$(\dot{\forall}\upsilon(\upsilon \in \bar{\Upsilon} \dot{\Rightarrow} (Mod(\bar{\Gamma}) \nsubseteq Mod(\upsilon)))) \dot{\&}$$

$$(\dot{\forall}\upsilon(\upsilon \in \bar{\Upsilon} \dot{\Rightarrow} (Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\omega) \subseteq Mod(\upsilon)))).$$

Y aunque el segundo miembro de esta conjunción sí se satisface en general, no ocurre lo mismo con el primer miembro (un contraejemplo sencillo viene dado por el caso en el que exista una fórmula υ que satisfaga tanto $\upsilon \in \Upsilon$ como $\upsilon \in \Gamma$). Por lo tanto, podemos concluir que la relación inferencial abductiva ordinaria p-s plana no es acumulativa en su segunda componente respecto de la relación inferencial abductiva ordinaria s-s plana.

4''- Relación inferencial abductiva ordinaria p-p plana:

$$(\bar{\Gamma}|\bar{\Upsilon} \Vdash_{AO} \bar{\Omega}) \text{ si y sólo si}$$

$$((\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \nsubseteq (\bigcap_{\upsilon\in\bar{\Upsilon}} Mod(\upsilon))) \,\dot{\&}\, ((\bigcap_{\gamma\in\bar{\Gamma}} Mod(\gamma)) \cap (\bigcap_{\omega\in\bar{\Omega}} Mod(\bar{\Omega})) \subseteq (\bigcap_{\upsilon\in\bar{\Upsilon}} Mod(\upsilon)))$$

Y aplicando propiedades conjuntistas sobre el miembro derecho de la equivalencia éste da lugar a:

$$(Mod(\bar{\Gamma}) \nsubseteq Mod(\bar{\Upsilon})) \,\dot{\&}\, (Mod(\bar{\Gamma}) \cap Mod(\bar{\Omega}) \subseteq Mod(\bar{\Upsilon})).$$

Con procedimientos análogos a los que aparecen en los anteriores casos 2" y 3" podemos concluir que la relación inferencial abductiva ordinaria p-p plana en general no es acumulativa en su segunda componente respecto de otra similar s-p ni tampoco acumulativa en su tercera componente respecto de otra similar p-s.

Parte III

Nuevas herramientas formales para el tratamiento de la abducción en lógicas no clásicas

(capítulos 6 a 8)

Capítulo 6

Lógica de la comunicación y el cambio (LCC)

Con este capítulo comenzamos un nuevo bloque en el que nuestras aportaciones versan sobre cuestiones que, de entrada, no parecen estar relacionadas con la abducción, pero en las que hemos investigado teniendo a la vista, entre otros objetivos, su uso como herramientas que posibilitan la modelización de dicho tipo de inferencia en lógicas no clásicas. Las modelizaciones en estos sistemas tienen la ventaja de que permiten dar cuenta de de aspectos que no pueden ser recogidos por las lógicas clásicas. Pensemos, por ejemplo, en lo que dijimos en la sección primera del segundo capítulo acerca de cómo modelizar en lógica proposicional clásica la idea de que un hecho era sorprendente para algún agente. Finalmente no tuvimos más opción que identificar sorpresa con desconocimiento para un agente cualquiera y, a su vez, habíamos ya identificado el conocimiento de una proposición por un agente cualquiera con la posibilidad de inferirla a partir de una base de conocimientos materializada en un conjunto de premisas. Esto conlleva varios problemas que ya fueron identificados en el lugar citado, entre ellos la 'disolución' de la referencia al agente que realiza la operación abductiva, pero también la omnisciencia lógica y la imposibilidad de revisar las conclusiones alcanzadas. Hecho este análisis, que descubre una situación ciertamente insatisfactoria, parece muy razonable dirigir la mirada hacia otros sistemas lógicos que no nos obliguen, cual Procrusto, a forzar tanto la cuestión para su encaje en los 'moldes' admitidos por los sistemas clásicos.

Una opción muy natural es explorar el ámbito de la Lógica Epistémica Dinámica –entendida ésta en un sentido amplio que dé cuenta no sólo del conocimiento sino también de las creencias y acogiendo a una multiplicidad de sistemas lógicos distintos–, puesto que la abducción no deja de ser una operación que goza de ese rasgo modal. En esta línea se encuentran los interesantes trabajos de Fernando Soler y Fernando Velázquez [STVQ10], [STVQ12] y [STVQ14] y el de los anteriores junto a Ángel Nepomucento Nepomuceno-A.–Soler-F.–Velazquez-F.R.2013, todos ellos con el objetivo común de modelizar la abducción en el marco de la lógica epistémica dinámica –entendida ésta en sentido restringido, por lo que en adelante le agregaremos el adjetivo *convencional*–.

En esa línea de exploración emerge la lógica de la comunicación y el cambio (LCC) como uno de los mejores candidatos para avanzar en el objetivo propuesto. La clave está en que este sistema nos brinda la posibilidad de modelizar no sólo el cambio de conocimiento de ciertos agentes, sino también el cambio fáctico mismo. Veamos por qué es eso un elemento cuya consideración parece necesaria. Un hecho sorprendente a menudo tiene dos polos: el primero es el cambio en el mundo de los hechos (sea real o imaginado) y el segundo es la confrontación que el agente hace del hecho observado o imaginado con la teoría que resulte pertinente, proceso que desemboca en la constatación de la existencia de un fracaso inferencial. Así pues, el origen del detonante abductivo es un cambio fáctico. El gran inconveniente que inicialmente encontramos en la adopción de LCC radica en sus peores propiedades computacionales en comparación con la lógica epistémica dinámica convencional a la vez que en que el resultado de la transformación de programas genera multitud de componentes en las fórmulas. Por ello, y materializando la preocupación que en este tercer bloque de esta tesis doctoral mostramos hacia la implementación en herramientas informáticas de las nuevas modelizaciones en lógicas no clásicas, este trabajo consigue justamente avanzar en relación a los dos defectos indicados, logrando la eliminación de los componentes irrelevantes y la rebaja del coste de computación, tanto a nivel teórico en los casos típicos como a nivel aplicado en cualesquiera ejemplos concretos en los que sea implementado.

Veamos rápidamente cómo hemos estructurado el capítulo. En la primera sección contextualizaremos qué es LCC en el marco de la Lógica Epistémica Dinámica y en la segunda desgranaremos cuáles son sus 'ingredientes' básicos e igualmente presentaremos los axiomas de reducción y los transformadores de programas que aparecen en el artículo fundacional de LCC. En la tercera sección explicaremos cómo podemos obtener, a través del método ecuacional de Brzozowski, las expresiones regulares que representan el lenguaje aceptado por un autómata finito, deteniéndonos de manera especial en el caso más peliagudo: el cierre de Kleene. En la cuarta introduciremos el núcleo novedoso de nuestra propuesta: una definición alternativa de los transformadores de programas usando un tratamiento matricial del citado método de Brzozowski; con estos nuevos transformadores podremos definir una función alternativa de traducción desde LCC a PDL y un nuevo sistema axiomático. En la última sección haremos varios comentarios sobre la complejidad computacional teórica de este enfoque y sobre los costes computacionales efectivos para distintos casos de prueba que se han obtenido con cada uno de los dos métodos (para hacer la comparativa se han construido sendos programas en lenguaje Prolog y se han ejecutado para cada uno de esos casos de prueba). Mientras el método de Brzozowski y el usado en el artículo original de LCC [vBvEK06] son equivalentes, el primero es computacionalmente más eficiente; además, el tratamiento matricial presentado aquí es más sintético, simple y elegante, permitiendo por tanto una implementación más simple.

6.1. Qué es LCC

La Lógica Epistémica Dinámica, entendida como subárea dentro de la Lógica Deductiva y, por tanto, como un marco de trabajo que abarca diversos sistemas lógicos (entre ellos los indicados en [vDvdHK07] y [vB11]), tiene como objetivo principal el estudio de diferentes actitudes epistémicas correspondientes a uno o varios agentes así como la forma en que su conocimiento puede cambiar debido a las diversas acciones epistémicas que pueden realizar cada uno de ellos. Estas lógicas tienen típicamente dos componentes básicos: uno 'estático'–que usa algún modelo relacional multiagente de tipo kripkeano para representar la idea a estudiar (por ejemplo, el conocimiento o las creencias)–, y otro 'dinámico' –que usa operaciones sobre el modelo para representar las acciones epistémicas que modifican la configuración correspondiente a la noción elegida (entre ellas, acciones como la revisión de creencias, distintos tipos de anuncios e inferencias abductivas)–. Hagamos un inciso: esta forma de representar la dinámica es diferente de otros enfoques presentes en la literatura lógica –como, por ejemplo, la lógica temporal epistémica que aparecen en [FHMV95] y [PR03], en la cual en el modelo estático ya se describe no sólo la noción de referencia, sino también todas las posibles formas en que puede variar debido a la acción epistémica elegida (una comparación ente ambos enfoques puede verse en [vBGHP09])–.

Entre los diversos sistemas lógicos que se agrupan en la Lógica Epistémica Dinámica, la lógica de la comunicación y el cambio de Johan van Benthem, Jan van Eijck y Barteld Kooi [vBvEK06] se erige como uno de los más interesantes por su gran expresividad. Este sistema lógico posee un componente 'estático' que se concreta en una lógica dinámica proposicional (a la que designaremos más brevemente como PDL) –al estilo de la presentada en [HKT00]– interpretada epistémicamente, junto con la 'maquinaria' de los modelos de acción –como los que se recogen en[BMS98] y [BM04]– para representar el conocimiento acerca de las acciones epistémicas (es decir, como componente 'dinámico'). El sistema LCC nos permite modelar no sólo múltiples acciones epistémicas mediante las que el agente capta de una fuente externa a él nueva información (como, por ejemplo, anuncios públicos, privados o secretos) o procesos por los que puede extraer nuevas conclusiones a partir de la información que ya poseía (por ejemplo, inferencias abductivas), sino también el cambio fáctico.

Una característica clave de esta lógica es que caracteriza el efecto de la ejecución de un modelo de acción mediante *axiomas de reducción*: fórmulas válidas a través de las cuales es posible reescribir una fórmula con modalidades de actualización de modelos de acción en otra equivalente sin dichas modalidades, reduciendo así LCC a PDL y, por lo tanto, proporcionando un análisis composicional para una amplia gama de eventos informativos. Por ejemplo, el axioma de reducción para la conjunción nos dice que una conjunción $\varphi \wedge \psi$ siempre será verdad después de que cualquier modelo de acción apuntado $(\mathsf{U}, \mathsf{e}_i)$ sea ejecutado –lo cual anotamos como $[\mathsf{U}, \mathsf{e}_i](\varphi \wedge \psi)$–, si y sólo si tanto φ como ψ son verdaderos después de ejecutar tal acción –lo cual anotamos como $[\mathsf{U}, \mathsf{e}_i]\varphi \wedge [\mathsf{U}, \mathsf{e}_i]\psi$–. Otro ejemplo viene dado por el axioma de reducción para fórmulas atómicas p, el cual reduce efectivamente una fórmula LCC $[\mathsf{U}, \mathsf{e}_i]p$ en una fórmula sobre las condiciones de la acción e_i y sus efectos sobre p. Para comprender mejor ambos ejemplos mírese en la página 390 la tabla 2 (6.2).

Como era de esperar, el axioma de reducción crucial es el que caracteriza el efecto de la ejecución de un modelo de acción sobre las modalidades epistémicas programas PDL (aquí representados como π):

$$[\mathsf{U}, \mathsf{e}_i][\pi]\varphi \;\leftrightarrow\; \bigwedge_{j=0}^{n-1}[T_{ij}^{\mathsf{U}}(\pi)][\mathsf{U}, \mathsf{e}_j]\varphi.$$

Este axioma, que analizaremos con mayor detalle más adelante, caracteriza el cambio epistémico que el modelo de acción U produce: después de ser ejecutado cualquier modelo de acción apuntado $(\mathsf{U}, \mathsf{e}_i)$, cualquier π-camino en el modelo epistémico multiagente resultante conduce a un φ-mundo (es decir, $[\mathsf{U}, \mathsf{e}_i][\pi]\varphi$), si y sólo si, para cada acción e_j en el modelo de acción U, cada $T_{ij}^{\mathsf{U}}(\pi)$-camino en el modelo epistémico multiagente original termina en un mundo que, después de la ejecución de cada $(\mathsf{U}, \mathsf{e}_j)$, satisfará φ. El axioma se basa en la correspondencia entre los modelos de acción y autómatas finitos investigada en [vBK04b] y su principal componente, el denominado *transformador de programas* T_{ij}^{U}, sigue la traducción de Kleene desde autómatas finitos a expresiones regulares expuesta en [Kle56].

En este capítulo proponemos una definición alternativa de los transformadores de programas, utilizando para ello un tratamiento matricial del método ecuacional de Brzozowski [Brz64] que permite la obtención de una expresión que representa al lenguaje aceptado por un autómata finito dado (usado de esta manera por primera vez por [Con71]). La principal ventaja de esta definición alternativa es su menor complejidad, permitiendo así implementaciones más eficiente de cualquier método basado en LCC y, en particular, de la operaciones epistémicas consistentes en la realización de inferencias abductivas.

6.2. Presentación formal de LCC

Nos parece que resulta imprescindible que, antes de explicar nuestras aportaciones novedosas, presentemos siquiera brevemente los componentes básicos de este sistema lógico: su lenguaje, su semántica y un sistema axiomático para el mismo. A lo largo de la sección, designaremos mediante Var a un conjunto de fórmulas atómicas (concretamente variables proposicionales) y por Ag a un conjunto finito de agentes.

Comenzamos esta presentación de los 'ingredientes' básicos de LCC fijándonos en las estructuras involucradas y, en primer lugar, en la estructura sobre la que interpretaremos las fórmulas.

Definición 174 (Modelo epistémico multiagente)**.**
Un modelo epistémico multiagente[1] M *es una terna* $(W, \langle R_a \rangle_{a \in Ag}, V)$ *donde* $W \neq \varnothing$ *es un conjunto de mundos,* $R_a \subseteq (W \times W)$ *es una relación epistémica para cada*

[1] Para no hacer excesivamente complicada la lectura omitiremos en el resto del capítulo la palabra *multiagente* cuando nos refiramos a este concepto.

agente $a \in Ag$ *y* $V : Var \to \wp(W)$ *es una función de evaluación de las fórmulas atómicas.*

Como es habitual, cada mundo posible puede ser interpretado como un estado posible de hechos (cada uno de ellos definido por una evaluación atómica), y cada relación R_a representa la incertidumbre de un agente a sobre la situación: en el mundo w, para el agente a todos los mundos u tal que wR_au son epistémicamente posibles –es decir, son vistos como posibles por este agente–. Mostramos un ejemplo de modelo epistémico en la figura 1 (6.2).

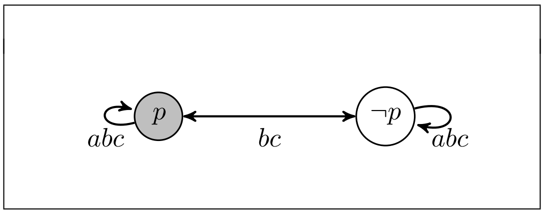

Fig. 1 (6.2): Un modelo epistémico M con un mundo actual que satisface p (círculo gris) y un mundo posible que satisface $\neg p$ (círculo blanco). Las flechas representan las relaciones de accesibilidad R_a, R_b y R_c, de modo que sólo el agente a conoce actualmente p, mientras que b y c lo desconocen (en el sentido de que no saben si se satisface p o $\neg p$).

A continuación veamos la estructura que se utilizará para representar el conocimiento acerca de las acciones epistémicas.

Definición 175 (Modelo de acción multiagente)**.**
Sea $\mathcal{L}$ *un lenguaje construido sobre* Var *y* Ag *que se puede interpretar sobre modelos epistémicos multiagentes. Un* $\mathcal{L}$-modelo de acción multiagente[2] U *es una tetra-upla* $(\mathsf{E}, \langle \mathsf{R}_a \rangle_{a \in Ag}, \mathsf{pre}, \mathsf{sub})$ *donde* $\mathsf{E} = \{\mathsf{e}_0, \ldots, \mathsf{e}_{n-1}\}$ *es un conjunto finito no vacío de acciones,* $\mathsf{R}_a \subseteq (\mathsf{E} \times \mathsf{E})$ *es una relación binaria para cada* $a \in Ag$*,* $\mathsf{pre} : \mathsf{E} \to \mathcal{L}$ *es una función precondición que asigna una fórmula* $\mathsf{pre}(\mathsf{e}) \in \mathcal{L}$ *a cada acción* $\mathsf{e} \in \mathsf{E}$ *y* $\mathsf{sub} : (\mathsf{E} \times Var) \to \mathcal{L}$ *es una función postcondición que asigna una fórmula* $\mathsf{sub}(\mathsf{e}, p) \in \mathcal{L}$ *a cada átomo* $p \in Var$ *para cada acción* $\mathsf{e} \in \mathsf{E}$*. Con respecto a la función postcondición, se requiere que* $\mathsf{sub}(\mathsf{e}, p) \neq p$ *sólo para un número finito de átomos* p[3]*. Enfatizamos el hecho de que en esta definición el lenguaje* $\mathcal{L}$ *es sólo un parámetro.*

[2] Para no hacer excesivamente complicada la lectura omitiremos en el resto del capítulo la palabra *multiagente* cuando nos refiramos a este concepto.

[3] Se necesitan estos requisitos de finitud (dominio finito y sólo un número finito de átomos afectados por la función de postcondición) para permitir que el modelo de acción apuntado (U, e)

Del mismo modo que cada relación R_a describe la incertidumbre del agente a acerca de la situación, cada R_a representa la incertidumbre del agente acerca de la acción que se ejecuta: $\mathsf{e}\mathsf{R}_a\mathsf{f}$ indica que a puede concebir f desde e.

Ejemplo 176.
La figura 2 (6.2) ilustra tres modelos de acción para anuncios en un conjunto de tres agentes de $Ag = \{a, b, c\}$. *Cada una de las acciones, por ejemplo* f, *es puramente epistémica (esto es, preservadora de hechos), así que* $\mathsf{sub}(\mathsf{f}, p) = p$ *para cada* $p \in Var$. *Las flechas etiquetadas denotan las relaciones de accesibilidad* R_a, R_b *o* R_c*; un círculo gris indica la acción que se ejecuta realmente, mientras que otras acciones (que algunos agentes erróneamente creen que es posible que ocurran) están representadas por círculos blancos. Las precondiciones se escriben debajo de las acciones correspondientes.*

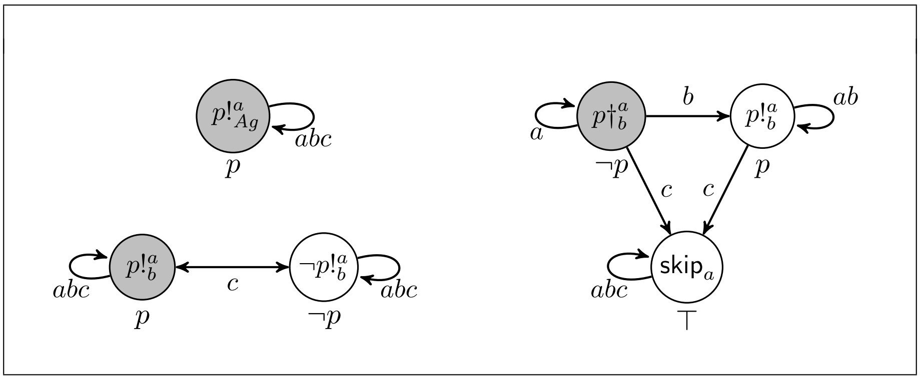

Fig. 2 (6.2): (Arriba a la izquierda) Anuncio público verdadero de la proposición p por a (denotado $p!^a_{Ag}$). (Abajo a la izquierda) Anuncio privado de a a b sobre la proposición p (denotado $p!^a_b$) –aquí el agente c sólo conoce el tema del mensaje–. (Derecha) Mentira secreta de la proposición p realizada por a a b (denotada $p\dagger^a_b$), la cual es aceptada por b como verdad, es decir, como si fuese $p!^a_b$); el agente c no tiene conciencia de ninguna comunicación entre a y b.

Como se ha mencionado, los modelos de acción representan tanto las acciones como el conocimiento acerca de estas acciones en el sistema. Los modelos de acción modifican los modelos epistémicos multiagentes de la siguiente manera:

–un par en el que U es un $\mathcal{L}$-modelo de acción y e una acción distinguida en él– esté asociado a un objeto sintáctico y, por lo tanto, pueda ser utilizado dentro de las fórmulas. Para más detalles, se puede consultar la discusión acerca de los modelos de acción en la sección 6.1 de [vDvdHK07].

Definición 177 (Ejecución de actualización)**.**
Sea $M = (W, \langle R_a \rangle_{a \in Ag}, V)$ un modelo epistémico y $\mathsf{U} = (\mathsf{E}, \langle \mathsf{R}_a \rangle_{a \in Ag}, \mathsf{pre}, \mathsf{sub})$ un $\mathcal{L}$-modelo de acción, ambos sobre Var y Ag. Recordemos que $\mathcal{L}$ es cualquier lenguaje construido sobre Var y Ag que se puede interpretar sobre modelos epistémicos multiagentes, por lo que podemos asumir la existencia de una función $[\![\cdot]\!]^M$ que devuelve los mundos de M en los que la fórmula $\mathcal{L}$ se mantiene.

La ejecución de actualización de U sobre M produce un modelo epistémico

$$(M \otimes \mathsf{U}) = (W^{M \otimes \mathsf{U}}, \langle R_a^{M \otimes \mathsf{U}} \rangle_{a \in Ag}, V^{M \otimes \mathsf{U}}) \quad \textit{dado por:}$$

$$\begin{aligned}
W^{M \otimes \mathsf{U}} &:= \{\ (w, \mathsf{e}) \in W \times \mathsf{E} \ \mid \ w \in [\![\mathsf{pre}(\mathsf{e})]\!]^M \ \} \\
R_a^{M \otimes \mathsf{U}} &:= \{\ \langle (w, \mathsf{e}), (v, \mathsf{f}) \rangle \in W^{M \otimes \mathsf{U}} \times W^{M \otimes \mathsf{U}} \ \mid \ w R_a v \text{ y } \mathsf{e}\, \mathsf{R}_a \mathsf{f}\ \} \\
V^{M \otimes \mathsf{U}}(p) &:= \{\ (w, \mathsf{e}) \in W^{M \otimes \mathsf{U}} \mid w \in [\![\mathsf{sub}(\mathsf{e}, p)]\!]^M \ \}
\end{aligned}$$

para cada $a \in Ag$ y $p \in Var$.

Por lo tanto, la ejecución de la actualización U sobre M produce un modelo epistémico $M \otimes \mathsf{U}$ cuyo dominio es el producto cartesiano restringido de los dominios de los modelos originales. En $M \otimes \mathsf{U}$, un mundo (w, e) satisface un átomo p si y sólo si w satisfacía la fórmula $\mathsf{sub}(\mathsf{e}, p)$ en M; finalmente, un agente a ve un mundo (u, f) como posible desde (w, e) si y sólo si ve u desde w (en M) y ve f desde e (en U). Veamos la figura 3 (6.2) para una ilustración de diferentes actualizaciones en un modelo epistémico.

Con las estructuras semánticas ya definidas, es el momento de definir el lenguaje que se utiliza para describirlas. Téngase en cuenta que las fórmulas (y programas) del lenguaje $\mathcal{L}_{LCC}$ son definidas simultáneamente con la noción de $\mathcal{L}_{LCC}$-modelo de acción (es decir, un modelo de acción que usa $\mathcal{L}_{LCC}$ para sus funciones precondición y postcondición).

Definición 178 (El lenguaje $\mathcal{L}_{LCC}$)**.**
Las fórmulas φ y los programas π del lenguaje $\mathcal{L}_{LCC}$ vienen dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}
\varphi \quad &::= \quad \top \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid [\pi]\varphi \mid [\mathsf{U}, \mathsf{e}]\varphi \\
\pi \quad &::= \quad a \mid ?\varphi \mid \pi_1 ; \pi_2 \mid \pi_1 \cup \pi_2 \mid \pi^*
\end{aligned}$$

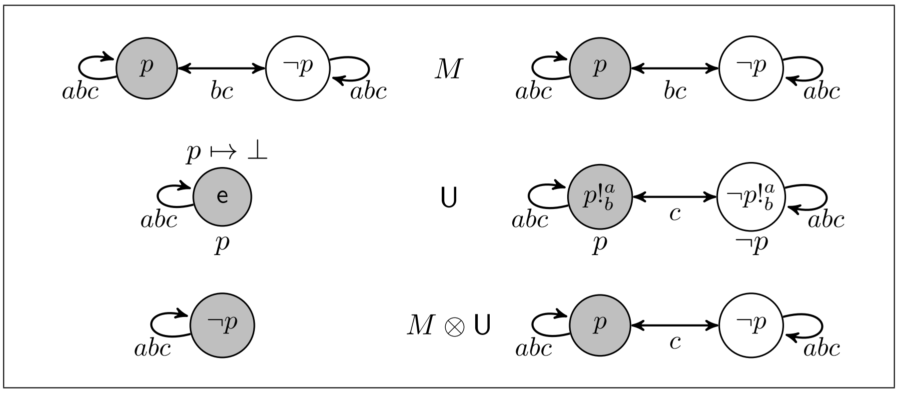

Fig. 3 (6.2): Dos ejemplos de ejecución de actualización en el modelo epistémico M de la figura 1 (6.2), donde sólo el agente a conoce la proposición p. (Izquierda) La acción e representa un cambio público (es decir, públicamente observable) a la proposición $\neg p$; notemos que la postcondición está escrita encima de la acción. Después de la ejecución, se convierte en conocimiento común la proposición $\neg p$. (Derecha) Un anuncio privado de a a b sobre la proposición p resulta en un nuevo modelo en el que es público que b ahora conoce si p, y sólo c se mantiene ignorante sobre dicha proposición.

donde $p \in Var$, $a \in Ag$ y (U, e) *es un par con un $\mathcal{L}_{LCC}$-modelo de acción* U *y una acción* e *de este modelo.*

Como la definición establece, el conjunto de fórmulas LCC contiene las proposiciones atómicas y $\top$, y está cerrado bajo el negador, el conjuntor, y los operadores modales $[\pi]$ (siendo π un programa) y $[\mathsf{U}, \mathsf{e}]$ (para U un $\mathcal{L}_{LCC}$-modelo de acción y e una acción en él)[4]. Del otro lado, el conjunto de programas LCC contiene programas básicos para agentes a y tests $?\varphi$ (siendo φ una fórmula), y ello está cerrado bajo composición secuencial (";"), elección no determinista ("$\cup$") y cierre de Kleene ("*").

Sólo queda definir la función $[\![\cdot]\!]^M$ asociada a $\mathcal{L}_{LCC}$ que recoge los mundos de un modelo epistémico dado (M) en el que una fórmula $\mathcal{L}_{LCC}$ dada se mantiene. En el caso de LCC,esta función también expresa los pares de mundos relacionados por un programa $\mathcal{L}_{LCC}$ dado.

[4] A partir de ahora, todos los modelos de acción se supone que son $\mathcal{L}_{LCC}$-modelos de acción.

Definición 179 (Semántica de $\mathcal{L}_{LCC}$).
Sean un modelo epistémico $M = (W, \langle R_a \rangle_{a \in Ag}, V)$ *y un modelo de acción* $\mathsf{U} = (\mathsf{E}, \langle \mathsf{R}_a \rangle_{a \in Ag}, \mathsf{pre}, \mathsf{sub})$. *La función* $[\![\cdot]\!]^M$*, devuelve tanto los mundos* W *en los que una* $\mathcal{L}_{LCC}$*-fórmula se mantiene como los pares de* $W \times W$ *en los que ocurre eso para un* $\mathcal{L}_{LCC}$*-programa; su definición distingue los siguientes casos:*

Para fórmulas:

$$
\begin{array}{ll}
[\![\top]\!]^M & := W \\
[\![p]\!]^M & := V(p) \\
[\![\neg\varphi]\!]^M & := W \setminus [\![\varphi]\!]^M \\
[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]^M & := [\![\varphi_1]\!]^M \cap [\![\varphi_2]\!]^M \\
[\![[\pi]\varphi]\!]^M & := \{w \in W \mid \forall v((w,v) \in [\![\pi]\!]^M \Rightarrow v \in [\![\varphi]\!]^M)\} \\
[\![[\mathsf{U},\mathsf{e}]\varphi]\!]^M & := \{w \in W \mid w \in [\![\mathsf{pre}(\mathsf{e})]\!]^M \Rightarrow (w,\mathsf{e}) \in [\![\varphi]\!]^{M \otimes \mathsf{U}}\}
\end{array}
$$

Para programas:

$$
\begin{array}{ll}
[\![a]\!]^M & := R_a \\
[\![?\varphi]\!]^M & := \mathsf{Id}_{[\![\varphi]\!]^M} \\
[\![\pi_1;\pi_2]\!]^M & := [\![\pi_1]\!]^M \circ [\![\pi_2]\!]^M \\
[\![\pi_1 \cup \pi_2]\!]^M & := [\![\pi_1]\!]^M \cup [\![\pi_2]\!]^M \\
[\![\pi^*]\!]^M & := ([\![\pi]\!]^M)^*
\end{array}
$$

Tabla 1 (6.2): Semántica: reglas de evaluación de $\mathcal{L}_{LCC}$.

donde $\circ$ *y* * *son la composición y el operador de cierre reflexivo transitivo, respectivamente. Destacamos dos casos especiales para el programa* test*:* $[\![?\bot]\!]^M = \varnothing$ *y* $[\![?\top]\!]^M = \mathsf{Id}_W$.

Aunque LCC se puede ver de manera abstracta como la lógica de los programas regulares (la parte PDL) más los modelos de acción (modalidades de la forma $[\mathsf{U}, \mathsf{e}]$), es tamién ilustrativo indagar su interpretación epistémica, en particular, la de sus programas de PDL. Los programas 'agente' básicos $a \in Ag$ producen fórmulas de la forma $[a]\varphi$, leídas simplemente como *el agente a conoce / cree φ* como en la Lógica Epistémica Dinámmica convencional. Hay más programas complejos que también tienen lecturas epistémicas. Las fórmulas de la forma $[\pi_1; \pi_2]\varphi$, que consisten en la composición secuencial de π_1 y a continuación π_2, puede ser leído como π_1 *conoce / cree que* π_2 *conoce / cree* φ, y por tanto pueden ser usadas para expresar *conocimiento anidado / creencia anidada*; las fórmulas de la forma $[\pi_1 \cup \pi_2]\varphi$, que consisten en la unión de las relaciones para π_1 y π_2, puede ser leída como *tanto* π_1 *como* π_2 *conocen / creen* φ, y por tanto pueden ser usadas para expresar *conocimiento / creencia de grupo*; finalmente, las fórmulas de la forma $[\pi^*]\varphi$, que consisten del cierre reflexivo y transitivo de las relaciones para π, puede ser leído como *φ es el caso, π lo conoce, π conoce que lo conoce, y así sucesivamente*, y por tanto puede ser usado para expresar *conocimiento común* (o, si $\pi^+ := \pi; \pi^*$ se utiliza en lugar de π^*, *creencia común*). Las modalidades que involucran modelos de acción se limitan a afirmar los efectos de las acciones, con fórmulas de la forma $[\mathsf{U}, \mathsf{e}]\varphi$ leídas como *φ es el caso después de cualquier ejecución de la acción apuntada* (U, e).

Sistema axiomático El sistema axiomático para LCC, mostrado en la tabla 2 (6.2), combina el sistema axiomático conocido de su fragmento PDL (los nueve primeros) [HKT00]) con axiomas de *recursión* para su fragmento de modelo de acción (los seis últimos axiomas). Intuitivamente, los axiomas de recursión son fórmulas válidas caracterizando una situación *después de* la ejecución de una actualización en términos de una situación *antes de* tal actualización, y, por tanto, que indica cómo reescribir una fórmula con un operador modal de modelos de acción como otra fórmula equivalente pero sin dicho operador. Por tanto, mientras la corrección se sigue de la validez de estos nuevos axiomas, la completitud se sigue de la completitud del sistema básico[5].

En nuestro caso particular, los axiomas de recursión para las proposiciones atómicas y las constantes booleanas / los operadores booleanos son estándar para los modelos de acción con cambio óntico (es decir, con cambio en la función de evaluación) [vDK08]: el axioma (*atom*) establece que un átomo p será el caso *después de* cualquier ejecución de actualización con el modelo de acción U y la acción e (es decir, $[\mathsf{U}, \mathsf{e}]p$) si y sólo si *antes de* la actualización la fórmula $\mathsf{sub}(\mathsf{e}, p)$ se mantiene cada vez que $\mathsf{pre}(\mathsf{e})$ se mantiene (así pues, $\mathsf{pre}(\mathsf{e}) \rightarrow \mathsf{sub}(\mathsf{e}, p)$); los axiomas (*neg*) y (*conj*) afirman que se conmuta la ejecución de actualización con la negación

[5] Véase el capítulo 7 de [vDvdHK07] para una extensa explicación de esta técnica.

(*taut*)	Tautologías proposicionales
(*K*)	$[\pi](\varphi_1 \to \varphi_2) \to ([\pi]\varphi_1 \to [\pi]\varphi_2)$
(*test*)	$[?\varphi_1]\varphi_2 \leftrightarrow (\varphi_1 \to \varphi_2)$
(*sec*)	$[\pi_1; \pi_2]\varphi \leftrightarrow [\pi_1][\pi_2]\varphi$
(*elec*)	$[\pi_1 \cup \pi_2]\varphi \leftrightarrow [\pi_1]\varphi \wedge [\pi_2]\varphi$
(*mix*)	$[\pi^*]\varphi \leftrightarrow \varphi \wedge [\pi][\pi^*]\varphi$
(*ind*)	$\varphi \wedge [\pi^*](\varphi \to [\pi]\varphi)) \to [\pi^*]\varphi$
(*MP*)	De $\vdash \varphi_1$ y $\vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ se infiere $\vdash \varphi_2$
(N_π)	De $\vdash \varphi$ se infiere $\vdash [\pi]\varphi$
(*top*)	$[\mathsf{U}, \mathsf{e}]\top \leftrightarrow \top$
(*atom*)	$[\mathsf{U}, \mathsf{e}]p \leftrightarrow (\mathsf{pre}(\mathsf{e}) \to \mathsf{sub}(\mathsf{e}, p))$
(*neg*)	$[\mathsf{U}, \mathsf{e}]\neg\varphi \leftrightarrow (\mathsf{pre}(\mathsf{e}) \to \neg[\mathsf{U}, \mathsf{e}]\varphi)$
(*conj*)	$[\mathsf{U}, \mathsf{e}](\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leftrightarrow ([\mathsf{U}, \mathsf{e}]\varphi_1 \wedge [\mathsf{U}, \mathsf{e}]\varphi_2)$
(*prog*)	$[\mathsf{U}, \mathsf{e}_i][\pi]\varphi \leftrightarrow \bigwedge_{j=0}^{n-1}[T_{ij}^{\mathsf{U}}(\pi)][\mathsf{U}, \mathsf{e}_j]\varphi$
(N_{U})	De $\vdash \varphi$ se infiere $\vdash [\mathsf{U}, \mathsf{e}]\varphi$

Tabla 2 (6.2): Cálculo para LCC en [vBvEK06]: cálculo para PDL (los nueve primeros axiomas) junto al axioma de reducción y la regla de necesitación para $[\mathsf{U}, \mathsf{e}]$ **(los 6 restantes).**

(módulo su precondición) y se distribuye sobre conjunción, respectivamente.

El axioma de recursión más importante (*prog*), caracteriza el efecto de un modelo de acción sobre programas LCC. Afirma que después de cualquier ejecución de actualización con U en e_i, cada π-camino en el modelo epistémico resultante dará lugar a un φ-mundo (es decir, $[\mathsf{U}, \mathsf{e}_i][\pi]\varphi$) si y sólo si antes de la actualización cada camino $T_{ij}^{\mathsf{U}}(\pi)$ conduce a un mundo que satisfará φ después de cualquier ejecución con U en e_j donde e_j es alguna acción de U, $\bigwedge_{j=0}^{n-1}[T_{ij}^{\mathsf{U}}(\pi)][\mathsf{U}, \mathsf{e}_j]\varphi$. En este axioma, el transformador de programas T_{ij}^{U} es crucial, tomando un programa LCC en el que π representa un camino sobre $M \otimes \mathsf{U}$ y devolviendo un programa LCC en el que $T_{ij}^{\mathsf{U}}(\pi)$ representa un camino 'correspondiente' en M, teniendo especial cuidado de que tal camino también se puede producir en el modelo de acción U. Un transformador de programas sigue la traducción de Kleene de autómatas finitos a expresiones regulares [Kle56],y es formalmente definido como sigue.

Definición 180 (Transformador de programas (v. [vBvEK06])). *Sea* $\mathsf{U} = (\mathsf{E}, \langle \mathsf{R}_a \rangle_{a \in Ag}, \mathsf{pre}, \mathsf{sub})$ *un modelo de acción con* $\mathsf{E} = \{\mathsf{e}_0, \ldots, \mathsf{e}_{n-1}\}$. *El* transformador de programas T^{U}_{ij} *(*$i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$*) en el conjunto de programas LCC es definido como:*

$$T^{\mathsf{U}}_{ij}(a) := \begin{cases} ?\mathsf{pre}(e_i); a & \text{si } \mathsf{e}_i \mathsf{R}_a \mathsf{e}_j \\ ?\bot & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$T^{\mathsf{U}}_{ij}(?\varphi) := \begin{cases} ?(\mathsf{pre}(\mathsf{e}_i) \wedge [\mathsf{U}, \mathsf{e}_i]\varphi) & \text{si } i = j \\ ?\bot & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$T^{\mathsf{U}}_{ij}(\pi_1; \pi_2) := \bigcup_{k=0}^{n-1} (T^{\mathsf{U}}_{ik}(\pi_1); T^{\mathsf{U}}_{kj}(\pi_2))$$

$$T^{\mathsf{U}}_{ij}(\pi_1 \cup \pi_2) := T^{\mathsf{U}}_{ij}(\pi_1) \cup T^{\mathsf{U}}_{ij}(\pi_2)$$

$$T^{\mathsf{U}}_{ij}(\pi^*) := K^{\mathsf{U}}_{ijn}(\pi)$$

Estando K^{U}_{ijn} definido inductivamente como sigue:

$$K^{\mathsf{U}}_{ij0}(\pi) := \begin{cases} ?\top \cup T^{\mathsf{U}}_{ij}(\pi) & \text{si } i = j \\ T^{\mathsf{U}}_{ij}(\pi) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$K^{\mathsf{U}}_{ij(k+1)}(\pi) = \begin{cases} (K^{\mathsf{U}}_{kkk}(\pi))^* & \text{si } i = k = j \\ (K^{\mathsf{U}}_{kkk}(\pi))^*; K^{\mathsf{U}}_{kjk}(\pi) & \text{si } i = k \neq j \\ K^{\mathsf{U}}_{ikk}(\pi); (K^{\mathsf{U}}_{kkk}(\pi))^* & \text{si } i \neq k = j \\ K^{\mathsf{U}}_{ijk}(\pi) \cup (K^{\mathsf{U}}_{ikk}(\pi); (K^{\mathsf{U}}_{kkk}(\pi))^*; K^{\mathsf{U}}_{kjk}(\pi)) & \text{si } i \neq k \neq j \end{cases}$$

Tabla 3 (6.2): Transformador de programas (v. [vBvEK06]).

Ejemplo 181.
En el modelo de acción de la figura 3 (6.2) (izquierda), el axioma para el cambio público a $\neg p$ *reduce una consecuencia epistémica* $[\mathsf{U},\mathsf{e}][a]\neg p$ *a un requisito antes de la ejecución (a saber,* $[?\mathsf{pre}(\mathsf{e});a][\mathsf{U},\mathsf{e}]\neg p$*), el cual es necesariamente verdad –ver más abajo la columna izquierda–. De forma similar, en el modelo de acción de un anuncio mentiroso privado según la figura 2 (6.2) (derecha), enumera las acciones como* $p\dagger^a_b = \mathsf{e}_0$*,* $p!^a_b = \mathsf{e}_1$ *y* $\mathsf{skip}_a = \mathsf{e}_2$*. Entonces, el axioma para el anuncio mentiroso* $p\dagger^a_b$ *transforma la* mentira creída $[\mathsf{U},p\dagger^a_b][b]p$ *en un requisito anterior a la ejecución, también una tautología –ver la columna de la derecha–.*

$$
\begin{array}{llll}
 & [\mathsf{U},\mathsf{e}][a]\neg p & & [\mathsf{U},p\dagger^a_b][b]p \\
\equiv & [?\mathsf{pre}(\mathsf{e});a][\mathsf{U},\mathsf{e}]\neg p & \equiv & [T^{\mathsf{U}}_{01}(b)][\mathsf{U},p!^a_b]p \\
\equiv & [?p;a]\Big(\mathsf{pre}(\mathsf{e})\to\neg[\mathsf{U},\mathsf{e}]p\Big) & \equiv & [?\mathsf{pre}(p\dagger^a_b);b][\mathsf{U},p!^a_b]p \\
\equiv & p\to[a]\Big(p\to\neg(\mathsf{pre}(\mathsf{e})\to\mathsf{sub}(\mathsf{e},p))\Big) & \equiv & [?\neg p;b]\Big(\mathsf{pre}(p!^a_b)\to\mathsf{sub}(p!^a_b,p)\Big) \\
\equiv & p\to[a]\Big(p\to\neg(p\to\bot)\Big) & \equiv & \neg p\to[b]\Big(p\to p\Big) \\
\equiv & p\to[a]\Big(p\to(p\wedge\top)\Big) & \equiv & \neg p\to[b]\top \\
\equiv & p\to[a]\top \quad\equiv\quad \top & \equiv & \top
\end{array}
$$

6.3. Transformación de programas a través de las ecuaciones de Brzozowski

Este documento propone una definición alternativa del transformador de programas que se centra principalmente en el caso del operador cierre de Kleene. Para todo programa π definimos una matriz $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)$ cuyas celdas son programas LCC. En esta matriz, $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,j]$ (la celda en la fila i-ésima y la columna j-ésima) corresponde a la transformación (es decir, al camino en M) de π desde e_i a e_j (es decir, el camino en $M\otimes\mathsf{U}$). La matriz $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)$ puede interpretarse como la matriz de adyacencia de un grafo dirigido etiquetado cuyos nodos son las acciones en E y cada arista de e_i a e_j es etiquetada con la transformación de π desde e_i a e_j.

Antes de presentar las definiciones formales, introducimos nuestro método de manera informal. En los siguientes párrafos presentamos ejemplos de modelos de acción y etiquetamos las aristas tanto con un programa de LCC como con su transformación. Las etiquetas tienen dos partes separadas por una barra vertical, la parte izquierda es el programa LCC y la parte derecha es su transformación. Por ejemplo, en el diagrama de los agentes, la etiqueta de e_0 a e_1

$$a \ \mid ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0); a \qquad \text{significa} \qquad \mu^{\mathsf{U}}(a)[0,1] = ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0); a.$$

Agente Supongamos que el modelo de acción U contiene una arista desde e_i a e_j etiquetada con el agente a. Sea w un estado en el modelo epistémico M. ¿Qué tenemos que comprobar con el fin de garantizar que, después de ejecutar $(\mathsf{U}, \mathsf{e}_i)$ sobre (M, w), un a-camino desde (w, e_i) a algún estado (w', e_j), persistirá $M \otimes \mathsf{U}$? Primero necesitamos comprobar en M que e_i es ejecutable en w, y después que existe un a-camino desde w a w'. Esto se muestra gráficamente en la siguiente figura:

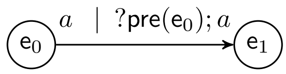

Fig. 4 (6.3): Modelo de acción para programas de tipo agente.

Obviamente, si no hay un a-camino desde e_i hasta e_j en U, entonces la transformación de a es $?\bot$, es decir $\mu^{\mathsf{U}}(a)[i,j] = ?\bot$.

Test La transformación de un test desde algún e_i hasta él mismo es justamente un test. Pero la comprobación tiene dos partes, ya que con el fin de testar $?\varphi$ en (w, e_i) deberíamos primero comprobar que $\mathsf{pre}(\mathsf{e}_i)$ es verdad en w. Entonces, como la ejecución de la acción e_i puede cambiar la función de valoración, lo que testamos en w no es sólo φ sino $[\mathsf{U}, \mathsf{e}_i]\varphi$. La transformación de un test de algún estado a otro estado diferente es siempre $?\bot$.

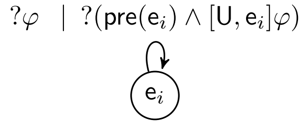

Fig. 5 (6.3): Modelo de acción para programas de tipo test.

Elección no determinista La transformación de la elección $\pi_1 \cup \pi_2$ es la elección de las transformaciones de ambos programas. Pero, dado que la elección de algún programa π con $?\bot$ es equivalente a π, podemos simplificar algunos casos.

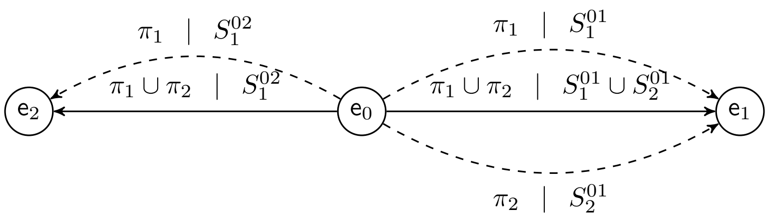

Fig. 6 (6.3): Modelo de acción para programas de tipo elección no determinista.

En el diagrama anterior, las transformaciones de algunos π_1 y π_2 son etiquetadas con líneas de trazos. Cuando una línea de este tipo entre dos nodos no existe, la transformación debe ser $?\bot$. Las etiquetas de la forma S_i^{jk} representan programas LCC correspondientes a la transformación de π_i desde e_j a e_k. Las transformaciones de $\pi_1 \cup \pi_2$ Se muestran con líneas continuas.

Composición secuencial El estado e_k es alcanzable desde e_i a través de la concatenación de π_1 y π_2 si y sólo si hay algún algún estado intermedio e_j que es alcanzable desde e_i a través de un π_1-camino y hay un π_2-camino desde e_j a e_k. Sin embargo, pueden haber diferentes estados intermedios con estas propiedades (e_1 y e_2 en el ejemplo de más abajo). Así pues, la transformación de la concatenación $\pi_1; \pi_2$ es la elección de todas las diferentes concatenaciones posibles (ver más abajo).

Hasta ahora, hemos procedido de una manera muy similar a la de la definición 180, simplemente simplificando algunos casos obvios tales como $\pi \cup ?\bot$, el cual se deduce a π. La principal novedad de nuestra transformación está en el cierre de Kleene, dado que nosotros utilizamos un método propuesto por Brzozowski [Brz64], presentado aquí en formato matricial.

clausura de Kleene El siguiente grafo será usado para ilustrar la creación de las transformaciones de π^* dadas las de π. Aquí es donde nuestros transformadores de

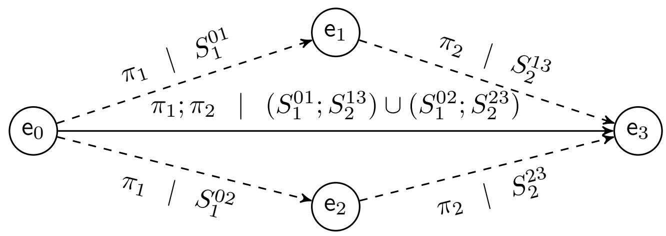

Fig. 7 (6.3): Modelo de acción para programas de tipo composición secuencial.

programas son sustancialmente diferentes de los de [vBvEK06].

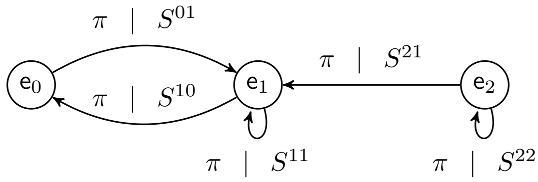

Fig. 8 (6.3): Modelo de acción para programas de tipo clausura de Kleene.

En el gráfico anterior, las etiquetas S^{ij} representan las transformaciones de π desde e_i a e_j –cuando no hay una flecha entre nodos (refiriéndonos tanto a los casos de dos nodos diferentes como a los casos de flechas reflexivas), se supone que el programa correspondiente es $?\bot$–. Con el fin de encontrar las etiquetas X^{ij} para las transformaciones de π^*, seguimos un método ecuacional propuesto por primera vez por Brzozowski [Brz64]. Observemos, por ejemplo, cómo un π^*-camino desde e_1 a e_0 podría comenzar con S^{10} (una instancia de π desde e_1 a e_0) y después continuar con X^{00} (una instancia de π^* desde e_0 a e_0), pero podría también empezar con S^{11} (una instancia de π desde e_1 a e_1) y luego continuar con X^{10} (una instancia de π^* desde e_1 a e_0). En este caso, éstas son las únicas dos posibilidades, las cuales pueden ser representadas por la siguiente ecuación:

$$X^{10} = (S^{10}; X^{00}) \cup (S^{11}; X^{10}) \tag{6.1}$$

Las ecuaciones para X^{00} y X^{20} pueden obtenerse de forma similar:

$$X^{00} = ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0) \cup (S^{01}; X^{10}) \tag{6.2}$$

$$X^{20} = (S^{22}; X^{20}) \cup (S^{21}; X^{10}) \tag{6.3}$$

El resultado es un sistema de ecuaciones de programas LCC con X^{00}, X^{10} y X^{20} como sus únicas variables. Observemos cómo en (6.2) $?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0)$ indica que un posible π^*-camino desde e_0 a sí mismo es no hacer nada, pero la transformación debe comprobar si e_0 es ejecutable en el estado de destino –por lo tanto, debe testar $?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0)$–.

Para resolver el sistema anterior se procede mediante la sustitución mediante propiedades del álgebra de Kleene [Koz90], tales como las propiedades asociativa y distributiva de los operadores. En primer lugar, podemos utilizar (6.2) para sustituir X^{00} en (6.1):

$$\begin{aligned} X^{10} &= (S^{10}; (?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0) \cup (S^{01}; X^{10}))) \cup (S^{11}; X^{10}) \\ &= (S^{10}; ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0)) \cup (S^{10}; S^{01}; X^{10}) \cup (S^{11}; X^{10}) \\ &= (S^{10}; ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0)) \cup (((S^{10}; S^{01}) \cup S^{11}); X^{10}) \\ &= ((S^{10}; S^{01}) \cup S^{11})^*; S^{10}; ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0) \end{aligned} \tag{6.4}$$

La última igualdad en (6.4) usa el *teorema de Arden* [Ard]: $X = B \cup (A; X)$ implica $X = A^*; B$. Ahora usamos (6.4) para sustituir X^{10} en (6.2):

$$X^{00} = ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0) \cup (S^{01}; ((S^{10}; S^{01}) \cup S^{11})^*; S^{10}; ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0)) \tag{6.5}$$

Finalmente, sustituimos X^{10} en (6.3) y aplicamos el *teorema de Arden* para resolver X^{20}:

$$\begin{aligned} X^{20} &= (S^{22}; X^{20}) \cup (S^{21}; ((S^{10}; S^{01}) \cup S^{11})^*; S^{10}; ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0)) \\ &= (S^{22})^*; S^{21}; ((S^{10}; S^{01}) \cup S^{11})^*; S^{10}; ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0) \end{aligned} \tag{6.6}$$

Tras resolver estas ecuaciones, cada X^{00}, X^{10} y X^{20} representa un π^*-camino transformado desde, respectivamente, e_0, e_1 y e_2 hasta e_0; procesos similares producen etiquetas para los π^*-caminos hasta e_1 y e_2. Sólo como ilustración, se muestra lo que sucede cuando desde algún estado (el caso de e_0 y e_1 en el ejemplo) hay algunos estados no accesibles (e_2 en el ejemplo). Las ecuaciones para los π^*-caminos hasta e_2 son:

$$X^{22} = ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_2) \cup (S^{22}; X^{22}) \cup (S^{21}; X^{12}) \tag{6.7}$$

$$X^{12} = (S^{11}; X^{12}) \cup (S^{10}; X^{02}) \tag{6.8}$$

$$X^{02} = S^{01}; X^{12} \tag{6.9}$$

Si usamos (6.9) para sustituir X^{02} en (6.8) obtenemos:

$$X^{12} \;=\; (S^{11}; X^{12}) \cup (S^{10}; S^{01}; X^{12}) \;=\; (S^{11} \cup (S^{10}; S^{01})); X^{12} \;=\; ?\bot \quad (6.10)$$

En el último paso hemos utilizado el *teorema de Arden* teniendo en cuenta que $X = (A; X) = ?\bot \cup (A; X)$ y $A^*; ?\bot$ es equivalente a $?\bot$. En el mismo sentido, X^{02} es transformado a $?\bot$. Entonces,

$$X^{22} \;=\; ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_2) \cup (S^{22}; X^{22}) \cup (S^{21}; ?\bot) \;=\; (S^{22})^*; ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_2) \qquad (6.11)$$

La figura 9 (6.3) representa las traducciones resultantes de todos los π^*-caminos en el grafo del modelo de acción:

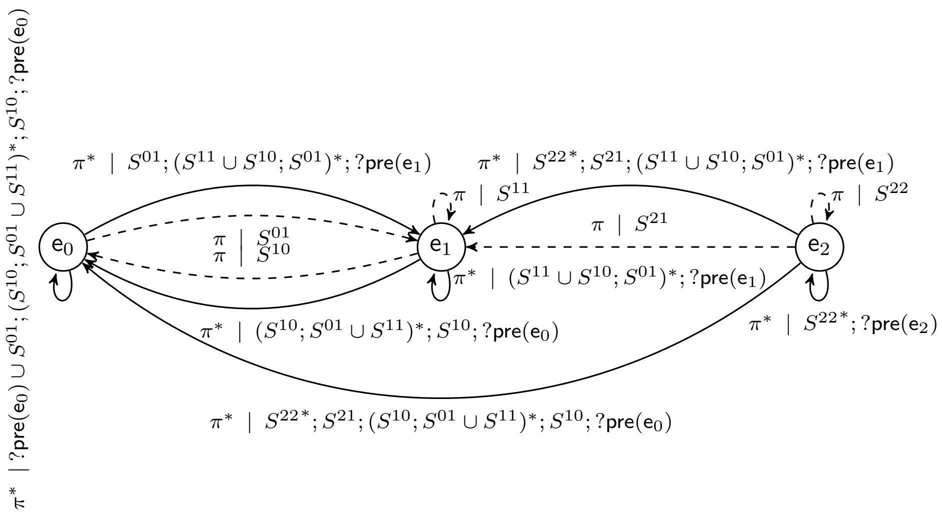

Fig. 9 (6.3): Traducciones resultantes de todos los π^*-caminos en el grafo del modelo de acción.

Mediante el uso de un cálculo matricial semejante al del tercer capítulo de [Con71] calculamos todos los X^{ij} en paralelo y, por lo tanto, evitamos repetir el proceso para cada nodo de destino. La siguiente sección presenta la definición formal del cálculo matricial; aquí sólo lo ilustramos con un ejemplo concreto como motivación. Las ecuaciones utilizadas anteriormente pueden ser representados en una matriz (figura 10 (6.3)).

La parte izquierda contiene los π-caminos desde un nodo (fila) a otro (columna). Se trata de una matriz de accesibilidad para el π-grafo de arriba. Llamemos

	e_0	e_1	e_2	e_0	e_1	e_2
e_0	$?\bot$	S^{01}	$?\bot$	$?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0)$	$?\bot$	$?\bot$
e_1	S^{10}	S^{11}	$?\bot$	$?\bot$	$?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_1)$	$?\bot$
e_2	$?\bot$	S^{21}	S^{22}	$?\bot$	$?\bot$	$?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_2)$

Fig. 10 (6.3): Representación matricial de las ecuaciones correspondientes al grafo que aparece en la figura 8 (6.3) (situación inicial).

$\mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,j]$ a la celda correspondiente a la fila e_i y a la columna e_j en esta parte izquierda y llamemos $A^{\mathsf{U}}[i,j]$ a la celda con la misma posición en la parte derecha. Observemos que $A^{\mathsf{U}}[i,j] = ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_i)$ si $i = j$ y $?\bot$ en caso contrario. Podemos comprobar que las ecuaciones para X^{ij} que hemos creado anteriormente mirando el π-grafo pueden ser creadas ahora a partir de:

$$X^{ij} = (\mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,0]; X^{0j}) \cup (\mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,1]; X^{1j}) \cup (\mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,2]; X^{2j}) \cup A^{\mathsf{U}}[i,j] \quad (6.12)$$

Por ejemplo, las ecuaciones para X^{10} y X^{00} son

$$X^{10} = (S^{10}; X^{00}) \cup (S^{11}; X^{10}) \cup (?\bot; X^{20}) \cup ?\bot \quad (6.13)$$

$$X^{00} = (?\bot; X^{00}) \cup (S^{01}; X^{10}) \cup (?\bot; X^{20}) \cup ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0) \quad (6.14)$$

que son equivalentes a (6.1) y (6.2), respectivamente. La mayor ventaja de trabajar con matrices es que podemos transformar varias ecuaciones al mismo tiempo mediante la manipulación de una fila. Véase la matriz que aparece en la figura 11 (6.3), la cual es el resultado de aplicar el *teorema de Arden* a la fila e_1 de la matriz anterior.

La transformación consiste en la sustitución de la posición $[\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_1]$ en la parte izquierda con $?\bot$ y concatenar $(S^{11})^*$ (el valor previo de la celda $[\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_1]$) con las demás celdas de la fila. Aplicando reglas simples nosotros podemos transformar la matriz anterior en la que aparece en la figura 12 (6.3).

Para comprobar que hemos aplicado el *teorema de Arden*, miremos X^{10} (usando (6.12) en la última matriz): $X^{10} = (S^{11})^*; S^{10}; X^{00}$. Es el resultado de aplicar el *teorema de Arden* a (6.13) (o a la equivalente (6.1)).

No sólo el *teorema de Arden*, sino también la operación de sustitución, se puede hacer en paralelo usando las operaciones de matrices (figura 13 (6.3)).

	e_0	e_1	e_2	e_0	e_1	e_2
e_0	$?\bot$	S^{01}	$?\bot$	$?\mathsf{pre}(e_0)$	$?\bot$	$?\bot$
e_1	$(S^{11})^*; S^{10}$	$?\bot$	$(S^{11})^*; ?\bot$	$(S^{11})^*; ?\bot$	$(S^{11})^*; ?\mathsf{pre}(e_1)$	$(S^{11})^*; ?\bot$
e_2	$?\bot$	S^{21}	S^{22}	$?\bot$	$?\bot$	$?\mathsf{pre}(e_2)$

Fig. 11 (6.3): Representación matricial de las ecuaciones correspondientes al grafo que aparece en la figura 8 (6.3) (situación tras aplicar el *teorema de Arden* a la fila e_1 en 10 (6.3)).

	e_0	e_1	e_2	e_0	e_1	e_2
e_0	$?\bot$	S^{01}	$?\bot$	$?\mathsf{pre}(e_0)$	$?\bot$	$?\bot$
e_1	$(S^{11})^*; S^{10}$	$?\bot$	$?\bot$	$?\bot$	$(S^{11})^*; ?\mathsf{pre}(e_1)$	$?\bot$
e_2	$?\bot$	S^{21}	S^{22}	$?\bot$	$?\bot$	$?\mathsf{pre}(e_2)$

Fig. 12 (6.3): Representación matricial de las ecuaciones correspondientes al grafo que aparece en la figura 8 (6.3) (situación tras aplicar reglas de simplificación en 11 (6.3)).

	e_0	e_1	e_2	e_0	e_1	e_2
e_0	$?\bot$	S^{01}	$?\bot$	$?\mathsf{pre}(e_0)$	$?\bot$	$?\bot$
e_1	$(S^{11})^*; S^{10}$	$?\bot$	$?\bot$	$?\bot$	$(S^{11})^*; ?\mathsf{pre}(e_1)$	$?\bot$
e_2	$(S^{21}; (S^{11})^*; S^{10})$ $\cup\, ?\bot$	$?\bot$	$(S^{21}; ?\bot)$ $\cup S^{22}$	$(S^{21}; ?\bot)$ $\cup\, ?\bot$	$(S^{21}; (S^{11})^*; ?\mathsf{pre}(e_1))$ $\cup\, ?\bot$	$(S^{21}; ?\bot)$ $\cup\, ?\mathsf{pre}(e_2)$

Fig. 13 (6.3): Representación matricial de las ecuaciones correspondientes al grafo que aparece en la figura 8 (6.3) (situación tras aplicar sustitución en 12 (6.3)).

Esta matriz se ha obtenido a partir de la anterior aplicando la siguiente sustitución: primero, la posición de la izquierda $B = [e_2, e_1]$ (S^{21} en este caso) es reemplazada con $?\bot$; segundo, cada posición (izquierda / derecha) $D = [\mathsf{e}_2, \mathsf{e}_i]$ (diferente a la posición izquierda $[\mathsf{e}_2, \mathsf{e}_1]$) contiene ahora un programa con la forma $(B; C) \cup D$, donde C es el programa en la posición (respectivamente izquierda / derecha) $[\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_i]$ (es decir, el programa en la misma columna y fila de arriba). La matriz resultante se puede simplificar en la siguiente, la cual tiene los programas más cortos (figura 14 (6.3)).

	e_0	e_1	e_2	e_0	e_1	e_2
e_0	$?\bot$	S^{01}	$?\bot$	$?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_0)$	$?\bot$	$?\bot$
e_1	$(S^{11})^*; S^{10}$	$?\bot$	$?\bot$	$?\bot$	$(S^{11})^*; ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_1)$	$?\bot$
e_2	$(S^{21}; (S^{11})^*; S^{10})$	$?\bot$	S^{22}	$?\bot$	$(S^{21}; (S^{11})^*; ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_1))$	$?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_2)$

Fig. 14 (6.3): Representación matricial de las ecuaciones correspondientes al grafo que aparece en la figura 8 (6.3) (situación tras aplicar reglas de sustitución en 13 (6.3)).

Para ilustrar que hemos hecho un cambio, consideremos el valor de X^{21} en la matriz antes de la sustitución (justamente como en la matriz inicial):

$$X^{21} = (S^{21}; X^{11}) \cup (S^{22}; X^{21}) \tag{6.15}$$

Y ahora consideremos el valor de X^{11} después de la aplicación del *teorema de Arden*:

$$X^{11} = ((S^{11})^*; S^{10}; X^{01}) \cup ((S^{11})^*; ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_1)) \tag{6.16}$$

Usando (6.16) para sustituir X^{11} en (6.15) conseguimos:

$$X^{21} = \big(S^{21}; \big(((S^{11})^*; S^{10}; X^{01}) \cup ((S^{11})^*; ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_1))\big)\big) \cup (S^{22}; X^{21}) \tag{6.17}$$

que puede reescribirse, utilizando las propiedades distributiva y asociativa, como:

$$X^{21} = (S^{21}; (S^{11})^*; S^{10}; X^{01}) \cup (S^{22}; X^{21}) \cup (S^{21}; (S^{11})^*; ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_1)) \tag{6.18}$$

que es la ecuación obtenida para X^{21} en la matriz anterior, después de la sustitución.

En la siguiente sección presentamos las definiciones formales de nuestro cálculo matricial para transformar los programas LCC.

6.4. Un cálculo matricial para la transformación de programas

Definición 182 (Matriz de transformación de programas)**.**
Sea $\mathsf{U} = (\mathsf{E}, \mathsf{R}, \mathsf{pre}, \mathsf{sub})$ *un modelo de acción con* $\mathsf{E} = \{\mathsf{e}_0, \ldots, \mathsf{e}_{n-1}\}$*. La función* $\mu^{\mathsf{U}} \colon \bar{\Pi} \to \mathcal{M}_{n\times n}$*, con* $\bar{\Pi}$ *el conjunto de programas LCC y* $\mathcal{M}_{n\times n}$ *la clase de matrices cuadradas de orden* n*, toma un programa LCC* π *y devuelve una matriz cuadrada de orden* n $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)$ *en la que cada celda* $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,j]$ *es un programa LCC representando la transformación de* π *desde* e_i *hasta* e_j *en el sentido de los transformadores de programas* $T^{\mathsf{U}}_{ij}(\pi)$ *de [vBvEK06]. La definición recursiva de* $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)$ *es como sigue:*

Los operadores "$\oplus$" y "$\odot$" utilizados en la definición anterior son versiones de elección no determinista y composición secuencial que eliminan ocurrencias innecesarias de $?\bot$ y $?\top$; devolviendo así los programas que (potencialmente) son sintácticamente más cortos pero en cualquier caso semánticamente equivalentes a sus homólogos PDL ("$\cup$" y ";") como muestran las proposiciones que en adelante demostraremos. No obstante, aunque aquí no lo haremos para no dificultar el seguimiento de las pruebas, algunas definiciones usadas por los transformadores de programas (particularmente la operación "$\odot$") pueden ser modificadas para obtener expresiones aún más simples (por ejemplo, $\sigma \odot \rho$ podría ser definido como σ si $\sigma \neq ?\top = \rho$ y como ρ si $\sigma = ?\top$), e igualmente el algoritmo que implementa las funciones Ard_k y $Subs_k$ pueden ser mejoradas ignorando los elementos $N[i,j]$ con $j < k$ o $j > n+k$ (siendo $N[i,j]$ una matriz $n \times 2n$), dado que ellos son necesariamente iguales a $?\bot$. Estos cambios, a pesar de no reducir el orden de complejidad de la traducción, en cualquier caso harían a ésta más eficiente en los casos concretos.

Proposición 183.
Sea M *un modelo epistémico y* Γ *un conjunto de programas LCC. Entonces,*

$$[\![\oplus\Gamma]\!]^M = \left[\!\!\left[\bigcup\Gamma\right]\!\!\right]^M.$$

Demostración. Tomemos un modelo epistémico M. La ecuación (6.22) establece que $\oplus\Gamma$ es una elección no determinista de programas LCC en Γ que devuelve $\bigcup(\Gamma\setminus\{?\bot\})$ cuando Γ es diferente tanto de $\varnothing$ como de $\{?\bot\}$, y que concluye $?\bot$ en otro caso. En el primer caso, $[\![\oplus\Gamma]\!]^M = [\![\bigcup\Gamma]\!]^M$ porque $[\![\bigcup\Gamma]\!]^M = [\![\bigcup(\Gamma\setminus\{?\bot\})]\!]^M$; en el segundo, $[\![\oplus\Gamma]\!]^M = [\![\bigcup\Gamma]\!]^M$ porque $[\![\bigcup\varnothing]\!]^M = [\![\bigcup\{?\bot\}]\!]^M = [\![?\bot]\!]^M = \varnothing$. ∎

- *Agentes*:

$$\mu^{\mathsf{U}}(a)[i,j] := \begin{cases} ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_i); a & \text{si } \mathsf{e}_i \mathsf{R}_a \mathsf{e}_j \\ ?\bot & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{6.19}$$

- *Test*:

$$\mu^{\mathsf{U}}(?\varphi)[i,j] := \begin{cases} ?(\mathsf{pre}(\mathsf{e}_i) \wedge [\mathsf{U}, \mathsf{e}_i]\varphi) & \text{si } i = j \\ ?\bot & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{6.20}$$

- *Elección no determinista*:

$$\mu^{\mathsf{U}}(\pi_1 \cup \pi_2)[i,j] := \bigoplus \left\{\mu^{\mathsf{U}}(\pi_1)[i,j],\ \mu^{\mathsf{U}}(\pi_2)[i,j]\right\} \tag{6.21}$$

donde $\bigoplus\Gamma$ es la elección no determinista de los programas en el conjunto Γ después de la eliminación de las ocurrencias de $?\bot$, esto es,

$$\bigoplus\Gamma := \begin{cases} \bigcup(\Gamma \setminus \{?\bot\}) & \text{si } \varnothing \neq \Gamma \neq \{?\bot\} \\ ?\bot & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{6.22}$$

siendo $\bigcup$ la elección no determinista generalizada de un conjunto no vacío de programas.

- *Composición secuencial*:

$$\mu^{\mathsf{U}}(\pi_1; \pi_2)[i,j] := \bigoplus \left\{\mu^{\mathsf{U}}(\pi_1)[i,k] \odot \mu^{\mathsf{U}}(\pi_2)[k,j] \ \mid\ 0 \leq k \leq n-1\right\} \tag{6.23}$$

donde $\sigma \odot \rho$ es la composición secuencial de σ y ρ después de la eliminación de ocurrencias superfluas de $?\bot$ y $?\top$, esto es,

$$\sigma \odot \rho := \begin{cases} \sigma; \rho & \text{si } \sigma \neq ?\bot \neq \rho \text{ y } \sigma \neq ?\top \neq \rho \\ \sigma & \text{si } \sigma \neq ?\top \ = \ \rho \\ \rho & \text{si } \sigma \ = ?\top \\ ?\bot & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{6.24}$$

- *clausura de Kleene*:

$$\mu^{\mathsf{U}}(\pi^*) := S_0^{\mathsf{U}}\left(\mu^{\mathsf{U}}(\pi) \mid A^{\mathsf{U}}\right) \tag{6.25}$$

donde $\mu^{\mathsf{U}}(\pi) \mid A^{\mathsf{U}}$ es la matriz de dimensiones $n \times 2n$ obtenida aumentando $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)$ con A^{U}, una matriz de dimensiones $n \times n$ definida como

$$A^{\mathsf{U}}[i,j] := \begin{cases} ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_i) & \text{si } i = j \\ ?\bot & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{6.26}$$

La función S_k^{U} (con $0 \leq k \leq n$), definida como

$$S_k^{\mathsf{U}}(M \mid A) := \begin{cases} A & \text{si } k = n \\ S_{k+1}^{\mathsf{U}}(Subs_k(Ard_k(M \mid A))) & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{6.27}$$

recibe un argumento $M \mid A$ y lleva a cabo un proceso iterativo aplicando el *teorema de Arden* a la fila k k (a través de la función $Ard_k : \mathcal{M}_{n\times 2n} \to \mathcal{M}_{n\times 2n}$) y sustituyendo filas diferentes desde k (a través de la función $Subs_k : \mathcal{M}_{n\times 2n} \to \mathcal{M}_{n\times 2n}$) hasta un $k = n$, y a continuación, devolviendo entonces la parte derecha de la matriz aumentada. Las dos funciones auxiliares, Ard_k y $Subs_k$, vienen dadas por

$$Ard_k(N)[i,j] \;:=\; \begin{cases} N[i,j] & \text{si } i \neq k \\ ?\bot & \text{si } i = k = j \\ N[i,j] & \text{si } i = k \neq j \text{ y } N[k,k] = ?\bot \\ N[k,k]^* \odot N[i,j] & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{6.28}$$

$$Subs_k(N)[i,j] \;:=\; \begin{cases} N[i,j] & \text{si } i = k \\ ?\bot & \text{si } i \neq k = j \\ \bigoplus\{N[i,k] \odot N[k,j], N[i,j]\} & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{6.29}$$

Tabla 4 (6.4): Definición recursiva de la matriz de transformación de programas (página actual y anterior).

Proposición 184.
Sea M un modelo epistémico y σ, ρ dos programas LCC. Entonces,

$$[\![\sigma; \rho]\!]^M = [\![\sigma \odot \rho]\!]^M .$$

Demostración. Tomemos un modelo epistémico M. La ecuación (6.24) establece que $\sigma \odot \rho$ difiere de $\sigma; \rho$ sólo cuando o bien σ o bien ρ es $?\bot$ o $?\top$. Pero en tales casos:

- $[\![\sigma; ?\bot]\!]^M = [\![?\bot; \sigma]\!]^M = [\![?\bot]\!]^M$; por tanto, $[\![\sigma; \rho]\!]^M = [\![\sigma \odot \rho]\!]^M$.
- $[\![\sigma; ?\top]\!]^M = [\![?\top; \sigma]\!]^M = [\![\sigma]\!]^M$; por tanto, $[\![\sigma; \rho]\!]^M = [\![\sigma \odot \rho]\!]^M$.

∎

El resto de esta sección está dedicada a demostrar que la función μ^{U} devuelve un programa LCC que es semánticamente equivalente a la que devuelve el programa transformador T^{U} de [vBvEK06].

Lema 185.
Sea $\mathsf{U} = (\mathsf{E}, \mathsf{R}, \mathsf{pre}, \mathsf{sub})$ un modelo de acción con $\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_j \in \mathsf{E}$; sea π un programa LCC. Para cualquier modelo epistémico M,

$$\left[\!\left[T^{\mathsf{U}}_{ij}(\pi)\right]\!\right]^M = [\![\mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,j]]\!]^M .$$

Demostración. Por inducción sobre la complejidad de π. Sea M un modelo epistémico, entonces

(Casos-base: a y $?\varphi$) Obvios, dado que las definiciones de T^{U}_{ij} y $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,j]$ son idénticas tanto para a como para $?\varphi$.

(Caso inductivo $\pi_1 \cup \pi_2$) Supongamos (hipótesis inductiva) que la afirmación es válida para π_1 y π_2. Entonces

$$
\begin{aligned}
\llbracket T^{\cup}_{ij}(\pi_1 \cup \pi_2)\rrbracket^M &= \llbracket T^{\cup}_{ij}(\pi_1) \cup T^{\cup}_{ij}(\pi_2)\rrbracket^M && \text{(def. 180)}\\
&= \llbracket T^{\cup}_{ij}(\pi_1)\rrbracket^M \cup \llbracket T^{\cup}_{ij}(\pi_2)\rrbracket^M && \text{(def. de } \llbracket\cdot\rrbracket^M)\\
&= \llbracket \mu^{\cup}(\pi_1)[i,j]\rrbracket^M \cup \llbracket \mu^{\cup}(\pi_2)[i,j]\rrbracket^M && \text{(hip. ind.)}\\
&= \llbracket \mu^{\cup}(\pi_1)[i,j] \cup \mu^{\cup}(\pi_2)[i,j]\rrbracket^M && \text{(def. de } \llbracket\cdot\rrbracket^M)\\
&= \llbracket \bigoplus\{\mu^{\cup}(\pi_1)[i,j], \mu^{\cup}(\pi_2)[i,j]\}\rrbracket^M && \text{(prop. 183)}\\
&= \llbracket \mu^{\cup}(\pi_1 \cup \pi_2)[i,j]\rrbracket^M && \text{(def. de } \mu^{\cup}(\pi_1 \cup \pi_2) \text{ en (6.21))}
\end{aligned}
$$

(Caso inductivo $\pi_1;\pi_2$) Supongamos (hipótesis inductiva) que la afirmación se mantiene para π_1 y π_2. Entonces

$$
\begin{aligned}
\llbracket T^{\cup}_{ij}(\pi_1;\pi_2)\rrbracket^M &= \llbracket \textstyle\bigcup_{k=0}^{n-1}(T^{\cup}_{ik}(\pi_1); T^{\cup}_{kj}(\pi_2))\rrbracket^M && \text{(def. 180)}\\
&= \textstyle\bigcup_{k=0}^{n-1}\left(\llbracket T^{\cup}_{ik}(\pi_1)\rrbracket^M \circ \llbracket T^{\cup}_{kj}(\pi_2)\rrbracket^M\right) && \text{(def. de } \llbracket\cdot\rrbracket^M)\\
&= \textstyle\bigcup_{k=0}^{n-1}\left(\llbracket \mu^{\cup}(\pi_1)[i,k]\rrbracket^M \circ \llbracket \mu^{\cup}(\pi_2)[k,j]\rrbracket^M\right) && \text{(hip. ind.)}\\
&= \llbracket \textstyle\bigcup_{k=0}^{n-1}\left(\mu^{\cup}(\pi_1)[i,k]; \mu^{\cup}(\pi_2)[k,j]\right)\rrbracket^M && \text{(def. de } \llbracket\cdot\rrbracket^M)\\
&= \llbracket \textstyle\bigcup_{k=0}^{n-1}\left(\mu^{\cup}(\pi_1)[i,k] \odot \mu^{\cup}(\pi_2)[k,j]\right)\rrbracket^M && \text{(prop. 184)}\\
&= \llbracket \bigoplus\{\mu^{\cup}(\pi_1)[i,k] \odot \mu^{\cup}(\pi_2)[k,j] \mid 0 \le k \le n-1\}\rrbracket^M && \text{(prop. 183)}\\
&= \llbracket \mu^{\cup}(\pi_1;\pi_2)[i,j]\rrbracket^M && \text{(def. de } \mu^{\cup}(\pi_1;\pi_2) \text{ en (6.23))}
\end{aligned}
$$

(Caso inductivo π^*) Supongamos (hipótesis inductiva) que la afirmación se mantiene para π y observemos como $\llbracket \pi^* \rrbracket^M = \llbracket ?\bot \cup (\pi;\pi^*)\rrbracket^M$. Ahora,

$$
\begin{aligned}
\llbracket T^{\cup}_{ij}(\pi^*)\rrbracket^M &= \llbracket T^{\cup}_{ij}(?\top \cup \pi;\pi^*)\rrbracket^M\\
&= \llbracket T^{\cup}_{ij}(?\top)\rrbracket^M \cup \llbracket \textstyle\bigcup_{k=0}^{n-1}(T^{\cup}_{ik}(\pi); T^{\cup}_{kj}(\pi^*))\rrbracket^M && \text{(def. 180)}\\
&= \llbracket T^{\cup}_{ij}(?\top)\rrbracket^M \cup \textstyle\bigcup_{k=0}^{n-1}\left(\llbracket T^{\cup}_{ik}(\pi)\rrbracket^M \circ \llbracket T^{\cup}_{kj}(\pi^*)\rrbracket^M\right) && \text{(def. de } tset{\cdot}M)\\
&= \llbracket T^{\cup}_{ij}(?\top)\rrbracket^M \cup \textstyle\bigcup_{k=0}^{n-1}\left(\llbracket \mu^{\cup}(\pi)[i,k]\rrbracket^M \circ \llbracket T^{\cup}_{kj}(\pi^*)\rrbracket^M\right) && \text{(hip. ind.)}
\end{aligned}
$$

La última igualdad produce n^2 ecuaciones relacionales. Abreviando $\llbracket T^{\mathsf{U}}_{ij}(\pi^*)\rrbracket^M$ como X^{ij} para cada $0 \leq i, j \leq n-1$, obtenemos

$$X^{ij} = \llbracket T^{\mathsf{U}}_{ij}(?\top)\rrbracket^M \cup \bigcup_{k=0}^{n-1} \left(\llbracket \mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,k]\rrbracket^M \circ X^{kj}\right) \tag{6.30}$$

Por lo tanto, es suficiente para demostrar que $\llbracket \mu^{\mathsf{U}}(\pi^*)[i,j]\rrbracket^M$ es una solución para X^{ij}. Esto se muestra en las siguientes tres proposiciones acerca de la funciones que construyen $\mu^{\mathsf{U}}(\pi^*)$.

Proposición 186.
Tomemos $\sqsupset = (\mu^{\mathsf{U}}(\pi) \mid A^{\mathsf{U}})$ *(véase* (6.21)*). Entonces,*

$$X^{ij} = \llbracket \sqsupset[i, j+n]\rrbracket^M \cup \bigcup_{k=0}^{n-1} \left(\llbracket \sqsupset[i,k]\rrbracket^M \circ X^{kj}\right) \tag{6.31}$$

Demostración.

Se demostrará que el lado derecho de (6.30) y (6.31) coinciden. Sus respectivas partes más a la derecha son equivalentes ya que, por $0 \leq k \leq n-1$, $\sqsupset[i,k] = \mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,k]$ (recordemos que $\sqsupset$ se construye añadiendo columnas adicionales a la derecha de las n primeras columnas de $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)$, y los índices de la matriz empiezan desde 0). Para las partes más a la izquierda,

$$\begin{aligned}
&\llbracket T^{\mathsf{U}}_{ij}(?\top)\rrbracket^M = \\
&= \begin{cases} \llbracket ?(\mathsf{pre}(\mathsf{e}_i) \wedge [\mathsf{U}, \mathsf{e}_i]\top)\rrbracket^M & \text{si } i = j \\ \llbracket ?\bot\rrbracket^M & \text{en otro caso} \end{cases} && \text{(def. 180)} \\
&= \begin{cases} \llbracket ?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_i)\rrbracket^M & \text{si } i = j \\ \llbracket ?\bot\rrbracket^M & \text{en otro caso} \end{cases} && \text{(dado que } [\mathsf{U}, \mathsf{e}_i]\top \text{ es obviamente verdadero)} \\
&= \llbracket A^{\mathsf{U}}[i,j]\rrbracket^M = \llbracket \sqsupset[i, j+n]\rrbracket^M && \text{((6.26) y def. de } \sqsupset)
\end{aligned}$$

■

Proposición 187.
Para $0 \leq k \leq n-1$*, si* N *es una matriz de dimensiones* $n \times 2n$ *con todas las celdas de las columnas* $0, \ldots, k-1$ *igual a* $?\bot$*, entonces* $Subs_k(Ard_k(N))$ *contiene todas las celdas de las columnas* $0, \ldots, k$ *igual a* $?\bot$.

Demostración. Empecemos con $Ard_k(N)$. Observemos en (6.28) que las celdas modificadas sólo están en la fila k-ésima. La celda $Ard_k(N)[k,k]$ en la columna k-ésima es convertida en $?\bot$. Con respecto a las celdas en las columnas desde 0 hasta $k-1$, si fueran $?\bot$, continuarían siendo $?\bot$: esas celdas $N[i,j]$ no cambian, si $N[k,k] =?\bot$, o en otro caso son convertidas por (6.28) en $N[k,k]^* \odot N[i,j]$ y, por (6.24), si $N[i,j] =?\bot$, entonces $N[k,k]^* \odot N[i,j] =?\bot$.

Ahora, llamemos N' al resultado de $Ard_k(N)$ y observemos la definición de $Subs_k(N')$ (6.29): las únicas celdas que cambian están en filas diferentes a k. Con respecto a cualquier fila i, la posición en la columna k-ésima se hace $?\bot$. Para las celdas en las columnas anteriores, $j < k$, el último caso en la definición devuelve $\bigoplus\{N'[i,k] \odot N'[k,j], N'[i,j]\}$. Pero, dado que N' es el resultado de $Ard_k(N)$, entonces $N'[k,j]$ es $?\bot$ (porque, de lo expuesto anteriormente, $Ard_k(N)$ trabaja sobre la fila k-ésima y mantiene $?\bot$ en las columnas anteriores a la k-ésima). También, $N'[i,j] =?\bot$, dado que las columnas $j < k$ son rellenadas con $?\bot$. Así $\bigoplus\{N'[i,k] \odot N'[k,j], N'[i,j]\}$ se convierte en $\bigoplus\{N'[i,k]\odot ?\bot, ?\bot\}$ y, por (6.22) y (6.24), esto es $?\bot$. ■

Proposición 188.
Dada una matriz N (de dimensión $n \times 2n$) de programas LCC, las ecuaciones construidas usando (6.31)*, con* $\beth = Subs_k(Ard_k(N))$, $0 \le k \le n-1$*, son transformaciones correctas de las ecuaciones construidas de la misma manera con* $\beth = N$.

Demostración. Como se argumentó en la prueba de la proposición 187, $Ard_k(N)$ trabaja sólo en la k-ésima fila. Si $N[k,k] =?\bot$, no se hace nada, por lo que de acuerdo a (6.31) las ecuaciones para X^{kj} ($0 \le j \le n-1$) no cambian. En otro caso, la fila k-ésima de N cambia: todas las celdas $N[k,j]$ con $j \neq k$ se transforman en $N[k,k]^* \odot N[k,j]$, excepto $N[k,k]$ que se convierte en $?\bot$. Entonces, para cada $0 \le j \le n-1$, la ecuación para X^{kj} se convierte en (usando el índice t en lugar de k y eliminando $[\![?\bot]\!]^M \circ X^{kj}$ de la unión):

$$X^{kj} = [\![N[k,k]^* \odot N[k,j+n]]\!]^M \cup \bigcup_{\substack{0 \le t \le n-1 \\ t \neq k}} \left([\![N[k,k]^* \odot N[k,t]]\!]^M \circ X^{tj}\right).$$

Por la proposición 184 y la definición de $[\![\cdot]\!]^M$ se puede reescribir como

$$\begin{aligned} X^{kj} \;=\; & ([\![N[k,k]]\!]^M)^* \circ [\![N[k,j+n]]\!]^M \cup \\ & \textstyle\bigcup_{\substack{0 \le t \le n-1 \\ t \neq k}} \left(([\![N[k,k]]\!]^M)^* \circ [\![N[k,t]]\!]^M \circ X^{tj}\right) \end{aligned} \qquad (6.32)$$

que es una aplicación del *teorema de Arden* [Ard] a la correspondiente ecuación para la fila original en N:

$$X^{kj} = [\![N[k, j+n]]\!]^M \cup \bigcup_{0 \le t \le n-1} \left([\![N[k,t]]\!]^M \circ \ X^{tj} \right) \tag{6.33}$$

El *teorema de Arden* (que trabaja sobre álgebra regulares, tales como programas LCC) da $X = A^* \circ B$ como una solución para $X = (A \circ X) \cup B$. En (6.33), X es X^{kj}, A es $[\![N[k,k]]\!]^M$, y B es la unión de todos los términos en el lado derecho de (6.33) excepto $[\![N[k,k]]\!]^M \circ \ X^{kj}$. Además del *teorema de Arden*, desde (6.33) a (6.32) usamos la propiedad distributiva de "$\circ$" sobre "$\cup$", $A \circ (B \cup C) = (A \circ B) \cup (A \circ C)$.

Ahora denótese por N' el resultado de $Ard_k(N)$. Nos movemos a $Subs_k(N')$ para demostrar que las ecuaciones obtenidas a partir de ella con (6.31) son transformaciones correctas de las ecuaciones construidas a partir de N'. Las únicas celdas modificadas en $Subs_k(N')$ están en filas diferentes a k, así que sólo afecta a las ecuaciones para X^{ij} con $i \neq k$. De acuerdo a (6.31), si $\beth = N'$, estas ecuaciones son (usando t en lugar de k):

$$X^{ij} = [\![N'[i, j+n]]\!]^M \cup \bigcup_{t=0}^{n-1} \left([\![N'[i,t]]\!]^M \circ \ X^{tj} \right) \tag{6.34}$$

La misma ecuación para $\beth = Subs_k(N')$ se convierte en la siguiente (eliminamos de la unión los términos $[\![?\bot]\!]^M \circ \ X^{kj}$, dado que es equivalente a $\varnothing$):

$$\begin{aligned} X^{ij} \ = \ & [\![\bigoplus\{N'[i,k] \odot N'[k, j+n], N'[i, j+n]\}]\!]^M \cup \\ & \bigcup_{\substack{0 \le t \le n-1 \\ t \neq k}} \left([\![\bigoplus\{N'[i,k] \odot N'[k,t], N'[i,t]\}]\!]^M \circ \ X^{tj} \right) \end{aligned} \tag{6.35}$$

Usando las proposiciones 183 y 184 y las propiedades de $[\![\cdot]\!]^M$, la ecuación (6.35) se convierte en

$$\begin{aligned} X^{ij} \ = \ & ([\![N'[i,k]]\!]^M \circ \ [\![N'[k, j+n]]\!]^M) \cup [\![N'[i, j+n]]\!]^M \cup \\ & \bigcup_{\substack{0 \le t \le n-1 \\ t \neq k}} \left((([\![N'[i,k]]\!]^M \circ \ [\![N'[k,t]]\!]^M) \cup [\![N'[i,t]]\!]^M) \circ \ X^{tj} \right) \end{aligned} \tag{6.36}$$

Pero, notemos que en la ecuación para X^{kj}, que es la misma en N' y $Subs_k(N')$, la fila k-ésima de N' no es modificada por $Subs_k(N')$:

$$X^{kj} = [\![N'[k, j+n]]\!]^M \cup \bigcup_{\substack{0 \le t \le n-1 \\ t \neq k}} \left([\![N'[k,t]]\!]^M \circ \ X^{tj} \right) \tag{6.37}$$

Hemos eliminado el término $[\![N'[k,k]]\!]^M \circ X^{kj}$ en (6.37) teniendo en cuenta $N' = Ard_k(N)$ y (6.28), $N'[k,k] = ?\bot$, lo cual conduce a $[\![N'[k,k]]\!]^M \circ X^{kj} = \varnothing$.

Observemos que (6.36) puede obtenerse de (6.34) por sustitución de X^{kj} por el lado derecho de (6.37) y aplicando la distribución de "$\circ$" sobre "$\cup$". Así la ecuación modificada (6.35) es equivalente a las transformaciones correctas de la original (6.34).

■

La prueba del caso π^* en el lema 185 se puede acabar ahora. Tomemos el conjunto de ecuaciones relacionales dadas por (6.30). Por (6.25), $\mu^{\mathsf{U}}(\pi^*)$ opera mediante la iteración de llamadas a S_k^{U} (con k desde 0 a n) con $\sqsupset = (\mu^{\mathsf{U}}(\pi) \mid A^{\mathsf{U}})$ como el argumento inicial. Sea $M_{-1} \sqsupset$ y M_k el resultado de $S_k^{\mathsf{U}}(M_{k-1})$. Por la proposición 186, (6.31) proporciona ecuaciones equivalentes a (6.30). Por la proposición 188, las ecuaciones son correctas para cada M_k sucesiva ($0 \leq k \leq n-1$). Como las llamadas a S_k^{U} se hacen iterativamente con k desde 0 a $n-1$, la proposición 187 garantiza que, en M_{n-1}, todas las celdas en columnas desde 0 a $n-1$ son iguales a $?\bot$. Por lo que, las ecuaciones (6.31) para M_{n-1} son:

$$X^{ij} = [\![M_{n-1}[i, j+n]]\!]^M \tag{6.38}$$

La unión del extremo derecho en (6.31) ha desaparecido ($M[i,k] = ?\bot$ para $0 \leq k \leq n{-}1$, y $[\![?\bot]\!]^M = \varnothing$). Ahora, por la definición de S_k^{U} en (6.27), $M_{n-1}[i, j{+}n] = M_n[i,j] = \mu^{\mathsf{U}}(\pi^*)[i,j]$, así que $X^{ij} = [\![\mu^{\mathsf{U}}(\pi^*)[i,j]]\!]^M$. Entonces, dado que X^{ij} representa a $[\![T_{ij}^{\mathsf{U}}(\pi^*)]\!]^M$,

$$[\![T_{ij}^{\mathsf{U}}(\pi^*)]\!]^M = [\![\mu^{\mathsf{U}}(\pi^*)[i,j]]\!]^M,$$

lo cual completa la prueba. ■

Podemos definir ahora nuevas funciones de traducción t' y r' como sigue. Nótese que t' y r' se definen como las funciones de traducción t y r, respectivamente, para fórmulas φ y programas π propuestos en [vBvEK06],[6] con la única excepción de las fórmulas de la forma $[\mathsf{U}, \mathsf{e}_i][\pi]\varphi$.

Corolario 189.

Las funciones de traducción t' y r' reducen el lenguaje de LCC al de PDL. Esta traducción es correcta.

[6] Dos pequeños errores para los casos $[\pi]\varphi$ y $[\mathsf{U}, \mathsf{e}]p$ se corrigen aquí con respecto al artículo fundacional [vBvEK06], a saber, $t([\mathsf{U}, \mathsf{e}]p) = t(\mathsf{pre}(\mathsf{e})) \to t(\mathsf{sub}(\mathsf{e}, p))$ y $t([\mathsf{U}, \mathsf{e}_i][\pi]\varphi) = \bigwedge_{j=0}^{n-1}[r(T_{ij}^{\mathsf{U}}(\pi))]t([\mathsf{U}, \mathsf{e}_j]\varphi)$.

Para fórmulas:

$$
\begin{aligned}
t'(\top) &= \top \\
t'(p) &= p \\
t'(\neg\varphi) &= \neg t'(\varphi) \\
t'(\varphi_1 \wedge \varphi_2) &= t'(\varphi_1) \wedge t'(\varphi_2) \\
t'([\pi]\varphi) &= [r'(\pi)]t'(\varphi) \\
t'([\mathsf{U},\mathsf{e}]\top) &= \top \\
t'([\mathsf{U},\mathsf{e}]p) &= t'(\mathsf{pre}(\mathsf{e})) \rightarrow t'(\mathsf{sub}(\mathsf{e},p)) \\
t'([\mathsf{U},\mathsf{e}]\neg\varphi) &= t'(\mathsf{pre}(\mathsf{e})) \rightarrow \neg t'([\mathsf{U},\mathsf{e}]\varphi) \\
t'([\mathsf{U},\mathsf{e}](\varphi_1 \wedge \varphi_2)) &= t'([\mathsf{U},\mathsf{e}]\varphi) \wedge t'([\mathsf{U},\mathsf{e}]\varphi_2) \\
t'([\mathsf{U},\mathsf{e}_i][\pi]\varphi) &= \bigwedge_{\substack{0\leq j\leq n-1 \\ \mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,j]\neq ?\bot}} [r'(\mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,j])]t'([\mathsf{U},\mathsf{e}_j]\varphi) \\
t'([\mathsf{U},\mathsf{e}][\mathsf{U}',\mathsf{e}']\varphi) &= t'([\mathsf{U},\mathsf{e}]t'([\mathsf{U}',\mathsf{e}']\varphi))
\end{aligned}
$$

Para programas:

$$
\begin{aligned}
r'(a) &= a \\
r'(B) &= B \\
r'(?\varphi) &= ?t'(\varphi) \\
r'(\pi_1;\pi_2) &= r'(\pi_1); r'(\pi_2) \\
r'(\pi_1 \cup \pi_2) &= r'(\pi_1) \cup r'(\pi_2) \\
r'(\pi^*) &= (r'(\pi))^*
\end{aligned}
$$

Tabla 5 (6.4): Reglas de interpretación de $\mathcal{L}_{LCC}$ (parte superior de esta página e inferior de la anterior).

Demostración. La reducción efectiva desde LCC a PDL es inmediata por inspección. Su corrección se deriva de la traducción que aparece en [vBvEK06], con el lema 185 para el caso $[\mathsf{U}, \mathsf{e}_i][\pi]\varphi$. ■

Definición 190 (Nuevo sistema de axiomas de LCC).
Definimos un nuevo sistema de axiomas de LCC reemplazando el axioma de reducción para programas PDL con el siguiente

$$[\mathsf{U}, \mathsf{e}_i][\pi]\varphi \quad \leftrightarrow \bigwedge_{\substack{0 \leq j \leq n-1 \\ \mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,j] \neq ?\bot}} [\mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,j]][\mathsf{U}, \mathsf{e}_j]\varphi \qquad (\textit{prog}).$$

Corolario 191.
El sistema de axiomas para LCC que surge de la definición 190 es correcto y completo.

Demostración. El único nuevo axioma (es decir, el de los programas PDL), es correcto por el lema 185. Para completitud, el sistema de prueba para PDL es completo, y cada fórmula LCC es probablemente equivalente a una fórmula PDL usando el corolario 189. ■

6.5. Complejidad de los nuevos transformadores

Los transformadores de programas originales en [vBvEK06] requieren tiempo exponencial debido a la utilización del método de Kleene [Kle56]. Además, el tamaño de las fórmulas transformadas de tipo π^* es también exponencial debido a la definición de K^{U}_{ijn} (definición 180).

Con el fin de estudiar la complejidad de nuestros transformadores de programas, primero implementamos en Prolog tanto los transformadores de programas originales como nuestro cálculo matricial. La figura 15 (6.5) muestra el resultado para nuestros transformadores para dos tipos de modelos de acción, *completos* y *encadenados*, de 1 a 20 estados. El eje vertical del gráfico, el cual se muestra en escala logarítmica, presenta el número de operadores PDL en el programa transformado $\mu^{\mathsf{U}}(\pi^*)[n-1, 0]$ siendo n el número de estados en el modelo de acción.

Un modelo de acción es *completo* cuando está completamente conectado –es decir, cuando cada $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,j] = s(i,j)$ es una expresión atómica (la cual no es analizada más por las implementaciones)–. Todos los valores $s(i,j)$ en $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)$ se

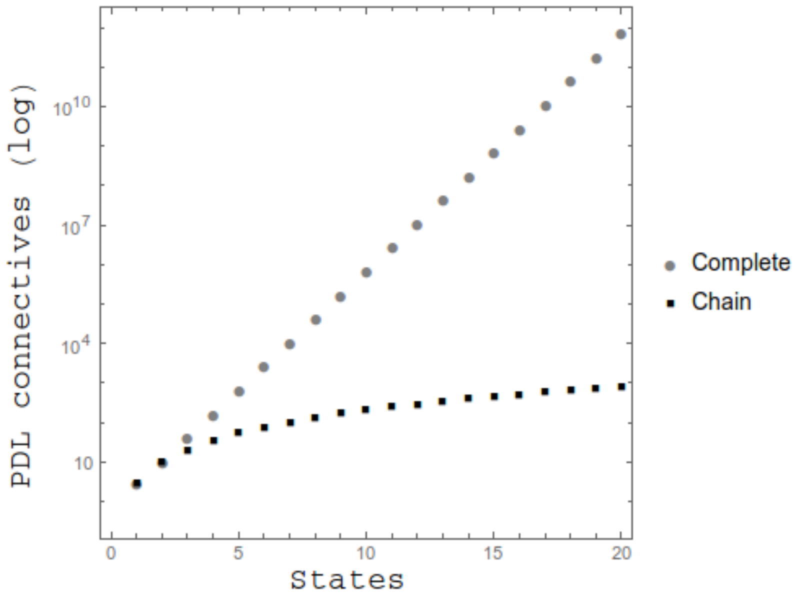

Fig. 15 (6.5): Número de conectivas PDL en $\mu^{\mathsf{U}}(\pi^*)$ para diferentes modelos de acción.

suponen diferentes, evitando simplificaciones de los patrones repetidos. El número de operadores en $\mu^{\mathsf{U}}(\pi^*)[n-1,0]$ es del orden de 2^{2n}. En el peor de los casos nuestros transformadores producen un resultado exponencial, lo que implica que el tiempo requerido también es exponencial. En un *modelo de acción encadenado*, cada estado está conectado consigo mismo, con el anterior y con el siguiente. Por lo tanto, $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)[i,j]$ es $s(i,j)$ cuando $i=j$ o $|i-j|=1$, y $?\bot$ en otro caso. Ahora el número de operadores en $\mu^{\mathsf{U}}(\pi^*)[n-1,0]$ es del orden de $2n^2$, por lo que en este caso la longitud del resultado es polinomial.

Los resultados para los transformadores de programas originales no se muestran en la figura 15 (6.5) como son, tanto para los modelos completos como para los encadenados, dado que son nuestro peor caso. (La razón es que no se benefician de eliminaciones superfluas $?\bot$.)

Como se ha argüido, la ventaja de nuestros transformadores es que pueden ser ejecutados en tiempo polinomial en casos diferentes al peor de todos, en contraste con los transformadores originales que siempre lo realizan de la misma manera (exponencial). Presentamos ahora un análisis de las operaciones implicadas en la computación de $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)$ para los diferentes tipos de programas π. Nuestro principal interés es el número de operaciones dentro de las matrices, por lo que las operaciones que modifican los programas se considera que pueden ser ejecutados en tiempo constante. La conclusión es que, mientras que el método de Kleene obliga a los transformadores de programas originales a utilizar un número exponencial de operaciones, nuestra propuesta utiliza sólo un número polinomial de operaciones con matrices. Suponemos estructuras de datos típicos como matriz (de dimensiones 1×1 y 2×2) y tablas «hash» con sus propiedades habituales.

Agentes De acuerdo con (6.19), computar $\mu^{\mathsf{U}}(a)[i,j]$ requiere comprobar si $\mathsf{e}_i\mathsf{R}_a\mathsf{e}_j$ se mantiene, y en caso afirmativo, obtener $?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_i)$. Las otras operaciones, que devuelven $?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_i); a$ o $?\bot$, pueden ser claramente realizadas en tiempo constante. Ahora, $\mathsf{e}_i\mathsf{R}_a\mathsf{e}_j$ se puede comprobar en tiempo constante si hay una matriz bidimensional M_a con $M_a[i,j]$ igual a 1 si y sólo si $\mathsf{e}_i\mathsf{R}_a\mathsf{e}_j$ y 0 en otro caso. También, $?\mathsf{pre}(\mathsf{e}_i)$ pueden ser devuelto en un tiempo constante si hay una matriz P con $P[i] = \mathsf{pre}(\mathsf{e}_i)$. Así pues, $\mu^{\mathsf{U}}(a)[i,j]$ es computada en $\mathscr{O}(1)$. Entonces, toda la matriz $\mu^{\mathsf{U}}(a)$ puede ser computada en $\mathscr{O}(n^2)$.

Test Computar $\mu^{\mathsf{U}}(?\varphi)[i,j]$ (ver (6.20)) requiere de nuevo acceder a $\mathsf{pre}(\mathsf{e}_i)$, el cual justificamos que estaba en $\mathscr{O}(1)$. Las otras operaciones (comprobar si $i = j$, o devolver el valor correspondiente) están claramente también en $\mathscr{O}(1)$. Así que computar $\mu^{\mathsf{U}}(?\varphi)[i,j]$ está nuevamente en $\mathscr{O}(1)$ y $\mu^{\mathsf{U}}(?\varphi)$ en $\mathscr{O}(n^2)$.

Elección no determinista Asumimos que $\mu^{\mathsf{U}}(\pi_1)$ y $\mu^{\mathsf{U}}(\pi_2)$ están dadas. Entonces, computar $\mu^{\mathsf{U}}(\pi_1 \cup \pi_2)[i,j]$ (ver (6.21)) requiere un número constante de operaciones: acceder a $\mu^{\mathsf{U}}(\pi_1)[i,j]$ y $\mu^{\mathsf{U}}(\pi_2)[i,j]$, comprobar si algunos de ellos es $?\bot$ y devolver el resultado (como se indicó anteriormente, se supone que componer la elección de dos programas se puede hacer en tiempo constante: sólo estamos interesados en el número de operaciones matriciales). Así, computar completamente $\mu^{\mathsf{U}}(\pi_1 \cup \pi_2)$ está de nuevo en $\mathscr{O}(n^2)$.

Composición secuencial De nuevo, asumimos que $\mu^{\mathsf{U}}(\pi_1)$ y $\mu^{\mathsf{U}}(\pi_2)$ están dados. Computar $\mu^{\mathsf{U}}(\pi_1;\pi_2)[i,j]$ (ver (6.23)) requiere conseguir n valores (para $0 \leq k \leq n-1$) de $\mu^{\mathsf{U}}(\pi_1)[i,k] \odot \mu^{\mathsf{U}}(\pi_2)[k,j]$. Cada uno de estos valores puede ser computado en $\mathscr{O}(1)$, dado que las operaciones requeridas lo son sólo para acceder tanto a $\mu^{\mathsf{U}}(\pi_1)[i,k]$ como a $\mu^{\mathsf{U}}(\pi_2)[k,j]$ y aplicar "$\odot$". Así, los n valores de

$\mu^{\mathsf{U}}(\pi_1)[i,k] \odot \mu^{\mathsf{U}}(\pi_2)[k,j]$ se computan en $\mathscr{O}(n)$. También, "$\bigoplus$" debe aplicarse a esos valores. Esto puede hacerse mediante el uso de una tabla »hash« donde se almacenan los diferentes valores mientras están siendo generados: sólo se insertan nuevos valores si no estaban previamente en la tabla. Suponiendo que se accede a la tabla »hash« en $\mathscr{O}(1)$, entonces $\mu^{\mathsf{U}}(\pi_1;\pi_2)[i,j]$ es computada en $\mathscr{O}(n)$. Así $\mu^{\mathsf{U}}(\pi_1;\pi_2)$ es computada en $\mathscr{O}(n^3)$.

Clausura de Kleene Dado $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)$, computar $\mu^{\mathsf{U}}(\pi^*)$ requiere primero construir $(\mu^{\mathsf{U}}(\pi) \mid A^{\mathsf{U}})$ y después n iteraciones de S_k^{U} (ver (6.25)). Nótese que el tamaño de $(\mu^{\mathsf{U}}(\pi) \mid A^{\mathsf{U}})$ es $n \times 2n$ y construir cada celda requiere un número constante de operaciones. Así que construir la matriz inicial está en $\mathscr{O}(n^2)$. Ahora, cada una de las n llamadas a S_k^{U} está en $\mathscr{O}(n^2)$, dado que Ard_k (ver (6.28)) sólo modifica las celdas de la fila k, $Subs_k$ sólo las celdas en las otras filas, y cada celda se puede modificar en tiempo constante. De manera que las n llamadas a S_k^{U} se calculan en $\mathscr{O}(n^3)$.

En el párrafo anterior hemos supuesto que las matrices para subprogramas están dadas. Con esta asunción, el mayor número de operaciones de matrices a construir $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)$ está en $\mathscr{O}(n^3)$. Sin esta asunción, si g es el número de subprogramas en π, construir $\mu^{\mathsf{U}}(\pi)$ desde el principio requiere una cantidad de operaciones matriciales en $\mathscr{O}(g \cdot n^3)$.

Capítulo 7

Olvidar fórmulas proposicionales en sistemas monoagentes

Olvidar es una *acción epistémica* (entendiendo el término *acción* de manera que no necesariamente involucre la voluntad del agente que olvida y el término *epistémico* en un sentido amplio que acoja tanto a creencias como a conocimientos en sentido estricto[1]. En un primer acercamiento al concepto la mayoría de nosotros diríamos que olvidar es un proceso por el que se pierden creencias / conocimientos explícitos que antes se poseían y, en consecuencia, que se trata de un proceso opuesto al de *aprender* (dicho coloquialmente, olvidar es 'desaprender').

Podemos adquirir creencias / conocimientos explícitos (es decir, aprender) de dos modos distintos:

- A partir de un «input» externo, el cual en la lógica epistémica dinámica se modeliza como un *anuncio* –que, dependiendo de su notoriedad para otros agentes, puede ser público, privado o secreto–. Debemos aclarar que el vocablo *anuncio* tiene aquí un significado amplio que acoge, pero no se limita, a los mensajes que ciertos agentes pueden enviar voluntariamente a otros. *Anuncio* abarca en este contexto lógico a cualquier proceso de transferencia de información entre dos o más agentes, entendiendo a su vez el concepto de agente en un sentido tan extenso que incluye no sólo a los individuos humanos y a los restantes animales, sino también a cualesquiera seres vivos, a ciertos dispositivos artificiales (normalmente mecánicos o electrónicos) e incluso al

[1] Así pues, abarcando tanto a la Lógica Doxástica como a la Lógica Epistémica en sentido propio.

entorno que rodea a un agente: el ambiente es a menudo considerado como un agente especial que no tiene capacidad cognitiva y que no está dotado de voluntad (así pues, una entidad muy especial, pero que, al fin y al cabo, puede ser tratado como un agente si es esto lo que se desea). Por lo tanto, las manifestaciones físicas del entorno –es decir, los fenómenos– son modelizados como anuncios de éste a los agentes (eventualmente artificiales) que posean los adecuados órganos sensoriales.

- A partir de un proceso puramente interno (es decir, de una mera operación mental, sin intervención de los órganos sensoriales), consistente en la manipulación por un agente cognitivo de información que ya poseía. Dentro de este tipo se puede encontrar la serendipia, la asociación de ideas y, por supuesto, los múltiples tipos de inferencias (deductivas, inductivas, probabilísticas, abductivas, por analogía, por contraposición, imprecisas, por defecto...).

La información generada en un proceso de aprendizaje puede estar o no en conflicto con la que previamente poseía el sujeto, de modo que en este sentido se pueden distinguir tres modos diferentes de discurrir dicho proceso:

- Expansión: el conjunto de creencias / conocimientos resultante es un superconjunto propio del conjunto previo.
- Contracción: el conjunto de creencias / conocimientos que se obtiene es un subconjunto no coincidente del conjunto previo.
- Revisión: entendiéndolo como la composición de un proceso de contracción y otro de expansión.

Por otro lado, cuando decimos que sabemos algo realmente deberíamos decir que tenemos motivos racionales (o buenas razones) para creer algo, pero no podemos asegurar categóricamente que eso que decimos saber sea verdadero. Tomemos la definición tradicional según la cual “conocimiento es creencia verdadera y justificada”, que se suele atribuir a Platón porque éste presentó una definición bastante similar en sus diálogos *Teeteto* (201) y *Menón* (98); el problema tiene una doble vertiente: en primer lugar, qué se puede entender por *verdadera* (por ejemplo, pensando en los conocimientos que provienen de una fuente externa y teniendo en cuenta que ningún sujeto puede agotar la totalidad de la experiencia ni siquiera abarcar todos los aspectos de un fenómeno cualquiera) y, en segundo, qué se debe entender por *justificado* (cuestión que resulta aún más controvertida que la anterior)[2].

Dentro del ámbito de la Lógica Epistémica en sentido amplio, la opción más frecuente consiste en modelizar los conocimientos como creencias verdaderas y las creencias, según la opción de cada sistema lógico, como meras posibilidades accesibles para el sujeto o bien como posibilidades accesibles para el sujeto que además gozan de maximalidad con respecto a las restantes posibilidades accesibles. Por supuesto, para la Lógica lo que en concreto es conocido o creído es en muchos casos un «datum»Ṗor ejemplo, en el ámbito puramente proposicional el conocimiento de o la creencia en las proposiciones atómicas (las variables proposicionales) debe tomarse de otras disciplinas u otras fuentes de conocimiento, siendo el papel de la Lógica Deductiva la determinación de forma justificada del valor de verdad de las proposiciones moleculares a partir de las anteriores. Justamente de este modo la Lógica incorpora el requisito de que los conocimientos son justificados: una proposición es justificada si, en el caso de ser atómica, así lo indica la disciplina de conocimiento competente en la materia, o, en el caso de ser no atómica, es consecuencia lógica de la configuración de valores de las proposiciones atómicas atendiendo a la información que sobre ellas nos proporcionan los distintos ámbitos de conocimiento.

Aunque existen sistemas que permiten distinguir los conocimientos explícitos de los implícitos (por ejemplo, a través de lo que se ha dado en llamar el *operador de conciencia*), en esta investigación no incorporaremos esta distinción para evitar comenzar con un planteamiento excesivamente complejo que dificulte la comprensión de nuestra aportación novedosa. Así pues, el sistema lógico que construiremos adolecerá, como muchas otras lógicas epistémicas dinámicas convencionales, del inconveniente de que modelizan a un agente con omnisciencia lógica (en consecuencia, en nuestro trabajo éste no puede conocer información nueva por deducción, pues toda consecuencia deductiva de su base de conocimientos ya la conoce), de modo que todo conocimiento nuevo debe proceder del exterior. Esto no será obstáculo para que el agente pueda realizar inferencias abductivas, cuyo detonante será la constatación de un fracaso abductivo; sin embargo, sus conclusiones

[2] El reto de darle respuesta a la cuestión de si se puede aceptar o no que los conocimientos son creencias justificadas es lo que en el ámbito académico recibe el nombre de *problema de Gettier*. Es un asunto controvertido sobre el que se han producido y se siguen produciendo una gran cantidad de aportaciones, pero cuya respuesta sigue estando lejos de que genere siquiera un mínimo consenso.

no son conocimientos sino creencias.

Ya veremos que olvidar está relacionado no sólo con el concepto estándar de conocer sino también con otra noción epistémica un poco menos común: la de *conocer-si*. Cuando conocemos si π es el caso o no (es decir, $Kw\pi$) no necesariamente conocemos π (es decir, $K\pi$): sólo podemos asegurar algo más débil, que o bien conozco π o bien conozco $\neg\pi$ (es decir, $Kw\pi \equiv K\pi \vee K\neg\pi$.

Muchas de las acciones epistémicas que afectan a los conocimientos o/y a las creencias han sido abundantemente estudiadas en la literatura lógica. En relación con las creencias podemos señalar:

- La expansión ([Rot89]).
- La contracción ([AGM85] y [Fuh91]).
- La revisión ([Rot89], [Bou96], [LS07], [vB07], [Rot08], [BS08], [vDvdHK07] y [vB11]).
- La fusión ([KPP11])
- Diversas formas de inferencias ([VQ14] y [NFSTVQ13].

En cuanto a los conocimientos, cabe destacar:

- La inferencia deductiva ([VQ09] y [VQ13]).
- Los anuncios públicos ([Pla89] y [GG97]).
- Otros tipos de anuncios ([BMS99]).

Sin embargo, precisamente la acción epistémica de olvidar no ha recibido mucha atención en la literatura lógica, especialmente en el marco de la Lógica Epistémica Dinámica (tómese como ejemplos las importantes contribuciones [vDvdHK07] y [vB11]). Esta situación es ligeramente distinta en otros enfoques dentro del área de *Representación del Conocimiento*: por ejemplo, estando el conocimiento representado como un conjunto finito de fórmulas (el llamado *conjunto de conocimientos*), la definición típica del olvido en escenarios monoagentes utiliza alguna noción de similitud entre los modelos –concretamente, un conjunto de conocimientos será el resultado de olvidar un conjunto finito de proposiciones atómicas Var' si y sólo si cada modelo del conjunto de conocimientos resultante es equivalente a un modelo del conjunto de conocimientos original cuando los átomos del conjunto Var' son ignorados ([LR94]); en contextos modales, como el que se aborda en el presente trabajo, la noción de equivalencia utilizada es la de la existencia de al menos una *bisimulación* entre el modelo del conjunto original y el modelo del conjunto resultante, lo que da lugar a sistemas como los indicados en [ZZ08] y [ZZ09] similares a aquéllos que contienen modalidades para cuantificación sobre bisimulaciones (por ejemplo [Fre06])–. En cualquier, no cabe duda de que el olvido es una de las acciones epistémicas menos estudiadas en el seno de la Lógica.

Una de las razones que explica esta situación quizás sea su similitud con la *contracción de creencias*, una acción que, cuando es representada semánticamente, habitualmente se basa en el sistema de esferas para condicionales de Lewis ([Lew73]). Este sistema de esferas usa un orden entre teorías (el orden de plausibilidad de las teorías) y esto proporciona una guía para determinar las nuevas creencias que un agente tendrá cuando una de las actuales es descartada ([Gro88]). Esto es adecuado para la contracción de creencias dado que un orden de plausibilidad es natural cuando se definen las creencias: el conjunto de situaciones epistémicamente posibles es normalmente concebido teniendo un orden que no sólo define esta noción epistémica (concretamente, las creencias se definen como las proposiciones que se satisfacen en las situaciones más plausibles) sino que también establece una jerarquía entre las que no son creídas pero aún no han sido descartadas. Sin embargo, un orden similar no es natural cuando tratamos con los conocimientos, ya que en este ámbito normalmente no existe una jerarquía canónica entre las situaciones epistémicamente posibles que se sabe que no son el caso y que, por lo tanto, han sido descartadas.

En este capítulo presentamos un tratamiento lógico bajo semántica relacional kripkeana (semántica de mundos posibles) para sistemas monoagentes de distintas variantes de la acción de olvidar una fórmula cualquiera, de manera especial las de *olvidar una fórmula proposicional* (también podríamos decir *olvidar-que una fórmula proposicional es el caso*) y *olvidar-si es el caso una fórmula proposicional* (entendiendo esta última acción como *olvidar su valor de verdad*[3]) y lo hacemos sin apoyarnos en un orden entre teorías o posibilidades epistémicas y sin usar ninguna noción de similitud entre modelos. Se puede decir que, en los casos típicos, olvidar-que π conlleva obtener como resultado $\neg K\pi$ y que olvidar-si π da lugar a que se

[3] Así pues, estas acciones no están relacionadas con otras que involucran, por ejemplo, los cambios en la conciencia –como las que aparecen en [vBVQ10] y [vDFVQW13], mediante las cuales los agentes dejan de ser conscientes de ciertas fórmulas atómicas–.

alcance $\neg Kw\pi$.

Cualquiera de las variantes de la operación de olvidar que estudiaremos se implementará mediante transformaciones sobre los modelos epistémicos apuntados. Por su parte, estos últimos serán los encargados de recoger la información sobre los hechos y sobre el conocimiento que el agente tiene de esos hechos (ciertamente, el modelo epistémico sin más no incluye la información fáctica, sino sólo la epistémica, de ahí que sea necesario recoger el dato de cuál es el mundo actual). Por tanto, la modelización formal de la operación de olvidar es algo más complicado que la mera eliminación de un ítem en una base de hechos, al estar involucrados también el conocimiento que el agente posee de los hechos. Nuestro deseo es que tras olvidar el agente una fórmula atómica φ él no conozca esa variable proposicional, sin que ello afecte lo más mínimo al conocimiento de otras variables proposicionales – aunque sí a algunas fórmulas modales en torno a la variable proposicional olvidada (por ejemplo, queremos que no sea cierto "conozco que conozco φ", pero ello no debe afectar a "conozco que no conozco φ", ni a "no conozco que conozco φ", ni a "no conozco que no conozco φ").

El único requisito que le exigimos al sistema lógico a partir del cual construimos el nuestro es que satisfaga las condiciones de normalidad, pero no se impone ningún axioma adicional a su cálculo sintáctico ni ninguna propiedad especial a su relación de accesibilidad. En cuanto al sistema lógico que obtendremos, nuestra propuesta da lugar a una lógica epistémica dinámica que permite el manejo de conocimientos y creencias, por lo que podríamos llamar la lógica del conocimiento / la creencia y el olvido (LC-CO); ésta puede ser concebida como una implementación de la lógica de la comunicación y el cambio (que fue vista en el capítulo anterior), siendo estrictamente más general que la lógica epistémica en sentido convencional.

En algunos puntos lo que aquí exponemos es una extensión del trabajo de Hans van Ditmarsch, Andreas Herzig, Jérôme Lang y Pierre Marquis ([vDHLM09]), en el cual se aborda sólo el olvido de proposiciones atómicas y el olvido del valor de verdad de tales proposiciones. La idea clave que guía nuestras definiciones es que un agente que olvida π perderá el conocimiento previo que tuviese de dicha proposición. Pero si el agente conocía previamente $\neg\pi$, hay dos posibilidades después de olvidar π: su conocimiento de $\neg\pi$ podría fallar o no. Aquí la primera posibilidad es llamada *olvidar-si* π (después de todo, el agente no conoce ni π ni $\neg\pi$) y la segunda es llamada *olvidar-que* π (ya que en relación al estado epistémico del agente podemos asegurar simplemente que no conoce π puesto que que se consigue que π sea posiblemente falsa, pero no necesariamente posiblemente verdadera). En este trabajo nos centraremos principalmente en la primera posibilidad, aunque la segunda será también tratada brevemente. Justamente en relación a la primera posibilidad, además de describirla como una operación sobre modelos epistémicos, en este capítulo se han discutido varias de sus propiedades e igualmente se ha proporcionado un sistema de axiomas correcto y completo para ella.

Por otro lado, dado que, como ya hemos dicho, una fórmula dada puede ser olvidada de más formas, además de estudiar las dos ya citadas (que serán dos variantes que agruparemos bajo el rótulo de *olvidar uniformemente*), presentaremos también algunas pistas sobre otras variantes con propiedades diferentes: una acción de *olvidar condicionalmente*, otra de *olvidar-si fuertemente* (la cual es determinista), y una acción de *olvidar-si de forma dependiente* (más compleja que las anteriores en tanto que el agente puede olvidar el valor de verdad de las fórmulas dadas por diferentes razones en diferentes partes del modelo). Se ha demostrado que no sólo no se puede definir la operación de *olvidar-si uniformemente* en términos de la más simple *olvidar-que uniformemente*, sino también que las acciones olvidar-si uniformemente, olvidar-si fuertemente y olvidar-si de forma dependiente dan lugar a diferentes lógicas.

Tanto nuestra propuesta de olvidar-que como la de olvidar-si se enfrentan a un reto: al intentar olvidar una proposición compleja, obviamente el agente debe perder información sobre las proposiciones atómicas que aparecen en ella y a partir de aquí surge una situación no determinista, en la medida que habitualmente existirán varias opciones posibles para alcanzar el mismo objetivo. Para resolver esta situación consideraremos expresiones que cuantificarán sobre todas las formas 'minimales' posibles de olvidar la proposición compleja indicada. Eso sí, aunque las variables proposicionales son modificadas de modo no-determinista in los mundos posibles, sí se hará de modo uniforme en cada 'version' del modelo original.

A diferencia de lo que ocurre en otra importante lógica epistémica dinámica (la lógica de anuncios públicos), en la que aquí estudiaremos sí resulta posible la revisión del conocimiento de las proposiciones atómicas. Y esta capacidad de retractarse en el conocimiento de las fórmulas más elementales la hace especialmente interesante para usarla en la modelización de la abducción ante anomalía. Ante un problema abductivo anómalo, una estrategia que parece 'natural' es transformarlo, mediante alguna operación epistémica, en un problema abductivo novedoso. Entre tales operaciones, quizás la más inmediata desde un punto de vista intuitivo, sería una que obtenga un conveniente subconjunto de la teoría-base: lo deseable es que dejase de poder derivarse la negación de la fórmula-problema a la vez que se mantiene el resto de la configuración epistémica del sujeto. Diferentes desarrollos formales pueden acercarnos más o menos al objetivo propuesto: la contracción de creencias en el seno del modelo AGM es un buen candidato; sin embargo, si queremos gozar de todas las ventajas que derivan de desenvolvernos en el marco de la Lógica Epistémica Dinámica, la opción a elegir es la operación de olvidar.

Esta última opción imita en cierto modo una manera de proceder en el ámbito de la investigación científica: cuando un científico se encuentra con un hecho bien contrastado que se opone a la teoría científica que sostiene en relación a esa cuestión, procede a eliminar del repertorio de proposiciones que, salvo prueba en contrario, considera conocimiento, un cierto número de ellas con el doble requisito de que consigan que no se pueda inferir la proposición contradictoria que representa el aludido hecho sorprendente, pero a la vez que produzca el menor impacto posible en la teoría previamente aceptada. Esta eliminación de conocimiento es justamente lo que se modeliza mediante la operación de olvidar.

El capítulo quedará estructurado de la siguiente manera. En la segunda sección repasaremos algunas nociones básicas de lógica proposicional y de lógica epistémica dinámica (en sentido amplio) que se usarán a lo largo del capítulo. La tercera sección presenta la noción de *olvidar-si uniformemente* y, dado que es el objetivo principal de este capítulo, la estudiaremos con más detalle en la sección siguiente. La quinta introduce la acción de *olvidar-que uniformemente* más simple y la compara con la acción de olvidar-si ya estudiada. La sexta sección presenta nuestro principal resultado: una axiomatización correcta y completa para nuestra lógica del conocimiento / la creencia y el olvido (LC-CO). Finalmente, en la última sección se mencionan algunos modos alternativos de modelizar la acción de olvidar.

Varias direcciones quedan por estudiar. En primer lugar, la axiomatización de la lógica que acoge la acción de olvidar de forma dependiente. Es posible que los axiomas de los modelos de acción se pueden utilizar para el sistema que cuenta con dicho operador modal si se imponen algunas restricciones a las funciones de olvido. En segundo lugar, y posiblemente más interesante, es una acción de olvidar fórmulas modales, lo que permitiría a los agentes olvidar sus propios estados epistémicos o los de otros agentes. Por último, como ya hemos mencionado, nuestro modelo de olvido difiere en varios aspectos del enfoque de contracción de creencias. Si bien hemos discutido algunas diferencias y similitudes, dejamos una comparación más amplia de los dos, junto con una posible unificación, para un trabajo futuro.

En nuestra modelización se da cuenta de dos posibilidades que resultan peliagudas desde un punto de vista intuitivo:

- Olvidar lo que no se conocía/consideraba cognoscitivamente posible: esto colisiona con la primera aproximación intuitiva que dimos de la acción de olvidar (a la que denominaremos el sentido estricto de ese verbo), pero curiosamente es plenamente compatible con la primera acepción que el diccionario de la Real Academia Española de la lengua presenta en su definición del término olvidar ("Dejar de tener en la memoria lo que se tenía o debía tener"). A esta última versión la denominaremos el *sentido amplio de olvidar*.
- Que lo olvidado siga siendo conocido/cognoscitivamente posible: esto sólo puede ocurrir en sistemas en los que el conocimiento/el conjunto de posibilidades epistémicas era inconsistente.

Así pues, hay que ser cautos en atribuirle a la operación epistémica aquí modelizada más de lo que realmente puede y quiere alcanzar; por ejemplo: el término *olvidar* en el lenguaje cotidiano remite a la idea de una acción involuntaria, pero ésta y muchas otras 'resonancias' del concepto intuitivo quedan fueras de nuestra versión formal. A pesar de todo, creemos que la elección del vocablo es acertada (y, desde luego, no es caprichosa).

7.1. Cuestiones básicas

El sistema lógico de partida a partir del cual introducimos la acción de olvidar será una *lógica modal monoagente* genérica. A lo largo del texto, *At* denota un conjunto numerable no vacío de *átomos* o *variables proposicionales.* He aquí la definición del lenguaje básico de lógica modal proposicional.

Definición 192 (Gramática de $\mathcal{L}_\Box$)**.**
La gramática de $\mathcal{L}_\Box$ viene dada por

$$\varphi ::= \top \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid \Box\varphi$$

donde $p \in Var$. Las fórmulas de la forma $\Box\varphi$ son leídas como el agente sabe que φ es el caso. *Los símbolos "$\perp$", "$\vee$", "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$" y "$\Diamond$" son definidos del modo usual.*

Las lógicas modales son interpretadas típicamente a través de una *semántica relacional kripkeana* (también denominada *semántica de mundos posibles*), como se describe a continuación:

Definición 193 (Marco de Kripke monoagente)**.**
Un marco de Kripke monoagente[4] *es una tupla $F = (W, R)$ donde W es un conjunto no vacío y $R \subseteq W \times W$, una relación binaria; no hay asunciones realizadas* a priori *sobre R. Un* modelo de Kripke monoagente[5] *$M = (F, V)$ es un marco de Kripke F equipado con una función de valoración $V : Var \to \mathscr{P}(W)$. Un* modelo de Kripke monoagente apuntado[6] *es un par (M, w) con M un modelo de Kripke y w un elemento de su dominio.*

Definición 194 (Satisfacción en un modelo apuntado)**.**
Sea $M = (W, R, V)e$ un modelo. La relación de satisfacción $\vDash$ *entre los modelos apuntados y las fórmulas es definida como sigue:*

$$
\begin{array}{lll}
(M, w) \vDash p & \textit{si} & w \in V(p); \\
(M, w) \vDash \neg\varphi & \textit{si} & (M, w) \nvDash \varphi; \\
(M, w) \vDash \varphi \wedge \psi & \textit{si} & (M, w) \vDash \varphi \ \textit{y} \ (M, w) \vDash \psi; \\
(M, w) \vDash \Box\varphi & \textit{si} & \textit{para todo } v \in W,\ wRv \textit{ implica } (M, v) \vDash \varphi.
\end{array}
$$

Dado un modelo M, se define la función $[\![\cdot]\!]^M : \mathcal{L}_\Box \to \mathscr{P}(W)$ como: $w \in [\![\varphi]\!]^M$ si y sólo si $(M, w) \vDash \varphi$. La notación $[\![\varphi]\!]^M$ será abreviada como $[\![\varphi]\!]$ cuando esto no lleve a confusión.

Como ya es usual, $M \vDash \varphi$ establece que $[\![\varphi]\!]^M = W$, y si $\mathcal{X}$ es una clase de modelos, $\mathcal{X} \vDash \varphi$ establece que $M \vDash \varphi$ para todo $M \in \mathcal{X}$. La fórmula φ es válida *cuando $M \vDash \varphi$ para cada modelo M, un caso que simbolizamos como $\vDash \varphi$.*

Cuando modelizamos el conocimiento, la clase de modelos en la que la relación es una relación de equivalencia, $\mathcal{S}$, es de particular interés. Sin embargo, este capítulo mantendrá una pretensión general, sólo restringiendo su atención a modelos con propiedades particulares cuando ello se establezca explícitamente.

De cara a formalizar la acción de olvidar, será conveniente representar las fórmulas proposicionales con su forma normal conjuntiva usando conjuntos de cláusulas.

[4] Para no hacer excesivamente complicada la lectura omitiremos en el resto del capítulo la palabra *monoagente* cuando nos refiramos a este concepto.
[5] *Idem*.
[6] *Idem*.

Recordemos que un *literal* ℓ es un átomo o su negación y una *cláusula* D es un conjunto finito (posiblemente vacío) de literales interpretados disyuntivamente (así que D representa la fórmula $\bigvee D$)[7]. Se dice que una cláusula D es una *consecuencia* de una fórmula proposicional π cuando $\vDash \pi \to \bigvee D$.

Una fórmula proposicional está en su *forma normal conjuntiva* cuando se da como un conjunto finito (posiblemente vacío) de cláusulas, interpretado conjuntivamente. Más exactamente, el conjunto de cláusulas $\mathscr{C}$ es interpretado como la fórmula $\mathscr{C}_\bigwedge$ definida del siguiente modo:

$$\mathscr{C}_\bigwedge := \bigwedge_{D\in\mathscr{C}} \bigvee D.$$

Claro está, que una fórmula proposicional dada podría tener muchas formas normales conjuntivas equivalentes, aunque podemos tomar una canónicamente. Para hacerlo así, se descartan primero todas las *cláusulas tautológicas*, esto es, las cláusulas D en las que hay un átomo p tal que $\{p, \neg p\} \subseteq D$. Una cláusula $D \neq \varnothing$ que es no tautológica es llamada *contingente*. Entonces, dentro de cada una de esas cláusulas, se eliminan literales 'innecesarios': se dice que una cláusula D es una *consecuencia mínima* de una fórmula proposicional π si y sólo si $\vDash \pi \to \bigvee D$ y no hay $D' \subsetneq D$ tal que $\vDash \pi \to \bigvee D'$. Con esto en mente, podríamos definir una forma clausal canónica (o prima) para π:

Definición 195 (Primo implicado)**.**
Sea π una fórmula de lógica proposicional. Una cláusula D es un primo implicado *de π si y sólo si es una consecuencia mínima no tautológica de π. La* forma clausal prima *$\mathscr{C}(\pi)$ de π es definida para ser el conjunto de todos los primos implicados de π. La figura 1 (7.1) muestra algunos ejemplos.*

Los primos implicados han aparecido previamente en la literatura (cf. [Qui52, RBM97]), y hay varios algoritmos para encontrarlos. (por ejemplo, [Qui52, dK92, KT90, Rym94, RBM97]; ver [Bit08] para más información). Este concepto ya ha sido usado para cuestiones epistémicas, principalmente en proposiciones y siguiendo el enfoque de tipo AGM para la revisión de creencias [AGM85] en el que las creencias del agente son representadas sintácticamente (por ejemplo, [Pag06]; ver la última sección de este capítulo para una comparación más detallada con nuestro enfoque). Aquí se usará para simplificar la operación sobre modelos definida en la siguiente sección.

[7] Recordemos que, como es costumbre, $(\bigvee \varnothing) := \bot$ y $(\bigwedge \varnothing) := \top$.

π	$\mathscr{C}(\pi)$	π	$\mathscr{C}(\pi)$
$p \wedge q$	$\{\{p\}, \{q\}\}$	$\neg(p \wedge q)$	$\{\{\neg p, \neg q\}\}$
$p \vee q$	$\{\{p, q\}\}$	$\neg(p \vee q)$	$\{\{\neg p\}, \{\neg q\}\}$
$p \rightarrow q$	$\{\{\neg p, q\}\}$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\{\{p\}, \{\neg q\}\}$
$p \leftrightarrow q$	$\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$\{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$

Tabla 1 (7.1): Algunas formas clausales primas usadas en el texto.

El siguiente lema es sencillo.

Lema 196.
Para cualquier fórmula proposicional π, el conjunto $\mathscr{C}(\pi)$ es finito, sus elementos son finitos, y satisface $\vDash \pi \leftrightarrow \mathscr{C}_{\bigwedge}(\pi)$. Más aún, $\vDash \pi_1 \leftrightarrow \pi_2$ implica $\mathscr{C}(\pi_1) = \mathscr{C}(\pi_2)$, mientras que $\mathscr{C}(\top) = \varnothing$ y $\mathscr{C}(\bot) = \{\varnothing\}$.

7.2. Olvidar-si uniformemente

Con el fin de razonar acerca de olvidar-si, el lenguaje básico modal se amplía con una nueva modalidad.

Definición 197 (Lenguaje $\mathcal{L}_{\Box}$).
El lenguaje $\mathcal{L}_{\Box\ddagger}$ extiende a $\mathcal{L}_{\Box}$ con expresiones de la forma $[\ddagger\pi]\varphi$ con π una fórmula proposicional, leída como después de que el agente olvide-si π, φ es el caso. *La expresión $\langle\ddagger\pi\rangle\varphi$ es definida de la forma estándar ($\neg[\ddagger\pi]\neg\varphi$).*

Vale la pena destacar que, como se ha discutido antes, este capítulo entiende *olvidar-si* π simplemente como *olvidar el valor de verdad de* π; así pues, el acto de olvidar estudiado aquí no implica otras acciones relacionadas (como, por ejemplo, *ser consciente de* los átomos / las fórmulas [vBVQ10, vDFVQW13]).

Obsérvese que, dado que el agente conoce φ ($\Box\varphi$) cuando φ se sostiene en todas sus alternativas epistémicas, con el fin de olvidar (esto es, de no saber en adelante) que una fórmula proposicional dada π es el caso, necesita considerar como posible al menos una situación donde π falle. El primer paso es, entonces, decidir cómo hacer que π falle en un mundo dado w. Supongamos que π no es una tautología (este caso se discutirá posteriormente). Cuando π es reescrito en su forma clausal prima $\mathscr{C}(\pi) = \{D_1, \ldots, D_n\}$, es obvio que con el fin de hacer que π sea falsa en w, al menos una cláusula en $\mathscr{C}(\pi)$ debería ser falsa en ese mundo; esto podría en principio darnos un total de $2^n - 1$ diferentes formas de hacer falsa π. Sin embargo, hacer falso un conjunto no vacío de estas cláusulas sería problemático, tanto por la explosión combinatoria como por las negaciones de diferentes cláusulas, que podrían ser mutuamente incompatibles. Una alternativa mejor es seguir una aproximación de *cambio minimal*, donde π pasará a ser falsa haciendo falsa una de sus cláusulas $D_i \in \mathscr{C}(\pi)$.

Ahora bien, dada la cláusula que se falsifica, necesitamos decidir no sólo cuántos mundos han de ser introducidos como parte de las posibilidades epistémicas del agente, sino también qué valor de verdad se asignará, en estos nuevos mundos, a los átomos que no aparecen en la cláusula dada. Una vez más, el enfoque de cambio mínimo sugiere que la forma menos 'intrusiva' de cambiar el conocimiento del agente es hacer una copia de las posibilidades epistémicas actuales y luego hacer falsa la cláusula que figura en cada uno de ellos[8]. En el modelo resultante, la fórmula original π ha sido *hecha falsa uniformemente* porque la misma cláusula $D_i \in \mathscr{C}(\pi)$ ha sido hecha falsa en todos los mundos de la nueva copia del conjunto de posibilidades epistémicas.

La formalización de esta idea se puede utilizar para proporcionar la interpretación semántica de las fórmulas que expresan el efecto de la acción olvidar-si π ($[\ddagger\pi]\varphi$). Para que un agente olvide el valor de verdad de una fórmula π se debe tener en cuenta no sólo la posibilidad que hace falsa π (haciendo falsa una de las cláusulas de la forma clausal prima de π) sino también una posibilidad que hace falsa $\neg\pi$ (haciendo falsa una de las cláusulas de la forma clausal prima de $\neg\pi$). Por lo tanto, una operación sobre modelos que represente esta acción tendrá dos cláusulas y creará dos copias de la actual configuración de posibilidades epistémicas, con cada copia siendo la falsificación de una cláusula. La operación que se define a continuación es una generalización que recibe un modelo epistémico y un conjunto finito de cláusulas $\mathscr{C}$, devolviendo un modelo con una copia de la actual configuración de posibilidades epistémicas que hacen falsa cada cláusula $\mathscr{C}$.

[8] Por supuesto, tal operación no es mínima con respecto al número de mundos que se añadirán; es mínima con respecto a los cambios en el conocimiento del agente.

Definición 198 (Operación olvidar-si)**.**
Sea $M = (W, R, V)$ un modelo y $\mathscr{C} = \{D_i \ / \ i \in I\}$ un conjunto finito (posiblemente vacío) de cláusulas no tautológicas, donde, sin pérdida de generalidad, $0 \notin I$. El nuevo modelo $M_u^{\mathscr{C}} = (W_u^{\mathscr{C}}, R_u^{\mathscr{C}}, V_u^{\mathscr{C}})$ es definido como sigue:

1. $W_u^{\mathscr{C}} := W \times (\{0\} \cup I)$;
2. *para cada $w, v \in W$ e $i, j \in \{0\} \cup I$, $(w, i) R_u^{\mathscr{C}} (v, j)$ si y sólo si wRv;*
3. *para cada $w \in W$, $(w, 0) \in V_u^{\mathscr{C}}(p)$ si y sólo si $w \in V(p)$; y*
4. *para cada $w \in W$ e $i \in I$, $(w, i) \in V_u^{\mathscr{C}}(p)$ si y sólo si se cumple una de las siguientes proposiciones:*
   a) $\neg p \in D_i$; *o*
   b) *ambos* $\{p, \neg p\} \cap D_i = \varnothing$ *y* $w \in V(p)$.

Así, $W_u^{\mathscr{C}}$ tiene dos tipos de mundos. Los mundos de la forma $(w, 0)$ serán los que preservarán el valor original: un átomo p es verdad en $(w, 0)$ si y sólo si p ya era verdad en w. Por otro lado, cada mundo de la forma (w, i) con $i \in I$ hará falsos todos los literales en D_i, dejando los átomos restantes como antes. La relación en el nuevo modelo se limita a seguir la relación original, por lo que un mundo (v, j) será accesible desde un mundo (w, i) si y sólo si v es accesible desde w en el modelo original.

Debe tenerse en cuenta también que estamos modelizando el olvido en el contexto de la lógica epistémica dinámica, donde el conocimiento está representado semánticamente. Esto conduce a varias diferencias claves con el enfoque sintáctico de la representación del conocimiento. En particular, un agente no puede distinguir entre las fórmulas semánticamente equivalentes (por lo que, si conoce π, también conoce todos sus equivalentes semánticos). Mediante el uso de las dos formas clausales primas π y $\neg\pi$, el acto de olvidar-si trata las fórmulas semánticamente equivalentes de la misma forma (así pues, el agente se ha olvidado no sólo del valor de verdad de π, sino también del de todas las que son equivalentes a ella). Son posibles los enfoques que distinguen semánticamente fórmulas equivalentes, pero requerirían un marco diferente para la modelización del conocimiento del agente.

Con esta operación sobre modelos es posible definir la interpretación semántica de las fórmulas de la forma $[\ddagger\pi]\varphi$, las cuales se leen intuitivamente como *después de que el agente olvide el valor de verdad de π, φ es el caso.*

Definición 199 (Satisfacción para $\mathcal{L}_{\Box\ddagger}$).
Sea $M = (W, R, V)$ un modelo y w un mundo de W. Se extiende la definición 194 a $\mathcal{L}_{\Box\ddagger}$ definiendo $(M, w) \models [\ddagger\pi]\varphi$ si y sólo si, para todo $D_1 \in \mathscr{C}(\pi)$ y $D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi)$,

$$M_u^{\{D_1,D_2\}}, (w, 0) \models \varphi.$$

El conjunto de fórmulas en $\mathcal{L}_{\Box\ddagger}$ válido bajo $\models$ será denotado como $\mathrm{Log}_{\Box\ddagger}$.

Por lo tanto, $[\ddagger\pi]\varphi$ establece que φ es el caso después de que el agente olvide el valor de verdad de π, independientemente de la elección de las cláusulas $D_1 \in \mathscr{C}(\pi)$ y $D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi)$ que se hacen falsas en los mundos añadidos.

Discusión: determinista vs. no determinista Como la definición 199 establece, esta propuesta de *olvidar-si* (y también la de la acción de *olvidar-que*, la cual será introducida en la sección 7.4) es no determinista; la fórmula φ se mantiene después de que el agente olvide-si π ($(M, w) \models [\ddagger\pi]\varphi$) si y sólo si φ es el caso después de que el agente olvide π ($M_u^{\{D_1,D_2\}}, (w, 0) \models \varphi$), independientemente de la forma en que olvide el valor de verdad de π (esto es, de su elección de $D_1 \in \mathscr{C}(\pi)$ y $D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi)$).

En general, hay más de una manera de hacer falsa una fórmula proposicional π en un mundo posible dado. Hay muchas maneras de hacer frente a estas múltiples posibilidades; en la subsección 7.6.2, exploraremos brevemente una alternativa a olvidar-si que hace falsa cada cláusula tanto en $\mathscr{C}(\pi)$ como en $\mathscr{C}(\neg\pi)$ en algún mundo posible.

Sin embargo, si nuestro agente representa su conocimiento semántico a través de un modelo de Kripke, esto podría conducir a un crecimiento exponencial en el tamaño del modelo. Nuestro enfoque no determinista se adapta a mantener el tamaño de los modelos relativamente pequeños sin dejar de eliminar el conocimiento del agente del valor de verdad de π, y esta restricción de cambio mínimo es el único supuesto que imponemos sobre la elección de un nuevo modelo. En la práctica, el agente puede elegir aleatoriamente entre varias opciones, o puede utilizar un criterio establecido para la elección de uno de ellos, pero vamos a modelar estos fenómenos desde una perspectiva 'externa', en la cual se desconocen las cláusulas específicas para ser elegidas.

Si se quiere proporcionar al agente un criterio determinista para la elección de un modelo cuando aplique la acción olvidar-si que no falsifica todas las cláusulas de las fórmulas involucradas, se podría utilizar un criterio de preferencia con el fin de elegir una sola cláusula en $\mathscr{C}(\pi)$ y otra en $\mathscr{C}(\neg\pi)$[9]. Esto sería razonable para el acto de contracción de creencias, ya que, como se mencionó en la primera sección, es razonable suponer una ordenación entre lo que no se cree pero aún no ha sido descartado. Sin embargo, un orden tal no es canónico cuando se trata de olvidar conocimiento: en la semántica de mundos posibles no hay *a priori* un ranking entre las situaciones epistémicamente posibles que ya han sido desechadas, lo que daría lugar a una clasificación entre todas las posibles formas de falsación de una fórmula que se sabe que no es el caso. Esto es, desde nuestra perspectiva, la diferencia clave entre la contracción de creencias y el olvido del conocimiento, y la razón por la cual, a pesar de que técnicamente es posible, no es natural asignar una mayor prioridad a alguna forma de olvidar una fórmula π dada (un subconjunto no vacío de $\mathscr{C}(\pi)$) sobre las demás.

Hay, por supuesto, alternativas ligeramente diferentes. Por ejemplo, en los *modelos de plausibilidad* de [BS08], las posibilidades epistémicas del agente forman un conjunto ordenado en el que los mundos posibles se clasifican de acuerdo a la plausibilidad que el agente asigna a cada uno de ellos. Este orden de plausibilidad no proporciona por sí mismo un criterio para elegir una cláusula dentro de $\mathscr{C}(\pi)$ sobre otra (es un ordenamiento entre las posibilidades epistémicas reales y no entre las posibilidades que se han descartado), pero podría ser útil para definir un ordenamiento sobre las posibilidades epistémicas descartadas a partir del cual se podría proporcionar un ordenamiento entre los subconjuntos de $\mathscr{C}(\pi)$. En la última sección de este capítulo, vamos a discutir otros métodos para tratar el olvido que se basan en un ordenamiento entre cláusulas.

7.3. El efecto de olvidar-si uniformemente

El modelo $M_u^{\mathscr{C}}$ es el resultado de que el agente tenga en cuenta las nuevas posibilidades en las que cada cláusula $\mathscr{C}$ falla. Esto se consigue manteniendo una copia del modelo original (los $(w, 0)$-mundos, que preservan la evaluación original) y añadiendo, para cada cláusula D_i, una copia del modelo original (los (w, i)-mundos) en la que D_i se haga falsa por la falsación de cada uno de sus literales en todos los

[9] Esto es lo que hace el concepto de *implicación epistémica* –un orden de preferencia entre las fórmulas en una teoría– para la contracción de creencias dentro del enfoque AGM [GM88, Gär88].

mundos en la copia, manteniendo el resto de átomos como antes. Por lo tanto, cada cláusula D_i es falsa en cada mundo (w, i), como muestra el siguiente lema.

Lema 200.
Sea $M = (W, R, V)$ *un modelo y* $\mathscr{C} = \{D_i \ / \ i \in I\}$ *un conjunto finito no vacío de cláusulas no tautológicas (nuevamente* $0 \notin I$*). Entonces, para cada* $w \in W$ *y cada* $i \in I$*,*

$$M_u^{\mathscr{C}}, (w, i) \not\models \bigvee D_i.$$

Demostración. Si $D_i = \varnothing$ el resultado es obvio, dado que $\bigvee D_i = \bot$. También es posible tomar $D_i = \{l_1, \ldots, l_m\}$ (esto es, D_i es contingente). Luego, para cada $l_k \in D_i$,

- si l_k es un átomo p, entonces ya que D_i es contingente, $\neg p \notin D_i$; así, por definición, $(w, i) \notin V_u^{\mathscr{C}}(p)$ y por tanto $(w, i) \notin [\![l_k]\!]^{M_u^{\mathscr{C}}}$.
- si l_k es la negación de un átomo $\neg p$, entonces $\neg p \in D_i$; así que, por definición, $(w, i) \in V_u^{\mathscr{C}}(p)$ y por tanto $(w, i) \notin [\![l_k]\!]^{M_u^{\mathscr{C}}}$.

Por lo tanto, cada literal en D_i falla en (w, i) y en consecuencia, también la disyunción $\bigvee D_i$. ■

Ejemplo 201.
Considérese el siguiente modelo apuntado (M, w_0) *(con cada mundo* w *que contiene* $V(w)$ *y la evaluación rodeada con doble círculo) en la que el agente conoce* p *(es decir,* $(M, w_0) \models \Box p$*):*

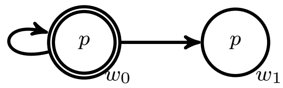

Fig. 1 (7.3): Modelo epistémico apuntado inicial (ejemplo 201).

Tengamos en cuenta la acción de olvidar-si p*. Dado que* $\mathscr{C}(p) = \{\{p\}\}$*, sólo hay una cláusula para ser elegida:* $\{p\}$*. De forma similar,* $\mathscr{C}(\neg p) = \{\{\neg p\}\}$*, así que las únicas cláusulas que el agente tendrá en cuenta al olvidar-si* p *son* $D_1 = \{p\}$ *y* $D_2 = \{\neg p\}$*. El modelo apuntado* $(M_u^{\{\{p\},\{\neg p\}\}}, (w_0, 0))$ *aparece a continuación, con la fila superior que es la copia que resulta de hacer* $\{p\}$ *falsa y la fila inferior que es la copia que resulta de hacer* $\{\neg p\}$ *falsa (lo cual hace a* p *verdadera*

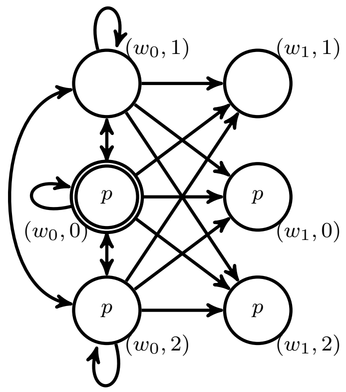

Fig. 2 (7.3): Modelo epistémico apuntado tras ejecutarse una acción de olvidar-si (ejemplo 201).

en esos mundo). Como resultado de la acción, el agente considera posibles mundos donde p se mantiene e igualmente mundos donde p falla. Así, $M_u^{\{\{p\},\{\neg p\}\}}, (w_0, 0) \vDash \neg\Box p \wedge \neg\Box\neg p$, y por lo tanto $(M, w_0) \vDash \Box p \wedge [\ddagger p](\neg\Box p \wedge \neg\Box\neg p)$.

En el ejemplo anterior debemos tener en cuenta que si w_1 fuese el punto de evaluación en el modelo inicial (y, por lo tanto, $(w_1, 0)$ fuese el punto de evaluación en el modelo después de la operación), entonces el agente conocería p antes de la acción (por vacuidad) y aún conocería p posteriormente (también por vacuidad). La siguiente proposición muestra que este resultado contrario a la intuición de la acción de olvidar-si sólo puede ocurrir cuando el conocimiento del agente es inconsistente al comienzo.

Proposición 202.
Sea π una fórmula proposicional que no es ni una tautología ni una contradicción (por tanto $\mathscr{C}(\pi)$ y $\mathscr{C}(\neg\pi)$ son dos conjuntos no vacíos de cláusulas contingentes). Entonces,

$$\vDash [\ddagger\pi](\Box\neg\pi \vee \Box\pi) \leftrightarrow \Box\bot.$$

Demostración. Sea (M, w) un modelo apuntado con $M = (W, R, V)$.

[Condicional de derecha a izquierda.] Supongamos $(M, w) \vDash \Box\bot$. Entonces no hay v tal que wRv, por la definición de $R_u^{\mathscr{C}}$, y con independencia de $\mathscr{C}$, no hay (v, i) tal que $(w, 0)R_u^{\mathscr{C}}(v, i)$. Por tanto, $\mathscr{M}_u^{\mathscr{C}}, (w, 0) \vDash \Box\neg\pi \vee \Box\pi$ y en consecuencia $(M, w) \vDash [\ddagger\pi](\Box\neg\pi \vee \Box\pi)$.

[Condicional de izquierda a derecha.] Se prueba por contraposición. Supongamos $(M, w) \models \neg\Box\bot$; entonces hay v tal que wRv. Por la definición 198, para cada $D_1 \in \mathscr{C}(\pi)$ y $D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi)$, $(w, 0)R_u^{\{D_1,D_2\}}(v, 1)$ y $(w, 0)R_u^{\{D_1,D_2\}}(v, 2)$. Por la contingencia de D_1 y D_2 y el lema 200, $M_u^{\{D_1,D_2\}}, (v, i) \not\models \bigvee D_i$ para $i \in \{1, 2\}$ y en consecuencia tenemos tanto $M_u^{\{D_1,D_2\}}, (v, 1) \not\models \mathscr{C}_\bigwedge(\pi)$ como $M_u^{\{D_1,D_2\}}, (v, 2) \not\models \mathscr{C}_\bigwedge(\neg\pi)$. Por tanto $M_u^{\{D_1,D_2\}}, (w, 0) \models \Diamond\neg\pi \wedge \Diamond\pi$ y, en consecuencia, dado que ni $\mathscr{C}(\pi)$ ni $\mathscr{C}(\neg\pi)$ son vacíos, $(M, w) \models \langle\ddagger\pi\rangle(\Diamond\pi \wedge \Diamond\neg\pi)$, es decir, $(M, w) \not\models [\ddagger\pi](\Box\pi \vee \Box\neg\pi)$. ■

Como caso especial, si π es un átomo p, tanto $\mathscr{C}(p) = \{\{p\}\}$ como $\mathscr{C}(\neg p) = \{\{\neg p\}\}$ son no vacíos y ambos contienen sólo cláusulas contingentes, por lo que desde la proposición anterior se deduce que $[\ddagger p](\Box p \vee \Box\neg p) \leftrightarrow \Box\bot$ es válida. Más interesante aún, hay que recordar que el conocimiento de un agente es consistente en w si y sólo si w tiene al menos un mundo accesible. En la clase de los modelos en los que esta propiedad posee consistencia, llamada *clase de los modelos seriales* y denotada por $\mathcal{KD}$, obtenemos una versión más fuerte de la proposición 202.

Corolario 203.
Para cualquier fórmula proposicional no tautológica y no contradictoria π,

$$\mathcal{KD} \models \langle\ddagger\pi\rangle\top \wedge [\ddagger\pi](\neg\Box\pi \wedge \neg\Box\neg\pi).$$

Téngase en cuenta que la proposición 202 se limita a las fórmulas π que no son ni tautologías ni contradicciones porque, de lo contrario, no se mantiene la prueba: en estos casos será o bien $\mathscr{C}(\pi) = \varnothing$ o bien $\mathscr{C}(\neg\pi) = \varnothing$, y por lo tanto no hay cláusulas para hacer falsa una de las dos, o π o $\neg\pi$. Como consecuencia de esto, tanto $[\ddagger\top]\varphi$ como $[\ddagger\bot]\varphi$ son válidos para cualquier fórmula φ, y por lo tanto ni $\langle\ddagger\top\rangle\top$ ni $\langle\ddagger\bot\rangle\top$ se pueden satisfacer.

Ejemplo 204.
Consideremos el siguiente modelo apuntado en el que el agente conoce $p \rightarrow q$.

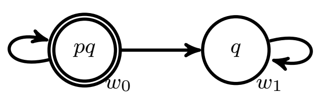

Fig. 3 (7.3): Modelo epistémico apuntado (ejemplo 204).

Consideremos el acto de olvidar-si $p \rightarrow q$. Dado que $\mathscr{C}(p \rightarrow q) = \{\{\neg p, q\}\}$ y $\mathscr{C}(\neg(p \rightarrow q)) = \{\{p\}\ \{\neg q\}\}$, hay dos resultados posibles (como se muestra en los diagramas que seguidamente mostramos).

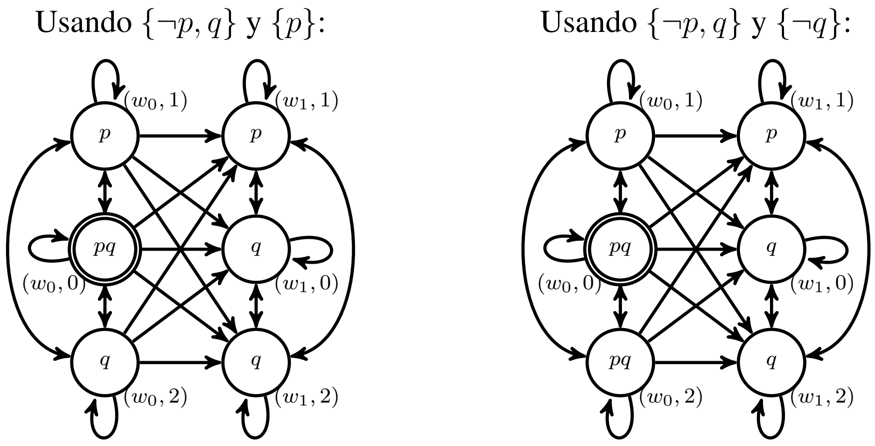

Fig. 4 (7.3): Dos modelos epistémicos apuntados distintos obtenidos tras ejecutarse una acción de olvidar-si (de distintas maneras) al mismo modelo inicial (ejemplo 204).

Obsérvese cómo $\neg\Box(p \to q)$ se mantiene en los dos modelos apuntados, dado que en ambos el agente considera posible un mundo donde p se satisface pero q falla. De forma similar, $\neg\Box\neg(p \to q)$ se sostiene en los dos casos, dado que en ambos modelos el agente considera posibles mundos donde $p \to q$ se sostiene.

Aún así, los dos modelos apuntados no representan el mismo estado de conocimiento o, para ser más precisos, no son bisimilares. En el modelo de la izquierda el agente considera posible un mundo donde $\neg p \wedge q$ se sostiene y $p \wedge q$ es posible (la ruta $(w_0, 0) \to (w_0, 2) \to (w_0, 0)$), una posibilidad que no existe en el modelo de la derecha (cualquier transición de $(w_0, 0)$ a un $\neg p \wedge q$-mundo fuerza un movimiento al lado derecho del diagrama, en donde no hay flechas de vuelta al lado izquierdo). Así,

$$M_u^{\{\{\neg p,q\},\{p\}\}}, (w_0, 0) \vDash \Diamond(\neg p \wedge q \wedge \Diamond(p \wedge q))$$

pero

$$M_u^{\{\{\neg p,q\},\{\neg q\}\}}, (w_0, 0) \nvDash \Diamond(\neg p \wedge q \wedge \Diamond(p \wedge q))$$

y por tanto

$$(M, w_0) \nvDash [\ddagger(p \to q)]\Diamond(\neg p \wedge q \wedge \Diamond(p \wedge q)).$$

Ejemplo 205.

Considérese de nuevo el modelo apuntado inicial del ejemplo 204. Obsérvese cómo el agente no conoce ni $p \wedge q$ (considera que w_1 es posible) ni $\neg(p \wedge q)$ (considera que w_0 es posible). Dado que $\mathscr{C}(p \wedge q) = \{\{p\}, \{q\}\}$ y $\mathscr{C}(\neg(p \wedge q)) = \{\{\neg p, \neg q\}\}$, *hay dos posibles resultados de una acción de olvidar el valor de verdad del ya desconocido $p \wedge q$.*

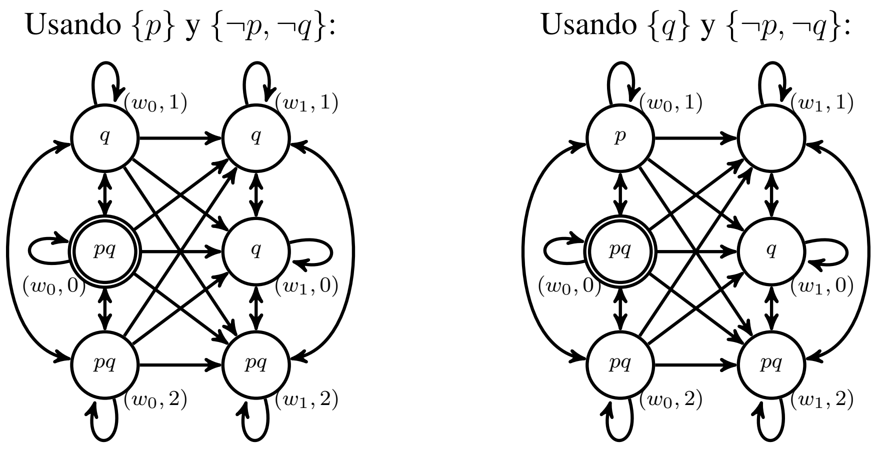

Fig. 5 (7.3): Dos modelos epistémicos apuntados distintos obtenidos tras ejecutarse una acción de olvidar-si (de distintas maneras) al mismo modelo inicial (ejemplo 205).

En ambos modelos apuntados resultantes el agente todavía no conoce ni $p \wedge q$ ni $\neg(p \wedge q)$. Sin embargo, en ambos casos, la acción tiene un efecto sobre la información del agente: en el modelo apuntado que está más a la izquierda considera posible un $\neg p \wedge q$-mundo, $(w_0, 1)$, desde el que hay un $p \wedge q$-mundo accesible, $(w_0, 0)$, algo que no consideró posible anteriormente:

$$M_u^{\{\{p\},\{\neg p,\neg q\}\}}, (w_0, 0) \vDash \Diamond(\neg p \wedge q \wedge \Diamond(p \wedge q)) \quad \textit{pero} \quad (M, w_0) \nvDash \Diamond(\neg p \wedge q \wedge \Diamond(p \wedge q)).$$

Por otra parte, en el modelo apuntado que está más a la derecha el agente considera posible un $p \wedge \neg q$-mundo, $(w_0, 1)$, algo que no consideró posible anteriormente:

$$M_u^{\{\{q\},\{\neg p,\neg q\}\}}, (w_0, 0) \vDash \Diamond(p \wedge \neg q) \qquad \textit{dado que} \qquad (M, w_0) \nvDash \Diamond(p \wedge \neg q).$$

Por lo tanto, olvidar el valor de verdad de las fórmulas cuyo valor de verdad no se conoce puede afectar a la información del agente dándole 'nuevas razones' para no conocer el valor de verdad de la fórmula.

7.4. Un tipo más simple de olvido uniforme

En la configuración actual es sencillo definir una acción más simple que, en lugar de olvidar el valor de verdad de π, simplemente olvida-que π es el caso. Para ello, basta con utilizar la operación del modelo de la definición 198 omitiendo la cláusula de $\mathscr{C}(\neg\pi)$. Comencemos presentando las definiciones formales.

Definición 206 (Satisfacción para $\mathscr{L}_{\Box\dagger}$)**.**
El lenguaje $\mathscr{L}_{\Box\dagger}$ extiende $\mathscr{L}_{\Box}$ con operadores de la forma $[\dagger\pi]$ para π una fórmula proposicional, permitiendo así la construcción de las fórmulas de la forma $[\dagger\pi]\varphi$, leída como después de que el agente olvide π, φ es el caso.

Definición 207 (Satisfacción para $\mathscr{L}_{\Box\dagger}$)**.**
Sea $M = (W, R, V)$ un modelo, $w \in W$ y π una fórmula proposicional. Extendemos la definición 194 configurando

$$(M, w) \vDash [\dagger\pi]\varphi \quad \textit{syss} \quad \forall D \in \mathscr{C}(\pi), M_u^{\{D\}}, (w, 0) \vDash \varphi.$$

Esto muestra cómo la anterior acción de olvidar-si π consiste en olvidar simultáneamente tanto π como $\neg\pi$. Surge naturalmente la pregunta de si la acción de olvidar el valor de verdad de π se podría definir como olvidar π y a continuación olvidar $\neg\pi$. Tal como mostramos, éste no es el caso.

Proposición 208.
Las expresiones de $[\ddagger\pi]\varphi$ y $[\dagger\pi][\dagger\neg\pi]\varphi$ no son equivalentes incluso sobre la clase de los modelos $\mathbb{S}$.

Demostración. Consideremos el siguiente modelo apuntado (M, w_0) con p y q falsas en w_0:

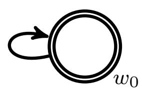

Fig. 6 (7.4): Modelo epistémico apuntado inicial.

Ahora, supongamos que π es $\neg p \vee \neg q$. Entonces, $\mathscr{C}(\pi) = \{\{\neg p, \neg q\}\}$ y $\mathscr{C}(\neg\pi) = \{\{p\}, \{q\}\}$. Por tanto, usando primero $\{\neg p, \neg q\}$ en $\mathscr{C}(\pi)$ y luego $\{q\}$ en $\mathscr{C}(\neg\pi)$, construimos $(M_u^{\{\{\neg p, \neg q\}\}})_u^{\{\{q\}\}}$ de la siguiente forma:

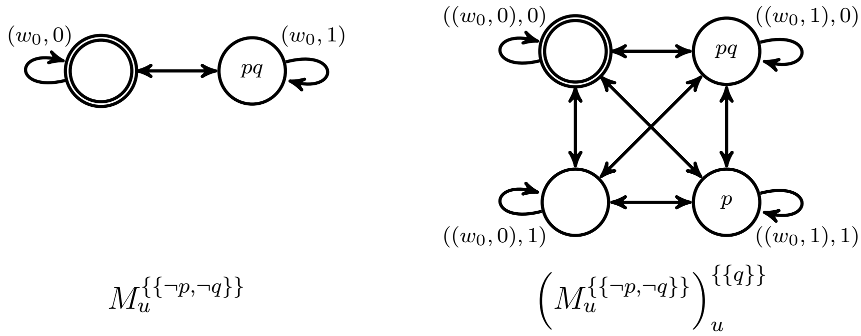

Fig. 7 (7.4): Dos modelos epistémicos apuntados distintos obtenidos tras ejecutarse sucesivamente dos acciones de olvidar-que al modelo inicial.

Obsérvese que en un modelo epistémico resultante el agente puede acceder al estado $((w_0, 1), 1)$ donde $p \wedge \neg q$ es verdad, y así

$$(M, w_0) \vDash \langle \dagger\pi \rangle \langle \dagger\neg\pi \rangle \Diamond (p \wedge \neg q).$$

Pero al olvidar-si π, a partir de M no es posible producir un estado en el que $p \wedge \neg q$ sea verdad. Con independencia de la cláusula elegida en $\mathscr{C}(\neg\pi)$, llegamos al siguiente modelo: En consecuencia, $(M, w_0) \nvDash \langle \ddagger\pi \rangle \Diamond (p \wedge \neg q)$. ■

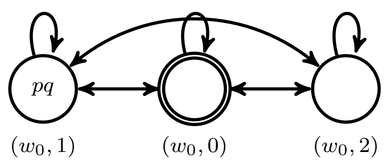

Fig. 8 (7.4): Modelo epistémico apuntado tras ejecutarse una acción de olvidar-si al modelo inicial.

Otra diferencia entre olvidar-que y olvidar-si es que, mientras no resulta posible olvidar el valor de verdad de una contradicción, sí se puede olvidar una contradicción, dado que $\mathscr{C}(\bot) \neq \varnothing$. De hecho, $\vDash [\dagger\bot]\varphi \leftrightarrow \varphi$ y $\vDash [\dagger\bot]\varphi \leftrightarrow \langle \dagger\bot \rangle \varphi$. Hay que señalar, sin embargo, que si el agente conoce una contradicción, la acción de olvidar (la contradicción misma o cualquier otra fórmula) no la 'fijará'. De hecho, la acción no puede volver contradictorio o coherente el conocimiento de un agente que no era así antes.

Proposición 209.

Sea π una fórmula proposicional que no es ni una tautología ni una contradicción.

Entonces,

$$\models \Box\bot \leftrightarrow [\dagger\pi]\Box\bot.$$

Demostración. Para la dirección de izquierda a derecha se puede tomar cualquier modelo apuntado (M, w). El antecedente $\Box\bot$ establece que w no tiene sucesores y entonces, por la definición 198, tampoco los tiene $(w, 0)$ independientemente de la cláusula elegida $D \in \mathscr{C}(\pi)$; por lo tanto, $[\dagger\pi]\Box\bot$.

Para la otra dirección, se argumenta por contraposición. Asumimos en este caso que $(M, w) \models \neg\Box\bot$. Entonces, w tiene al menos un sucesor y por lo tanto, por la definición 198, lo hace $(w, 0)$ independientemente de la cláusula elegida $D \in \mathscr{C}(\pi)$; por lo tanto, $[\dagger\pi]\neg\Box\bot$. ■

Con respecto a las tautologías, olvidar se comporta como olvidar-si: la forma clausal prima de $\top$ es $\varnothing$, y por lo tanto no es posible olvidar una tautología.

Cuando se compara con la acción de olvidar-si, la de olvidar está más cerca de la conocida acción de la contracción de creencias: ambos representan una acción epistémica después de la cual el agente no conoce / no cree en una fórmula dada, independientemente de la actitud epistémica hacia la la negación de la fórmula. Esto permite una comparación más precisa con un concepto clave dentro de la contracción de creencias: la de *recuperación*.

Una acción de olvidar una fórmula π dada podría tener efectos secundarios: el agente también podría olvidar a una segunda fórmula φ. En esos casos, también parece deseable tener una acción de 'recordar' π para hacer que el agente recuerde φ[10]. La acción de olvidar de esta sección satisface una forma de recuperación, restringida a los casos en los que se conocía π al comienzo. Para describir esto usaremos la operación de anuncio público presente en la lógica de anuncios públicos [Pla89, GG97], representada sintácticamente con las fórmulas de la forma $!\pi$, ya que coincide estrechamente con la naturaleza semántica de este enfoque.

Proposición 210.
Si π es una fórmula proposicional y φ una fórmula arbitraria de $\mathscr{L}_\Box$ entonces

$$(\Box\pi \wedge \varphi) \rightarrow [\dagger\pi][!\pi]\varphi$$

es válida en la clase de los modelos transitivos.

[10] Sin embargo, dentro del modelo AGM el postulado de recuperación es el más discutido, ya que hay ejemplos que demuestran que este tipo de comportamiento no siempre es razonable. Véase, por ejemplo, [Han93, Fer98, Fer01].

Demostración. Asumiremos la familiaridad con la semántica de $!\pi$ y daremos sólo un esbozo del argumento. Supongamos que M es un modelo transitivo y w es un mundo de M tal que $(M, w) \models \Box\pi \wedge \varphi$. Si $D \in \mathscr{C}(\pi)$ es arbitraria, entonces $M_u^{\{D\}}$ es obtenido a partir de M añadiendo una copia de cada mundo donde D falla, pero después de aplicar $!\pi$, pasamos al modelo $(M_u^{\{D\}})_{!\pi}$ donde se eliminan todos estos mundos. Dado que todos los mundos accesibles desde w (y por tanto, por transitividad, en el submodelo generado por w) ya satisfacen π, el submodelo generado por w en M es isomorfo al submodelo generado por $(w, 0)$ en $(M_u^{\{D\}})_{!\pi}$. Por tanto, $(M_u^{\{D\}})_{!\pi}, (w, 0) \models \varphi$. Se sigue que $M_u^{\{D\}}, (w, 0) \models [!\pi]\varphi$ y, dado que D era arbitrario, tenemos $M, (w, 0) \models [\dagger\pi][!\pi]\varphi$. Dado que M y w también eran arbitrarias, el requisito se mantiene. ■

7.5. Una axiomatización de olvidar-si uniformemente

La operación de la definición 198, con un conjunto finito (posiblemente vacío) de la cláusula no tautológica $\mathscr{C}$ como parámetro, produce un nuevo modelo que contiene $|\mathscr{C}| + 1$ copias de la original, siendo una de las copias idéntica a la original y el resto igual al resultado de la falsificación uniforme de cada una de las cláusulas en $\mathscr{C}$. Éste y otros efectos similares se puede lograr mediante los denominados *modelos de acción*.

Definición 211 (Modelo de acción monoagente)**.**
*Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje formal que puede ser interpretado en los modelos de la definición 193. Un $\mathscr{L}$-*modelo de acción monoagente[11] *es definido como una tupla* $\mathsf{U} = (\mathsf{E}, \mathsf{R}, \mathrm{Pre}, \mathrm{Post})$*, donde* E *es un conjunto no vacío de acciones,* $\mathsf{R} \subseteq \mathsf{E} \times \mathsf{E}$ *es una relación binaria,* $\mathrm{Pre} : \mathsf{E} \to \mathscr{L}$ *una* función precondición *asignando una fórmula de $\mathscr{L}$ a cada acción en* E *y* $\mathrm{Post} : (\mathsf{E} \times \mathit{Var}) \to \mathscr{L}$ *una* función post-condición *asignando una fórmula de $\mathscr{L}$ a cada par de átomos en Var para cada acción en* E*. Un* modelo de acción apuntado *es un par* (U, e) *donde* U *es un modelo de acción y* e *un elemento de su dominio.*

Los modelos de acción están destinados a ser aplicados a los modelos de Kripke; dicha aplicación produce un nuevo modelo de Kripke, que se define como sigue.

[11] Para no hacer excesivamente complicada la lectura omitiremos en el resto del capítulo la palabra *monoagente* cuando nos refiramos a este concepto.

Definición 212 (Actualización-producto).
Sea $M = (W, R, V)$ un modelo epistémico y $\mathsf{U} = (\mathsf{E}, \mathsf{R}, \mathrm{Pre}, \mathrm{Post})$ un modelo de acción. El nuevo modelo epistémico $M \otimes \mathsf{U} = (W', R', V')$ es dado por:

- $W' := \{(w, \mathsf{e}) \in (W \times \mathsf{E}) \mid (M, w) \vDash \mathrm{Pre}(\mathsf{e})\}$;
- $(w, \mathsf{e})R'(u, \mathsf{f})$ *si y sólo si* wRu *y* eRf; *y*
- *para cada* $p \in Var$, $V'(p) := \{(w, \mathsf{e}) \in W' \mid (M, w) \vDash \mathrm{Post}(\mathsf{e}, p)\}$.

En palabras, el dominio del nuevo modelo es el producto cartesiano restringido entre el dominio de M y el de U: (w, e) es un mundo en $M \otimes \mathsf{U}$ si y sólo si w satisface las precondiciones de e. En este nuevo modelo, el agente no puede distinguir el mundo (u, f) del mundo (w, e) si y sólo si no distinguió u de w en M y podría no distinguir f de e en U. Finalmente, un mundo (w, e) satisface un átomo p si y sólo si w satisface la postcondición de p sobre e en M.

Los modelos de acción serán útiles para nosotros ya que la operación sobre modelos de la definición 198 puede ser representada por el modelo de acción específico que se describe a continuación.

Definición 213 (Modelo de acción monoagente para olvidar-si).
Sea $\mathscr{C} = \{D_i \mid i \in I\}$ un conjunto finito (posiblemente vacío) de cláusulas no tautológicas. El modelo de acción monoagente[12] $\mathsf{U}_{\mathscr{C}} = (\mathsf{E}, \mathsf{R}, \mathrm{Pre}, \mathrm{Post})$ *viene dado por*

$$\mathsf{E} := \{\mathsf{e}_i\}_{i \in \{0\} \cup I}, \qquad \mathsf{R} := \mathsf{E} \times \mathsf{E}, \qquad \mathrm{Pre}(\mathsf{e}_i) := \top \text{ para todo } i \in \{0\} \cup I,$$

para cada $p \in Var$, $\mathrm{Post}(\mathsf{e}_0, p) := p$ *y para* $i \in I$,

$$\mathrm{Post}(\mathsf{e}_i, p) := \begin{cases} p & \text{si } \{p, \neg p\} \cap D_i = \varnothing; \\ \top & \text{si } \neg p \in D_i; \\ \bot & \text{si } p \in D_i. \end{cases}$$

Ejemplo 214.
Consideremos $\pi = p \wedge q$ y recordemos que $\mathscr{C}(\pi) = \{\{p\}, \{q\}\}$ y $\mathscr{C}(\neg\pi) = \{\{\neg p, \neg q\}\}$. Entonces, el modelo de acción $\mathsf{U}_{\{\{p\}, \{\neg p, \neg q\}\}}$, definido mediante una cláusula en $\mathscr{C}(\pi)$ y otra en $\mathscr{C}(\neg\pi)$, viene dado por:

[12] Para no hacer excesivamente complicada la lectura omitiremos en el resto del capítulo la palabra *monoagente* cuando nos refiramos a este concepto.

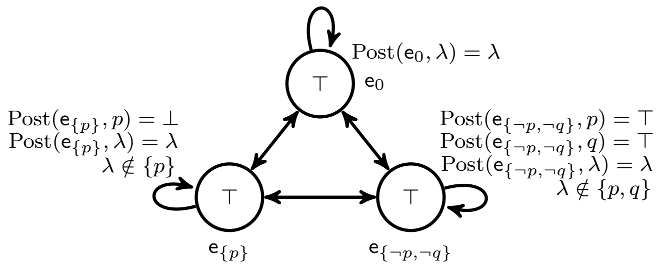

Fig. 9 (7.5): Modelo de acción monoagente para olvidar-si (ejemplo 214).

Las precondiciones están representadas dentro de los estados. Para los estados distintos de e_0*, las postcondiciones están configuradas para falsar la cláusula respectiva de cada estado.*

Nótese cómo, en cada modelo de acción $\mathsf{U}_{\mathscr{C}}$, la relación E es el producto cartesiano completo. Por lo tanto, la operación de actualización de la definición 212 conserva muchas de las propiedades relacionales, incluyendo la serialidad, la reflexividad, simetría, transitividad y euclidianeidad. Estos modelos de acción nos dan una representación alternativa de los modelos $M_u^{\mathscr{C}}$:

Proposición 215.
Sea M un modelo y $\mathscr{C}$ un conjunto finito (posiblemente vacío) de cláusulas no tautológicas. Entonces, los modelos $M_u^{\mathscr{C}}$ de la definición 198 y $M \otimes \mathsf{U}_{\mathscr{C}}$ de las definiciones 213 y 212 son isomorfas.

Demostración. Tomemos un modelo $M = (W, R, V)$; será probado que $M_u^{\mathscr{C}} = (W_u^{\mathscr{C}}, R_u^{\mathscr{C}}, V_u^{\mathscr{C}})$ y $M \otimes \mathsf{U}_{\mathscr{C}} = (W', R', V'))\rangle$ son isomorfos, muestras de la función $f\colon W_u^{\mathscr{C}} \to W'$ dada por $f(w,i) = (w, \mathsf{e}_i)$.

Primero, téngase en cuenta que $(w,i)R_u^{\mathscr{C}}(v,j)$ si y sólo si $(w,\mathsf{e}_i)R'(v,\mathsf{e}_j)$. Esto es porque, por la definición 198, $(w,i)R_u^{\mathscr{C}}(v,j)$ si y sólo si wRv. Más aún, por la definición 212, $(w,\mathsf{e}_i)R'(v,\mathsf{e}_j)$ si y sólo si wRv y $\mathsf{e}_i\mathsf{R}\mathsf{e}_j$. Pero, por la definición 213, R es la relación total en E, así que $(w,i)R_u^{\mathscr{C}}(v,j)$ si y sólo si $(w,\mathsf{e}_i)R'(v,\mathsf{e}_j)$.

Ahora, para probar que $(w,i) \in V_u^{\mathscr{C}}(p)$ si y sólo si $f(w,i) \in V'(p)$, obsérvese que, por la definición 198, $(w,0) \in V_u^{\mathscr{C}}(p)$ si y sólo si $w \in V(p)$. Por la definición 212, $(w,\mathsf{e}_0) \in V'(p)$ si y sólo si $(M,w) \vDash \mathrm{Post}(\mathsf{e}_0,p)$, y por la definición 213, $\mathrm{Post}(\mathsf{e}_0,p) = p$, así que $(w,\mathsf{e}_0) \in V'(p)$ si y sólo si $(M,w) \vDash p$ si y sólo si $w \in V(p)$ si y sólo si $(w,0) \in V_u^{\mathscr{C}}(p)$. Para $i \neq 0$, por la definición 198, $(w,i) \in V_u^{\mathscr{C}}(p)$

si y sólo si

$$\text{o} \quad \{p, \neg p\} \cap D_i = \varnothing \quad \text{y} \quad w \in V(p), \quad \text{o también} \quad \neg p \in D_i. \tag{7.1}$$

Por la definición 212,

$$(w, \mathsf{e}_i) \in V'(p) \quad \text{syss} \quad (M, w) \vDash \mathrm{Post}(\mathsf{e}_i, p); \tag{7.2}$$

pero por la definición 213, (M, w) podría sólo satisfacer $\mathrm{Post}(\mathsf{e}_i, p)$ en dos casos, cuando es p y $\top$, dado que $\bot$ es insatisfacible. Entonces, recordamos (7.2), $(w, \mathsf{e}_i) \in V'(p)$ si y sólo si

$$(M, w) \vDash p \quad \text{y} \quad \{p, \neg p\} \cap D_i = \varnothing, \quad \text{o también} \quad (M, w) \vDash \top \quad \text{y} \quad \neg p \in D_i. \tag{7.3}$$

Téngase en cuenta la equivalencia de (7.1) y (7.3), que prueba que $(w, i) \in V_u^{\mathscr{C}}(p)$ si y sólo si $(w, \mathsf{e}_i) \in V'(p)$. ■

Esta correspondencia de nuestra operación sobre modelos con el efecto de $\mathsf{U}_{\mathscr{C}}$ permite el uso de la maquinaria de los modelos de acción para obtener un sistema de axiomas para el lenguaje $\mathscr{L}_{\Box\ddagger}$ con respecto a nuestros modelos semánticos. Primero recordamos la definición de la relación de satisfacción para la lógica de modelos de acción.

Definición 216 (Lenguaje $\mathscr{L}_{\Box\mathbb{A}}$)**.**
Sea $\mathbb{A}$ un conjunto finito *de modelos de acción $\mathcal{L}_\Box$ apuntados, es decir, un conjunto que contiene modelos de acción apuntados $\mathcal{L}_\Box$ (por lo tanto, con funciones de precondición y postcondición que devuelven fórmulas en $\mathcal{L}_\Box$) cuyo dominio es finito (no vacío) y en el que cada acción afecta al valor de verdad de, a lo sumo un número finito de proposiciones atómicas*[13]*. El lenguaje $\mathscr{L}_{\Box\mathbb{A}}$ extiende $\mathcal{L}_\Box$ con nuevas fórmulas de la forma $[\mathsf{U}, \mathsf{e}]\varphi$ con $(\mathsf{U}, \mathsf{e}) \in \mathbb{A}$. Sea $M = (W, R, V)$ y $w \in W$. La relación de satisfacción de la definición 194 se extiende mediante el establecimiento de $(M, w) \vDash [\mathsf{U}, \mathsf{e}]\varphi$ si y sólo si*

$$(M, w) \vDash \mathrm{Pre}(\mathsf{e}) \quad \Rightarrow \quad M \otimes \mathsf{U}, (w, \mathsf{e}) \vDash \varphi.$$

El conjunto de fórmulas válidas de $\mathscr{L}_{\Box\mathbb{A}}$ es denotado por $\mathrm{Log}_{\Box\mathbb{A}}$.

[13] Esta condición de finitud es requerida para permitir que cada modelo de acción apuntado $[\mathsf{U}, \mathsf{e}]$ sea asociado a un objeto sintáctico y por lo tanto sea utilizado como una modalidad dentro de las fórmulas. Para más detalles, remitimos al lector a la sección 6.1 de [vDvdHK07].

El siguiente resultado se basa en la axiomatización del modelo de acción que aparece en la sección 6.6 de [vDvdHK07] junto con las observaciones de [WC13] (este último en el marco de los anuncios públicos). Recordemos que el sistema lógico K contiene tautologías proposicionales, el *modus ponens*, el axioma de distribución $\vdash \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ y la regla de necesitación que deriva en $\vdash \Box\varphi$ desde $\vdash \varphi$.

Teorema 217.
Sea Λ cualquiera de los sistemas lógicos K, T, $K4$, $K5$, $S4$, $S5$ y sea $\mathbb{A}$ un conjunto finito *de modelos de acción apuntados $\mathcal{L}_\Box$ y Λ-completantes. La lógica $\mathrm{Log}_{\Box\mathbb{A}}$ es axiomatizada por la lógica modal Λ junto con los siguientes axiomas y reglas para todo $(\mathsf{U}, \mathsf{e}) \in \mathbb{A}$:*

$\vdash [\mathsf{U},\mathsf{e}]p \leftrightarrow (\mathrm{Pre}(\mathsf{e}) \to \mathrm{Post}(\mathsf{e}, p))$	$\vdash [\mathsf{U},\mathsf{e}]\Box\varphi \leftrightarrow \Big(\mathrm{Pre}(\mathsf{e}) \to \bigwedge_{\mathsf{f}\in\mathsf{R}[\mathsf{e}]} \Box[\mathsf{U},\mathsf{f}]\varphi\Big)$
$\vdash [\mathsf{U},\mathsf{e}]\neg\varphi \leftrightarrow (\mathrm{Pre}(\mathsf{e}) \to \neg[\mathsf{U},\mathsf{e}]\varphi)$	$\vdash [\mathsf{U},\mathsf{e}](\varphi \to \psi) \to ([\mathsf{U},\mathsf{e}]\varphi \to [\mathsf{U},\mathsf{e}]\psi)$
$\vdash [\mathsf{U},\mathsf{e}](\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow ([\mathsf{U},\mathsf{e}]\varphi \wedge [\mathsf{U},\mathsf{e}]\psi)$	De $\vdash \varphi$ se infiere $\vdash [\mathsf{U},\mathsf{e}]\varphi$

Tabla 2 (7.5): Axiomas y reglas que hay que añadir a los de la lógica modal Λ para axiomatizar $\mathrm{Log}_{\Box\mathbb{A}}$.

Este resultado puede ser usado para obtener un sistema de axiomas para nuestra modalidad particular $[\ddagger\pi]$. Dadas las cláusulas $D_1 \in \mathscr{C}(\pi)$ y $D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi)$, nuestro sistema de axioma usará las modalidades auxiliares $[D_1, D_2]$, $[\underline{D_1}, D_2]$ y $[D_1, \underline{D_2}]$, cuya interpretación semántica es como sigue:

$$
\begin{array}{lll}
(M,w) \models [D_1, D_2]\varphi & \text{si y sólo si} & M^{\{D_1,D_2\}}, (w,0) \models \varphi; \\
(M,w) \models [\underline{D_1}, D_2]\varphi & \text{si y sólo si} & M^{\{D_1,D_2\}}, (w,1) \models \varphi; \text{ y} \\
(M,w) \models [D_1, \underline{D_2}]\varphi & \text{si y sólo si} & M^{\{D_1,D_2\}}, (w,2) \models \varphi.
\end{array}
$$

Obsérvese cómo $[D_1, D_2]$, $[\underline{D_1}, D_2]$ y $[D_1, \underline{D_2}]$ corresponden, respectivamente, a $[\mathsf{U}_{\{D_1,D_2\}}, \mathsf{e}_0]$, $[\mathsf{U}_{\{D_1,D_2\}}, \mathsf{e}_1]$ y $[\mathsf{U}_{\{D_1,D_2\}}, \mathsf{e}_2]$, con $\mathsf{U}_{\mathscr{C}}$ el modelo de acción $\mathcal{L}_\Box$ de la definición 213. Más aún, nótese cómo el uso de $\mathsf{U}_{\mathscr{C}}$ dentro de una modalidad es adecuada, ya que es un modelo de acción *finito*: tiene un dominio finito no vacío y, dado que, tanto D_1 como D_2 son finitos (lema 196), cada una de sus acciones cambia el valor de verdad de a lo sumo un número finito de proposiciones atómicas. Por último, téngase en cuenta cómo $[\ddagger\pi]\varphi$ es equivalente a $\bigwedge_{D_1\in\mathscr{C}(\pi)} \bigwedge_{D_2\in\mathscr{C}(\neg\pi)} [D_1, D_2]\varphi$. Así pues, nuestra axiomatización es como se indica en la siguiente definición.

Definición 218 (Sistema de axiomas $\mathrm{Ax}_{\Box\ddagger\mathbb{D}}$)**.**
Sea $\mathbb{D}$ el conjunto de los modelos de acción apuntados de la forma $(\mathsf{U}_{\{D_1,D_2\}}, \mathsf{e}_i)$ con $i \in \{0,1,2\}$ (recordemos que $\mathrm{Pre}(\mathsf{e}_0) = \mathrm{Pre}(\mathsf{e}_1) = \mathrm{Pre}(\mathsf{e}_2)$) y D_j una cláusula finita no tautológica; sea $\mathscr{L}_{\Box\ddagger\mathbb{D}}$ la extensión de $\mathcal{L}_{\Box\ddagger}$ con expresiones de la forma $[\mathsf{U},\mathsf{e}]\varphi$ con $(\mathsf{U},\mathsf{e}) \in \mathbb{D}$.

El conjunto de axiomas $\mathrm{Ax}_{\Box\ddagger\mathbb{D}}$ es definido por los siguientes esquemas (donde $[\_\_]$ es cualquiera de éstos: $[D_1, D_2]$, $[\underline{D_1}, D_2]$ y $[D_1, \underline{D_2}]$, siendo π una fórmula proposicional):

$\vdash [\ddagger\pi]\varphi \ \leftrightarrow\ \bigwedge_{D_1\in\mathscr{C}(\pi)} \bigwedge_{D_2\in\mathscr{C}(\neg\pi)} [D_1, D_2]\varphi$	
$\vdash [D_1, D_2]p \ \leftrightarrow\ p$	para todo $p \in \mathit{Var}$
$\vdash [\underline{D_1}, D_2]p \ \leftrightarrow\ p$	si $\{p, \neg p\} \cap D_1 = \varnothing$
$\vdash [\underline{D_1}, D_2]p \ \leftrightarrow\ \top$	si $\neg p \in D_1$
$\vdash [\underline{D_1}, D_2]p \ \leftrightarrow\ \bot$	si $p \in D_1$
$\vdash [D_1, \underline{D_2}]p \ \leftrightarrow\ p$	si $\{p, \neg p\} \cap D_2 = \varnothing$
$\vdash [D_1, \underline{D_2}]p \ \leftrightarrow\ \top$	si $\neg p \in D_2$
$\vdash [D_1, \underline{D_2}]p \ \leftrightarrow\ \bot$	si $p \in D_2$
$\vdash [\_\_]\neg\varphi \ \leftrightarrow\ \neg[\_\_]\varphi$	
$\vdash [\_\_](\varphi \wedge \psi) \ \leftrightarrow\ ([\_\_]\varphi \wedge [\_\_]\psi)$	
$\vdash [\_\_]\Box\varphi \ \leftrightarrow\ \Box\big([D_1, D_2]\varphi \wedge [\underline{D_1}, D_2]\varphi \wedge [D_1, \underline{D_2}]\varphi\big)$	
$\vdash [\_\_](\varphi \to \psi) \ \to\ ([\_\_]\varphi \to [\_\_]\psi)$	
De $\vdash \varphi$ se infiere $\vdash [\_\_]\varphi$	

Tabla 3 (7.5): Esquemas para el conjunto de axiomas $\mathrm{Ax}_{\Box\ddagger\mathbb{D}}$.

Ahora es posible afirmar el principal resultado de este capítulo:

Teorema 219.
Sea Λ una de las lógicas K, T, $K4$, $K5$, $S4$, $S5$. Una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{\Box\ddagger\mathbb{D}}$ es válida sobre la clase de modelos Λ-completantes si y sólo si $\Lambda + \mathrm{Ax}_{\Box\ddagger\mathbb{D}} \vdash \varphi$.

Demostración. La corrección es inmediata ya que todos los axiomas son verdaderos y todas las reglas preservan validez, donde apelamos al teorema 217 para esos axiomas que involucran modelos de acción.

Para completitud, sea $\varphi \in \mathcal{L}_{\Box\ddagger\mathbb{D}}$ una fórmula válida. Entonces, por el primer axioma de $\mathrm{Ax}_{\Box\ddagger\mathbb{D}}$, la fórmula φ puede ser sustituida por una fórmula demostradamente equivalente $\widehat{\varphi} \in \mathscr{L}_{\Box\mathbb{D}}$. Por el teorema 217, $\widehat{\varphi}$ es derivable, por lo tanto, también lo es φ. ■

Dado que los modelos de acción en $\mathbb{D}$ eran auxiliares, podría ser útil replantear este resultado en términos de nuestro lenguaje original:

Corolario 220.
Sea Λ una de las lógicas K, T, $K4$, $K5$, $S4$, $S5$. Una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{\Box\ddagger}$ es válida sobre la clase de modelos Λ-completantes si y sólo si es derivable en $\Lambda + \mathrm{Ax}_{\Box\ddagger\mathbb{D}}$.

7.6. Otras maneras de olvidar

Hay muchas posibilidades cuando se modela la acción de olvidar. Nuestro objetivo ha sido presentar un enfoque semántico, en lugar de uno sintáctico, pero aún así hay varias rutas que se pueden tomar. En esta sección mencionamos algunas variaciones y se discute cómo se relacionan con nuestra propuesta.

7.6.1. Olvidar condicionalmente

Las acciones definidas de *olvidar-que* π (definición 207) y *olvidar-si* π (definición 199) no tienen ninguna precondición y, por lo tanto, pueden tener lugar independientemente de si el agente conoce π (y olvida-que π) o conoce-si π (y olvida-si π). Esta elección se ha hecho porque, técnicamente, no hay razón para restringir las operaciones respectivas: se pueden aplicar a cualquier modelo, independientemente de la actitud epistémica del agente hacia π[14]. Como resultado, a pesar de que pueden presentarse anomalías en situaciones 'extrañas', las acciones definidas funcionan como se esperaba en los casos previstos (el agente conoce / conoce-si la fórmula -no contradictoria y no tautológica- que está olvidando es el caso).

Sin embargo, también es interesante asumir que el agente no actuaría a menos que esté en una situación prevista. Centrémonos en la acción de olvidar π. Una

[14] Compárese esto con la precondición para anuncios públicos. Con el fin de ser anunciada, una fórmula debe ser verdadera, no sólo por la interpretación de la operación (anunciar públicamente y verazmente), sino también por razones técnicas: si la fórmula es falsa, entonces el punto de evaluación será eliminado, por lo que no es posible evaluar las fórmulas en ellos después de la operación.

posibilidad interesante es trabajar como en la definición207 cuando el agente conoce π, pero no hacer nada en otro caso.

Definición 221 (Operador modal $[\dagger'\pi]$)**.**
Para una fórmula proposicional π, se define un operador modal $[\dagger'\pi]$ y se extiende la semántica de la definición 194 configurando

$$(M,w) \models [\dagger'\pi]\varphi \quad \textit{si y sólo si} \quad \begin{cases} \forall D \in \mathscr{C}(\pi), M_u^{\{D\}}, (w,0) \models \varphi & \textit{si } (M,w) \models \Box\pi \\ (M,w) \models \varphi & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, φ siempre debe ser evaluado, y la precondición sólo determina dónde: en $M_u^{\{D\}}$ para cada $D \in \mathscr{C}(\pi)$ cuando la precondición se mantiene, y sólo en M en otro caso[15].

Este nuevo operador tiene varias propiedades que son interesantes cuando se compara con otros enfoques como la contracción de creencias. Por ejemplo, un principio vacuidad es inmediato.

Proposición 222.
Si π es proposicional y φ es una fórmula arbitraria, entonces

1. $\neg\Box\pi \to (\varphi \leftrightarrow [\dagger'\pi]\varphi)$ *es válida, pero*

2. $\neg\Box\pi \to (\varphi \leftrightarrow [\dagger\pi]\varphi)$ *no es necesariamente válida.*

Demostración. La primera afirmación es inmediata a partir de la definición 221. Como contraejemplo para la segunda afirmación podemos tomar $\pi = p \wedge q$ y $\varphi = \Box p$ y considerar un modelo con un mundo reflexivo único w satisfaciendo $p \wedge \neg q$. Entonces, $(M,w) \models \Box p$, pero $M_u^{\{\{p\}\}}, (w,0) \models \neg\Box p$, y por lo tanto

$$(M,w) \models \neg\Box\pi \wedge \neg(\varphi \leftrightarrow [\dagger\pi]\varphi).$$

∎

Así, las dos nociones de olvidar se comportan de manera diferente. Sin embargo, con el fin de estudiarlas juntas, no es necesario tener ambas como primitivas: la versión con precondición se puede definir en términos de su contraparte más general.

[15] Nótese cómo esto es diferente de otras alternativas, dado que la usada en lógica de anuncios públicos cuando se evalúa $[!\pi]\varphi$ es: si la fórmula anunciada π no es verdad, entonces φ no necesita ser evaluada y $[!\pi]\varphi$ se mantiene por vacuidad.

Proposición 223.
Si π es proposicional y φ es arbitraria, entonces

$$\vDash [\dagger'\pi]\varphi \leftrightarrow (\neg\Box\pi \wedge \varphi) \vee (\Box\pi \wedge [\dagger\pi]\varphi).$$

Una variante similar podría definirse a partir de $[\ddagger\pi]$. No vamos a entrar en detalles, pero el tratamiento en este caso sería más matizado, ya que habría que considerar tres casos, dependiendo de si $\Box\pi$, $\Box\neg\pi$, o ninguno de ellos se mantiene.

7.6.2. Olvidar-si fuertemente

Como otra alternativa natural, podemos explorar una versión determinista de nuestro operador lo que implicaría que el agente pierde toda la información de π. De acuerdo con la definición 199, con el fin de verificar $[\ddagger\pi]\varphi$, tenemos que comprobar φ en varios modelos, uno para cada elemento de $\mathscr{C}(\pi) \times \mathscr{C}(\neg\pi)$. El número de modelos a comprobar puede ser exponencial. Un operador de olvido determinista alternativo podría crear un solo modelo añadiendo una nueva copia de cada mundo para cada cláusula en $\mathscr{C}(\pi) \cup \mathscr{C}(\neg\pi)$.

Definición 224 (Operador modal $[\ddagger^*\pi]$)**.**
Para una fórmula proposicional π, se define un operador modal $[\ddagger^*\pi]$ y se extiende la semántica en la definición 194 estableciendo:

$$(M, w) \vDash [\ddagger^*\pi]\varphi \quad \textit{syss} \quad M_u^{\mathscr{C}(\pi)\cup\mathscr{C}(\neg\pi)} \vDash \varphi. \tag{7.4}$$

Así que ahora sólo necesitamos comprobar un modelo, pero el precio a pagar es que el nuevo modelo puede ser exponencialmente mayor que el original. Como antes, el operador alternativo $[\ddagger^*\pi]\varphi$ tendría propiedades diferentes a $[\ddagger\pi]\varphi$. Por ejemplo, tenemos la siguiente:

Proposición 225.
Sobre la clase de modelos seriales,

1. $[\ddagger^*(p \wedge q)]\,(\neg\Box p \wedge \neg\Box q)$ *es válida, pero*

2. $[\ddagger(p \wedge q)]\,(\neg\Box p \wedge \neg\Box q)$ *no es válida.*

Demostración. Supongamos que $\mathscr{M}$ es un modelo serial, w es un mundo de M y v un mundo accesible desde w. La forma clausal prima de $p \wedge q$ es $\{\{p\}, \{q\}\}$, mientras la forma clausal prima de $\neg(p \wedge q)$ es $\{\{\neg p, \neg q\}\}$. Así $\mathscr{C}(p \wedge q) \cup \mathscr{C}(\neg(p \wedge q)) = \{\{p\}, \{q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ y en $M_u^{\mathscr{C}(p \wedge q) \cup \mathscr{C}(\neg(p \wedge q))}$ desde $(w, 0)$ es accesible un mundo $(v, \{p\})$ satisfaciendo $\neg p$ y otro $(v, \{q\})$ satisfaciendo $\neg q$. Se sigue que

$$(M, w) \models [\ddagger^*(p \wedge q)](\neg\Box p \wedge \neg\Box q).$$

Dado que $\mathscr{M}$ y w eran arbitrarios, se sigue la primera afirmación.

Para la segunda, considere un modelo que consiste en un único punto reflejo w satisfaciendo $p \wedge q$. Entonces, $(M_u^{\{\{q\},\{\neg p, \neg q\}\}}, w)$ claramente satisface $\Box p$, así que $(M, w) \not\models [\ddagger(p \wedge q)]\,(\neg\Box p \wedge \neg\Box q)$, y por lo tanto esta fórmula no es válida. ■

7.6.3. Olvidar-si de manera dependiente

Al olvidar-si uniforme (definición 199), un agente olvida una fórmula π haciendo falsa una cláusula fija de la forma clausal prima de π en una copia del modelo inicial y una cláusula fija de la forma clausal prima de $\neg\pi$ en otra. Sin embargo, puede ser que no en todos los puntos del modelo se olvide de π 'por una misma razón'. Esto da una forma alternativa para modelar el olvido, que se comporta de una manera diferente al olvido uniforme tal como se ha presenta anteriormente. Demos las definiciones.

Definición 226 (Funciones de olvido)**.**
Sea $M = (W, R, V)$ un modelo y $(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2)$ dos conjuntos de cláusulas. Un par de funciones de olvido *es un par de funciones (f_1, f_2) tal que $f_1 \colon W \to \mathscr{C}_1$ y $f_2 \colon W \to \mathscr{C}_2$.*

El modelo $M_d^{(f_1,f_2)} = (W_d^{(f_1,f_2)}, R_d^{(f_1,f_2)}, V_d^{(f_1,f_2)})$ viene dado por

$$W_d^{(f_1,f_2)} = W \times \{0, 1, 2\}, \qquad (w, i)R_d^{(f_1,f_2)}(v, j) \;\; \textit{syss} \;\; wRv$$

y para cada $p \in Var$:

1. *$(w, 0) \in V_d^{(f_1,f_2)}(p)$ si y sólo si $w \in V(p)$; y*

2. *para $i = 1, 2$, $(w, i) \in V_d^{(f_1,f_2)}(p)$ si y sólo si o bien $\{p, \neg p\} \cap f_i(w) = \varnothing$ y $w \in V(p)$ o bien $\neg p \in f_i(w)$.*

Por lo tanto, el modelo de $M_d^{(f_1,f_2)}$ contiene tres copias de M. Los elementos de la primera, los mundos $(w,0)$, tienen la valoración atómica inicial; cada elemento de la segunda, los mundos $(w,1)$, hacen falsa una cláusula particular en $\mathscr{C}_1$, como indica la función olvido f_1; por último, cada elemento de la tercera copia, los mundos $(w,2)$, hacen falsa una cláusula particular en $\mathscr{C}_2$, como se indica por la función de olvido f_2.

Definición 227 (Relación de satisfacción dependiente)**.**
Sea M un modelo, definimos la relación de satisfacción dependiente $\vDash_d$ *en M por la extensión de la definición 194 con $(M,w) \vDash_d [\ddagger\pi]\varphi$ si y sólo si*

$$\forall f_1\colon W \to \mathscr{C}(\pi), \forall f_2\colon W \to \mathscr{C}(\neg\pi), M_d^{(f_1,f_2)}, (w,0) \vDash_d \varphi.$$

El conjunto de fórmulas en $\mathcal{L}_{\Box\ddagger}$ válidas bajo $\vDash_d$ se denotará d-$\mathrm{Log}_{\Box\ddagger}$.

Resulta que nuestras interpretaciones dependientes y uniformes dan lugar a diferentes lógicas.

Proposición 228.
Las lógicas $\mathrm{Log}_{\Box\ddagger}$ *(para olvido uniforme) y d-*$\mathrm{Log}_{\Box\ddagger}$ *(para olvido dependiente) son diferentes. En particular, si*

$$\varphi = \Box(p \wedge q) \to [\ddagger(p \wedge q)](\Box p \vee \Box q),$$

entonces $\varphi \in \mathrm{Log}_{\Box\ddagger} \setminus d\text{-}\mathrm{Log}_{\Box\ddagger}$. Esto es verdad incluso si nos restringimos a la clase de los modelos $\mathbb{S}$.

Demostración. Se argumenta semánticamente que $\varphi \in \mathrm{Log}_{\Box\ddagger}$. Sea $M = (W,R,V)$ un modelo y $w \in W$ satisface $\Box(p \wedge q)$. Tenemos que $\mathscr{C}(p \wedge q) = \{\{p\},\{q\}\}$ y $\mathscr{C}(\neg(p \wedge q)) = \{\{\neg p, \neg q\}\}$, por lo que para comprobar que $[\ddagger(p \wedge q)](\Box p \vee \Box q)$ se mantiene en w es suficiente ver que tanto $(M_u^{\{\{p\},\{\neg p,\neg q\}\}}, (w,0))$ como $(M_u^{\{\{q\},\{\neg p,\neg q\}\}}, (w,0))$ satisfacen $\Box p \vee \Box q$.

Sea $M_u^{\{\{p\},\{\neg p,\neg q\}\}} = (W',R',V')$ y supongamos que $(w,0)R'(v,i)$; afirmamos que, independientemente de i, se tiene que $(v,i) \in V'(q)$. Si $i = 0$, esto se sigue de la asunción de que $w \in [\![p \wedge q]\!]^M$. Si $i = 1$, entonces q no ocurre en $\{p\}$ y por tanto $(v,1) \in V'(q)$. Finalmente, si $i = 2$, entonces $\neg q \in \{\neg p, \neg q\}$ así que $(v,2) \in V'(q)$. En los tres casos tenemos $(v,i) \in V'(q)$, y dado que (v,i) era arbitrario, $(w,0) \in [\![\Box q]\!]^{M_u^{\{\{p\},\{\neg p,\neg q\}\}}}$.

Un argumento simétrico muestra que $M_u^{\{\{q\},\{\neg p,\neg q\}\}}, (w,0) \vDash_d \Box p$, así pues tenemos que $(M,w) \vDash [\ddagger(p \wedge q)](\Box p \vee \Box q)$, como se pedía.

Queda por comprobar que $\varphi \notin d$-$\text{Log}_{\Box\ddagger}$. Para ello, consideremos el modelo $M = (W,R,V)$ mostrado a continuación, donde $W = \{w,v\}$, R es la relación completa de W y $V(p) = V(q) = W$; observemos que M es un modelo $\mathbb{S}$.

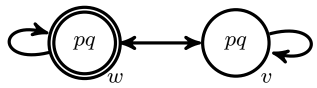

Fig. 10 (7.6): Modelo epistémico apuntado.

Claramente, $(M,w) \vDash_d \Box(p \wedge q)$. Para mostrar que $(M,w) \nvDash_d [\ddagger(p \wedge q)](\Box p \vee \Box q)$, sólo tenemos que exhibir dos funciones de olvido $f_1 \colon W \to \{\{p\},\{q\}\}$ y $f_2 \colon W \to \{\{\neg p,\neg q\}\}$ tal que $M^{(f_1,f_2)}, w \nvDash_d \Box p \vee \Box q$. Sea $f_1(w) = \{p\}$ y $f_1(v) = \{q\}$, mientras $f_2(w) = f_2(v) = \{\neg p,\neg q\}$. El modelo resultante $M^{(f_1,f_2)} = (W'',R'',V'')$ es el siguiente.

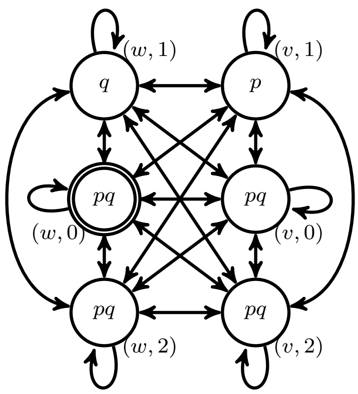

Fig. 11 (7.6): Modelo epistémico apuntado tras ejecutarse una acción de olvidar de forma dependiente.

Obsérvese que R'' también es la relación completa. Más aún, $(w,1) \notin V''(p)$ y $(v,1) \notin V''(q)$, así que $(w,0) \notin [\![\Box p \vee \Box q]\!]^{M^{(f_1,f_2)}}$ y por lo tanto $(M,w) \nvDash_d [\ddagger(p \wedge q)](\Box p \vee \Box q)$, como deseábamos. ■

Por lo tanto, la noción de olvido dependiente conduce a una lógica diferente del olvido uniforme. Nuestro ejemplo anterior sugiere que con la acción de olvidar de forma dependiente se pierde más información que con la análoga uniforma, y esto puede ser deseable en algunas aplicaciones. Sin embargo, la técnica de representar el olvido en términos de modelos de acción no funciona en esta configuración (al menos no de una manera directa); una exploración adicional de esta noción de olvido se deja para un trabajo futuro.

7.7. Otros enfoques posibles

Como ya se apuntó en la introducción, existen otros enfoques en la literatura lógica para la representación de la acción de olvidar sobre la base de una representación de modelos relacionales del conocimiento del agente. La idea de la creación de una copia de las posibilidades epistémicas que hace falsa una fórmula dada también es compartida por [NCL06], un enfoque que representa el conocimiento como un conjunto de interpretaciones proposicionales y define el olvido de una proposición atómica mediante el uso de la llamada *operación de cierre dual* que crea copias en las que el átomo se hace falso, manteniendo el valor de verdad de otros átomos como en el modelo original. Estrechamente relacionado está el enfoque de [BZ05], el cual trabaja también con un conjunto de interpretaciones proposicionales y utiliza un concepto de 'proximidad' entre los modelos derivados de un concepto de 'cercanía' entre los mundos. La parte crucial de la propuesta, la operación de *actualización del conocimiento*, puede ser entendida como una operación de modelos que toma un modelo y una fórmula epistémica y devuelve un modelo construido a partir de la unión de todos los modelos que están lo más cerca posible al original y satisfacen la fórmula dada. Dicha operación se puede utilizar para representar un acto de olvidar-si φ (entre otras acciones epistémicas) mediante el uso de $\neg\Box\varphi \wedge \neg\Box\neg\varphi$ como la fórmula que la operación tiene como objetivo satisfacer.

Los enfoques que representan el conocimiento del agente como un conjunto de fórmulas (el *conjunto conocimiento*) han seguido diferentes alternativas para representar el olvido de un *conjunto de átomos*, dependiendo típicamente de alguna noción de similitud entre los modelos: un conjunto de conocimientos es el resultado de olvidar los átomos en Var' si y sólo si todos los modelos del conjunto conocimiento resultante son 'equivalentes' a un modelo del conjunto conocimiento original cuando se ignoran los átomos en Var' [LR94]. En los enfoques que utilizan fórmulas del lenguaje epistémico, la noción de equivalencia utilizada es la de *bisimulación*, que alcanza a sistemas [ZZ08, ZZ09] similares a los que contienen las modalidades para la cuantificación de bisimulaciones [EvdMS02, Fre06].

También hay enfoques centrados en el *olvido variable* en una fórmula dada. Por ejemplo, [LLM03] entiende que *el olvido de un conjunto de literales* como una acción que toma una fórmula proposicional y un conjunto de literales y devuelve otra fórmula proposicional que es la consecuencia más fuerte del original, que también es independiente de los literales 'olvidados'. También exploran lo que ellos llaman *olvido variable*, lo que equivale a olvidar tanto el literal como su negación, y que pueden ser equivalentemente definidas mediante el uso de fórmulas booleanas cuantificadas. Otras propuestas parten de enfoques alternativos, como [SSLZ09], que define directamente el olvido de un átomo de p en una fórmula proposicional π como una disyunción de la fórmula $\pi[\top/p]$ (el resultado de la sustitución de p para el siempre cierto $\top$) y la fórmula $\pi[\bot/p]$ (el resultado de la sustitución de p para el siempre falso $\bot$),y luego lo extiende al olvido de un conjunto de átomos en la forma natural (el olvido de un conjunto de átomos conduce a olvidar un átomo en el momento, y el olvido de un conjunto vacío es la fórmula original).

En el contexto del modelo AGM [AGM85], algunas aproximaciones usan primos implicados $\mathscr{C}(\pi)$ de π para un cambio de creencias. El autor de [Pag06] define una operación de contracción de creencias determinista. Al contrario que en nuestra propuesta, requiere una *implicación epistémica* [GM88], un orden dentro de las creencias del razonador, que están representadas por fórmulas. Esta información extralógica se utiliza para determinar qué piezas de información se descartan, por lo que la operación se vuelve determinista. La ventaja de trabajar con primos implicados (lo que ellos llaman *implicación epistémica compilada*), en lugar de las fórmulas originales, es que en el conocimiento compilado base la contracción se realiza con sólo la manipulación sintáctica. Se presenta un enfoque diferente en [MBP10]. También trabajan con formas primas (ambas implicantes e implicadas) y definen manipulaciones sintácticas para las operaciones del modelo AGM. Sus criterios preferenciales se definen con la ayuda de una noción de distancia entre modelos (implicantes). Al tener en cuenta el conjunto de átomos con diferente valor de verdad dentro de los dos modelos, varias medidas de distancia son presentadas y comparadas. Las operaciones de revisión de creencias se calculan por la obtención, a partir de un conjunto de modelos posibles, los más cercanos a una pieza de verdad de la información.

Diferentes marcos de referencia podrían ser preferibles en diferentes escenarios. El modelo que proponemos aquí es adecuado para situaciones en las que los agentes modelan sus conocimientos utilizando los mundos posibles (aunque si tenemos un gran número de mundos no es deseable), pero no se dan preferencias canónicas *a priori* entre las diferentes posibilidades epistémicas. Para ello, no es necesario que el agente elija al azar entre todos los primos implicados, sino simplemente elegir dichos implicados usando un método que es desconocido para el observador externo que está haciendo el modelado lógico. En particular, un marco de este tipo puede ser útil para el agente epistémico mismo cuando se utiliza un algoritmo complejo para elegir un primo implicado para el que es difícil predecir de antemano el resultado.

Capítulo 8

Olvidar fórmulas proposicionales en sistemas multiagentes

En este capítulo queremos presentar una versión de la lógica del conocimiento / la creencia y el olvido (LC-CO) apta para sistemas multiagentes; así pues, una propuesta de sistema lógico con mayor expresividad. Sin embargo, ésta no será construida mediante la generalización de lo allí expuesto, sino que aprovecharemos la ocasión para introducir novedades sustanciales de modo que el resultado reúna, además de la mayor expresividad indicada, otras dos notables ventajas: la primera, que sea un olvido epistémicamente más conservativo (es decir, que respete aún más el estado epistémico inicial de los agentes olvidadizos en cuanto que no afecta a ciertas fórmulas que intuitivamente reconocemos que no necesariamente deben cambiar) y, a la vez (y aunque parezca que ello entra en conflicto con el deseo anterior); la segunda se refiere a un mejor comportamiento desde un punto de vista computacional, concretamente que sea más eficiente (lo cual se conseguirá mediante la generación de modelos más pequeños).

En la extensa introducción del capítulo anterior ya se pusieron de manifiesto muchos de los aspectos que aquí son necesarios tener en cuenta, por lo que en lo que sigue de esta introducción sólo nos referiremos a lo que ahora sea distinto o resulte novedoso. Sólo señalaremos dos notas esenciales: en primer lugar, la propuesta se hace usando semántica relacional kripkeana, con modelos epistémicos multiagentes para representar el conocimiento de los agentes y modelos de acción que operan sobre los otros para representar los cambios epistémicos; den segundo lugar, dado el no determinismo que se genera con la acción de olvidar, se mantiene la estrategia de representar cualquier fórmula proposicional por su forma normal conjuntiva 'minimal' y sobre ella cuantificar con el objetivo de garantizar la 'convergencia' de los resultados obtenidos con independencia de la particular manera de olvidar la proposición que haya acontecido.

Entre dichas novedades presentamos dos operaciones sobre los modelos de Kripke para representar la acción de un agente consistente en olvidar el valor de verdad de una fórmula proposicional cualquiera que haya sido dada: la primera es una forma de *olvidar-si 'públicamente'* (que es la que está más directamente conectada con la principal propuesta monoagente del capítulo anterior), según la cual después de ejecutarse tal operación todos los agentes conocen que el agente olvidadizo ha olvidado la fórmula dada; la segunda es una forma de *olvidar-si 'secretamente'* tras la cual el agente olvidadizo conoce lo que ha pasado pero el resto de los agentes no son conscientes de la acción. También mencionamos, aunque de forma muy breve un olvido más simple (*olvidar-que públicamente*) en el que los agentes simplemente olvidan que una fórmula dada es verdad. Para esta acción pueden ser definidas no sólo las versiones pública y secreta, sino también una privada (según la cual un agente olvida que una fórmula π es verdadera y otros agentes saben que el primero ha olvidado que π es verdadera o $\neg\pi$ es verdadera, pero no cuál de ellas).

Organizaremos el capítulo de la siguiente manera. Comenzamos la primera sección exponiendo algunas nociones básicas de la lógica proposicional y epistémica que se utilizarán a lo largo del texto, eso sí ahora las versiones tomadas de esta últimas (las nociones epistémicas) son aptas para sistemas multiagentes. Hemos repetido una definición relativa a contenidos de lógica proposicional y otra relativa a lógica epistémica dinámica, que coinciden con otras que aparecen en el capítulo 7 y 6 respectivamente. El motivo es que, siendo muy poco el material redundante, se justifica su aparición por la mayor facilidad de lectura que aporta al texto. En la segunda sección presentamos la noción de *olvidar-si públicamente* que, al ser el núcleo del capítulo, estudiamos con más detalle en la sección siguiente, analizando distintas propiedades del mismo. La cuarta sección introduce una nueva acción de 'olvidar' (*olvidar-si secretamente*), donde un agente olvida el valor de verdad de una fórmula π y los demás agentes no son conscientes de ello.

Hagamos un comentario final, éste en relación al uso de los sistemas lógicos resultantes a la modelización de la abducción. Si hubiésemos restringido o hubiésemos privilegiado excesivamente el uso de la abducción dentro del ámbito de las Ciencias Empíricas, el interés de esta propuesta sería bastante menor. El motivo sería que el ambiente es un agente que no es cognitivo y que a la hora de abordar el cambio teórico lo relevante son los anuncios que provienen del citado ambiente y no cuál es el estado epistémico de otros agentes ante los mismos. Sin embargo, dado que la abducción es un tipo de inferencia que se puede incorporar con notable éxito en otras áreas de conocimiento (inclusive humanísiticas) y en procesos cotidianos, sí resultan relevantes los mencionados estados epistémicos de otros agentes.

8.1. Cuestiones básicas

A lo largo de este texto, *Var* denota un conjunto numerable no vacío de átomos (o variables proposicionales) y *Ag* un conjunto numerable no vacío de agentes.

Definición 229 (Lenguaje $\mathcal{L}_{\Box}^{Ag}$)**.**
La gramática de $\mathcal{L}_{\Box}^{Ag}$ *viene dada por*

$$\varphi ::= \top \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \Box_i\varphi$$

con $p \in Var$ *e* $i \in Ag$*. Las fórmulas de la forma* $\Box_i\varphi$ *se leen como* el agente i conoce que φ es el caso. *Los símbolos "*$\bot$*", "*$\vee$*", "*$\rightarrow$*", "*$\leftrightarrow$*" y "*$\Diamond_i$*" son definidos como es usual.*

Las fórmulas de $\mathcal{L}_{\Box}^{Ag}$, el lenguaje epistémico multiagente básico, son interpretados en los *modelos de Kripke* (es decir, mediante *semántica de mundos posibles*), como se describe a continuación.

Definición 230 (Modelo de Kripke multiagente)**.**
Un marco de Kripke multiagente[1] *(o, simplemente, un marco) es una tupla* (W, R) *donde* W *es un conjunto no vacío de mundos posibles y* $R : Ag \to \wp(W \times W)$ *una función que asigna una relación binaria sobre* W *a cada agente* $i \in Ag$ *(*R_i *es una relación de accesibilidad del agente* i*). Un* modelo de Kripke multiagente[2] *(o, simplemente, un modelo) es un marco de Kripke equipado con una valoración atómica* $V : Var \to \wp(W)$*. Un* modelo de Kripke multiagente apuntado[3] *es un par* (M, w) *con* M *un modelo de Kripke y* w *un mundo en él (el punto de evaluación).*

[1] Para no hacer excesivamente complicada la lectura omitiremos en el resto del capítulo la palabra *multiagente* cuando nos refiramos a este concepto.
[2] *Idem.*
[3] *Idem.*

No hacemos ninguna suposición acerca de la relación de accesibilidad, de modo que, aunque en este capítulo se prefiere utilizar el término *conocimiento*, todo se mantiene si sustituimos la palabra anterior por *creencia*.

Definición 231 (Satisfacción para $\mathcal{L}_{\Box}^{Ag}$)**.**
Sea $M = (W, R, V)$ un modelo. La relación $\models$ entre modelos apuntados y fórmulas en $\mathcal{L}_{\Box}^{Ag}$ es definida como sigue.

$$\begin{array}{lll}
(M,w) \models p & \textit{si y sólo si} & w \in V(p) \\
(M,w) \models \neg\varphi & \textit{si y sólo si} & (M,w) \not\models \varphi \\
(M,w) \models \varphi \wedge \psi & \textit{si y sólo si} & (M,w) \models \varphi \;\; y \;\; (M,w) \models \psi \\
(M,w) \models \Box_i\varphi & \textit{si y sólo si} & \textit{para todo } u \in W,\ R_i wu \textit{ implica } (M,u) \models \varphi
\end{array}$$

Como es usual, $M \models \varphi$ establece que $(M, w) \models \varphi$ para todos los mundos w en M. Si $\mathcal{X}$ es una clase de modelos, $\mathcal{X} \models \varphi$ establece que $M \models \varphi$ para todo $M \in \mathcal{X}$. La fórmula φ es válida *cuando $M \models \varphi$ para cada modelo M, un caso denotado por $\models \varphi$.*

Definición 232 (Bisimulación)**.**
*Sea $At^* \subseteq Var$ un conjunto de átomos. Sean M y M' dos modelos con $M = (W, R, V)$ y $M' = (W', R', V')$. Una relación $Z \subseteq (W \times W')$ es una At^*-*bisimulación *entre M y M' si y sólo si para cada $(w, w') \in Z$:*

atoms *para cada $p \in At^*$, $w \in V(p)$ si y sólo si $w' \in V'(p)$;*

forth *si hay $u \in W$ tal que $R_i wu$ para algún $i \in Ag$, entonces hay $u' \in W'$ tal que ambos $R'_i w'u'$ y $(u, u') \in Z$;*

back *si hay $u' \in W'$ tal que $R'_i w'u'$ para algún $i \in Ag$, entonces hay $u \in W$ tal que ambos $R_i wu$ y $(u, u') \in Z$.*

Dos modelos M y M' son bisimilares hasta los átomos en At^* (notación: $M \leftrightarroweq_{At^*} M'$) cuando hay una At^*-bisimulación entre ellos. Dos modelos apuntados (M, w) y (M', w') son bisimilares hasta los átomos en At^* (notación: $(M, w) \leftrightarroweq_{At^*} (M', w')$) cuando hay una At^*-bisimulación entre los modelos que contiene (w, w').

Recordemos el siguiente resultado conocido para el lenguaje $\mathcal{L}_{\Box}^{Ag}$.

Proposición 233.
Sean M y M' dos modelos con $M = (W, R, V)$ y $M' = (W', R', V')$. Si (M, w) y (M', w') son At^*-bisimilares (ver la sección 2.2 de [BdRV01]) entonces, para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{\Box}^{Ag}$ cuyos átomos aparezcan todos en At^*, $(M, w) \vDash \varphi$ si y sólo si $(M', w') \vDash \varphi$.

Definición 234 (Forma clausal)**.**
Sea π una fórmula proposicional. Definimos la forma clausal *de π, $\mathscr{C}(\pi)$, como el conjunto de todas las cláusulas que son consecuencias no tautológicas mínimas de π. Dada una forma clausal $\mathscr{C}$, definimos $\mathscr{C}_{\bigwedge} := \bigwedge_{D \in \mathscr{C}} \bigvee D$.*

Claramente, $\mathscr{C}_{\bigwedge}$ es una forma normal conjuntiva mínima de pi y la forma normal $\mathscr{C}(\pi)$ es, en realidad, el conjunto de implicantes primos de π (cf. [Qui52, RBM97]). Existen varios algoritmos para calcularlo (por ejemplo, [Qui52, dK92, KT90, Rym94, RBM97]; ver [Bit08] para más información).

8.2. Olvidar-si públicamente

Definición 235 (Lenguaje $\mathcal{L}_{\Box\ddagger^P}^{Ag}$)**.**
El lenguaje $\mathcal{L}_{\Box\ddagger^P}^{Ag}$ extiende $\mathcal{L}_{\Box}^{Ag}$ con expresiones de la forma $[\ddagger_a^P \pi]\varphi$ con π una fórmula proposicional y $a \in Ag$ un agente. Dichas expresiones se leen como después de que el agente a olvide-si π públicamente, φ es el caso. *Expresiones de la forma $\langle \ddagger_a^P \pi \rangle \varphi$ son definidas de la forma estándar (como $\neg[\ddagger_a^P \pi]\neg\varphi$).*

Para la interpretación semántica de las nuevas fórmulas, observemos cómo $\Box_a \varphi$ es el caso cuando φ se mantiene en las alternativas epistémicas de todo agente a. Entonces, con el fin de que olvide el valor de verdad de una determinada fórmula proposicional *contingente* π (por lo que no sabe que se mantiene y tampoco sabe que falla), se debe tener en cuenta como posible no sólo (al menos) una situación en la que π falla, sino también (al menos) una situación en la que $\neg\pi$ falla (y por lo tanto π se mantiene). En primer lugar, tengamos en cuenta cómo, dado un mundo posible, hay varias maneras de hacer falsa una fórmula dada π. Si se usa su forma clausal $\mathscr{C}(\pi) = \{D_1, \ldots, D_n\}$, entonces es claro que con el fin de hacer que π sea falsa en algún mundo, al menos una cláusula en $\mathscr{C}(\pi)$ debe ser falsa en ella; por lo tanto, hay $2^n - 1$ distintas formas de hacer falso a π. Sin embargo, la falsación de una colección no vacía arbitraria de cláusulas es problemática, tanto a causa de la explosión combinatoria como porque las negaciones de diferentes cláusulas pueden ser mutuamente incompatibles. De hecho, el enfoque de un cambio *mínimo* sugiere que, con el fin de falsificar π, es suficiente falsificar sólo una de sus cláusulas.

La operación de olvidar que se define en esta sección crea una copia del modelo original: si el mundo original hace que π sea verdadera, entonces la copia hace falsa una cláusula fija de $\mathscr{C}(\pi)$, pero si el mundo original hace que π sea falsa, entonces la copia hace falsa una cláusula fija de $\mathscr{C}(\neg\pi)$.

Definición 236 (Olvidar públicamente)**.**
Sea $M = (W, R, V)$ un modelo, $a \in Ag$ un agente, π una fórmula proposicional y D_1 y D_2 dos cláusulas finitas no tautológicas. El modelo $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2} = (W', R', V')$ viene dado por:

- $W' := W \times \{0, 1\}$;
- *para agentes a, y cada $b \in Ag$, con $b \neq a$,*

  $R'_a := \{((w, i), (u, j)) \in W' \mid R_a wu \text{ y } i, j \in \{0, 1\}\}$
  $R'_b := \{((w, i), (u, i)) \in W' \mid R_b wu \text{ y } i \in \{0, 1\}\}$
- *para cada $p \in Var$ y $w \in W$:*

  ◦ $(w, 0) \in V'(p)$ *si y sólo si* $w \in V(p)$
  ◦ $(w, 1) \in V'(p)$ *si y sólo si al menos uno de los siguientes se mantiene*
    - $w \in V(p)$ *y* $(M, w) \models \pi$ *y* $p \notin D_1$, *o*
    - $w \in V(p)$ *y* $(M, w) \models \neg\pi$ *y* $p \notin D_2$, *o*
    - $(M, w) \models \pi$ *y* $\neg p \in D_1$, *o*
    - $(M, w) \models \neg\pi$ *y* $\neg p \in D_2$.

La operación produce un modelo $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}$ cuyo dominio tiene dos tipos de mundos: los mundos de la forma $(w, 0)$ (la 'zona 0') preservan la evaluación original –un átomo de p es verdadero en $(w, 0)$ si y sólo si p era ya verdad en w–; por otro lado, en los de la forma $(w, 1)$ (la 'zona 1 ') todos los literales o bien en D_1 o bien en D_2 han sido falsificados, en función de si π se mantiene o no en w. Para las relaciones de accesibilidad, la del agente olvidadizo a se extiende de manera uniforme, haciendo un mundo (u, j) accesible desde un mundo (w, i) cuando u es accesible desde w en el modelo original. Para el resto de los agentes, su respectiva relación es como la del original dentro de cada copia, pero ninguna flecha va de una zona a la otra.

Definición 237 (Satisfacción para $\mathcal{L}^{Ag}_{\Box\ddagger^P}$).
La definición 231 se extiende a las fórmulas en $\mathcal{L}^{Ag}_{\Box\ddagger^P}$ con

$$(M, w) \models [\ddagger^P_a \pi]\varphi \quad \textit{si y sólo si}$$

$$M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 0) \models \varphi \textit{ para todo } D_1 \in \mathscr{C}(\pi), D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi).$$

Por tanto, φ es el caso después de que el agente a olvide públicamente el valor de verdad de π ($[\ddagger^P_a \pi]\varphi$), cuando φ se sostiene independientemente de las cláusulas D_1 y D_2 que son elegidas para hacer falsa a π y $\neg\pi$ (respectivamente) en los mundos añadidos.

8.3. El efecto de olvidar-si públicamente

El modelo $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}$ es el resultado de que el agente a considere públicamente nuevas posibilidades que cambien el valor de verdad de π. Si π era verdad en un w dado, entonces π es falsa en $(w, 1)$, pero si π era falsa en w, ahora es verdad en $(w, 1)$. Esto es hecho falsando en $(w, 1)$ todos los literales o bien de D_1 (si π era verdad en w) o bien de D_2 (de otra manera). En cada caso, los átomos que no ocurren en la cláusula mantienen su valor de verdad originales. Así,

Lema 238.
Sea $M = (W, R, V)$ un modelo y π una fórmula proposicional que no es ni una tautología ni una contradicción (así que los dos $\mathscr{C}(\pi)$ y $\mathscr{C}(\neg\pi)$ son conjuntos no vacíos de cláusulas contingentes), con $D_1 \in \mathscr{C}(\pi)$ y $D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi)$, y un agente olvidadizo a. Entonces, para cualquier $w \in W$,

$$M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 0) \models \pi \qquad \textit{si y sólo si} \qquad (M, w) \models \pi \tag{8.1}$$

$$M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 1) \not\models \pi \qquad \textit{si y sólo si} \qquad (M, w) \models \pi \tag{8.2}$$

Demostración. Por la definición 236, $(w, 0)$ y w satisfacen exactamente los mismos átomos, así que (8.1) es inmediata. Para (8.2), supongamos $(M, w) \models \pi$; entonces el valor de verdad de cada literal en D_1 ha sido hecho falso en $(w, 1)$. Por lo tanto, $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 1) \not\models \bigvee D_1$ y por consiguiente $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 1) \not\models \pi$. Por otro lado, cuando $(M, w) \not\models \pi$, todos los literales en D_2 han sido hecho falsos, así que $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 1) \not\models \bigvee D_2$ y entonces $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 1) \not\models \neg\pi$ por lo que $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 1) \models \pi$. ■

Ejemplo 239.

Consideremos el siguiente modelo apuntado (M, w_0) *en el que los dos agentes* a *y* b *conocen* p *(es decir,* $(M, w_0) \vDash \Box_a p \wedge \Box_b p$*):*

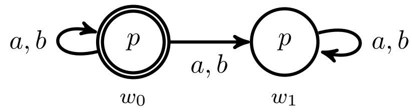

Fig. 1 (8.3): Modelo epistémico multiagente apuntado (ejemplo 239).

Consideremos la acción del agente a *que olvida-si* p*. Dado que* $\mathscr{C}(p) = \{\{p\}\}$*, hay sólo una cláusula eligible:* $\{p\}$*. De forma similar,* $\mathscr{C}(\neg p) = \{\{\neg p\}\}$*, así que las únicas cláusulas que pueden ser consideradas para que* a *olvide si* p *son* $D_1 = \{p\}$ *y* $D_2 = \{\neg p\}$*. El modelo apuntado* $(M^P_{a,\pi}\binom{\{p\}}{\{\neg p\}}, (w_0, 0))$ *aparece a continuación, con la fila inferior siendo la copia en la que cada mundo cambia el valor de verdad de* π*.*

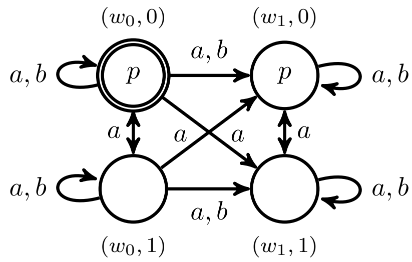

Fig. 2 (8.3): Modelo epistémico multiagente apuntado tras ejecutarse una acción de olvidar-si públicamente (ejemplo 239).

Como resultado de la acción, desde $(w_0, 1)$ *el agente* a *considera posibles mundos donde* p *se mantiene y también otros mundos donde* p *falla. Por lo tanto,* $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}$*,* $(w_0, 0) \vDash \neg\Box_a p \wedge \neg\Box_a \neg p$ *y en consecuencia* $(M, w_0) \vDash \Box_a p \wedge [\ddagger^P_a p](\neg\Box_a p \wedge \neg\Box_a \neg p)$*. Con respecto al agente* b*, desde* $(w_0, 1)$ *considera posible sólo mundos donde* p *se mantiene; por lo tanto,* $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w_0, 0) \vDash \Box_b p$ *y por lo tanto* $(M, w_0) \vDash \Box_b p \wedge [\ddagger^P_a p]\Box_b p$*. Sin embargo, mientras en* (M, w) *el agente* b *que conocía* a *conocía* p*,* $(M, w_0) \vDash \Box_b \Box_a p$*, en* $(M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w_0, 0))$ *el agente* b *conoce que* a *no conoce si* p*,* $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w_0, 0) \vDash \Box_b(\neg\Box_a p \wedge \neg\Box_a \neg p)$*.*

En el ejemplo previo, notamos cómo, si w_1 no tuviese flechas reflexivas y fuera el punto de evaluación en M (y por lo tanto $(w_1, 0)$ el punto de evaluación en el modelo después de la operación), entonces el agente conocería p antes de la acción (por vacuidad), y la conocería aún posteriormente (por vacuidad también). La proposición siguiente muestra que este resultado contrario a la intuición de la acción olvidar-si puede ocurrir sólo cuando el conocimiento del agente es inconsistente.

Proposición 240.
Sea π una fórmula proposicional que no es ni una tautología ni una contradicción. Entonces $\models [\ddagger_a^P \pi](\Box_a \neg\pi \vee \Box_a \pi) \leftrightarrow \Box_a \bot$

Demostración. Sea $M = (W, R, V)$ un modelo. De derecha a izquierda, si $(M, w) \models \Box_a \bot$ entonces no hay u tal que $R_a wu$ así que, por la definición 236, no hay (u, i) tal que $R'_a(w, 0)(u, i)$ (independientemente de la cláusula usada); por lo tanto, $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}$, $(w, 0) \models \Box_a \neg\pi \vee \Box_a \pi$ y en consecuencia $(M, w) \models [\ddagger_a^P \pi](\Box_a \neg\pi \vee \Box_a \pi) \leftrightarrow \Box_a \bot$.

De izquierda a derecha, supongamos $(M, w) \models \neg\Box_a \bot$; entonces hay $u \in W$ tal que $R_a wu$ y en consecuencia, independientemente de la cláusula elegida D_1 y D_2, hay $(u, 0)$ y $(u, 1)$ en W' tal que $R'_a(w, 0)(u, 0)$ y $R'_a(w, 0)(u, 1)$. Por el lema 238, $(u, 0)$ y $(u, 1)$ asigna el valor de verdad opuesto a π, así que $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 0) \models \Diamond_a \neg\pi \wedge \Diamond_a \pi$, esto es, $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 0) \models \neg(\Box_a \pi \vee \Box_a \neg\pi)$. Pero π no es ni una tautología ni una contradicción, así que tanto $\mathscr{C}(\pi)$ como $\mathscr{C}(\neg\pi)$ son conjuntos no vacíos de cláusulas contingentes y por lo tanto $(M, w) \models \langle \ddagger_a^P \pi \rangle \neg(\Box_a \pi \vee \Box_a \neg\pi)$, esto es, $(M, w) \not\models [\ddagger_a^P \pi](\Box_a \pi \vee \Box_a \neg\pi)$. ■

Como caso particular, si π es un átomo p, entonces $\mathscr{C}(p) = \{\{p\}\}$ es no vacío y contiene sólo cláusulas contingentes, así que $[\ddagger_a^P p](\Box_a p \vee \Box_a \neg p) \leftrightarrow \Box_a \bot$ es válida. Más interesante aún, recordemos que el conocimiento de un agente es consistente en w si y sólo si w tiene al menos un mundo accesible. Por lo tanto, en la clase de los modelos en la que esta propiedad de consistencia se mantiene, llamada *serial* y denotada por $\mathcal{KD}$, la acción de olvido logra el resultado deseado.

Corolario 241.
Para cualquier fórmula proposicional no tautológica y no contradictoria π, $\mathcal{KD} \models \langle \ddagger_a^P \pi \rangle \top \wedge [\ddagger_a^P \pi](\neg\Box_a \pi \wedge \neg\Box_a \neg\pi)$.

Podríamos habernos dado cuenta de que, además del corolario 241, tanto el lema 238 como la proposición 240 están restringidas a fórmulas π que no sean ni tautologías ni contradicciones. Esto es así porque, de lo contrario, la prueba no se mantendría: en tales casos o bien $\mathscr{C}(\pi) = \varnothing$ o bien $\mathscr{C}(\neg\pi) = \varnothing$, y por lo tanto no hay cláusulas que aplicar. Como consecuencia de esto, tanto $[\ddagger_a^P \top]\varphi$ como $[\ddagger_a^P \bot]\varphi$

son válidos para cualquier fórmula φ. Sin embargo, ni $\langle \ddagger_a^P \top \rangle \top$ ni $\langle \ddagger_a^P \bot \rangle \top$ son satisfacibles.

Sobre minimalidad La siguiente proposición muestra cómo la acción de olvidar es incluso minimal con respecto a los cambios en el conocimiento de los agentes, ya que no afecta al valor de verdad de las fórmulas que no comparten átomos con la olvidada.

Proposición 242.
Sea π una fórmula proposicional que ni es una tautología ni una cotradicción (así que $\mathscr{C}(\pi)$ y $\mathscr{C}(\neg\pi)$ son conjuntos no vacíos de cláusulas contingentes). Entonces, para cada agente a y cada fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_\square^{Ag}$ cuyos átomos no aparecen en los literales de $\bigcup \mathscr{C}(\pi)$[4], $\vDash \varphi \leftrightarrow [\ddagger_a^P \pi]\varphi$.

Demostración. La prueba usa un argumento de bisimulación. Primero, tomemos un modelo $M = (W, R, V)$. Tomemos cualquier $D_1 \in \mathscr{C}(\pi)$ y cualquier $D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi)$, siendo π una fórmula proposicional contingente, y sea Var_π un conjunto de átomos en los literales de $\bigcup \mathscr{C}(\pi)$. La relación Z entre los dominios de M y $M_{a,\pi}^P\binom{D_1}{D_2}$ es definida como

$$Z := \{(u, (u, k)) \in (W \times W') \mid u \in W \text{ y } k \in \{0, 1\}\}$$

es una $(Var \setminus Var_\pi)$-bisimulación, dada la definición 236. Por lo tanto, para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_\square^{Ag}$ cuyos átomos no aparecen en Var_π y cada $u \in W$, $(M, u) \vDash \varphi$ si y sólo si $M_{a,\pi}^P\binom{D_1}{D_2}, (u, k) \vDash \varphi$. La prueba actual es directa, dado que para cada modelo apuntado (M, w) el par $(w, (w, 0))$ está en la $(Var \setminus Var_\pi)$-bisimulación.
■

En particular, el cambio en el conocimiento del agente olvidadizo es minimal, dado que φ no contiene átomos en $\bigcup \mathscr{C}(\pi)$, luego $\vDash \square_a\varphi \leftrightarrow [\ddagger_a^P \pi]\square_a\varphi$.

Ejemplo 243.
Consideremos el siguiente modelo epistémico monoagente apuntado.

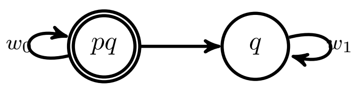

Fig. 3 (8.3): Modelo epistémico monoagente apuntado (ejemplo 243).

[4] Obviamente, los átomos en los literales de $\bigcup \mathscr{C}(\pi)$ son los mismos que en $\bigcup \mathscr{C}(\neg\pi)$, por lo tanto, los mismos que en $\bigcup \mathscr{C}(\pi) \cup \bigcup \mathscr{C}(\neg\pi)$ también.

Observemos cómo el agente no conoce ni $p \wedge q$ (considera que w_1 es posible) ni $\neg(p \wedge q)$ (considera que w_0). De nuevo, hay dos resultados posibles para una acción de olvidar-si la ya 'deconocida' $p \wedge q$:

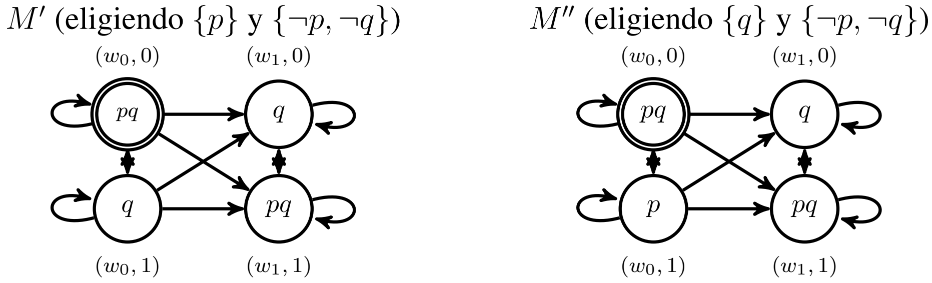

Fig. 4 (8.3): Dos modelos epistémicos apuntados distintos obtenidos tras ejecutarse una acción de olvidar-si al mismo modelo inicial (ejemplo 243).

En los modelos apuntados, M' y M'' respectivamente, el agente aún no conoce ni $p \wedge q$ ni $\neg(p \wedge q)$. Sin embargo, en ambos casos la acción ha afectado a su información. En el modelo apuntado más a la izquierda $(M', (w_0, 0))$ considera posible un mundo $\neg p \wedge q$, $(w_1, 0)$, desde el que hay un mundo accesible $p \wedge q$, $(w_1, 1)$, algo que no pasa en (M, w_0):

· $(M', (w_0, 0)) \models \Diamond(\neg p \wedge q \wedge \Diamond(p \wedge q))$ *pero* $(M, w_0) \not\models \Diamond(\neg p \wedge q \wedge \Diamond(p \wedge q))$.

· $(M', (w_0, 0)) \models \Diamond(\neg p \wedge q \wedge \Diamond(p \wedge q))$ *pero* $(M, w_0) \not\models \Diamond(\neg p \wedge q \wedge \Diamond(p \wedge q))$.

En el modelo apuntado de más a la derecha $(M'', (w, 0))$ considera posible un mundo $p \wedge \neg q$, $(w_0, 1)$, algo que no pasa en (M, w_0):

$$(M'', (w_0, 0)) \models \Diamond(p \wedge \neg q) \textit{ aunque } (M, w_0) \not\models \Diamond(p \wedge \neg q).$$

$$(M'', (w_0, 0)) \models \Diamond(p \wedge \neg q) \qquad \textit{yet} \qquad (M, w_0) \not\models \Diamond(p \wedge \neg q)$$

Por lo tanto, olvidar-si es el caso de una fórmula cuyo valor de verdad no se conoce al empezar, puede afectar a la información del agente dándole 'nuevas razones' para no conocer el valor de verdad de las fórmulas. También, observamos que, en M' el agente aún conoce q pero no en M'', por lo que las diferentes elecciones de cláusulas produce efectos diferentes.

La proposición 242 muestra que la operación de olvido no afecta al valor de verdad de las fórmulas que no incluyen átomos en la forma clausal de la olvidada. El siguiente resultado va un paso más allá, mostrando cómo el conocimiento *proposicional* de otros agentes distintos del olvidadizo no es afectado tampoco.

Proposición 244.
Si π es una fórmula proposicional que no es ni una tautología ni una contradicción y b un agende diferente de a, entonces para cada fórmula proposicional π' (incluyendo π), $\models \Box_b\pi' \leftrightarrow [\ddagger_a^P \pi]\Box_b\pi'$

Demostración. El núcleo de la prueba son dos hechos del nuevo modelo: la valoración atómica de la 'zona 0' es igual que en el modelo original, y la relación de accesibilidad de agentes distintos de a no pasa de una zona a la otra. Formalmente, sea (M, w) un modelo apuntado con $M = (W, R, V)$. Sea π una fórmula proposicional; sea b un agente diferente de a.

Observemos primero cómo, de la defición de valoración V' en $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}$ para cualquier $D_1 \in \mathscr{C}(\pi)$ y $D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi)$, los mundos $v \in W$ y $(v, 0) \in W'$ tienen la misma valoración atómica; por lo tanto, para cada fórmula proposicional π',

$$(M, v) \models \pi' \qquad \text{si y sólo si} \qquad M^P_{a,\pi}\tbinom{D_1}{D_2}, (v, 0) \models \pi'.$$

Para la prueba, desde izquierda a derecha, supongamos $(M, w) \models \Box_b\pi'$; entonces, para cada $u \in W$, $R_b wu$ implica $(M, u) \models \pi'$. Consideremos ahora el conjunto de todos los sucesores R'_b de $(w, 0)$ en un modelo $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}$ para un arbitrario $D_1 \in \mathscr{C}(\pi)$ y $D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi)$; de la definición de R'_b, el conjunto viene dado por $\{(u, 0) \in W' \mid R_b wu\}$. Entonces, si $(u, 0)$ está en tal conjunto, entonces $R_b wu$ y por lo tanto $(M, u) \models \pi'$ así que, por la observación inicial, $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (u, 0) \models \pi'$. Dado que $(u, 0)$ es un sucesor arbitrario R'_b de $(w, 0)$, $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 0) \models \Box_b\pi'$; y teniendo en cuenta que D_1 y D_2 son arbitrarios, $(M, w) \models [\ddagger_a^P \pi]\Box_b\pi'$.

De derecha a izquierda, supongamos $(M, w) \models [\ddagger_a^P \pi]\Box_b\pi'$. Entonces, para cualquier $D_1 \in \mathscr{C}(\pi)$ y $D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi)$,$M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 0) \models \Box_b\pi'$ y por tanto, para cada $(u, k) \in W'$, si $R'_b(w, 0)(u, k)$ entonces $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (u, k) \models \pi'$. Ahora tomemos cualquier $u \in W$ tal que $R_b wu$. Por su defición, $R'_b(w, 0)(u, 0)$ y por tanto, $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (u, 0) \models \pi'$. Pero entonces, por la observación inicial, $(M, u) \models \pi'$. Por lo tanto, $(M, w) \models \Box_b\pi'$, como queríamos. ■

No obstante, en el supuesto razonable de consistencia, el conocimiento epistémico de todos los agentes (incluyendo el olvidadizo) cambia.

Proposición 245.
Si π es una fórmula proposicional distinta de una tautología y una contradicción e $i \in Ag$, entonces $\mathcal{KD} \models [\ddagger_a^P \pi]\Box_i(\neg\Box_a\pi \wedge \neg\Box_a\neg\pi)$

Demostración. La observación clave es que, aunque los mundos del modelo original y los de la 'zona 0' son proposicionalmente equivalentes (observación inicial de la prueba de la proposición 244), ellos no son modalmente equivalentes, dado que en el nuevo modelo estos mundos tienen flechas de accesibilidad para el agente olvidadizo a. Formalmente, sea (M, w) un modelo apuntado con $M = (W, R, V)$; sea π una fórmula proposicional y tomemos $D_1 \in \mathscr{C}(\pi)$ y $D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi)$ arbitrarios.

Para agentes b diferentes de a, consideremos el conjunto de todos los sucesores R'_b de $(w, 0)$ en $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}$; a partir de la definición de R'_b este conjunto viene dado por $\{(u, 0) \in W' \mid R_b wu\}$. Ahora tomemos cualquier elemento $(u, 0)$ en tal conjunto y centrémonos en su primera componente u. Dado que M es serial, hay un $v \in W$ tal que $R_a uv$; de esto y de la definición de R'_a se sigue que tanto $(v, 0)$ como $(v, 1)$ son sucesores R'_a de $(u, 0)$. Si $(M, v) \models \pi$ entonces $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (v, 0) \models \pi$ y $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (v, 1) \models \neg\pi$ (lema 238); en caso contrario, $(M, v) \models \neg\pi$ así que $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (v, 0) \models \neg\pi$ y $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (v, 1) \models \pi$ (lema 238 de nuevo). En ambos casos $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (u, 0) \models \Diamond_a\pi \wedge \Diamond_a\neg\pi$, y por lo tanto $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (u, 0) \models \neg\Box_a\pi \wedge \neg\Box_a\neg\pi$. Dado que $(u, 0)$ es un sucesor arbitrario R'_b de $(w, 0)$, entonces $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 0) \models \Box_b(\neg\Box_a\pi \wedge \neg\Box_a\neg\pi)$; dado que D_1 y D_2 son arbitrarios, podemos establecer que $(M, w) \models [\ddagger_a^P \pi]\Box_b(\neg\Box_a\pi \wedge \neg\Box_a\neg\pi)$.

Para el agente a, el conjunto de sucesores R'_a de $(w, 0)$ en $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}$ tiene más elementos, puesto que viene dado por $\{(u, k) \in W' \mid R_b wu \wedge k \in \{0, 1\}\}$. Sin embargo, los elementos extras también satisfacen la propiedad dado que, de nuevo por la serialidad de M, cada $(u, 1)$ en tal conjunto pueden alcanzar, via R'_a, tanto un mundo que satisfaga π como otro que satisfaga $\neg\pi$. Entonces, $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (u, 1) \models \neg\Box_a\pi \wedge \neg\Box_a\neg\pi$, y por lo tanto, $(M, w) \models [\ddagger_a^P \pi]\Box_a(\neg\Box_a\pi \wedge \neg\Box_a\neg\pi)$. ∎

8.4. Olvidar-si secretamente

Definición 246 (Lenguaje $\mathcal{L}^{Ag}_{\Box\ddagger^S}$).
El lenguaje $\mathcal{L}^{Ag}_{\Box\ddagger^S}$ extiende $\mathcal{L}^{Ag}_{\Box}$ con expresiones de la forma $[\ddagger_a^S \pi]\varphi$ con π una fórmula proposicional y $a \in Ag$ un agente, que se lee como después de que el

agente a secretamente olvide-si π, φ es el caso. *Expresiones de la forma* $\langle \ddagger_a^S \pi \rangle \varphi$ *se definen de la manera estándar (como* $\neg[\ddagger_a^S \pi]\neg\varphi$*).*

Definición 247 (Olvido secreto)**.**
Sea $M = (W, R, V)$ *un modelo,* $a \in Ag$ *un agente,* π *una fórmula proposicional y* D_1 *y* D_2 *dos cláusulas no tautológicas finitas. El modelo* $M^S_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2} = (W', R', V')$ *viene dado por:*

- $W' := W \times \{0, 1, 2\}$*;*
- *para el agente* a *y cada* $b \in Ag$*, con* $b \neq a$*,*

$$R'_a := \{((w, i), (u, j)) \in W' \mid R_a wu,\ i, j \in \{0, 1\}\} \cup \{((w, 2), (u, 2)) \in W' \mid R_a wu\}$$
$$R'_b := \{((w, i), (u, 2)) \in W' \mid R_b wu \text{ y } i \in \{0, 1, 2\}\}$$

- *para cada* $p \in Var$ *y* $w \in W$*:*
  - $(w, k) \in V'(p)$*, con* $k \in \{0, 2\}$*, si y sólo si* $w \in V(p)$
  - $(w, 1) \in V'(p)$ *si y sólo si al menos uno de los siguientes se mantiene*
    - $w \in V(p)$ *y* $(M, w) \models \pi$ *y* $p \notin D_1$*, o*
    - $w \in V(p)$ *y* $(M, w) \models \neg\pi$ *y* $p \notin D_2$*, o*
    - $(M, w) \models \pi$ *y* $\neg p \in D_1$*, o*
    - $(M, w) \models \neg\pi$ *y* $\neg p \in D_2$*.*

El dominio en $M^S_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}$ tiene tres tipos de mundos: los de la forma $(w, 0)$ y $(w, 2)$ preservan la evaluación original, pero en los de la forma $(w, 1)$ todos los literales, bien de D_1 o bien de D_2, han sido hecho falsos, de acuerdo con que π se mantenga no no en w (exactamente como en $M^P_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}$). Con respecto a la accesibilidad, las 'zona 0' y la 'zona 1' son accesibles solamente a los agentes a; el resto de los agentes sólo pueden concebir mundos en la zona 2. Ahora, la interpretación semántica,

Definición 248 (Satisfacción para $\mathcal{L}^{Ag}_{\Box\ddagger^S}$)**.**
Sea $M = (W, R, V)$ *un modelo y* w *un elemento de* W*. La definición 231 se extiende a fórmulas en* $\mathcal{L}^{Ag}_{\Box\ddagger^S}$ *con una nueva cláusula.*

$$(M, w) \models [\ddagger_a^S \pi]\varphi \quad \text{si y sólo si} \quad M^S_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 0) \models \varphi \text{ para todo}$$

$$D_1 \in \mathscr{C}(\pi), D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi).$$

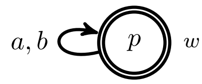

Fig. 5 (8.4): Modelo epistémico multiagente apuntado (ejemplo 249).

Ejemplo 249.
Consideremos el modelo apuntado (M, w) en el que a y b conocen p.

Dado que $\mathscr{C}(p) = \{\{p\}\}$ y $\mathscr{C}(\neg p) = \{\{\neg p\}\}$, las únicas cláusulas que pueden considerarse cuando el agente a secretamente olvida-si p son $D_1 = \{p\}$ y $D_2 = \{\neg p\}$. El modelo apuntado resultante es:

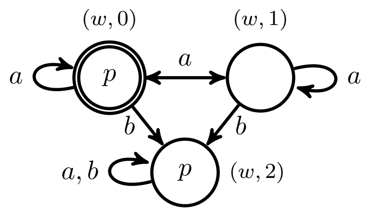

Fig. 6 (8.4): Modelo epistémico multiagente apuntado tras ejecutarse una acción de olvidar-si secretamente (ejemplo 249).

Observemos cómo, mientras los mundos $(w, 0)$ y $(w, 2)$ tienen la misma valoración atómica, el mundo $(w, 1)$ falsifica p. Con respeto a las relaciones de accesibilidad, desde el punto de evaluación el agente a considera la posibilidad de satisfacer p, $(w, 0)$, así como otro considera la de falsificarlo, $(w, 1)$. Por otro lado, desde el punto de evaluación el agente b considera sólo una posibilidad, $(w, 2)$, en la que todo es como antes. Así,

$$(M, w) \models (\Box_a p \wedge \Box_b \Box_a p) \wedge [\ddagger_a^S p](\neg \Box_a p \wedge \Box_b \Box_a p).$$

Una prueba similar a la de la proposición 240 muestra que, bajo la suposición razonable de consistencia, después de dicha operación el agente olvidadizo realmente ha olvidado la fórmula relevante. Sin embargo, ahora la totalidad del conocimiento del resto de los agentes se mantiene intacto.

Proposición 250.
Sea π una fórmula proposicional distinta de una tautología y una contradicción; sean a y b agentes diferentes. Para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{\Box}^{Ag}$,

$$\models \Box_b \varphi \leftrightarrow [\ddagger_a^S \pi] \Box_b \varphi.$$

Demostración. La prueba usa un argumento de bisimulación. Tomemos cualquier modelo $M = (W, R, V)$ y cualesquiera $D_1 \in \mathscr{C}(\pi)$ y $D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi)$ con π una fórmula proposicional contingente. Dada la definición 247 la siguiente relación entre los dominios de M y $M^S_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}$ es una At^*-bisimulación:

$$Z := \{(u, (u, 2)) \in (W \times W') \mid u \in W\}.$$

Por lo tanto, para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{L}^{Ag}_{\Box}$ y cada $u \in W$, $(M, u) \vDash \varphi$ si y sólo si $M^S_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (u, 2) \vDash \varphi$.

Para la actual prueba, sean a y b dos agentes diferentes, π una fórmula proposicional contingente y tomemos cualquier modelo apuntado (M, w) con $M = (W, R, V)$. De izquierda a derecha, supongamos $(M, w) \vDash \Box_b\varphi$; entonces para cada $u \in W$, R_bwu implica $(M, u) \vDash \varphi$. Ahora, tomemos cualesquiera $D_1 \in \mathscr{C}(\pi)$ y $D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi)$, y consideremos el conjunto de sucesores R'_b de $(w, 0)$: a partir de la definición de R'_b tal conjunto viene dado por $\{(u, 2) \in W' \mid R_bwu\}$. Entonces, para cada $(u, 2)$ en tal conjunto, R_bwu tal que $(M, u) \vDash \varphi$ y por lo tanto $M^S_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (u, 2) \vDash \varphi$. En consecuencia, $M^S_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 0) \vDash \Box_b\varphi$ y por tanto $(M, w) \vDash [\ddagger^S_a\pi]\Box_b\varphi$.

De derecha a izquierda, tomemos cualesquiera $D_1 \in \mathscr{C}(\pi)$ y $D_2 \in \mathscr{C}(\neg\pi)$ y supongamos $M^S_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (w, 0) \vDash \Box_b\varphi$. Entonces para cada $(u, k) \in W'$, $R'_b(w, 0)(u, k)$ implica $M^S_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (u, k) \vDash \varphi$. Ahora consideremos el conjunto de sucesores R_b de w: para cada u en tal conjunto, R_bwu y entonces, de la definición de R'_b, $R'_b(w, 0)(u, 2)$; así pues, $M^S_{a,\pi}\binom{D_1}{D_2}, (u, 2) \vDash \varphi$ y, por tanto, $(M, u) \vDash \varphi$. En consecuencia, $(M, w) \vDash \Box_b\varphi$. ■

Capítulo 9

Conclusiones

Tras recorrer los anteriores ocho capítulos, quienes hayan alcanzado este punto probablemente se hayan forjado la opinión de que ésta es una tesis cuya lectura es exigente con el lector, tanto por las ideas que maneja como por la terminología y el simbolismo empleados. En nuestro descargo diremos que quienes se dedican a la Lógica o materias afines, en buena medida, están 'curados de espanto'; pero, sobre todo, asumimos al inicio de esta investigación que era necesario realizar un estudio que reuniese las cualidades de amplitud, profundidad y rigor:

- Una amplitud que permitiese concebir de un modo más general la abducción y, a la vez, que propiciase la adopción de nuevos enfoques particulares (todo lo cual ha estimulado la propuesta de nuevos tipos de inferencia abductiva).

- Suficiente profundidad para poder descubrir los caracteres esenciales a esa diversidad tipológica así como los vínculos entre los distintos tipos de abducción y también entre éstos y otras relaciones inferenciales.

- Y todo ello con el suficiente rigor para obtener respuestas bien fundadas acerca de las cuestiones por las que se interesa.

La profundidad y el rigor, junto al deseo de abrir caminos nuevos a la investigación sobre la abducción, bien justifican el esfuerzo que requiere su lectura y más aún su escritura y su elaboración mental. Otra cosa distinta es si la opción que aquí hemos tomado para la creación de la terminología ha sido o no la mejor. En el prólogo expusimos el cómo y el porqué de ella, siendo conscientes de que tenía ventajas e inconvenientes –aunque a las otras opciones les ocurre algo parecido–.

Por ejemplo, otra manera, en cierto modo 'opuesta', habría sido la que podríamos denominar 'estrategia Ikea', que prima la asignación de rótulos cortos y pegadizos, pero a partir de los cuales difícilmente se puede anticipar lo que subyace (algunos divulgadores de la Ciencia y algunas corrientes de la Filosofía hace ya algún tiempo que explotan esto). Como se indicó en el prólogo, aquí íbamos a apostar (en caso de conflicto) por la 'significatividad' y por el seguimiento de un patrón de construcción terminológica que fuese coherente antes que por otras cualidades estéticas o pedagógicas.

Algo análogo sucede en relación con el uso de un alto grado de formalización, puesto que ciertamente hace más árida la lectura del texto y, al menos en un principio, puede ser un obstáculo para la captación intuitiva de algunos conceptos o algunas de sus propiedades. Sin embargo, de nuevo las ventajas parecen superar a los inconvenientes y, buena muestra de ello es que algunas pruebas pueden realizarse en muy pocas líneas, además de que el formalismo ha contribuido a reducir la extensión de esta memoria y a la evitación de ambigüedades.

Después de estos comentarios sobre la 'forma', ahora me centraré exclusivamente en el contenido. Dijimos al comienzo de esta obra que la abducción a menudo ha sido estudiada bajo el condicionamiento de que se trata de un tipo de inferencia que está subordinada a la actividad científica y que, quizás, ello ha inhibido, o al menos retrasado, que se haya desarrollado en ciertas direcciones (un buen ejemplo de esto es lo que aquí llamamos abducción sistémica, que no está vinculada a los procesos de la denominada Ciencia Normal y cuya propuesta aún no ha cumplido una década). Sin embargo, nosotros defendemos que la abducción es un modo de inferencia con interés en sí mismo y sobre la que es necesario seguir pensando desde múltiples perspectivas. Así pues, aunque es en las Ciencias Empíricas donde se ha mostrado hasta ahora más útil (probablemente porque es un terreno apto para la aparición de 'hechos sorprendentes'), habría que profundizar en su papel en otras áreas académicas y en fenómenos cotidianos como puede ser el uso del lenguaje humano. Poner énfasis, en línea con lo que aquí hemos defendido, en que los llamados *detonantes abductivos* pueden ser meras situaciones hipotéticas y en el valor anticipatorio de las conclusiones así obtenidas, contribuye sin duda a esto último.

En particular, nos parece que la abducción estaba y sigue estando insuficientemente estudiada desde un punto de vista puramente lógico. Un buen indicio de esto es que los modelos que habitualmente se usan en esta disciplina normalmente son excesivamente simplifidores, contrastando con la riqueza de elementos y matices que incorporan, por ejemplo, los estudios realizados desde la Filosofía de la Ciencia y desde la Psicología del Razonamiento Científico. Como glosábamos en el prólogo, entre estas últimas y la Lógica existe un 'círculo virtuoso' que debe ser potenciado en beneficio de todas las partes.

Intentando 'destilar' lo esencial de la abducción, según nuestra manera de concebirla ello radica en su carácter de relación inferencial mediada y en su necesario despliegue en un proceso con dos polo: el inicial fracaso inferencial y la ulterior satisfacción del requisito justificativo. A partir de estos requisitos básicos podemos desarrollarla en multitud de direcciones y no parece haber motivos para mantener algunas de las 'ataduras' que en muchas ocasiones se le imponen. Por ello cerrábamos el primer capítulo diciendo que en absoluto es arriesgado afirmar que la abducción es un tipo de inferencia mucho más diverso de lo que su concepción estándar nos ha hecho imaginar hasta ahora; aunque, en este sentido, la situación es en muchos puntos coincidente con la de otro tipo de inferencia con la que comparte una buena cantidad de elementos: la analogía. Quizás el motivo sea común y tenga que ver con 'la alargada sombra' que sobre cualquier otro modo de razonamiento proyecta la inferencia deductiva. Queriendo poner nuestro granito de arena en la superación de esa situación, en la última sección del primer capítulo nos hemos esforzado por hacer una propuesta que generaliza sustancialmente la concepción sobre la abducción comúnmente aceptada en la actualidad, dando unas cuantas pinceladas para su modelización en cualesquiera sistemas informativos que posean al menos otro mecanismo inferencial que actúe como relación inferencial mediadora (sea esta última de naturaleza deductiva o no). Incluso si nos restringimos sólo al caso de la abducción sobre inferencia deductiva, también nos parece necesario (especialmente si se desea aplicar en el ámbito práctico) abrir la posibilidad de que las expresiones involucradas en su formulación lingüística sean normas, instrucciones particulares, enunciados práxicos u otros elementos lingüísticos no veritativos.

Pero en la investigación casi nunca es posible alcanzar todos los retos en un solo proyecto, por lo que habitualmente resulta necesario señalar objetivos más concretos y concentrarse en la consecución de los mismos. Es por ello que, aunque todos los capítulos que siguen al primero tienen una motivación en buena medida coincidente con lo expuesto en párrafos precedentes, hemos establecido que todos sus desarrollos se desenvuelvan siempre dentro del marco deductivo y se refieran a entidades veritativas exclusivamente.

En línea con lo dicho, y partiendo de una modelización formal muy próxima a la que hemos considerado como *versión canónica* de la abducción ordinaria, hemos presentado en un nivel metalingüístico (no vinculado a ningún sistema lógico concreto) diversas propuestas que, además de liberar este concepto de sus dependencias de las lógicas clásicas, lo generalizan de distintas maneras (por ejemplo, contemplando la posibilidad de que el problema abductivo o/y la solución sean todo un conjunto de fórmulas, o también incorporando la posibilidad de que se establezcan condiciones adicionales a las que ya debe cumplir la versión inicial, a la que hemos etiquetado como *plana*). A partir de la citada posibilidad que admite nuevas condiciones, y que constituye lo que hemos denominado como *abducción ordinaria cualificada*, hemos elaborado los conceptos de *abducción ordinaria cualificada preferencial* y *abducción ordinaria cualificada preferencial estratégica*. Además, en todo este proceso de generalización y diversificación se han incorporado componentes que no se recogen en las formalizaciones que encontramos en la literatura lógica consultada e igualmente se han hecho distinciones novedosas respecto de algunos elementos que sí han sido considerados con anterioridad. Todo ello ha permitido que se pueda expandir considerablemente la tipología de inferencias abductivas ordinarias que aparecen en los estudios sobre esta materia.

En el caso de la abducción sistémica también hemos acometido esa doble tarea de sacar a la luz ciertas componentes que no habían sido previamente contempladas y de elaborar una versión que, partiendo de la que aquí es considerada como canónica, permita aplicarla en muchas otras situaciones que no reúnen los requisitos que tácitamente se recogen en las escasas publicaciones que hasta la fecha han abordado esta cuestión. Extendemos a ella algunas de las distinciones que ya fueron consideradas en relación con la abducción ordinaria y, de este modo, reforzamos los argumentos que defienden la naturaleza esencialmente abductiva de este tipo de inferencia. Similar proceso hemos seguido y similares logros hemos alcanzado en el caso de la novedosa abducción holística, la cual presentamos como una manera de unificar y superar a los dos grandes modos que ya hemos señalado: ordinario y sistémico.

Creemos que un estudio profundo de una relación inferencial debe afrontar su nivel puramente estructural, aunque somos conscientes que en el mismo no queda todo determinado y en cualquier caso hay que completarlo con otros estudios en los que ya se ha agregado información acerca del lenguaje o de la semántica concreta del sistema lógico. Nuestro estudio estructural, que se aparta en algunas exigencias de los más comunes en la literatura, fijó inicialmente la mirada en las relaciones inferenciales binarias y dentro de ellas, de manera especial, en la deducción clásica y en una más novedosa que aquí denominamos *deducción plural*. Ambas, junto a la también novedosa relación de *deducción cualificada*, son estudiadas por nosotros con un fin puramente instrumental (es decir, en la medida que nos han conducido a ellas las necesidades surgidas en nuestra investigación de la inferencia abductiva y también en la medida que su estudio aporta luz al de nuestro objetivo final).

Para cada uno de los tipos de relaciones inferenciales binarias que hemos distinguido se ha presentado un buen número de propiedades y hemos indagado cuáles se derivan de otras consideradas básicas. En el caso de las relaciones inferenciales ternarias, dado que son nuestro objetivo, el estudio tipológico es más detallado si cabe. En todos los casos hemos indicado qué restricciones se tienen que imponer y qué propiedades se satisfacen en cada uno de los tipos. El haberlo hecho paso a paso, 'aislando' cada uno de los requisitos elementales que se pueden agregar al caso base (que es una relación inferencial que coincide con la que Atocha Aliseda denomina *inferencia abductiva*), nos permite tener intuiciones sobre otros tipos aquí no abordados explícitamente pero que se pueden construir mediante la adecuada combinación de los citados caracteres básicos.

Del mismo modo, hemos probado de manera rigurosa importantes resultados (llamados teoremas de representación) sobre la caracterización estructural de ciertos tipos de relaciones inferenciales abductivas, dando con ello respuesta a problemas que han permanecido abiertos casi dos décadas.

Finalmente hemos presentado varias aportaciones que o bien facilitan la modelización de ciertos tipos de inferencia abductiva en sistemas lógicos no clásicos (concretamente pertenecientes al ámbito de la Lógica Epistémica Dinámica, entendida en sentido amplio) o bien mejoran varias de sus propiedades con el objetivo de posibilitar su implementación en herramientas informáticas. En concreto nuestro tratamiento lógico de la acción de olvidar se muestra como un buen candidato para la modelización de la abducción ante anomalía en el ámbito citado.

Esperamos que todo aquel que haya culminado el esfuerzo de leer esta memoria de investigación encuentre que ésta le ha permitido ensanchar y profundizar de algún modo en su concepción de la *abducción*.

Apéndice A

Notación lógica, abreviaturas y convenciones tipográficas

A lo largo del texto hacemos un uso especializado de ciertos símbolos auxiliares del lenguaje natural: las comillas tipográficas («») se usan para delimitar expresiones en lengua extranjera que no han sido asumidas por nuestra lengua (algunas expresiones latinas que son de uso común en castellano simplemente aparecen en tipografía cursiva), las comillas simples (' ') para expresiones empleadas en sentido figurado, mientras que las comillas inglesas (" ") serán usadas para las citas literales y menciones de símbolos (las expresiones con función metalingüística y otras expresiones que han querido ser destacadas van en tipografía cursiva).

En el desarrollo de nuestra investigación usamos una serie de símbolos metalingüísticos para representar los operadores lógicos de dicho nivel. En concreto, el negador, el conjuntor, el conjuntor iterado, el disyuntor inclusivo, el disyuntor exclusivo, el disyuntor iterado, el implicador, el coimplicador, el cuantificador universal, el cuantificador existencial y el cuantificador unitario son, respectivamente: "$\sim$", "&", "$\bigwedge$", "$\triangledown$", "$\underline{\triangledown}$", "$\bigvee$", "$\Rightarrow$", "$\Leftrightarrow$", "$\forall$", "$\exists$" y "$!\exists$". En el caso de la equivalencia metalingüística y su negación también usamos, respectivamente, los símbolos "$\equiv$" y "$\not\equiv$" con el fin de mejorar la legibilidad de las expresiones simbólicas. Además, usamos como signos metalingüísticos los símbolos habituales de la Teoría de Conjuntos (en particular, los de pertenencia, inclusión, igualdad y las operaciones conjuntistas): $\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\nsubseteq$, $\subsetneq$, $=$, $\neq$,... Dado que necesitamos también símbolos para los operadores meta-metalingüísticos (concretamente, los análogos a los ya mencionados, pero para este nuevo nivel), empleamos para cada uno de ellos el correspondiente operador metalingüístico distinguido con un punto sobre él (por ejemplo, “$\dot{\Rightarrow}$” para el implicador meta-metalingüístico). En la presentación de las reglas lo habitual es usar el símbolo “;” en lugar del conjuntor meta-metalingüístico y aquí hemos seguido esa costumbre en la notación vertical, pero en la notación horizontal usaremos “$\dot{\&}$”.

Mediante el símbolo “$\Longrightarrow$” designamos una relación de consecuencia lógica, sea o no de tipo deductivo, que no ha sido fijada como una en particular, aunque sobre ella se pueden haber establecido ciertas propiedades que debe cumplir. Empleamos otros símbolos que se distinguen del anterior mediante la yuxtaposición de una o más marcas en posición superíndice o/y subíndice; así, por ejemplo: “$\Longrightarrow^{\complement}$ ”, “$\Longrightarrow^{*}$ ”, “$\Longrightarrow^{*\complement}$ ”, “$\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$ ”, “$\Longrightarrow^{\bullet *}_{m}$ ”,... Con ello designamos, respectivamente: una relación complementaria de otra relación inferencial singular, una relación inferencial plural, la complemtaria de una relación inferencial plural, una relación inferencial mediada ternaria s-s, una relación análoga a la anterior salvo que es s-p,...

Como se puede colegir de lo que acabamos de decir, para distinguir las relaciones de consecuencia lógica que están mediadas de las relaciones de consecuencia lógica que son mediadoras, usamos el símbolo “$\Longrightarrow_{m}$” con los superíndices y sub-subíndices que correspondan para aquéllas y reservamos el inicial (“$\Longrightarrow$”) con los superíndices y sub-subíndices oportunos para éstas. En este texto no manejamos relaciones inferenciales mediadas de otra aridad que la citada y además todas las relaciones inferenciales ternarias que empleamos son mediadas, por lo que usamos el símbolo “$\Longrightarrow_{m}$” para referirnos exclusivamente a las relaciones inferenciales mediadas de aridad 3 y también habitualmente omitimos la indicación de la aridad de la relación inferencial mediada por cualquier otro recurso lingüístico. A la relación de consecuencia entre subfamilias de fórmulas la adjetivaremos como *plural* –y la simbolizamos como “$\Longrightarrow^{*}$ ”–, y a la habitual la calificamos, cuando convenga destacar tal carácter, como *singular* o *clásica* –para ella mantenemos el símbolo inicial “$\Longrightarrow$”–.

Usamos los símbolos “$\Vdash_{\_}$”, “$\models_{\_}$” y “$\vdash_{\_}$” –donde en lugar de “$\_$” irá la etiqueta que corresponda (“d”, “D”, “ao”, “aO”, “Ao” o “AO”)– si queremos indicar que se trata de un tipo de relación inferencial particular. La diferencia entre los tres símbolos inferenciales es la siguiente: cuando queremos indicar que se trata de una relación de consecuencia, pero no deseamos precisar si está dada semánticamente o sintácticamente, usamos el símbolo “$\Vdash_{\_}$”; en el caso de que sí se quiera indicar dicho carácter, usamos “$\vDash_{\_}$” y “$\vdash_{\_}$” para la versión semántica y sintáctica, respectivamente. La letra “d” como subíndice de la relación inferencial quiere señalar que se trata de la deducción clásica (la cual a menudo se omite cuando por el contexto esté claro de cuál se trata) y la correspondiente mayúscula indica que es la relación inferencial deductiva plural. La relación de consecuencia abductiva ordinaria s-s plana es simbolizada por “$\Vvdash_{ao}$”, la análoga s-p por “$\Vvdash_{aO}$”, la p-s por “$\Vvdash_{Ao}$” y la p-p por “$\Vvdash_{AO}$”.

A menudo las proposiciones metalingüísticas cuyo símbolo principal es el operador metalingüístico “$\sim$” y cuyo símbolo secundario es un relator inferencial son escritas ‘fusionando’ ambos símbolos en uno solo; por ejemplo: “$\not\Longrightarrow$”, “$\not\Longrightarrow^{\mathtt{C}}$”, “$\not\Longrightarrow^{*}$”, “$\not\Longrightarrow^{*\mathtt{C}}$”, “$\not\Longrightarrow^{\bullet\bullet}_{m}$”, “$\not\Longrightarrow^{\bullet *}_{m}$”, “$\not\Vvdash_{\_}$”, “$\nvDash_{\_}$”, “$\nvdash_{\_}$”...

Las cadenas las podemos representar anotando sus elementos entre el símbolo de apertura “$\lceil$” y el de cierre “$\rceil$”. Por lo tanto, una cadena de n elementos puede ser anotada como $\lceil(i_1, A_1), ..., (i_n, A_n)\rceil$, o mejor, con la etiqueta posicional en notación de subíndice: $\lceil A_{i_1}, ..., A_{i_n}\rceil$. Si se desea, también se puede representar con notación de conjuntos: $\{(i_1, A_1), ..., (i_n, A_n)\}$ (obviamente $i_j \in \mathbb{N}^*$ y $A_j \in FOR(\mathcal{L})$). La cadena vacía es simbolizada como “$\lceil\ \ \rceil$”. Por otra parte, $\lceil A\rceil$ es otra manera de escribir la cadena unitaria $\{(i, A)\}$ sin preocuparnos por la primera componente del par. Dada una cadena finita de fórmulas X, designamos mediante $\bar{X}$ a su conjunto de fórmulas asociado, el cual se define como la segunda proyección de dicha cadena (es decir, el conjunto imagen de la misma). Dadas dos cadenas finitas X e Y, su concatenación (que designamos mediante el símbolo “**.**”) es una nueva cadena Z.

Mediante el símbolo “$\langle\ \ \rangle$” simbolizamos la familia vacía (dado que una familia es un conjunto, también podríamos haber usado el habitual símbolo “$\varnothing$” con este fin, pero en ciertas ocasiones resultará preferible no usar ese símbolo por distintos motivos, entre ellos por su parecido con alguna de las letras griegas usadas con otros fines). Mediante $(\cdot\mathcal{F})$ representamos la concatenación generalizada de una familia de subfamilias. Cuando ésta sea finita, en lugar de la notación anterior (con el operador en posición prefija) usaremos otra en la que el símbolo “$\cdot$” aparecerá en posición interfija, mediando entre cada par de subfamilias concatenadas.

Apéndice B

Denominaciones abreviadas correspondientes a los conjuntos de reglas que aparecen en el texto

- **[At-c1]:** conjunto de reglas propuestas por Atocha Aliseda para la deducción clásica cuyas premisas forman una cadena de fórmulas y cuya conclusión es una sola fórmula.
- **[At-c2]:** conjunto de reglas propuestas por Atocha Aliseda para la abducción ordinaria clásica cuya teoría-base es una cadena de fórmulas y cuyo objeto del problema y cuya solución son cada uno de ellos una sola fórmula.
- **[‘At’-c2b]:** conjunto de reglas que coincide con el propuesto por Atocha Aliseda para la abducción ordinaria clásica cuya teoría-base es una cadena de fórmulas y cuyo objeto del problema y cuya solución son cada uno de ellos una sola fórmula, salvo que se ha sustituido la inicial regla de corte simultáneo por la versión de la transitividad menos general.
- **[‘At’-s1]:** conjunto de reglas análogas a las propuestas por Atocha Aliseda para la deducción clásica pero cuyas premisas forman una subfamilia de fórmulas y cuya conclusión es una sola fórmula.
- **[‘At’-s2]:** conjunto de reglas análogas a las propuestas por Atocha Aliseda para la abducción ordinaria clásica pero cuya teoría-base es una subfamilia de fórmulas y cuyo objeto del problema y cuya solución son cada uno de ellos una sola fórmula.

- **[‘At’-s2b]:** conjunto de reglas que coincide con el de las análogas a las propuestas por Atocha Aliseda para la abducción ordinaria clásica pero cuya teoría-base es una subfamilia de fórmulas y cuyo objeto del problema y cuya solución son cada uno de ello una sola fórmula, salvo que se ha sustituido la inicial regla de corte simultáneo por la versión de la transitividad menos general.

- **[NP-c1]:** conjunto de reglas que, entre otras, puede satisfacer una relación inferencial binaria singular cuyas premisas forman una cadena de fórmulas y cuya conclusión es una sola fórmula.

- **[NP-c1b]:** conjunto de reglas que, entre otras, puede satisfacer una relación inferencial binaria singular cuyas premisas forman una cadena de fórmulas y cuya conclusión es una sola fórmula, siendo la única diferencia respecto de la anterior que se ha sustituido la inicial regla de transitividad por otra menos general.

- **[NP-s1]:** conjunto de reglas que, entre otras, puede satisfacer una relación inferencial binaria singular cuyas premisas forman una subfamilia de fórmulas y cuya conclusión es una sola fórmula.

- **[NP-s1b]:** conjunto de reglas que, entre otras, puede satisfacer una relación inferencial binaria singular cuyas premisas forman una subfamilia de fórmulas y cuya conclusión es una sola fórmula, siendo la única diferencia respecto de la anterior que se ha sustituido la inicial regla de transitividad por otra menos general.

- **[NP-s2]:** conjunto de reglas que, entre otras, puede satisfacer una relación inferencial binaria plural cuyas premisas y conclusiones forman sendas subfamilias de fórmulas.

- **[NP-s2b]:** conjunto de reglas que, entre otras, puede satisfacer una relación inferencial binaria plural cuyas premisas y conclusiones forman sendas subfamilias de fórmulas, siendo la única diferencia respecto de la anterior que se ha sustituido la inicial regla de transitividad por otra menos general.

- **[NP-s2c]:** conjunto de reglas que, entre otras, puede satisfacer una relación inferencial binaria plural cuyas premisas y conclusiones forman sendas subfamilias de fórmulas, siendo la única diferencia respecto de las dos anteriores que se ha sustituido la correspondiente regla de transitividad por otra aún menos general.

- **[NP-s3]:** conjunto de reglas que, entre otras, puede satisfacer una relación inferencial ternaria mediada s-s justificativa (tanto si es posicionalmente indiferente como si no lo es) cuya primera componente es una subfamilia de fórmulas y cuyas segunda y tercera componentes son cada una de ellas una sola fórmula.

- **[NP-s4]:** conjunto de reglas que, entre otras, puede satisfacer una relación inferencial ternaria mediada s-s justificativa de modo fuertemente / débilmente compatible (en ambos casos tanto si es posicionalmente indiferente como si no lo es) cuya primera componente es una subfamilia de fórmulas y cuyas segunda y tercera componentes son cada una de ellas una sola fórmula.

- **[NP-s5]:** conjunto de reglas que, entre otras, puede satisfacer una relación inferencial ternaria mediada s-s justificativa de modo explicativo (tanto si es posicionalmente indiferente como si no lo es) cuya primera componente es una subfamilia de fórmulas y cuyas segunda y tercera componentes son cada una de ellas una sola fórmula.

- **[NP-s6]:** conjunto de reglas que, entre otras, puede satisfacer una relación inferencial ternaria mediada s-s resolutiva (tanto si es posicionalmente indiferente como si no lo es) cuya primera componente es una subfamilia de fórmulas y cuyas segunda y tercera componentes son cada una de ellas una sola fórmula.

- **[NP-s7]:** conjunto de reglas que, entre otras, puede satisfacer una relación inferencial ternaria mediada p-p justificativa (tanto si es posicionalmente indiferente como si no lo es) cuyas tres componentes son subfamilias de fórmulas.

- **[NP-s8]:** conjunto de reglas que, entre otras, puede satisfacer una relación inferencial ternaria mediada p-p resolutiva (tanto si es posicionalmente indiferente como si no lo es) cuyas tres componentes son subfamilias de fórmulas.

- **[NP:d]:** conjunto de reglas que satisface la deducción clásica cuyas premisas forman un conjunto de fórmulas y cuya conclusión es una sola fórmula.

- **[NP:D]:** conjunto de reglas que satisface la deducción plural cuyas premisas y conclusiones forman sendos conjuntos de fórmulas.
- **[NP:ao]:** conjunto de reglas que satisface la abducción ordinaria s-s cuya teoría-base es un conjunto de fórmulas, cuyo objeto del problema y cuya solución son cada uno de ellos una sola fórmula y cuya relación inferencial mediadora es la deducción clásica que satisface el conjunto de reglas [NP:d].
- **[NP:AO]:** conjunto de reglas que satisface la abducción ordinaria p-p cuya teoría-base, cuyo objeto del problema y cuya solución son cada uno de ellos conjuntos de fórmulas y cuya relación inferencial mediadora es la deducción plural que satisface el conjunto de reglas [NP:D].

Bibliografía

[AGM85] Carlos E. Alchourrón, Peter Gärdenfors, and David Makinson. On the Logic of Theory Change: partial meet contraction and revision functions. *The Journal of Symbolic Logic*, 50(2):510–530, 1985.

[AISV09] Jesús Alcolea, Valeriano Iranzo, Ana Sánchez, and Jordi Valor, editors. *VI Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*. Universidad de Valencia, 2009.

[AL97] Atocha Aliseda Llera. *Seeking explanations: abduction in Logic, Philosophy of Science and Artificial Intelligence*. PhD thesis, Stanford University, 1997.

[AL03] Atocha Aliseda Llera. Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: a structural approach. *Synthese*, 134(1/2):25–44, 2003.

[AL06] Atocha Aliseda Llera. *Abductive reasoning: logical investigations into discovery and explanation*. Springer, 2006.

[AL14] Atocha Aliseda Llera. *La Lógica como herramienta de la razón. Razonamiento ampliativo en la creatividad, la cognición y la inferencia*. College Publications, 2014.

[AMO93] Carlos E. Alchourrón, JosÃ© M. MÃ©ndez, and Raúl Orayen, editors. *Lógica*. Trotta & CSIC, 1993.

[Ang15] Staffan Angere. The logical structure of truthmaking. *Journal of Philosophical Logic*, 44(4):351–374, 2015.

[Apt85] Krzysztof R. Apt, editor. *Logics and models of concurrent systems*. Springer-Verlag, 1985.

[Ard] Dean N. Arden. Delayed-logic and finite-state machines. In *[IEE61]*, pages 133–151.

[Ari82] Aristóteles. *Analíticos primeros. Tratados de Lógica (Órganon)*, volume 1. Gredos, 1982.

[AvB08] Pieter Adriaans and Johan van Benthem, editors. *Philosophy of Information*. North-Holland, 2008.

[BdRV01] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, and Yde Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2001.

[BGMSL12] Cristina Barés Gómez, Sébastien Magnier, and Francisco José Salguero Lamillar, editors. *Logic of Knowledge. Theory and applications*. College Publications, 2012.

[Bit08] Guilherme Bittencourt. Combining syntax and semantics through prime form representation. *Journal of Logic and Computation*, 18(1):13–33, 2008.

[BM04] Alexandru Baltag and Lawrence S. Moss. Logics for epistemic programs. *Synthese*, 139(2):165–224, 2004.

[BMS98] Alexandru Baltag, Lawrence S. Moss, and Slawomir Solecki. The Logic of Public Announcements and Common Knowledge and Private Suspicions. In *[Gil98]*, pages 43–56, 1998.

[BMS99] Alexandru Baltag, Lawrence S. Moss, and Slawomir Solecki. The Logic of Public Announcements, Common Knowledge and Private Suspicions. Technical Report SEN-R9922, CWI, Amsterdam, 1999.

[Bou96] Craig Boutilier. Iterated revision and minimal change of conditional beliefs. *Journal of Philosophical Logic*, 25(3):263–305, 1996.

[BPdGV12] Alfredo Burrieza, Inmaculada Pérez de Guzmán, and Agustín Valverde. Lógicas modales y multimodales. Technical report, Universidad de Málaga, 2012.

[BPPR10] Mats Bergman, Sami Paavola, Ahti-Veikko Pietarinen, and Henrik Rydenfelt, editors. *Ideas in action: Proceedings of the Applying Peirce Conference*. Nordic Pragmatism Network, 2010.

[Brz64] Janusz A. Brzozowski. Derivatives of regular expressions. *Journal of the ACM*, 11(4):481–494, 1964.

[BS08] Alexandru Baltag and Sonja Smets. A qualitative theory of dynamic interactive belief revision. In *[BvdHW08]*, pages 11–58, 2008.

[BSHM10] Olivier Boissier, Amal El Fallah Seghrouchni, Salima Hassas, and Nicolas Maudet, editors. *Proceedings of the Multi-Agent Logics, Languages, and Organisations Federated Workshops (MALLOW 2010). Third International Workshop on Logics for Resource Bounded Agents (LRBA 2010)*. CEUR-WS, 2010.

[BSWZ03] Philippe Balbiani, Nobu-Yuki Suzuki, Frank Wolter, and Michael Zakharyaschev, editors. *Advances in Modal Logic*, volume 4. King's College Publications, 2003.

[BvdHW08] Giacomo Bonanno, Wiebe van der Hoek, and Michael Wooldridge. *Logic and the Foundations of Game and Decision Theory (LOFT7)*. Amsterdam University Press, 2008.

[BZ05] Chitta Baral and Yan Zhang. Knowledge updates: semantics and complexity issues. *Artificial Intelligence*, 164(1-2):209–243, 2005.

[Car50] Rudolph Carnap. *Logical foundations of Probability*. Routledge & Kegan Paul, 1950.

[Car52] Rudolph Carnap. *The continuum of inductive methods*. University of Chicago Press, 1952.

[Car55] Rudolph Carnap. *Statistical and inductive probability*. Galois Institute of Mathematics and Art, 1955.

[Car06] Walter A. Carnielli. Surviving abduction. *Logic Journal of the IGPL*, 14(2):237–256, 2006.

[CCD09] Walter A. Carnielli, Marcelo E. Coniglio, and Itala M.L. D'Ottaviano, editors. *The many sides of Logic*. College Publications, 2009.

[CM87] William F. Clocksin and Christopher S. Mellish. *Programación en Prolog*. Gustavo Gili, 1987.

[CM15] Antonio Campillo and Delia Manzanero, editors. *Los retos de la Filosofía en el siglo XXI. Vol. X (Corredor, C. (ed.): Lógica, Lenguaje y Argumentación)*. Publicacions de la Univèrsitat de Valencia y Red Española de Filosofía, 2015.

[Con71] John H. Conway. *Regular Algebra and finite machines*. Chapman and Hall, 1971.

[Cor83] John Corcoran, editor. *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*. Hackett Publishing, 1983.

[CSS98] Anthony G. Cohn, Lenhart K. Schubert, and Stuart C. Shapiro, editors. *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*. Morgan Kaufmann, 1998.

[DFG08] Marcello D'Agostino, Marcelo Finger, and Dov M. Gabbay. Cut-based abduction. *Logic Journal of the IGPL*, 16(6):431–451, 2008.

[DGCMO15] José Díez, Manuel García-Carpintero, José Martínez, and Sergi Oms, editors. *Actas del VIII Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*. Universitat de Barcelona y Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España, 2015.

[DGHP99] Marcello D'Agostino, Dov M. Gabbay, Reiner Hähnle, and Joachim Posegga, editors. *Handbook of tableau methods*. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[dK92] Johan de Kleer. An improved incremental algorithm for generating prime implicates. In *[Swa92]*, pages 780–785, 1992.

[DSH93] Kosta Dosen and Peter Schroder-Heister, editors. *Substructural logics*. Clarendon Press, 1993.

[Enn68] Robert H. Ennis. Enumerative induction and best explanation. *The Journal of Philosophy*, 65(18):523–529, 1968.

[EPHR89] Mary L. Emrich, Marilyn S. Pfeifer, Mirsad Hadzikadic, and Zbigniew W. Ras, editors. *Proceedings of the Fourth International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems*. Oak Ridge National Laboratory, ORNL/DSRD-24, 1989.

[Etc88] John Etchemendy. Tarski on truth and logical consequence. *Journal of Symbolic Logic*, 53:51–79, 1988.

[Etc90] John Etchemendy. *The concept of logical consequence*. Harvard University Press, 1990.

[Etc08] John Etchemendy. Reflections on consequence. In *[Pat08]*, pages 263–299. 2008.

[EvdMS02] Kai Engelhardt, Ron van der Meyden, and Kaile Su. Modal logics with a linear hierarchy of local propositional quantifiers. In *[BSWZ03]*, pages 9–30, 2002.

[Fan70] Kuni T. Fann. *Peirce's theory of abduction*. Martinus Nijhoff, 1970.

[FC00] Peter A. Flach and Kakas Anthony C., editors. *Abduction and induction. Essays on their relation and integration*. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[FDGCPHA10] David Fernández Duque, Emilio Francisco Gómez-Caminero Parejo, and Ignacio Hernández Antón, editors.

Estudios de Lógica, Lenguaje y Epistemología. IV Jornadas Ibéricas. Fénix Editora, 2010.

[FDNFSM$^+$15] David Fernández Duque, Ángel Nepomuceno Fernández, Enrique Sarrión Morrillo, Fernando Soler Toscano, and Fernando R. Velázquez Quesada. Forgetting complex propositions. *Logic Journal of the IGPL*, 23(6):942–965, 2015.

[Fer98] Eduardo L. Fermé. On the Logic of Theory Change: contraction without recovery. *Journal of Logic, Language and Information*, 7(2):127–137, 1998.

[Fer01] Eduardo L. Fermé. Five faces of recovery. In *[WR01]*, pages 247–259. 2001.

[FH05] Aidan Feeney and Evan Heit, editors. *Inductive reasoning: experimental, developmental, and computational approaches*. Cambridge University Press, 2005.

[FHMV95] Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, Yoram Moses, and Moshe Y. Vardi. *Reasoning about knowledge*. The MIT Press, 1995.

[Fit09] Melvin Fitting. Intensional Logic. In *[Zal]*. 2009.

[FK96] Peter A. Flach and Anthony C. Kakas, editors. *Proceedings of the ECAI'96. Workshop on Abductive and Inductive Reasoning*, 1996.

[FK00] Peter A. Flach and Anthony C. Kakas. Abductive and inductive reasoning: background and issues. In *[FC00]*, pages 1–27. 2000.

[FKMR06] Peter A. Flach, Antonis C. Kakas, Lorenzo Magnani, and Oliver Ray, editors. *Proceedings of AIAI06*. University of Bristol, 2006.

[FL14] Eduardo L. Fermé and João Leite, editors. *Logics in Artificial Intelligence – 14th European Conference, JELIA. Proceedings*. Springer, 2014.

[Fla96] Peter A. Flach. Abduction and induction: syllogistic and inferential perspectives. In *[FK96]*, 1996.

[FM62] Herbert Feigl and Grover Maxwell, editors. *Minnesota studies in the Philosophy of Science*, volume III. University of Minnesota Press, 1962.

[FM09] Luis Fernández Moreno, editor. *Language, Nature and Science: new perspectives*. Plaza y Valdés, 2009.

[FMSLBG12] Luis Fernández Moreno, Francisco José Salguero Lamillar, and Cristina Barés Gómez, editors. *Ensayos sobre Lógica, Lenguaje, Mente y Ciencia*. Alfar, 2012.

[Fra58] Harry G. Frankfurt. Peirce's notion of abduction. *The Journal of Philosophy*, 55(14):593–597, 1958.

[Fre06] Timothy Noel French. *Bisimulation quantifiers for Modal Logic*. PhD thesis, University of Western Australia, 2006.

[Fuh91] André Fuhrmann. Theory contraction through base contraction. *Journal of Philosophical Logic*, 20(2):175–203, 1991.

[Gab85] Dov M. Gabbay. Theoretical foundations for non-monotonic reasoning in expert systems. In *[Apt85]*, pages 439–457. 1985.

[Gab94] Dov M. Gabbay. *What is a logical system?* Clarendon Press, 1994.

[Gär88] Peter Gärdenfors. *Knowledge in flux: modeling the dynamics of epistemic states*. Bradford Books & MIT Press, 1988.

[Gen69] Gerhard Gentzen. Investigations into logical inference. In *[Sza69]*, pages 68–131. 1969.

[GG97] Jelle Gerbrandy and Willem Groeneveld. Reasoning about information change. *Journal of Logic, Language, and Information*, 6(2):147–196, 1997.

[GHR94] Dov M. Gabbay, Christopher J. Hogger, and J. Alan Robinson. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic*

Programming (vol. 3): nonmonotonic reasoning and uncertain reasoning. Oxford University Press, 1994.

[Gil98] Itzhak Gilboa, editor. *Proceedings of the 7th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK'98)*. Morgan Kaufmann, 1998.

[Gir00] Rod Girle. *Modal logics and Philosophy*. McGill-Queen's University Press, 2000.

[GM88] Peter Gärdenfors and David Makinson. Revisions of knowledge systems using epistemic entrenchment. In *[Var88]*, pages 83–95, 1988.

[GR09] José Luis González Recio, editor. *Philosophical essays on Physics and Biology*. Georg Olms Verlag, 2009.

[GRH13] Davide Grossi, Olivier Roy, and Huaxin Huang, editors. *Logic, Rationality, and Interaction – 4th International Workshop (LORI'2013)*. Springer, 2013.

[Gro88] Adam Grove. Two modellings for theory change. *Journal of Philosophical Logic*, 17(2):157–170, 1988.

[GS94] Russ Greiner and Devika Subramanian, editors. *Proceedings of AAAI Fall Symposium on Relevance*. AAAI Press, 1994.

[GW03] Dov M. Gabbay and John Woods. *Agenda relevance. A study in Formal Pragmatics. A practical logic of cognitive systems*, volume 1. Elsevier, 2003.

[GW05] Dov M. Gabbay and John Woods. *The reach of abduction. Insight and trial. A practical logic of cognitive systems*, volume 2. Elsevier, 2005.

[GW06] Dov M. Gabbay and John Woods. Advice in Abductive Logic. *Logic Journal of the IGPL*, 14(4):191–219, 2006.

[Haa78] Susan Haack. *Filosofía de las lógicas*. Cátedra, 1978.

[Haa80] Susan Haack. *Lógica divergente*. Paraninfo, 1980.

[Han93] Sven Ove Hansson. Changes of disjunctively closed bases. *Journal of Logic, Language and Information*, 2(4):255–284, 1993.

[HANFSM12] Ignacio Hernández Antón, Ángel Nepomuceno Fernández, and Enrique Sarrión Morillo. La inferencia científica relativa al contexto. In *[FMSLBG12]*, pages 17–30. 2012.

[Har65] Gilbert Harman. The inference to the best explanation. *The Philosophical Review*, 74(1):88–95, 1965.

[Har68] Gilbert Harman. Enumerative induction as inference to the best explanation. *The Journal of Philosophy*, 65(18):530–533, 1968.

[Har92] Gilbert Harman. Review of inference to the best explanation, by peter lipton. *Mind*, 101(403):578–580, 1992.

[HASMST12] Ignacio Hernández Antón, Enrique Sarrión Morillo, and Fernando Soler Toscano. Abducción y Semántica de Teoría de Juegos. In *[MVFS+12]*, pages 60–66, 2012.

[HC73] George E. Hughes and Max J. Cresswell. *Introducción a la Lógica Modal*. Tecnos, 1973.

[Hem62] Carl G. Hempel. Deductive-nomological vs. statistical explanation. In *[FM62]*, pages 98–169. 1962.

[Hem65a] Carl G. Hempel. Aspects of scientific explanation. In *[Hem65b]*, pages 331–496. 1965.

[Hem65b] Carl G. Hempel. *Aspects of scientific explanation and other essays in the Philosophy of Science*. The Free Press, 1965.

[Hin80] Jaakko Hintikka. C. S. Peirce's "first real discovery" and its contemporary relevance. *The Monist*, 63(3):304–315, 1980.

[Hin98] Jaakko Hintikka. What is abduction? the fundamental problem of contemporary Epistemology. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 34(3):503–533, 1998.

[HKT00] David Harel, Dexter Kozen, and Jerzy Tiuryn. *Dynamic Logic*. MIT Press, 2000.

[HMU03] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation – international edition (2^a ed.)*. Addison-Wesley, 2003.

[HO48] Carl G. Hempel and Paul Oppenheim. Studies in the logic of explanation. *Philosophy of Science*, 15:135–175, 1948.

[HRvE97] Nathan Houser, Don D. Roberts, and James van Ebra, editors. *Studies in the logic of Charles Sanders Peirce*. Indiana University Press, 1997.

[IEE61] *2nd Annual Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design*. IEEE Computer Society, 1961.

[Jan90] Ramón Jansana. *Una introducción a la Lógica Modal*. Tecnos, 1990.

[JJ95] John R. Josephson and Susan G. Josephson, editors. *Abductive inference: Computation, Philosophy, Technology*. Cambridge University Press, 1995.

[Jos95] John R. Josephson. Conceptual analysis of abduction. In *[JJ95]*, pages 5–30. 1995.

[Jos00] John R. Josephson. Smart inductive generalizations are abductions. In *[FC00]*, pages 31–44. 2000.

[Kap90] Tomis Kapitan. In what way abductive inference is creative? *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, XXVI(4):499–512, 1990.

[Kap92] Tomis Kapitan. Peirce and the autonomy of abductive reasoning. *Erkenntnis*, 37:1–26, 1992.

[Kap97] Tomis Kapitan. The structure of abductive inference. In *[HRvE97]*, pages 477–496. 1997.

[Kei07] Laurent Keiff. *Le pluralisme dialogique. Approches dynamiques de l'argumentation formelle*. PhD thesis, Université Charles de Gaulle-Lille 3, 2007.

[Kii01a] Explanatory connections: electronic essays dedicated to Matti Sintonen, 2001.

[Kii01b] Mika Kiikeri. Abduction, IBE, and the discovery of Kepler's ellipse. In *[Kii01a]*. 2001.

[Kle56] Stephen Cole Kleene. Representation of events in nerve nets and finite automata. In *[SM56]*, pages 3–41. 1956.

[Kle74] Stephen Cole Kleene. *Introducción a la Metamatemática*. Tecnos, 1974.

[KLM] Sarit Kraus, Daniel Lehmann, and Menachem Magidor. Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artificial Intelligence*, 44:167–207.

[Koz90] Dexter Kozen. On Kleene algebras and closed semirings. In *[Rov90]*, pages 26–47, 1990.

[KPP98] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. On the Logic of Merging. In *[CSS98]*, pages 488–498, 1998.

[KPP02] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Merging information under constraints: a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5):773–808, 2002.

[KPP11] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Logic Based Merging. *Journal of Philosophical Logic*, 40(2):239–270, 2011.

[KRE$^+$81] Kenneth L. Ketner, Joseph M. Ransdell, Carolyn Eisele, Max H. Fisch, and Charles S. Hardwick, editors. *Proceedings of the C.S. Peirce Bicentennial International Congress*. Texas Tech Press, 1981.

[KS04] Mika Kiikeri and Matti Sintonen. Scientific discoery. In *[NSW04]*, pages 205–254. 2004.

[KT90] Alex Kean and George K. Tsiknis. An incremental method for generating prime implicants/implicates. *Journal of Symbolic Computation*, 9(2):185–206, 1990.

[LCD15] Ramón López-Cózar Delgado, editor. *Aplicaciones multidisciplinares de sistemas de diálogo*. R.T.S.D.A., 2015.

[Lew73] David Lewis. *Counterfactuals*. Blackwell, 1973.

[Lip91] Peter Lipton. *Inference to the best explanation*. Routledge, 1991.

[LLM03] Jérôme Lang, Paolo Liberatore, and Pierre Marquis. Propositional independence: formula-variable independence and forgetting. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 18:391–443, 2003.

[LR94] Fangzhen Lin and Ray Reiter. Forget it! In *[GS94]*, pages 154–159, 1994.

[LS07] Hannes Leitgeb and Krister Segerberg. Dynamic Doxastic Logic: why, how, and where to? *Synthese*, 155(2):167–190, 2007.

[Mag01] Lorenzo Magnani. *Abduction, Reason, and Science. Processes of discovery and explanation*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2001.

[Mag05] Lorenzo Magnani. An abductive theory of scientific reasoning. *Semiotica*, 153(1/4):261–286, 2005.

[Mag06] Lorenzo Magnani. Multimodal abduction. external semiotic anchors and hybrid representations. *Logic Journal of the IGPL*, 14(2):107–136, 2006.

[Mag09] Lorenzo Magnani. *Abductive cognition. The epistemological and eco-cognitive dimensions of hypothetical reasoning*. Springer-Verlag, 2009.

[Mak94] David Makinson. General patterns in nonmonotonic reasoning. In *[GHR94]*, pages 35–110. 1994.

[Mak03] David Makinson. Bridges between Classical and Nonmonotonic Logic. *Logic Journal of the IGPL*, 11(1):69–96, 2003.

[Mak05] David Makinson. *Bridges from Classical to Nonmonotonic Logic*. King's College Publications, 2005.

[MBP10] Jerusa Marchi, Guilherme Bittencourt, and Laurent Perrussel. Prime forms and minimal change in propositional belief bases. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 59(1):1–45, 2010.

[Mil43] John Stuart Mill. *A system of logic. Ratiocinative and inductive*. University Press of the Pacific, 2002 edition, 1843.

[MLF+10] Roberto de Andrade Martins, Lucía Lewowicz, Juliana Mesquita Hidalgo Ferreira, Cibelle Celestino Silva, and Lilian Al-Chueyr Pereira Martins, editors. *Filosofia e História da Ciência no Cone Sul. Seleção de trabalhos do 6º Encontro*. Associação de Filosofia e História da Ciência no Cone Sul, 2010.

[Mor84] Raymundo Morado. La rivalidad en Lógica. *Diánoia*, XXX(30):237–249, 1984.

[Mor04] Raymundo Morado. Problemas filosóficos de la Lógica No Monotónica. In *[OM04]*, pages 313–344. 2004.

[Mor06] Raymundo Morado. Relaciones no-monotónicas en teorías sobre la abducción. In *[San06]*, pages 99–120. 2006.

[Mur61] Murray G. Murphey. *The development of Peirce's Philosophy*. Harvard University Press, 1961.

[MVFS+12] Concha Martínez Vidal, José Luis Falguera, José Miguel Sagüillo, Víctor M. Verdejo, and Martín Pereira-Fariña, editors. *VII Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*. Servicio de Publicacions da Universidade de Santiago de Compostela, 2012.

[NCL06] Abhaya C. Nayak, Yin Chen, and Fangzhen Lin. Forgetting and knowledge update. In *[SK06]*, pages 131–140, 2006.

[NF09] Ángel Nepomuceno Fernández. Sistematización del descubrimiento y la explicación: la elaboración de una Lógica Abductiva. *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 41(123):129–146, 2009.

[NFFD10] Ángel Nepomuceno Fernández and David Fernández Duque. Razonamiento explicativo en contextos inferenciales. In *[FDGCPHA10]*, pages 119–130. 2010.

[NFSLFD12] Ángel Nepomuceno Fernández, Francisco José Salguero Lamillar, and David Fernández Duque. Tableaux for structural abduction. *Logic Journal of the IGPL*, 20(2):388–399, 2012.

[NFSLST07] Ángel Nepomuceno Fernández, Francisco José Salguero Lamillar, and Fernando Soler Toscano, editors. *Lógica, Filosofía del Lenguaje y de la Lógica*. Mergablum, 2007.

[NFSMSTVQ15a] Ángel Nepomuceno Fernández, Enrique Sarrión Morillo, Fernando Soler Toscano, and Fernando R. Velázquez Quesada. Investigar con lógicas no clásicas. In *[LCD15]*, pages 157–173. 2015.

[NFSMSTVQ15b] Ángel Nepomuceno Fernández, Enrique Sarrión Morrillo, Fernando Soler Toscano, and Fernando R. Velázquez Quesada. Public and secret forgetting of propositional formulas. In *[PGD$^+$15]*, pages 139–149, 2015.

[NFST09] Ángel Nepomuceno Fernández and Fernando Soler Toscano. Defining inferential contexts: deduction and abduction. In *[CCD09]*, pages 511–529. 2009.

[NFSTAL11] Ángel Nepomuceno Fernández, Fernando Soler Toscano, and Atocha Aliseda Llera. From Classical Logic to abductive logical systems. In *[SPT11]*, pages 201–212. 2011.

[NFSTVQ07] Ángel Nepomuceno Fernández, Fernando Soler Toscano, and Fernando R. Velázquez Quesada. Metamodelling abduction. *Theoria*, 22(60):285–293, 2007.

[NFSTVQ12] Ángel Nepomuceno Fernández, Fernando Soler Toscano, and Fernando R. Velázquez Quesada. Dinámica de la información en agentes no omniscientes. In *[FMSLBG12]*, pages 49–61. 2012.

[NFSTVQ13] Ángel Nepomuceno Fernández, Fernando Soler Toscano, and Fernando R. Velázquez Quesada. An epistemic and dynamic approach to abductive reasoning: selecting the best explanation. *Logic Journal of the IGPL*, 21(6):943–961, 2013.

[NFSTVQ14] Ángel Nepomuceno Fernández, Fernando Soler Toscano, and Fernando R. Velázquez Quesada. The fundamental problem of contemporary Epistemology. *Teorema*, XXXIII(2):89–103, 2014.

[Niñ] Douglas Niño. *Abducting abduction. Avatares sobre la comprensión de la abducción de Charles S. P]eirce, school = Universidad Nacional de Colombia, year = 2007*. PhD thesis.

[NSW04] Illka Niiniluoto, Mika Sintonen, and Jan Wolenski, editors. *Handbook of Epistemology*. Springer, 2004.

[OM04] Raúl Orayen and Alberto Moretti, editors. *Filosofía de la Lógica*. Trotta & CSIC, 2004.

[OR99a] Hans Jürgen Ohlbach and Uwe Reyle, editors. *Logic, Language and Reasoning. Essays in honour of Dov Gabbay*. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[OR99b] Hans Jürgen Ohlbach and Uwe Reyle. Research themes of Dov Gabbay. In *[OR99a]*, pages 13–30. 1999.

[OT07] Mehmet A. Orgun and John Thornton, editors. *AI 2007: Advances in Artificial Intelligence, 20th Australian Joint Conference on Artificial Intelligence*. Springer, 2007.

[Paa04a] Sami Paavola. Abduction as a logic and methodology of discovery: the importance of strategies. *Fundations of Science*, 9:267–283, 2004.

[Paa04b] Sami Paavola. Abduction through Grammar, Critic, and Methodeutic. *Foundations of Science*, XL(2):245–270, 2004.

[Paa05] Sami Paavola. Peircean abduction: instinct or inference? *Semiotica*, 153:131–154, 2005.

[Paa06a] Sami Paavola. Hansonian and harmanian abduction as models of discovery. *International Studies in the Philosophy of Science*, 20(1):93–108, 2006.

[Paa06b] Sami Paavola. *On the origin of ideas: an abductivist approach to discovery*. PhD thesis, University of Helsinki, 2006.

[Pag06] Maurice Pagnucco. Knowledge compilation for belief change. In *[SK06]*, pages 90–99, 2006.

[Pal09] Gladys Dora Palau. *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*. Gedisa, 2009.

[Pat08] Douglas Patterson, editor. *New essays on Tarski and Philosophy*. Oxford University Press, 2008.

[Pei94] Charles Saunders Peirce. *The collected papers of Charles S. Peirce*. Harvard University Press, 1994.

[Peñ93] Lorenzo Peña. *Introducción a las lógicas no clásicas*. Universiddad Nacional Autónoma de México, 1993.

[Per08] Jaroslav Peregrin. What is the Logic of Inference? *Studia Logica*, 88(2):263–294, 2008.

[PG07] Olga Pombo and Alexander Gerner, editors. *Abduction and the process of scientific discovery*. Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa, 2007.

[PGD$^+$15] José Miguel Puerta, José A. Gámez, Bernabé Dorronsoro, Edurne Barrenechea, Alicia Troncoso, Bruno Baruque, and Mikel Galar, editors. *Advances in Artificial Intelligence – 16th Conference of the Spanish Association for Artificial Intelligence, CAEPIA 2015*. Springer, 2015.

[Pla89] Jan A. Plaza. Logics of public communications. In *[EPHR89]*, pages 201–216, 1989.

[PN09] Olga Pombo and Ángel Nepomuceno, editors. *Lógica e Filosofia da Ciência*. Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa, 2009.

[Pop59] Karl Popper. *The logic of scientific discovery*. Hutchinson & Company, 1959.

[PR03] Rohit Parikh and Ramaswamy Ramanujam. A knowledge based semantics of messages. *Journal of Logic, Language and Information*, 12(4):453–467, 2003.

[PSMSTVQ] Pere Pardo, Enrique Sarrión Morillo, Fernando Soler Toscano, and Fernando R. Velázquez Quesada. Tuning the program transformers from LCC to PDL. Bajo revisión (fecha de presentación: 22-01-2016).

[PSMSTVQ14] Pere Pardo, Enrique Sarrión Morillo, Fernando Soler Toscano, and Fernando R. Velázquez Quesada. Efficient program transformers for translating LCC to PDL. In *[FL14]*, pages 253–266, 2014.

[PT08] Maurice Pagnucco and Michael Thielscher, editors. *Proceedings of the Twelfth International Workshop on Non-Monotonic Reasoning (NMR-2008)*. The University of New South Wales, 2008.

[Qui52] Willard Van Orman Quine. The problem of simplifying truth functions. *The American Mathematical Monthly*, 59(8):521–531, 1952.

[RBM97] Anavai Ramesh, George Becker, and Neil V. Murray. CNF and DNF considered harmful for computing prime implicants/implicates. *Journal of Automated Reasoning*, 18(3):337–356, 1997.

[Rei38] Hans Reichenbach. *Experience and prediction: an analysis of the foundations and the structure of knowledge*. University of Chicago Press, 1938.

[RF91] Andrés Rivadulla Fernández. *Probabilidad e inferencia científica*. Anthropos, 1991.

[RF06] Andrés Rivadulla Fernández. Abduction, preduction and the fallible way of modelling nature. some epistemological consequences for the Philosophy of Physics. In *[FKMR06]*, pages 9–11, 2006.

[RF07] Andrés Rivadulla Fernández. Abductive reasoning, theoretical preduction, and the physical way of dealing fallibly with Nature. In *[PG07]*, pages 199–210. 2007.

[RF08] Andrés Rivadulla Fernández. Discovery practices in Natural Sciences: from analogy to preduction. *Revista de Filosofía*, 33(1):117–137, 2008.

[RF09a] Andrés Rivadulla Fernández. Ampliative and anticipative inferences in scientific discovery: induction, abduction and preduction. In *[FM09]*, pages 35–52. 2009.

[RF09b] Andrés Rivadulla Fernández. Anticipative preduction, sophisticated abduction and theoretical explanations in the methodology of Physics. In *[GR09]*, pages 351–364. 2009.

[RF09c] Andrés Rivadulla Fernández. El mito del método y las estrategias del descubrimiento científico. inducción, abducción, preducción. In *[PN09]*, pages 231–246. 2009.

[RF09d] Andrés Rivadulla Fernández. La preducción teórica, una práctica deductiva de descubrimiento científico. In *[AISV09]*, pages 409–414, 2009.

[RF10a] Andrés Rivadulla Fernández. Complementary strategies in scientific discovery: abduction and preduction. In *[BPPR10]*, pages 264–276. 2010.

[RF10b] Andrés Rivadulla Fernández. Estrategias del descubrimiento científico. Abducción y preducción. In *[MLF$^+$10]*, pages 120–129, 2010.

[RF12a] Andrés Rivadulla Fernández. Ciencia computacional de la Ciencia. Filosofía del descubrimiento automático. In *[FMSLBG12]*, pages 399–414. 2012.

[RF12b] Andrés Rivadulla Fernández. Theorical preduction and computational scientific discovery. In *[MVFS+12]*, pages 497–504, 2012.

[RF15] Andrés Rivadulla Fernández. Abduction in Observational and in Theoretical Sciences. some examples of IBE in Palaeontology and in Cosmology. *Revista de Filosofía*, 40:143–152, 2015.

[Rot89] Hans Rott. Conditionals and theory change: revisions, expansions, and additions. *Synthese*, 81(1):91–113, 1989.

[Rot08] Hans Rott. Information structures in belief revision. In *[AvB08]*, pages 457–482. 2008.

[Rov90] Branislav Rovan, editor. *Mathematical Foundations of Computer Science 1990 (MFCS'90)*. Springer, 1990.

[Rym94] Ron Rymon. An SE-tree-based prime implicant generation algorithm. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 11(1-4):351–366, 1994.

[San06] Édgar Sandoval, editor. *Semiótica, Lógica y Conocimiento. Homenaje a Charles Sanders Peirce*. Universidad Nacional Autónoma de México, 2006.

[Sch13] Burkhard C. Schipper, editor. *Proceedings of the 14th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK-2013)*, 2013.

[Sco71] Dana Scott. On engendering an illusion of understanding. *The Journal of Philosophy*, 68(21):787–808, 1971.

[Sea01] John Searle. *Rationality in action*. The MIT Press, 2001.

[Seg] Krister Segerberg. Two traditions in the Logic of Belief: bringing them together. In Hans Jürgen Ohlbach and Uwe Reyle, editors, *[OR99a]*, pages 135–147.

[SK06] Abdul Sattar and Byeong-ho Kang, editors. *AI 2006: Advances in Artificial Intelligence, 19th Australian Joint Conference on Artificial Intelligence*. Springer, 2006.

[SM] Enrique Sarrión Morillo. Para seguir pensando en torno a la abducción.

[SM56] Claude E. Shannon and John McCarthy, editors. *Automata studies*. Princeton University Press, 1956.

[SM12] Enrique Sarrión Morillo. LPM-DocInv. asistente computacional para la docencia e investigación en 15 sistemas normales de lógica proposicional monomodal. Master's thesis, Universidad de Sevilla, 2012.

[SM15a] Enrique Sarrión Morillo. Abducción y cambio de marco lógico. In *[CM15]*, pages 71–85, 2015.

[SM15b] Enrique Sarrión Morillo. Nuevas modelizaciones formales de la abducción y sus aplicaciones. In *[DGCMO15]*, pages 57–64, 2015.

[SM15c] Enrique Sarrión Morrillo. LCC-program transformers through Brzozowski's equations. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, (116):220–229, 2015.

[SMHANF12] Enrique Sarrión Morillo, Ignacio Hernández Antón, and Ángel Nepomuceno Fernández. Tratamiento multimodal de contextos. In *[MVFS$^+$12]*, pages 81–87, 2012.

[SMS88] Howard E. Shrobe, Tom M. Mitchell, and Reid G. Smith, editors. *Proceedings of the 7th National Conference on Artificial Intelligence*. AAAI Press / The MIT Press, 1988.

[SPT11] John Symons, Olga Pombo, and Juan Manuel Torres, editors. *Otto Neurath and the unity of Science*. Springer, 2011.

[SSLZ09] Kaile Su, Abdul Sattar, Guanfeng Lv, and Yan Zhang. Variable forgetting in reasoning about knowledge. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 35:677–716, 2009.

[ST05] Fernando Soler Toscano. *Modelos formales de explicación en Lógica e Inteligencia Artificial*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2005.

[ST07] Fernando Soler Toscano. Criterios de selección de hipótesis explicativas. In *[NFSLST07]*, pages 203–217. 2007.

[ST12] Fernando Soler Toscano. *Razonamiento abductivo en L'ogica Clásica*. College Publications, 2012.

[ST13] Fernando Soler Toscano. Razonamiento explicativo y evolución de lógicas: una aproximación desde la semántica de mundos posibles. *Contrastes. Revista Internacional de Filosofía*, XVIII:399–412, 2013.

[STFDNF06] Fernando Soler Toscano, David Fernández Duque, and Ángel Nepomuceno Fernández. Model-based abduction via dual resolution. *Logic Journal of the IGPL*, 14(2):305–319, 2006.

[STFDNF12] Fernando Soler Toscano, David Fernández Duque, and Ángel Nepomuceno Fernández. A modal framework for modelling abductive reasoning. *Logic Journal of the IGPL*, 20(2):438–444, 2012.

[STNF08a] Fernando Soler Toscano and Ángel Nepomuceno Fernández. Abducción en modelos finitos. *Crítica, Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 40(118):57–78, 2008.

[STNF08b] Fernando Soler Toscano and Ángel Nepomuceno Fernández. Deducción y abducción. *Teorema*, XXVII(1):5–16, 2008.

[STVQ10] Fernando Soler Toscano and Fernando R. Velázquez Quesada. Abduction for (non-omniscient) agents. In *[BSHM10]*, pages 51–64, 2010.

[STVQ12] Fernando Soler Toscano and Fernando R. Velázquez Quesada. A dynamic-epistemic approach to abductive reasoning. In *[BGMSL12]*, pages 47–78. 2012.

[STVQ14] Fernando Soler Toscano and Fernando R. Velázquez Quesada. Generation and selection of abductive explanations for non-omniscient agents. *Journal of Logic, Language and Information*, 23(2):141–168, 2014.

[Sum81] Leonard Wayne Sumner, editor. *Pragmatism and purpose: essays in honor to Thomas A. Goudge*. Toronto University Press, 1981.

[Swa92] William R. Swartout, editor. *Proceedings of the 10th National Conference on Artificial Intelligence*. AAAI Press / The MIT Press, 1992.

[Sza69] M.E. Szabo, editor. *The collected papers of Gerhard Gentzen*. North Holland, 1969.

[Tar83] Alfred Tarski. On the concept of logical consequence. In *[Cor83]*, pages 409–420. 1983.

[Tar86] Alfred Tarski. What are logical notions? *History and Philosophy of Logic*, 7(2):143–154, 1986.

[Tar02] Alfred Tarski. On the concept of following logically. *History and Philosophy of Logic*, 23(3):155–196, 2002.

[Tha77] Paul R. Thagard. The unity of peirce's theory of hypothesis. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, XIII(2):112–121, 1977.

[Tha78a] Paul R. Thagard. The best explanation: criteria for theory choice. *The Journal of Philosophy*, 75(2):76–92, 1978.

[Tha78b] Paul R. Thagard. Semiotics and hypothetic inference in Ch. S. Peirce. *Versus*, 19-20(2):163–172, 1978.

[Tha81a] Paul R. Thagard. The autonomy of a Logic of Discovery. In *[Sum81]*, pages 248–260. 1981.

[Tha81b] Paul R. Thagard. Peirce on hypothesis and abduction. In *[KRE$^+$81]*, pages 271–274, 1981.

[Tha88] Paul R. Thagard. *Computational Philosophy of Science*. The MIT Press, 1988.

[Tha05] Paul R. Thagard. Abductive inference: from philosophical analysis to neural mechanisms. In *[FH05]*, pages 226–247. 2005.

[Tro92] Anne Sjerp Troelstra. *Lectures on Linear Logic*. Center for the Study of Language and Information, 1992.

[Var88] Moshe Y. Vardi, editor. *Proceedings of the 2nd Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge*. Morgan Kaufmann, 1988.

[vB91] Johan van Benthem. *Language in action. Categories, lambdas and Dynamic Logic*. North Holland, 1991.

[vB07] Johan van Benthem. Dynamic Logic for belief revision. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 17(2):129–155, 2007.

[vB11] Johan van Benthem. *Logical dynamics of information and interaction*. Cambridge University Press, 2011.

[vBGHP09] Johan van Benthem, Jelle Gerbrandy, Tomohiro Hoshi, and Eric Pacuit. Merging frameworks for interaction. *Journal of Philosophical Logic*, 38(5):491–526, 2009.

[vBK04a] Johan van Benthem and Barteld Kooi. *Advances in Modal Logic (Number UMCS-04-09-01 in Technical Report Series)*. Department of Computer Science – University of Manchester, 2004.

[vBK04b] Johan van Benthem and Barteld Kooi. Reduction exioms for epistemic actions. In *[vBK04a]*, pages 197–211. Department of Computer Science – University of Manchester, 2004.

[vBvEK06] Johan van Benthem, Jan van Eijck, and Barteld Kooi. Logics of communication and change. *Information and Computation*, 204(11):1620–1662, 2006.

[vBVQ10] Johan van Benthem and Fernando R. Velázquez Quesada. The dynamics of awareness. *Synthese*, 177(Supplement-1):5–27, 2010.

[vD05] Hans van Ditmarsch. Prolegomena to Dynamic Logic for belief revision. *Synthese*, 147(2):229–275, 2005.

[vDFVQW13] Hans van Ditmarsch, Tim French, Fernando R. Velázquez Quesada, and Yi Wang. Knowledge, awareness, and bisimulation. In *[Sch13]*, pages 61–70, 2013.

[vDHLM09] Hans van Ditmarsch, Andreas Herzig, Jérôme Lang, and Pierre Marquis. Introspective forgetting. *Synthese (Knowledge, Rationality and Action)*, 169(2):405–423, 2009.

[vDK08] Hans van Ditmarsch and Barteld Kooi. Semantic results for ontic and epistemic change. In *[BvdHW08]*, pages 87–117. 2008.

[vDvdHK07] Hans van Ditmarsch, Wiebe van der Hoek, and Barteld Kooi. *Dynamic Epistemic Logic*. Springer, 2007.

[vP14] Jan von Plato. The development of Proof Theory. In *[Zal]*. Winter 2014 edition, 2014.

[VQ09] Fernando R. Velázquez Quesada. Inference and update. *Synthese (Knowledge, Rationality and Action)*, 169(2):283–300, 2009.

[VQ11] Fernando R. Velázquez Quesada. *Small steps in dynamics of information*. PhD thesis, ILLC, Amsterdam, 2011.

[VQ13] Fernando R. Velázquez Quesada. Explicit and implicit knowledge in neighbourhood models. In *[GRH13]*, pages 239–252, 2013.

[VQ14] Fernando R. Velázquez Quesada. Dynamic Epistemic Logic for implicit and explicit beliefs. *Journal of Logic, Language and Information*, 23(2):107–140, 2014.

[VQSTNF13] Fernando R. Velázquez Quesada, Fernando Soler Toscano, and Ángel Nepomuceno Fernández. An epistemic and dynamic approach to abductive reasoning: abductive problem and abductive solution. *Journal of Applied Logic*, 11(4):505–522, 2013.

[WC13] Yanjing Wang and Qinxiang Cao. On axiomatizations of public announcement logic. *Synthese*, 190(1):103–134, 2013.

[Whe37] William Whewell. *History of the Inductive Sciences, from the earliest to the present times*. John W. Parker, 1837.

[Whe40] William Whewell. *The Philosophy of the Inductive Sciences, founded upon their history*. John W. Parker, 1840.

[Whe49] William Whewell. *Of induction. With especial reference to Mr. J. Stuart Mill's system of logic*. John W. Parker, 1849.

[Whe58] William Whewell. *Novum Organon renovatum*. John W. Parker, 1858.

[Win88] Marianne Winslett. Reasoning about action using a possible models approach. In *[SMS88]*, pages 89–93, 1988.

[WR01] Mary-Anne Williams and Hans Rott, editors. *Frontiers in belief revision*. Kluwer, 2001.

[YDL16] Syraya Chin-Mu Yang, Duen-Min Deng, and Hanti Lin, editors. *Structural Analysis of Non-Classical Logics. The Proceedings of the Second Taiwan Philosophical Logic Colloquium*. Springer, 2016.

[Zal] The Stanford Encyclopedia of Philosophy. http://plato.stanford.edu.

[ZPM07] Zhi Qiang Zhuang, Maurice Pagnucco, and Thomas Meyer. Implementing iterated belief change via prime implicates. In *[OT07]*, pages 507–518, 2007.

[ZZ08] Yan Zhang and Yi Zhou. Properties of knowledge forgetting. In *[PT08]*, pages 68–75, 2008.

[ZZ09] Yan Zhang and Yi Zhou. Knowledge forgetting: properties and applications. *Artificial Intelligence*, 173(16-17):1525–1537, 2009.

Índice de tablas

Índice de figuras

Índice general

Esta tesis doctoral se ha realizado como personal investigador en formación adscrito a Proyectos de Investigación de Excelencia de las Universidades y Organismos de Investigación de Andalucía. Dicho proyecto, titulado *Interpretaciones Alternativas de Lógicas No Clásicas (IALNoC)* y cuya referencia es HUM-5844, fue concedido mediante resolución de 19 de enero de 2012 de la Secretaría General de Universidades, Investigación y Tecnología y ha sido financiada por la que actualmente se denomina Consejería de Economía y Conocimiento de la Junta de Andalucía.