

LOS MODOS DE REPRESENTACIÓN GRÁFICO LINEAL Y CARTESIANO EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE SUCESIÓN NUMÉRICA EN ESTUDIANTES DE SEGUNDO CICLO ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA.

Lineal and cartesian graphics modes of representations in understanding of numerical sequence concept in secondary school students

Bajo, J. M., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G.
Universidad de Sevilla

Resumen

Esta investigación forma parte de un trabajo cuyo objetivo es la comprensión del concepto de sucesión numérica en los estudiantes de secundaria. El enfoque proporcionado por distintos investigadores en relación a los modos de representación y las aportaciones de Piaget y García en relación al desarrollo de un esquema a través de los niveles intra, inter y trans, nos proporciona información sobre el desarrollo de la comprensión del concepto de sucesión numérica a través del uso de los modos de representación gráficos, lineal y cartesiano, por parte de los estudiantes en la resolución de una tarea.

Palabras clave: *Estudiantes de Secundaria, Esquema, Sucesiones Numéricas, Modos de Representación Gráfico.*

Abstract

The present paper is part of research that addresses the compression of the concept of numerical sequence in secondary school students. The perspective provided by the work of Piaget & Garcia related to the development of a scheme through several levels (intra, inter and trans), it provides empirical evidence of how the students' use of the modes of representations when solving a task provides information of the development of understanding. This use allows us to go deep about the stages in the development of numerical sequence concept.

Keywords: *Secondary School Students, Schema, Numerical Sequences, Modes of Representations.*

INTRODUCCIÓN

En investigación en educación matemática los modos de representación tienen un papel relevante en el estudio de la comprensión de conceptos matemáticos. De manera general, se asume que el cambio de registros entre representaciones y la coordinación en las distintas representaciones es relevante para alcanzar una determinada comprensión (Duval, 2006).

representación vinculados a una misma noción matemática. Es decir, cada representación tiene asociadas unas características propias del concepto, pero no todas. Por tanto para Duval la comprensión conceptual surge de la coordinación de varios sistemas de representación y no sólo de uno de ellos.

En relación a las investigaciones de conceptos del análisis matemático, diferentes autores han caracterizado el papel que han jugado los modos de representación, en límites (Pons, Valls y Llinares 2012) en funciones (Tall y Vinner, 1981) en derivadas (Ariza y Llinares, 2009; Sánchez-

Bajo, J. M., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Los modos de representación gráfico lineal y cartesiano en la comprensión del concepto de Sucesión Numérica en estudiantes de segundo ciclo Enseñanza Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 157-166). Málaga: SEIEM.

Matamoros, García y Llinares, 2006;Gavilán, 2010),en integrales (Boigues, Llinares y Estruch, 2010; González y Aldana, 2010; Orton, 1983; Aranda y Callejo, 2015),o en sucesiones (Przenioslo 2006; Roh, 2008).

Respecto a la comprensión del concepto de sucesión, distintas investigaciones han resaltado la importancia de la comprensión del concepto de sucesión como base para la comprensión de otros conceptos del análisis matemático, así por ejemplo, la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica es un requisito previo para la comprensión de conceptos como series (Codes, 2013), límites (Mamona,1990; Roh, 2008; Sierpinska,1990),o en la introducción de la integral mediante las sumas de Riemann, (McDonald, Mathews y Strobel,2000).

Para Przenioslo (2006) la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica es especialmente interesante por la diversidad de concepciones identificadas en su investigación vinculadas a diferentes modos de representación, analíticos (numérico y algebraico) y gráficos (recta numérica y plano cartesiano).

En este trabajo nos centramos en caracterizar el desarrollo de la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica en estudiantes de Segundo ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria a través del uso que hacen de los modos de representación gráfico-lineal (representación de las sucesiones como puntos de la recta numérica) y gráfico-cartesiano (representación de las sucesiones como puntos del plano cartesiano).

MARCO TEÓRICO

En esta investigación consideramos como marco teórico la teoría APOS ([Arnon, et al., 2014](#)), basada en el desarrollo de un esquema propuesto por Piaget y [García \(1983\)](#).La teoría APOS considera que *“un esquema para una parte específica de las matemáticas se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas”*(Trigueros, 2005, p. 11).

Esta aproximación al desarrollo de un esquema, ha sido considerada en distintas investigaciones para caracterizar la comprensión de diferentes conceptos matemáticos ([Ariza y Llinares, 2009](#); [Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008](#); [Vals, Pons y Llinares, 2011](#)). En dichas investigaciones, un esquema se desarrolla pasando por tres niveles: INTRA – INTER – TRANS, que se suceden según un orden fijo mediante un mecanismo denominado “abstracción reflexiva” (Piaget y [García, 1983/1989](#), p. 10). [Sánchez-Matamoros, García y Llinares \(2006\)](#) caracterizan los niveles del desarrollo de un esquema a través de los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que llegan a establecerse entre ellos cuando los estudiantes resuelven una tarea:

Intra: uso de elementos matemáticos de forma aislada en algún modo de representación, sin establecer relaciones. Es decir, los modos de representación son considerados por el estudiante como distintos y no los relaciona cognitivamente. Los estudiantes pueden usar diferentes modos de representación, pero los ven como no relacionados. Para [Arnon et al. \(2014\)](#) un individuo en el nivel intra del desarrollo de un esquema se centra en acciones, procesos y objetos individuales sin relacionarlos.

Inter: uso de elementos matemáticos de forma correcta en algunos modos de representación y se establecen relaciones lógicas entre elementos matemáticos que se encuentran en el mismo modo de representación. Para [Arnon et al. \(2014\)](#) este nivel está caracterizado por la construcción de relaciones y transformaciones entre los procesos y los objetos que constituyen el esquema.

Trans: uso de elementos matemáticos de forma correcta en todos los modos de representación y se establece relaciones lógicas entre elementos matemáticos que se encuentran en diferentes modos de representación. Los estudiantes en este nivel han construido el objeto cognitivo de sucesión como

lista numérica, y son conscientes de las relaciones que se establecen entre diferentes modos de representación llegando a la síntesis de los modos de representación. La estructura coherente subyacente de su esquema le ayudará a utilizar este esquema en nuevas situaciones.

Así mismo, Piaget y García (1983) consideran que cada fase o nivel (INTRA, INTER o TRANS) implican a su vez algunos subniveles siguiendo el mismo orden de progresión.

METODOLOGÍA

Participantes.

Los participantes en esta investigación son 105 estudiantes de 2º ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), (14-16 años), de un instituto de la ciudad de Sevilla: A estos estudiantes se les había introducido el concepto de sucesión numérica, estrategias para buscar regularidades numéricas en sucesiones de números enteros y fraccionarios, y progresiones aritméticas y geométricas como casos particulares de sucesiones (BOE, 5 del 5 de enero de 2007, p. 756) y (BOJA, 2007).

Instrumento de recogida de datos.

Identificamos los diferentes elementos matemáticos que constituyen el concepto de sucesión numérica a partir de la revisión de las investigaciones que se han realizado sobre dicho concepto y del análisis de diferentes libros de textos de distintos niveles educativos (ESO, Bachillerato y Universidad). A partir de dicho análisis se elaboró un cuestionario que constaba de cuatro tareas.

Se pasó el cuestionario a los estudiantes y respondieron a él en una sesión de clase, a continuación se verificaron las contestaciones dadas por los alumnos y sus argumentaciones, y confeccionamos un segundo cuestionario para cada alumno con el objetivo de profundizar en aquellas respuestas que no habían sido explicadas o que podían dejar alguna duda sobre su interpretación (Bajo et al., 2015). Para responder a este segundo cuestionario, los alumnos podían consultar el primer cuestionario contestado. Este segundo cuestionario fue contestado dos semanas después del primero.

En este trabajo nos centramos en las respuestas dadas en los dos cuestionarios a dos tareas (figura 1). La tarea 1 (figura 1), viene dada en modo gráfico-cartesiano y en su resolución el estudiante hará uso de diferentes elementos matemáticos vinculados al concepto de sucesión numérica. Es una tarea similar a la utilizada por González, Medina, Vilanova y Astiz (2011). La tarea 2 (figura 1) proviene de Stewart (2006), en ella se presentan sucesiones en tres modos de representación: expresión algebraica, gráfico-lineal y gráfico-cartesiano, y se pide a los estudiantes que relacionen el modo algebraico con uno de los modos gráficos. Esta tarea fue adaptada para nuestro trabajo de tal forma que no todas las expresiones algebraicas facilitadas se corresponden con alguno de los gráficos dados, en concreto la expresión a) y el gráfico 4) no se podían emparejar. En la figura 2 mostramos los elementos matemáticos vinculados a estas dos tareas del cuestionario. Estos elementos matemáticos se pueden representar en diferentes modos, en particular estamos considerando los modos numérico, algebraico y gráfico. En este último, distinguimos el lineal y el cartesiano. Por ejemplo, dada la sucesión en modo numérico $\{4, 6, 8, \dots\}$, también se puede representar en modo algebraico $a(n)=2n+2$, en modo gráfico-cartesiano tal y como aparece en la gráfica de la tarea 1 (figura 1) y en modo gráfico-lineal similar a cómo aparece en la tarea 2 ítem 3) (figura 1).

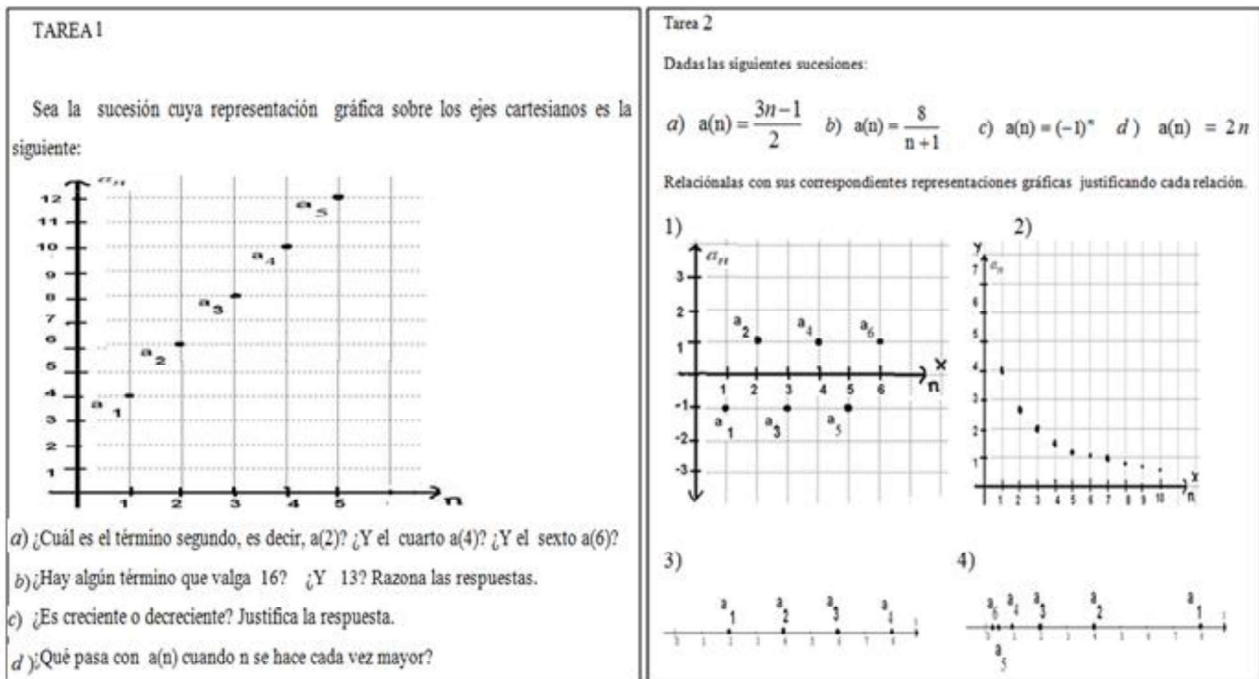


Figura 1. Tareas 1 y 2 del primer del cuestionario

ELEMENTOS DE SUCESIONES.	
E1	Sucesión (como lista): secuencia de números Reales dispuestos en un orden, es decir, Para todo número natural n existe un número real.
E2	Términos: se definen como los integrantes de la sucesión, el lugar que ocupa lo determina su posición que se denota por un subíndice que pertenece a los números naturales.
E3	Término general: se define como el término que dependiendo de su posición, es decir, subíndice sabemos su valor, y se denota por " a_n " (con n perteneciente a los naturales)
E4	Progresión aritmética: sucesión donde cada término se obtiene del anterior sumándole una cantidad fija que denominamos diferencia.
E5	Progresión Geométrica: sucesión donde cada término se obtiene del anterior multiplicándole una cantidad fija que denominamos razón.
E6	Sucesión Creciente: se dice que una sucesión $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ es creciente si cada término es menor o igual que el término siguiente.
E7	Sucesión Decreciente: se dice que una sucesión $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ es decreciente si cada término es mayor o igual que el término siguiente.

Figura 2. Elementos matemáticos vinculados a las tareas del cuestionario

Procedimiento de análisis

El análisis se centró en identificar los elementos matemáticos y las relaciones lógicas, modos de representación, cambios de registro entre ellos y la coordinación en las distintas representaciones, que se ponían de manifiesto en las respuestas de los estudiantes en las diferentes tareas. Identificando, además, las formas de conocer el concepto de acuerdo con la teoría APOS. Los resultados que presentamos en este trabajo proceden del análisis de los dos cuestionarios contestados por cada uno de los estudiantes. A continuación mostramos cómo hemos realizado este procedimiento a través de un ejemplo.

El estudiante 3b7, en el primer cuestionario, en la resolución del apartado a) de la tarea 1 (figura 1) hace un uso correcto de los elementos sucesión (E1), término (E2) y término general (E3) en modo de representación gráfico-cartesiano, haciendo una lectura correcta de los términos de la sucesión dada en modo gráfico-cartesiano. Se produce un cambio de registro entre el modo gráfico-cartesiano y el modo numérico. Esta forma proceder del estudiante pone de manifiesto una

concepción acción de la sucesión como lista numérica, ya que es posible calcular términos concretos que vienen directamente de la gráfica-cartesiana.

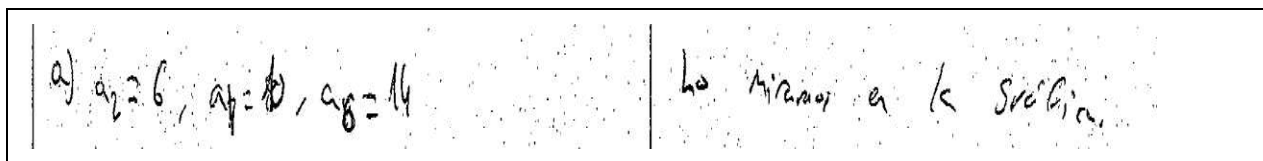


Figura 3. Respuesta del estudiante 3b7 al apartado a de la tarea 1 del primer cuestionario

El estudiante 3b7 en la resolución del apartado b) de la tarea 1 (figura 1) hace uso del elemento término general dado en forma recurrente para resolver la primera parte del apartado b).

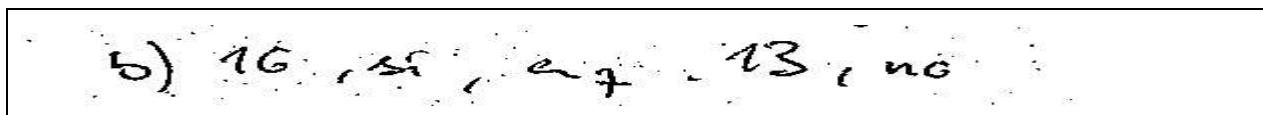


Figura 4. Respuesta del estudiante 3b7 al apartado b de la tarea 1 del primer cuestionario

En el segundo cuestionario, le preguntamos qué sucede para el valor 13:

E: para el apartado b) dices que a_7 vale 16 ¿por qué?

3b7: porque se ve en la gráfica

E: ¿y el valor 13?

3b7: no, pues va de dos en dos

Esta forma proceder del estudiante pone de manifiesto una concepción proceso de la sucesión como lista numérica, ya que le es posible calcular términos que no vienen explícitamente dados en la gráfica-cartesiana, a través de la reflexión sobre las acciones. El estudiante deduce el término identificando la secuencia general (es decir, la diferencia en una progresión aritmética (E4)).

Del análisis conjunto de los dos cuestionarios podemos concluir que el estudiante 3b7 hace uso correcto de los elementos matemáticos relacionados con los sistemas de representación numérico y gráfico-cartesiano y los coordina al realizar el cambio de registro de un modo de representación a otro para responder de forma correcta la tarea.

Este procedimiento de análisis se llevó a cabo de forma sistemática por el grupo de investigadores con todas las tareas del cuestionario de cada uno de los estudiantes, lo que permitió inferir el desarrollo de la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica puesta de manifiesto por cada uno de ellos.

RESULTADOS

Los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes a los dos cuestionarios se muestran en la siguiente tabla (tabla 1), en la que se indica el número de estudiantes en cada nivel de desarrollo del esquema según hemos descrito en el marco teórico.

NIVELES	NUMERO DE ESTUDIANTES
INTRA	54
INTER	37
TRANS	14

Tabla 1. Número de estudiantes asignados a los diferentes niveles de desarrollo del esquema de sucesión.

En esta sección de resultados nos centrándonos en los 37 estudiantes situados en el nivel INTER del desarrollo del esquema. En el análisis de las respuestas hemos observado dentro de este nivel dos

subniveles. Por un lado están los estudiantes que hacen uso de elementos matemáticos analíticos y/o gráfico lineal de forma correcta en la resolución de las tareas y muestran evidencias de cambios de registro entre los modos de representación analítico y gráfico-lineal, y no hacen uso del modo gráfico-cartesiano. Y por otro lado, están los estudiantes que hacen uso de los elementos matemáticos analíticos y/o gráfico (lineal y cartesiano) de forma correcta en la resolución de las tareas y muestran esbozos de síntesis de los modos de representación analítico y gráfico (lineal y cartesiano). Esto permite considerar que los diferentes usos que se hacen del modo gráfico pueden ser considerados un indicador de subniveles del nivel INTER del desarrollo de la comprensión del esquema de sucesión como lista numérica.

Esta sección la hemos organizado en dos apartados, en un primer apartado mostramos el uso correcto del modo gráfico-lineal e incorrecto del modo gráfico-cartesiano, y en un segundo apartado mostramos el uso correcto del modo gráfico en sus dos formas (lineal y cartesiano).

Uso del modo de representación gráfico-lineal

El estudiante 4c30 nos muestra evidencias de que conoce los dos modos de representación gráfico para las sucesiones (gráfico-lineal y gráfico-cartesiano), así en la respuesta a la tarea 2 justifica de la siguiente forma “*las sucesiones pueden representarse en dos tipos de gráficos, con ejes cartesianos donde aparecen dos valores y en una línea en la que sólo se representa un valor*”. Además, pone de manifiesto un uso correcto del modo gráfico-lineal al emparejar el apartado d) con el número 3) de las representaciones gráficas, justificando de la siguiente forma “*la representación número 3) corresponde a la sucesión d), puesto que la “a(n)” aumenta de dos en dos, ya que a(n)= 2n, por lo que a(1)= 2, a(2)= 4 y a(3)= 6*”. Con esta respuesta el estudiante ha hecho una conversión entre modos de representación, de modo algebraico a modo gráfico-lineal de manera correcta al hacer el emparejamiento. Y justificarlo a través del uso de los elementos matemáticos de sucesión (E1), término (E2), término general (E3).

Sin embargo, no se pone de manifiesto el uso correcto por parte del estudiante de los elementos matemáticos cuando son dados en modo gráfico-cartesiano. Así en la tarea 1, este mismo estudiante 4c30 cuando se le pregunta por el valor del segundo término de una sucesión dada en modo gráfico-cartesiano, no es capaz de coordinar ambos ejes cartesianos respondiendo con los valores de la sucesión sin vincularlos al lugar que ocupan como término de la sucesión. Dicha coordinación se pondría de manifiesto si respondiera $a(2)=6$, $a(4)=10\dots$ en lugar de “ $a(n)=6$, $a(n)=10\dots$ ” como contesta el estudiante. Esto puede ser considerado una manifestación de la no coordinación de ambos ejes del plano cartesiano, hecho que le ha impedido hacer uso de los elementos matemáticos de sucesión (E1), término (E2) y término general (E3) que usa en la tarea 2. Para confirma esta inferencia, observamos cómo el estudiante responde el apartado b) de la tarea 1, al preguntar si hay algún término que valga 16, el estudiante contesta “*si y=16, (7, 16), si x=16 (16, 34)*” (ver figura 6). Esto nos permite corroborar que este estudiante no sabe el significado de los ejes x e y cuando se trata de una sucesión numérica dada en forma gráfica- cartesiana, pues lo mismo asigna 16 como término de la sucesión (y), que como lugar que ocupa el término en la sucesión (x).

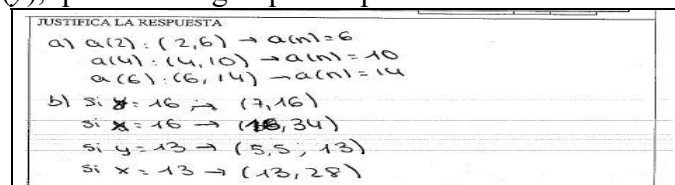


Figura 5. Respuesta del estudiante 4c30 a la tarea 1 del primer cuestionario.

Con el fin de seguir indagando sobre la comprensión del estudiante sobre las diferentes representaciones de modo gráfico (lineal y cartesiano), le preguntamos en el segundo cuestionario cuál de los dos tipos de gráficas (lineal, cartesiana) le resultaba más fácil y porqué, a lo que este estudiante contestó que le resulta más fácil el modo gráfico-lineal “*porque para ver los puntos en la*

cartesiana tengo fijarme en dos puntos distintos y en la lineal solo en uno". Esta forma de responder del estudiante, evidencia la necesaria coordinación entre ambos ejes (lugar que ocupa y término correspondiente) en la representación cartesiana, hecho que no sucede en la representación lineal que no requiere coordinación.

Este estudiante ha hecho uso en la resolución de las tareas de elementos matemáticos en modo algebraico y en modo gráfico-lineal, haciendo cambios de registros entre dichos modos, pero no ha sido capaz de hacer uso correcto de estos mismos elementos matemáticos en modo gráfico-cartesiano. Esto pone de manifiesto que el uso por parte del estudiante de elementos matemáticos en modo gráfico-cartesiano durante la resolución de problemas es un indicador del nivel de comprensión del concepto de sucesión numérica.

Uso del modo de representación gráfico en sus dos formas (lineal y cartesiano)

El estudiante 3d5, hace uso de los elementos matemáticos sucesión (E1), término (E2), término general (E3) y progresión aritmética (E4) para responder de forma correcta el apartado a) de la tarea 1 (figura 6) ,mostrando además, que hace la conversión de modos de representación del modo gráfico-cartesiano a los modos algebraico y numérico de manera correcta.

RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO)	
a) $a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_2 = 6 \quad a_4 = 10 \quad a_6 = 14$
$a_1 = a_1 + (1-1)d$	
$a_1 = a_1$	
JUSTIFICA LA RESPUESTA	
La tarea ^{gráfica} indica, cuál es cada uno y además mediante la fórmula de la progresión aritmética también se puede realizar.	

Figura 6. Respuesta del estudiante 3d5 al apartado a de la tarea 1 del primer cuestionario

Este estudiante justifica su respuesta haciendo un cambio de registro de la sucesión dada en modo gráfico-cartesiano a modo algebraico y numérico, es decir, 3d5 coordina los diferentes modos de representación de forma correcta.

En la resolución del apartado b) de la tarea 2, este estudiante hace uso de los elementos matemáticos sucesión (E1), término (E2), término general (E3) y sucesión decreciente (E7) en modo algebraico y numérico para calcular los tres primeros términos de la sucesión, argumentando de forma correcta que es una sucesión que es decreciente: " a_n disminuyendo n aumenta", además cambia de registro estos elementos a modo gráfico-cartesiano al emparejar la gráfica 2) con la sucesión dada en modo algebraico b) en modo gráfico cartesiano (figura 7):

RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO)	JUSTIFICA LA RESPUESTA
2) a $a_n = \frac{5n}{n+1} \rightarrow$	$a_1 = 4 \quad a_2 = 2,6 \quad a_3 = 2$ La sucesión va disminuyendo 2 es decir a_n disminuyendo cuando n aumenta.

Figura 7. Respuesta del estudiante 3d5 al apartado a la tarea 2 del primer cuestionario.

Para el apartado a) de la tarea, hace uso de los elementos sucesión (E1), término(E2) y término general (E3),sucesión creciente (E6) y sucesión decreciente (E7)en modos algebraico y numérico y de los elementos en modo gráfico-cartesiano, el uso de estos elementos y su conversión de modos de representación a los modos gráfico lineal y cartesiano le hace afirmar que la sucesión dada por su

término general en el apartado a) no se puede corresponder con la 4) es decir, 4) decrece y a) crece luego no coinciden, como responde en este apartado: “Esta sucesión es errónea y no coincide con la gráfica ya que realmente la gráfica debería crecer, no decrecer como podemos ver en la gráfica”. Esta respuesta nos muestra la coordinación entre los diferentes modos de representación.

En la respuesta del apartado d) de la tarea 2 hace uso correcto de los elementos matemáticos sucesión (E1), término (E2) y término general (E3) y sucesión creciente (E6) para hallar los tres primeros términos de la sucesión y posteriormente comprobar a través de la conversión de modos de representación al modo gráfico-lineal que se corresponde con la gráfica 3), lo que justifica de forma correcta: “ $a_1=2, a_2=4, a_3=6$ La sucesión aumenta cuando n aumenta”. Mediante estas repuestas podemos observar la coordinación entre los diferentes modos de representación algebraico, numérico y gráfico lineal.

En el segundo cuestionario, al igual que con el estudiante anterior, con el fin de indagar sobre la comprensión del estudiante sobre las diferentes representaciones de modo gráfico (lineal y cartesiano), le preguntamos cuál de los dos tipos de gráficas (lineal, cartesiana) le resultaba más fácil y por qué, a lo que este estudiante contestó “Me resulta más fácil de ver las gráficas de los ejes (refiriéndose al gráfico-cartesiano) ya que la sucesión está expresada de una forma más clara y limpia.”. Esta forma de responder del estudiante, muestra la coordinación entre ambos ejes (lugar que ocupa y término correspondiente) en la representación cartesiana.

Lo que nos muestra que el uso correcto del modo de representación gráfico-cartesiano indica mayor grado de desarrollo de la comprensión del esquema de sucesión como lista numérica que el uso correcto del modo de representación gráfico-lineal. Aquellos estudiantes que evidencian un uso correcto del modo gráfico-cartesiano, también son capaces de hacer un uso correcto del gráfico-lineal cuando lo exige la resolución de la tarea, pero no ocurre lo mismo en sentido inverso, es decir el uso correcto por parte del estudiante de elementos matemáticos del concepto de sucesión como lista numérica en modo gráfico-lineal no conlleva el uso de estos mismos elementos por parte del estudiante en modo gráfico-cartesiano cuando la resolución de la tarea lo exige, como queda evidenciado mediante la resolución de las tareas por parte de los estudiantes analizados.

CONCLUSIONES

El uso de diferentes sistemas de representación se ha considerado como un elemento clave para delimitar diferentes niveles de comprensión en matemáticas. Los resultados obtenidos en este trabajo, nos permiten concluir que distinguir entre el modo de representación gráfico-lineal y gráfico-cartesiano puede servir para caracterizar el desarrollo de la comprensión del esquema del concepto de sucesión como lista numérica en estudiantes de Educación Secundaria.

La consideración para la investigación de la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica vinculada al modo de representación gráfico(lineal y cartesiano) nos permite abordar la identificación de diferentes subniveles de desarrollo del nivel inter, tal y como consideraba Piaget y García(1983). Los estudiantes caracterizados en el nivel INTER hacen uso correcto elementos matemáticos numéricos, algebraicos y/o gráfico lineal de forma correcta en la resolución de las tareas y muestran esbozos de síntesis de los modos de representación analítico y gráfico lineal. La diferencia de los subniveles de este nivel viene dada por el uso del modo gráfico cartesiano, 20 de los 37 estudiantes situados en el nivel INTER no hacen uso correcto del modo gráfico-cartesiano y 17 de los 37 estudiantes hacen uso correcto de este modo gráfico-cartesiano, en algunas situaciones (tabla 2).

SUBNIVELES DEL NIVEL INTER	NUMERO DE ESTUDIANTES
INTER 1	20
INTER	17

Tabla 2: Número de estudiantes asignados a los subniveles del nivel INTER.

La consideración de varios modos de representación, algebraico, numérico y gráfico-lineal y gráfico cartesiano, puede aportar indicadores de los diferentes niveles y subniveles de desarrollo de la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica como ya señalábamos en trabajos anteriores (Bajo, Sánchez-Matamoros y Gavilán, 2015). La potencialidad de este trabajo ha sido poder diferenciar dentro del modo de representación gráfico, dos modalidades, el modo gráfico-lineal y el modo gráfico-cartesiano, como característico o indicador de subniveles del nivel de desarrollo INTER de comprensión vinculado al concepto de sucesión como lista numérica.

REFERENCIAS

- Aranda, C. y Callejo, M.L. (2015). Perfiles de estudiantes en la comprensión de la aproximación al área de la superficie bajo una curva. En C. Fernández, M. Molina, N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp.123-131). Alicante: SEIEM.
- Ariza, A. y Llinares, S.(2009) Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 121-136.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Berlin: Springer.
- Bajo Benito, J. M., Sánchez-Matamoros, G. y Gavilán Izquierdo, J. M. (2015). Las progresiones como indicador de la comprensión del concepto de sucesión numérica en alumnos de segundo ciclo de enseñanza secundaria obligatoria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 143-151). Alicante: SEIEM.
- BOE (Boletín Oficial del Estado) (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. (BOE nº 5, pp. 677-773). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- BOJA (Boletín Oficial de la Junta de Andalucía) (2007). ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. (BOJA nº171, pp. 23-65). Sevilla: Consejería de Educación.
- Boigues, F.J., Llinares, S. y Estruch, V.D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (3), 129–158.
- Codes, M., Delgado, M. L., González, M. T., y Monterrubio, M. C. (2013) Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(3), 135-154.
- Duval, R.(2006). Un tema crucial en la Educación Matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.
- Gavilán, J. M. (2010). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva*. Sevilla: Digital @tres.
- Gonzalez, J., Medina, P., Vilanova, S. y Astiz, M. (2011). Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con Geogebra. *Revista de Educación Matemática*, 26, 1-19.
- González, M. T., y Aldana, E. (2010). Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE. En A. Contreras y L. Ordoñez (eds.) *Jornadas de investigación en didáctica del Análisis Matemático* (pp. 4-22). Baeza: SEIEM.
- Mamona, J. (1990), 'Sequences and series–Sequences and functions: Students' confusions', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 21(2), 333–337.
- Michael A. McDonald, David M. y Mathews, K. H. S. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. *Research in Collegiate Mathematics Education IV, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island*, 8, 77–102.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 1-18.
- Piaget, J., y García, R. (1983). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: S. XXI. Editores.
- Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). Baeza: SEIEM.
- Przenioslo, M. (2006). Conceptions of a sequence formed in secondary schools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(7), 805–823.

- Roh, K.H. (2008). Students' Images and their Understanding of Definitions of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69, pp. 217-233.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85-98.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Relime*, 11(2), 267-296.
- Sierpiska, A.(1990), 'Some remarks on understanding in mathematics'. *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 24-36.
- Stewart, J. (2006). *Cálculo, Conceptos y Contextos 3ª ed.* Valencia: S.A. Ediciones Paraninfo.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31.
- Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 325-338.