Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº9 (1996) 5-22

MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADOS PARA FLUJOS DE FLUIDOS INCOMPRESIBLES[1]

TOMÁS CHACÓN REBOLLO
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO
UNIVERSIDAD DE SEVILLA
C/ TARFIA, S/N. 41080 SEVILLA

e-mail: chacon@numer.us.es

1 Introducción

En este trabajo abordaremos ciertos aspectos del desarrollo de técnicas eficientes de simulación numérica de flujos de fluidos incompresibles mediante el Método de los Elementos Finitos. También nos ocuparemos del análisis numérico de las mismas.

El estudio teórico de las ecuaciones relevantes que gobiernan los flujos de fluidos incompresibles, esencialmente las de Stokes y Navier-Stokes, fue realizado y completado en los años 60 y primeros 70. Como es bien conocido, se han demostrado resultados de existencia para las Ecuaciones de Navier-Stokes en dos y tres dimensiones de espacio. Sin embargo, únicamente se conocen resultados de unicidad en dos dimensiones, debido a la falta de regularidad de la solución en el caso tridimensional. Sirvan como referencia los trabajos, hoy clásicos, de Lions (1969) y Temam (1977).

La resolución numérica de flujos de fluidos incompresibles presenta dos restricciones de estabilidad de relevancia, bien conocidas por la comunidad de investigadores y usuarios en Mecánica de Fluidos computacional. Por una parte, la condición de incompresibilidad impone condiciones de compatibilidad bastante estrictas entre los espacios de discretización de velocidad y presión empleados.

[1]Investigación financiada parcialmente por los proyectos HCM ERBCHB ICT 94.1823 de la Unión Europea, y PB93-1196 de la DGICYT

Por otra, el carácter fuertemente convectivo de la mayoría de los flujos de interés práctico produce la aparición de fenómenos de capa límite, zonas cerca de las paredes sólidas en que la velocidad presenta muy fuertes gradientes. La simulación de tales flujos mediante el uso directo del método de discretización Galerkin - Elementos Finitos produce en general soluciones numéricas presentando fuertes oscilaciones en las zonas de capa límite. Tales oscilaciones desaparecen únicamente si la talla de la malla es suficientemente pequeña. Ello origina discretizaciones con gran número de grados de libertad, resultando inabordables con los medios actuales en muchos casos de interés. Y ello, incluso si los espacios de discretización de velocidad y presión son compatibles.

La primera técnica general para el tratamiento numérico de la condición de incompresibilidad fue introducida en Babuška (1973) y Brezzi (1974), para resolver la ecuación de Stokes. Se trata de introducir espacios de discretización diferentes para velocidad y presión, de forma que satisfagan una condición de compatibilidad específica, conocida como de Brezzi-Babuška. Posteriormente, hubo ciertos esfuerzos tendentes a la utilización de bases del espacio de velocidades con divergencia nula, con objeto de eliminar la presión (Cf. Griffits (1979), Hecht (1981)). Sin embargo, la construcción de tales bases resulta una tarea ardua, y los sistemas lineales resultantes están relativamente mal condicionados. Por ello, esta técnica es poco utilizada.

Algo más recientemente, se introdujo en Brooks y Hughes (1982) el método SUPG (Streamline Upwind / Petrov-Galerkin). Se trata de una modificación del método estándar de Galerkin, en que las funciones test se añaden términos constantes por elemento, consiguiendo estabilizar no sólo la discretización de la presión, sino también el operador de convección "corriente arriba". Este método puede también ser visto como una técnica de Lagrangiano aumentado, consistente en "aumentar" la formulación Galerkin estándar con un término que trata de minimizar una norma del residuo. Adaptaciones de tal formulación fueron utilizada en Hughes et al. (1986), Douglas y Wang (1989), Franca y Frey (1992) y otros para construir técnicas estables, utilizando virtualmente cualquier par de espacios de Elementos Finitos para velocidad y presión. Al mismo tiempo, cuando se aplican a la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes, estas técnicas incorporan la difusión corriente arriba del método SUPG, con lo que consiguen estabilizar también el cálculo de flujos con convección dominante. Curiosamente, algunos estudios recientes muestran que existe una relación muy estrecha entre los métodos de estabilización y algunos de los métodos clásicos arriba mencionados –hasta el punto de ser equivalentes en ciertos casos.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº9 (1996) 5-22

En este trabajo nos ocuparemos de la descripción y el análisis numérico de los métodos de estabilización más utilizados. También de la relación entre éstos y la utilización de pares de espacios que satisfagan la condición de Brezzi-Babuška. En la Sección 2 repasaremos la teoría clásica sobre aproximación de las ecuaciones de Stokes mediante el M.E.F.. La Sección 3 estará dedicada al análisis de algunos métodos de estabilización, aplicados a las ecuaciones de Stokes. En la Sección 4 estudiaremos la equivalencia entre el método SUPG y un método clásico usando funciones "burbuja ". Por último, en la Sección 5 veremos cómo esta formulación puede ser utilizada para realizar el análisis numérico del método SUPG en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Como referencias generales sobre métodos clásicos, citemos los libros de Temam (1977), Girault - Raviart (1986) y Brezzi y Fortin (1991). Existen pocas referencias generales sobre métodos de estabilización. Citemos, por ejemplo, el artículo de Franca, Hughes y Stenberg (1993), en que puede encontrarse un enfoque bastante general y abundantes referencias.

2 Teoría clásica de aproximación de las ecuaciones de Stokes por el M. E. F.

En esta Sección haremos un breve repaso sobre la teoría referente a existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones de Stokes, así como sobre su aproximación mediante el M.E.F. En particular, recordaremos el papel de la condición inf - sup discreta en la convergencia de estas aproximaciones.

Consideremos un dominio acotado $\Omega \subset \boldsymbol{R}^d$ ($d = 2$ o 3), con frontera Γ. Nos damos un campo de velocidades "vector" $\mathbf{u} : \Omega \longrightarrow \boldsymbol{R}^d$, que supondremos con divergencia nula. Nuestro propósito es resolver numéricamente el siguiente problema de contorno para las ecuaciones de Stokes estacionarias, incluyendo un término convectivo :

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Obtener} \quad \mathbf{y} : \Omega \longrightarrow \boldsymbol{R}^d, & p : \Omega \longrightarrow \boldsymbol{R} & \text{tales que} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla p = \mathbf{f}, & \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 & \text{en } \Omega, \\ & \mathbf{y} = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Aquí, $\nu > 0$ es el coeficiente de viscosidad cinemática, y $\mathbf{f} \in \left[H^{-1}(\Omega)\right]^d$ es un término fuente dado. Consideraremos el problema estacionario con condiciones de Dirichlet homogéneas, con objeto de no introducir dificultades no esenciales en nuestro desarrollo.

Estas ecuaciones constituyen una linealización de las ecuaciones de Navier-

Stokes, que gobiernan a los flujos de fluidos incompresibles en general :

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Obtener} \quad \mathbf{u} : \Omega \longrightarrow \boldsymbol{R}^d, & p : \Omega \longrightarrow \boldsymbol{R} & \text{tales que} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \\ & \mathbf{u} = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{array}\right\} \tag{2}$$

Analizaremos la aproximación de estas ecuaciones en la Sección 5.

Definamos la forma bilineal sobre $\left[H_0^1(\Omega)\right]^d \times \left[H_0^1(\Omega)\right]^d$,

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{v},\, \mathbf{w} \in \left[H_0^1(\Omega)\right]^d, \tag{3}$$

donde denotamos por $(\cdot, \cdot)$ el producto escalar L^2, para funciones sea escalares, vectoriales o tensoriales. Supondremos que $\mathbf{u} \in \left[L^p(\Omega)\right]^d$ con $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Entonces $a(\cdot, \cdot)$ está bien definida, es continua y $\left[H_0^1(\Omega)\right]^d$-coercitiva; o sea, verifica

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq C\, |\mathbf{v}|_1 |\mathbf{w}|_1, \quad a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \nu\, |\mathbf{v}|_1^2 \quad \forall \mathbf{v},\, \mathbf{w} \in \left[H_0^1(\Omega)\right]^d \tag{4}$$

Aquí, C es una constante positiva, y $|\cdot|_1$ denota la seminorma sobre $\left[H^1(\Omega)\right]^d$,

$$|\mathbf{v}|_1 = \left[\int_\Omega |\nabla \mathbf{v}|^2\, dx\right]^{1/2}. \tag{5}$$

Podemos dar al problema (1) una formulación variacional mixta (esto es, incluyendo la presión además de la velocidad), como sigue :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Obtener } (\mathbf{y}, p) \in Y \times M \text{ tal que} \\ B(\mathbf{y}, p; \mathbf{v}, q) = <\mathbf{f}, \mathbf{v}>, \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in Y \times M; \end{array}\right\} \tag{6}$$

donde

$$Y = \left[H_0^1(\Omega)\right]^d, \quad M = L^2(\Omega),$$

y B es la forma bilineal sobre el espacio producto $(Y \times M) \times (Y \times M)$ definida por

$$B(\mathbf{y}, p; \mathbf{v}, q) = a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + b(\mathbf{u}, q). \tag{7}$$

A su vez, $b(\cdot, \cdot)$ es la forma bilineal sobre $Y \times M$ dada por $b(\mathbf{v}, q) = -(\nabla \cdot \mathbf{v}, q)$. Por último, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa la dualidad $Y' - Y$.

La existencia y unicidad de soluciones del problema es consecuencia del siguiente resultado general, que enunciamos con evidente abuso de notación: Consideremos dos espacios de Hilbert Y y M. Sea $b(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal continua sobre $Y \times M$, y definamos los operadores $R : Y \to M'$, y su adjunto $R^* : M \to Y'$ por

$$\langle R\mathbf{v}, q \rangle = \langle R^* q, \mathbf{v} \rangle = b(\mathbf{v}, q), \quad \forall \mathbf{v} \in Y, \forall q \in M. \tag{8}$$

Sea además $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal continua sobre $Y \times Y$, que supondremos coercitiva. Se tiene entonces

Teorema 2.1 *Si $Im\,R$ es cerrado, entonces el problema (6) posee una solución. Además, esta solución es única sobre $Y \times \tilde{M}$, donde $\tilde{M}$ es el espacio cociente $M/Ker\,R^*$.*

La prueba de este teorema está basada esencialmente en el Teorema del Rango Cerrado de Banach (Ver Girault - Raviart (1986)). Notemos que en el caso de las ecuaciones de Stokes generalizadas (1), $Ker\,R^*$ está formado por las funciones constantes, de modo que

$$L_0^2(\Omega) = \{\, q \in L^2(\Omega) \ \text{ tal que } \int_\Omega q\,dx = 0 \,\}.$$

A su vez, $Im\,R$ es cerrado, como consecuencia del resultado que enunciamos a continuación :

Teorema 2.2 *Las siguientes proposiciones son equivalentes :*

i) $Im\,R$ es cerrado en M'.

ii) El par de espacios (Y, M) satisface la condición inf - sup continua : Existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$\inf_{q \in \tilde{M}} \sup_{\mathbf{v} \in Y} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_Y \|q\|_M} \geq \beta. \tag{9}$$

iii) La forma bilineal B definida por (7) sobre $Y \times M$ satisface la siguiente condición inf - sup : Existe una constante $\gamma > 0$ tal que

$$\inf_{(\mathbf{u},r) \in Y \times \tilde{M}} \ \sup_{(\mathbf{v},q) \in Y \times \tilde{M}} \frac{B(\mathbf{u}, r; \mathbf{v}, q)}{\|(\mathbf{u}, r)\|_{Y \times M} \, \|(\mathbf{v}, q)\|_{Y \times M}} > \gamma. \tag{10}$$

La condición inf-sup (9) es satisfecha por el par de espacios $\left(\left[H_0^1(\Omega)\right]^d, L^2(\Omega)\right)$, como es bien conocido (Ver Girault y Raviart (1986)). Por otra parte, la condición (10) asegura la coercitividad de la forma B sobre el espacio producto $Y \times \tilde{M}$. Esta forma B esta ligada a la formulación como punto de silla del problema de Stokes: Si la forma a es simétrica, la solución $(\mathbf{u}, p)$ es también la solución del problema de optimización

$$\inf_{\mathbf{v} \in V} \sup_{q \in M} \{J(\mathbf{v}, q)\}, \quad J(\mathbf{v}, q) = a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \tag{11}$$

Las ecuaciones (6) son justamente las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a este problema de punto silla.

La aproximación clásica del problema (6) por el método de Galerkin se realiza como sigue : Sean Y_h, M_h dos subespacios de dimensión finita de Y y M, respectivamente. Estaremos interesados en los casos en que ambos son espacios de Elementos Finitos. El parámetro h representará el mayor diámetro de los elementos de la malla. Buscamos un par $(\mathbf{y}_h, p_h) \in Y_h \times M_h$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} \text{Obtener } (\mathbf{y}_h, p_h) \in Y_h \times M_h \text{ tal que} \\ B(\mathbf{y}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = <\mathbf{f}, \mathbf{v}_h>, \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in Y_h \times M_h; \end{array}\right\} \tag{12}$$

Sea R_h el operador de Y_h a valores sobre M_h definido por (8). R_h es un operador de rango cerrado, al ser lineal entre espacios de dimensión finita. Según el Teorema 2.2, este problema tiene solución única sobre el espacio cociente $\tilde{M}_h = M_h/Ker\, R_h^*$. Sin embargo, de (12) se deduce fácilmente que debe tenerse $\mathbf{y}_h \in Ker\, R_h$. Esta condición puede ser excesivamente restrictiva si el espacio Y_h no es suficientemente "rico " en grados de libertad respecto al espacio M_h. En Pironneau (1991) se muestran varios ejemplos en que $Ker\, R_h$ se reduce al cero. Es claro, pues, que los espacios Y_h y M_h deben ser compatibles de alguna forma para poder garantizar la convergencia de la discretización. Una condición suficiente para ello es la llamada "inf - sup" discreta, o de Brezzi - Babuška :

Lema 2.1 *Supongamos que las constantes $\beta_h > 0$ definidas por*

$$\beta_h = \inf_{q_h \in \tilde{M}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in Y_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_Y \|q_h\|_M} \tag{13}$$

están acotadas inferiormente por una constante β' independiente de h. Entonces, existe una constante $C > 0$ dependiendo de β', $\|a\|y\|b\|$ tal que

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_h\|_Y + \|p - p_h\|_{\tilde{M}_h} \le C \left\{ \inf_{\mathbf{v}_h \in Y_h} \|\mathbf{y} - \mathbf{v}_h\| + \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M \right\}; \tag{14}$$

donde $\|q_h\|_{\tilde{M}_h} = \inf_{r_h \in Ker\, R_h^t} \|q_h + r_h\|_M$.

De este modo, el error en la aproximación considerada vendrá dado por el error de interpolación sobre los espacios Y_h y M_h.

La condición inf - sup (13) puede interpretarse en el sentido de que el operador R_h admite una prolongación a todo Y, uniformemente continua en h. Para significar su importancia, escribiremos el problema (6) en forma matricial. Sean N_v y N_p las dimensiones de Y_h y $\tilde{M}_h$, respectivamente (Observemos que en el caso de las ecuaciones de Stokes, $\tilde{M}_h = M_h \cap L_0^2(\Omega)$). Denotemos por $\{\phi_i \,|\, i = 1, \cdots, N_v\}$ y $\{\psi_j \,|\, j = 1, \cdots, N_p\}$ una base de Y_h y otra de M_h, resp.

Definamos las matrices A y R de dimensiones $N_v \times N_v$ y $N_p \times N_v$, resp., y el vector columna $\vec{\mathbf{f}}$ de dimensión N_v, por

$$A_{il} = a(\phi_l, \phi_i), \quad R_{ij} = b(\phi_i, \psi_j), \quad \mathbf{f}_i = \langle \mathbf{f}, \phi_i \rangle. \tag{15}$$

Supongamos que buscamos $\mathbf{y}_h$ y p_h en la forma $\mathbf{y}_h = \sum_{i=1}^{N_v} \mathbf{y}_i \, \phi_i$, $p_h = \sum_{j=1}^{N_p} p_j \, \psi_j$. Entonces, el problema (6) equivale al sistema lineal

$$A\vec{\mathbf{y}} + R^t \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{f}}, \quad R\vec{\mathbf{y}} = 0; \tag{16}$$

donde $\vec{\mathbf{y}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$ son los vectores de componentes $\mathbf{y}_i$ y p_j.

Puesto que la forma a es coercitiva, la matriz A es definida positiva. Por ello, la primera ecuación en (16) puede ser resuelta en $\vec{\mathbf{y}}$, de modo que (12) equivale al sistema lineal $RA^{-1}R^t\vec{\mathbf{p}} = A^{-1}\vec{\mathbf{f}}$. El número de condición de la matriz que aparece en este problema resulta ser

$$Cond(RA^{-1}R^t) = \frac{\|b\|}{\beta_h}.$$

De este modo, la condición inf - sup discreta garantiza no solamente que este problema admite una única solución sobre $\tilde{M}_h$, sino que además el número de condición de la matriz está uniformemente acotado en h.

La obtención de pares de espacios que satisfagan la condición inf - sup discreta ha sido objeto de estudio de bastantes investigadores desde 1975. Esta labor ha permitido descubrir una amplia gama de pares satisfaciendo esta condición. En el caso de presiones continuas, el elemento más "económico " (en el sentido de que el espacio de velocidades resulta de añadir un mínimo de grados de libertad al espacio de presiones) es el $\boldsymbol{P}_1$- Burbuja - $\boldsymbol{P}_1$, también llamado mini-elemento. Con objeto de recordar la definición de este elemento, denotemos por $\mathcal{T}_h$ a una triangulación de Ω. Suponemos que $\mathcal{T}_h$ está formado por triángulos si $d = 2$ y por tetraedros si $d = 3$. Denotemos por $\lambda_1^{(K)}, \cdots, \lambda_{d+1}^{(K)}$ las coordenadas baricéntricas de un elemento $K \in \mathcal{T}_h$. Denotemos por $\hat{b}_K$ el polinomio de grado $d+1$ dado por $\hat{b}_K = \lambda_1^{(K)} \cdot \lambda_2^{(K)} \cdots \lambda_{d+1}^{(K)}$. Notemos que $\hat{b}_K \in \left[H_0^1(K)\right]^d$. Suponemos $\hat{b}_K$ extendido por cero fuera de K. Consideraremos el siguiente espacio de elementos finitos "burbuja " sobre $\mathcal{T}_h$:

$$\boldsymbol{B}_h(\Omega) = \left\{ \hat{v} : \Omega \to \boldsymbol{R} \text{ tal que } \hat{v}_{|K} \in \text{Span}\{\hat{b}_K\}, \ \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Definamos por otra parte

$$\left.\begin{array}{l} V_h(m) = \left\{ r \in L^2(\bar{\Omega}) \text{ tal que } r_{|K} \in \boldsymbol{P}_m, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ Y_h(m) = [V_h(m)]^d \cap \left[H_0^1(\Omega)\right]^d, \quad M_h(m) = V_h(m). \end{array}\right\} \tag{17}$$

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº9 (1996) 5-22

Aquí, $\boldsymbol{P}_m$ denota el espacio de polinomios sobre $\boldsymbol{R}^d$ de grado menor o igual que m. Entonces, el Mini-elemento es $\left(Y_h(1) \oplus [\boldsymbol{B}_h(\Omega)]^d, M_h(1)\right)$.

Si se pretende trabajar con presiones discontinuas, el espacio de velocidad debe ser más rico en grados de libertad. En este caso, el par de espacios más económico conocido que satisface la condición inf-sup es $\left(Y_h(d), M_h(0) \cap C^0(\bar{\Omega})\right)$.

3 Métodos de Estabilización

Según lo dicho en la Sección anterior, la clave para conseguir estabilizar Elementos Finitos "incompresibles" es debilitar la condición de divergencia nula. Ello es realizado en los métodos clásicos enriqueciendo el espacio de velocidades en grados de libertad frente al espacio de presiones. Otra forma de lograrlo es relajar explícitamente la condición $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, cambiándola en $\nabla \cdot \mathbf{u}_h = g_h$, siendo g_h una función "pequeña " conveniente. Un método de este tipo fue introducido en Brezzi y Pitkäranta (1984), donde se considera la condición relajada $\nabla \cdot \mathbf{u}_h = \alpha\, h^2\, \Delta p_h$. Con ello se consigue cierto control sobre el gradiente de presión (y no sólo sobre la presión), impidiéndose la aparición de modos de presión espúreos. Como contrapartida, al tratarse de un método de penalización, un error de consistencia (de orden h para la norma L^2 de la presión) es inevitable. Esta dificultad es salvada por los métodos de estabilización, basados esencialmente en formulaciones de tipo Lagrangiano aumentado. Cuando la forma $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica, toda solución del problema de punto silla (11) lo es también de

$$\inf_{\mathbf{v}\in V} \sup_{q\in M} \left\{ J(\mathbf{v},q) - \alpha \|\mathcal{A}v + \nabla q - \mathbf{f}\|_{-1} \right\}, \tag{18}$$

donde $\mathcal{A}v = -\nu\Delta v$ y α es un coeficiente a determinar. En Hughes, Franca y Balestra (1986) se propone discretizar este último problema reemplazando la norma H^{-1} del operador por una aproximación:

$$\inf_{\mathbf{v}_h\in Y_h} \sup_{q_h\in M_h} \left\{ J(\mathbf{v}_h,q_h) - \alpha \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \|\mathcal{A}\mathbf{v}_h + \nabla q_h - \mathbf{f}\|_{0,K}^2 \right\}. \tag{19}$$

Se trata del conocido método "Galerkin - Least Squares". El coeficiente h_K^2 actúa como un factor de escala que relaciona la norma L^2 con la norma H^{-1}, elemento a elemento. Las ecuaciones de Euler - Lagrange asociadas a (19) son

$$\left.\begin{array}{l} \text{Obtener } (\mathbf{y}_h,p_h) \in Y_h \times M_h \text{ tal que} \\ B_{GLS}(\mathbf{y}_h,p_h;\mathbf{v}_h,q_h) = F_{GLS}(\mathbf{v}_h,q_h), \quad \forall(\mathbf{v}_h,q_h) \in Y_h \times M_h; \end{array}\right\} \tag{20}$$

siendo

$$\begin{aligned} B_{GLS}(\mathbf{y},p;\mathbf{v},q) &= B(\mathbf{y},p;\mathbf{v},q) - \alpha \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2(\mathcal{A}\mathbf{y}+\nabla p, \mathcal{A}^*\mathbf{v}+\nabla q)_K; \\ F_{GLS}(\mathbf{v},q) &= \langle \mathbf{f},\mathbf{v}\rangle - \alpha \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2(\mathbf{f}, \mathcal{A}^*\mathbf{v}+\nabla q)_K. \end{aligned}$$

Aquí, $\mathcal{A}^*$ es el operador adjunto de $\mathcal{A}$. Cuando el operador no es simétrico (caso $\mathbf{u}\neq 0$), el método GLS es también (20), con $\mathcal{A}\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v}$, (y $\mathcal{A}^*\mathbf{v} = -\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v}$). Sin embargo, ahora la solución $(\mathbf{u},p)$ no es punto de silla de ningún funcional.

En el caso de elementos finitos afines a trozos, el método GLS se conoce como "Streamline - Upwind / Petrov - Galerkin" o, abreviadamente, SUPG. De hecho, este método fue desarrollado en primer lugar en Brooks y Hughes (1982), y dio lugar posteriormente a los métodos GLS. Observemos que en el método SUPG se tiene $\Delta\mathbf{v}_h = 0$ sobre cada elemento K, con la consiguiente simplificación de la estructura de B_{GLS} y F_{GLS}.

Una interesante propiedad del método GLS es que es consistente, en el sentido de que la solución exacta verifica el problema discreto (20), al igual que el método de Galerkin. Sin embargo, es estable únicamente para valores del parámetro α pequeños, por debajo de un valor crítico específico para cada Elemento Finito concreto, y que resulta difícil de calcular.

Desde el punto de vista computacional, el método GLS presenta la ventaja de proporcionar un sistema lineal con matriz simétrica si el operador $\mathcal{A}$ lo es. En efecto, supongamos $\mathbf{u}=0$. Definamos las matrices $\tilde{A}$, $\tilde{R}$, $\tilde{C}$ de dimensiones $N_v\times N_v$, $N_p\times N_v$ y $N_p\times N_p$, respectivamente, así como los vectores columna $\vec{\mathbf{f}}_1$ y $\vec{\mathbf{f}}_2$, de dimensiones N_v y N_p, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{il} &= \nu(\nabla\phi_l,\nabla\phi_i) + \alpha\,\nu^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2(\Delta\phi_l,\Delta\phi_i)_K, \\ \tilde{R}_{ij} &= -(\nabla\cdot\phi_i,\psi_j) - \alpha\,\nu \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2(\nabla\psi_j,\Delta\phi_i)_K, \\ \tilde{C}_{kj} &= -\alpha \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2(\nabla\psi_j,\nabla\psi_k)_K, \\ \mathbf{f}_{1i} &= \langle\mathbf{f},\phi_i\rangle - \alpha\,\nu \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2(\mathbf{f},\Delta\phi_i)_K, \quad \mathbf{f}_{2k} = -\alpha \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2(\mathbf{f},\nabla\psi_k)_K. \end{aligned}$$

Entonces, el problema (20) es equivalente al sistema lineal

$$\tilde{A}\,\vec{\mathbf{y}} + \tilde{R}\,\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{f}}_1, \quad \tilde{R}^t\,\vec{\mathbf{y}} + \tilde{C}\,\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{f}}_2. \tag{21}$$

Se trata de un sistema que puede ser entendido como una perturbación "estabilizante" del sistema (15). De hecho, la matriz $\tilde{C}$ es definida negativa, lo que permite obtener $\vec{\mathbf{p}}$ en términos de $\vec{\mathbf{y}}$:

$$\vec{\mathbf{p}} = \tilde{C}^{-1}(\vec{\mathbf{f}}_2 - \tilde{R}\,\vec{\mathbf{y}}), \quad (\tilde{A} - \tilde{R}\tilde{C}^{-1}\tilde{R}^t)\,\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{f}}_1 - \tilde{R}\tilde{C}^{-1}\,\vec{\mathbf{f}}_2.$$

La matriz $\tilde{A}$ es definida positiva si el parámetr α es positivo y suficientemente pequeño , como consecuencia de la estabilidad del método GLS. Entonces, $\vec{\mathbf{y}}$ resulta ser solución de un sistema lineal con matriz simétrica definida positiva. En la práctica, no se puede obtener $\vec{\mathbf{p}}$ de forma explícita en términos de $\vec{\mathbf{y}}$, de modo que es necesario resolver directamente el sistema (21) por algún método iterativo apropiado.

Es interesante observar que la segunda ecuación en (21) puede ser reinterpretada como la discretización de una ecuación elíptica para p. En particular, supongamos que los elementos de M_h son funciones continuas a las que no se impone ninguna condición esencial sobre $\partial\Omega$. Supongamos también que la malla es regular, de modo que $h_K = h$, $\forall K \in \mathcal{T}_h$. Entonces, tal ecuación es

$$\begin{aligned} -\alpha\, h^2\, \Delta p &= -\nabla \cdot \mathbf{y} + \alpha\, h^2\, \nabla \cdot (\nu \Delta \mathbf{y} - \mathbf{f}) \text{ en } \Omega; \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= (\mathbf{f} - \nu \Delta \mathbf{y}) \cdot n \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

De este modo, estamos estabilizando efectivamente el cálculo de la presión, a cambio de incluir una condición de contorno artificial sobre la misma.

La restricción de estabilidad que presenta el método GLS fue salvada en Douglas y Wang (1989). Aquí se propone un método proviniente de (20) con una diferente estructura de la función test :

$$\begin{aligned} B_{DW}(\mathbf{y},p;\mathbf{v},q) &= B(\mathbf{y},p;\mathbf{v},q) - \\ &- \alpha \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2\, (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{y} - \nu\Delta\mathbf{y} + \nabla p, -\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v} + \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla q)_K\,; \\ F_{DW}(v,q) &= \langle \mathbf{f},\mathbf{v}\rangle - \alpha \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2\, (\mathbf{f}, -\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{y} + \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla q)_K\,. \end{aligned}$$

Observemos que si usamos elementos finitos afines a trozos, el método Douglas - Wang coincide con el SUPG. Este método es estable para cualquier valor de α, para Elementos Finitos muy generales. Como contrapartida, la matriz del sistema lineal asociado no es simétrica, incluso si el operador lo es. Esto no supone un gran problema, ya que en los casos de interés, $\mathbf{u} \neq 0$, de forma que el operador $\mathcal{A}$ no es simétrico.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº9 (1996) 5-22

Las propiedades de estabilidad mencionadas, junto con las estimaciones de error, se formalizan como sigue. Consideraremos Elementos Finitos triangulares, por brevedad :

Teorema 3.1 *Sean $Y_h = Y_h(m)$, con $m \geq 1$, definido según (17). Supongamos además que, o bien $M_h = M_h(l)$ y $m \geq d$ (caso de presiones discontinuas), o bien $M_h = M_h(l) \cap C^0(\bar{\Omega})$, con $l \geq 1$. Entonces el método GLS para $0 < \alpha < \alpha_0$ y el método de Douglas - Wang para todo $\alpha > 0$ verifican :*

i) Son estables, en el sentido de que existe una constante $\gamma^* > 0$ tal que

$$\inf_{(\mathbf{y}_h, r_h) \in Y_h \times \tilde{M}_h} \sup_{(\mathbf{v}_h, q_h) \in Y \times \tilde{M}_h} \frac{B^*(\mathbf{y}_h, r_h; \mathbf{v}_h, q_h)}{\|(\mathbf{y}_h, r_h)\|_{Y \times M} \, \|(\mathbf{v}_h, q_h)\|_{Y \times M}} > \gamma^*, \quad (22)$$

donde B^* denota, bien B_{GLS}, bien B_{DW}.

ii) Si $\mathbf{y} \in \left[H^{m+1}(\Omega)\right]^d$ y $p \in H^{l+1}(\Omega)$, se satisfacen las siguientes estimaciones de error :

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq C \, \left(h^k |\mathbf{y}|_{m+1} + h^{l+1} |p|_{l+1}\right), \quad (23)$$

donde C es una constante positiva.

Observemos que las anteriores estimaciones de error son optimales para los espacios de Elementos Finitos considerados. Desde el punto de vista técnico, éstas se obtienen con facilidad como consecuencia de la estabilidad (22) y la consistencia antes mencionada (y, lógicamente, las estimaciones de error de interpolación sobre los espacios Y_h y M_h).

4 Relación con métodos clásicos

Bajo ciertas condiciones, los métodos de estabilización descritos en la Sección anterior son equivalentes a determinados métodos cásicos. En concreto, a métodos que enriquecen el espacio de velocidades mediante funciones burbuja. Describiremos en esta Sección cómo el método SUPG es equivalente a la formulación clásica con el Mini-Elemento.

Recordemos que en el caso del Mini-Elemento, $Y_h = Y_h(1) \oplus [\boldsymbol{B}_h(\Omega)]^d$, $M_h = M_h(1)$. Descompongamos -de forma única- una función $\tilde{\mathbf{v}}_h \in Y_h$ como $\tilde{\mathbf{v}}_h = \mathbf{v}_h + \hat{\mathbf{v}}_h$, con $\mathbf{v}_h \in Y_h(1)$, $\hat{\mathbf{v}}_h \in [\boldsymbol{B}_h(\Omega)]^d$. Observemos que $\hat{\mathbf{v}}_h = \sum_{K \in \mathcal{T}} \hat{\mathbf{v}}_{h,K}$, con $\hat{\mathbf{v}}_{h,K} \in [\boldsymbol{B}_h(K)]^d$ (prolongada por cero a $\bar{\Omega} - K$). De (12) tenemos $\forall \hat{\mathbf{v}}_h \in [\boldsymbol{B}_h(\Omega)]^d$, $\forall q_h \in M_h$,

$$a(\mathbf{y}_h + \hat{\mathbf{y}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) + b(\hat{\mathbf{v}}_h, p_h) + b(\tilde{\mathbf{y}}_h, q_h) = \langle \mathbf{f}, \hat{\mathbf{v}}_h \rangle. \quad (24)$$

De aquí, tomando $q_h = 0$,

$$\begin{aligned} a(\hat{\mathbf{y}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) &= -a(\mathbf{y}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) - b(\hat{\mathbf{v}}_h, p_h) + \langle \mathbf{f}, \hat{\mathbf{v}}_h \rangle = \\ &= \langle \mathbf{f} - \mathcal{A}y_h - \nabla p_h, \hat{\mathbf{v}}_h \rangle. \end{aligned}$$

Denotemos por $\mathcal{R}_h$ al operador "de Riesz discreto" definido sobre $\left[H^{-1}(\Omega)\right]^d$ con valores en $[\boldsymbol{B}_h(\Omega)]^d$ dado por

$$a(\mathcal{R}_h\phi, \hat{\mathbf{v}}_h) = \langle \phi, \hat{\mathbf{v}}_h \rangle, \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_h \in [\boldsymbol{B}_h(\Omega)]^d, \quad \forall \phi \in \left[H^{-1}(\Omega)\right]^d. \tag{25}$$

Entonces, $\hat{\mathbf{y}}_h = \mathcal{R}_h(\mathbf{f} - \mathcal{A}y_h - \nabla p_h)$. Por otra parte, de (12) tenemos igualmente $\forall \mathbf{v}_h \in Y_h(1)$, $\forall q_h \in M_h$,

$$a(\mathbf{y}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + b(\mathbf{y}_h, q_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle - a(\hat{\mathbf{y}}_h, \mathbf{v}_h) - b(\hat{\mathbf{y}}_h, q_h),.$$

Observemos ahora que

$$a(\hat{\mathbf{y}}_h, \mathbf{v}_h) + b(\hat{\mathbf{y}}_h, q_h) = \langle \mathcal{A}^*\mathbf{v}_h + \nabla q_h, \hat{\mathbf{y}}_h \rangle.$$

De estas dos últimas identidades deducimos que $\mathbf{y}_h$ satisface el problema

$$B'_{GLS}(\mathbf{y}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = F'_{GLS}(\mathbf{f}; \mathbf{v}_h, q_h), \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in Y_h(1) \times M_h, \tag{26}$$

siendo

$$\begin{aligned} B'_{GLS}(\mathbf{y}, p; \mathbf{v}, q) &= B(\mathbf{y}, p; \mathbf{v}, q) - \\ &- a\left(\mathcal{R}_h(\mathcal{A}^*\mathbf{v} + \nabla q_h), \mathcal{R}_h(\mathcal{A}\mathbf{y} + \nabla p)\right); \\ F'_{GLS}(v, q) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - a\left(\mathcal{R}_h(\mathcal{A}^*\mathbf{v} + \nabla q), \mathcal{R}_h(\mathbf{f})\right). \end{aligned}$$

El problema (25) satisfecho por $\mathcal{R}_h\phi$ puede ser reducido a la resolución de un problema semejante sobre cada elemento K. En efecto, $\mathcal{R}_h\phi$ se puede descomponer como

$$\mathcal{R}_h\phi = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{R}_{h,K}\phi, \ \text{ con } \mathcal{R}_{h,K}\phi \in [\boldsymbol{B}_h(K)]^d,$$

siendo $\mathcal{R}_{h,K}\phi$ solución del problema elemental

$$a(\mathcal{R}_{h,K}\phi, \hat{v}_{h,K}) = \langle \phi, \hat{v}_{h,K} \rangle, \ \forall \hat{v}_{h,K} \in [\boldsymbol{B}_h(K)]^d.$$

Conocida una base a-ortonormal de $[\boldsymbol{B}_h(K)]^d$ (espacio de dimensión d), se puede obtener $\mathcal{R}_{h,K}\phi$ a mano. Este cálculo es la llamada "condensación estática de la burbuja" en la literatura referente a métodos de estabilización. Resulta notablemente simplificado en el caso de elementos finitos triangulares afines, si la forma $a(\cdot,\cdot)$ es reemplazada en (25) por ciertas formas $a_h(\cdot,\cdot)$ simétricas. En concreto, ello ocurre para formas con la estructura

$$a_h(\hat{\mathbf{w}},\hat{\mathbf{v}}) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} C_{K,h}\,(\nabla\hat{\mathbf{w}},\nabla\hat{\mathbf{v}})\,; \tag{27}$$

donde los $C_{K,h}$ son coeficientes uniformemente acotados (en K y h) superior e inferiormente por constantes positivas (Cf. Chacón (1996)). Esto permite explicitar los términos estabilizadores en (26), como sigue,

$$\begin{aligned} a_h(\mathcal{R}_h(\mathcal{A}^*\mathbf{v}_h &+ \nabla q_h),\,\mathcal{R}_h(\mathcal{A}\mathbf{y}_h+\nabla p_h-\mathbf{f})) = \\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \tau_{h,K}(\mathcal{A}^*\mathbf{v}_h+\nabla q_h,\,\mathcal{A}\mathbf{y}_h+\nabla p_h-\mathbf{f})_K; \end{aligned}$$

con

$$\tau_{h,K} = \frac{c_d^2}{C_{h,K}}\frac{|K|}{|\hat{b}_K|_1^2}, \quad \text{donde} \quad c_d = \frac{1}{|K|}\int_K \hat{b}_K\,dx = \begin{cases} 1/60 & \text{si } d=2, \\ 1/1680 & \text{si } d=3. \end{cases}$$

Mediante argumentos de cambio de escala se demuestra que el coeficiente $\tau_{h,K}$ es de orden h_K^2. Sin embargo, se puede recuperar exactamente $\tau_{h,K} = h_K^2$ (método (20)) si los coeficientes $C_{K,h}$ se eligen convenientemente. Observemos que, una vez calculados los coeficientes $\tau_{h,K}$ (que únicamente dependen de la triangulación y de los $C_{h,K}$), la parte "burbuja" de la formulación (12) ha desaparecido en la formulación (26).

De este modo, el espacio de burbujas $[\boldsymbol{B}_h(\Omega)]^d$ juega el papel de un espacio test en que la norma H^{-1} del residuo $\mathcal{A}\mathbf{y}_h+\nabla p_h-\mathbf{f}$ es minimizada. Ello permite estabilizar tanto el operador de convección como el gradiente de presión.

La estabilidad del método SUPG, ahora formulado por (26), está basada sobre el hecho de que el mini-elemento verifica la condición inf-sup discreta. En efecto, supongamos que $\mathbf{u}=0$, por abreviar sin eliminar dificultades esenciales.

Definamos $\mathbf{c}_h = \mathcal{R}_h(\mathcal{A}\mathbf{y}_h+\nabla p_h) = \mathcal{R}_h(-\nu\Delta\mathbf{y}_h+\nabla p_h)$. Observemos la propiedad de ortogonalidad

$$(\nabla\mathbf{v}_h,\nabla\hat{\mathbf{v}}_h) = 0, \quad \forall\mathbf{v}_h\in Y_h(1),\ \hat{\mathbf{v}}_h\in[\boldsymbol{B}_h(\Omega)]^d. \tag{28}$$

De aquí, $\mathcal{R}_h(-\nu\Delta\mathbf{y}_h)=0$, y $\mathbf{c}_h=\mathcal{R}_h(\nabla p_h)$.

Tomando $\mathbf{v}_h=\mathbf{y}_h$, $q_h=-p_h$ en (26), se tiene de inmediato

$$a(\mathbf{y}_h,\mathbf{y}_h)+a_h(\mathbf{c}_h,\mathbf{c}_h) = \langle\mathbf{f},\mathbf{y}_h\rangle.$$

Por tanto,

$$|\mathbf{y}_h|_1 \le \frac{\|\mathbf{f}\|_{-1}}{\nu}, \quad |\mathbf{c}_h|_1 \le \frac{\|\mathbf{f}\|_{-1}}{\nu}. \tag{29}$$

Tomemos ahora $q_h = 0$ en (26). Entonces,

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, p_h) = a(\mathbf{y}_h, \mathbf{v}_h) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle \leq 2\, \|\mathbf{f}\|_{-1} |\mathbf{v}_h|_1, \quad \forall \mathbf{v}_h \in Y_h(1). \tag{30}$$

Por otra parte, de la definición de $\mathbf{c}_h$, se tiene

$$(\nabla \cdot \hat{\mathbf{v}}_h, p_h) = \langle \nabla p_h, \hat{\mathbf{v}}_h \rangle = -a_h(\mathbf{c}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) \leq C_1\, \|\mathbf{f}\|_{-1} |\hat{\mathbf{v}}_h|_1, \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_h \in [B_h(\Omega)]^d; \tag{31}$$

para cierta constante C_1 positiva. Combinando estas dos últimas desigualdades,

$$(\nabla \cdot (\mathbf{v}_h + \hat{\mathbf{v}}_h), p_h) \leq 2\, C_2\, \|\mathbf{f}\|_{-1} (|\mathbf{v}_h|_1 + |\hat{\mathbf{v}}_h|_1) \leq 2\sqrt{2} C_2\, \|\mathbf{f}\|_{-1} (|\mathbf{v}_h + \hat{\mathbf{v}}_h|_1).$$

Esta última desigualdad se debe a la propiedad de ortogonalidad (28). Usando ahora el que el mini-elemento satisface la propiedad inf-sup (Ver Lema 2.1), se deduce

$$\|p_h\|_0 \leq C_3\, \|\mathbf{f}\|_{-1}. \tag{32}$$

Las estimaciones (29) y (32) formalizan la estabilidad del método. Afinando un poco el análisis anterior, se demuestra que existe una constante $\bar{\gamma} > 0$ tal que $\forall (\mathbf{z}_h, r_h) \in Y_h(1) \times \tilde{M}_h$ se verifica

$$\sup_{(\mathbf{v},q) \in Y_h(1) \times \tilde{M}_h} \frac{B'_{SUPG}(\mathbf{z}_h, r_h; \mathbf{v}, q)}{\|(\mathbf{v}, q)\|_{Y \times M}} \geq \bar{\gamma} \left[\|(\mathbf{z}_h, r_h)\|_{Y \times M} + \frac{|\mathcal{R}_h(\mathcal{A}\mathbf{z}_h + \nabla r_h)|_1}{\|(\mathbf{z}_h, r_h)\|_{Y \times M}} \right].$$

Esta estimación implica, en particular, la estimación general de estabilidad (22). De aquí se siguen las estimaciones de error (23) con $k = 1$ y $l = 0$.

5 Ecuaciones de Navier-Stokes

La formulación (26) del método GLS resulta más coherente con la regularidad H^{-1} del operador $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{y}_h - \nu \Delta \mathbf{y}_h + \nabla p_h$ que la formulación habitual (19). En efecto, (19) requiere regularidad –al menos local– L^∞ para $\mathbf{u}$ y L^2 para $\mathbf{f}$. Sin embargo, (26) se puede extender sin dificultad al caso general $\mathbf{u} \in [L^p(\Omega)]^d$ ($p > d$), $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^d$. Ello permite extender de forma natural el método GLS a la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes (2).

Consideramos la siguiente formulación variacional de las ecuaciones (2):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Obtener } (\mathbf{u}, p) \in Y \times M \text{ tal que} \\ T_{NS}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = < \mathbf{f}, \mathbf{v} >, \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in Y \times M; \end{array} \right\} \tag{33}$$

donde

$$T_{NS}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = c(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu\, (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{u}, q).$$

Aquí, $c(\cdot;\cdot,\cdot)$ es una forma trilineal sobre $Y \times Y \times Y$, definida por

$$c(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v},\mathbf{w}) + \frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{u},\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}), \quad \forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in Y. \tag{34}$$

La forma c es continua sobre Y y satisface $c(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0$, $\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in Y$.

Según Girault y Raviart (1988), el problema (33) tiene al menos una solución. Además, esta solución es única si $\|\mathbf{f}\|_{-1}/\nu^2 < \eta$, donde $\eta > 0$ es una constante dependiente de la forma c.

Nuestra discretización de la formulación (33) es

$$\left.\begin{array}{l} \text{Obtener } (\mathbf{u}_{h},_{h}p) \in Y_h(1)\times M_h \text{ tal que } \forall(\mathbf{v}_h,q_h)\in Y_h(1)\times M_h, \\ T_{SUPG}(\mathbf{u}_h,p_h;\mathbf{v}_h,q_h) \;=\; \Phi_{SUPG}(\mathbf{f};\mathbf{v}_h,q_h); \end{array}\right\} \tag{35}$$

donde

$$\begin{aligned} T_{SUPG}(\mathbf{u},p;\mathbf{v},q) &= c(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v}) + \nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v}) - (p,\nabla\cdot\mathbf{v}) - (\nabla\cdot\mathbf{u},q) - \\ &- a_h\left(\mathcal{R}_h(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p),\, \mathcal{R}_h(-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla q)\right); \\ \Phi_{SUPG}(\mathbf{f};\mathbf{v},q) &= \langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle - a_h\left(\mathcal{R}_h(\mathbf{f}),\, \mathcal{R}_h(-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla q)\right). \end{aligned}$$

Mediante el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, se puede garantizar que el problema (35) posee al menos una solución que verifica, para cierta constante $C > 0$,

$$\|\mathbf{u}_h\|_1 + \|p_h\|_0 + \|\mathbf{c}_h\|_1 \le C\,\|\mathbf{f}\|_{-1}; \tag{36}$$

siendo ahora $\mathbf{c}_h = \mathcal{R}_h(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p)$. Esta estimación permite obtener el siguiente resultado :

Teorema 5.1 *La solución (u_h, p_h) de (35) que verifica (36) contiene alguna subsucesión que converge débilmente en $\left[H_0^1(\Omega)\right]^d \times L^2(\Omega)$ hacia una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes (33). Además, si esta solución es única, es la sucesión completa la que converge.*

La demostración hace uso como elemento innovador de una interesante propiedad de las sucesiones de funciones burbuja : Si una sucesión $\{\hat{\mathbf{v}}_h\}_{h>0}$ tal que $\hat{\mathbf{v}}_h \in [B_h(\Omega)]^d$ está acotada en $\left[H_0^1(\Omega)\right]^d$, entonces converge débilmente a cero en $\left[H_0^1(\Omega)\right]^d$. Ello, junto argumentos habituales de compacidad, permite probar que los términos estabilizadores en (35) se anulan en el límite $h \to 0$.

Por último, la formulación (35) permite obtener de forma natural estimaciones optimales de error si se dan las condiciones suficientes de unicidad de solución :

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº9 (1996) 5-22

Teorema 5.2 *Supongamos que* $\|\mathbf{f}\|_{-1}/\nu < \eta$. *Supongamos que* $\mathbf{u}\left[H^2(\Omega)\right]^d$, $p \in \left[H^1(\Omega)\right]$. *Entonces existe una constante dependiente de* $\mathbf{u}$ *y* p *y un* $h_0 > 0$ *tales que si* $0 < h < h_0$, *entonces*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_1 + \|p - p_h\|_0 \le C\, h.$$

Este teorema utiliza de forma esencial dos elementos : la regularidad de $\mathbf{u}$ y p, y ciertas estimaciones de normas L^q, $2 \le q \le 6$, de funciones burbuja :

$$\|\hat{\mathbf{v}}_h\|_{0,p} \le C\, h^\alpha\, |\hat{\mathbf{v}}_h|_1, \ \forall \hat{\mathbf{v}}_h \in [\boldsymbol{B}_h(\Omega)]^d,$$

donde α verifica $\alpha/2 + (1-\alpha)/6 = 1/q$.

Queda aún la labor de determinar los coeficientes de estabilización. Se trata de un problema mayor en el desarrollo de estas técnicas, que áun está por resolver plenamente. La calidad de una solución numérica concreta asociada a una malla depende fuertemente de los parámetros de estabilización que hayan sido usados. En la práctica, se definen los $\tau_{h,K}$ de modo que se tenga en cuenta la talla relativa local de los términos de convección y de difusión. $\tau_{h,K}$ es una función del número de Peclet local ,

$$Pe_K = \frac{\mathbf{U}_K h_K}{\nu} \quad \text{con} \quad \mathbf{U}_K = \|\mathbf{u}\|_{0,p;K}.$$

Habitualmente, $\tau_{h,K}$ es de la forma

$$\tau_{h,K}(Pe_K) = A\,\frac{h_K}{\mathbf{U}_K}\,\min(Pe_K, P) = \begin{cases} A\,\dfrac{h_K^2}{\nu} & \text{si } Pe_K \le P, \\ A\,P\,\dfrac{h_K}{\mathbf{U}_K} & \text{si } Pe_K > P; \end{cases} \tag{37}$$

donde A es una constante, y P es un "escalón" predeterminado para el número de Péclet. Esto permite por una parte introducir una estabilización conveniente en zonas de grandes gradientes de velocidad debidos a convección dominante (grandes Pe_K). Por otra parte, se introducen niveles bajos de difusión numérica (de orden h_K^2) en regiones donde la difusión es dominante (bajos Pe_K).

Observemos que en la discretización (37) los coeficientes $\tau_{h,K}$ son funciones no lineales de la solución $\mathbf{u}_h$. Si embargo, el análisis anterior se puede extender a este caso, y los Teoremas 5.1 y 5.2 siguen siendo válidos.

Digamos, por último, que el análisis anterior puede extenderse a elementos finitos de órdenes superiores de interpolación, o bien a métodos de tipo Douglas - Wang y otros, con ciertas adaptaciones técnicas.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº9 (1996) 5-22

En definitiva, la formulación (26) de los métodos de estabilización en términos de operadores "de condensación estática" tiene en cuenta de forma natural la regularidad H^{-1} del operador a estabilizar. Esta formulación proporciona un marco matemático para el análisis numérico de estos métodos –entendiendo como tal el análisis de estabilidad, convergencia y estimaciones de error–, completamente análogo al que se tiene en el caso de los métodos clásicos. Ello permite incluso realizar tal análisis numérico en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, mejorando el análisis realizado hasta ahora con las formulaciones habituales.

Referencias

[1] I. BABUŠKA (1973), *The Finite Element Method with Lagrange multipliers.* Numer. Math. 20, pp. 179-192.

[2] F. BREZZI (1974), *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange Multipliers.* R.A.I.R.O. Anal. Numer., R2, pp. 129-151.

[3] F. BREZZI, M. FORTIN (1991), *Mixed and Hybrid Finite Elements.* Springer-Verlag.

[4] F. BREZZI, J. PITKÄRANTA (1984), *On the stabilization of Finite Elements approximations of the Stokes problem*, Springer-Verlag, Berlín. In Efficient Solutions of Elliptic Systems, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 10 (W. Hackbush eds.), pp. 11-19.

[5] A. N. BROOKS, T. J. R. HUGHES (1982), *Streamline/Upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows, with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 32, pp. 199-259.

[6] T. CHACÓN REBOLLO (1996), *A term by term stabilization algorithm for Finite Element solution of incompressible flow problems.* Propuesto para publicación en Numer. Math.

[7] J. DOUGLAS, J. WANG (1989), *An absolutely stabilized Finite Element method for the Stokes problem*, Math. Comp. 52, pp. 459-508.

[8] L.P. FRANCA, S. L. FREY (1992), *Stabilized Finite Elements : II. The incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 99, pp. 209-233.

[9] L.P. FRANCA, T. J. R. HUGHES, R. STENBERG (1993), *Stabilized Finite Element Methods.* In "Incompressible Computational Fluid Dynamics" (M. D. Gunzburger and R. A. Nicolaides Eds.), Cambridge Univ. Press.

[10] V. GIRAULT, P. A. RAVIART (1986), *Finite Element Methods for Navier-Stokes equations.* Springer-Verlag.

[11] D. GRIFFITS (1979), *The construction of approximately divergence-free finite elements.* In "Mathematics of Finite Elements and Applications" (R. Whiteman, ed.) Academic Press.

[12] F. HECHT (1981), *Construction d'une base de fonctions P1 non-conformes á divergence nulle dans* $\boldsymbol{R}^3$. R.A.I.R.O. Anal. Numer. 15, pp. 119-150.

[13] T. J. R. HUGHES, L.P. FRANCA, M. BALESTRA (1986), *A new Finite Element formulation for CFD : V. Circumventing the Brezzi-Babuška condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations.* Comput. Methods Appl Mech. Engrg. 59, pp. 85-99.

[14] T. J. R. HUGHES, L.P. FRANCA, G. M. HUBERT (1989), *A new Finite Element formulation for CFD : VIII. The Galerkin-least-squares method for advective-diffusive equations.* Comput. Methods Appl Mech. Engrg. 73, pp. 173-189.

[15] J. L. LIONS (1969), Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites non Linéaires. Gauthier-Villars, París.

[16] PIRONNEAU, O. (1991), *Finite Element Methods for Fluids* Wiley - Masson.

[17] R. TEMAM (1977), *Theory and Numerical Analysis of the Navier-Stokes Equations.* North-Holland, Amsterdam.