

## Clasificación de problemas verbales de álgebra elemental a partir de su resolución mediante un modelo geométrico-lineal

María Victoria Martínez Videla; Francisco Fernández García;  
Pablo Flores Martínez

### Resumen

En el siguiente artículo presentamos los resultados de un estudio exploratorio descriptivo sobre la resolución gráfica de problemas de álgebra elemental. El estudio plantea la caracterización de un modelo de resolución gráfico, que hemos denominado modelo geométrico – lineal, y una clasificación de los problemas presentes en libros de texto a partir de su resolución utilizando dicho modelo.

### Abstract

In the following article we show the results of a descriptive exploratory study on the elementary algebra problem solving by a graphic method. The study raises the characterization of a graphical model of resolution, that we have denominated geometrical – linear model, and a classification of the text book's problems from its resolution using this model.

### Resumo

No seguinte artigo apresentamos os resultados de um estudo exploratorio descriptivo sobre a resolução gráfica de problemas de álgebra elemental. O estudo propõe a caracterização de um modelo de resolução gráfico, chamado modelo geométrico – lineal, e uma classificação dos problemas presentes em livros de texto a partir de sua resolução utilizando dito modelo.

## 1. Planteamiento del Problema

El estudio de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar ha sido un tema de amplio debate en Didáctica de la Matemática. Diversos autores han desarrollado investigaciones en torno a este tema abordando distintos aspectos. Es así como se han desarrollado ciertos núcleos temáticos, que han ido evolucionando como temas de interés en los últimos 30 años. Kieran (2006) describe de qué manera el estudio de temáticas como la transición de la aritmética al álgebra, las variables y las incógnitas, las ecuaciones y su resolución y la resolución de problemas de enunciado han sido y siguen siendo importantes núcleos de investigación. Dichos núcleos de investigación se han ido enriqueciendo al incluir otros elementos como el uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje del álgebra, las múltiples representaciones y el papel que desempeña la generalización en el aprendizaje de ciertos conceptos. Además, los últimos quince años, se han sumado a las temáticas anteriores el trabajo en torno al desarrollo del pensamiento algebraico desde la primaria, el álgebra del profesor y la modelización dinámica de situaciones físicas (Kieran, 2006; 2007).

Inmersos en la línea de investigación que tiene por objeto el estudio de la resolución de problemas aritméticos - algebraicos, en este trabajo hemos pretendido caracterizar una herramienta gráfica que permita resolver problemas de enunciado, entendiendo que el uso de diversas representaciones puede facilitar e enriquecer la comprensión de ciertos conceptos e incluso de algunos procedimientos algebraicos (Duval, 1999; Diezmann y English, 2001; Gagatsis y Elia, 2004).

La problemática que presentamos, además de guardar relación con la líneas de investigación que se han desarrollado en la didáctica del álgebra, responde a ciertas demandas curriculares actuales, como por ejemplo las realizadas por el NCTM (2000) a través de Los Principios y Estándares para la Educación Matemática, así como el estudio PISA de la OCDE (2004).

En particular, Los Principios y Estándares para la Educación Matemática definen en el Estándar Álgebra, que ésta “se centra en las relaciones entre cantidades, las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis del cambio” (NCTM, 2000, p.39). Además, especifica que, aún cuando muchos equiparan el álgebra escolar con la manipulación de símbolos, es importante que los alumnos comprendan sus conceptos, las estructuras y principios que rigen la manipulación de símbolos y cómo se pueden utilizar para registrar ideas y comprender situaciones.

Ahora bien, lo descrito en los Estándares respecto de lo que debe ser el álgebra escolar no concuerda exactamente con la visión más frecuente que se suele tener de lo que es, o ha sido hasta ahora, el álgebra en la escuela. En efecto, Kaput (2000) plantea que la imagen tradicional del álgebra se reduce a la simplificación de expresiones algebraicas, la resolución de ecuaciones y el aprendizaje de reglas de manipulación de símbolos, y ha sido enseñada y aprendida como un conjunto de procedimientos desconectado del resto del conocimiento matemático y del mundo real.

Reducir el álgebra a la manipulación simbólica conlleva que tenga muy poca relevancia en la vida cotidiana, cosa que se contrapone con la importancia de que todos los estudiantes tengan una oportunidad efectiva de aprender álgebra, pues sin ella se pierden opciones de ejercer muchas ocupaciones en el ámbito profesional, ya sea bien porque el álgebra es necesaria para llevarlas a cabo, bien porque es necesaria una cualificación previa. Debido a esto, el álgebra es considerada como una puerta para las matemáticas superiores y como el lenguaje científico por excelencia (Kaput, 2000).

Actualmente hay interés por el desarrollo de competencias, siendo éste un importante propósito en Educación Matemática. La prueba PISA que realizó la OECD (2004) se propuso como objetivo determinar las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar matemáticamente y, con dicho fin, ha identificado ocho competencias matemáticas características que permitirían que un sujeto matemate, es decir, que realice y trabaje con tareas matemáticas. Dichas competencias son: pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones y usar herramientas y recursos.

La prueba considera las habilidades de representación como uno de los

factores en los que se sustenta el grado de dificultad de un problema, destacando que se abarcan *“desde los problemas en los que solo se emplea una clase de representación hasta aquellos otros en los que los alumnos deben alternar entre distintos modos de representación o hallar por sí mismos el modo de representación más adecuado”* (OCDE, 2006, p. 118).

Queda de manifiesto la necesidad de desarrollar herramientas que favorezcan que la enseñanza y el aprendizaje del álgebra esté basada en la comprensión, mediante la utilización que diversos tipos de representación, que permitan dotar de sentido tanto los conceptos algebraicos, como el lenguaje alfabético-simbólico y los procedimientos dentro de dicho lenguaje, colaborando con el desarrollo de competencias matemáticas específicas como las mencionadas anteriormente.

Kieran (2006) describe que dentro del grupo PME las representaciones gráficas en la década de los 90 comienzan a ser vistas como herramientas para introducir las representaciones simbólicas con significado y, como consecuencia, surge la problemática de la comprensión de las conexiones entre ecuaciones y gráficos, considerado como fundamental para desarrollar el significado de varias representaciones algebraicas.

Basándonos en los planteamientos ya descritos, en el presente trabajo hemos realizado un análisis de los problemas de álgebra elemental que se trabajan en los primeros cursos de educación secundaria y hemos procedido a su resolución a través de un método de resolución gráfico.

Por lo tanto, como elementos para la reflexión, hemos trabajado en dos áreas de referencia: la resolución de problemas (RP) y los sistemas de representación (SR). La RP juega un doble papel en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 2000): por una parte, el desarrollo histórico de la matemática muestra que la evolución de los conceptos se debe a la resolución de algún problema determinado y, por otra, se utiliza como metodología de enseñanza, tanto en términos de la instrucción como de la evaluación.

En cuanto a los SR, encontramos en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, dentro del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico (FQM 193 del PAI de la Junta de Andalucía), que se han desarrollado dos tesis doctorales (Fernández, 1997; Espinosa, 2004) relacionadas con la RP de álgebra elemental. En ellas el trabajo se centra en caracterizar tipologías de resolutores de problemas de álgebra, en base a los SR que los estudiantes utilizan.

Un elemento que llamó nuestra la atención de los resultados obtenidos en los estudios de Fernández (1997) y Espinosa (2004) es que, dentro de los SR que emplean los estudiantes para resolver problemas, el menos utilizado es el que se basa en la utilización de gráficos o dibujos. Dicha situación se contrapone con el planteamiento de diversos autores que han resaltado la utilidad del uso de gráficas e imágenes visuales en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos (Rico, 1997; Duval, 1999; NCTM, 2000; Goldin y Shteingold, 2001; Diezman y English, 2001; Gagatsis y Elia, 2004).

Por otra parte, aún cuando en los estudios de Fernández (1997) y Espinosa (2004) el SR que definen como gráfico fue el menos utilizado, éste surge de manera

espontánea (no forzada) por parte de los estudiantes, lo que nos llevó a plantearnos el siguiente interrogante:

*“¿Por qué al enfrentar problemas algebraicos no se utiliza el sistema de representación gráfico con mayor frecuencia?”*

Considerando el carácter amplio de la pregunta, nos planteamos si era posible la utilización, de forma general para la RP algebraicos escolares, de un modelo gráfico particular, que vamos a denominar modelo geométrico – lineal (MGL), y que se caracteriza por la utilización de segmentos de una recta para representar y establecer las relaciones entre los datos y las incógnitas de los problemas, como describiremos más adelante. Nos planteamos la RP a través de la utilización de este modelo como una alternativa que puede permitir una mejor y más significativa comprensión del proceso de resolución de un problema verbal.

Centrando la investigación en determinar la utilidad y funcionalidad del modelo escogido nos planteamos los siguientes objetivos generales de investigación:

- Determinar si todos los problemas algébricos presentes en los libros de texto de matemáticas de educación secundaria se pueden resolver utilizando el MGL.
- Determinar y caracterizar tipologías de problemas de álgebra elemental, a partir de las posibles resoluciones basadas en el uso del MGL.

## 2. Referencias Teóricas

### 2.1 Sistemas de representación

En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se utilizan diferentes SR para poder trabajar con conceptos de naturaleza abstracta. Como plantea Rico (1997), las representaciones que permiten trabajar en un sistema conceptual y los modelos asociados a determinados conceptos, deben considerarse pilares fundamentales en el momento de organizar la enseñanza.

Para efectos de nuestro trabajo vamos a aclarar los términos representación y modelo. Cuando hablamos de representación nos centramos en las representaciones externas que se expresan mediante el uso de papel y lápiz, entendiéndolas en el sentido de Castro y Castro (1997) como: *“notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como su características y propiedades más relevantes”* (pp. 96).

Además, como definición de SR adoptamos la utilizada por Fernández (1997): *“es un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotado de reglas y convenios, que permite expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto”* (p. 73).

Como plantean algunos autores como Rojano (1996), en términos generales, los SR a los que nos referimos se pueden clasificar en tres grupos: los numéricos, los gráficos y los simbólicos. Fernández (1997) propone una clasificación más detallada de los SR para la RP algebraicos específicamente, compuesta por cinco categorías posibles, que caracterizan tipologías de resolutores. Debido a la riqueza de posibilidades del sistema numérico propone dos tipos de SR numéricos diferenciados: ensayo – error y parte – todo. Por otra parte entre el SR gráfico y

simbólico agrega un “híbrido”, considerando que tiene identidad propia como para destacarlo como diferente, al que denomina SR gráfico – simbólico, con el que completa cinco SR.

Nuestro trabajo se sitúa en la utilización del sistema de representación gráfico, considerando a éste como el que utiliza un código gráfico para plantear las relaciones entre datos e incógnitas y en donde las operaciones numéricas se efectúan a partir de las relaciones establecidas en el gráfico (Fernández, 1997).

En nuestro trabajo abordamos el estudio de uno de los posibles modelos para resolver problemas algebraicos dentro del SR gráfico, considerando que un modelo es *“una esquematización abstracta de la realidad, entendiendo que esta realidad puede pertenecer al mundo de los fenómenos o al de los conceptos”* (Castro y Castro, 1997, pp. 106). En este sentido el modelo, que describiremos más adelante, llega a ser una “esquematización abstracta de la realidad” entendiendo que la realidad, en este caso, es la descrita por el enunciado del problema y el modelo representa de forma esquemática esa realidad.

## 2.2 Resolución de problemas

La RP ha ocupado un espacio importante en las investigaciones que se realizan en el campo de la Didáctica de la Matemática, debido a que se ha considerado como un eje esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a todos los niveles.

Dentro del estándar RP definido en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000), se expresa que la RP no sólo constituye un objetivo del aprendizaje de la matemática, sino que también es una metodología para alcanzarlo. Además, se menciona que ser un buen resolutor de problemas proporciona grandes beneficios en la vida diaria y en el trabajo y que la RP debería utilizarse para ayudar a los estudiantes a desarrollar con fluidez destrezas específicas a la hora de abordar sus problemas cotidianos.

Según Puig (1996), en un comienzo el interés en el estudio de la RP estuvo basado en teorías conductistas y, por tanto, centrado en el producto de las actividades de los resolutores y en cómo era posible enseñar métodos efectivos para solucionar problemas. Sin embargo, a partir de que las investigaciones, se realizaron desde una perspectiva más psicológica, se cambió de foco centrando el interés en el proceso de resolución y en el sujeto que resuelve.

Con el fin de estudiar qué utilización se hace del MGL en la RP se hace necesario realizar un análisis del proceso de resolución, para lo cuál utilizamos las fases descritas por Mayer (1986) y utilizadas por Fernández (1997) y Espinosa (2004) que son:

- Planteamiento: fase en la que se traduce a un lenguaje matemático el texto del problema mediante un sistema de representación, que permite establecer las relaciones entre los datos conocidos y los desconocidos.
- Ejecución: es el desarrollo de las relaciones establecidas en el planteamiento.
- Desempeño final: explicitación de el/los resultados pedidos en el texto del problema.



### 2.3 Modelo geométrico - lineal

Como planteamos inicialmente, nuestro trabajo se centró en el estudio de uno de los posibles modelos para resolver problemas algebraicos dentro del SR gráfico, dicho modelo es el que hemos llamado MGL.

El modelo en cuestión se basa en la utilización de segmentos lineales para representar las cantidades de magnitudes (tanto conocidas como desconocidas) y sus relaciones. Este modelo tiene la ventaja de: permitir representar variables discretas y continuas, ser de fácil manipulación, además de ser muy utilizado en problemas de otras áreas como la física. Es sabido también, que el modelo concebido como conjunto de segmentos lineales orientados tiene una estructura matemática de espacio vectorial.

Enmarcado en el SR gráfico, y tomando en cuenta el fundamento de dicho modelo, definimos el MGL en los siguientes términos:

*Consideraremos que se utiliza este modelo cuando se establecen las relaciones lineales entre los datos y las incógnitas, contenidas en el enunciado del problema, a través de segmentos de recta, en donde las incógnitas están representadas por trazos o partes de esos segmentos. La resolución del problema, por lo tanto, implica determinar el largo de dicho trazo o, en otros casos, establecer el número de trazos que cumplen las condiciones del problema.*

A continuación adjuntamos la resolución en MGL que realizaron dos alumnos sobre problemas escolares:

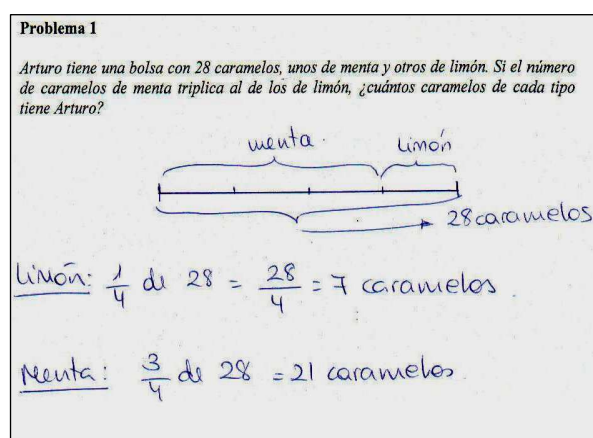


Figura 1

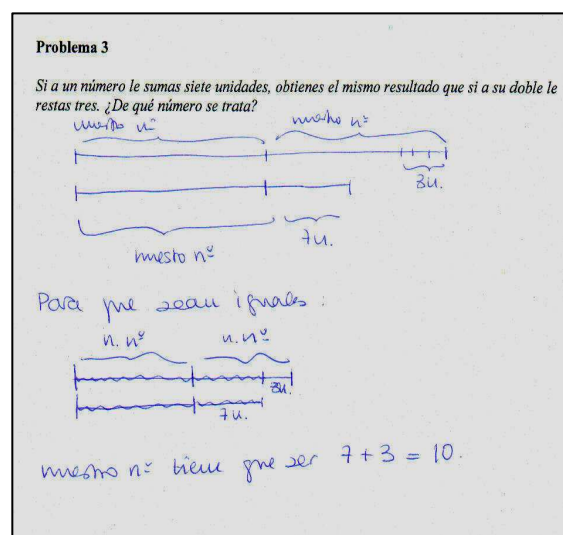


Figura 2

En ambos casos se resuelven los problemas haciendo uso de una gráfica lineal en la que se representan las cantidades involucradas.

El primer problema (Fig. 1), sobre un segmento lineal se establece la relación entre la cantidad de caramelos de menta y la cantidad de los caramelos de limón descrita en el enunciado. En este caso, se conoce el largo total de un segmento y se

pretende determinar el largo de las partes contenidas en él.

En el segundo problema (Fig. 2) se han planteado dos segmentos y se determina el largo del segmento desconocido comparando ambos.

### 3. Metodología

El planteamiento inicial de nuestro trabajo abordaba un campo muy amplio. En este artículo describimos una primera fase que hemos definido como un estudio exploratorio-descriptivo.

Con el fin de establecer una clasificación inicial de los problemas de álgebra escolar se desarrollaron dos etapas:

- Clasificación teórica de los problemas presentes en libros de texto de secundaria
- Elaboración y aplicación de una encuesta sobre el uso del MGL para la RP

El objetivo de la primera etapa fue poner a prueba el uso del MGL, con el fin de proponer una primera categorización de los problemas a partir de la resolución utilizando el modelo. Con la segunda etapa se pretendió elaborar un instrumento que permitiera corroborar las categorías propuestas como resultado de la primera etapa.

#### 3.1 Primera etapa: Clasificación teórica

Se revisaron problemas de álgebra elemental contenidos en textos escolares habituales en el mercado editorial, utilizados normalmente por los profesores y estudiantes de educación secundaria. Se escogieron 4 libros, dos de 1º de ESO y dos de 2º de ESO de ediciones recientes y que se han utilizado en los centros de secundaria. Los textos seleccionados fueron:

- Cólera, J. y Gaztelu, I. (2004). Matemática 1. España: Anaya.
- Cólera, J. y Gaztelu, I. (2003). Matemática 2. España: Anaya.
- Sánchez, J. y Vera, J. (2002a). Matemática 1. España: Oxford.
- Sánchez, J. y Vera, J. (2002b). Matemática 2. España: Oxford.

En ellos se analizaron los problemas de las unidades referidas a álgebra y ecuaciones, se resolvieron dichos problemas utilizando el MGL, lo que permitió identificar ciertas regularidades que dieron origen a una clasificación teórica de los problemas atendiendo a la tipología de su resolución.

#### 3.2 Segunda etapa: Aplicación de una encuesta

Con el fin de averiguar de qué manera un grupo de individuos resuelven problemas utilizando el MGL, se tomaron en cuenta las fases para la RP definidas anteriormente. Los resultados tuvieron en cuenta la utilización, o no, del MGL en las fases de planteamiento y ejecución de los problemas dado que en la fase de desempeño final no procede. Además, en las tres fases (planteamiento, ejecución y desempeño final) se estudió si se realizaron correctamente.

#### 3.3 Encuesta

Para elaborar la encuesta se escogió una muestra de los problemas presentes en los textos escolares, siguiendo los pasos que se describen a continuación:

- Búsqueda de problemas, de los analizados en la primera etapa, que implican resolución algebraica de ecuaciones de primer grado con una incógnita y de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- De acuerdo con la clasificación teórica obtenida en la 1ª etapa, se escogieron los problemas atendiendo a dos características: 1) el número de relaciones gráficas lineales necesarias para resolver el problema (una / más de una); 2) el tipo de números presentes en el enunciado (naturales o decimales).

Tomando en cuenta ambas características y sus combinaciones, se obtienen 4 clases de problemas, como se observa en la siguiente tabla:

Tipo de número	Número de relaciones necesarias	
	Una relación (1)	Más de una relación (2)
Números naturales (1)	(1 , 1)	(1 , 2)
Números decimales (2)	(2 , 1)	(2 , 2)

Tabla 1

A continuación elaboramos una encuesta, basada en tareas de lápiz y papel, formada por una selección de 5 problemas: uno de cada clase más un quinto problema de la clase (1,1), que jugó el papel de réplica, con el fin de verificar los resultados estadísticos.

Los problemas se organizaron en orden creciente de dificultad, de la siguiente manera:

- Problema 1: clase (1 , 1)
- Problema 2: clase (2 , 1)
- Problema 3: clase (1 , 2)
- Problema 4: clase (1 , 1), réplica
- Problema 5: clase (2 , 2)

### 3.4 Aplicación

Dado que quienes tienen una buena formación matemática tienden a resolver los problemas utilizando el SR simbólico (ecuaciones), y no están habituados a utilizar otros SR, según se puso de manifiesto en la tesis de Fernández (1997), se consideró pertinente elegir un conjunto de individuos que tuvieran una formación matemática avanzada a los que aplicar el instrumento en cuestión. Esto permitiría comprobar si los problemas propuestos se pueden resolver utilizando el MGL por estudiantes no habituados.

En consecuencia, se eligió a un grupo de individuos homogéneo, constituido por 19 estudiantes que cursaron la asignatura "Didáctica de la Matemática" correspondiente al CAP (Certificado de Aptitud Pedagógico) de la Universidad de Granada, durante el curso 2005 – 2006, todos ellos con una formación sólida en matemáticas superiores (17 licenciados en matemática, 1 licenciado en estadística y 1 ingeniero en telecomunicaciones).

### 4. Análisis de datos y resultados

Durante la investigación se realizaron dos análisis, uno en cada una de las etapas descritas. Como resultado de la 1ª etapa se obtuvo una clasificación que



hemos denominado clasificación teórica de los problemas y, a partir de la 2ª etapa, hemos obtenido una segunda clasificación de los problemas que llamamos empírica, producto del análisis estadístico de los datos obtenidos al aplicar el instrumento de los problemas a los individuos descritos.

#### 4.1 Clasificación teórica

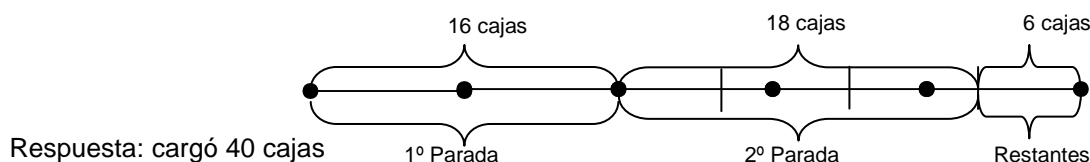
Al resolver los problemas utilizando el MGL, se observó que podemos distinguirlos según el número de relaciones gráficas lineales necesarias para representarlos en la fase de planteamiento, por lo que se ha decidido utilizar esta característica como criterio de clasificación.

Entendemos por relación gráfica lineal (RGL): *un segmento de recta sobre el que se representan diversas cantidades de una magnitud (conocidas y desconocidas) y la dependencia entre ellas a partir de las condiciones descritas por el enunciado del problema.* El número de RGL está dado por la cantidad de segmentos de recta que es necesario trazar para representar el problema y manipular dichas magnitudes.

**Categoría Nº 1:** Está constituida por problemas en que se describen las cantidades como partes de un total o se comparan utilizando la adición y sustracción. En esta categoría encontramos problemas con una o dos incógnitas. Sin embargo, en ambos casos basta con representar los datos y relaciones dadas por el enunciado en una sola RGL.

##### Ejemplo 1:

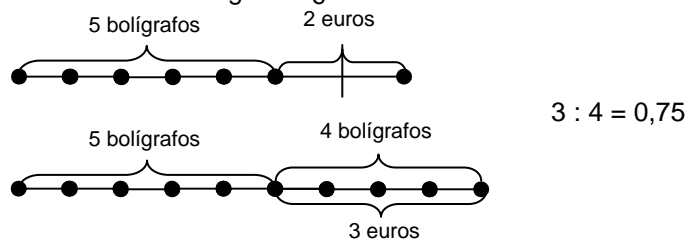
Un repartidor de frutas llena su furgoneta con varias cajas de tomates. En su primera parada deja los  $\frac{2}{5}$  de su carga, y en la segunda y última, los  $\frac{3}{4}$  de las cajas restantes. Si al final le quedan 6 cajas sin repartir, ¿cuántas cargó?



**Categoría Nº 2:** Compuesta por problemas en que es necesario plantear dos RGL, ambas dadas directamente por el enunciado que las plantea como una "igualdad". Para determinar la longitud del segmento es preciso comparar ambas RGL.

##### Ejemplo 2:

Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 euros. Si hubiera necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado un euro. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Cuánto dinero llevo?



Respuesta: cada bolígrafo cuesta 0,75 euros y llevo 5,75 euros

**Categoría Nº 3:** Problemas que se caracterizan por utilizar más de dos RGL. En algunas ocasiones se plantean dos relaciones iniciales y, posteriormente, requieren la elaboración de nuevas RGL a partir de ellas. En otras ocasiones se plantean directamente tres o más relaciones dadas por el enunciado.

En estos problemas hay que determinar la longitud de dos segmentos, ya que son problemas en que hay dos incógnitas involucradas.

Ejemplo 3:

Hace 28 años, la edad de un padre era 6 veces la de un hijo, pero hoy en día es solamente el doble. ¿Cuál es la edad actual de ambos?

Padre actual

Padre hace 28 años

28 años

Hijo hace 28 años

Hijo actual

Respuesta:  
 Edad del hijo:  $28 + 7 = 35$  años  
 Edad del padre:  $28 + 7 \cdot 6 = 70$  años

**4.2 Clasificación a partir de la encuesta. Análisis estadístico.**

La encuesta se aplicó en una sesión de 90 minutos. Se les pidió explícitamente a los estudiantes que utilizaran el MGL en la resolución de los problemas propuestos, para lo cual se comenzó leyendo una serie de instrucciones en este sentido y se comentó el ejemplo que aparece en el primer folio de la encuesta (Anexo).

Para el análisis estadístico de la información obtenida con la aplicación del instrumento, se realizó una codificación numérica de los datos a partir de las variables definidas inicialmente, y después se llevó a cabo un análisis de frecuencias simples y análisis clúster, como se describe a continuación.

**4.2.1 Utilización MGL en las fases de planteamiento y ejecución**

En la siguiente tabla se muestra el porcentaje de utilización de MGL, para cada problema, en las fases de planeamiento y ejecución:

Problema	Fase					
	Planteamiento			Ejecución		
	% no existe información	% utilizó otro modelo	% utilizó MGL	% no existe información	% utilizó otro modelo	% utilizó MGL
1	0	0	100	0	84,2	15,8
2	0	10,5	89,5	0	42,1	57,9
3	0	5,3	94,7	5,3	31,6	63,2
4	0	15,8	84,2	0	73,7	26,3
5	10,5	0	89,5	21,1	26,3	52,6

Tabla 2

A partir de la tabla anterior podemos precisar que:

- La gran mayoría de los sujetos fue capaz de utilizar el MGL en la fase de planteamiento, por encima del 84% en todos los casos.
- En la fase de ejecución de los problemas 1 y 4, una amplia mayoría de los sujetos (sobre el 70%) no utiliza el MGL.
- En la misma fase de ejecución, en los problemas restantes (2, 3 y 5), la mayoría de los sujetos fue capaz de utilizar el MGL, aunque el dato no supera el 65%.

#### 4.2.2. Corrección en la utilización del modelo en las fases de planteamiento y ejecución

En la siguiente tabla se recoge el porcentaje de sujetos que utilizaron el MGL de manera correcta y el porcentaje que lo hizo incorrectamente en las fases de planteamiento y ejecución de cada problema:

Problema	Fase			
	Planteamiento		Ejecución	
	% uso incorrecto	% uso correcto	% uso incorrecto	% uso correcto
1	10,5	89,5	0	100
2	0	100	0	100
3	16,7	83,3	25	75
4	6,3	93,7	20	80
5	17,7	82,3	50	50

Tabla 3

A partir de la tabla podemos concluir que:

- En la fase de planteamiento, en todos los problemas se utiliza correctamente el MGL (superior al 80%). Además, en la misma fase los problemas 3 y 5 son los que muestran mayor porcentaje de utilización incorrecta del MGL.
- En la fase de ejecución, para problemas 1 y 2 utilizan de manera correcta el modelo en el 100% de los casos y en los problemas 3 y 4 con un alto porcentaje de corrección, 75% y 80% respectivamente.
- El problema 5, en la fase de ejecución, es el que registra mayor porcentaje de uso incorrecto del MGL, llegando dicho porcentaje a un 50%.

#### 4.2.3 Relación entre los valores correctos de las tres fases

La Tabla 4 contiene el porcentaje de respuestas correctas correspondientes a cada etapa: planteamiento, ejecución y desempeño final empleando cualquier SR:

Problema	Fase		
	% Planteamiento Correcto	% Ejecución Correcta	% Desempeño Final Correcto
1	89,5	94,7	89,5
2	100	100	94,7
3	84,2	78,9	89,5
4	89,5	89,5	84,2
5	73,7	26,3	26,3

Tabla 4

- En la fase de planteamiento, todos los problemas son abordados correctamente por un alto porcentaje de individuos (más del 73%), siendo el problema 5 el que presenta menor porcentaje de corrección en dicha etapa.
- En las fases de ejecución y desempeño final, los problemas 1, 2, 3 y 4 se desarrollan correctamente por una gran mayoría de los individuos.
- El problema 5 es ejecutado correctamente por muy pocos individuos (26,3 %) en comparación con el resto de los problemas. Lo mismo sucede en la fase de desempeño final.

#### 4.2.4 Clúster por fases de resolución

Uno de los objetivos planteados para este trabajo consiste en determinar y caracterizar tipologías de problemas de álgebra elemental a partir de la utilización del MGL, para lo cual hemos utilizado un análisis clúster que, como plantea Salvador Figueras (2001), es una técnica eminentemente exploratoria puesto que la mayoría de las veces no utiliza ningún tipo de modelo estadístico para llevar a cabo el proceso de clasificación. Agrega que es una técnica muy adecuada para extraer información de un conjunto de datos sin imponer restricciones previas en forma de modelos estadísticos.

En nuestro caso, realizamos un análisis de clúster en las distintas fases de la RP, es decir, se realizó uno para la etapa de planteamiento y otro para la de ejecución en las que se consideró el uso o no del MGL y la corrección de la etapa y un tercer clúster para la etapa de desempeño final en la que se consideró sólo la corrección ya que el uso del modelo no procede. Para el análisis se utilizó el paquete estadístico SPSS.

#### Clúster según planteamiento

Como se puede apreciar en el siguiente gráfico, en la fase de planteamiento, se formaron tres clúster significativos que se describen a continuación:

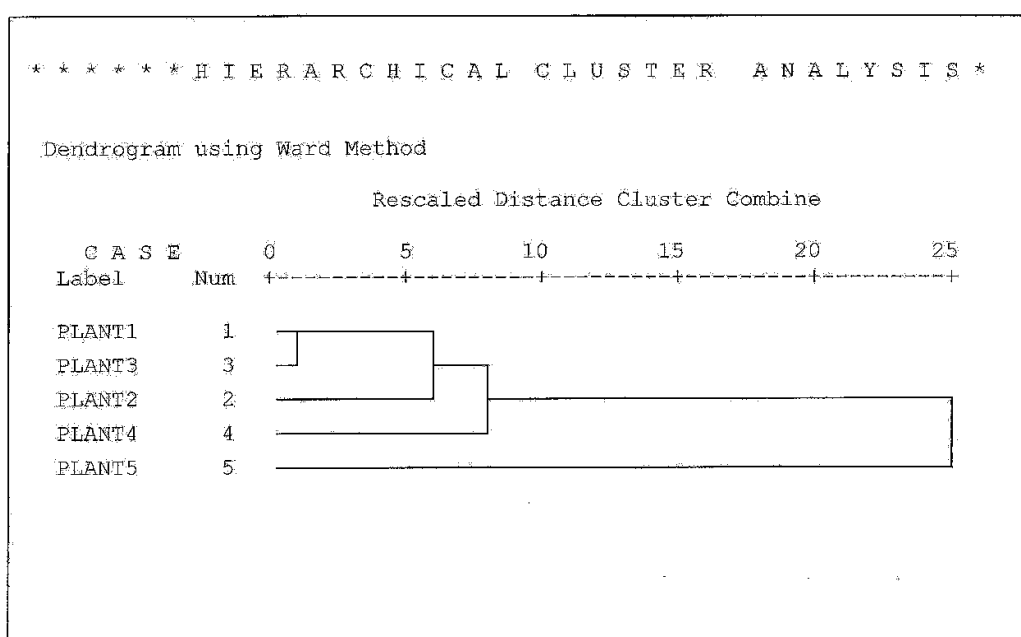


Gráfico 1

**Clúster 1.** En él se encuentran los problemas 1, 2 y 3, que se caracterizan por ser aquellos problemas en los que se utiliza con mayor frecuencia el MGL y, además, se utiliza correctamente.

**Clúster 2.** Este clúster está conformado por el problema 4. Este problema se caracteriza porque un alto porcentaje utiliza el MGL para su planteamiento. Sin embargo, se observa que hay un porcentaje significativo de sujetos, aproximadamente un 15%, que utiliza un modelo alternativo.

**Clúster 3.** Sólo el problema 5 pertenece este clúster, caracterizándose por ser el problema en el que menos se utiliza el MGL, y por ser el único problema que no es abordado por algunos sujetos (10,5%).

### Clúster según ejecución

En la fase de ejecución se formaron tres clúster, como se puede observar en el siguiente gráfico:

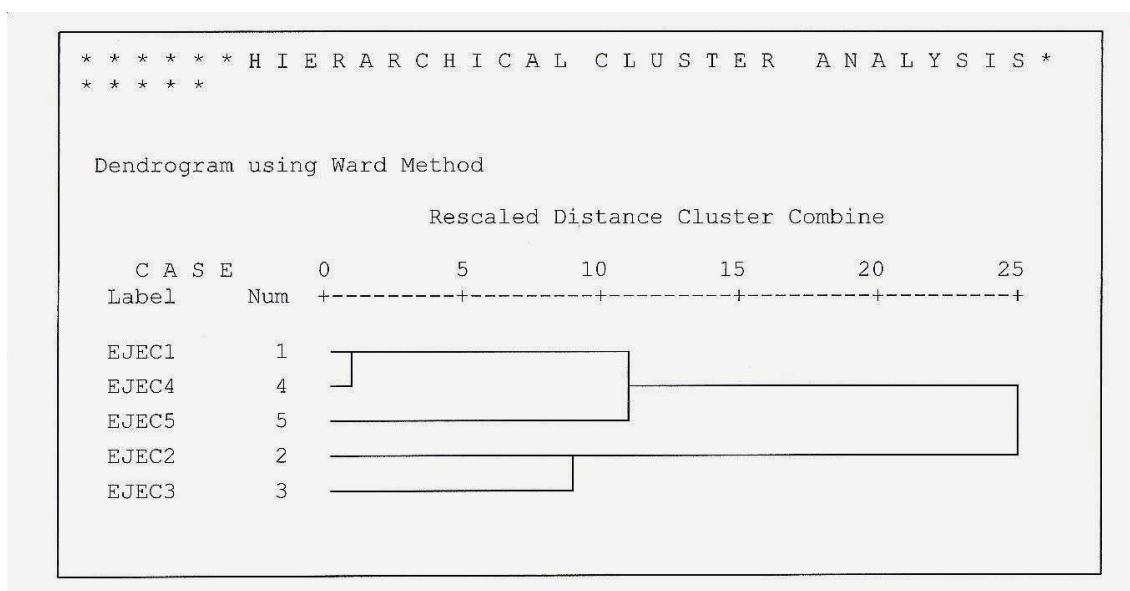


Gráfico 2

**Clúster 1.** A este clúster pertenecen los problemas 1 y 4, que se caracterizan por tener el menor porcentaje de utilización del MGL y la menor utilización correcta del mismo en la fase de ejecución. La gran mayoría de los sujetos supera la etapa exitosamente utilizando un modelo alternativo.

**Clúster 2.** Los problemas 2 y 3 conforman este clúster. En dichos problemas la mayoría de los sujetos utiliza el MGL en la fase de ejecución, y lo utilizan correctamente.

**Clúster 3.** El problema 5 es el único problema incluido en éste cluster y se caracteriza porque aproximadamente el 50% de los sujetos utiliza el MGL y, de éstos, sólo la mitad lo utiliza correctamente. También se observa que el 20% de los individuos no aborda esta fase del problema.



## Clúster según desempeño final

En el siguiente gráfico se muestran los dos clúster significativos que se forman en esta fase. Dichos clúster son caracterizados a continuación:

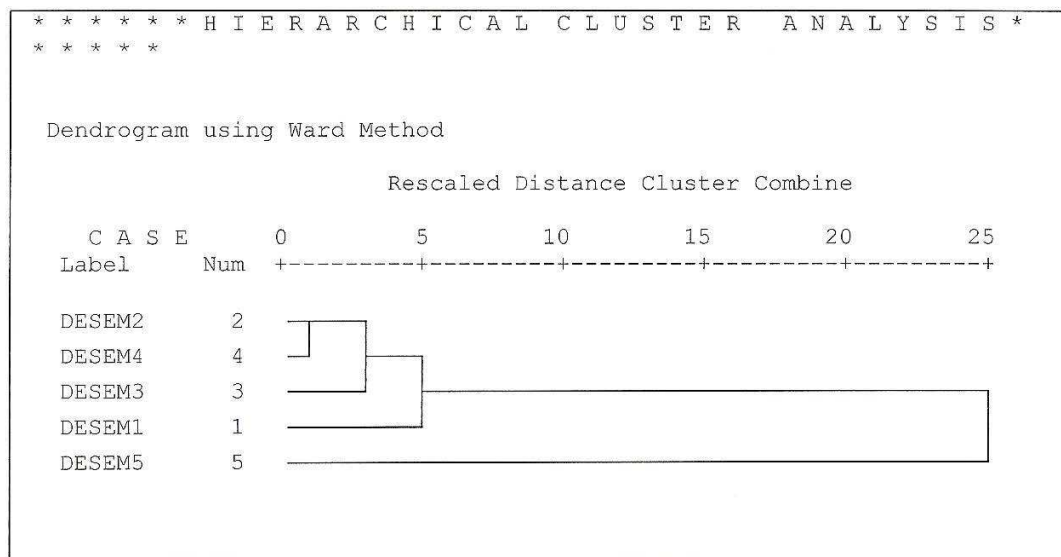


Gráfico 3

**Clúster 1.** Compuesto por los problemas 1, 2, 3 y 4 que, en esta fase, se caracterizan por el hecho de que gran parte de los individuos determinan la respuesta correcta, superando el 84% en todos los casos.

**Clúster 2.** Sólo el problema 5 pertenece a este clúster y se caracteriza porque un porcentaje relativamente bajo, sólo el 26,3%, obtuvo la respuesta correcta del problema.

## 5. Resumen de los resultados

A continuación realizamos un resumen de los resultados obtenidos a partir del análisis de clúster (clasificación empírica) y de la clasificación teórica de los problemas relacionando ambas clasificaciones.

### 5.1 Conclusiones acerca de los clúster por fases

Al analizar los clúster que resultan para cada fase de la resolución de los problemas se observan algunas regularidades que quisiéramos destacar:

- Los problemas 2 y 3 pertenecen al mismo clúster en todas las fases.
- En todas las fases el problema 5 conforma un clúster por sí sólo.
- En dos de las tres fases los problemas 1 y 4 (el problema 4 es réplica del 1) pertenecen al mismo clúster.

### 5.2 Conclusiones acerca de la clasificación de los problemas

Si tenemos en cuenta las regularidades anteriores y las contrastamos con las clases de problemas definidas para su selección en la construcción del instrumento, así como las categorías definidas en la clasificación teórica, podemos observar que:

- Los problemas 1 y 4, que pertenecen a la misma clase en la categorización elaborada para la construcción del instrumento (problemas de una relación y en que se emplean números naturales), obtienen resultados similares en la aplicación de la encuesta.
- Aún cuando el problema 2 (problema de una relación y en que se emplean números decimales) y el problema 3 (problema de más de una relación y en que se emplean números naturales) no pertenecen a la misma clase, los resultados cuando se utiliza el MGL para su resolución son similares en la aplicación del instrumento. De hecho, estos problemas tampoco pertenecen a la misma categoría en la clasificación teórica, por lo que es necesario realizar un análisis más profundo, respecto de las similitudes y diferencias de este tipo de problemas, a la luz de la utilización del MGL.

El problema 5 (problema de más de una relación y en que se emplean números decimales) pertenece, claramente, a una categoría diferenciada de los otros cuatro problemas, no sólo por su clasificación empírica y teórica, sino por su agrupamiento en el análisis cluster, en donde por sí solo constituye un clúster en las tres fases estudiadas (planteamiento, ejecución y desempeño final).

## 6. Conclusiones

Respecto de la clasificación de los problemas podemos decir que:

- Aquellos problemas que en la clasificación teórica corresponden a problemas que se resuelven utilizando una o dos RGL se comportan de manera similar en la aplicación del instrumento.
- De forma destacada, el problema 5 del instrumento, que corresponde a problemas que se resuelven con tres o más RGL en la clasificación teórica, constituye un clúster por sí solo en los tres análisis realizados, por lo que se puede concluir que, efectivamente, es una tipología de problema que se diferencia de los demás.

Por otra parte, en cuanto a los objetivos de investigación, podemos comentar que, utilizando el MGL, fue posible resolver los problemas algebraicos presentes en libros de texto seleccionados. Además, fue posible determinar semejanzas en la utilización del MGL para la RP, lo que permitió proponer una clasificación teórica.

Los resultados obtenidos en la aplicación del instrumento permitieron la elaboración de clúster según las fases de resolución definidas, siendo éstos caracterizados de forma diferenciada. Sin embargo, hay que continuar el trabajo para profundizar en la relación que existe entre ambas clasificaciones.

La caracterización y clasificación de los problemas que se realizaron proporcionan información para la utilización del MGL como metodología significativa, alternativa y complementaria a los sistemas tradicionales, en la RP algebraicos elementales. Ahora bien, para determinar la potencialidad del modelo será necesario ampliar la muestra de problemas y de sujetos que hemos utilizado en nuestra investigación.

Como continuación de esta investigación, nos planteamos la elaboración de una propuesta de aula en donde se plantee a estudiantes de la ESO resolver problemas algebraicos haciendo uso del MGL, con el fin de describir y caracterizar

su utilización en una situación de enseñanza y aprendizaje, centrado nuestra observación en la utilidad del modelo, tanto para facilitar el paso de la aritmética al álgebra, como en los procesos de desarrollo del pensamiento algebraico.

## Bibliografía

- Castro, E. Castro, E. (1997): "Representaciones y modelización". En: L. Rico (ed.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, 95 – 122. Barcelona: HORSORI.
- Cólera, J. y Gaztelu, I. (2004): *Matemática 1*. España: Anaya.
- Cólera, J. y Gaztelu, I. (2003): *Matemática 2*. España: Anaya.
- Diezman, C. y English, I. (2001): "Promoting the Use of Diagrams as Tools for Thinking". En: A. Cuoco (ed.) *The Roles of Representation in School Mathematics*, 77 – 102. Holanda: NCTM.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Traducido al español por Vega, M. Colombia: Universidad del Valle.
- Espinosa, E. (2004): *Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Fernández, F. (1997): *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Gagatsis, A. y Elia, I. (2004): "The effects of different modes of representation on mathematical problem solving" En: M. Johnsen-Hoines y A. Fuglestad (eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, 489 – 496.
- Goldin, G. y Shteingold, M. (2001): "Systems of representations and the development of mathematical concepts" En A. Cuoco y F. Curcio (eds.), *The roles of representation in school mathematics*, 1 – 21. Reston, VA: NCTM.
- Kaput, J. (2000): *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Documento presentado en el encuentro anual de North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH, (ERIC Document Reproduction Service No. ED 441 662)
- Kieran, C. (2006): "Research on the learning and teaching of algebra" En: A. Gutiérrez y P. Boero (eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 11 – 49. Sense Publishers.
- Kieran, C. (2007): "Learning and teaching algebra at the middle school through college levels" En: R. Lesh (ed.): *Handbook of Research on Mathematics teaching and learning*, 707 - 762. USA: NCTM.
- Mayer, R. (1986): *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. España: Paidós.
- NCTM (2000): *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla: Proyecto Sur.
- OECD. (2004): *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. USA: OECD Publishing.
- OCDE (2006): PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. España: Santillana Educación S.L.
- Puig, L. (1996): *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

- Rico, L. (1997): "Los organizadores del currículo de matemática" En: L. Rico (ed.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, 39 – 55. Barcelona: HORSORI.
- Rojano, T. (1996): "The role of Problems and Problem Solving in the Development of Algebra" En: N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (eds.) *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, 55 – 52. Netherland: Kluwer academic publishers.
- Salvador Figueras, M. (2001): *Análisis de conglomerados o clúster* [en línea] 5campus.org, Estadística <<http://www.5campus.org/leccion/cluster>> [última consulta: 21 junio 2010]
- Sánchez, J. y Vera, J. (2002a): *Matemática 1*. España: Oxford.
- Sánchez, J. y Vera, J. (2002b): *Matemática 2*. España: Oxford.

## Anexo



Universidad de Granada  
Facultad de Ciencias de la Educación  
Departamento de Didáctica de la Matemática

### INSTRUMENTO Nº 1

Licenciado/a en \_\_\_\_\_

Año en que se finalizó la Licenciatura \_\_\_\_\_

A continuación te presentamos algunos problemas que tienen como fin un trabajo de investigación. Esta prueba no constituye ningún tipo de control o examen, por lo que te pedimos tu colaboración, que te agradecemos de antemano.

El objetivo consiste en resolver los problemas siguientes, empleando específicamente un modelo gráfico lineal. Para ello te mostramos un ejemplo de un problema resuelto mediante el sistema de representación (estrategia) que proponemos.

Si tienes dificultad en la resolución de alguno de los problemas, continua con el siguiente y, cuando puedas, inténtalo de nuevo.

Es importante hacer el esfuerzo de buscar una solución como la que te pedimos.

Ejemplo:

Marta gasta la mitad de su dinero en la entrada para un concierto, y la quinta parte del mismo en una hamburguesa. ¿Cuánto dinero tenía si aun le queda 2,70 euros?



En los cinco folios sucesivos se adjunta los problemas a resolver, un problema en cada folio, con el fin de que los sujetos tuvieran espacio suficiente para trabajar. Los problemas presentados fueron los siguientes:

### Problema 1

Arturo tiene una bolsa con 28 caramelos, unos de menta y otros de limón. Si el número de caramelos de menta triplica al de los de limón, ¿cuántos caramelos de cada tipo tiene Arturo?

### Problema 2

Si a un número le sumas siete unidades, obtienes el mismo resultado que si a su doble le restas tres. ¿De qué número se trata?

### Problema 3

El transporte en taxi cuesta 2,5 euros de bajada de bandera y 1,50 euros por cada kilómetro recorrido. Si por una carrera has pagado 13 euros, ¿qué distancia has recorrido?

### Problema 4

A la quinta parte de un número se le añaden 9 unidades se obtiene la mitad del número. ¿De qué número se trata?



**Problema 5**

Tres kilos de naranjas y dos kilos de tomates cuestan 6,75 euros, sin embargo, dos kilos de naranjas y tres kilos de tomates cuestan 7 euros. ¿Cuánto cuesta el kilo de naranjas? ¿y el de tomates?

**María Victoria Martínez Videla** [mvmartin@uc.cl](mailto:mvmartin@uc.cl)

**Francisco Fernández García** [ffgarcia@ugr.es](mailto:ffgarcia@ugr.es)

**Pablo Flores Martínez** [pflores@ugr.es](mailto:pflores@ugr.es)

Universidad de Granada. Facultad de Ciencias de la Educación.

Departamento de Didáctica de la Matemática.

