SUMA 54
Febrero 2007, pp.15-22

La Banda de Möbius: un camino que te llevará de cabeza

Este artículo se ha escrito con el objetivo de mostrar la superficie geométrica denominada banda de Möbius como herramienta para potenciar la motivación e interés de los alumnos, tanto de bachillerato como universitarios, en sus clases de Matemáticas. Esta superficie, que tiene varias propiedades muy curiosas, es en realidad un bucle girado, normalmente hecho de papel, fácilmente manipulable por los estudiantes. Para su construcción únicamente se necesitan lápiz, papel, pegamento y tijeras.

The goal of this paper is to show a geometrical surface named Möbius Band as an useful tool to achieve the motivation and interest from Secondary or university students when facing their mathematical classes. This surface, which has several strange properties is in fact a twisted loop which can be easily manipulated by students. To construct it, strips of paper, sticky type, scissors and a pen are only needed.

Este artículo se ha escrito con el objetivo principal de mostrar la superficie geométrica denominada banda de Möbius como herramienta para conseguir un mayor grado de motivación e interés de los alumnos, tanto de bachillerato como universitarios, en sus clases de Matemáticas.

El punto de partida de este artículo son dos experiencias relativas a la utilización de esta superficie, realizadas respectivamente en las clases de estos alumnos.

Tras una exposición detallada de ambas experiencias, se indican los objetivos que se pretende conseguir.

Estos objetivos están relacionados sobre todo con la introducción de los cuerpos geométricos en Secundaria.

Se muestra el proceso de construcción de la banda de Möbius y se comentan algunos aspectos curiosos relativos a esta superficie, como pueden ser el tema de los cortes en la Banda y algunas aplicaciones de la misma entre las que destacamos una totalmente sorpresiva a priori: la casa Möbius.

Para finalizar, se dan unas breves notas sobre la biografía del descubridor de la banda, August Ferdinand Möbius, que pueden ser útiles para el profesor en clase y así facilitar el uso de la Historia de las Matemáticas en las clases, lo cual también se ha considerado como uno de los objetivos a alcanzar.

Dos experiencias con la banda de Möbius

Iniciamos este artículo con la narración de dos experiencias que ponen de manifiesto cómo la utilización de la banda de Möbius en las clases de Matemáticas de cualquier nivel superior al de Primaria permite conseguir un mayor grado de motivación e interés en los alumnos. La primera de ellas tiene como actores principales a un profesor de Secundaria de esta asignatura y a un grupo de sus alumnos, mientras que en la segunda los protagonistas son los propios autores del artículo.

> *En los momentos de crisis, sólo la imaginación es más importante que el conocimiento.*
> Albert Einstein

Ana Belén Granados Pérez
Ana Grau de la Herrán
Juan Núñez Valdés
Universidad de Sevilla.
Sevilla

La primera experiencia fue realizada por un profesor de Matemáticas de un Centro de Secundaria a instancia suya.

Aprovechó parte de la clase, en la que iba a explicar a sus alumnos (de 1º de ESO) las primeras nociones sobre cuerpos geométricos, para sacar a tres alumnos a la pizarra, *X*, *Y* y *Z*, entregándole a cada uno un rectángulo de papel, de medidas 40 x 15 cm, con una recta pintada a lo largo y que lo dividía en dos mitades, y con las letras *A* y *B*, respectivamente, escritas en las esquinas de uno de los dos lados de menor longitud del papel, y las letras *A'* y *B'*, en las mismas esquinas del lado paralelo. Al mismo tiempo, le comentó al resto de los alumnos que les iba a explicar el tema de cuerpos geométricos pero que antes deseaba hacer una pequeña experiencia, para lo cual dividió la clase en tres grupos, también denominados *X*, *Y* y *Z*, y les dijo que los alumnos de cada grupo deberían hacer lo mismo que el alumno de la pizarra que tenía su misma letra. Todos los alumnos tuvieron que sacar una hoja de cuaderno grande, lo más parecida posible al rectángulo de papel, y pintar la línea en medio y las letras de las esquinas en la hoja. El profesor, mientras tanto, observaba muy fijamente la conducta de los alumnos en este proceso, para conocer, aunque fuese intuitivamente, si los alumnos parecían estar más motivados o interesados de lo habitual.

Los alumnos observaron que, una vez dada la vuelta completa a un cilindro, el lápiz volvía al mismo punto del que había salido.

Cuando todos los alumnos tenían un rectángulo, el profesor se dirigió individualmente a cada uno de los alumnos de la pizarra, de forma que ninguno de ellos pudiera escuchar lo que les decía a los otros dos, y les indicó que las intrucciones que él iba a proporcionarles, deberían ellos transmitírselas a los compañeros que formaban su grupo y pedirles que las siguieran.

El profesor le dijo al alumno *X* que escribiese en el papel lo siguiente:

> Un cilindro es un cuerpo geométrico redondo que tiene dos bases circulares planas y una superficie lateral curva.

Al alumno *Y*, el profesor le dijo que doblase el papel de forma que la esquina *A* coincidiese con la *A'* y la *B* con la *B'*, respectivamente, y que el cuerpo que se había formado era un cilindro.

Al tercero, *Z*, le dijo que en primer lugar hiciese exactamente lo mismo que *Y*, pero que después deshiciese la operación y la repitiera, pero que ahora antes de doblar el papel lo girase haciendo coincidir ahora *A* con *B'* y *B* con *A'*. Cuando *Z* realizó esta operación, el profesor le dijo que el cuerpo que acababa de obtener no era un cilindro, como la primera vez, sino otro cuerpo geométrico que se llama *banda de Möbius*. El profesor le dijo también a *Z* que una de las diferencias fundamentales entre ambos cuerpos es que el cilindro es orientable y la banda de Möbius no. Para aclarar algo más este concepto, el profesor les dijo que los de los grupos *Y* y *Z* colocasen el capuchón de un bolígrafo o un pequeño lápiz con la punta hacia arriba en uno de los puntos de la línea central previamente dibujada en el papel y que lo desplazasen en esa forma a lo largo de esa línea. Los alumnos del grupo *Y* observaron que una vez dada la vuelta completa al cilindro el lápiz volvía al mismo punto del que había salido y además, en la misma posición de la que había partido, mientras que los alumnos del grupo *Z* vieron que, realizando la misma operación, el lápiz volvía al mismo punto del que salió, pero ahora en posición invertida, es decir, boca abajo.

Servilletero Zara Home. Foto CTB

Las dos preguntas que el profesor les hizo finalmente a todos los alumnos fueron: ¿Cuál de los tres grupos de alumnos pensaban ellos que iba a estar más motivado para recibir las explicaciones del profesor sobre los cuerpos geométricos? ¿Habían estado contentos con el grupo que les había tocado, o hubiesen deseado estar en otro?

Evidentemente, es muy difícil cuantificar las respuestas, y de hecho el profesor no lo hizo de manera explícita, pero sí nos observó que eran los alumnos del grupo *Z*, el de la banda de Möbius, los que habían mostrado un mayor interés por seguir con gran atención las explicaciones posteriores, incluso atreviéndose a formular preguntas que se les habían ocurrido a ellos mismos como resultado de la experiencia vivida.

Animado por esta experiencia, el profesor autor de este artículo pasó a repetirla en sus clases universitarias de uno de los grupos de la asignatura de *Geometría Local de Curvas y Superficies*, que imparte en el tercer curso de la licenciatura, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla.

Por motivos obvios, esta nueva experiencia se realizó sin tanta parafernalia como en el caso de Secundaria y, por supuesto, respetándose ahora completamente el rigor matemático al hablar de superficies y cuerpos, si bien manteniendo en esencia las preguntas a los tres alumnos y dedicándole a la discusión común con la totalidad del grupo un tiempo mucho mayor que el que la obligación de impartir el temario completo en Secundaria permitía.

Resultado directo de la misma fue la petición al profesor por parte de dos alumnas de la clase de permitirles realizar un trabajo sobre la citada banda, en el que pudieran profundizar algo más en sus propiedades y aplicaciones, lo que aprovechó a su vez el profesor para solicitarles que consideraran también su utilización como recurso didáctico en la explicación de determinados temas de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato. En esto radica la génesis de este artículo.

Objetivos y motivación

Como ya se ha comentado anteriormente, este artículo se ha escrito con el objetivo principal de mostrar la banda de Möbius como ayuda para facilitar la motivación y el interés de los alumnos, tanto de Bachillerato como universitarios, a la hora de afrontar sus clases de Matemáticas.

No obstante, nos parece conveniente desglosar este objetivo principal en otros más particulares, destinados cada uno de ellos a tratar aspectos parciales relativos al estudio de esta superficie y a su aplicación a la metodología a utilizar por el profesor de Matemáticas en sus clases de esta asignatura.

Un aspecto consiste en aprovechar el conocimiento de la generación y utilización de esta superficie para usar la Historia de las Matemáticas en la introducción de determinados temas del currículo, lo que no debe limitarse a la mera indicación de unos cuantos datos biográficos, sino que debe ser aprovechada para explicar a los alumnos cómo surgió el resultado del que se trate, sus antecedentes, las dificultades que en esa época existían para obtenerlo y su relación con otros resultados, tanto de Matemáticas como de otras disciplinas.

Por otra parte, el estudio de los cuerpos geométricos, por sus propias connotaciones con la vida real, resulta en general interesante para los alumnos de secundaria. Entendemos que la forma de abordar este tema que hemos presentado anteriormente puede resultar eficaz a la hora de presentar el estudiar los cuerpos geométricos.

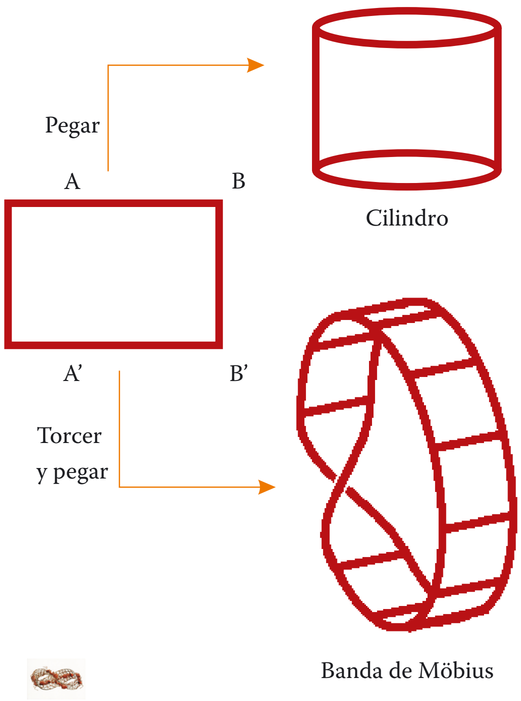
Por todo ello, los objetivos que nos hemos planteado al escribir este artículo pueden resumirse en los siguientes:

1.- Dar a conocer a los alumnos de Secundaria (y a los universitarios, en su caso) la superficie geométrica conocida como banda de Möbius y utilizarla como instrumento de motivación en el aprendizaje de determinados temas del currículo.
2.- Utilizar la Historia de las Matemáticas como herramienta de apoyo para las clases de Matemáticas de Secundaria (este objetivo es naturalmente extrapolable a la enseñanza universitaria).
3.- Mostrar una introducción al estudio de los cuerpos geométricos amena, sencilla y agradable en la enseñanza secundaria.
4.- Estimular la capacidad de pensamiento y de razonamiento de los alumnos de secundaria con la presentación de situaciones más o menos ingeniosas, distintas de las tradicionales.

Construcción de la banda de Möbius

En esta sección se indica cómo construir en la práctica una banda de Möbius. Nuestra intención es que el alumno pueda fabricarla de manera sencilla a partir de unas mínimas instrucciones. Como materiales a utilizar se necesitan únicamente: tiras de papel, pegamento y tijeras.

Para fabricar la banda basta coger una tira rectangular de papel y algo de pegamento. Girar uno de los extremos del papel y después unir ambos extremos (eso debería dejar a la tira de papel con un medio giro dentro). La superficie obtenida es la denominada Banda de Möbius. Nótese que si se realiza esta misma operación sin girar uno de los extremos del papel, la figura que se obtendría es un cilindro (ver la figura siguiente).



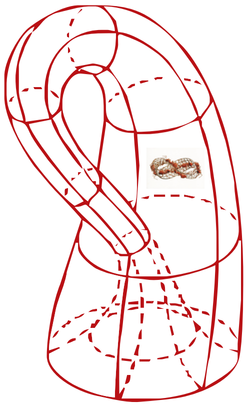
Cortes en la banda

Comenzamos esta sección refiriendo una de las anécdotas que le ocurrió a un grupo de alumnos universitarios de la ya citada asignatura de Geometría Local, durante el curso académico 1999-2000. Eran los organizadores de la exposición de curvas y superficies, celebrada en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, con motivo de la conmemoración del año 2000 como el Año Mundial de las Matemáticas (una descripción completa de esta Exposición puede verse en —Aguilera y otros—).

Un visitante de la Exposición, que creemos que era otro alumno de la Facultad, preguntó a los alumnos organizadores que estaban en aquel momento en labores de *guías* de la Exposición si sabían qué se obtenía al cortar una banda de Möbius longitudinalmente por su mitad. Éstos le contestaron, quizás sin meditarlo mucho, que *se obtendrían dos bandas de Möbius*. El visitante no sólo se limitó a responderles negativamente, sino que pasó directamente a la acción construyendo una banda con una tira de papel que traía preparada y cortándola con unas tijeras que también traía, obteniendo así otra banda de Möbius con dos rizos. Ya no preguntó nada más, sino que volvió a cortar de igual forma esta nueva banda para hacer ver a los organizadores que lo que se obtenía ahora eran dos bandas de Möbius con dos rizos cada una, enlazadas.

Esta primera curiosidad hizo que posteriormente los alumnos organizadores pidiesen ayuda al profesor de la asignatura para estudiar este tipo de hechos con mayor detenimiento, encontrando que esta propiedad no sólo es característica de la banda de Möbius, sino que se verifica en general en todas aquellas bandas generadas mediante vueltas o rizos. Así, dada una banda con n medios rizos, con n impar, al cortarla longitudinalmente por su mitad quedaría una nueva banda con $2n+2$ medios rizos, mientras que si la banda tiene $2k$ medios rizos, al cortarla longitudinalmente por su mitad quedarán 2 bandas con $2k$ medios rizos cada una, enlazadas k veces (véase Gardner, 1984).

Al respecto presentamos aquí (parte inferior de la página) una poesía (tanto en su versión original en inglés como traducida), que aparte de explicarnos clara y concisamente el hecho anterior, nos relaciona de alguna forma la banda de Möbius con otra superficie no menos conocida denominada botella de Klein:



Pasamos a continuación a analizar las particularidades de una banda de Möbius al ser cortada transversalmente. Aconsejamos a los lectores que comprueben experimentalmente, a la vez que leen, lo fascinante que puede llegar a ser la banda de Möbius. Para ello necesitará varias tiras de papel, pegamento, tijeras y un bolígrafo, lápiz o rotulador.

Empecemos con algo sencillo: construyan con la primera tira de papel una banda de Möbius (si desean pueden comprobar con el bolígrafo que tiene una sola cara y un solo borde) y posteriormente corten la banda por el medio, tal como se muestra en la imagen de la página siguiente. Un tratamiento más completo del tema puede verse en (enlace web tercero), de donde ha sido extraída la citada imagen.

A mathematician confined
that a Mobius band is one–side,
and you will get quite a laugh
if you cut one in half.
For it stays in one piece when divided.

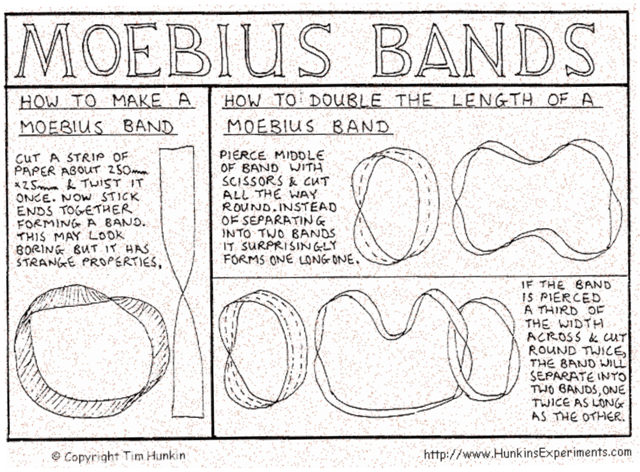
A mathematician named Klein
thought the Möbius band was divine.

Said he: "if you glue
the edges of two,
you will get a weird bottle like mine".

Un matemático susurró
Que la banda de Möbius tiene una sola cara,
Y que tú reirás mucho
Si la cortas por la mitad.
Pues se queda de una pieza al dividirla.

Un matemático llamado Klein
Pensó que la banda de Möbius era divina.

Dijo él: "Si tu pegas
Los bordes de dos,
Obtendrías una extraña botella como la mía".



Al realizar esta operación se pueden dar cuenta que siguen teniendo una única banda, más grande y más delgada. Lo que pasa es que esta banda ya no es una banda de Möbius (es una banda *de Möbius* pero creada con dos giros) pues si lo comprueban esta banda tiene dos caras y dos bordes.

Si se repite la operación obtenemos dos bandas entrelazadas (ambas del mismo tipo que el anterior, es decir, dos caras y dos bordes).

Invitamos al lector a que experimente con el resto de tiras las diversas posibilidades, es decir, qué pasa con una banda con más giros, o haciendo más cortes.

Algunas aplicaciones de la banda de möbius

Realizamos ahora un breve comentario sobre algunas de las aplicaciones prácticas, curiosas en su mayor parte, de la banda de Möbius.

En 1923, Lee De Forest obtuvo una patente norteamericana referente a una película cerrada en forma de banda de Möbius sobre la cual podía grabarse el sonido por ambas caras, o mejor dicho, por su única cara. Más recientemente, la misma idea ha sido aplicada a cintas magnetofónicas, con lo que la cinta retorcida puede funcionar el doble de tiempo que lo que duraría otra normal.

Se han otorgado también diversas patentes para cintas transportadoras diseñadas en forma de banda de Möbius, a fin de que sufran igual desgaste por ambos lados. En ese sentido, la B.F. Goodrich Company, de Estados Unidos, patenta en 1957 su idea de una cinta transportadora de caucho que se usa para sustancias calientes o abrasivas. Dándole media vuelta en la forma de banda de Möbius, esta cinta se desgasta por igual por su único lado.

En 1963, Richard L. Davis, físico de Sandia Corporation de Alburquerque, inventó una resistencia desprovista de reactancia, fundada en la banda de Möbius. Adosando finas tiras metálicas a las dos caras de la cinta aislante y formando con ellas una banda de Möbius de triple capa, Davis descubrió que, al fluir impulsos eléctricos en ambos sentidos en torno a la banda, ésta adquiría todo tipo de propiedades eléctricas deseables (revista *Time* del 25 de septiembre de 1964, y Electronic Illustrated, noviembre de 1969, pp. 76 y siguientes).

Los artistas gráficos también se han valido de esta banda tanto para fines publicitarios como artísticos. La banda de Mobius ha tenido también un papel destacado en numerosos cuentos de ciencia ficción (veáse Rick Grant, 1949).

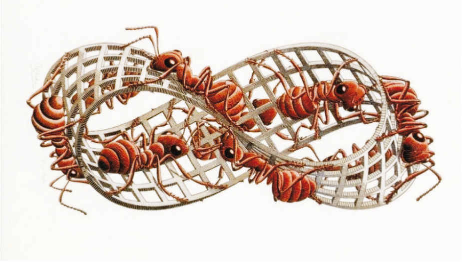
También se sabe de mecanógrafos muy rápidos que encontrando fastidioso tener que detenerse a meter en la máquina hojas nuevas en blanco, han optado por utilizar papel en rollo. Si hubieran usado un largo bucle de retorcido habrían podido además escribir por ambos lados del papel.

Woldor R. Tobler sugirió en cierta ocasión realizar un mapamundi sobre una banda de Möbius, de forma que el borde coincidiera con los polos y los paralelos y meridianos quedaran uniformemente separados. De trazarse adecuadamente se podría pinchar el mapa por un punto cualquiera y al asomar la punta por el otro lado señalaría el antípoda esférico.

La banda de Möbius es también utilizada en las correas de transmisión de los coches, como por ejemplo, en la correa del ventilador. Con una correa ordinaria sólo se desgastaría la parte en contacto con las ruedas (la interior), por lo que ésta se estropearía antes que la parte exterior. Como la banda de Möbius tiene una sola cara, su recubrimiento dura más y los desgarros en la correa son menos frecuentes haciendo que dure más.

Sin embargo, una de las aplicaciones más curiosas de esta superficie es la denominada *Casa Möbius*, un proyecto de vivienda que representa ciertos aspectos característicos de la arquitectura de finales del siglo XX. Las notas que siguen están sacadas principalmente de un ensayo sobre la arquitectura contemporánea, titulado *(Dis)continuidad*, de los arquitectos argentinos Gabriel Baril y Ludmila Crippa, publicado en Julio de 2004 (véase Baril y Crippa).

La denominada *casa Möbius* es un proyecto de Ben Van Berkel y Caroline Bos, arquitectos que empezaron a trabajar juntos en 1988, fundando un estudio 10 años después, llamado UN Studio de Arquitectura (véase Massad y Yeste, 1998). La casa fue realizada entre los años 1993 y 1995, y se encuentra ubicada en Het Gooi, zona residencial privilegiada situada a las afueras de Amsterdam (Holanda), lugar en el que predominan extensas parcelas de terreno en medio de bosques, colinas y praderas. El nombre de la casa y su diseño corresponden a la banda Möbius. Ya en el año 1963, Maurits Cornelius Escher (genial autor holandés de dibujos y diseños sobre temas matemáticos, 1898–1972) representaba esta superficie en uno de sus dibujos, titulado Cinta de Möbius II, mediante una cadena de hormigas, marchando una tras otra, sin principio ni fin (el dibujo de la figura, junto a otros similares, pueden extraerse del enlace web primero).



Los clientes que realizaron a Van Berkel y Bos el encargo de construir esa casa eran una pareja casada que deseaba vivir y trabajar en la casa en forma separada. Ellos querían habitar el mismo recinto, pero tener asignadas superficies diferentes e incluso moverse por rutas distintas por el interior de la casa, de forma que coincidiesen sólo en ciertos puntos. Su intención, además, no era sólo tener un alojamiento diferente, sino que el propio edificio planteara una arquitectura innovadora. Todos estos hechos generaron la necesidad de diseñar una vivienda con dos espacios de trabajo bien diferenciados y que además rompiese moldes previamente establecidos.

Para construir la casa, Van Berkel comienza por hacer abstracción de estos datos y generar un diagrama transformando a cada habitante en una línea que representa el recorrido de cada uno de ellos dentro de la vivienda, en un ciclo de 24 horas de trabajo y de vida. Estas dos líneas se mueven de forma fluida e independiente y por momentos se cruzan. Ésta fue la principal razón que llevó a los arquitectos a trabajar primero con dos materiales básicos: el hormigón y el vidrio, y después a adoptar el concepto de la banda de Möbius como representación del despliegue del tiempo y el movimiento continuo.

No obstante, para ser fieles a la verdad hay que indicar que esta idea de asignarle la forma y las propiedades de un cuerpo geométrico a una construcción arquitectónica no es original de los dos autores anteriormente mencionados. Ya mucho tiempo antes esta idea se había plasmado en realidad. Como ejemplos de ello pueden ser citados, entre otros, el arquitecto alemán Ludwig Mies van der Rohe (1886–1969), que construyó la casa Farnsworth en 1950, en Plano (Illinois, USA), junto al río Fox, que se ha convertido en una de las residencias más estudiadas (y también más criticadas) de la arquitectura del pasado siglo XX; el arquitecto Frank Lloyd Wright (1869–1939), autor de la denominada casa de la Cascada, construida entre 1936 y 1939 en Bear Pun (Pennsylvania) y el arquitecto suizo Le Corbusier (1887–1965), autor de la muy conocida Ville Savoye.

En la página siguiente mostramos diferentes fotos de la casa de Möbius.

Como aplicaciones finales, y a modo de comentario, indicar que también la banda de Möbius es utilizada en la moda. Pueden destacarse al respecto las prendas en forma de esta banda que lucen orgullosas la mujeres de las imágenes.

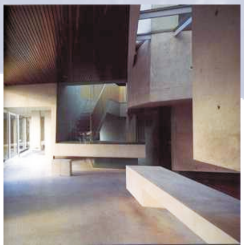
Biografía de August F. Möbius

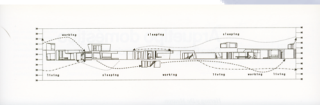
Para atender finalmente uno de los objetivos parciales que nos fijamos a la hora de escribir este artículo, damos a continuación unas breves notas sobre la biografía de Möbius, extraídas en su mayor parte del enlace web primero.

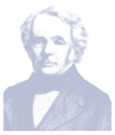
August Ferdinand Möbius (de ahora en adelante Möbius) nació en Schulpforta (Sajonia, actual Alemania) casi al principio de la última década del siglo XVIII, exactamente el día 17 de Noviembre de 1790. August fue el único hijo del matrimonio, ya que su padre murió muy poco tiempo después, a los tres años de su nacimiento.

Möbius fue educado en su propia casa hasta la edad de 13 años, no asistiendo a la escuela hasta 1803, año en el que ingresó en un colegio de su ciudad, comenzando posteriormente sus estudios universitarios en la Universidad de Leipzig en 1809.

Los dos materiales de obra esenciales, el hormigón y el vidrio, intercambian papeles y se emplean para realizar el mobiliario y los tabiques, respectivamente.







August Ferdinand Möbius

En 1813 Möbius viajó a Göttingen donde estudió astronomía bajo la dirección de Karl Friedrich Gauss (1777–1855). Posteriormente, se trasladó desde Göttingen a Halle, donde fue dirigido por Johann Pfaff (1765–1825), antiguo profesor de Gauss. Al respecto, permítasenos referir aquí una anécdota sobre Gauss y Pfaff, que ilustra convenientemente el prestigio que ambos matemáticos han llegado a alcanzar:

> En cierta ocasión, al insigne matemático francés Pierre Simón de Laplace (1749–1827) le fue preguntado quién era en su opinión el mejor matemático alemán del cual él había tenido referencias. Cuando Laplace contestó que era Pfaff, el interlocutor le preguntó, extrañado: —¿Pfaff?, pero, ¿y Gauss? Y Laplace contestó sin vacilar: no, Gauss no. Gauss es el mejor matemático del mundo.

En 1844 Möbius consiguió una plaza de Profesor de Astronomía a tiempo completo en la Universidad de Leipzig, ciudad en la que había estado trabajando en la reconstrucción del Observatorio, desde 1818 hasta 1821, supervisando todo el proyecto. Previamente, en 1820, Möbius se había casado con Margret, con la que tuvo una hija y dos hijos, aunque ella murió muy joven, cuando sólo tenía 40 años. En 1848 llegó a ser el Director del Observatorio.

Con referencia a sus descubrimientos científicos, Möbius publicó trabajos muy importantes en Matemáticas y Astronomía, casi todos ellos en el *Crelle's Journal*, por aquel entonces la primera revista dedicada exclusivamente a artículos matemáticos. Antes de la aparición en el universo matemático del *problema de los cuatro colores*, propuesto por primera vez por Francis Guthrie a su hermano Frederich en 1852, ya Möbius había propuesto en 1840 el siguiente, algo más elemental:

> Había un rey con 5 hijos. En su testamento establecía que a su muerte su reino debía ser dividido por sus hijos en 5 regiones de forma que cada una debía tener frontera común con cada una de las otras cuatro. ¿Podían satisfacerse todos los términos de su testamento?

La respuesta es negativa y fácil de demostrar. En una memoria presentada a la Academia y sólo descubierta después de su muerte, Möbius discutía las propiedades de las superficies de una sola cara, incluyendo entre ellas a la "Banda de Möbius", que él había descubierto en 1858. No obstante, parece ser que Möbius no fue el primero en describir esa figura u objeto matemático que hoy en día conocemos como la banda de Möbius, dado que no existe ningún criterio, fecha de publicación o de descubrimiento que preceda al obtenido previamente por el matemático inglés Johann Benedict Listing (1808–1882).

Möbius murió el 26 de Septiembre de 1868, a la edad de 78 años, en Leipzig. El historiador alemán Moritz Cantor dice de él que todos los días, antes de salir a pasear, repetía el acrónimo que el propio Möbius llamaba (en alemán) *3S und Gut*, formado por las iniciales de todos aquellos objetos que él no deseaba olvidar: *Schlüssel* (llaves), *Schirm* (paraguas), *Sacktuch* (pañuelo), *Geld* (dinero), *Uhr* (reloj) y *Taschenbuch* (cuaderno de notas).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUILERA,C. M.; FERNÁNDEZ, I.; MACÍAS, M. J.; MONTAÑO, A.; NÚÑEZ, J.; PÉREZ, S.; RIVERO, I.; ROMERO, M. J.; SÁNCHEZ, J. I. y SERRATO, A. M. (2001): "Exposición de curvas y superficies: una experiencia extra-académica universitaria", *SUMA* n.º 36 (2001), 77–84.

BARIL, G. y CRIPPA, L. (2004): *(Dis)continuidad (ensayo sobre la Arquitectura contemporánea)*, Cátedra Arq. Mele.
Web: http://www.arquimaster.com

GARDNER, M. (1984): *Festival Mágico-Matemático*, Alianza Editorial, Madrid.

GRANT, R. (1999): *No-died profesor*, The wall of darkness.

MASSAD, F. y YESTE, A. G. (1998): "En tiempos de la hipermodernidad. Entrevista con Ben Van Berkel", SUMMA 31, Ed. DONN S.A., Buenos Aires, Argentina.

Enlaces web:

http://www.mathcurve.com/surfaces/mobius/mobius.shtml (sobre la banda de Möbius en general).

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/BiogIndex.html (sobre la biografía de A. F. Möbius).

http://www.HunkinsExperiments.com (sobre cortes en la banda de Möbius).