

Evaluación del conocimiento geométrico de estudiantes de España e Inglaterra de sexto de Educación Primaria sobre cuadriláteros.

Ana Lucía Aguirrezábal Gago

Trabajo Fin de Grado

Tutor: José María Gavilán Izquierdo

Didáctica de las Matemáticas

Grado en Educación Primaria

Curso 2015/2016

Evaluación del conocimiento geométrico de estudiantes de sexto de Educación Primaria de España e Inglaterra sobre cuadriláteros.

Ana Lucía Aguirrezábal Gago
Universidad de Sevilla

Abstract:

This paper presents a study whose aim is to evaluate the geometry knowledge about quadrilaterals through Van Hiele levels. In this research, the participants are Year-6 students of schools from Seville (Spain) and from Liverpool (United Kingdom). The data collection is made through a questionnaire adapted to the students. Having analysed and evaluated, the results of Seville are compared with these ones from Liverpool. The information provided complements the results obtained in a research of 2013, giving a view of the geometry knowledge from Primary Education to the University. Although the acquisition of the geometry knowledge is gradual, this is not enough for training future teachers.

Keywords: Geometry, geometric concepts, reasoning, knowledge, primary education.

Resumen:

En este trabajo se presenta un estudio que tiene como objetivo evaluar el conocimiento geométrico sobre cuadriláteros a través de los Niveles de Van Hiele. Participan en esta investigación estudiantes de sexto de primaria de centros educativos de Sevilla (España) y Liverpool (Reino Unido). La recogida de información se ha llevado a cabo a través de un cuestionario adaptado al nivel educativo de los estudiantes. Tras analizar y evaluar las respuestas de los estudiantes, se han comparado los resultados entre Sevilla y Liverpool. La información obtenida complementa los resultados obtenidos en una investigación llevada a cabo en 2013, permitiendo ofrecer una panorámica del conocimiento geométrico desde Educación Primaria hasta la Universidad. Aunque el proceso de adquisición del conocimiento geométrico es gradual, este no es suficiente para la formación de futuros maestros.

Palabras claves: Geometría, conceptos geométricos, razonamiento, conocimiento, enseñanza primaria.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	4
2. MARCO Y OBJETIVOS.....	6
3. METODOLOGÍA.....	18
3.1. PARTICIPANTES.....	18
3.2. INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE DATOS.....	18
3.3. PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS.....	20
3.4. EJEMPLO DE ANÁLISIS DE UN CUESTIONARIO.....	22
4. RESULTADOS Y HALLAZGOS.....	25
5. CONCLUSIONES, IMPLICACIONES Y LIMITACIONES.....	35
6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICA.....	38

1. INTRODUCCIÓN

Nuestro camino en el aprendizaje comienza desde incluso antes de nacer y continúa a lo largo de toda nuestra vida. Analizar la evolución de este aprendizaje continúa siendo una de las principales cuestiones de numerosas investigaciones de diversas temáticas. La didáctica de la geometría, como ejemplo de esos diversos campos que estudian los procesos de enseñanza y aprendizaje, nos ha proporcionado modelos educativos que nos permiten evaluar, analizar, comparar, diagnosticar problemas, ofrecer soluciones, y por lo tanto mejorar nuestra enseñanza y aprendizaje.

Las matemáticas constituyen una herramienta para analizar y evaluar la información que percibimos de la realidad y actuar sobre ella (Real Decreto 126, 2014). Por lo tanto, es vital un proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que nos ayude a resolver problemas de nuestra vida cotidiana. Sin ninguna duda, una parte de este proceso, es la adquisición de contenidos o conocimientos que nos sirvan de marco para poder entender o evaluar dicho problema. De este modo, la geometría se presenta como una herramienta para estudiar “las propiedades y las magnitudes de figuras que se encuentran en el espacio y en el plano” (Real Academia Española, 2014) y que, por lo tanto, conforman los objetos que nos rodean.

La geometría ocupa un lugar significativo dentro del currículo que la Educación Primaria, constituyendo el Bloque 4 dentro de la enseñanza de las matemáticas (Real Decreto 126, 2014). A su vez, de todos los contenidos que agrupa la enseñanza de la geometría presente en el Real Decreto 126/2014 por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria, podríamos destacar los siguientes:

- Formas planas y espaciales: figuras planas: elementos, relaciones y clasificación.
- Clasificación de cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados.

Es decir, en otras palabras, al final de la Educación Primaria, el estudiante¹ debe conocer las figuras planas, sus relaciones y saber clasificarlas. Pero todo con un sentido que queda reflejado en el estándar de aprendizaje 7.1. (Real Decreto 126, 2014 p.45):

Resuelve problemas geométricos que impliquen dominio de los contenidos trabajados, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de

¹ Las referencias a personas o colectivos figuran en el presente trabajo en género masculino como género gramatical no marcado.

contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización.

Por lo tanto, la adquisición de contenidos –lo que denominamos conocimiento geométrico- constituye una parte vital en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría y de las matemáticas o de cualquier otra área en general. El siguiente trabajo de investigación se centra específicamente en evaluar y analizar el conocimiento específico de cuadriláteros en estudiantes de 6º de Primaria. Sin este conocimiento, difícilmente podríamos entender la realidad que nos rodea y por lo tanto ni actuar ni mejorarla, de ahí su gran importancia.

Para cumplir el principal objetivo del trabajo, mencionado en el párrafo anterior, se han establecido diferentes apartados que se explican a continuación.

En la primera parte, se contextualiza y conceptualiza el aprendizaje y enseñanza de cuadriláteros. El lector podrá conocer más sobre el modelo de Van Hiele -marco de referencia de la geometría-, y ponerse en situación sobre la evaluación de los diferentes niveles de razonamiento matemático de los estudiantes.

La segunda parte describe las características generales de la investigación, tales como los participantes, el instrumento de evaluación o el procedimiento de análisis. El número de participantes, su contexto o el tipo de cuestionarios son varias de las cuestiones que se abordarán en esta parte.

La tercera parte se centra en la presentación de los resultados. El lector podrá tener la oportunidad de observar todos los resultados de forma gráfica, clara y concreta. Asimismo, podrá observar no solo la diversidad de resultados sino también la regularidad de variedades.

En la cuarta y última parte se relatan las conclusiones a las que se ha llegado teniendo en cuenta los resultados. El lector también podrá observar las fuentes consultadas.

2. MARCO Y OBJETIVOS.

Son varias las investigaciones en el campo del razonamiento geométrico dentro de la didáctica de las matemáticas, como por ejemplo la realizada por M. Sarasua, G. Ruiz de Gauma, y M. Arrieta (2013) a estudiantes de enseñanza media, bachillerato y universidad. Sin embargo, escasas son las investigaciones específicas en el área de Educación Primaria, utilizando cuestionarios adecuados a dicho nivel educativo.

Didactas y profesores de matemáticas señalan que la enseñanza de la geometría debe basarse en actividades de exploración y descubrimiento que hagan partícipe al estudiante de su propio aprendizaje (Gutiérrez & Jaime, 2012). Sin embargo, esta tarea no es fácil para el docente, naciendo así los denominados modelos teóricos o educativos que ayudan a planificar y gestionar las clases, identificando los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Gutiérrez & Jaime, 2012).

El Modelo de Van Hiele, elaborado por Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, es en palabras de Gutiérrez y Jaime (2012) “el marco más provechoso para organizar la enseñanza de la geometría y realizar una correcta evaluación del aprendizaje comprensivo de los estudiantes” (p. 2). Conforman en sí un modelo educativo que analiza el comportamiento y razonamiento matemático de los estudiantes proponiendo orientaciones para la enseñanza de las matemáticas en general, y de la geometría específicamente (Jaime & Gutiérrez, 1990).

Un modelo educativo, v. g. Modelo de Van Hiele, presenta similitudes con un modelo matemático puesto que ambos analizan regularidades con el objetivo de intentar explicar y establecer conexiones (Jaime & Gutiérrez, 1990). Sin embargo, los elementos de estudio de un modelo educativo son siempre los seres humanos, por lo que el profesor “no debe caer en el error de esperar que aplicando fielmente un determinado modelo educativo se resolverán todos sus problemas y sus alumnos aprenderán las matemáticas sin esfuerzo” (Jaime & Gutiérrez, 1990, p.302). Por lo tanto, el modelo de Van Hiele debe servir como una guía que el profesor debe moldear y adaptar a cada grupo de estudiantes.

Una de las características más importantes del modelo de Van Hiele es la concepción del aprendizaje como resultado de las experiencias vividas, rompiendo así con las concepciones biológicas que establecen relaciones entre el aprendizaje y el desarrollo evolutivo (Gutiérrez & Jaime, 2012). Es decir, el aprendizaje de la geometría no depende tanto de la edad del estudiante sino de las diversas situaciones que este experimente. Por lo tanto, el modelo de Van

Hiele otorga especial importancia a la labor del maestro/a y de la educación matemática en general, que deben proporcionar a los estudiantes las suficientes experiencias adicionales que les permiten un aprendizaje comprensivo y no memorístico.

Este modelo de razonamiento está constituido por una parte descriptiva donde se identifican los diversos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes, los denominados “niveles de razonamiento”; y por otro lado, una parte orientativa, donde se proponen las llamadas “fases del aprendizaje”, que no son más que guías educativas que ayudan al docente a enseñar y entender al discente (Jaime & Gutiérrez, 1990). El estudiante, a través de esta ayuda del docente, progresa desde que se inicia en la geometría hasta que llega a su máximo nivel de razonamiento (Afonso Martín, Camacho Machín, & Socas Robayna, 1999).

Las siguientes páginas describirán y analizarán las dos partes que constituyen el modelo de Van Hiele: los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje. Se hará especial hincapié en los niveles de razonamiento y en especial desde el Nivel 1 al Nivel 3, por la relevancia significativa que tiene en la investigación.

Los niveles de razonamiento son definidos a partir de descriptores relacionados con el grado de razonamiento matemático de los alumnos cuando se enfrentan a ciertas actividades. (Sarasua et al., 2013). Estos descriptores nos ayudan a identificar y evaluar el conocimiento geométrico sobre cuadriláteros en los estudiantes. A continuación se presentan las principales características de los niveles de razonamientos de Van Hiele basados en los trabajos de Fouz (2006), Sarasua et al. (2013) y Jaime y Gutiérrez, 1990):

Nivel 1 o de reconocimiento visual.

- Las figuras geométricas se perciben de manera global como una unidad, sin atender a las partes que la componen ni a propiedades matemáticas, v.g. se entiende el cuadrado como una figura global y no como una figura compuesta por lados, vértices...
- Los estudiantes realizan reconocimientos o clasificaciones basándose en el aspecto físico de las figuras. Por ejemplo, “es un cuadrado porque tiene cuatro esquinas”.
- Son usuales descripciones de semejanza con otros objetos usando frases tales como *se parece a* o *tiene forma de*.

- Las figuras son percibidas como objetos individuales, es decir, el estudiante no es capaz de generalizar las características de una figura concreta a otras de la misma clase. Por lo tanto, no es capaz de generalizar características de un cuadrado a un rectángulo, ambas figuras consideradas cuadriláteros.

En este nivel son usuales las tareas de reconocimiento y clasificación de figuras como la que se presenta a continuación -ilustración 1-. Los estudiantes son capaces de reconocer los ejemplos prototípicos de los cuadriláteros -*figura 1, 2 y 5*-. Sin embargo, cuando se les pregunta qué caracteriza a un cuadrado, harán relación a aspectos físicos de la figura dando importancia a la forma, el tamaño o el color: “tiene cuatro esquinas” o “está girado”. Es decir, el alumno no hará referencia ni a ángulos, lados o vértices. Al mismo tiempo, si le preguntáramos si la figura 1 es un rectángulo, nos podrá hacer una respuesta tal como la siguiente: “no es un rectángulo, porque tiene forma de cuadrado”. Por un lado, menciona una clasificación exclusiva, es decir, si es un cuadrado no puede ser un rectángulo; y por otro lado, mantiene presente la forma física.

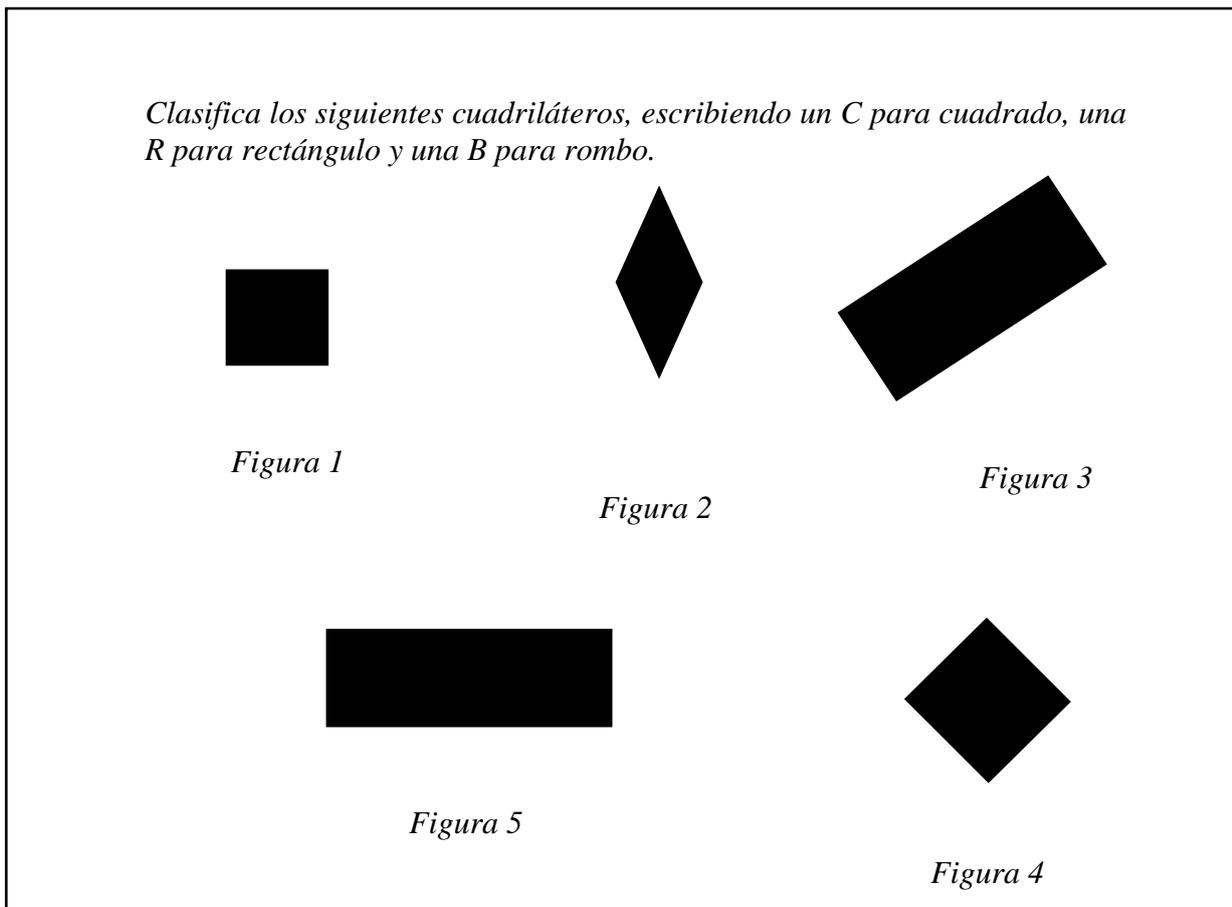


Ilustración 1. Tarea de clasificación de figuras geométricas

Nivel 2 o de análisis.

- Los estudiantes perciben y reconocen de manera informal las partes y las propiedades de las figuras geométricas tanto desde la observación como desde la experimentación. Si el estudiante a partir de la manipulación de diversos rectángulos, descubre que todos tienen lados paralelos dos a dos, es capaz de generalizar esta propiedad a todos los rectángulos.
- Las definiciones son listas de propiedades matemáticas. Si en el Nivel 1, se ha comentado que el estudiante reconoce al cuadrado por su forma física, un estudiante en el Nivel 2, hará referencia a las propiedades matemáticas del cuadrado: cuatro lados iguales, cuatro ángulos rectos, lados paralelos dos a dos...
- Los alumnos no son capaces de realizar inclusiones. Aunque como se ha mencionado anteriormente el estudiante es capaz de generalizar una propiedad a todas las figuras de la misma clase, no es capaz de relacionar unas propiedades con otras.

A continuación se presenta de nuevo la misma actividad -ilustración 2- del Nivel 1. En esta ocasión el estudiante continuará sin relacionar las propiedades de las figuras, pero sí será capaz de ofrecer una lista de propiedades matemáticas. Si le preguntamos por qué la figura 5 es un rectángulo, nos podrá dar una respuesta tal que así: “porque tiene cuatro lados, dos lados paralelos dos a dos, dos lados de mayor longitud y dos de menor y cuatro ángulos rectos”. Esta definición sería exclusiva, puesto que omite al cuadrado como rectángulo.

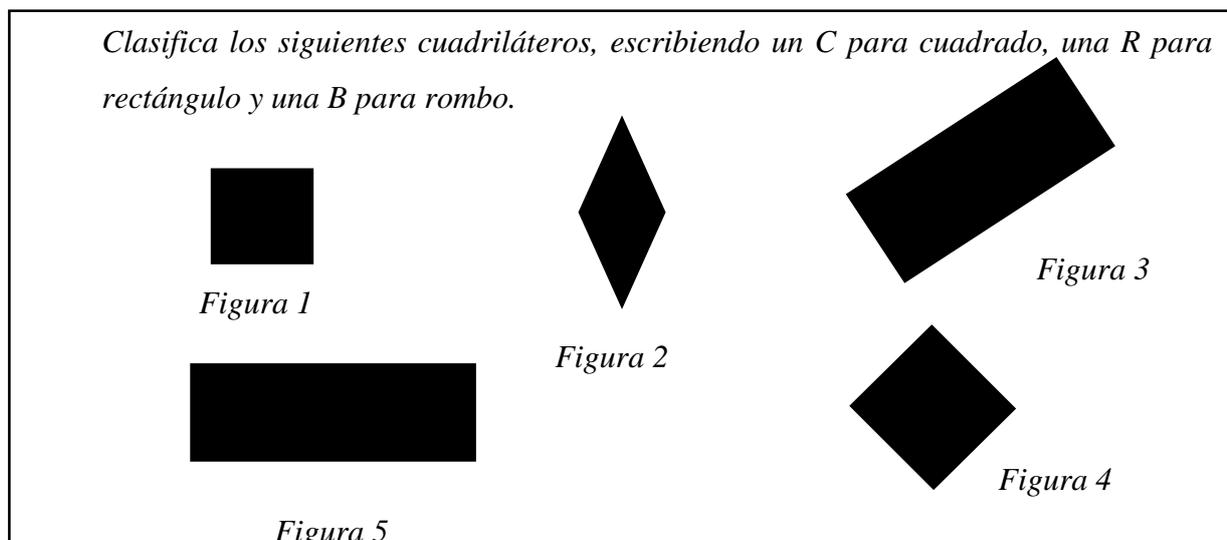


Ilustración 2: Tarea de clasificación de figuras geométricas

Nivel 3, de ordenación o de clasificación.

- Las figuras geométricas son descritas a partir de las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir, hablando de definiciones inclusivas: incluyendo por ejemplo al cuadrado como rectángulo y rombo. Si en el Nivel 2, la definición se basaba en una lista exhaustiva de propiedades, en este nivel, el estudiante ofrece definiciones matemáticamente correctas. Por ejemplo, define el rombo como cuadrilátero de lados iguales.
- Se reconoce que unas propiedades se derivan de otras, estableciéndose relaciones entre propiedades. En este nivel, el estudiante comprende que la igualdad de ángulos opuestos implica paralelismo, o que un cuadrilátero de cuatro ángulos iguales, implica que sean rectos.
- Además son capaces de comprender demostraciones formales, pero incapaces de construirlas por sí solos. Es decir, pueden comprender un razonamiento realizado por el/la profesor/a o presente en el libro, pero no realizarlos por sí solos.

Ante la actividad propuesta en los niveles anteriores -ilustración 3-, en esta ocasión, el estudiante en este nivel, será capaz de clasificar de forma inclusiva al cuadrado, entendiéndolo como un rectángulo y un rombo al mismo tiempo. Definirá el cuadrado como un cuadrilátero de lados iguales y ángulos rectos.

Clasifica los siguientes cuadriláteros, escribiendo un C para cuadrado, una R para rectángulo y una B para rombo.

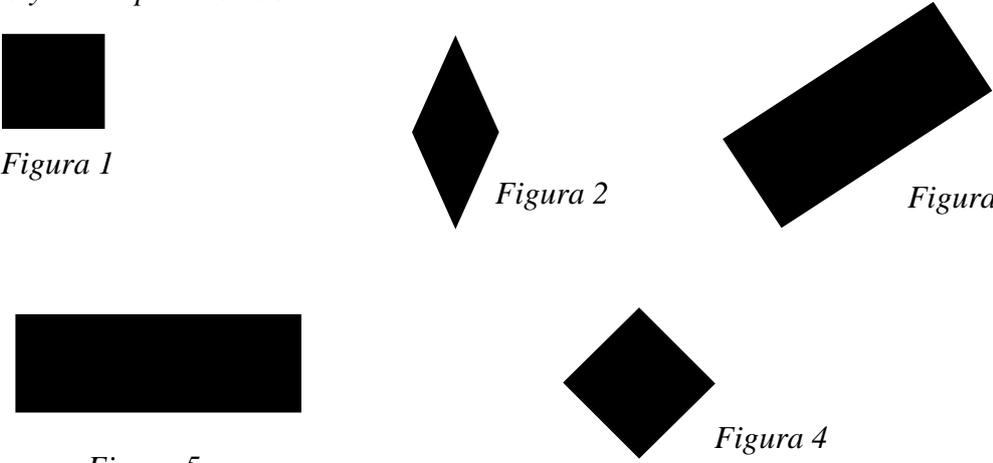


Figura 1 *Figura 2* *Figura 3*

Figura 5 *Figura 4*

Ilustración 3: Tarea de clasificación de figuras geométricas

Nivel 4 o de deducción formal.

Los estudiantes entienden y realizan razonamientos lógicos formales. Además comprenden el sentido y la utilidad de los teoremas y aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas.

Nivel 5 o de Rigor.

En este nivel, la geometría se trabaja de manera abstracta sin necesidad de utilizar ejemplos o casos concretos. Constituyen el último nivel de razonamiento geométrico.

El grado de razonamiento matemático de los estudiantes de primaria se considera que ronda entre el Nivel 1 de Van Hiele y el Nivel 3, por lo que para el estudio que se ha llevado a cabo no se tendrá en cuenta ni el Nivel 4 de Deducción formal ni el Nivel 5 de Rigor.

Esta lista de descriptores que nos facilitan diversas publicaciones, nos lleva a la conclusión de que un nivel de razonamiento no puede ser considerado como un proceso único, sino como un conjunto de procesos (Gutiérrez & Jaime, 1998). Especialmente relevantes son las aportaciones de Gutiérrez & Jaime (1998), donde se identificaron los diferentes procesos que podemos encontrarnos dentro de cada nivel:

- Reconocimiento de figuras geométricas e identificación de componentes y propiedades.
- Definición de un concepto geométrico. Se puede dividir en dos subprocesos a su vez: uso de la definición, cuando el estudiante usa una determinada definición en una tarea; y formulación de la definición, cuando el estudiante define una figura.
- Clasificación de las figuras geométricas en clases o familias.
- Demostración de propiedades o afirmaciones.

Estos procesos de razonamiento -reconocimiento, definición, clasificación y demostración- se encuentran presente en cada uno de los niveles (Gutiérrez & Jaime, 1998). Es decir, el nivel de razonamiento de un estudiante depende de cómo este considera y utiliza estos

procesos. A continuación se muestra la **Tabla 1** que recoge los procesos de razonamientos propios de cada nivel.

Tabla 1

Atributos distintivos de los procesos de razonamiento en cada nivel de Van Hiele

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Reconocimiento	Atributos físicos	Propiedades matemáticas	-----	-----
Uso de definiciones	-----	Solo definiciones con estructura simple	Cualquier definición	Acepta varias definiciones equivalentes
Formulación de definiciones	Lista de propiedades físicas	Lista de propiedades matemáticas	Conjuntos de propiedades necesarias y suficientes	Demuestra la equivalencia de definiciones
Clasificación	Exclusiva, basada en atributos físicos	Exclusiva basada en atributos matemáticos	Puede utilizar tanto definiciones exclusivas como inclusivas	-----
Demostración	-----	Verificación con ejemplos	Demostraciones lógica informales	Demostraciones matemático-formales

Nota: Recuperado de Gutiérrez & Jaime (1998, p. 6).

Por lo tanto, Gutiérrez y Jaime (1998) concluyeron con lo siguiente:

- El proceso de **reconocimiento** en estudiantes del Nivel 1, se basa en atributos físicos, tales como la forma o el tamaño. Mientras que en el Nivel 2 o superior los estudiantes ya son capaces de reconocer propiedades matemáticas de las figuras tales como dos lados paralelos o cuatro ángulos rectos. Véase que la habilidad de reconocer no discrimina entre los niveles 2, 3, 4 y 5.
- Los estudiantes del Nivel 1, no suelen usar ni dar **definiciones** matemáticas, tan solo se basan en atributos físicos o similitudes: *se parece a, tiene forma de...* En el Nivel 2, las definiciones se basan en listas de propiedades matemáticas, puesto que

los estudiantes no entienden la estructura lógica de las definiciones, como por ejemplo, las propiedades necesarias y suficientes. Aumentando el orden de complejidad, en el Nivel 3, los estudiantes pueden relacionar diferentes propiedades usando y formulando definiciones matemáticas. Por último, en el Nivel 4 y posteriores, el estudiante usa y formula de forma inequívoca diferentes definiciones para una misma figura y es capaz de demostrar la equivalencia entre ellas.

- En el Nivel 1 y 2 de Van Hiele, el proceso de **clasificación** es exclusivo, pero con un ligero matiz: en el nivel 1, la clasificación se basa en atributos físicos mientras que en el Nivel 2, aparecen los atributos matemáticos. Por ejemplo, ante la pregunta si un cuadrado es un rectángulo, un estudiante en el Nivel 1 respondería tal que así “no porque no tiene forma de rectángulo”, mientras que otro/a en el Nivel 2 se basaría en propiedades matemáticas v.g. “no porque no tiene dos lados de mayor longitud”. Estudiantes en el Nivel 3 y posterior, son capaces de realizar clasificaciones inclusivas o exclusivas en función de su conveniencia.
- El proceso de **demostración** en el Nivel 1 es inexistente, puesto que los estudiantes no han adquiridos los procedimientos o habilidades necesarias. Si en el Nivel 2, los ejemplos concretos son la base de las demostraciones, en el Nivel 3, estos sirven como una ayuda más para deducir y razonar informalmente. A partir del Nivel 4, el estudiante entiende que una figura es un caso concreto y que para demostrar una afirmación es necesario partir de premisas más abstractas o generales.

Tantos estos procesos de razonamientos como los propios niveles, están liderados por una serie de características que se presentan a continuación.

- **Los niveles de razonamientos forman una secuencia jerarquizada.** Cada nivel de razonamiento se apoya en el anterior, por lo que no es posible alcanzar un determinado nivel de razonamiento sin antes haber superado el nivel previo. Es decir, sin la capacidad de razonamiento del primer nivel, el estudiante no es capaz de llegar a realizar un razonamiento del segundo nivel; y así consecutivamente con el resto de niveles. Como consecuencia del aprendizaje memorístico, algunos estudiantes pueden aparentar un nivel de razonamiento superior puesto que han aprendido a realizar procedimientos rutinarios sin ninguna comprensión (Gutiérrez & Jaime, 2012). Como consecuencia de ello, se deduce que no se le debe enseñar a

una persona un razonamiento, sino a que razone de una forma determinada (Jaime & Gutiérrez, 1990).

Además los niveles tienen una estructura recursiva, es decir, hay habilidades implícitas que se convierten en explícitas en el nivel N+1 (Jaime & Gutiérrez, 1990). Es decir, por ejemplo en el Nivel 1 un alumno conoce la figura como totalidad pero implícitamente está aprendiendo las partes y propiedades de las figuras. Cuando alcance el Nivel 2, el estudiante será consciente de las partes y propiedades de las figuras, pero implícitamente estará aprendiendo relaciones entre las propiedades. La tabla 1 resume estas habilidades implícitas y explícitas.

Tabla 2.
Estructura recursiva de los niveles de Van Hiele.

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
Nivel 1	Figuras	Partes y propiedades de las figuras
Nivel 2	Parte y propiedades de las figuras	Implicaciones entre propiedades
Nivel 3	Implicaciones entre propiedades	Deducción formal de teoremas
Nivel 4	Deducción formal de teoremas	

Nota: tomada de Jaime & Gutiérrez (1990, p. 312)

- **Cada nivel de razonamiento incluye un lenguaje específico.** La progresión en el aprendizaje matemático no consta solo de la adquisición de conocimientos, sino que también incluye un progreso en las capacidades referidas al lenguaje matemático (Fouz, 2006). Un ejemplo claro y presente en Jaime & Gutiérrez (1990) es la concepción de la palabra “demostrar”. En la actividad siguiente presente en nuestro test, nos podemos encontrar con diferentes respuestas.

¿Es un cuadrado la figura 4? Justifica tu respuesta.

Mientras que para un estudiante del Nivel 1 la justificación carece de sentido, si se encuentra en el Nivel 2, el alumno justificará su respuesta basándose en ese caso y en observaciones o mediciones. Mientras que en el Nivel 3 el estudiante ya utiliza un razonamiento formal basándose en la lógica.

Asimismo, el hecho de que cada nivel esté relacionado con un vocabulario específico nos hace destacar la importancia de la comunicación docente-discente (Voduek & Lipovec, 2014). El docente debe tener los suficientes conocimientos tanto técnicos como pedagógicos y didácticos para adaptarse al nivel de sus estudiantes, y por lo tanto, poder guiarlos en su aprendizaje (Voduek & Lipovec, 2014).

- **El aprendizaje o paso de un nivel a otro se produce de manera continua.** Según Van Hiele, el paso de un nivel a otro tiene lugar de manera discreta, mediante “saltos”. Sin embargo, las teorías cognitivas modernas señalan que la transición de un nivel a otro tiene lugar de manera gradual y compleja. El aprendizaje se entiende como un proceso complejo de reformulación de los esquemas significativos de pensamiento. De este modo, los estudiantes pueden mostrar características de dos niveles al mismo tiempo (Fouz, 2006; Sarasua et al., 2013).

Gutiérrez y Jaime (1998) introduce el concepto “grado de adquisición” para indicar el conocimiento geométrico de un estudiante. Por lo tanto, pueden aparecer diferentes grados de adquisición de diferentes niveles al mismo tiempo, siendo uno mayoritario. Por ejemplo, un alumno puede tener un grado de adquisición del Nivel 1 del 45%, faltándole un 55%. Es decir, este estudiante ha superado el Nivel 1 en un 55% pero aún tiene rasgos del mismo (45%).

Tras la descripción de los niveles de razonamiento y sus correspondientes características, es necesario centrar la atención en cómo determinar el nivel de razonamiento de un estudiante, en este caso de Educación Primaria. Para ello, es necesario tener en cuenta lo siguiente:

“El nivel de razonamiento de un individuo es de carácter local” (Jaime & Gutiérrez, 1990, p. 319). Esto quiere decir que el nivel de razonamiento de un estudiante varía en relación a las diferentes áreas de matemáticas. Incluso dentro de la geometría, el alumno puede encontrarse en diferentes niveles si hablamos de triángulos o de cuadriláteros. Por lo tanto, el alumno puede argumentar y justificar que el cuadrado es un rectángulo, y sin embargo, no ser consciente de que un triángulo equilátero puede ser un triángulo isósceles teniendo en cuenta la definición inclusiva del triángulo isósceles.

Como consecuencia principal de esta característica que señala el paso de un nivel a otro como un proceso complejo, Van Hiele diseñó una serie de actividades y materiales para poder garantizar un proceso de enseñanza y aprendizaje efectivo (Jaime & Gutiérrez, 1990). Estas actividades se estructuran en torno a cinco fases presentes en Jaime y Gutiérrez (1990):

- Fase 1: Información. Las actividades van dirigidas a conocer las ideas previas o nivel de partida de los alumnos.
- Fase 2: Orientación dirigida. Esta fase tiene el principal objetivo de que los alumnos descubran, comprendan y aprendan los conceptos, figuras o propiedades dentro del área de geometría que se esté trabajando.
- Fase 3: Explicitación. La fase 3 no es una fase de aprendizaje de cosas nuevas, sino de revisión del trabajo hecho.
- Fase 4: Orientación libre. En esta fase, los estudiantes deben aplicar el conocimiento adquirido a otras investigaciones, terminando que asimilar los conceptos.
- Fase 5: Integración. Esta fase es una vuelta a lo general, para que los estudiantes pueden llegar a tener una visión general de los contenidos y métodos.

De este modo, el modelo de Van Hiele con su parte descriptiva –niveles- y su parte instructiva -fases- constituye un referente metodológico dentro de la enseñanza de la geometría. Además, el modelo en sí, se convierte en una herramienta que analiza y evalúa el conocimiento geométrico, ofreciendo una fuente de información sobre la que investigar y actuar, y por lo tanto, un medio para mejorar la enseñanza de la geometría.

Son varias las investigaciones sobre la identificación del nivel de razonamiento en estudiantes. La más reciente, realizada por Sarasua et al. en 2013, se centra en ofrecer una

panorámica de la prevalencia de los niveles de razonamiento geométrico a lo largo de diversas etapas educativas, desde Primaria a estudiantes de Magisterio. De esta forma, no solo se podría analizar el proceso gradual de aprendizaje sino también comparar el conocimiento geométrico de estudiantes de primaria como futuros docentes de dicha etapa educativa. Como establece Afonso Martín, Camacho Machín, & Socas Robayna (1999) en *La epistemología del profesorado en la implementación de un currículo desde la perspectiva de Van Hiele*, el perfil del profesor requerido por el modelo de Van Hiele, no solo debe contar con formación pedagógica y didáctica, sino con “una formación científica de Geometría con un al menos un nivel de pensamiento geométrico superior al que se pretende trabajar con sus alumnos” (p.5). Sin embargo, el carácter global del estudio tuvo como consecuencia una falta de información relativa a la etapa de Primaria. El cuestionario elaborado no se pudo utilizar para Primaria, puesto que el nivel de dificultad era demasiado alto. Los estudiantes de Primaria o lo dejaron en blanco o fueron incapaces de realizar las tareas solicitadas (Sarasua et al., 2013).

El objetivo del presente trabajo es contribuir a ofrecer una visión más específica sobre la prevalencia y distribución de los niveles de razonamiento en la Etapa de Educación Primaria a partir de los datos obtenidos de una investigación llevada a cabo a 46 estudiantes de sexto de Educación Primaria de Sevilla y Liverpool.

La investigación que a continuación se presenta consta de las siguientes partes: creación del cuestionario, recogida de datos o información, análisis, evaluación y conclusión.

3. METODOLOGÍA

3.1. PARTICIPANTES

El cuestionario se administró a 46 estudiantes de sexto de Educación Primaria -11-12 años- en una única sesión de 50 minutos. Los sujetos de estudio fueron 23 estudiantes de un colegio público de Sevilla y 23 estudiantes de un colegio público de Liverpool. Dentro del colegio público de Sevilla la mayoría de los estudiantes pertenecen a familias de clase media-alta, con algunos casos de nivel socio-educativo bajo. Sin embargo, un porcentaje alto de los estudiantes del centro público de Liverpool recibían lo que es denominado “Free School Meal” o comida gratis, por lo que pertenecen a un contexto social medio-bajo.

3.2. INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE DATOS

El instrumento utilizado proviene de una adaptación del caso práctico realizado en segundo curso del Grado de Educación Primaria dentro de la parte práctica de la asignatura Didáctica de las Matemáticas.

Para seleccionar y adaptar el cuestionario se han tenido en cuenta las recomendaciones que propuso Jaime & Gutiérrez (1990) en *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el Modelo de Van Hiele* y que se presentan a continuación.

- Las tareas o ítems deben ser con respuesta abierta, para poder evaluar y analizar la respuesta y el razonamiento de los estudiantes.
- El cuestionario elaborado no es un examen donde se evalúan los conocimientos, actitudes y procedimientos del alumno, sino que constituye una fuente de información donde lo importante es qué contestan y por qué.
- El cuestionario debe cubrir tareas que cubran los niveles que se quieren analizar. En este caso, son tareas que van del Nivel 1 al Nivel 3.
- En la determinación de un nivel por pregunta no se debe asignar un nivel determinado, sino asegurar que el estudiante tiene por lo menos ese nivel de razonamiento.

El cuestionario utilizado, está formado por una serie de tareas de respuesta libre que van más allá de los test de elección múltiple y que se acercan a la entrevista oral. Por lo tanto, cada uno de los ítems puede ser resuelto de acuerdo a diferentes niveles de razonamiento. A diferencia del cuestionario utilizado por Sarasua et al. (2013), las diversas tareas están adaptadas al nivel de Educación Primaria, permitiendo que los alumnos puedan contestar cada ítem. En definitiva, el cuestionario proporciona tanto información cuantitativa sobre el nivel de Van Hiele en el que se encuentra el estudiante como información cualitativa sobre el grado de adquisición de cada nivel (Sarasua et al., 2013).

A continuación se presenta un ejemplo del cuestionario utilizado.

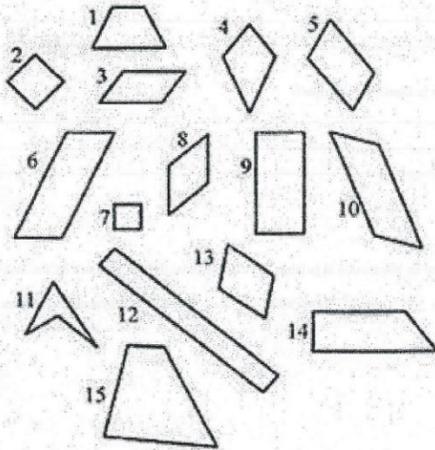
Edad:	Fecha:
Curso:	Género:

1. Dadas la siguiente colección de cuadriláteros (ver ilustración):

- Pon una **C** dentro de los **cuadrados**.

- Pon una **B** dentro de los **rombos**.

- Pon una **R** dentro de los **rectángulos**.



¿En qué te has fijado para seleccionar los **cuadrados**?

¿En qué te has fijado para seleccionar los **rombos**?

¿Es un cuadrado la **figura 1**? ¿Por qué?

¿Es un cuadrado la **figura 4**? ¿Por qué?

¿Es un rectángulo la **figura 5**? ¿Por qué?

2. Rellena el hueco en blanco con la palabra que corresponda: **SIEMPRE, A VECES O NUNCA**.

- Los **rombos** son _____ **cuadrados**. Explica con detalle tu respuesta y dibuja un ejemplo.

Ilustración 4 Cuestionario

3.3. PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

En primer lugar, a cada estudiante se le ha asignado una codificación teniendo en cuenta la procedencia -Sevilla o Liverpool-, el curso al que pertenece y el orden en el que fue analizado. Por ejemplo, el estudiante S.6.3, pertenece a sexto de primaria del centro de Sevilla y fue analizado en tercer lugar. El siguiente paso es observar pregunta por pregunta de cada alumno, analizando las respuestas del estudiante y estableciendo si corresponde al Nivel 1, 2 o 3. La Tabla 1 muestra algunos ejemplos:

Tabla 3

Ejemplo de asignación de nivel y de grado de adquisición

	Ítems									
	1	2	3	4	5	6	7	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
L.6.1.	2	2	1	3	2	2	1	29%	57%	14%
L.6.2.	2	1	1	3	2	2	1	57%	29%	14%

A continuación, a cada alumno se le ha asignado un vector, que corresponde al porcentaje de rasgos de cada nivel presente en las respuestas $\{n_1, n_2, n_3\}$: % de rasgos del Nivel 1, % de rasgos del Nivel 2, % de rasgos del Nivel 3. Por ejemplo, al estudiante L.6.1. le corresponde el siguiente vector $\{43\%; 43\%; 14\%\}$. Es decir, el estudiante L.6.1. tiene un 43% de rasgos del Nivel 1, superándolo en un 57%, tiene un 43% de rasgos del Nivel 2, superándolo en un 14% y tiene un 14% de rasgos del Nivel 3.

Puesto que se ha analizado alumno por alumno y pregunta por pregunta, a continuación, se van a exponer los criterios establecidos para cada pregunta.

1. El primer ítem se corresponde con una clasificación donde el estudiante no tiene que argumentar su respuesta, por lo tanto esta pregunta no se debe analizar de forma individual. El nivel asignado se corresponde con el mayoritario teniendo en cuenta todas las respuestas. Por ejemplo, en la **Tabla 3**, al estudiante L.6.1. se le ha asignado el Nivel 2 en la pregunta 1, puesto que si observamos el resto de preguntas, el nivel más frecuente es el 2.
2. En el segundo ítem se pide una definición del cuadrado. Aquellos estudiantes que no hayan sido capaces de dar ninguna definición o una basada en la forma física, estarían categorizados en el Nivel 1 de Reconocimiento. Propio del Nivel 2 de análisis serán

aquellos estudiantes que han dado una lista de propiedades matemáticas. En el Nivel 3, se encuentran aquellos alumnos que han sido capaces de definir el cuadrado con las propiedades necesarias y suficientes -lados iguales y ángulos rectos-.

3. El tercer ítem se basa en una definición del rombo. Los criterios son similares a la pregunta dos. En este caso, la definición inclusiva del rombo que incluye al cuadrado –propiedades necesarias y suficientes- es “lados iguales”.
4. El cuarto y quinto ítem se analizan conjuntamente con el segundo. Si el alumno no es capaz de argumentar su respuesta o se basa en la forma física, se encontraría en el Nivel 1. Podemos diferenciar dos casos complejos y cómo se han analizado finalmente:
 - a. Caso 1. El estudiante define el cuadrado –ítem 2- con una lista de propiedades matemáticas -Nivel 2- y argumenta con una única propiedad. Por lo tanto, el alumno entiende que si una figura no cumple tan solo una de las propiedades necesarias y suficientes del cuadrado, ya no puede ser considerado como tal. Aquí se diferencia entre el proceso de definición, donde el estudiante se encontraría en el Nivel 2 y el proceso de clasificación, donde el alumno tendría un razonamiento de Nivel 3.
 - b. Caso 2. El alumno define el cuadrado –ítem 2- con una única propiedad matemática que es la misma que da en sus argumentos –ítem 4-. Estas dos respuestas serían propias del Nivel 2, puesto que el estudiante tan solo conoce una propiedad.
5. En el ítem seis, el estudiante debe argumentar si una figura determinada es un rectángulo. No realizar ningún argumento, basarse en la forma física o utilizar conceptos erróneos son respuestas prototípicas del Nivel 1 de reconocimiento. En cambio, si el alumno es capaz de dar una lista de propiedades matemáticas, estaríamos hablando del Nivel 2. Por último, el estudiante estaría en el Nivel 3, si da una definición con las propiedades necesarias y suficientes del rectángulo -ángulos rectos-.
6. En la última actividad los alumnos tienen que clasificar al cuadrado como rombo. Característico del Nivel 1 sería una clasificación exclusiva basada en la forma física. Si, en cambio, el alumno clasifica de forma exclusiva pero se basa en propiedades matemáticas, hablaríamos de Nivel 2. En el Nivel 3, el alumno es consciente de que la definición del rombo incluye al cuadrado, es decir, conoce y aplica la definición inclusiva de rombo – cuatro lados iguales-.

3.4. EJEMPLO DE ANÁLISIS DE UN CUESTIONARIO

A continuación, se presenta un ejemplo de análisis. El estudiante a analizar es el que corresponde con el código S.6.1. -ilustración 5-.

Comenzamos por el segundo ítem, puesto que ya se ha argumentado que el primer ítem debe analizarse en conjunto con el resto. En su respuesta, el estudiante nos habla de un mismo componente, como es el lado, y le atribuye dos propiedades “iguales” y “paralelos”. El alumno menciona propiedades del cuadrado que no son necesarias como son “lados paralelos” mientras que omite otras que sí lo son como es: “ángulos rectos”. Por lo tanto, podemos concluir que esta respuesta es de Nivel 2, al tratarse de una lista de propiedades matemáticas.

Si continuamos con los cuadrados, nos encontramos con los ítems 4 y 5. La respuesta es prácticamente idéntica. En ambas, el alumno argumenta que no es un cuadrado debido a que no cumple dos de las propiedades del cuadrado -lados iguales y paralelos-. Si las propiedades que el estudiante tuviera presente fueran las necesarias y suficientes, bastaría con que no se cumpliera una de las dos, para concluir que no es un cuadrado. Se concluye que las respuestas de ambas preguntas son de Nivel 2.

Pasamos al rombo. Analizando el ítem 3, se puede observar que el estudiante desconoce la figura al atribuir propiedades erróneas. Al mismo tiempo, argumenta con la forma física, rasgo típico del Nivel 1. Se concluye que la respuesta al tercer ítem pertenece al Nivel 1. Continuamos con el ítem 7. Aunque el alumno es capaz de entender parte del concepto de inclusivo, sus argumentos se basan en la forma física de las figuras geométricas: “si lo miras de un lado...”. Se concluye, por lo tanto, que esta respuesta pertenece al Nivel 1 de reconocimiento.

A continuación pasamos al ítem 6 relacionado con el rectángulo. En esta respuesta, el estudiante tiene claro cuál es la propiedad necesaria y suficiente para que una figura sea un rectángulo: ángulos rectos. Por lo tanto, se puede concluir que esta respuesta es de Nivel 3.

Finalmente, volvemos al primer ítem, y tras haber analizado el resto de las preguntas y observando la respuesta del estudiante, podemos concluir que el estudiante se encuentra en el Nivel 2 de Análisis.

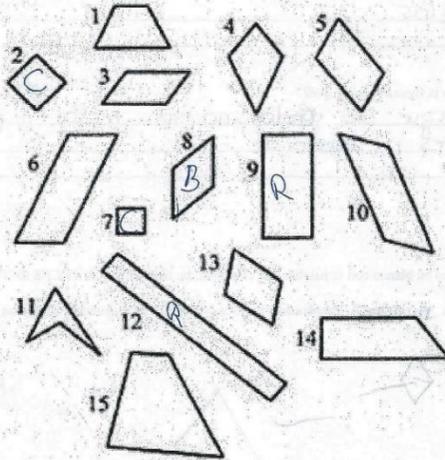
El siguiente paso tras haber analizado pregunta por pregunta es atribuirle al estudiante

S.6.1. el vector correspondiente: $\{29\%, 57\%, 14\%\}$. Es decir, el estudiante S.6.1. tiene un 29% de rasgos del Nivel 1, superándolo en un 71%; tiene un 57% de rasgos del Nivel 2, superándolo en un 43% y tiene un 14% de rasgos del Nivel 3.

Edad: 11 años	Fecha: 9/16/2025
Curso: 6.A	Género: Hombre

1. Dadas la siguiente colección de cuadriláteros (ver ilustración):

- Pon una C dentro de los cuadrados.
- Pon una B dentro de los rombos.
- Pon una R dentro de los rectángulos.



2) ¿En qué te has fijado para seleccionar los cuadrados?

En que si tiene todos los lados iguales y paralelos es un cuadrado.

3) ¿En qué te has fijado para seleccionar los rombos?

En que si tiene todos los lados iguales y en su forma.

1) ¿Es un cuadrado la figura 1? ¿Por qué?

No, porque no tiene los cuatro lados iguales y paralelos.

2) ¿Es un cuadrado la figura 4? ¿Por qué?

No, porque no tiene todos los lados iguales y paralelos.

3) ¿Es un rectángulo la figura 5? ¿Por qué?

No, porque sus ángulos no son rectos y por lo tanto es un romboide.

2. Rellena el hueco en blanco con la palabra que corresponda: SIEMPRE, A VECES O NUNCA.

7) Los rombos son a veces cuadrados. Explica con detalle tu respuesta y dibuja un ejemplo.



Porque si lo miras desde un lado es un cuadrado y si lo miras de otro lado es un rombo, pero eso no pasa siempre.

Ilustración 5: Cuestionario S.6.1

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE HALLAZGOS

En primer lugar, se presentan y se realizan algunos comentarios sobre las respuestas de los estudiantes de 6° Primaria de la ciudad de Sevilla que ilustran y ejemplifican los diferentes tipos de respuestas que nos hemos encontrado en los cuestionarios.

A continuación se presentan tres repuestas prototípicas relacionadas con la clasificación y reconocimiento del cuadrado -ítems 2, 4 y 5-.

1. Tipo A. En este tipo de respuesta, el estudiante incluye en la definición del cuadrado algunas componentes con sus propiedades como cuatro lados iguales, pero al mismo tiempo menciona la forma física. Este tipo de estudiante, aunque incluye algunos elementos del cuadrado, lo reconoce por su forma física por lo que se ha clasificado como Nivel 1.
2. Tipo B. La respuesta de tipo B incluye el componente “lados” con diversas propiedades como iguales, paralelos o cuatro. Esta respuesta estaría relacionada con el Nivel 2 de análisis, puesto que el estudiante comprende la figura como un conjunto de elementos pero la definición se basa en una lista exhaustiva de propiedades, en este caso utilizando el componente “lados”.
3. Tipo C. Este tipo de respuesta es parecido al de tipo B, sin embargo, en esta se incluye a parte del componente “lados”, otros como son los ángulos o los vértices. Se ha separado puesto que se entiende que el discente aunque realiza un razonamiento de Nivel 2, ha dado un paso más allá, observando otros elementos del cuadrado.
4. Tipo D. El estudiante ha utilizado una definición del cuadrado mencionando las propiedades necesarias y suficientes para que una figura sea considerada un cuadrado: “*cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos*”. Sin embargo, a la hora de justificar por qué la figura no es un cuadrado menciona las mismas propiedades, por lo que el alumno no es consciente de que si la figura no cumple una de las propiedades necesarias y suficientes, no puede ser considerada un

cuadrado. Que el estudiante utilice una definición inclusiva no lleva consigo que sea consciente de ello. Esta respuesta ha sido considerada de Nivel 2.

Centrándonos en el ítem 3, donde los estudiantes debían definir el rombo, nos encontramos con los siguientes tipos de respuestas.

1. Tipo A. El estudiante o no ha sido capaz de dar ninguna respuesta o solo ha escrito una componente –lado- del rombo pero sin establecer ninguna propiedad. En este caso, se entiende que este tipo de razonamiento se encuentra en el Nivel 1 de reconocimiento.
2. Tipo B. El tipo de razonamiento propio de tipo B también se encuentra dentro del Nivel 1. Sin embargo, encontramos una ligera diferencia: el estudiante sí tiene nociones sobre el rombo. Se reconoce el rombo como figura haciendo hincapié en la forma física de este.
3. Tipo C. La respuesta prototípica de tipo C engloba una lista de componentes y propiedades matemáticas del rombo tales como: cuatro lados iguales y paralelos o dos ángulos agudos y dos obtusos o la presencia de una diagonal mayor y una menor.

Continuando con ítems relacionados con el rombo, pasamos al ítem 6, donde se aprecian los siguientes tipos de razonamiento:

1. Tipo A. El estudiante no es capaz de justificar o argumentar su respuesta. Es decir, tiene claro que los rombos nunca son cuadrados pero no expresa el por qué. Este tipo de respuesta se engloba dentro del Nivel 1 de reconocimiento.
2. Tipo B. El estudiante razonaría dentro del Nivel 1 de Van Hiele puesto que sus justificaciones se basan en aspectos físicos del rombo.

Han estado presentes respuestas como “si ponemos un rombo de esa forma, parece un cuadrado” [S.6.9] o “si lo miras de un lado es un rombo, si lo miras de otro es un cuadrado” [S.6.2] o “si le das la vuelta es un cuadrado” [S.6.20]. El estudiante entiende parte del concepto de inclusión pero sus argumentos se basan en atributos físicos.

3. Tipo C. Este tipo de respuesta se basa en ofrecer dos listas de propiedades matemáticas tanto del rombo como del cuadrado, llegando a definiciones exclusivas. Por lo tanto, serían respuesta típica de un Nivel 2 de análisis.

Por último, analizaremos el ítem 7 que corresponde con el rectángulo. Hemos podido observar lo siguiente:

1. Tipo A. El estudiante ha tenido en cuenta una definición exclusiva ofreciendo respuestas basadas en el aspecto físico tales como “no porque es un romboide” [S.6.23]. Este tipo de respuesta se ubica en el Nivel 1 de Reconocimiento.
2. Tipo B. Este tipo de respuesta contiene propiedades y componentes redundantes o innecesarias del rectángulo tales cuatro ángulos rectos, lados iguales dos a dos y lados paralelos. Por lo que se concluye que esta respuesta es de Nivel 2.
3. Tipo C. En este rango, encontramos aquellos estudiantes que han utilizado un lenguaje matemático pero que solo se han centrado en un componente del rectángulo “lados”, por lo que su justificación es errónea -Nivel 2 de Van Hiele-.
4. Tipo D. Algunos estudiantes han argumentado que no es un rectángulo basando sus argumentaciones en una definición inclusiva del mismo –cuatro ángulos rectos o iguales-. Por lo tanto, estos estudiantes estarían realizando razonamientos propios de Nivel 3.

Tras haber analizado los diferentes prototipos de respuesta, la **Tabla 4** resume todos los resultados obtenidos de los estudiantes de 6º de Primaria de un centro educativo de Sevilla. Los ítems se han cambiado de orden para poderlos agrupar en función de la figura a la que hacen mención: cuadrado -ítems 2, 4 y 5-, rombo -ítems 3 y 7- y rectángulo -ítem 6-.

El ítem 1, como tarea global que complementa a las preguntas abiertas, nos muestra el nivel adjudicado a cada alumno. En definitiva, a cada estudiante se le ha adjudicado el nivel cuyo porcentaje sea mayor. Por ejemplo, el estudiante S.6.2. estaría en el Nivel 1 de Reconocimiento puesto que tiene un 57% de rasgos de dicho nivel. Puesto que el paso de un nivel a otro no ocurre de manera discreta, el estudiante comienza a tener rasgos del Nivel 2 y Nivel 3.

Tabla 4.
Resultados tras haber adjudicado a cada estudiante un nivel

	Porcentaje	Estudiantes
Nivel 1	13%	3
Nivel 2	87%	20
Nivel 3	0%	0
Total	100%	23

En definitiva, si observamos la **Tabla 4**, como media, los estudiantes de 6º de Primaria del centro educativo de Sevilla, España, se encuentran en su mayoría -87%- en el Nivel 2 de Análisis. Aunque algunos -13%- muestran principalmente rasgos del Nivel 1 de Reconocimiento.

Tabla 5

Resultados del análisis de cuestionarios a estudiantes del centro público de Sevilla

Código	Vector	Ítems							Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
		1	2	4	5	3	7	6			
S.6.1	{29%, 57%, 14%}	2	2	2	2	1	1	3	29%	57%	14%
S.6.2	{57%, 29%, 14%}	1	1	2	2	1	1	3	57%	29%	14%
S.6.3	{86%, 14%, 0%}	1	2	1	1	1	1	1	86%	14%	0%
S.6.4	{14%, 71%, 14%}	2	2	2	2	2	1	3	14%	71%	14%
S.6.5	{86%, 14%, 0%}	1	2	1	1	1	1	1	86%	14%	0%
S.6.6	{29%, 71%, 0%}	2	2	2	2	2	1	1	29%	71%	0%
S.6.7	{14%, 71%, 14%}	2	1	2	2	2	2	3	14%	71%	14%
S.6.8	{29%, 57%, 14%}	2	2	2	2	1	1	3	29%	57%	14%
S.6.9	{29%, 57%, 14%}	2	2	2	2	1	1	3	29%	57%	14%
S.6.10	{0%, 100%, 0%}	2	2	2	2	2	2	2	0%	100%	0%
S.6.11	{14%, 71%, 14%}	2	2	2	2	2	1	3	14%	71%	14%
S.6.12	{0%, 86%, 14%}	2	2	2	2	2	2	3	0%	86%	14%
S.6.13	{14%, 86%, 0%}	2	2	2	2	2	2	1	14%	86%	0%
S.6.14	{0%, 86%, 14%}	2	2	2	2	2	2	3	0%	86%	14%
S.6.15	{0%, 86%, 14%}	2	2	2	2	2	3	2	0%	86%	14%
S.6.16	{29%, 71%, 0%}	2	2	2	2	1	2	1	29%	71%	0%
S.6.17	{14%, 86%, 0%}	2	2	2	2	2	2	1	14%	86%	0%
S.6.18	{14%, 86%, 0%}	2	2	2	2	2	2	1	14%	86%	0%
S.6.19	{14%, 86%, 0%}	2	2	2	2	2	1	2	14%	86%	0%
S.6.20	{29%, 71%, 0%}	2	2	2	2	1	1	2	29%	71%	0%
S.6.21	{29%, 71%, 0%}	2	2	2	2	2	1	1	29%	71%	0%
S.6.22	{14%, 86%, 0%}	2	1	2	2	2	2	2	14%	86%	0%
S.6.23	{14%, 86%, 0%}	2	2	2	2	2	2	1	14%	86%	0%
									24%	70%	6%
									100%		

A continuación se muestran los prototipos de respuestas presentes en los cuestionarios de los estudiantes de Liverpool.

Si comenzamos con los ítems relacionados con el cuadrado, ítem 2, 4 y 5, nos encontramos con los siguientes tipos de respuestas:

1. Tipo A. Aunque aparecen algunos componentes del cuadrado con sus propiedades como cuatro lados, el estudiante menciona aspectos físicos típicos del Nivel 1 de Van Hiele. Véanse los siguientes extractos de algunas respuestas: *if you twizzle it around, it is a square* -si lo giras, es un cuadrado [L.6.10.], *it's not tilted* -no está inclinado- [L.6.17.], o *it's like half of a rectangle* -es como la mitad de un rectángulo- [L.6. 20.]. Además el estudiante justifica que la figura que se menciona no es un cuadrado porque es otra figura ya sea *kite* -cometa- o *trapezium* -trapezio-.
2. Tipo B. El estudiante ofrece una lista de componentes y propiedades matemáticas del cuadrado tales como *4 equal sides* -4 lados iguales-, *right angles* -ángulos rectos- o *4 vertices* -4 vértices-. Además en su respuesta se observa una definición exclusiva del cuadrado pero mencionando componentes y propiedades. Por ejemplo: *No, because it doesn't have all equal sides. So, it's a kite* -no, porque no tiene los lados iguales, por lo que es una cometa- [L.6.4.].

En el ítem 3 donde los estudiantes deben realizar una definición del rombo, observamos principalmente una respuesta mayoritaria, Tipo A, y algunos casos de respuesta Tipo B:

1. Tipo A. El estudiante se basa en aspectos físicos para definir al rombo. Son usuales frases típicas del Nivel 1 como *it looks like a diamond* -es como un diamante- o *it's like a square but tilted* -es como un cuadrado pero inclinado-.
2. Tipo B. La respuesta incluye alguna componente y propiedad matemática del rombo pero de forma vaga, apareciendo principalmente solo el componente “lado”.

Continuando con ítems relacionados con el rombo, pasamos al 7, apareciendo las

siguientes respuestas:

1. Tipo A. Ya sea la respuesta *always* –siempre-, *sometimes* -a veces- o *never* –nunca-, el estudiante basa su respuesta en aspectos físicos, utilizando frases como *if you tilted a rhombus, it looks like a square sometimes* -si giras un rombo, este parece un cuadrado- [L.6.20.] o *you can't turn it* -puedes girarlo-.
2. Tipo B. Tan solo un estudiante [L.6.7], incluye en su respuesta solo componentes y propiedades matemáticas propias de Nivel 2.

Por último, se muestran las respuestas relacionadas con el rectángulo.

1. Tipo A. El estudiante afirma o niega que es un rectángulo, basando sus argumentaciones en aspectos físicos del rectángulo. Observamos respuestas tales como las siguientes: *if you turn up the shape the right way up, it is a rectangle* -si giras la figura hacia arriba, es un rectángulo- o *no, because it's tilted* -no, porque está girado-.
2. Tipo B. Sin embargo, otras respuestas incluyen propiedades matemáticas del rectángulo propias del Nivel 2: *two sides are the same* -dos lados son iguales-, *2 sets of equal sides* -dos pares de lados iguales- o *2 parallel lines* -dos rectas paralelas-.

A continuación la **Tabla 6** muestra los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes del centro educativo de Liverpool, Inglaterra. Si observamos los porcentajes totales medios, observamos que una parte importante -53%- de las respuestas de los estudiantes incluye rasgos del Nivel 1 de Reconocimiento de Van Hiele. Aunque también aparecen rasgos del Nivel 2 de Análisis -47%-.

Siguiendo el procedimiento de adjudicación de niveles explicado anteriormente -ítem 1-, un 35% de los estudiantes se encontrarían en el Nivel 1, mientras que un 65% en el Nivel 2

de Análisis.

Tabla 6

Resultados tras haber adjudicado a cada estudiante el nivel.

	Porcentaje	Estudiantes
Nivel 1	35%	8
Nivel 2	65%	15
Nivel 3	0%	0
Total	100%	23

Tabla 7

Resultados del análisis de cuestionarios a estudiantes del centro público de Liverpool

Código	Vector	Ítems							Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
		1	2	4	5	3	7	6			
L.6.1	{43%, 57%, 0%}	2	2	2	2	1	1	1	43%	57%	0%
L.6.2	{86%, 14%, 0%}	1	1	2	1	1	1	1	86%	14%	0%
L.6.3	{71%, 29%, 0%}	1	2	1	1	1	1	2	71%	29%	0%
L.6.4	{29%, 71%, 0%}	2	2	2	2	1	2	1	29%	71%	0%
L.6.5	{100%, 0%, 0%}	1	1	1	1	1	1	1	100%	0%	0%
L.6.6	{0%, 100%, 0%}	2	2	2	2	2	2	2	0%	100%	0%
L.6.7	{43%, 57%, 0%}	2	2	2	2	1	1	1	43%	57%	0%
L.6.8	{29%, 71%, 0%}	2	2	2	2	1	1	2	29%	71%	0%
L.6.9	{29%, 71%, 0%}	2	2	2	2	1	1	2	29%	71%	0%
L.6.10	{86%, 14%, 0%}	1	1	1	1	1	1	2	86%	14%	0%
L.6.11	{71%, 29%, 0%}	2	2	1	1	1	1	1	71%	29%	0%
L.6.12	{57%, 43%, 0%}	1	1	2	2	1	1	2	57%	43%	0%
L.6.13	{86%, 14%, 0%}	1	2	1	1	1	1	1	86%	14%	0%
L.6.14	{57%, 43%, 0%}	1	2	2	2	1	1	1	57%	43%	0%
L.6.15	{29%, 71%, 0%}	2	2	2	2	1	1	2	29%	71%	0%
L.6.16	{71%, 29%, 0%}	2	2	1	1	1	1	1	71%	29%	0%
L.6.17	{86%, 14%, 0%}	2	1	1	1	1	1	1	86%	14%	0%
L.6.18	{57%, 43%, 0%}	1	2	2	2	1	1	1	57%	43%	0%
L.6.19	{29%, 71%, 0%}	2	2	2	1	2	1	2	29%	71%	0%
L.6.20	{57%, 43%, 0%}	2	1	1	2	1	1	2	57%	43%	0%
L.6.21	{43%, 57%, 0%}	2	2	2	2	1	1	1	43%	57%	0%
L.6.22	{29%, 71%, 0%}	2	2	2	2	2	1	1	29%	71%	0%
L.6.23	{29%, 71%, 0%}	2	2	2	2	1	1	2	29%	71%	0%
									53%	47%	0%
									100%		

Por último, en la **Tabla 8** se presentan la media aritmética de los dos resultados, ofreciendo un único resultado para estudiantes de 6º de Primaria. De este modo, podemos concluir que el 24% de los estudiantes se encuentran en el Nivel 1 y un 76% en el Nivel 2.

Tabla 8
Relación estudiantes de Sevilla, de Liverpool y de ambos

	Estudiantes de Sevilla		Estudiantes de Liverpool		Estudiantes	
Nivel 1	13%	3	35%	8	24%	11
Nivel 2	87%	20	65%	15	76%	35
Nivel 3	0%	0	0%	0	0%	0
Total	100%	23	100%	23	100%	46

5. CONCLUSIONES, IMPLICACIONES Y LIMITACIONES

Aunque la muestra utilizada no sea lo suficientemente amplia y heterogénea para poder generalizar ciertas tendencias, los resultados pueden resultar interesantes para complementar otras investigaciones y como medida comparativa entre dos países, en este caso, Inglaterra y España.

En primer lugar tras haber expuesto los resultados en el apartado anterior, se puede concluir que un 24% de los estudiantes entrevistados se encuentran en el Nivel 1 de Reconocimiento de Van Hiele, un 76% en el Nivel 2 de Análisis y ningún estudiante en el Nivel 3. Concretamente dentro de los estudiantes de Sevilla, un 13% están ubicados en el Nivel 1 y un 87% en el Nivel 2 de Análisis. Mientras que un 35% de los estudiantes de Liverpool se encuentran en el Nivel 1 y un 65% en el Nivel 2.

La presente investigación que se ha llevado a cabo añade información a la realizada por Sarasua et al. (2013). Este trabajo complementa la visión panorámica que ofrecieron estos investigadores agregando información sobre el conocimiento geométrico de estudiantes de 6º de Primaria.

Siguiendo los resultados obtenido por Sarasua et al. (2013), podemos seguir argumentado que existe un proceso progresivo de la adquisición de niveles. Tanto en 6º de Primaria, como en 2º de la E.S.O. nos encontramos principalmente con dos niveles: Nivel 1 de Reconocimiento y Nivel 2 de Análisis con porcentajes similares. El 24% de estudiantes de 6º de Primaria y el 65,4% de estudiantes de 2º de la E.S.O. se encuentran en el Nivel 1. Este aumento de estudiantes en el Nivel 1 de 6º de Primaria a 2º de la E.S.O. se puede deber a la adaptación del cuestionario que se ha realizado para que los estudiantes de Educación Primaria pudieran realizar las tareas. A partir de 4º de la E.S.O. empiezan a aparecer estudiantes que están en el Nivel 3 de Clasificación hasta llegar a los/as estudiantes de 3º de Magisterio de Educación Primaria, donde un 77% de los/as estudiantes se encuentran en el Nivel 3.

En segundo lugar, sería conveniente comparar los resultados de los estudiantes de 6º de Primaria obtenidos en esta investigación con los obtenidos sobre los estudiantes de 3º de Magisterio de Educación Primaria por Sarasua, Ruiz de Gauna, & Arrieta (2013). Mientras que el 24% de estudiantes de Educación Primaria aún se encuentra en el Nivel 1, todos los estudiantes de Magisterio han superado dicho nivel. Sin embargo, en el Nivel 2, observamos un

dato interesante: el 76% de estudiantes de 6º de Primaria y el 24% de estudiantes de Magisterio de Educación Primaria se encuentra en el Nivel 2 de Análisis. Por lo tanto, podemos concluir que 6 de cada 25 futuros maestros tienen el mismo conocimiento geométrico que aproximadamente 2 de cada 5 futuros alumnos.

En último lugar, resulta útil comparar los resultados obtenidos en Liverpool y en Sevilla. Dada su dimensión, puesto que no referimos a dos países diferentes con dos sistemas educativos diferentes, resulta de gran interés dicha comparación. Mientras que en Sevilla, el 13% de los estudiantes muestran rasgos de Nivel 1, en Liverpool, este porcentaje aumenta hasta un 35%. Es decir, en Liverpool 1 de cada 3 alumnos aproximadamente se encuentra en el Nivel 1 mientras que en Sevilla esta relación baja a 1 de cada 8. Pasando al Nivel 2, un 87% de los estudiantes de Sevilla y un 65% de Liverpool se encuentran en el Nivel 2. En otras palabras, aproximadamente 7 de cada 8 estudiantes de Sevilla y 2 de cada 3, razonan similar a lo que consideramos Nivel 2. Si observamos las respuestas de los estudiantes de Liverpool, en una gran mayoría, están presente los aspectos físicos de las figuras con frases como “it looks like ...”. Quizás, una de las causas de esta diferencia entre Liverpool y Sevilla, pueda ser debido a la enseñanza o la metodología utilizada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Afonso Martín, M., Camacho Machín, M., & Socas Robayna, M. (1999). La epistemología del profesorado en la implementación de un currículo desde la perspectiva de los Van Hiele. *El Guinigada*, (8-9), 393.
- Fouz, F. (2006). Test geométrico aplicando el modelo de Van Hiele. *Sigma: revista de matemáticas = matematika aldizkaria*, (26), 33-60.
- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20 (2-3), 27-46.
- Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*(32), 55-70.
- Jaime, A., & Gutiérrez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. L. (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.
- Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la Lengua Española*. Recuperado de: <http://dle.rae.es/?id=J7ftXwn>
- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Boletín Oficial de Estado, núm. 52, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, España, 1 de Marzo del 2014.
- Sarasua, J., Ruiz de Gauna, J., & Arrieta, M. (2013). Prevalencia de los niveles de razonamiento geométrica a lo largo de diferentes etapas educativas. *Revista de Psicodidáctica*, 313-329.
- Voduek, H., & Lipovec, A. (2014). The square as a figural concept. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 430-448. Recuperado de <https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a21>