

# Trabajo Fin de Grado

## Grado en Ingeniería Aeroespacial

Aplicación de la Teoría Potencial para el estudio de las fuerzas ejercidas por una corriente incidente sobre placas rectangulares oscilantes

Autor: Miguel Ángel Flores Caballero

Tutor: José Manuel Gordillo Arias de Saavedra

**Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2016





Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Aeroespacial

# **Aplicación de la Teoría Potencial para el estudio de las fuerzas ejercidas por una corriente incidente sobre placas rectangulares oscilantes**

Autor:

Miguel Ángel Flores Caballero

Tutor:

José Manuel Gordillo Arias de Saavedra

Profesor titular

Dep. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016



Trabajo Fin de Grado: Aplicación de la Teoría Potencial para el estudio de las fuerzas ejercidas por una corriente incidente sobre placas rectangulares oscilantes

Autor: Miguel Ángel Flores Caballero

Tutor: José Manuel Gordillo Arias de Saavedra

El tribunal nombrado para juzgar el Trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2016

El Secretario del Tribunal



*A mi madre*

*A mi padre*

*A mis hermanas*



# Agradecimientos

---

Quisiera agradecer en primer lugar a mi familia, por ser el pilar fundamental de mi vida, por haber estado ahí celebrando mis logros y apoyándome en mis derrotas, por enseñarme que nunca estaré solo. A mis padres, por su ternura y su paciencia, por dedicar su vida por y para sus hijos, por haberme transmitido todos los valores que hoy defiendo, por enseñarme que todo es posible con educación y constancia. A mis hermanas, por el eterno cariño que me profesan, por ser mis mejores amigas y confidentes, por apoyarme y defenderme incluso cuando no lo merecía.

A todos los profesores de esta escuela, porque gracias a ellos he conseguido enamorarme de mi carrera, por haberme enseñado a no desistir ante las adversidades más tenebrosas y por haberme transmitido los valores de eficacia y eficiencia tan importantes en la vida. Agradecer especialmente a Don José Manuel Gordillo, por enseñarme el maravilloso mundo de la aerodinámica, por transmitirme su entusiasmo por la materia y por su constante dedicación en la realización de este trabajo.

A mis amigos y compañeros, porque ellos son lo más importante que me llevo de estos cuatro años, por demostrarme su infinita calidad humana y por haber sabido ser lo que son, verdaderos amigos.

*Miguel Ángel Flores Caballero*  
*Grado en Ingeniería Aeroespacial*  
*Sevilla, 2016*



# Resumen

---

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado consiste en desarrollar un método numérico que nos permita resolver problemas aerodinámicos estacionarios y no estacionarios tanto en dos como en tres dimensiones, consumiendo los mínimos recursos y obteniendo la máxima precisión posible. Siendo así, van a utilizarse diferentes métodos espectrales basados en la interpolación polinómica de Lagrange que nos permitirán resolver de manera eficiente dichos problemas aerodinámicos sobre placas planas rectangulares tanto en régimen estacionario como en no estacionario.

A lo largo del trabajo se definirá el problema aerodinámico, se deducirá su solución y se desarrollará el método que va a emplearse para su resolución numérica. Todos los resultados se compararán con los de la literatura, sean éstos analíticos o numéricos, y se propondrán líneas de mejora futuras.



# Abstract

---

The scope of this project consists in developing a numerical method which steady state and unsteady aerodynamics problems are going to be solved with, whether in two or three dimensions, using the minimum resources and calculating a solution as precisely as possible. Therefore, different spectral methods will be used, such as the interpolation polynomial in the Lagrange form, in order to get a solution in an efficient way that allow us to solve the aerodynamic problem of a flat plate with an incident flow that may be steady or unsteady.

During this project we will define the aerodynamic problem, deduce its solution and develop the method that will be used in the numerical resolution. All the results will be checked with the ones reported by the literature, whether they are analytical or numerical ones, and some ways of improvement will be suggested.



# Índice

---

Agradecimientos .....	ix
Resumen.....	xi
Abstract .....	xiii
Índice .....	xv
Índice de Tablas .....	xvii
Índice de Figuras .....	xix
Notación .....	xxi
<b>1</b> Introducción .....	<b>1</b>
<b>2</b> Definición de la Geometría .....	<b>3</b>
2.1 <i>Ala tridimensional</i> .....	3
2.2 <i>Perfil bidimensional</i> .....	4
<b>3</b> Ecuaciones Generales.....	<b>11</b>
3.1 <i>Ecuaciones simplificadas</i> .....	12
3.2 <i>Ecuación de la vorticidad y movimientos irrotacionales: función potencial</i> .....	15
3.3 <i>Ecuaciones del flujo potencial</i> .....	16
3.4 <i>Linealización de las ecuaciones</i> .....	18
3.5 <i>Condición de Kutta-Joukowski</i> .....	19
<b>4</b> Solución General .....	<b>21</b>
4.1 <i>Solución general para el caso bidimensional</i> .....	21
4.2 <i>Método de Green para el caso bidimensional</i> .....	22
4.3 <i>Solución general para el caso tridimensional: Método de Green</i> .....	25
<b>5</b> Método de Resolución Numérica.....	<b>29</b>
5.1 <i>Condiciones de contorno</i> .....	29
5.2 <i>Método de resolución de la estela no estacionaria</i> .....	30
5.3 <i>Métodos espectrales</i> .....	31
5.3.1 <i>Interpolación polinómica de Lagrange</i> .....	31
5.3.2 <i>Derivación</i> .....	32
5.3.3 <i>Integración</i> .....	34
5.4 <i>Método de resolución numérica en dos dimensiones</i> .....	35
5.4.1 <i>Caso estacionario</i> .....	36
5.4.1.1 <i>Integral analítica</i> .....	36
5.4.1.2 <i>Integral numérica</i> .....	37
5.4.1.3 <i>Resolución</i> .....	38

5.4.2	Caso no estacionario .....	38
5.4.2.1	Integral analítica .....	39
5.4.2.2	Integral numérica .....	39
5.4.2.3	Resolución .....	40
5.4.3	Coefficiente de sustentación .....	40
5.5	<i>Método de resolución numérica en tres dimensiones</i> .....	41
5.5.1	Integral analítica referente al término de velocidad horizontal en el punto de colocación .....	43
5.5.2	Integral analítica referente al término de primer orden .....	46
5.5.2.1	Tramo 1-2 .....	46
5.5.2.2	Tramo 3-4 .....	47
5.5.2.3	Tramo 2-3 .....	48
5.5.2.4	Tramo 4-1 .....	48
5.5.2.5	Resultado .....	49
5.5.3	Integral analítica referente al término de segundo orden .....	50
5.5.3.1	Tramo 1-2 .....	50
5.5.3.2	Tramo 3-4 .....	51
5.5.3.3	Tramo 2-3 .....	51
5.5.3.4	Tramo 4-1 .....	52
5.5.3.5	Resultado .....	53
5.5.4	Integral numérica .....	54
5.5.5	Integral en la estela .....	55
5.5.6	Coefficiente de sustentación .....	57
<b>6</b>	<b>Presentación de Resultados .....</b>	<b>59</b>
6.1	<i>Problema aerodinámico bidimensional</i> .....	59
6.1.1	Régimen estacionario .....	59
6.1.2	Régimen no estacionario .....	62
6.1.2.1	Aceleración repentina de placa plana infinita .....	62
6.1.2.2	Placa plana infinita oscilante .....	65
6.2	<i>Problema aerodinámico tridimensional</i> .....	67
6.2.1	Método 1 .....	67
6.2.2	Método 2 .....	70
6.3	<i>Comprobación métodos espectrales</i> .....	72
6.3.1	Funciones de una variable .....	72
6.3.2	Funciones de dos variables .....	75
<b>7</b>	<b>Validez del Método .....</b>	<b>77</b>
7.1	<i>Validez del problema bidimensional</i> .....	77
7.1.1	Régimen estacionario .....	77
7.1.2	Régimen no estacionario .....	79
7.2	<i>Validez del problema tridimensional</i> .....	80
7.2.1	Método 1 .....	80
7.2.2	Método 2 .....	81
<b>8</b>	<b>Conclusiones .....</b>	<b>85</b>
	<b>Referencias .....</b>	<b>87</b>
	<b>Anexo A. Código Matlab Interpolación Lagrange .....</b>	<b>89</b>
	<b>Anexo B. Código Matlab Derivada Lagrange .....</b>	<b>91</b>
	<b>Anexo C. Código Matlab Problema 2D .....</b>	<b>93</b>
	<b>Anexo D. Código Matlab Problema 3D Método 1 .....</b>	<b>99</b>
	<b>Anexo E. Código Matlab Problema 3D Método 2 .....</b>	<b>105</b>

# ÍNDICE DE TABLAS

---

<b>Tabla 6.1:</b> Tiempo de ejecución del programa del método 1 del problema tridimensional en función del número de puntos de colocación	70
<b>Tabla 6.2:</b> Tiempo de ejecución del programa del método 2 del problema tridimensional en función del número de puntos de colocación	71
<b>Tabla 7.1:</b> Tiempo de ejecución del programa del método del problema bidimensional en función del número de puntos de colocación	79



# ÍNDICE DE FIGURAS

---

<b>Figura 1.1:</b> Boceto del ornitóptero de Leonardo Da Vinci.	1
<b>Figura 2.1:</b> Geometría del ala rectangular con sus ejes cartesianos.	3
<b>Figura 2.2:</b> Geometría del perfil con sus ejes cartesianos	5
<b>Figura 4.1:</b> Dominio de integración del método de Green	23
<b>Figura 5.1:</b> Evolución del potencial en la estela no estacionaria	30
<b>Figura 5.2:</b> División del perfil y estela en regímenes estacionario y no estacionario	35
<b>Figura 5.3:</b> División del ala en régimen estacionario	41
<b>Figura 5.4:</b> Esquema de la integral analítica en el contorno	43
<b>Figura 5.5:</b> Definición de parámetros en la integral de la distancia de un punto a una recta	44
<b>Figura 5.6:</b> Esquema de la integral en el Tramo 1-2	46
<b>Figura 5.7:</b> Ilustración de cómo se integra la estela	56
<b>Figura 5.8:</b> Salto de discontinuidad en la estela	57
<b>Figura 6.1:</b> Evolución del $Cl\alpha$ con $Nx$	60
<b>Figura 6.2:</b> Evolución del potencial sobre placa plana infinita en régimen estacionario	61
<b>Figura 6.3:</b> Evolución de la velocidad de perturbación horizontal sobre placa plana infinita en régimen estacionario	61
<b>Figura 6.4:</b> Evolución del coeficiente de sustentación con el tiempo para el caso de una placa plana infinita que sufre una aceleración repentina desde el reposo hasta una velocidad $U_\infty$ según la literatura [2]	62
<b>Figura 6.5:</b> Evolución del coeficiente de sustentación con el tiempo para el caso de una placa plana infinita que sufre una aceleración repentina desde el reposo hasta una velocidad $U_\infty$ según nuestro método	63
<b>Figura 6.6:</b> Comparación de los resultados del método numérico y los reportados por la literatura	63
<b>Figura 6.7:</b> Evolución del potencial en la cuerda y la estela en caso de aceleración repentina de una placa plana infinita desde el reposo a $U_\infty$	64
<b>Figura 6.8:</b> Esquema del problema de una placa plana oscilante a ángulo de ataque nulo	65
<b>Figura 6.9:</b> Evolución del coeficiente de sustentación de una placa plana oscilante a ángulo de ataque nulo con frecuencia reducida $k = 0.1$	66
<b>Figura 6.10:</b> Evolución del coeficiente de sustentación de una placa plana oscilante a ángulo de ataque nulo con frecuencia reducida $k = 1$	66
<b>Figura 6.11:</b> Evolución del coeficiente de sustentación de una placa plana oscilante a ángulo de ataque nulo con frecuencia reducida $k = 5$	67
<b>Figura 6.12:</b> Representación del potencial en un ala de alargamiento $AR = 5$ a ángulo de ataque $\alpha = 10^\circ$ para	

distintos números de puntos de colocación obtenidos con el método 1	68
<b>Figura 6.13:</b> Evolución de la pendiente de la curva de sustentación con el alargamiento para alas rectangulares con diferentes flechas según la literatura [2]	69
<b>Figura 6.14:</b> Pendiente de la curva de sustentación de un ala rectangular de alargamiento $AR = 5$ para diferentes números de puntos de colocación obtenidas con el método 1	69
<b>Figura 6.15:</b> Representación del potencial en un ala de alargamiento $AR = 5$ a ángulo de ataque $\alpha = 10^\circ$ para distintos números de puntos de colocación obtenidos con el método 2	70
<b>Figura 6.16:</b> Pendiente de la curva de sustentación de un ala rectangular de alargamiento $AR = 5$ para diferentes números de puntos de colocación obtenidas con el método 2	71
<b>Figura 6.17:</b> Interpolación polinómica de diversos órdenes de la función $y = \cos x$ , $x \in -\pi, \pi$	72
<b>Figura 6.18:</b> Aproximación del valor de la derivada en los puntos de colocación de la función $y = \cos x$ , $x \in -\pi, \pi$ mediante el polinomio interpolador de Lagrange	73
<b>Figura 6.19:</b> Aproximación del valor de la integral en los puntos de colocación de la función $y = \cos x$ , $x \in -\pi, \pi$ mediante el polinomio interpolador de Lagrange	74
<b>Figura 6.20:</b> Evolución de los errores máximos cometidos al aproximar la función $y = \cos x$ , $x \in -\pi, \pi$ y su derivada y su integral en los puntos de colocación	74
<b>Figura 6.21:</b> Evolución de los errores máximos cometidos al aproximar la función $z = \cos xy$ , $x, y \in -\pi, \pi$ y su derivada y su integral con respecto a $x$ en los puntos de colocación	75
<b>Figura 7.1:</b> Evolución del número de condición recíproco de la matriz del sistema para el caso bidimensional en régimen estacionario en función del número de puntos de colocación	78
<b>Figura 7.2:</b> Evolución de los errores relativos obtenidos para el caso bidimensional en régimen estacionario en función del número de puntos de colocación	78
<b>Figura 7.3:</b> Evolución del número de condición recíproco de la matriz del sistema para el caso bidimensional en régimen estacionario en función del número de puntos de colocación	79
<b>Figura 7.4:</b> Evolución del número de condición recíproco de la matriz del sistema para el caso tridimensional en régimen estacionario en función del número de puntos de colocación para el método 1	80
<b>Figura 7.5:</b> Evolución del número de condición recíproco de la matriz del sistema para el caso tridimensional en régimen estacionario en función del alargamiento para el método 1	81
<b>Figura 7.6:</b> Evolución del número de condición recíproco de la matriz del sistema para el caso tridimensional en régimen estacionario en función del alargamiento para el método 2	82
<b>Figura 7.7:</b> Evolución del número de condición recíproco de la matriz del sistema para el caso tridimensional en régimen estacionario en función del alargamiento para el método 2	82

# Notación

---

$b$	Envergadura
$c$	Cuerda
$\Sigma_{ala}$	Superficie alar
$S, A$	Superficie en planta del ala
$\Lambda, AR$	Alargamiento
$\alpha$	Ángulo de ataque de la corriente incidente
$\vec{U}_{\infty}$	Vector velocidad de la corriente incidente
$C_D$	Coefficiente de resistencia
$C_L$	Coefficiente de sustentación
$z_p(x, y)$	Función que define los puntos del intradós y del extradós del ala
$z_c(x, y)$	Función que define los puntos de la línea de curvatura de los perfiles del ala
$z_e(x, y)$	Función que define el espesor de los perfiles del ala
$\vec{i}, \vec{e}_1$	Vector director unitario del eje X
$\vec{j}, \vec{e}_2$	Vector director unitario del eje Y
$\vec{k}, \vec{e}_3$	Vector director unitario del eje Z
$\vec{v}$	Velocidad del fluido
$p$	Presión del fluido
$\rho$	Densidad del fluido
$T$	Temperatura del fluido
$c_v$	Capacidad calorífica a volumen constante
$t$	Tiempo
$\underline{\underline{\tau'}}$	Tensor de esfuerzos
$\vec{f}_m$	Vector de fuerzas másicas
$Q_r$	Potencia calorífica recibida por radiación por unidad de volumen
$Q_q$	Potencia calorífica recibida por reacción química por unidad de volumen
$k$	Conductividad térmica
$R$	Constante universal de los gases
$g$	Aceleración de la gravedad
$\mu$	Viscosidad del fluido
$\alpha$	Difusividad térmica

$Fr$	Número de Froude
$Re$	Número de Reynolds
$Pe$	Número de Peclet
$Pr$	Número de Prandtl
$\delta$	Espesor de la capa límite viscosa
$\delta_T$	Espesor de la capa límite térmica
$C_D$	Coefficiente de resistencia aerodinámica
$C_L$	Coefficiente de sustentación aerodinámica
$D/Dt$	Operador derivada sustancial
$\gamma$	Coefficiente de dilatación adiabática
$\vec{\omega}$	Vector vorticidad
$a$	Velocidad del sonido
$M$	Número de Mach
$\phi$	Potencial de velocidades
$x'$	Campo/variable de perturbación
$\psi_0$	Solución elemental correspondiente a una fuente tridimensional
$\Gamma$	Circulación a través de una superficie
$u'$	Componente $x$ de la velocidad de perturbación
$v'$	Componente $y$ de la velocidad de perturbación
$w'$	Componente $z$ de la velocidad de perturbación
$x_{bs}$	Magnitud en el borde de salida
$x_{ba}$	Magnitud en el borde de ataque
$x^t$	Magnitud en el instante $t$
$x^+$	Magnitud sobre el extradós del ala
$x^-$	Magnitud sobre el intradós del ala
$L_{M \times N}$	Matriz de interpolación de Lagrange
$L_{px}$	Matriz de derivación de Lagrange con respecto al eje $x$
$I'_{px}$	Matriz de integración de Lagrange con respecto al eje $x$
$\vec{x}_{col}$	Posición de los puntos de colocación
$\vec{x}_0$	Posición de una fuente sobre el ala
$N_x$	Número de puntos de colocación a lo largo del eje $x$
$N_y$	Número de puntos de colocación a lo largo del eje $y$
$\dot{x}$	Derivada temporal

# 1 INTRODUCCIÓN

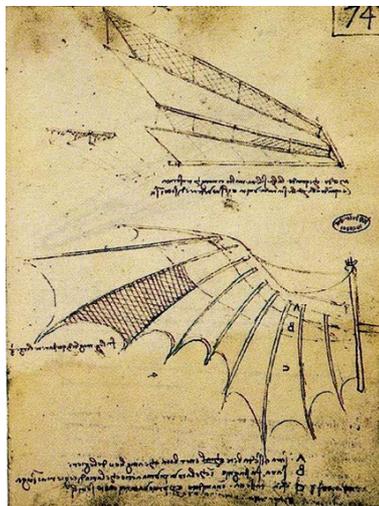
---

*“¿Por qué contentarnos con vivir a rastras cuando sentimos el anhelo de volar?”*

*- Helen Adams Keller -*

El ser humano ha sentido un incansable deseo de volar desde tiempos prehistóricos. La observación de las aves siempre nos ha producido una mezcla de sentimientos que abarcaba desde la envidia hasta la más sincera admiración. Gracias a dicha fascinación por como esos seres se alzaban en el aire, la humanidad nunca ha descansado en su lucha de encontrar una máquina que nos dotase de dicha capacidad primero, y de mejorarla y optimizarla después.

Hoy en día contamos con una inmensa variedad de aeronaves que han surgido de los diseños e ideas más innovadores. Los avances en la aeronáutica nos han permitido optimizar los clásicos aviones comerciales, crear aviones supersónicos e incluso coquetear con alas volantes. Pero el camino hasta llegar aquí ha sido largo y tedioso. Los primeros diseños y conceptos, al no existir ningún conocimiento sobre aerodinámica y mecánica de fluidos, se basaban en máquinas que imitaban el vuelo de los pájaros. Esas creaciones, conocidas como ornitópteros, eran bocetos totalmente válidos en el sentido de que era lógico pensar no sólo que funcionasen, sino que lo hiciesen de forma óptima. Si algo ha aprendido el ser humano a lo largo de la historia es que la naturaleza es sabia, y si todos los pájaros volaban batiendo sus alas (e incluso existía alguno como el colibrí con la capacidad de quedarse en un punto fijo y volar hacia atrás), debía ser por algo aunque no se conociese el motivo.



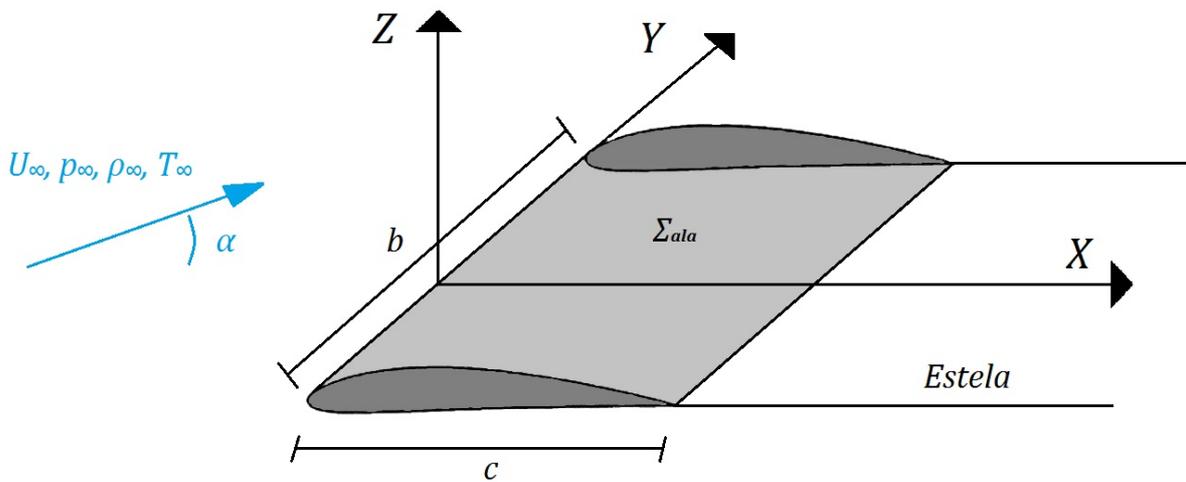
**Figura 1.1:** Boceto del ornitóptero de Leonardo Da Vinci.

Es aquí donde radica la motivación principal de este trabajo. Todas las aeronaves realizan prácticamente la totalidad de su vuelo en régimen estacionario, con apenas variaciones ínfimas de sus alas con respecto a su posición de referencia. En este trabajo se pretende desarrollar un método espectral que nos permita estudiar las fuerzas que aparecen en un ala, esté volando en régimen estacionario o no estacionario. Esto no sólo nos va a permitir comprender en más profundidad el vuelo de las aves sino que también permitirá acoplar las ecuaciones que aquí se desarrollarán con las de la aeroelasticidad de forma que se pueda realizar, posteriormente a este trabajo, un amplio estudio sobre los diversos fenómenos aeroelásticos que aparecen durante el vuelo.

## 2 DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA

En este apartado se va a proceder a describir la geometría del ala que va a considerarse a lo largo de todo el trabajo. Dicha ala consistirá básicamente en una placa plana rectangular. Esta geometría se describirá de manera breve y concisa ya que es la misma empleada en otros textos de la literatura para el caso de alas rectangulares. Va a desarrollarse en primer lugar la geometría del ala correspondiente al caso tridimensional, particularizándose después para el problema simplificado de un perfil bidimensional.

### 2.1 Ala tridimensional



**Figura 2.1:** Geometría del ala rectangular con sus ejes cartesianos.

Empezamos definiendo la envergadura,  $b$ , como la distancia existente entre los bordes marginales del ala, y la cuerda,  $c$ , como la distancia existente entre el borde de ataque y el borde de salida del ala, la cual se considera contenida en el plano  $X - Y$ . Se define ahora la superficie de la forma en planta,  $S$ , como la proyección de la superficie del ala,  $\Sigma_{ala}$ , sobre dicho plano  $X - Y$ . Una vez definido estas características geométricas podemos definir el alargamiento,  $\Lambda$ , como el cociente entre el cuadrado de la envergadura y la superficie de la forma en planta del ala, esto es,  $\Lambda = b^2/S$ . Dado que estamos considerando un ala rectangular y, como hemos dicho, consideramos la cuerda contenida en el plano horizontal, dicha superficie en planta coincide con el producto de la envergadura y la cuerda, por lo que el alargamiento también puede definirse como  $\Lambda = b^2/S = b^2/bc = b/c$ .

Por otro lado, en todo momento se considerará que el ala es simétrica respecto al plano  $X - Z$  y compuestas por

una sucesión continua de perfiles aerodinámicos, de forma que si éstos varían a lo largo del eje  $Y$  (caso de ala con torsión por ejemplo) lo deben hacer simétricamente con respecto a dicho plano.

El campo de velocidades puede suponerse uniforme y estacionario al alejarnos suficientemente del ala, y el vector velocidad de la corriente incidente,  $U_\infty$ , se supone contenido en el plano  $X - Z$  y formando un ángulo de ataque  $\alpha$  con la cuerda de los perfiles (es decir, con el plano  $X - Y$ ). Dicho ángulo de ataque, para permitir la posterior linealización de las ecuaciones y asegurar el no desprendimiento de la capa límite, deberá verificar que sea pequeño, esto es,  $\alpha \ll 1$ .

Asimismo, se definen los vectores directores unitarios  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$  como los vectores de módulo unidad que siguen las direcciones de los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , respectivamente. Así el vector  $\vec{i}$  está orientado según la dirección de la cuerda del perfil central del ala, el vector  $\vec{k}$  está contenido en el plano de simetría del ala y es perpendicular al anterior, y el vector  $\vec{j}$  sigue la dirección de la envergadura de forma que completa un triedro positivo a derechas junto a los dos anteriores. Es importante destacar que en algunos apartados de este trabajo y siguiendo la nomenclatura de la literatura es posible que a los vectores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  se les denomine respectivamente de la forma  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$ , quedando claro desde ahora que se refieren a los mismos vectores unitarios y evitar así posibles confusiones posteriores.

Por otra parte, cabe suponer que la superficie del ala pueda escribirse de la forma:

$$z - z_p(x, y, t) = 0 \quad (2.1)$$

Siendo así, para la posterior linealización de las ecuaciones va a ser necesario suponer que los perfiles que conforman el ala sean esbeltos entre otras hipótesis, por lo que la ecuación (2.1) deberá verificar:

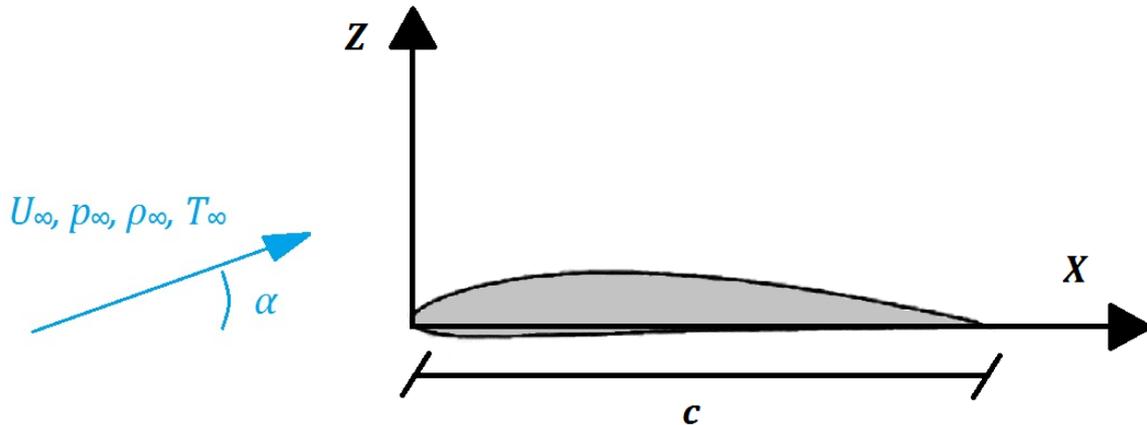
$$\frac{\partial z_p}{\partial x} \ll 1 \quad y \quad \frac{\partial z_p}{\partial y} \ll 1 \quad (2.2)$$

Posteriormente podremos descomponer nuestro problema en dos diferentes, el sustentador (o antisimétrico) y el de espesor (o simétrico). Así, si descomponemos la función que determina los puntos del extradós y del intradós del ala de la siguiente forma:  $z_p(x, y) = z_c(x, y) \pm z_e(x, y)$ , es decir, descomponemos cada perfil como la suma de su línea de curvatura más su espesor medido desde la cuerda del mismo, nos permitirá dividir nuestro problema en los dos antes mencionados y la solución del problema completo vendrá dada por la suma de las soluciones de ambos problemas. Nosotros, de aquí en adelante, nos centraremos exclusivamente en el problema sustentador dado que es el único que contribuye a la sustentación, omitiendo el problema de espesor. No obstante, por simplicidad en la notación, se omitirá el subíndice  $c$  en todos los desarrollos a realizar, pero debemos tener siempre presente que nos referimos en todo momento al problema sustentador. Se excluye de este trabajo el estudio en profundidad de ambos problemas y la demostración de por qué el sustentador es antisimétrico y el de espesor es simétrico dado que se dan por supuestos los conocimientos básicos en la materia. Si aun así desea más información acerca de esto, el lector puede dirigirse a [1] o a [2].

Por último, es digno de mención que en este trabajo se va a considerar el ala totalmente aislada, sin tener en cuenta posibles superficies sustentadoras adicionales (como los estabilizadores o canards) o la interferencia de otros objetos como el fuselaje y los motores en el ala. Asimismo se considerará que la aeronave está volando en todo momento en condiciones de crucero, obviándose así el posible efecto suelo que pudiera darse en ciertos tramos del vuelo.

## 2.2 Perfil bidimensional

En este apartado se simplificará brevemente la geometría tridimensional para el caso en el que consideremos un perfil en dos dimensiones, que corresponderá con la del apartado anterior cuando el alargamiento del ala tienda a infinito.



**Figura 2.2:** Geometría del perfil con sus ejes cartesianos

Se define ahora, al igual que antes, la cuerda,  $c$ , como la distancia existente entre el borde de ataque y el borde de salida del perfil, considerándose que está contenida en el eje  $X$ . En el caso bidimensional, no existe alargamiento propiamente dicho, aunque puede entenderse como el estudio de cada sección de un ala cuando su alargamiento tiende a infinito.

Igualmente, puede suponerse que el campo de velocidades es uniforme y estacionario en cualquier región que se encuentre suficientemente alejada del perfil y que el vector velocidad de la corriente incidente,  $U_\infty$ , se encuentra contenido en el plano del perfil formando un ángulo  $\alpha$  con la cuerda.

Se definen los vectores directores unitarios  $\vec{i}$  y  $\vec{k}$  como los vectores de módulo unidad cuyas direcciones coinciden con la de los ejes cartesianos  $X$  y  $Z$ , respectivamente. Siendo así, el vector  $\vec{i}$  está orientado hacia el borde de salida según la dirección de la cuerda del perfil y el vector  $\vec{k}$  es perpendicular al anterior, siendo su sentido positivo el que va desde el intradós al extradós del perfil. Al igual que antes, es posible que a lo largo del trabajo se haga referencia a dichos vectores de la forma  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$ , debiendo saber el lector desde ahora que se refieren a los mismos vectores unitarios.

De manera análoga a la del apartado anterior, puede suponerse que la superficie de los perfiles puede escribirse de la forma:

$$z - z_p(x, t) = 0 \quad (2.3)$$

Debiendo cumplirse, para la posterior linealización de las ecuaciones:

$$\frac{dz_p}{dx} \ll 1 \quad (2.4)$$

De la misma forma, en el caso bidimensional también es posible descomponer el problema aerodinámico en dos, el de espesor y el sustentador, centrándonos sólo en este trabajo en la resolución del segundo. Se omitirá pues el subíndice  $c$  que hace referencia al problema de curvatura, teniendo el lector que sobreentender que, al ser el único que es objeto de este trabajo, se está haciendo referencia implícita al mismo en todas las ecuaciones.



# 3 ECUACIONES GENERALES

---

Una vez definida la geometría del ala a estudiar en este trabajo, pasamos a describir las ecuaciones y condiciones de contorno que gobiernan nuestro problema, así como las diferentes aproximaciones que nos permitirán simplificarlo y hacerlo abarcable no sólo analíticamente sino también desde el punto de vista de la resolución numérica.

Para hallar tanto el coeficiente de resistencia,  $C_D$ , como el coeficiente de sustentación,  $C_L$ , es necesario obtener los valores tanto de la presión como del tensor de esfuerzos sobre la superficie del ala. Dichos valores pueden obtenerse experimentalmente, o bien resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes junto a las condiciones de contorno pertinentes. Dichas ecuaciones son un sistema no lineal en derivadas parciales cuya resolución nos permite calcular los valores de los campos de densidad ( $\rho$ ), velocidad ( $\vec{v}$ ), presión ( $p$ ) y temperatura ( $T$ ) en cualquier punto del dominio fluido, y consecuentemente también sobre la superficie del ala. Dichas ecuaciones son las siguientes:

- Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.1)$$

- Ecuación de cantidad de movimiento

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \vec{f}_m \quad (3.2)$$

- Ecuación de la energía

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v \vec{v} \cdot \nabla T = -p \nabla \cdot \vec{v} + \underline{\underline{\tau}}' : \nabla \vec{v} + Q_r + Q_q + \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (3.3)$$

Dicho sistema de 5 ecuaciones con 6 incógnitas ( $\rho, \vec{v}, p, T$ ) debe ser completado con las ecuaciones de estado que relacionan las variables de estado entre sí y con las relaciones constitutivas que sean necesarias. Nótese que se ha considerado que el gas es perfecto y, por tanto, la relación entre la energía interna por unidad de masa y la temperatura viene dada por la relación constitutiva  $de = c_v dT$ . La ecuación de estado de los gases perfectos que nos permite completar el anterior sistema es la siguiente:

$$\frac{p}{\rho} = R_g T \quad (3.4)$$

Donde  $R_g = R/m_m = c_p - c_v = c_v(\gamma - 1)$  siendo  $R = 8,314 J mol^{-1} K^{-1}$  la constante universal de los gases y  $m_m$  la masa molecular del gas.

Como ya hemos comentado, dichas ecuaciones deben estar sujetas a unas condiciones de contorno que cierren el problema diferencial. Dichas condiciones son conocidas tanto aguas arriba (lejos del ala) como sobre la propia superficie de la misma:

$$\begin{aligned} x \rightarrow \infty, \quad p &\rightarrow p_\infty \\ \vec{v} &\rightarrow \vec{U}_\infty \\ T &\rightarrow T_\infty \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow x_s, \quad \vec{v} &= 0 \\ T &= T_s \\ k\vec{n}_s \cdot \nabla T &= k_s\vec{n}_s \cdot \nabla T_s \end{aligned} \quad (3.6)$$

Donde el subíndice  $\infty$  representa las condiciones aguas arriba del ala y el subíndice  $s$  representa las condiciones sobre la superficie de la misma.

Además, si el ala está volando en régimen no estacionario, esto es, si las derivadas de las variables fluidas no son despreciables con respecto al tiempo, debe añadirse las condiciones iniciales oportunas, que dependerán del movimiento concreto que esté realizando el ala.

En general, el sistema formado por las seis ecuaciones que se han descrito en este apartado sujetas a dichas condiciones de contorno e iniciales es difícilmente abarcable sin realizar ninguna aproximación que nos permita simplificarlo. En el apartado siguiente veremos cómo podemos simplificarlo y qué hipótesis son necesarias para poder realizar dicha simplificación.

### 3.1 Ecuaciones simplificadas

En este apartado vamos a proceder a la simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes estudiando el orden de magnitud de sus términos, viendo así que términos son despreciables frente al resto.

Sabiendo que la longitud característica de un ala,  $c$ , suele ser del orden de un metro y que la velocidad típica a la que una aeronave se desplaza respecto al fluido es mayor o superior a diez metros, se define el número de Froude como aquél número adimensional que compara el orden de magnitud del término de aceleración convectiva frente al de fuerzas másicas en la ecuación de cantidad de movimiento, esto es:

$$Fr = \frac{U_\infty^2}{gc} \gg 1 \quad (3.7)$$

Donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y tiene un valor típico de  $g = 9.81 m/s^2$ . Dado que dicho número es mucho mayor que uno, puede despreciarse, en primera aproximación, el término de fuerzas másicas,  $\rho \vec{f}_m$ , en la ecuación (3.2).

Además, puede despreciarse en la ecuación de la energía (3.3) el término de potencia calorífica aportada al fluido por radiación y por reacción química debido a la naturaleza del estudio que vamos a realizar.

Por otro lado, sabiendo que la viscosidad y la densidad típicas del aire son del orden de  $\mu \sim 10^{-5} Pa \cdot s$  y  $\rho \sim 1 kg/m^3$  respectivamente, se define el número de Reynolds como la comparación del orden de magnitud del término de aceleración convectiva frente al término viscoso, esto es:

$$Re = \frac{\rho_{\infty} U_{\infty} c}{\mu} \gg 1 \quad (3.8)$$

Del mismo modo que en el caso anterior, al ser el número de Reynolds mucho mayor que la unidad, puede despreciarse en primera aproximación el término viscoso,  $\nabla \cdot \underline{\underline{\tau'}}$ , a distancias del orden de  $c$  del objeto. Cabe remarcar que, en distancias muy cercanas al objeto, existe una región denominada capa límite en la que sí es necesario retener el término de fuerzas viscosas ya que son éstas las responsables de desacelerar el fluido para cumplir la condición de igualdad de velocidades tangenciales en la pared del mismo (3.6).

Dado que sabemos que para un gas, el número de Prandtl es de orden unidad ( $Pr_{aire} \approx 0.7$ ), el número de Peclet que surge al comparar los órdenes de magnitud del flujo de calor por conducción y el de convección de energía interna, queda definido como la multiplicación de los números de Prandtl y de Reynolds, definiéndose de la siguiente manera:

$$Pe = \frac{U_{\infty} c}{\alpha} = Pr \cdot Re \gg 1 \quad (3.9)$$

De nuevo, que el número de Peclet sea mucho mayor que la unidad implica que podemos despreciar el término de potencia calorífica aportada por conducción,  $\nabla \cdot (k\nabla T)$ , a distancias del objeto del orden de la cuerda. Al igual que en el caso anterior, existe una región cercana al objeto denominada capa límite térmica en la que sí es necesario retener el término de conducción ya que es éste el responsable de forzar las condiciones de igualdad de temperaturas y del flujo de calor entre el fluido y el sólido en la pared del mismo (3.6).

Como sabemos, mientras que la resultante de las fuerzas de presión es normal a la superficie del objeto, la resultante de las fuerzas viscosas es tangente a dicha superficie. Siendo así, el único término de la ecuación de cantidad de movimiento capaz de desacelerar las partículas en la dirección tangente a la superficie del objeto es el término de las fuerzas viscosas, por lo que podemos estimar el espesor de la capa límite imponiendo que dicho término sea del orden del término de aceleración convectiva:

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \sim \nabla \cdot \underline{\underline{\tau'}} \Leftrightarrow \frac{\rho U_{\infty}^2}{c} \sim \frac{\mu U_{\infty}}{\delta^2} \Leftrightarrow \frac{\delta}{c} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho_{\infty} U_{\infty} c}} = Re^{-1/2} \ll 1 \quad (3.10)$$

Lo que demuestra que el espesor de dicha capa límite es mucho menor que la cuerda. Siguiendo el mismo razonamiento que antes, dado que la temperatura de las partículas fluidas ha de adaptarse a la del objeto y esto sólo es posible mediante el mecanismo de conducción, podemos estimar el espesor de la capa límite térmica imponiendo que el término de potencia calorífica aportada por conducción sea del orden que el de convección de energía interna:

$$\rho c_v \vec{v} \cdot \nabla T \sim \nabla \cdot (k\nabla T) \Leftrightarrow \rho c_v U_{\infty} \frac{T_{\infty} - T_s}{c} \sim k \frac{T_{\infty} - T_s}{\delta_T^2} \Leftrightarrow \frac{\delta_T}{c} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho_{\infty} U_{\infty} c}} = Re^{-1/2} \ll 1 \quad (3.11)$$

Estas estimaciones indican que, cuando el número de Reynolds es suficientemente elevado, existen dos regiones en el dominio fluido claramente diferenciadas: una región en la que los efectos viscosos y de conducción de calor pueden ser despreciados y que se encuentra a distancias de la pared del sólido tales que  $y \gg \delta$  siendo  $\delta \ll c$ , siendo  $y$  la coordenada que mide la distancia normal a la pared, y una segunda región en la que los términos de convección de cantidad de movimiento y convección de energía interna son comparables a los viscosos y de conducción de calor respectivamente y que se encuentra a una distancia de la pared  $y \sim \delta$ . Esta última región es la que recibe el nombre de *capa límite*.

Una vez aplicadas todas estas simplificaciones, las ecuaciones resultantes que nos permiten determinar los campos de presión, velocidad y temperatura en la región exterior a la capa límite son las siguientes:

- Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.12)$$

- Ecuación de cantidad de movimiento

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p \quad (3.13)$$

- Ecuación de la energía

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v \vec{v} \cdot \nabla T = -p \nabla \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \rho T \frac{DS}{Dt} = 0 \quad (3.14)$$

En la ecuación (3.14) se ha tenido en cuenta que, como consecuencia del primer y segundo principios de la Termodinámica:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho T \frac{DS}{Dt} - p \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \rho T \frac{DS}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \Leftrightarrow \rho \frac{De}{Dt} + p \nabla \cdot \vec{v} = \rho T \frac{DS}{Dt} = 0 \quad (3.15)$$

Donde  $S = c_v \ln \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right)$  es la entropía y se ha hecho uso de la ecuación de continuidad (3.12).

Y, ahora, al haber desaparecido los términos viscosos y de conducción de calor del sistema (3.12)-(3.14), las condiciones de contorno a las que está sujeto dicho sistema son:

$$\begin{aligned} x \rightarrow \infty, \quad p &\rightarrow p_\infty \\ \vec{v} &\rightarrow \vec{U}_\infty \\ T &\rightarrow T_\infty \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$x \rightarrow x_s, \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_s = 0 \quad (3.17)$$

Donde la única condición de contorno sobre el objeto (3.17) es la condición de impenetrabilidad, para la que se ha tenido en cuenta que, al estar el límite exterior de la capa límite muy próximo de la superficie del sólido (sobre el que se cumple la condición  $\vec{v} \cdot \vec{n}_s = 0$ ), la velocidad normal al sólido ha de ser también muy aproximadamente igual a cero en dicha capa límite. Además, dicha condición debería imponerse en el límite exterior de la capa límite que es donde podemos desprestigiar las fuerzas viscosas en lugar de sobre  $\Sigma_s$ , pero al ser el espesor de dicha región  $\delta/c \ll 1$ , se estarían cometiendo errores relativos pequeños, superándose así la dificultad que conllevaría imponer la condición de contorno en una región a priori desconocida.

Puesto que la variación de presión transversal a través de la capa límite es insignificante [1], podemos calcular los coeficientes de sustentación y resistencia de la siguiente forma:

$$C_D = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A} \vec{e}_1 \cdot \left( \int_{\Sigma_s} (p - p_\infty) (-\vec{n}_s) d\sigma \right) + \frac{1}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A} \vec{e}_1 \cdot \left( \int_{\Sigma_s} \vec{n}_s \cdot \underline{\underline{\tau}}' d\sigma \right) = C_{Dp} + C_{Df} \quad (3.18)$$

$$C_L = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A} \vec{e}_2 \cdot \left( \int_{\Sigma_s} (p - p_\infty) (-\vec{n}_s) d\sigma \right) + \frac{1}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A} \vec{e}_2 \cdot \left( \int_{\Sigma_s} \vec{n}_s \cdot \underline{\underline{\tau}}' d\sigma \right) = C_{Lp} + C_{Lf} \quad (3.19)$$

Al ser los esfuerzos viscosos tangentes a la superficie,

$$\vec{n} \cdot \underline{\underline{\tau}} \sim \frac{\mu U_\infty}{\delta} (\vec{e}_1 \cos \alpha - \vec{e}_2 \sin \alpha) \sim \frac{\mu U_\infty}{c} Re^{1/2} (\vec{e}_1 \cos \alpha - \vec{e}_2 \sin \alpha) \quad (3.20)$$

con  $\alpha \ll 1$  para evitar el desprendimiento de la capa límite, se tiene que

$$C_{L_f} \sim \frac{\mu A U_\infty}{\rho A U_\infty^2 \delta} \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_1 \cos \alpha - \vec{e}_2 \sin \alpha) \sim \alpha Re^{1/2} \ll 1 \quad (3.21)$$

Siendo así, podemos aproximar  $C_L \simeq C_{L_p} \sim O(1)$ , con lo que no será necesario calcular la contribución de los esfuerzos viscosos al coeficiente de sustentación al estar la capa límite adherida.

Con respecto al coeficiente de resistencia, no será objetivo de este trabajo su cálculo, por lo que se remite al lector que consulte [1] o [2] si está interesado en la obtención de los coeficientes de resistencia de presión y fricción respectivamente.

### 3.2 Ecuación de la vorticidad y movimientos irrotacionales: función potencial

En esta sección se va a deducir la irrotacionalidad de los flujos potenciales, lo que nos permitirá posteriormente simplificar las ecuaciones (3.12)-(3.14) de manera que obtengamos un sistema equivalente que nos permita describir los campos en las regiones del dominio fluido que no estén afectados ni por efectos viscosos ni de conducción de calor.

Consideramos aquí la situación esquematizada en la Figura 2.1 en la que las partículas fluidas se acercan al objeto desde una región en la que los valores de las variables termodinámicas son uniformes e iguales a  $p_\infty$ ,  $\rho_\infty$  y  $T_\infty$  respectivamente. Dado que, como demuestra la ecuación (3.14), las partículas fluidas conservan el valor de la entropía durante su movimiento, se deduce que para cualquier punto exterior a la capa límite y la estela:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \Leftrightarrow \rho = \rho_\infty \left( \frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow \nabla p = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \nabla \rho = \frac{\gamma p}{\rho} \nabla \rho = a^2 \nabla \rho \quad (3.22)$$

Donde

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (3.23)$$

es el cuadrado de la velocidad del sonido. Se deduce así que para todos aquellos movimientos homentrópicos (aquéllos en los que se conserve la entropía de las partículas fluidas) la densidad puede ser expresada en función de la presión y por tanto los vectores  $\nabla p$  y  $\nabla \rho$  son paralelos.

Teniendo en cuenta que

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times \vec{\omega} \quad (3.24)$$

Donde  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$  es el vector vorticidad, podemos expresar la ecuación de cantidad de movimiento como:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times \vec{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.25)$$

Tomando ahora el rotacional de la ecuación (2.30) y teniendo en cuenta la intercambiabilidad de las derivadas tenemos:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \left( \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) &= \frac{\partial(\nabla \times \vec{v})}{\partial t} + \nabla \times \nabla \left( \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) \\
&= \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \times \nabla (\vec{v} \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} + \vec{\omega} \nabla \cdot \vec{v} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} - \vec{v} \nabla \cdot \vec{\omega} \\
&= \nabla \times \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p = \frac{a^2}{\rho^2} \nabla p \times \nabla p = 0
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Si tenemos en cuenta que la divergencia del rotacional y el rotacional de un gradiente son idénticamente nulos y si hacemos uso de la ecuación de continuidad, podemos expresar la ecuación (3.26) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} &= \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} - \vec{\omega} \nabla \cdot \vec{v} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} + \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \vec{\omega} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{D\vec{\omega}}{Dt} - \frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \vec{\omega} = \frac{D}{Dt} \left( \frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \vec{v}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Esta ecuación expresa que la variación por unidad de tiempo del vector  $\frac{\vec{\omega}}{\rho}$  a lo largo del movimiento de una partícula fluida es proporcional al valor instantáneo de dicho vector ya que aparece en el término  $\frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \vec{v}$  denominado *vortex stretching*. Puesto que el campo de velocidades es uniforme suficientemente lejos del objeto, la vorticidad de las partículas es nula en dicha región suficientemente alejada del objeto. Dado que en virtud de la ecuación (3.27) la variación de dicho vector vorticidad es proporcional al propio vector, y siendo éste nulo, podemos afirmar que la vorticidad será idénticamente nula no sólo en la región suficientemente alejada del objeto sino en todo el dominio fluido no afectado por los efectos viscosos.

Al ser, como ha quedado demostrado, la vorticidad nula, esto es,  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0$ , podemos concluir que en la región exterior a la capa límite y la estela, el campo de velocidades proviene de un gradiente  $\vec{v} = \nabla \phi$ , donde  $\phi$  es una función escalar que denominaremos potencial de velocidades, y que será nuestra incógnita a calcular en todos nuestros problemas.

### 3.3 Ecuaciones del flujo potencial

La existencia del potencial de velocidades  $\phi$  simplifica notablemente el problema ya que nos permite transformar la ecuación de cantidad de movimiento en una ecuación escalar. En esta sección se deducirá la ecuación y condiciones de contorno que ha de satisfacer dicho potencial de velocidades, así como la ecuación que relaciona  $\phi$  con la presión.

La ecuación de cantidad de movimiento (3.13) puede ser reescrita ahora de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \nabla \left( \frac{|\nabla \phi|^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \tag{3.28}$$

Dado que la entalpía se define como  $h = e + \frac{p}{\rho}$ ,

$$dh = d \left( e + \frac{p}{\rho} \right) = T ds - p d \left( \frac{1}{\rho} \right) + p d \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{\rho} dp \tag{3.29}$$

Donde se ha tenido en cuenta que, según la ecuación (3.15),  $ds = 0$ . La ecuación anterior ha de cumplirse para cualquier incremento diferencial y, en particular, ha de cumplirse  $\nabla h = \frac{\nabla p}{\rho}$ . Por lo que se puede reescribir la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + h \right) = 0 \quad (3.30)$$

Dado que podemos expresar la entalpía de la siguiente forma:

$$h = C_p T = \frac{C_p p}{R_g \rho} = \frac{\left(\frac{C_p}{C_v}\right) p}{\left(\frac{R_g}{C_v}\right) \rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma - 1} \quad (3.31)$$

Por lo que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = C(t) \quad (3.32)$$

Que para el caso de fluido incompresible ( $\rho \approx cte$ ), queda:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C(t) \quad (3.33)$$

Por lo que, conociendo  $\phi$  y  $\nabla \phi$  sobre la superficie del objeto podemos calcular la distribución de presiones sobre éste.

Si consideramos el fluido incompresible ( $\rho \approx cte$ ), la ecuación de continuidad (3.12) se simplifica a que el potencial cumpla la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.34)$$

Con esta hipótesis de fluido incompresible, se estarían cometiendo errores relativos del orden de  $O(M^2)$ , donde  $M = \frac{|\vec{v}|}{a}$  es el número de Mach. La demostración de dicho orden puede encontrarla aquel lector interesado en [1]. Esta hipótesis es válida entonces para alas volando a una velocidad cuyo número de Mach sea aproximadamente  $M_\infty < 0.3$ . Esta ecuación (3.34), como puede observarse, es lineal, lo que simplifica enormemente la resolución del problema aerodinámico ya que permite aplicar la técnica de superposición de soluciones elementales para hallar la solución del problema general.

Con todo esto, el problema general queda ahora definido por:

$\nabla^2 \phi = 0$ $ \vec{x}  \rightarrow \infty, \quad \phi \rightarrow U_\infty x$ $\vec{x} \in \Sigma_s, \quad \vec{n} \cdot (\nabla \phi - \vec{v}_p) = 0$ $+ \textit{Kutta} - \textit{Joukowski}$	(3.35)
---	--------

Donde  $\vec{v}_p$  es la velocidad vertical del perfil, en caso de encontrarnos en régimen no estacionario, y donde la denominada *condición de Kutta-Joukowski* es la que determina la solución real de entre todas las soluciones existentes. De hecho, de entre todas las infinitas soluciones que el problema general (3.35) del flujo alrededor de un objeto en ausencia de viscosidad sujeto a dichas condiciones presenta, el flujo que aparece en el caso real es uno y único. Así, es esta condición la que permite determinar cuál de todas es la real, ya que informa del efecto de la capa límite al flujo no viscoso, permitiendo discriminar así la solución que se reproduce en la realidad.

### 3.4 Linealización de las ecuaciones

Una vez visto las hipótesis que nos permiten simplificar de manera extraordinaria las ecuaciones a resolver, procedemos a la linealización de dichas ecuaciones. Consideramos ahora que el perfil y/o el ala (según estemos en dos o tres dimensiones) es muy esbelto/a y se mueve en el seno de un fluido con un ángulo de ataque pequeño. Esto nos permite suponer que la capa límite no se desprende en ningún punto del perfil/ala y, por tanto, dicho objeto perturba levemente la corriente incidente, esto es, induce sobre las variables del fluido unas perturbaciones de un orden inferior de sus valores aguas arriba.

Así, para poder linealizar, debemos realizar las siguientes hipótesis:

$$\begin{aligned} \alpha &\ll 1 \\ h_0 &\ll c \\ Re &\gg 1 \\ \frac{\partial z_p}{\partial x} &\ll 1, \quad \frac{\partial z_p}{\partial y} \ll 1 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Donde  $h_0$  es el espesor característico del perfil. Estas hipótesis (3.36), nos permiten asegurar que la capa límite no se desprenda y que el perfil sea esbelto y, por tanto, perturbe poco la corriente incidente.

Así, podemos suponer que los campos de velocidades, presión, densidad y temperatura alrededor del perfil pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}) &= \vec{U}_\infty + \vec{v}'(\vec{x}), & |\vec{v}'(\vec{x})| &\ll U_\infty \\ p(\vec{x}) &= p_\infty + p'(\vec{x}), & p'(\vec{x}) &\ll p_\infty \\ \rho(\vec{x}) &= \rho_\infty + \rho'(\vec{x}), & \rho'(\vec{x}) &\ll \rho_\infty \\ T(\vec{x}) &= T_\infty + T'(\vec{x}), & T'(\vec{x}) &\ll T_\infty \end{aligned} \quad (3.37)$$

Donde  $\vec{v}'(\vec{x})$ ,  $p'(\vec{x})$ ,  $\rho'(\vec{x})$  y  $T'(\vec{x})$  son los campos de perturbaciones de velocidad, presión, densidad y temperatura, respectivamente.

Igualmente, podemos descomponer el potencial de velocidades como la suma del potencial de velocidades en el infinito más un potencial de velocidades perturbadas, esto es:

$$\phi(\vec{x}) = \phi_\infty + \phi'(\vec{x}) = U_\infty x + \phi'(\vec{x}) \quad (3.38)$$

Una vez linealizado el potencial de velocidades, podemos reescribir la ecuación (3.34) como:

$$\nabla^2 \phi' = 0 \quad (3.39)$$

La ecuación de cantidad de movimiento (3.33) también se simplifica, para el caso de fluido incompresible, quedando tras linealizar y despreciando términos de orden inferior a uno:

$$\rho \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \rho U_\infty \frac{\partial \phi'}{\partial x} + p' = 0 \quad (3.40)$$

Igualmente, la condición de impenetrabilidad puede simplificarse en el caso de linealización de las ecuaciones:

$$\vec{n} \cdot (\nabla \phi - \vec{v}_p) = \frac{\nabla F_{e,i}}{|\nabla F_{e,i}|} \cdot (\nabla \phi - \vec{v}_p) = 0 \rightarrow \nabla F_{e,i} \cdot (\nabla \phi - \vec{v}_p) = 0 \quad (3.41)$$

Donde  $F_{e,i}$  es la función de los puntos de extradós e intradós del ala que viene definida por la ecuación (2.1). Así, puede reescribirse la ecuación (3.40) de la siguiente forma:



$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \phi^+}{\partial t} + \rho U_\infty \frac{\partial \phi^+}{\partial x} + p^+ &= 0 \\ \rho \frac{\partial \phi^-}{\partial t} + \rho U_\infty \frac{\partial \phi^-}{\partial x} + p^- &= 0\end{aligned}\tag{3.45}$$

Restando ambas ecuaciones y, como ya se ha dicho, imponiendo que ambas presiones  $p^+$  y  $p^-$  son iguales:

$$\frac{\partial(\phi^+ - \phi^-)}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial(\phi^+ - \phi^-)}{\partial x} = 0\tag{3.46}$$

Sabiendo que el potencial de velocidades es antisimétrico [1], esto es  $\phi^+ = -\phi^-$ , podemos reescribir la ecuación (3.46), donde ahora se ha suprimido el superíndice + en el potencial:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0\tag{3.47}$$

Esta ecuación es la que ha de imponerse en el borde de salida. Puede verse de manera inmediata que, en el caso estacionario, dicha condición se traduce en que el borde de salida ha de ser un punto de remanso, al menos siempre que se trate de un borde de salida anguloso (en el caso de un borde de salida en retroceso bastaría con que la velocidad por el extradós y el intradós tuviese misma dirección y sentido).

# 4 SOLUCIÓN GENERAL

En los capítulos anteriores se ha definido nuestro problema y su geometría, así como las ecuaciones generales que gobiernan el comportamiento del fluido alrededor de nuestra ala y las hipótesis y condiciones que tienen cabida y que nos permiten simplificar dichas ecuaciones. Ahora, va a desarrollarse en este apartado una solución general al problema (3.43) mediante la superposición de torbellinos en el caso bidimensional, y mediante el método de Green en el tridimensional, solución que luego tendremos que resolver con un método numérico.

Dicho método de Green consiste en suponer que el valor del potencial sobre cualquier punto de la superficie de nuestra ala puede expresarse como una distribución continua de dos soluciones elementales: fuentes y dobletes.

A continuación se desarrollará el método de Green tanto para el caso bidimensional como para el caso de un ala tridimensional, que aunque conceptualmente idénticos, difieren en su desarrollo.

## 4.1 Solución general para el caso bidimensional

La solución general para el caso antisimétrico en el problema bidimensional linealizado es la superposición de una distribución continua de torbellinos situados sobre  $z = 0$  cuya intensidad de por unidad de longitud  $v(x_0)$  es la apropiada para hacer cumplir la condición de impenetrabilidad. Esta solución cumple con la ecuación de Laplace y la condición de contorno en el infinito. El campo de velocidades para cualquier punto genérico  $(x, z)$  viene dado por la siguiente expresión:

$$\vec{v}'(x, z) = u'\vec{i} + w'\vec{k} = \frac{\vec{i}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{v(x_0)z}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0 + \frac{\vec{k}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{-v(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (4.1)$$

La velocidad horizontal al perfil en  $z = 0$  se halla calculando la integral:

$$\begin{aligned} u'(x, z = 0) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{v(x_0)z}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^{x-\delta} \frac{v(x_0)z}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0 + \frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{v(x_0)z}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0 \\ &+ \frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_{x+\delta}^\infty \frac{v(x_0)z}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0 = \frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{v(x_0)z}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0 \\ &= \frac{-v(x)}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \operatorname{atan} \left( \frac{x-x_0}{z} \right) \right]_{x-\delta}^{x+\delta} = \frac{-v(x)}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \operatorname{atan} \left( \frac{-\delta}{z} \right) - \operatorname{atan} \left( \frac{\delta}{z} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Donde se ha tenido en cuenta que  $\delta \ll 1$  y, por tanto, el valor de la intensidad de la distribución continua de

fuentes se ha aproximado como  $v(x_0) \simeq v(x)$  para el cálculo de la integral  $\int_{x-\delta}^{x+\delta} dx_0$ . Las otras dos integrales tienden a cero al no anularse el denominador para ningún punto pero sí el numerador. El valor de la integral en cada uno de los límites  $z \rightarrow 0^+$  y  $z \rightarrow 0^-$  valen:

$$\begin{aligned} u'(x, z = 0^+) &= \frac{-v(x)}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0^+} \left[ \operatorname{atan}\left(\frac{-\delta}{z}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{\delta}{z}\right) \right] = \frac{v(x)}{2} \\ u'(x, z = 0^-) &= \frac{-v(x)}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0^-} \left[ \operatorname{atan}\left(\frac{-\delta}{z}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{\delta}{z}\right) \right] = -\frac{v(x)}{2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por lo que la intensidad por unidad de longitud de los torbellinos es  $v(x_0) = 2 u'(x_0, z = 0^+)$  y se cumple con la condición de antisimetría del problema.

Por último, bastaría por imponer la condición de contorno de impenetrabilidad para obtener la solución general del problema bidimensional:

$$\boxed{w'(x, z = 0) = U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial z_p}{\partial t}(x, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{u'(x_0, z = 0)}{x - x_0} dx_0} \quad (4.4)$$

Nótese que para el caso estacionario, bastaría con calcular la integral entre 0 y la cuerda ya que por la condición (3.47) la velocidad horizontal es idénticamente nula a lo largo de toda la estela del perfil.

## 4.2 Método de Green para el caso bidimensional

Aunque el método de Green no lo vamos a utilizar a la hora de resolver el perfil (aunque su solución es exactamente la misma) va a explicarse en este apartado su desarrollo, ya que permite entender conceptualmente en que consiste este método y nos facilita su posterior extensión al caso tridimensional.

Como hemos comentado, el método de Green en el caso bidimensional expresa el valor del potencial sobre cualquier punto de la superficie del perfil como la superposición de una distribución continua de dos tipos de soluciones básicas: fuentes situadas sobre la superficie del objeto,  $\psi_j = \ln|\vec{x} - \vec{x}_j|$ , donde  $\vec{x}_j \in \Sigma_s$  y dobletes situados también sobre la superficie del objeto y orientados según la normal exterior al mismo,  $\vec{n} \cdot \nabla \psi_j$ . El problema general a resolver puede adimensionalizarse utilizando como escalas de longitud y velocidad la cuerda del perfil  $c$  y la velocidad en el infinito  $U_\infty$ . Siendo así,  $\nabla^* = \left(\frac{1}{c}\right) \nabla$ ,  $(\nabla^*)^2 = \left(\frac{1}{c}\right) \nabla^2$ ,  $\phi^* = (U_\infty c) \phi$ ,  $\vec{x}^* = c \vec{x}$ ,  $\Gamma^* = (U_\infty c) \Gamma$ , siendo las variables dimensionales aquellas en las que se utiliza el superíndice \*. Así el sistema adimensional a resolver es:

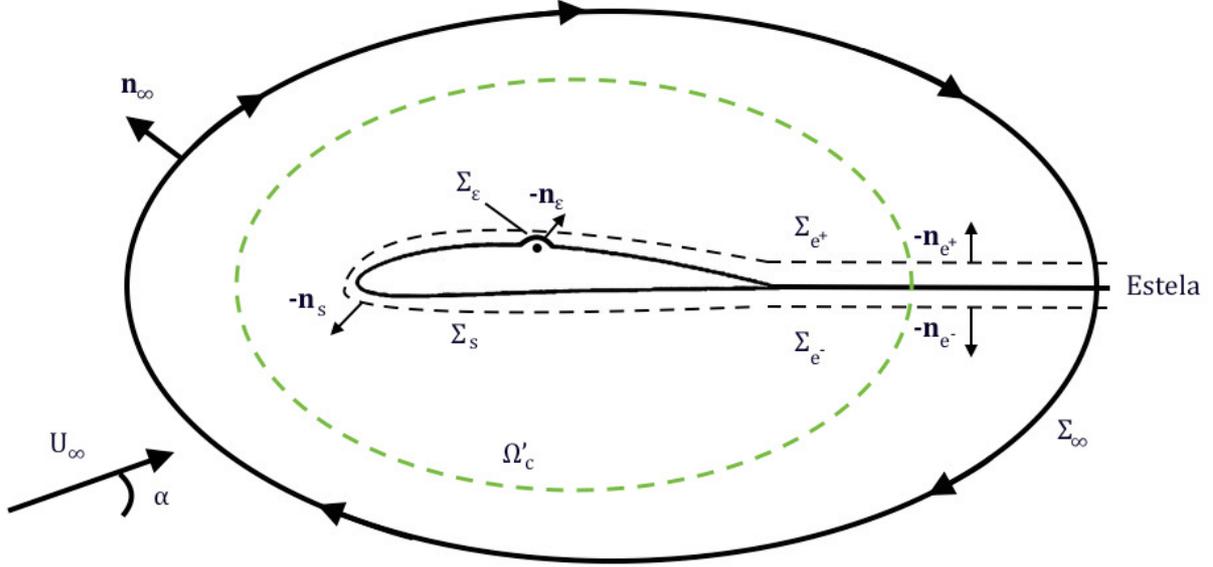
$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad \phi &\rightarrow \cos \alpha x + \sin \alpha z \\ \vec{x} \in \Sigma_s, \quad \vec{n} \cdot \nabla \phi &= 0 \\ &+ \text{Kutta - Joukowski} \end{aligned}} \quad (4.5)$$

Dado que se supone que el potencial  $\phi$  se expresa como superposición de soluciones elementales  $\psi_j$ , ambas cumplen la ecuación de Laplace y verifican:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad y \quad \nabla^2 \psi_j = 0 \quad (4.6)$$

Por lo que cumplen también:

$$\psi_j \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi_j = 0 \quad (4.7)$$



**Figura 4.1:** Dominio de integración del método de Green

Tomando la integral de volumen de la ecuación (4.7) extendida al dominio  $\Omega'_c$  obtenemos la ecuación de Green. Dicho dominio  $\Omega'_c$  viene definido en la Figura 4.1 y engloba a todo la región no viscosa del fluido excluyendo mediante una superficie circular de radio  $\epsilon \ll 1$  centrada en el punto donde se sitúa la solución básica de la ecuación de Laplace para evitar la singularidad. Dicha ecuación de Green, aplicando el teorema de Gauss es:

$$\int_{\Omega'_c} (\psi_j \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi_j) d\omega = \int_{\Omega'_c} \nabla \cdot (\psi_j \nabla \phi - \phi \nabla \psi_j) d\omega = \int_{\Sigma'_c} (\psi_j \nabla \phi - \phi \nabla \psi_j) \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \quad (4.8)$$

Donde  $\vec{n}$  es el vector normal exterior al dominio y está representado en la Figura 4.1 y  $j \in [1, N]$ , donde N es el número de fuentes localizadas en los puntos  $\vec{x}_j = x_j' \vec{i} + z_j' \vec{k}$  puntos distintos sobre la superficie del perfil. El cálculo de la integral de superficie sobre  $\Sigma'_c = \Sigma_\infty \cup \Sigma_\epsilon \cup \Sigma_s \cup \Sigma_{e+} \cup \Sigma_{e-}$  se simplifica si se aplica la ecuación potencial perturbado  $\phi'$ , que también cumple la ecuación de Laplace, ya que la integral sobre la superficie  $\Sigma_\infty$  es idénticamente nula. Por esto, nuestra integral de superficie a resolver es:

$$\int_{\Sigma_\epsilon \cup \Sigma_s \cup \Sigma_{e+} \cup \Sigma_{e-}} (\psi_j \nabla \phi' - \phi' \nabla \psi_j) \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \quad (4.9)$$

Dado que en la estela  $\vec{n}_{e+} = -\vec{n}_{e-}$  y dado que la velocidad asociada al potencial perturbado es continua a través de la misma, es decir,  $\nabla \phi'(\Sigma_{e+}) = \vec{v} + \frac{\vec{U}_\infty}{U_\infty} = \nabla \phi'(\Sigma_{e-})$ , se tiene que en la contribución de dichas dos integrales  $\psi_j \nabla \phi' \cdot \vec{n}_{e+} + \psi_j \nabla \phi' \cdot \vec{n}_{e-} = 0$ . Así, la integral sobre las superficies  $\Sigma_{e+}$  y  $\Sigma_{e-}$ , que delimitan la estela, queda reducida al cálculo de:

$$\int_{\Sigma_{e+} \cup \Sigma_{e-}} (\psi_j \nabla \phi' - \phi' \nabla \psi_j) \cdot \vec{n} d\sigma = - \int_{\Sigma_{e+}} (\phi^+ - \phi^-) \nabla \psi_j \cdot \vec{n}_{e+} d\sigma = \Gamma \int_0^\infty \nabla \psi_j \cdot (-\vec{n}_{e+}) ds \quad (4.10)$$

Donde se ha supuesto que la estela es recta y sigue la dirección de la corriente incidente y donde  $ds$  es el

diferencial de longitud a lo largo de la estela.

Para el cálculo de la integral de superficie sobre  $\Sigma_s$  y  $\Sigma_\epsilon$ , es conveniente deshacer el cambio  $\phi' = \phi - \phi_\infty$ . Por tanto:

$$\int_{\Sigma_s \cup \Sigma_\epsilon} (\psi_j \nabla \phi' - \phi' \nabla \psi_j) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\Sigma_s \cup \Sigma_\epsilon} (\psi_j \nabla \phi - \phi \nabla \psi_j) \cdot \vec{n} \, d\sigma - I_\infty \quad (4.11)$$

Donde

$$\begin{aligned} I_\infty &= \int_{\Sigma_s \cup \Sigma_\epsilon} (\psi_j \nabla \phi_\infty - \phi_\infty \nabla \psi_j) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \\ &= \int_{\Sigma_s} (\psi_j \nabla \phi_\infty - \phi_\infty \nabla \psi_j) \cdot \vec{n} \, d\sigma + \int_{\Sigma_{\epsilon^-}} (\psi_j \nabla \phi_\infty - \phi_\infty \nabla \psi_j) \cdot \vec{n}_{\epsilon^-} \, d\sigma + \\ &+ \int_{\Sigma_\epsilon} (\psi_j \nabla \phi_\infty - \phi_\infty \nabla \psi_j) \cdot \vec{n}_\epsilon \, d\sigma + \int_{\Sigma_{\epsilon^-}} (\psi_j \nabla \phi_\infty - \phi_\infty \nabla \psi_j) \cdot (-\vec{n}_{\epsilon^-}) \, d\sigma = \\ &= I_{\infty, s} + I_{\infty, \epsilon} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Entendiendo la integral en  $\Sigma_\epsilon$  como la integral en el semicírculo superior cuya normal positiva se define hacia el interior del círculo y la integral en  $\Sigma_{\epsilon^-}$  como la integral en el semicírculo inferior cuya normal positiva se define hacia el exterior del círculo.

Por tanto, la integral  $I_{\infty, \epsilon}$  queda reducida a calcular una integral sobre una superficie circular de radio  $\epsilon \rightarrow 0$  sobre la que  $\psi_j = \ln \epsilon$  y  $\vec{n} \cdot \nabla \psi_j = -\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \left(\frac{1}{\epsilon}\right) = -\frac{1}{\epsilon}$ ,

$$I_{\infty, \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \left( (\ln \epsilon) \nabla \phi_\infty \cdot \vec{n}_\epsilon + \left(\frac{1}{\epsilon}\right) \phi_\infty \right) \epsilon \, d\theta = 2\pi \phi_\infty(\vec{x}_j) \quad (4.13)$$

Donde se ha tenido en cuenta que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon \ln \epsilon) \rightarrow 0$ . Por otro lado, aplicando el teorema de Gauss y dado que en el volumen encerrado por las superficies  $\Sigma_s \cup \Sigma_{\epsilon^-}$ ,  $\nabla^2 \phi_\infty = 0$  y  $\nabla^2 \psi_j = 0$  al no existir singularidades dentro del mismo:

$$I_{\infty, s} = - \int_{\Omega_{s, \infty}} (\psi_j \nabla^2 \phi_\infty - \phi_\infty \nabla^2 \psi_j) \, d\omega = 0 \quad (4.14)$$

El cálculo de la integral del potencial  $\phi$  sobre la superficie  $\Sigma_\epsilon$  queda:

$$\int_{\Sigma_\epsilon} (\psi_j \nabla \phi - \phi \nabla \psi_j) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \left( (\ln \epsilon) \nabla \phi \cdot \vec{n}_\epsilon - \left(\frac{\phi}{\epsilon}\right) (\vec{e}_r) \cdot (-\vec{e}_r) \right) \epsilon \, d\theta = \pi \phi(\vec{x}_j) \quad (4.15)$$

Por lo que podemos reescribir la ecuación original (4.8) como:

$$\begin{aligned} \phi(x'_j, z'_j) &= 2(\cos \alpha x'_j + \sin \alpha z'_j) + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_s} (-\psi_j \nabla \phi + \phi \nabla \psi_j) \cdot \vec{n} \, d\sigma + \\ &+ \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^\infty \nabla \psi_j \cdot (-\vec{k} \cos \alpha + \vec{i} \sin \alpha) \, ds \end{aligned} \quad (4.16)$$

Donde  $\vec{x}_j = x'_j \vec{i} + z'_j \vec{k}$  y se ha vuelto a tener en cuenta que la estela sigue la dirección de la corriente incidente. Teniendo en cuenta ahora la condición de impenetrabilidad sobre el perfil,  $\vec{n} \cdot \nabla \phi = 0$  y que

$$\vec{n} \cdot \nabla \phi = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_j)}{(\vec{x} - \vec{x}_j) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_j)} \quad (4.17)$$

La ecuación de Green queda:

$$\begin{aligned} \phi(x'_j, z'_j) = & 2(\cos \alpha x'_j + \sin \alpha z'_j) + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_s} \phi(x, z) \frac{\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_j)}{|\vec{x} - \vec{x}_j|^2} d\sigma + \\ & + \frac{\Gamma}{\pi} \int_{\Sigma_e} \frac{(\vec{x} - \vec{x}_j) \cdot (-\vec{k} \cos \alpha + \vec{l} \sin \alpha)}{|\vec{x} - \vec{x}_j|^2} d\sigma \end{aligned} \quad (4.18)$$

Como se dijo en un principio, el método de Green expresa que el potencial en un punto  $(x'_j, z'_j)$ ,  $\phi(x'_j, z'_j)$  puede expresarse como la superposición de una distribución continua de dobletes orientados según la normal de las superficies  $\Sigma_s$  y  $\Sigma_e$  de intensidades por unidad de longitud respectivas  $\phi(x, z)$  y  $\Gamma$ . Para el caso concreto de flujo potencial alrededor de un sólido la intensidad de las fuentes es nula para cumplir con la condición de impenetrabilidad, pero en casos más generales en los que no se cumplen dicha condición, también debemos tener en cuenta la suma de los potenciales creados en  $(x'_j, z'_j)$  por una distribución continua de fuentes de intensidad por unidad de longitud  $\vec{n} \cdot \nabla \phi$  situadas sobre la superficie  $\Sigma_s$ .

### 4.3 Solución general para el caso tridimensional: Método de Green

Una vez visto el desarrollo bidimensional del método de Green, dicha idea es fácilmente extrapolable al caso tridimensional. En este caso, se define el potencial de una solución elemental de la ecuación de Laplace tridimensional, que corresponde a una fuente localizada en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , de la siguiente forma:

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \quad (4.19)$$

Dicha solución elemental, como se ha mencionado, cumple la ecuación de Laplace, esto es,  $\nabla^2 \Psi_0 = 0$ . Nosotros estamos buscando un potencial  $\phi'$  cuya velocidad  $\vec{v}' = \nabla \phi'$  también es solución de la ecuación de Laplace al serlo el primero, es decir,  $\nabla^2 \vec{v}' = \nabla^2 (\nabla \phi') = \nabla (\nabla^2 \phi')$ , donde se ha hecho uso de la intercambiabilidad de las derivadas. Debido a esto, también deberá cumplirse la siguiente ecuación:

$$\Psi_0 \nabla^2 \vec{v}' - \vec{v}' \nabla^2 \Psi_0 = 0 \quad (4.20)$$

Esta ecuación (4.20) es similar a la que teníamos en el caso bidimensional (4.7). Aplicando conceptualmente la misma idea que antes, integramos la ecuación en un volumen de control  $\Omega'_c$  que estará delimitado por la superficie  $\Sigma'_c = \Sigma_\epsilon \cup \Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela^+} \cup \Sigma_{estela^-}$ , mismas superficies que antes pero tridimensionales. Aquí ya se ha tenido en cuenta que la integral sobre la superficie  $\Sigma_\infty$  es idénticamente nula al tratar con velocidades perturbadas.

Haciendo uso de la siguiente igualdad vectorial:

$$\nabla \cdot (\Psi_0 \nabla \vec{v}' - \vec{v}' \nabla \Psi_0) = \nabla \Psi_0 \cdot \nabla \vec{v}' + \Psi_0 \nabla^2 \vec{v}' - \vec{v}' \nabla^2 \Psi_0 = \nabla \Psi_0 \cdot \nabla \vec{v}' = \Psi_0 \nabla^2 \vec{v}' - \vec{v}' \nabla^2 \Psi_0 \quad (4.21)$$

Por lo que la ecuación de Green, aplicando el teorema de Gauss, queda:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'_c} (\Psi_0 \nabla^2 \vec{v}' - \vec{v}' \nabla^2 \Psi_0) d\omega &= \int_{\Omega'_c} \nabla \cdot (\Psi_0 \nabla \vec{v}' - \vec{v}' \nabla \Psi_0) d\omega = \\ &= \int_{\Sigma_\epsilon \cup \Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela^+} \cup \Sigma_{estela^-}} \Psi_0 \vec{n} \cdot \nabla \vec{v}' - \vec{v}' \vec{n} \cdot \nabla \Psi_0 d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

De la misma forma que antes, las integrales de superficie sobre  $\Sigma_\epsilon$  y  $\Sigma_{ala}$  pueden escribirse de la forma:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma_\epsilon \cup \Sigma_{ala}} \Psi_0 \vec{n} \cdot \nabla \vec{v}' - \vec{v}' \vec{n} \cdot \nabla \Psi_0 \, d\sigma = \\
& = \int_{\Sigma_{ala}} \Psi_0 \vec{n} \cdot \nabla \vec{v}' - \vec{v}' \vec{n} \cdot \nabla \Psi_0 \, d\sigma + \int_{\Sigma_{\epsilon^-}} \Psi_0 \vec{n}_{e^-} \cdot \nabla \vec{v}' - \vec{v}' \vec{n}_{e^-} \cdot \nabla \Psi_0 \, d\sigma + \\
& + \int_{\Sigma_\epsilon} \Psi_0 \vec{n} \cdot \nabla \vec{v}' - \vec{v}' \vec{n} \cdot \nabla \Psi_0 \, d\sigma + \int_{\Sigma_{\epsilon^-}} \Psi_0 (-\vec{n}_{e^-}) \cdot \nabla \vec{v}' - \vec{v}' (-\vec{n}_{e^-}) \cdot \nabla \Psi_0 \, d\sigma = \\
& = I_{ala} + I_\epsilon
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Al igual que antes, se entiende por  $\Sigma_\epsilon$  como la semiesfera superior que rodea a la singularidad y cuya normal positiva se define hacia el interior de dicha esfera, y por  $\Sigma_{\epsilon^-}$  como la semiesfera inferior que rodea a la singularidad y cuya normal positiva se define hacia el exterior de dicha esfera. Siendo así, la integral  $I_\epsilon$  puede calcularse de la siguiente manera:

$$I_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} (-\vec{e}_r) \cdot \nabla \vec{v}'(\vec{x}) - \vec{v}'(\vec{x}) (-\vec{e}_r) \cdot \frac{(-\vec{e}_r)}{\epsilon^2} \right) \epsilon^2 d\Omega = -4\pi \vec{v}'(\vec{x}_0) \tag{4.24}$$

Donde  $d\Omega = \frac{dS}{r^2}$  es el diferencial de ángulo sólido y donde se ha tenido en cuenta que la primera parte de la integral tiende a 0 al estar el integrando multiplicado por  $\epsilon$  y dónde se ha considerado que al tender  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\vec{v}'(\vec{x})$  es aproximadamente constante en la esfera e idéntica al valor en la singularidad, esto es,  $\vec{v}'(\vec{x}) \simeq \vec{v}'(\vec{x}_0)$ .

Tras este sencillo cálculo, la ecuación de Green puede escribirse ahora de la siguiente forma:

$$4\pi \vec{v}'(\vec{x}_0) = \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela^+} \cup \Sigma_{estela^-}} \Psi_0 \vec{n} \cdot \nabla \vec{v}' - \vec{v}' \vec{n} \cdot \nabla \Psi_0 \, d\sigma \tag{4.25}$$

Donde ahora la integral en la superficie  $\Sigma_{ala}$  es una superficie que engloba tanto a la anterior integral en  $\Sigma_{ala}$  (en la que se saltaba la discontinuidad) como en  $\Sigma_{\epsilon^-}$ , pero al ser  $\epsilon \rightarrow 0$  puede suponerse que la integral se calcula en toda la superficie del ala.

Multiplicando la ecuación (4.25) por el vector unitario  $\vec{k}$ ,

$$4\pi w'(\vec{x}_0) = \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela^+} \cup \Sigma_{estela^-}} \Psi_0 \vec{n} \cdot \nabla w' - w' \vec{n} \cdot \nabla \Psi_0 \, d\sigma \tag{4.26}$$

Dado que por antisimetría debe cumplirse que  $w'(x, y, z = 0^+) = w'(x, y, z = 0^-)$  y que las normales al ala y a la estela son aproximadamente  $\vec{k}$  y  $-\vec{k}$  para el intradós y el extradós respectivamente, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma_{estela^+} \cup \Sigma_{estela^-}} w'(x, y, z = 0) \cdot (\vec{k} \cdot \nabla \Psi_0 - \vec{k} \cdot \nabla \Psi_0) \, d\sigma = 0 \\
& \int_{\Sigma_{ala^+} \cup \Sigma_{ala^-}} w'(x, y, z = 0) \cdot (\vec{k} \cdot \nabla \Psi_0 - \vec{k} \cdot \nabla \Psi_0) \, d\sigma = 0
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Llegando ahora a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 4\pi w'(\vec{x}_0) &= \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela^+} \cup \Sigma_{estela^-}} \Psi_0 \vec{n} \cdot \nabla w' d\sigma = \\
 &= - \int_{\Sigma_{ala^+} \cup \Sigma_{estela^+}} \Psi_0 \frac{\partial w'^+}{\partial z} d\sigma^+ + \int_{\Sigma_{ala^-} \cup \Sigma_{estela^-}} \Psi_0 \frac{\partial w'^-}{\partial z} d\sigma^-
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Donde  $w'^+$  y  $w'^-$  representan las velocidades de perturbación verticales sobre el extradós y el intradós, respectivamente.

Aplicando la ecuación de continuidad  $\nabla \cdot \vec{v}' = 0$  sobre el extradós e intradós del ala obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w'^+}{\partial z} &= - \frac{\partial u'^+}{\partial x} - \frac{\partial v'^+}{\partial y} \\
 \frac{\partial w'^-}{\partial z} &= - \frac{\partial u'^-}{\partial x} - \frac{\partial v'^-}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Según la ecuación (3.46), a lo largo de la estela se cumple que:

$$\frac{\partial(\phi^+ - \phi^-)}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial(\phi^+ - \phi^-)}{\partial x} = 0 \tag{4.30}$$

En el caso particular de régimen estacionario, al ser las derivadas con respecto al tiempo nulas, la ecuación (4.30) se traduce en una igualdad de las velocidades horizontales tanto por el extradós como por el intradós, es decir,  $u'^+ = u'^-$ . Esta igualdad no se cumple en la estela no estacionaria, pero sí al final de ésta. Este hecho es fácilmente demostrable con el teorema de Bjerknes-Kelvin, que dice:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \tag{4.31}$$

Por tanto, dado que la placa parte del reposo, la circulación  $\Gamma$  es idénticamente nula en cualquier superficie cerrada que englobe tanto al ala como a la estela. Tomando como superficie una que tienda al propio ala y a la estela, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{x_{est}} \gamma(x, y) dx dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{x_{est}} (u'^+ - u'^-) dx dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{x_{est}} \frac{\partial(\phi^+ - \phi^-)}{\partial x} dx dy = \\
 &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\phi^+(x_{est}, y, t) - \phi^-(x_{est}, y, t)) dy = 0
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Donde  $x_{est}$  es la distancia  $x$  donde termina la estela y donde  $\gamma(x, y)$  es la densidad de circulación. Nótese que se ha utilizado que el potencial es nulo en el borde de ataque, hecho que se deducirá en el siguiente capítulo. Dado que la integral es idénticamente nula para todo instante de tiempo  $t$ , el integrando tampoco puede depender del tiempo, por lo que se deduce que al final de la estela, la variación temporal del potencial es nula y, por tanto, según la ecuación (4.30) las velocidades horizontales son iguales,  $u'^+ = u'^-$ .

Haciendo uso de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 \Psi_0 \frac{\partial u'}{\partial x} &= \frac{\partial(\Psi_0 u')}{\partial x} - u' \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \\
 \Psi_0 \frac{\partial v'}{\partial y} &= \frac{\partial(\Psi_0 v')}{\partial y} - v' \frac{\partial \Psi_0}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

La ecuación de Green puede reescribirse como:

$$4\pi w'(\vec{x}_0) = \int_{\Sigma_{ala^+} \cup \Sigma_{estela^+}} \left( \frac{\partial(\Psi_0 u'^+)}{\partial x} - u'^+ \frac{\partial\Psi_0}{\partial x} + \frac{\partial(\Psi_0 v'^+)}{\partial y} - v'^+ \frac{\partial\Psi_0}{\partial y} \right) d\sigma^+ - \int_{\Sigma_{ala^-} \cup \Sigma_{estela^-}} \left( \frac{\partial(\Psi_0 u'^-)}{\partial x} - u'^- \frac{\partial\Psi_0}{\partial x} + \frac{\partial(\Psi_0 v'^-)}{\partial y} - v'^- \frac{\partial\Psi_0}{\partial y} \right) d\sigma^- \quad (4.34)$$

Dado que las integrales de superficie pueden hacerse indistintamente primero en dirección  $x$  y luego en dirección  $y$  o viceversa, la suma de las integrales de los primeros sumandos es idénticamente nula, al serlo su integral en  $x$  tanto en el borde de ataque como al final de la estela, tal y como se ha demostrado previamente. La suma de las integrales de los terceros sumandos son ambas nulas al serlo sus integrales en  $y$  debido a que las velocidades  $v'$  son antisimétricas respecto al plano  $z = 0$ , siendo entonces dichas velocidades perturbadas idénticas pero de signo contrario en los bordes marginales.

Con estas simplificaciones y haciendo uso de la antisimetría del campo de velocidades, obtenemos:

$$2\pi w'(\vec{x}_0) = - \int_{\Sigma_{ala^+} \cup \Sigma_{estela^+}} \left( u'^+ \frac{\partial\Psi_0}{\partial x} + v'^+ \frac{\partial\Psi_0}{\partial y} \right) d\sigma^+ \quad (4.35)$$

Ecuación que podemos simplificar de la siguiente forma:

$$w'(\vec{x}_0) = U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x}(x_0, y_0, t) + \frac{\partial z_p}{\partial t}(x_0, y_0, t) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala^+} \cup \Sigma_{estela^+}} \vec{v}'(\vec{x}) \cdot \nabla \Psi_0 d\sigma^+ \quad (4.36)$$

Con lo que hemos llegado a la solución general del problema aerodinámico para el caso tridimensional. Como puede verse, la ecuación (4.36) nos indica que podemos expresar la velocidad vertical del campo de velocidades de perturbación como la superposición de los campos de velocidades creados por una distribución continua de torbellinos situados sobre la superficie del ala y de la estela de intensidad por unidad de longitud  $2u'^+(x, y)$  situados según la dirección del eje  $y$  y de intensidad por unidad de longitud  $2v'^+(x, y)$  situados según la dirección del eje  $x$ .

Como podemos ver, tanto para el caso bidimensional como el tridimensional, puede deducirse de manera natural cuál es la solución de nuestro problema sin necesidad de suponer a priori ninguna de ellas.

# 5 MÉTODO DE RESOLUCIÓN NUMÉRICA

Una vez hemos visto las diferentes soluciones generales de los problemas aerodinámicos estacionarios y no estacionarios en dos y tres dimensiones, procedemos ahora a explicar el método de resolución numérica que se va a emplear para la resolución de dichas ecuaciones.

Así, en este capítulo se explicará brevemente las condiciones de contorno que vamos a imponer al ala o al perfil al resolverse el problema en términos del potencial aerodinámico, se ilustrará el método que va a emplearse para la resolución de la estela no estacionaria y, por último, se desarrollarán los métodos espectrales que vamos a utilizar y su implementación en la resolución numérica.

## 5.1 Condiciones de contorno

Como demostramos en el punto anterior, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento linealizada puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial \phi'}{\partial x} + \frac{p'}{\rho} = 0 \quad (5.1)$$

En cualquier región donde no haya sólido que soporte la diferencia de presiones, debe cumplirse la igualdad de presiones de perturbación por el extradós y por el intradós, esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi'^+}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial \phi'^+}{\partial x} + \frac{p'^+}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \phi'^-}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial \phi'^-}{\partial x} + \frac{p'^-}{\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Restando ambas ecuaciones (5.2) y aplicando la condición que hemos mencionado de igual de presiones,  $p'^+ = p'^-$ , y la condición de antisimetría del potencial de velocidades de perturbación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial x} + \frac{p'^+ - p'^-}{\rho} &= \frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \phi'}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial \phi'}{\partial x} &= \frac{D\phi}{Dt} = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Esta condición implica que la derivada sustancial del potencial de velocidades es nula en aquellas regiones donde no exista sólido. Dado que el potencial de velocidades es idénticamente nulo en el infinito aguas arriba, este valor ha de conservarse a lo largo del movimiento de las partículas que procedan de aguas arriba hasta donde haya sólido, por lo que podemos afirmar sin ninguna duda que el potencial en el borde de ataque y los bordes marginales es nulo:

$$\boxed{\phi'(x_{ba}, y, t) = \phi'(x, b/2, t) = \phi'(x, -b/2, t) = 0} \quad (5.4)$$

Donde  $x_{ba}$  es la distancia  $x$  a la que se encuentra el borde de ataque y que en nuestra geometría descrita en el capítulo segundo coincide con  $x_{ba} = 0$ , y donde  $y_{bm} = \pm b/2$  son las coordenadas de los bordes marginales según dicha geometría.

De esta forma se reduce el número de ecuaciones del sistema a resolver ya que el potencial es conocido en todos esos puntos, tan sólo debiendo imponer la condición de contorno en el borde de salida.

Así, en el borde de salida, siguiendo el mismo razonamiento de antes, también se cumple que la derivada sustancial es nula. Sin embargo, al no proceder ahora las partículas del infinito sino del ala, dónde el potencial perturbado ya no es nulo, éste tampoco lo será, por regla general, en el borde de salida.

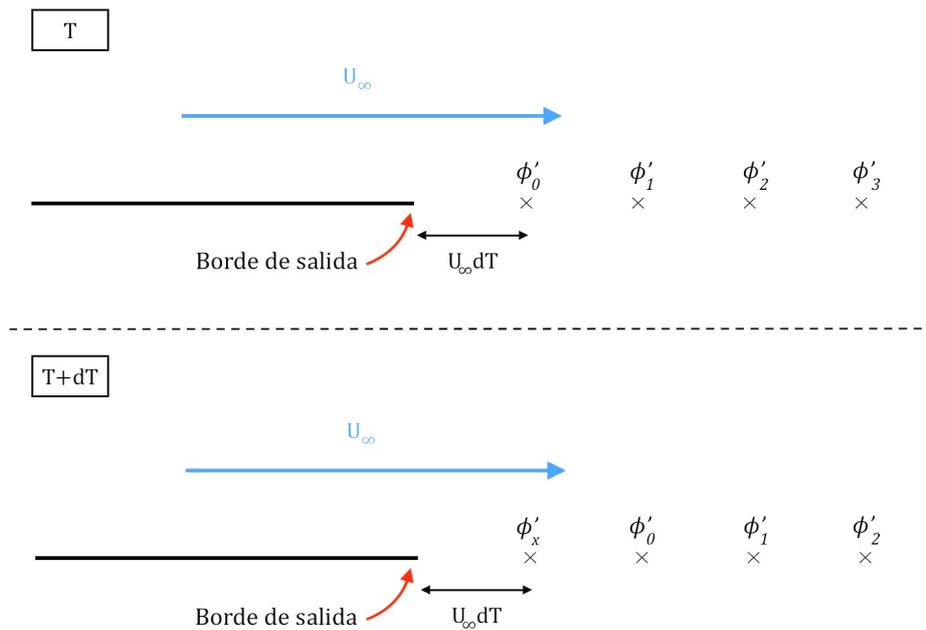
Así es necesario imponer en el borde de salida las siguientes condiciones de contorno, según se esté en régimen estacionario o no estacionario:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \phi'(x_{bs}, y, t)}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \phi'(x_{bs}, y, t)}{\partial x} &= 0 \text{ en régimen no estacionario} \\ \frac{\partial \phi'(x_{bs}, y, t)}{\partial x} &= 0 \text{ en régimen estacionario} \end{aligned}} \quad (5.5)$$

Una vez visto las condiciones de contorno a las que debe estar sujeta nuestra resolución numérica, procedemos a desarrollar como va a realizarse el cálculo del potencial en la estela haciendo uso de esta propiedad que dice que la derivada sustancial es nula.

## 5.2 Método de resolución de la estela no estacionaria

Para el caso estacionario, la estela no supone mayor problema, ya que como hemos demostrado en el punto anterior con la ecuación (5.3) su derivada sustancial ha de ser nula. Al no existir variaciones temporales por propia definición de caso estacionario, el valor del potencial en la estela es constante en  $x$  y su valor es el mismo que el del borde de salida.



**Figura 5.1:** Evolución del potencial en la estela no estacionaria

En el caso no estacionario, sigue cumpliéndose la ecuación (5.3), que por propia definición de derivada sustancial, nos indica que el potencial es constante a lo largo del movimiento de una partícula fluida. Esta propiedad puede ser utilizada para calcular la estela no estacionaria de manera mucho más sencilla, reduciendo así los recursos computacionales necesarios y el tiempo empleado.

Supongamos que en un instante  $T$  el potencial de perturbación en el borde de salida tiene un valor  $\phi'_x$ . En un instante  $T + dT$ , la partícula fluida que estaba en el instante  $T$  en el borde de salida, se encontrará ahora a una distancia de éste de  $U_\infty dT$ , y dicha partícula, en virtud de la ecuación (5.3), habrá conservado en su movimiento el valor de su potencial de perturbación,  $\phi'_x$ , por lo que no será necesario calcular el potencial en la estela en todo instante de tiempo, sino que bastará con propagar aguas abajo el valor del potencial en el borde de salida. Será entonces necesario realizar divisiones uniformes en la estela cuyos saltos correspondan con el valor  $U_\infty \Delta T$  correspondiente.

### 5.3 Métodos espectrales

En este apartado se va a introducir muy brevemente los métodos espectrales que se han empleado en este trabajo para la resolución numérica del problema aerodinámico. El objetivo no es explicar detalladamente la base matemática de dichos métodos, por lo que vamos sencillamente a definirlos y desarrollar la implementación en nuestra resolución numérica.

#### 5.3.1 Interpolación polinómica de Lagrange

La interpolación polinómica de Lagrange consiste, como su propio nombre indica, en aproximar una función  $F(x)$  por un polinomio, llamado polinomio interpolador en la forma de Lagrange, conociendo los valores de la función real en una serie de puntos. Así, siendo  $N$  el número de puntos,  $x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N$ , donde conocemos el valor de la función a interpolar, y siendo  $f_1 < f_2 < \dots < f_{N-1} < f_N$  los valores de la función a interpolar en dichos puntos, tal que para un punto  $x_i$  con  $i \in [1, N]$ ,  $F(x_i) = f_i$ , el polinomio interpolador de Lagrange se define como:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N L_i(x) f_i \quad (5.6)$$

Donde  $L_i(x)$  son los polinomios interpolantes de Lagrange y que, para cada  $i = 1, \dots, N$  se define como:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (5.7)$$

Observamos que  $L_i(x_j) = \delta_{ij} \forall i, j = 1, \dots, N$ , siendo  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker. La ecuación (5.6) puede reescribirse en forma matricial para así facilitar su implementación numérica en Matlab. Así, siendo  $M$  el número de puntos  $x_{01} < x_{02} < \dots < x_{0(M-1)} < x_{0M}$  donde queremos aproximar el valor de la función  $F(x)$ , y siendo  $f_{01} < f_{02} < \dots < f_{0(M-1)} < f_{0M}$  los valores del polinomio interpolador en dichos puntos, tal que para un punto  $x_{0j}$  con  $j \in [1, M]$ ,  $f(x_{0j}) = f_{0j}$ , se reescribe la ecuación (5.6) de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} f_{01} \\ f_{02} \\ \vdots \\ f_{0M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(x_{01}) & L_2(x_{01}) & \dots & L_N(x_{01}) \\ L_1(x_{02}) & L_2(x_{02}) & \dots & L_N(x_{02}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1(x_{0M}) & L_2(x_{0M}) & \dots & L_N(x_{0M}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Que de manera abreviada puede escribirse como:

$$\vec{f}_0 = L_{M \times N} \vec{f} \quad (5.9)$$

Hasta ahora no se ha hecho mención a los puntos en los cuales se debe aproximar la función y todos los desarrollos aquí presentados son válidos independientemente de cuáles sean dichos puntos. Sin embargo, elegir una correcta colocación de los puntos donde se interpola es crucial para que el polinomio interpolador sea una buena aproximación de la función real. Así, se puede demostrar que si los nodos de interpolación pertenecen a un intervalo  $[a, b]$  tal que  $[a = x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N = b]$  son los nodos de interpolación, existe un punto  $c \in [a, b]$  tal que para cualquier punto de dicho intervalo se verifica:

$$f(x) - F(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N)}{N!} f^{(N)}(c) \quad (5.10)$$

Donde  $f^{(N)}(c)$  denota la derivada N-ésima de la función en el punto  $c$ . Dicho error tiene un máximo, y fue Chebyshev quien encontró que para minimizar el máximo de los errores, los nodos en los que se interpolan deben estar dados de la siguiente forma:

$$x_i = \frac{b + a}{2} + \frac{a - b}{2} \cos\left(\frac{\pi(i - 1)}{N - 1}\right), \quad i = 1, \dots, N \quad (5.11)$$

Dichos nodos se llamarán nodos de Chebyshev y serán los que utilizemos a la hora de dividir el perfil o el ala. La estela no podrá dividirse así, ya que para poder simplificar su cálculo deberán estar equiespaciados en  $x$ , tal y como se indicó en el apartado anterior.

A la hora de interpolar una función de dos variables, bastará con interpolar en  $x$  para cada  $y$  fijo y posteriormente interpolar en  $y$  para cada punto  $x_0$  fijo donde se ha interpolado en  $x$ . Cabe mencionar que a la hora de implementarlo en Matlab, se ha creado una función llamada *interp\_lagrange.m* que, recibiendo un vector  $x$  de nodos, un vector  $y$  de valores de la función en dichos nodos y un vector  $x_0$ , calcula el valor del polinomio interpolador de Lagrange en dichos puntos  $x_0$  basado en los nodos  $x$  y los valores  $y$ , así como su matriz interpoladora  $L_{M \times N}$ . Nótese que en este caso la longitud de los vectores  $x$  e  $y$  han de ser la misma. Además se ha creado otra función llamada *interp2D\_lagrange.m* que, recibiendo dos vectores  $x$  e  $y$  de nodos, una matriz  $z$  de valores de la función en dichos nodos y dos vectores  $x_0$  e  $y_0$ , calcula el valor del polinomio interpolador de Lagrange en dichos puntos  $(x_0, y_0)$  basado en los nodos  $(x, y)$  y los valores  $z$ . En este último caso la matriz  $z$  ha de ser de dimensiones  $M \times N$  siendo  $M$  igual a la longitud del vector  $x$  y  $N$  igual a la longitud del vector  $y$ .

Pasemos ahora a estudiar cómo va a utilizarse dicha interpolación polinómica en la forma de Lagrange para calcular derivadas en un punto o integrales en un segmento.

### 5.3.2 Derivación

En este apartado van a desarrollarse de manera similar al del apartado anterior los métodos que van a emplearse para aproximar las derivadas utilizando el polinomio interpolador en la forma de Lagrange. Obsérvese que la derivada de los polinomios interpolantes de Lagrange, para cada  $i \in [1, N]$  son de la forma:

$$L'_i(x) = \sum_{k=1}^N \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_N)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_N)} \quad (5.12)$$

Así, podemos tener de manera sencilla el valor de la derivada en cualquier nodo  $x_i$  siendo  $i \in [1, N]$  de la siguiente manera:

$$f'_i = \sum_{j=1}^N \frac{dL_j(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} \quad f_j = \sum_{j=1}^N L'_j(x_i) f_j, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.13)$$

Donde se ha denotado por  $f'_i$  al valor de la derivada en el nodo  $x_i$  y por  $f_j$  al valor de la función real en el nodo  $x_j$  siendo  $j \in [1, N]$ .

Al igual que en el apartado anterior, los valores de la derivada en los nodos de interpolación puede calcularse de manera matricial del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L'_1(x_1) & L'_2(x_1) & \dots & L'_N(x_1) \\ L'_1(x_2) & L'_2(x_2) & \dots & L'_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_1(x_N) & L'_2(x_N) & \dots & L'_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Que de manera abreviada puede escribirse del siguiente modo:

$$\vec{f}' = L_{px} \vec{f} \quad (5.15)$$

Donde  $L_{px}$  es la matriz:

$$L_{px} = \begin{bmatrix} L'_1(x_1) & L'_2(x_1) & \dots & L'_N(x_1) \\ L'_1(x_2) & L'_2(x_2) & \dots & L'_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_1(x_N) & L'_2(x_N) & \dots & L'_N(x_N) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

llamada matriz de derivación.

En el caso de que quisiéramos calcular la derivada segunda de la función en los nodos de interpolación, bastaría con repetir la expresión (5.13) de la siguiente forma:

$$f''_i = \sum_{j=1}^N L'_j(x_i) f'_j = \sum_{j=1}^N \left( L'_j(x_i) \sum_{k=1}^N L'_k(x_j) f_k \right) = \sum_{j=1}^N \left[ \left( \sum_{k=1}^N L'_k(x_j) f_k \right) L'_j(x_i) \right], \quad (5.17)$$

$i = 1, \dots, N$

Esto puede escribirse, al igual que antes, de forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f''_1 \\ f''_2 \\ \vdots \\ f''_N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L'_1(x_1) & L'_2(x_1) & \dots & L'_N(x_1) \\ L'_1(x_2) & L'_2(x_2) & \dots & L'_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_1(x_N) & L'_2(x_N) & \dots & L'_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_N \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} L'_1(x_1) & L'_2(x_1) & \dots & L'_N(x_1) \\ L'_1(x_2) & L'_2(x_2) & \dots & L'_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_1(x_N) & L'_2(x_N) & \dots & L'_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L'_1(x_1) & L'_2(x_1) & \dots & L'_N(x_1) \\ L'_1(x_2) & L'_2(x_2) & \dots & L'_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_1(x_N) & L'_2(x_N) & \dots & L'_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Que de nuevo puede abreviarse de la siguiente forma:

$$\vec{f}'' = L_{px} \vec{f}' = L_{px} L_{px} \vec{f} = L_{px}^2 \vec{f} \quad (5.19)$$

Puede calcularse así la derivada N-ésima por el mismo procedimiento:

$$\vec{f}^{(n)} = L_{px}^n \vec{f} \quad (5.20)$$

En el caso de funciones de dos variables, basta con calcular las dos matrices derivadas, una con respecto a  $x$  y otra con respecto a  $y$ , y multiplicarlas en función de la derivada que se quiera calcular, esto es:

$$\frac{\partial^{n+m} \vec{f}}{\partial x^n \partial y^m} = L_{px}^n L_{py}^m \vec{f} \quad (5.21)$$

A la hora de la implementación en Matlab, se ha creado una función llamada *matriz\_derivada.m* que, al recibir un vector de nodos  $x$  y el orden de la derivada que se desea  $n$ , devuelve la matriz  $L_{pxn} = L_{px}^n$  correspondiente a la matriz derivada  $N$ -ésima con respecto a  $x$ . Cabe destacar que la dimensión de esta matriz es  $[M \times M]$  siendo  $M$  la longitud del vector de nodos  $x$ .

### 5.3.3 Integración

En este apartado, al igual que en el anterior, van a desarrollarse los métodos empleados para calcular las integrales basándonos en el polinomio interpolador en la forma de Lagrange. Así, nuestra primera idea se basaba en invertir la matriz derivada para obtener una matriz integral de la siguiente forma:

$$\vec{f}' = L_{px} \vec{f} \Rightarrow \vec{f} = L_{px}^{-1} \vec{f}' = I_{px} \vec{f}' \quad (5.22)$$

Esto no es posible, ya que la matriz derivada  $L_{px}$  es singular, al ser la suma de sus columnas un vector idénticamente nulo. Esto puede comprobarse multiplicando la matriz por un vector de unos, cuyo resultado debe ser (y es) un vector nulo al ser nula la derivada de una constante.

$$\begin{bmatrix} L'_1(x_1) & L'_2(x_1) & \dots & L'_N(x_1) \\ L'_1(x_2) & L'_2(x_2) & \dots & L'_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_1(x_N) & L'_2(x_N) & \dots & L'_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Esto, aunque supone a priori un problema, tiene fácil solución. Dado que nuestro objetivo es integrar las velocidades de perturbación para hallar el valor del potencial sobre el ala o el perfil, podemos ver que nuestro objetivo es resolver esta ecuación:

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L'_1(x_1) & L'_2(x_1) & \dots & L'_N(x_1) \\ L'_1(x_2) & L'_2(x_2) & \dots & L'_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_1(x_N) & L'_2(x_N) & \dots & L'_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \vdots \\ \phi'_N \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Indicando el subíndice 1 las variables en el borde de ataque y el subíndice  $N$  los valores en el borde de salida. Dado que el potencial perturbado en el borde de salida lo conocemos y es nulo según hemos demostrado en el primer apartado de este capítulo, podemos suprimir la primera columna de la matriz  $L_{px}$  ya que va a ir multiplicado por cero. De igual forma, sabemos que la velocidad perturbada en el borde de ataque va a tender a infinito, por lo que no estamos interesados en el valor concreto en el borde de ataque sino en el resto, por lo que podemos suprimir la primera fila de la matriz derivada. Así tenemos:

$$\begin{bmatrix} u'_2 \\ u'_3 \\ \vdots \\ u'_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L'_2(x_2) & L'_3(x_2) & \dots & L'_N(x_2) \\ L'_2(x_3) & L'_3(x_3) & \dots & L'_N(x_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_2(x_N) & L'_3(x_N) & \dots & L'_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'_2 \\ \phi'_3 \\ \vdots \\ \phi'_N \end{bmatrix} \Rightarrow u' = L'_{px} \phi' \quad (5.25)$$

Donde la matriz  $L'_{px}$  es la matriz reducida de derivación. Dicha matriz ahora sí es invertible, por lo que a la hora de integrar bastará con invertir la matriz reducida de integración:

$$\vec{f}' = L'_{px} \vec{f} \Rightarrow \vec{f} = L'_{px}^{-1} \vec{f}' = I'_{px} \vec{f}' \quad (5.26)$$

De la misma forma, puede seguirse el mismo razonamiento a la hora de integrar a lo largo del eje  $y$ , dado que

también es nulo el potencial de perturbación en los bordes marginales y las velocidades de perturbación transversales tienden a infinito en éstos.

Este es el proceso que se va a seguir a lo largo de todo el trabajo. Se traducirán las ecuaciones a la multiplicación de diversas matrices de integración y derivación y se resolverá el sistema resultante. En el próximo apartado se desarrollará nuestro método de resolución numérica en dos dimensiones y las diferentes integrales a resolver.

## 5.4 Método de resolución numérica en dos dimensiones

En este apartado va a detallarse en profundidad el método de resolución numérica que hemos implementado para resolver el problema aerodinámico bidimensional en regímenes estacionario y no estacionario. El método a implementar tiene una novedad importante frente a otros métodos conocidos y utilizados normalmente como puede ser el método del Vortex-Lattice, ya que en nuestro caso vamos a situar los puntos de colocación en los propios torbellinos, realizando algunos cambios a la ecuación general de forma que podamos evitar la discontinuidad que esto produce.

Siendo así, se va a dividir la cuerda del perfil en  $N_x$  nodos según la distribución de Chebyshev, coincidiendo el primero y el último nodo con el borde de ataque y el borde de salida respectivamente. Dichos nodos son los puntos dónde va a situarse nuestras incógnitas del potencial de perturbación  $\phi'$ . Recordamos que el valor de la incógnita en el borde de ataque es conocida por condiciones de contorno y su valor es idénticamente nulo. Así, necesitamos  $N_x - 2$  puntos en los que situaremos los torbellinos, y por cada uno de los cuales tendremos una ecuación a resolver de nuestro problema. Nótese que aunque tenemos  $N_x - 1$  incógnitas, al situar el último nodo en el borde de salida esto nos permite añadir una ecuación más a las  $N_x - 2$  anteriores, correspondiente a la condición de Kutta-Joukowski que vimos en la ecuación (5.5) del primer apartado de este capítulo.

En el caso estacionario, al ser la velocidad horizontal nula en la estela, no es necesario dividirla, simplemente se resuelve la ecuación general en la cuerda del perfil. En el caso no estacionario, como se ha visto en el segundo apartado de este capítulo, va a dividirse la estela en incrementos de longitud  $U_\infty \Delta T$  constante, de forma que podamos aplicar la propiedad de derivada sustancial del potencial de perturbación nula a lo largo de ésta y así evitar y simplificar su resolución numérica. En la Figura 5.2 puede observarse la división de un perfil con 12 puntos en la cuerda para el caso estacionario y no estacionario.

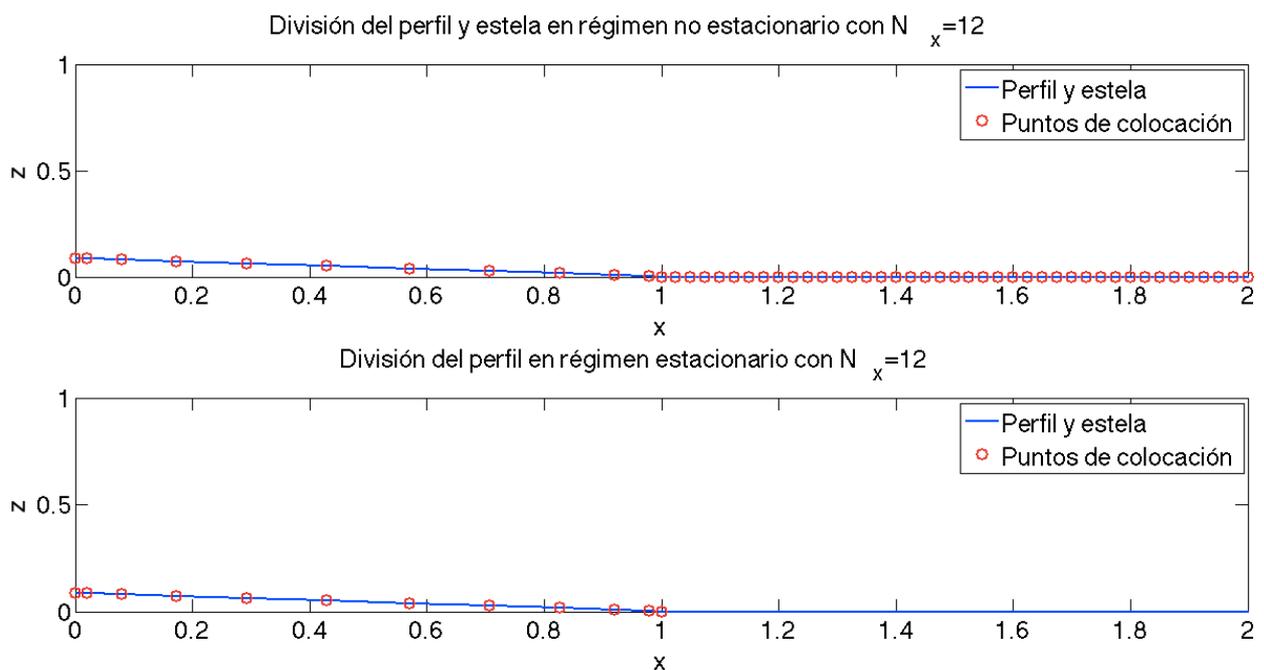


Figura 5.2: División del perfil y estela en regímenes estacionario y no estacionario

Una vez visto la división del perfil que va a realizarse, vamos a continuar con el desarrollo de las ecuaciones. Como hemos visto en el capítulo anterior, la ecuación general a resolver para el perfil bidimensional es la siguiente:

$$w'(x_0, z = 0) = U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x}(x_0, t) + \frac{\partial z_p}{\partial t}(x_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{u'(x, z = 0)}{x - x_0} dx \quad (5.27)$$

Como ya hemos mencionado, la innovación de nuestro método radica en situar los puntos de colocación en los propios torbellinos, lo que a priori significa que vamos a tener una discontinuidad en la ecuación anterior (5.27) debido a que en el punto de colocación  $x = x_0$  el integrando tenderá a infinito. Así, debe realizarse alguna manipulación en la ecuación anterior para poder evitar dicha discontinuidad e integrar sin dificultad. Si sumamos y restamos al integrando el valor de la velocidad de perturbación horizontal en el punto de colocación (que recordamos que coincidirá con un torbellino) obtenemos:

$$w'(x_0) = U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x}(x_0, t) + \frac{\partial z_p}{\partial t}(x_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{u'(x) - u'(x_0)}{x - x_0} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{u'(x_0)}{x - x_0} dx \quad (5.28)$$

Donde se ha suprimido la referencia a que todas las variables de la ecuación anterior están calculadas en el plano  $z = 0$  y donde  $I_{numérica}$  hace referencia a la primera integral que va a resolverse de manera numérica e  $I_{analítica}$  hace referencia a la segunda integral que se va a resolver analíticamente. Como se ha dicho anteriormente, dichas integrales no deben extenderse propiamente hasta infinito, sino hasta el fin de la estela no estacionaria. En el caso estacionario bastará con integrar entre cero y la cuerda dado que la velocidad de perturbación horizontal es nula en la estela.

Procedemos ahora a explicar en profundidad el cálculo de las dos integrales anteriores para los casos estacionarios y no estacionarios.

## 5.4.1 Caso estacionario

### 5.4.1.1 Integral analítica

En este subapartado vamos a deducir la expresión de la integral analítica dada su mayor facilidad de comprensión respecto a la numérica. Como podemos ver en la ecuación (5.28), el valor de la velocidad de perturbación horizontal en el punto de colocación es una constante en la integral, por lo que podemos sacarlo fuera de la integral obteniendo:

$$I_{analítica} = \frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{u'(x_0)}{x - x_0} dx = \frac{u'(x_0)}{\pi} \int_0^c \frac{1}{x - x_0} dx \quad (5.29)$$

Donde ya se ha sustituido el límite superior de la integral por la cuerda  $c$  al estar en régimen estacionario. Dicha integral tiene una discontinuidad en  $x = x_0$ , pero puede saltarse fácilmente si se divide el intervalo de integración en tres subintervalos, un primero entre el borde de salida y  $x_0 - \delta$  siendo  $\delta \ll 1$ , un segundo entre  $x_0 - \delta$  y  $x_0 + \delta$ , y un último entre  $x_0 + \delta$  y  $c$ , es decir:

$$\begin{aligned} I_{analítica} &= \frac{u'(x_0)}{\pi} \int_0^c \frac{1}{x - x_0} dx = \\ &= \frac{u'(x_0)}{\pi} \left[ \int_0^{x_0 - \delta} \frac{1}{x - x_0} dx + \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{1}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \delta}^c \frac{1}{x - x_0} dx \right] = \\ &= \frac{u'(x_0)}{\pi} \left[ \ln \left| \frac{-\delta}{-x_0} \right| + \ln \left| \frac{\delta}{-\delta} \right| + \ln \left| \frac{c - x_0}{\delta} \right| \right] = \frac{u'(x_0)}{\pi} \ln \left( \frac{c - x_0}{x_0} \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Escribiéndolo de manera matricial utilizando los resultados del apartado anterior, tenemos:

$$I_{analitica} = \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{c - x_0}{x_0} \right) L_{px0} \vec{\phi} \quad (5.31)$$

Donde  $L_{px0}$  es la fila de la matriz de derivación  $L_{px}$  correspondiente al punto de colocación  $x_0$  y  $\vec{\phi}$  es el vector de potenciales de perturbación en cada uno de los puntos de colocación.

Una vez visto cómo vamos a resolver la integral analítica, pasamos a explicar el proceso a seguir para calcular la integral numérica.

#### 5.4.1.2 Integral numérica

Procedemos ahora a explicar cómo vamos a enfocar el cálculo de la integral numérica en cada punto de colocación. Como su propio nombre indica, se va a calcular de manera numérica utilizando los métodos espectrales vistos en el apartado previo. Así, se va a evaluar el integrando en cada uno de los  $N_x$  puntos de colocación donde el integrando claramente va a valer lo siguiente:

$$Int = \frac{u'(x_{col}) - u'(x_0)}{x_{col} - x_0}, \quad \forall x_{col} \neq x_0 \quad (5.32)$$

Donde  $Int$  es el integrando de la integral numérica. En todos los puntos el integrando toma ese valor excepto en el punto de colocación  $x_{col} = x_0$ , en el que se produce una indeterminación que se resuelve de la siguiente forma:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u'(x) - u'(x_0)}{x - x_0} = \left. \frac{\partial u'(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} \quad (5.33)$$

Escribiendo el resultado de manera matricial llegamos a:

$$Int = \begin{cases} \frac{L_{pxcol} - L_{px0}}{x_{col} - x_0} \vec{\phi}, & \forall x_{col} \neq x_0 \\ L_{px20} \vec{\phi}, & x_{col} = x_0 \end{cases} \quad (5.34)$$

Siendo  $L_{pxcol}$  la fila de la matriz de derivación  $L_{px}$  correspondiente al punto de colocación y donde  $L_{px20}$  hace referencia a la fila de la matriz de derivación elevada al cuadrado correspondiente al punto de colocación donde se esté aplicando la condición de contorno. El integrando  $Int$  puede escribirse como la multiplicación de una matriz por el vector de incógnitas de potenciales de perturbación de la siguiente forma:

$$Int = \begin{bmatrix} \frac{L_{px}(1, :) - L_{px}(x_0, :)}{x_1 - x_0} \\ \frac{L_{px}(2, :) - L_{px}(x_0, :)}{x_2 - x_0} \\ \vdots \\ L_{px2}(x_0, :) \\ \vdots \\ \frac{L_{px}(N_x - 1, :) - L_{px}(x_0, :)}{x_{(N_x-1)} - x_0} \\ \frac{L_{px}(N_x, :) - L_{px}(x_0, :)}{x_{N_x} - x_0} \end{bmatrix} \vec{\phi} \quad (5.35)$$

La integral numérica puede escribirse entonces como la multiplicación del integrando anterior por la matriz de integración por métodos espectrales definidas en el punto anterior. Nótese que, como queremos tan sólo la integral hasta el borde de salida, basta con multiplicarla por la última fila de dicha matriz de integración, y para

ello debe suprimirse la primera fila del integrando que, como demostramos anteriormente, no entra en juego a la hora de realizar la integral, es decir:

$$I_{numérica} = \frac{1}{\pi} [I'_2(x_{N_x}) \quad I'_3(x_{N_x}) \quad \dots \quad I'_{N_x}(x_{N_x})] \begin{bmatrix} \frac{L_{px}(2, :) - L_{px}(x_0, :)}{x_2 - x_0} \\ \frac{L_{px}(3, :) - L_{px}(x_0, :)}{x_3 - x_0} \\ \vdots \\ L_{px2}(x_0, :) \\ \vdots \\ \frac{L_{px}(N_x - 1, :) - L_{px}(x_0, :)}{x_{(N_x-1)} - x_0} \\ \frac{L_{px}(N_x, :) - L_{px}(x_0, :)}{x_{N_x} - x_0} \end{bmatrix} \vec{\phi} \quad (5.36)$$

Ésta es la forma que utilizaremos para el cálculo de la integral numérica. Procedemos ahora a explicar la resolución del problema utilizando estos resultados.

### 5.4.1.3 Resolución

El método de resolución consiste esencialmente en repetir los resultados anteriores para cada uno de los puntos de colocación, de forma que obtengamos un sistema de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} w'(x_2) \\ w'(x_3) \\ \vdots \\ w'(x_{N_x-2}) \\ w'(x_{N_x-1}) \end{bmatrix} = Mat(1:N_x - 2, 1:N_x) \begin{bmatrix} \phi'(x_1) \\ \phi'(x_2) \\ \vdots \\ \phi'(x_{N_x-1}) \\ \phi'(x_{N_x}) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Dicho sistema, ha de completarse con la condición de Kutta-Joukowski de no rebordeo en el borde de salida, que en régimen estacionario es equivalente a decir que la velocidad de perturbación horizontal es nula o, lo que es lo mismo, que la derivada respecto a  $x$  del potencial de perturbación sea nula. Además, dado que el potencial en el borde de ataque es idénticamente nulo por condiciones de contorno, puede suprimirse su columna correspondiente de la matriz denominada  $Mat$ . Así, el sistema final queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} w'(x_2) \\ w'(x_3) \\ \vdots \\ w'(x_{N_x-2}) \\ w'(x_{N_x-1}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mat(1:N_x - 2, 2:N_x) \\ L'_2(x_{N_x}) \quad L'_2(x_{N_x}) \quad \dots \quad L'_{N_x}(x_{N_x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'(x_2) \\ \phi'(x_3) \\ \vdots \\ \phi'(x_{N_x-1}) \\ \phi'(x_{N_x}) \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Dicho sistema es el sistema a resolver para el caso de un perfil en régimen estacionario. Procedemos ahora a explicar los cambios que hay que realizar en el caso no estacionario.

## 5.4.2 Caso no estacionario

Comentaremos ahora las diferencias existentes entre la aplicación de este método de resolución al caso estacionario con el no estacionario. Así, una de las principales diferencias es que, aunque la longitud de la estela aumenta con el tiempo, se va a predefinir una longitud de estela cuya distancia es la longitud máxima que va a tener la estela, esto es,  $U_\infty T_{final}$ , siendo  $T_{final}$  el tiempo total de simulación del programa. Esto nos permite reservar en la memoria sitio para el potencial en la estela y disminuir ligeramente su tiempo de ejecución debido a que no tenemos que estar variando constantemente los límites de integración, sino que bastará con definir que, al inicio, el potencial es idénticamente nulo en la estela y actualizar dichos valores conforme se va simulando el

movimiento en el tiempo.

Siendo así, las matrices de derivación e integración utilizadas en régimen estacionario han de modificarse para contemplar el potencial en la estela. La derivación en la estela se hará por el método de diferencias finitas, mientras que para la integración se utilizará la regla de los trapecios. Dichas matrices quedan entonces de la siguiente forma:

$$L_{px} = \begin{bmatrix} L'_1(x_1) & L'_2(x_1) & \dots & L'_N(x_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L'_1(x_2) & L'_2(x_2) & \dots & L'_N(x_2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_1(x_N) & L'_2(x_N) & \dots & L'_N(x_N) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \frac{1}{\Delta x} & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} & \dots & 0 \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\Delta x} & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\Delta x} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$I' = \left[ I'_2(x_{Nx}) \quad I'_3(x_{Nx}) \quad \dots \quad I'_{Nx}(x_{Nx}) + \frac{\Delta x}{2} \quad \Delta x \quad \dots \quad \Delta x \quad \frac{\Delta x}{2} \right] \quad (5.40)$$

Donde  $\Delta x$  es la separación existente entre dos puntos de colocación de la estela y equivale a  $\Delta x = U_\infty \Delta T$ . Procedemos ahora a modificar, de manera breve, las integrales a calcular para adaptarlas al caso no estacionario.

#### 5.4.2.1 Integral analítica

En régimen no estacionario, bastará por sustituir el límite superior de la integral por la longitud a la que termina la estela y que, llamándola  $x_{estela}$ , adquiere la siguiente forma:

$$I_{analítica} = \frac{u'(x_0)}{\pi} \int_0^{x_{estela}} \frac{1}{x - x_0} dx = \frac{u'(x_0)}{\pi} \ln \left( \frac{x_{estela} - x_0}{x_0} \right) \quad (5.41)$$

Escribiéndolo de manera matricial utilizando los resultados del apartado anterior, tenemos:

$$I_{analítica} = \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{x_{estela} - x_0}{x_0} \right) L_{px0} \vec{\phi} \quad (5.42)$$

Donde  $L_{px0}$  hace referencia a la fila de la matriz  $L_{px}$  correspondiente al punto de colocación en cuestión. Pasemos ahora al cálculo de la integral numérica.

#### 5.4.2.2 Integral numérica

La expresión de la integral numérica en régimen no estacionario es exactamente la misma, tan sólo es necesario modificar la matriz derivada y el vector de pesos de integración por los definidos al inicio de este apartado, resultando la integral:

$$I_{numérica} = \frac{1}{\pi} I' \begin{bmatrix} \frac{L_{px}(2, :) - L_{px}(x_0, :)}{x_2 - x_0} \\ \frac{L_{px}(3, :) - L_{px}(x_0, :)}{x_3 - x_0} \\ \vdots \\ L_{px2}(x_0, :) \\ \vdots \\ \frac{L_{px}(N_x - 1, :) - L_{px}(x_0, :)}{x_{(N_x-1)} - x_0} \\ \frac{L_{px}(N_x, :) - L_{px}(x_0, :)}{x_{N_x} - x_0} \end{bmatrix} \vec{\phi} \quad (5.43)$$

### 5.4.2.3 Resolución

De manera similar al caso estacionario tenemos ahora un sistema con la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} w'(x_2) \\ w'(x_3) \\ \vdots \\ w'(x_{N_x-2}) \\ w'(x_{N_x-1}) \end{bmatrix} = Mat(1:N_x - 2, 1:N_{x_{estela}}) \begin{bmatrix} \phi'(x_1) \\ \phi'(x_2) \\ \vdots \\ \phi'(x_{N_{x_{estela}}-1}) \\ \phi'(x_{N_{x_{estela}}}) \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

A dicho sistema hay que añadirle la condición de Kutta-Joukowski en el borde de salida que, según el primer apartado de este capítulo, tiene la forma:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \phi'}{\partial x} = 0 \quad (5.45)$$

Que discretizando en  $t$ , adquiere la siguiente forma:

$$\frac{\phi_{bs}^t - \phi_{bs}^{t-1}}{\Delta t} + U_\infty \frac{1}{2} [L_{px}^{bs}(\vec{\phi}^t + \vec{\phi}^{t-1})] = 0 \quad (5.46)$$

Reescribiéndolo:

$$\frac{\phi_{bs}^t}{\Delta t} + \frac{U_\infty}{2} L_{px}^{bs} \vec{\phi}^t = \frac{\phi_{bs}^{t-1}}{\Delta t} - \frac{U_\infty}{2} L_{px}^{bs} \vec{\phi}^{t-1} \quad (5.47)$$

Ecuación que hay que añadir al sistema (5.44) para completarlo. Igual que en el caso estacionario, el potencial en el borde de ataque es idénticamente nulo, por lo que puede suprimirse su columna correspondiente de la matriz de dicho sistema.

Cabe destacar que, en este caso, el potencial en la estela es conocido en el instante  $t$ , ya que basta con desplazar el potencial obtenido en el instante  $t - 1$ . Así éstas no se volverán a calcular, sino que se pasarán al término independiente del sistema de ecuaciones (5.44) antes de resolverlo.

### 5.4.3 Coeficiente de sustentación

En este último apartado va a obtenerse la expresión del coeficiente de sustentación para perfiles bidimensionales, tanto en régimen estacionario como en no estacionario. Así, utilizando la definición dada previamente de coeficiente de sustentación, la propiedad de antisimetría del potencial y la ecuación de conservación de cantidad de movimiento, tenemos:

$$\begin{aligned}
 C_l &= \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c} \int_0^c (p'^- - p'^+) dx = \frac{4}{U_\infty^2 c} \int_0^c \left( \frac{\partial \phi'}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right) dx \\
 &= \frac{4}{U_\infty c} \left( \frac{1}{U_\infty} \int_0^c \frac{\partial \phi'}{\partial t} dx + \phi'_{bs} \right)
 \end{aligned}
 \tag{5.48}$$

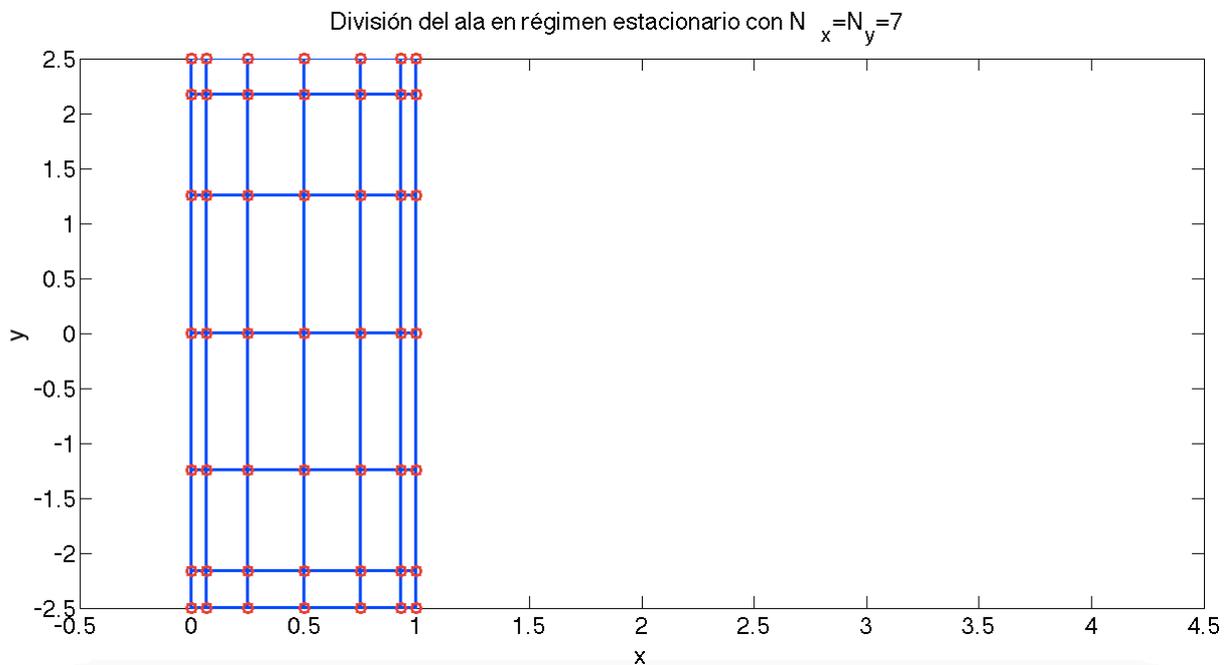
Ecuación que sirve tanto para régimen estacionario como para no estacionario, sin más que hacer la derivada del potencial de perturbación con respecto al tiempo nula en el primer caso.

## 5.5 Método de resolución numérica en tres dimensiones

En este apartado va a detallarse en profundidad el método de resolución numérica que hemos implementado para resolver el problema aerodinámico tridimensional en régimen estacionario. Al igual que en el caso bidimensional, la novedad del método radica en colocar los puntos de colocación en las propias fuentes, teniendo así que realizar algunas modificaciones de forma que podamos evitar la discontinuidad que esto provoca.

Por tanto, se va a dividir el ala en una malla de  $N_x$  puntos a lo largo del eje  $x$  y  $N_y$  puntos a lo largo del eje  $y$ . Ambas divisiones se harán siguiendo la distribución de los nodos de Chebyshev para intentar controlar en cierta forma el error máximo que obtengamos. De esta forma, tenemos  $(N_x - 2)(N_y - 2)$  incógnitas situadas en el interior del ala. Es en esos mismos puntos dónde colocaremos las fuentes para hallar el potencial obteniendo las  $(N_x - 2)(N_y - 2)$  ecuaciones correspondiente. Dicho potencial perturbado es conocido en el borde de ataque y en los bordes marginales y su valor es idénticamente cero como se ha demostrado en el primer apartado de este capítulo. Así, nos faltarían las  $N_y - 2$  ecuaciones que nos permitan calcular el potencial en el borde de salida, que se obtendrán de imponer la condición de Kutta-Joukowski en dichos puntos. Nótese que  $N_y$  ha de ser un número entero impar de forma que se pueda garantizar la simetría de la solución respecto al plano  $y = 0$ .

En la Figura 5.3 puede observarse la división del ala cuando  $N_x = 7$  y  $N_y = 7$  así como los puntos de colocación para un alargamiento  $\Lambda = 5$ .



**Figura 5.3:** División del ala en régimen estacionario

En el caso tridimensional no va a estudiarse el régimen no estacionario ya que, como se verá en los resultados, el método está muy mal condicionado dando resultados que no pueden darse por válidos. Aun así, se han

implementado dos métodos diferentes para resolver el ala en régimen estacionario, que procedemos a explicar a continuación.

Así, como dedujimos en el capítulo anterior, la ecuación general para el caso tridimensional es la siguiente:

$$w'(x_0, y_0, z = 0) = U_\infty \frac{\partial z_p}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela}} \vec{v}' \cdot \nabla \psi_0 d\sigma \quad (5.49)$$

Al igual que ocurría en el caso bidimensional, el integrando tiende a infinito al situar las fuentes justo en los puntos de colocación. Nosotros intentaremos salvar dicha discontinuidad con dos métodos diferentes. El primer método consiste en sumar y restar al integrando la aproximación de primer orden del polinomio de Taylor, por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} w'(\vec{x}_0) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}} (\vec{v}' - \vec{v}'_0 - (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_1|_{\vec{x}_0} \vec{e}_1 - (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_2|_{\vec{x}_0} \vec{e}_2) \cdot \nabla \psi_0 d\sigma \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}} \vec{v}'_0 \cdot \nabla \psi_0 d\sigma \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}} [(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_1|_{\vec{x}_0} \vec{e}_1 + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_2|_{\vec{x}_0} \vec{e}_2] \cdot \nabla \psi_0 d\sigma \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{estela}} \vec{v}' \cdot \nabla \psi_0 d\sigma = I_{num} + I_{ana1} + I_{ana2} + I_{estela} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Mientras que el segundo método consiste en sumar y restar al integrando la aproximación de segundo orden del polinomio de Taylor, por lo que se modifica ligeramente la expresión anterior de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} w'(\vec{x}_0) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}} \left( \vec{v}' - \vec{v}'_0 - (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_1|_{\vec{x}_0} \vec{e}_1 - (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_2|_{\vec{x}_0} \vec{e}_2 \right. \\ & - \left[ \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 v'_1}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} + \frac{1}{2}(y - y_0)^2 \frac{\partial^2 v'_1}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \right. \\ & \left. \left. + (x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 v'_1}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \right] \vec{e}_1 \right. \\ & - \left[ \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 v'_2}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} + \frac{1}{2}(y - y_0)^2 \frac{\partial^2 v'_2}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \right. \\ & \left. \left. + (x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 v'_2}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \right] \vec{e}_2 \right) \cdot \nabla \psi_0 d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}} \vec{v}'_0 \cdot \nabla \psi_0 d\sigma \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}} [(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_1|_{\vec{x}_0} \vec{e}_1 + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_2|_{\vec{x}_0} \vec{e}_2] \cdot \nabla \psi_0 d\sigma \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}} \left( \left[ \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 v'_1}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} + \frac{1}{2}(y - y_0)^2 \frac{\partial^2 v'_1}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \right. \right. \\ & \left. \left. + (x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 v'_1}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \right] \vec{e}_1 \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 v'_2}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} + \frac{1}{2}(y - y_0)^2 \frac{\partial^2 v'_2}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \right. \right. \\ & \left. \left. + (x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 v'_2}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \right] \vec{e}_2 \right) \cdot \nabla \psi_0 d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{estela}} \vec{v}' \cdot \nabla \psi_0 d\sigma \end{aligned} \quad (5.51)$$

La diferencia entre ambos métodos es que el primero cuenta con dos integrales calculadas analíticamente, una numérica y la de la estela, mientras que el segundo añade una integral analítica más y varía la forma en la que se calcula la integral numérica.

Dado que las integrales analíticas referentes al desarrollo de Taylor de primer orden (las dos primeras integrales analíticas) son idénticas, se empezará explicando el cálculo de ambas, posteriormente se desarrollará el cálculo de la tercera integral analítica que sólo forma parte del segundo método, seguiremos con las integrales numéricas para ambos casos y terminaremos con el cálculo de la integral en la estela que es la misma para ambos métodos.

### 5.5.1 Integral analítica referente al término de velocidad horizontal en el punto de colocación

Se ha denominado de esta forma a la integral analítica que tiene la siguiente expresión:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}} \vec{v}'_0 \cdot \nabla \psi_0 d\sigma \quad (5.52)$$

debido a que aparece en la expresión el término de velocidad horizontal en el punto de colocación ( $\vec{v}'_0$ ).

Dado que la velocidad horizontal en el punto de colocación es una constante, podemos llegar a esta igualdad matemática:

$$\vec{v}'_0 \cdot \nabla \psi_0 = \nabla \cdot (\vec{v}'_0 \psi_0) - \psi_0 \nabla \cdot \vec{v}'_0 = \nabla \cdot (\vec{v}'_0 \psi_0) \quad (5.53)$$

Por lo tanto, podemos ahora aplicar el teorema de Gauss a la integral de superficie (5.52) y calcularla en el contorno del ala:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}} \vec{v}'_0 \cdot \nabla \psi_0 d\sigma &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}} \nabla \cdot (\vec{v}'_0 \psi_0) d\sigma = -\frac{1}{2\pi} \int_{C_{ala}} (\vec{v}'_0 \cdot \vec{n}) \psi_0 ds = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{C_{ala}} (\vec{v}'_0 \cdot \vec{n}) \frac{1}{d(s)} ds \end{aligned} \quad (5.54)$$

Siendo  $C_{ala}$  el contorno del ala,  $\vec{n}$  la normal exterior a la superficie en forma en planta del ala y  $d(s)$  la distancia desde el punto de colocación hasta cada punto de cada tramo que delimita la superficie en forma en planta del ala.

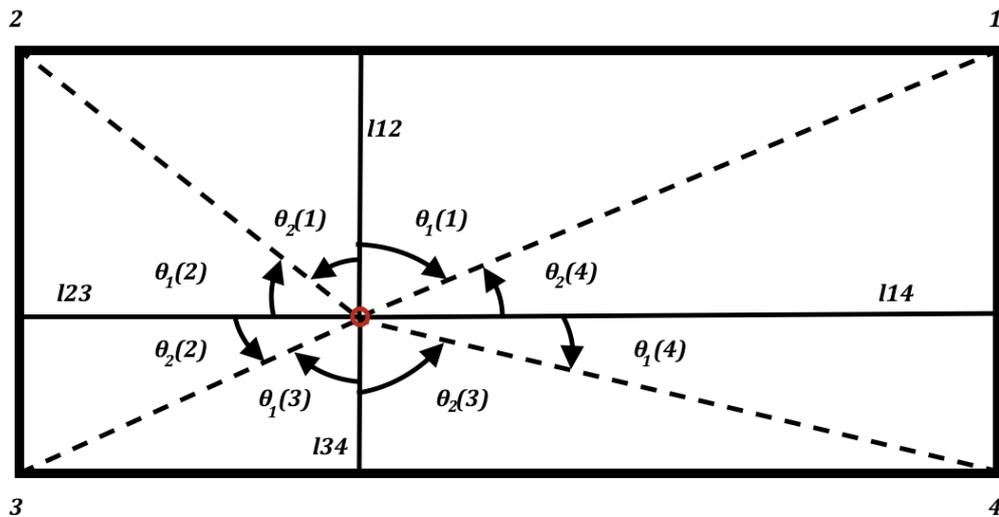
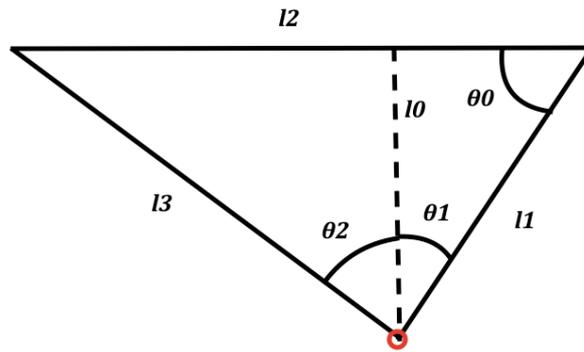


Figura 5.4: Esquema de la integral analítica en el contorno

Integrando en los cuatro tramos que delimitan la forma en planta del ala y representados en la Figura 5.4, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}} \vec{v}'_0 \cdot \nabla \psi_0 d\sigma &= \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \left[ -u'_0 \int_1^2 \frac{1}{d(s)} ds - v'_0 \int_2^3 \frac{1}{d(s)} ds + u'_0 \int_3^4 \frac{1}{d(s)} ds \right. \\
 &\quad \left. + v'_0 \int_4^1 \frac{1}{d(s)} ds \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ u'_0 \left( \int_1^2 \frac{1}{d(s)} ds - \int_3^4 \frac{1}{d(s)} ds \right) + v'_0 \left( \int_2^3 \frac{1}{d(s)} ds - \int_4^1 \frac{1}{d(s)} ds \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

La integral de la distancia desde un punto a un tramo recto puede realizarse de manera sencilla. Así, véase la Figura 5.5 en la que se representa un ejemplo de una integral de este tipo. Nótese que los ángulos se definen de manera positiva en el sentido contrario a las agujas del reloj.



**Figura 5.5:** Definición de parámetros en la integral de la distancia de un punto a una recta

Podemos sacar de manera sencilla, una vez definidos los parámetros, el coseno del ángulo  $\theta_0$  en función de las longitudes mediante el teorema del coseno:

$$l_3^2 = l_2^2 + l_1^2 - 2l_2l_1 \cos \theta_0 \Rightarrow \cos \theta_0 = \frac{l_2^2 + l_1^2 - l_3^2}{2l_2l_1} \tag{5.56}$$

Igualmente, podemos poner el ángulo  $\theta_1$  en función de  $\theta_0$  de la siguiente manera:

$$\theta_1 = \theta_0 - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \theta_1 = \sin \left( \theta_0 - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \theta_0 \tag{5.57}$$

Escribimos ahora el ángulo  $\theta_2$  en función del ángulo  $\theta_1$ :

$$\sin \theta_2 = \frac{l_2 - l_1 \sin \theta_1}{l_3} \tag{5.58}$$

Así, definiendo  $R$  de la siguiente forma:

$$R = \frac{l_2^2 + l_1^2 - l_3^2}{2l_2l_1} \tag{5.59}$$

Tenemos que ambos ángulos pueden escribirse sólo en función de parámetros geométricos:

$$\begin{cases} \sin \theta_1 = -R \\ \sin \theta_2 = \frac{l_2 - l_1 R}{l_3} \end{cases} \quad (5.60)$$

Una vez definidos los ángulos de integración en función de parámetros geométricos podemos calcular la integral sabiendo que:

$$\begin{aligned} d(s) &= \frac{l_0}{\cos \theta} \\ s = l_0 \tan \theta &\Rightarrow ds = l_0 d(\tan \theta) = l_0 \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \end{aligned} \quad (5.61)$$

Por lo que la integral de un tramo queda:

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{d(s)} ds &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta}{l_0} \frac{l_0}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \left[ \frac{\sin \theta = x}{\cos \theta d\theta = dx} \right] = \int_{\sin \theta_1}^{\sin \theta_2} \frac{1}{1-x^2} dx \\ &= \int_{\sin \theta_1}^{\sin \theta_2} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) \Big|_{\sin \theta_1}^{\sin \theta_2} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2}{1 + \sin \theta_1} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2}{1 - \sin \theta_1} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.62)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (5.55), obtenemos la solución de la integral analítica asociada a la velocidad de perturbación horizontal en el punto de colocación:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ata}} \vec{v}'_0 \cdot \nabla \psi_0 d\sigma &= \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left[ u'_0 \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(1)}{1 + \sin \theta_1(1)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(1)}{1 - \sin \theta_1(1)} \right) - \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(3)}{1 + \sin \theta_1(3)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(3)}{1 - \sin \theta_1(3)} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + v'_0 \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(2)}{1 + \sin \theta_1(2)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(2)}{1 - \sin \theta_1(2)} \right) - \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(4)}{1 + \sin \theta_1(4)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(4)}{1 - \sin \theta_1(4)} \right) \right) \right] \quad (5.63) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial \phi'}{\partial x} \Big|_{\vec{x}_0} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(1)}{1 + \sin \theta_1(1)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(1)}{1 - \sin \theta_1(1)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(3)}{1 + \sin \theta_1(3)} \right) + \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(3)}{1 - \sin \theta_1(3)} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \phi'}{\partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(2)}{1 + \sin \theta_1(2)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(2)}{1 - \sin \theta_1(2)} \right) - \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(4)}{1 + \sin \theta_1(4)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(4)}{1 - \sin \theta_1(4)} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Donde se ha escrito ya en términos del potencial de velocidades de perturbación. Cabe destacar que, aunque aquí no se explicita por sencillez y claridad, dichas derivadas del potencial se calculan, igual que en el caso bidimensional, mediante la multiplicación de una matriz por un vector de potenciales de perturbación en los puntos de colocación.

### 5.5.2 Integral analítica referente al término de primer orden

Denominamos así a la integral analítica cuyo integrando incluye el término de primer orden del polinomio de Taylor asociado a la velocidad de perturbación horizontal, esto es:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}} [(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_1|_{\vec{x}_0} \vec{e}_1 + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_2|_{\vec{x}_0} \vec{e}_2] \cdot \nabla \psi_0 d\sigma \quad (5.64)$$

El cálculo de dicha integral sobre la forma en planta del ala va a descomponerse en cuatro triángulos representados en la Figura 5.4. Así, tendremos una integral sobre el triángulo formado por los puntos 1, 2 y  $\vec{x}_0$ , otra sobre el triángulo formado por los puntos 2, 3 y  $\vec{x}_0$ , una tercera en el triángulo formado por los puntos 3, 4 y  $\vec{x}_0$ , y la última extendida al triángulo formado por los puntos 4, 1 y  $\vec{x}_0$ .

De esta forma, la expresión de la integral se simplifica notablemente y se hace uso de los ángulos ya calculados para la primera integral analítica. Procedemos ahora a explicar su cálculo en cada triángulo.

#### 5.5.2.1 Tramo 1-2

En este tramo, definiendo el ángulo positivo desde la perpendicular desde el punto  $\vec{x}_0$  hasta el tramo 1-2 en el sentido antihorario tal y como se muestra en la Figura 5.6 y trasladando el origen de coordenadas al punto de colocación, se cumple que:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_1 &= -\cos \theta \\ \vec{e}_r \cdot \vec{e}_2 &= -\sin \theta \end{aligned} \quad (5.65)$$

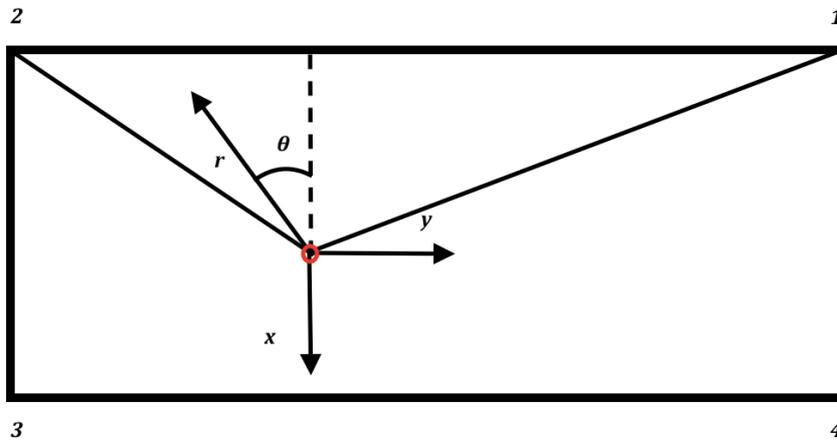


Figura 5.6: Esquema de la integral en el Tramo 1-2

Por lo que, teniendo en cuenta que el potencial  $\psi_0$  cumple:

$$\psi_0 = \frac{1}{r} \Rightarrow \nabla \psi_0 = -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad (5.66)$$

Podemos reescribir el integrando de la ecuación (5.64) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & [(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_1|_{\vec{x}_0} \vec{e}_1 + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_2|_{\vec{x}_0} \vec{e}_2] \cdot \nabla \psi_0 = \\ & = r \left[ \left( \vec{e}_r \cdot \left( \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} \vec{e}_1 + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \vec{e}_2 \right) \right) \vec{e}_1 + \vec{e}_r \cdot \left( \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \vec{e}_1 + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \vec{e}_2 \right) \vec{e}_2 \right] \cdot \left( -\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) = \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$= -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \sin^2 \theta \right)$$

Haciendo un cambio a polares y sustituyendo el integrando por lo que se acaba de deducir, tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1(1)}^{\theta_2(1)} \int_0^{\frac{l_{12}}{\cos \theta}} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \sin^2 \theta \right) r dr d\theta = \\ &= \frac{l_{12}}{2\pi} \int_{\theta_1(1)}^{\theta_2(1)} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} \cos \theta + 2 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \sin \theta + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{l_{12}}{2\pi} \left[ \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} (\sin \theta_2(1) - \sin \theta_1(1)) - 2 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} (\cos \theta_2(1) - \cos \theta_1(1)) \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(1)}{1 + \sin \theta_1(1)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(1)}{1 - \sin \theta_1(1)} \right) \right) \right. \right. \\ &\left. \left. - (\sin \theta_2(1) - \sin \theta_1(1)) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.68)$$

### 5.5.2.2 Tramo 3-4

Aplicando la misma idea al tramo opuesto, es decir, centrando el sistema de coordenadas en el punto de colocación y definiendo el sentido positivo de  $\theta$  desde la perpendicular al tramo en el sentido antihorario, vemos como ahora se cumple que:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_1 &= \cos \theta \\ \vec{e}_r \cdot \vec{e}_2 &= \sin \theta \end{aligned} \quad (5.69)$$

Por lo que el integrando queda exactamente igual que en el tramo anterior, es decir:

$$\begin{aligned} & [(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_1 \Big|_{\vec{x}_0} \vec{e}_1 + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_2 \Big|_{\vec{x}_0} \vec{e}_2] \cdot \nabla \psi_0 \\ &= \\ &= -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \sin^2 \theta \right) \end{aligned} \quad (5.70)$$

Por tanto, la integral en este tramo queda de la misma forma que la del tramo 1-2:

$$\begin{aligned} & \frac{l_{34}}{2\pi} \left[ \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} (\sin \theta_2(3) - \sin \theta_1(3)) - 2 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} (\cos \theta_2(3) - \cos \theta_1(3)) \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(3)}{1 + \sin \theta_1(3)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(3)}{1 - \sin \theta_1(3)} \right) \right) \right. \right. \\ &\left. \left. - (\sin \theta_2(3) - \sin \theta_1(3)) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.71)$$

### 5.5.2.3 Tramo 2-3

De nuevo, procedemos al cálculo de la integral referente al término de primer orden del polinomio de Taylor asociado a la velocidad de perturbación horizontal. Trasladando el origen de coordenadas al punto de colocación y definiendo como ángulo positivo  $\theta$  desde la perpendicular al tramo 2-3 en sentido contrario a las agujas del reloj, tenemos que se cumple:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r \cdot \vec{e}_1 &= \sin \theta \\ \vec{e}_r \cdot \vec{e}_2 &= -\cos \theta\end{aligned}\quad (5.72)$$

Por lo que el integrando en este triángulo queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}& [(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v_1|_{\vec{x}_0} \vec{e}_1 + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v_2|_{\vec{x}_0} \vec{e}_2] \cdot \nabla \psi_0 = \\ & = r \left[ \left( \vec{e}_r \cdot \left( \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} \vec{e}_1 + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \vec{e}_2 \right) \right) \vec{e}_1 + \vec{e}_r \cdot \left( \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \vec{e}_1 + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \vec{e}_2 \right) \vec{e}_2 \right] \cdot \left( -\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) \\ & = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \cos^2 \theta \right)\end{aligned}\quad (5.73)$$

Así, la integral en este tramo se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1(2)}^{\theta_2(2)} \int_0^{\frac{l_{23}}{\cos \theta}} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \cos^2 \theta \right) r dr d\theta = \\ & = \frac{l_{23}}{2\pi} \int_{\theta_1(2)}^{\theta_2(2)} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} - 2 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \sin \theta + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \cos \theta d\theta \\ & = \frac{l_{23}}{2\pi} \left[ \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(2)}{1 + \sin \theta_1(2)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(2)}{1 - \sin \theta_1(2)} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. - (\sin \theta_2(2) - \sin \theta_1(2)) \right) + 2 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} (\cos \theta_2(2) - \cos \theta_1(2)) \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} (\sin \theta_2(2) - \sin \theta_1(2)) \right]\end{aligned}\quad (5.74)$$

### 5.5.2.4 Tramo 4-1

Procedemos de manera análoga al apartado anterior, por lo que ahora, trasladando el origen de coordenadas al punto de colocación y definiendo el ángulo  $\theta$  desde la perpendicular a dicho tramo y en el sentido antihorario tenemos:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r \cdot \vec{e}_1 &= -\sin \theta \\ \vec{e}_r \cdot \vec{e}_2 &= \cos \theta\end{aligned}\quad (5.75)$$

Por lo que el integrando resulta idéntico al del tramo opuesto 2-3, esto es:

$$\begin{aligned}& [(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v_1|_{\vec{x}_0} \vec{e}_1 + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v_2|_{\vec{x}_0} \vec{e}_2] \cdot \nabla \psi_0 = \\ & = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \cos^2 \theta \right)\end{aligned}\quad (5.76)$$

Realizando exactamente los mismos cálculos, llegamos a que la integral es en forma idéntica al del tramo 2-3:

$$\begin{aligned} & \frac{l_{14}}{2\pi} \left[ \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \right]_{\vec{x}_0} \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(4)}{1 + \sin \theta_1(4)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(4)}{1 - \sin \theta_1(4)} \right) \right) - (\sin \theta_2(4) - \sin \theta_1(4)) \right) \\ & + 2 \left[ \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \right]_{\vec{x}_0} (\cos \theta_2(4) - \cos \theta_1(4)) + \left[ \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \right]_{\vec{x}_0} (\sin \theta_2(4) - \sin \theta_1(4)) \end{aligned} \quad (5.77)$$

### 5.5.2.5 Resultado

Una vez visto cómo se calcula y cuánto vale la integral en cada tramos, procedemos a dar la expresión completa de la integral analítica referente al término de primer orden del desarrollo de Taylor de la velocidad de perturbación horizontal:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}} [(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_1 |_{\vec{x}_0} \vec{e}_1 + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_2 |_{\vec{x}_0} \vec{e}_2] \cdot \nabla \psi_0 d\sigma \\ & = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \right]_{\vec{x}_0} \left\{ l_{12}(\sin \theta_2(1) - \sin \theta_1(1)) + l_{34}(\sin \theta_2(3) - \sin \theta_1(3)) \right. \\ & + l_{23} \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(2)}{1 + \sin \theta_1(2)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(2)}{1 - \sin \theta_1(2)} \right) \right) \right. \\ & \left. - (\sin \theta_2(2) - \sin \theta_1(2)) \right) \\ & + l_{14} \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(4)}{1 + \sin \theta_1(4)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(4)}{1 - \sin \theta_1(4)} \right) \right) \right. \\ & \left. - (\sin \theta_2(4) - \sin \theta_1(4)) \right) \left. \right\} \\ & + 2 \left[ \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \right]_{\vec{x}_0} \{ -l_{12}(\cos \theta_2(1) - \cos \theta_1(1)) - l_{34}(\cos \theta_2(3) - \cos \theta_1(3)) \} \\ & + l_{23}(\cos \theta_2(2) - \cos \theta_1(2)) + l_{14}(\cos \theta_2(4) - \cos \theta_1(4)) \} \\ & + \left[ \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \right]_{\vec{x}_0} \left\{ l_{12} \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(1)}{1 + \sin \theta_1(1)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(1)}{1 - \sin \theta_1(1)} \right) \right) \right. \right. \\ & \left. - (\sin \theta_2(1) - \sin \theta_1(1)) \right) \\ & + l_{34} \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(3)}{1 + \sin \theta_1(3)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(3)}{1 - \sin \theta_1(3)} \right) \right) \right. \\ & \left. - (\sin \theta_2(3) - \sin \theta_1(3)) \right) + l_{23}(\sin \theta_2(2) - \sin \theta_1(2)) \\ & \left. + l_{14}(\sin \theta_2(4) - \sin \theta_1(4)) \right) \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.78)$$

De nuevo, al igual que se comentó en la integral analítica anterior, cabe destacar que las derivadas del potencial con respecto a las coordenadas se calcularán multiplicando las matrices correspondientes por un vector de potenciales de perturbación en los puntos de colocación.

### 5.5.3 Integral analítica referente al término de segundo orden

Procedemos ahora con la integral analítica que incluye el término de segundo orden del desarrollo de Taylor de la velocidad de perturbación horizontal, integral que sólo es necesario calcularla en el segundo método. Dicha integral a la que hacemos referencia es la suma de las dos integrales siguientes:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{ala}} \left[ (x-x_0)^2 \frac{\partial^2 v'_1}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} + (y-y_0)^2 \frac{\partial^2 v'_1}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} + 2(x-x_0)(y-y_0) \frac{\partial^2 v'_1}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \right] \vec{e}_1 \\
 & \quad \cdot \nabla \psi_0 d\sigma \\
 & -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{ala}} \left[ (x-x_0)^2 \frac{\partial^2 v'_2}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} + (y-y_0)^2 \frac{\partial^2 v'_2}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} + 2(x-x_0)(y-y_0) \frac{\partial^2 v'_2}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \right] \vec{e}_2 \\
 & \quad \cdot \nabla \psi_0 d\sigma
 \end{aligned} \tag{5.79}$$

De nuevo, y al igual que se hizo con la integral analítica anterior, el cálculo de estas dos integrales de superficie sobre la forma en planta del ala va a descomponerse en la suma de dichas integrales en los cuatro mismos triángulos utilizados en la integral anterior, cada uno formado por uno de los tramos que delimita dicha forma en planta del ala y el punto de colocación.

Procedemos ahora al cálculo en cada uno de los diferentes triángulos. Para no ser repetitivo, no va a comentarse en cada uno de los tramos que se está trasladando el origen de coordenadas al punto de colocación, ni que se va a tomar como sentido positivo del ángulo  $\theta$  el que va desde la perpendicular al tramo correspondiente en sentido antihorario. A pesar de ello, el lector ha de ser consciente en todo momento de que se está siguiendo esta definición de ejes.

#### 5.5.3.1 Tramo 1-2

Definiéndose las coordenadas tal y como se ha dicho, tenemos que en este tramo se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_r \cdot \vec{e}_1 &= -\cos \theta \\
 \vec{e}_r \cdot \vec{e}_2 &= -\sin \theta
 \end{aligned} \tag{5.80}$$

Por lo que podemos reescribir las integrales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{ala}} r^2 \left[ \cos^2 \theta \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^3} \Big|_{\vec{x}_0} + \sin^2 \theta \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \right] \frac{\cos \theta}{r^2} d\sigma \\
 & -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{ala}} r^2 \left[ \cos^2 \theta \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} + \sin^2 \theta \frac{\partial^3 \phi'}{\partial y^3} \Big|_{\vec{x}_0} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \right] \frac{\sin \theta}{r^2} d\sigma
 \end{aligned} \tag{5.81}$$

Así, sumando ambas integrales e integrando en coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi} \int_{\theta_1(1)}^{\theta_2(1)} \int_0^{\frac{l_{12}}{\cos \theta}} \left[ \cos^3 \theta \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^3} \Big|_{\vec{x}_0} + \sin^3 \theta \frac{\partial^3 \phi'}{\partial y^3} \Big|_{\vec{x}_0} + 3 \cos \theta \sin^2 \theta \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \right. \\
 & \quad \left. + 3 \cos^2 \theta \sin \theta \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \right] r dr d\theta
 \end{aligned} \tag{5.82}$$

Realizando la integral con respecto a  $r$  llegamos a:

$$-\frac{l_{12}^2}{8\pi} \int_{\theta_1(1)}^{\theta_2(1)} \left[ \cos \theta \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^3} \right|_{\vec{x}_0} + \frac{\sin \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial y^3} \right|_{\vec{x}_0} + 3 \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \right|_{\vec{x}_0} + 3 \sin \theta \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \right|_{\vec{x}_0} \right] d\theta \quad (5.83)$$

Ecuación que es fácilmente integrable respecto a  $\theta$  y cuyo resultado es el siguiente.

$$-\frac{l_{12}^2}{8\pi} \left[ \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^3} \right|_{\vec{x}_0} (\sin \theta_2(1) - \sin \theta_1(1)) + \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial y^3} \right|_{\vec{x}_0} \left( \left( \frac{1}{\cos \theta_2(1)} - \frac{1}{\cos \theta_1(1)} \right) + (\cos \theta_2(1) - \cos \theta_1(1)) \right) + 3 \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \right|_{\vec{x}_0} \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(1)}{1 + \sin \theta_1(1)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(1)}{1 - \sin \theta_1(1)} \right) \right) - (\sin \theta_2(1) - \sin \theta_1(1)) \right) - 3 \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \right|_{\vec{x}_0} (\cos \theta_2(1) - \cos \theta_1(1)) \right] \quad (5.84)$$

### 5.5.3.2 Tramo 3-4

De igual forma que en el apartado anterior, ahora se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_1 &= \cos \theta \\ \vec{e}_r \cdot \vec{e}_2 &= \sin \theta \end{aligned} \quad (5.85)$$

Los resultados en este tramo son exactamente los mismos que en el tramo anterior, con la única diferencia de que cambian los signos de las integrales al cambiar los signos de los productos escalares de los vectores unitarios. Tenemos entonces que la integral en este triángulo vale lo siguiente:

$$\frac{l_{34}^2}{8\pi} \left[ \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^3} \right|_{\vec{x}_0} (\sin \theta_2(3) - \sin \theta_1(3)) + \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial y^3} \right|_{\vec{x}_0} \left( \left( \frac{1}{\cos \theta_2(3)} - \frac{1}{\cos \theta_1(3)} \right) + (\cos \theta_2(3) - \cos \theta_1(3)) \right) + 3 \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \right|_{\vec{x}_0} \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(3)}{1 + \sin \theta_1(3)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(3)}{1 - \sin \theta_1(3)} \right) \right) - (\sin \theta_2(3) - \sin \theta_1(3)) \right) - 3 \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \right|_{\vec{x}_0} (\cos \theta_2(3) - \cos \theta_1(3)) \right] \quad (5.86)$$

### 5.5.3.3 Tramo 2-3

En este tramo, los productos escalares de los vectores unitarios da lo siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_1 &= \sin \theta \\ \vec{e}_r \cdot \vec{e}_2 &= -\cos \theta \end{aligned} \quad (5.87)$$

Por lo que podemos escribir las dos integrales a calcular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{ala}} r^2 \left[ \sin^2 \theta \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^3} \right|_{\vec{x}_0} + \cos^2 \theta \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \right|_{\vec{x}_0} - 2 \cos \theta \sin \theta \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \right|_{\vec{x}_0} \right] \frac{\sin \theta}{r^2} d\sigma \\
& - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{ala}} r^2 \left[ \sin^2 \theta \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \right|_{\vec{x}_0} + \cos^2 \theta \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial y^3} \right|_{\vec{x}_0} - 2 \cos \theta \sin \theta \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \right|_{\vec{x}_0} \right] \frac{\cos \theta}{r^2} d\sigma
\end{aligned} \tag{5.88}$$

Sumando ambas integrales y haciendo el cambio a coordenadas polares tenemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int_{\theta_1(2)}^{\theta_2(2)} \int_0^{\frac{l_{23}}{\cos \theta}} \left[ \sin^3 \theta \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^3} \right|_{\vec{x}_0} - \cos^3 \theta \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial y^3} \right|_{\vec{x}_0} + 3 \cos^2 \theta \sin \theta \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \right|_{\vec{x}_0} \right. \\
& \left. - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \right|_{\vec{x}_0} \right] r dr d\theta
\end{aligned} \tag{5.89}$$

Integrando con respecto a  $r$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{l_{23}^2}{8\pi} \int_{\theta_1(2)}^{\theta_2(2)} \left[ \frac{\sin \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^3} \right|_{\vec{x}_0} - \cos \theta \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial y^3} \right|_{\vec{x}_0} + 3 \sin \theta \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \right|_{\vec{x}_0} \right. \\
& \left. - 3 \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \right|_{\vec{x}_0} \right] d\theta
\end{aligned} \tag{5.90}$$

Finalmente, llegamos a la solución realizando la integral con respecto a  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{l_{23}^2}{8\pi} \left[ \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^3} \right|_{\vec{x}_0} \left( \left( \frac{1}{\cos \theta_2(2)} - \frac{1}{\cos \theta_1(2)} \right) + (\cos \theta_2(2) - \cos \theta_1(2)) \right) \right. \\
& \quad - \left. \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial y^3} \right|_{\vec{x}_0} (\sin \theta_2(2) - \sin \theta_1(2)) - 3 \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \right|_{\vec{x}_0} (\cos \theta_2(2) - \cos \theta_1(2)) \right. \\
& \quad - 3 \left. \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \right|_{\vec{x}_0} \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(2)}{1 + \sin \theta_1(2)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(2)}{1 - \sin \theta_1(2)} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. \left. - (\sin \theta_2(2) - \sin \theta_1(2)) \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.91}$$

#### 5.5.3.4 Tramo 4-1

Por último, en este apartado se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r \cdot \vec{e}_1 &= -\sin \theta \\
\vec{e}_r \cdot \vec{e}_2 &= \cos \theta
\end{aligned} \tag{5.92}$$

Los resultados, al igual que ocurría con los dos primeros tramos, son idénticos, a excepción de que cambian los signos al cambiar los signos de los productos escalares de los vectores unitarios tal y como se ve en la ecuación (5.92). Por tanto, ponemos directamente los resultados ya que el desarrollo matemático es sencillamente idéntico.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{l_{14}^2}{8\pi} \left[ \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^3} \right]_{\vec{x}_0} \left( \left( \frac{1}{\cos \theta_2(4)} - \frac{1}{\cos \theta_1(4)} \right) + (\cos \theta_2(4) - \cos \theta_1(4)) \right) \\
 & \quad - \frac{\partial^3 \phi'}{\partial y^3} \Big|_{\vec{x}_0} (\sin \theta_2(4) - \sin \theta_1(4)) - 3 \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} (\cos \theta_2(4) - \cos \theta_1(4)) \\
 & \quad - 3 \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(4)}{1 + \sin \theta_1(4)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(4)}{1 - \sin \theta_1(4)} \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. - (\sin \theta_2(4) - \sin \theta_1(4)) \right) \Big] \tag{5.93}
 \end{aligned}$$

### 5.5.3.5 Resultado

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^3} \right\} \Big|_{\vec{x}_0} \left[ -l_{12}^2 (\sin \theta_2(1) - \sin \theta_1(1)) + l_{34}^2 (\sin \theta_2(3) - \sin \theta_1(3)) \right. \\
 & \quad + l_{23}^2 \left( \left( \frac{1}{\cos \theta_2(2)} - \frac{1}{\cos \theta_1(2)} \right) + (\cos \theta_2(2) - \cos \theta_1(2)) \right) \\
 & \quad \left. - l_{14}^2 \left( \left( \frac{1}{\cos \theta_2(4)} - \frac{1}{\cos \theta_1(4)} \right) + (\cos \theta_2(4) - \cos \theta_1(4)) \right) \right] \\
 & \quad + \frac{\partial^3 \phi'}{\partial y^3} \Big|_{\vec{x}_0} \left[ -l_{12}^2 \left( \left( \frac{1}{\cos \theta_2(1)} - \frac{1}{\cos \theta_1(1)} \right) + (\cos \theta_2(1) - \cos \theta_1(1)) \right) \right. \\
 & \quad + l_{34}^2 \left( \left( \frac{1}{\cos \theta_2(3)} - \frac{1}{\cos \theta_1(3)} \right) + (\cos \theta_2(3) - \cos \theta_1(3)) \right) \\
 & \quad \left. - l_{23}^2 (\sin \theta_2(2) - \sin \theta_1(2)) + l_{14}^2 (\sin \theta_2(4) - \sin \theta_1(4)) \right] \\
 & \quad + 3 \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \left[ -l_{12}^2 \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(1)}{1 + \sin \theta_1(1)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(1)}{1 - \sin \theta_1(1)} \right) \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\sin \theta_2(1) - \sin \theta_1(1)) \right) \right. \tag{5.94} \\
 & \quad + l_{34}^2 \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(3)}{1 + \sin \theta_1(3)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(3)}{1 - \sin \theta_1(3)} \right) \right) - (\sin \theta_2(3) - \sin \theta_1(3)) \right) \\
 & \quad \left. - l_{23}^2 (\cos \theta_2(2) - \cos \theta_1(2)) + l_{14}^2 (\cos \theta_2(4) - \cos \theta_1(4)) \right] \\
 & \quad + 3 \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \left[ l_{12}^2 (\cos \theta_2(1) - \cos \theta_1(1)) - l_{34}^2 (\cos \theta_2(3) - \cos \theta_1(3)) \right. \\
 & \quad - l_{23}^2 \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(2)}{1 + \sin \theta_1(2)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(2)}{1 - \sin \theta_1(2)} \right) \right) - (\sin \theta_2(2) - \sin \theta_1(2)) \right) \\
 & \quad + l_{14}^2 \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_2(4)}{1 + \sin \theta_1(4)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \sin \theta_2(4)}{1 - \sin \theta_1(4)} \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\sin \theta_2(4) - \sin \theta_1(4)) \right) \right] \Big\}
 \end{aligned}$$

Una vez visto el desarrollo de cada una de las integrales analíticas referentes al término de segundo orden del desarrollo en serie de Taylor de la velocidad de perturbación horizontal en cada triángulo, sobre estas líneas situamos el resultado de la suma de todas ellas.

Destacamos, de nuevo, que aunque no se explicita por sencillez, las derivadas en los puntos de colocación serán calculadas mediante la multiplicación de las matrices de derivación oportunas en función de qué derivada queremos obtener.

### 5.5.4 Integral numérica

Tras haber deducido las expresiones para las tres integrales analíticas (recordemos que la tercera sólo es necesaria en el denominado método 2 mientras que las dos primeras son necesarias en ambos métodos), procedemos ahora al cálculo de la integral numérica para ambos métodos.

Recordemos que, para el método 1, la integral numérica tenía la siguiente expresión:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}} (\vec{v}' - \vec{v}'_0 - (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_1|_{\vec{x}_0} \vec{e}_1 - (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla v'_2|_{\vec{x}_0} \vec{e}_2) \cdot \nabla \psi_0 d\sigma \quad (5.95)$$

Al igual que para el caso bidimensional, la forma de proceder en la integral numérica consistirá en la creación de una matriz que, multiplicada por el vector de potenciales de perturbación en los puntos de colocación, resulte en un vector cuyas componentes sean idénticas al integrando en cada punto de colocación, excepto para el punto  $\vec{x}_0$ , que tendremos que resolver un límite. Así para cualquier punto de colocación  $\vec{x} \neq \vec{x}_0$ , el integrando va a tomar la siguiente forma en el método 1:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \phi'}{\partial x} - \frac{\partial \phi'}{\partial x} \Big|_{\vec{x}_0} - (x - x_0) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} - (y - y_0) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \right) \frac{x - x_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & + \left( \frac{\partial \phi'}{\partial y} - \frac{\partial \phi'}{\partial y} \Big|_{\vec{x}_0} - (x - x_0) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} - (y - y_0) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \right) \frac{y - y_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (5.96)$$

Sin embargo, para el punto de colocación  $\vec{x} = \vec{x}_0$ , hay que resolver el siguiente límite:

$$\begin{aligned} & \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left[ \left( \frac{\partial \phi'}{\partial x} - \frac{\partial \phi'}{\partial x} \Big|_{\vec{x}_0} - (x - x_0) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} - (y - y_0) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \right) \frac{x - x_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial \phi'}{\partial y} - \frac{\partial \phi'}{\partial y} \Big|_{\vec{x}_0} - (x - x_0) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} - (y - y_0) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \right) \frac{y - y_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (5.97)$$

Aproximando los paréntesis por el término de segundo orden de Taylor:

$$\begin{aligned} & \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left( \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^3} \Big|_{\vec{x}_0} + \frac{1}{2} (y - y_0)^2 \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \right. \\ & \quad \left. + (x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \right) \frac{x - x_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & \quad + \left( \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} + \frac{1}{2} (y - y_0)^2 \frac{\partial^3 \phi'}{\partial y^3} \Big|_{\vec{x}_0} \right. \\ & \quad \left. + (x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \right) \frac{y - y_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (5.98)$$

Dado que las integrales de superficie sobre la forma en planta del ala las vamos a hacer primero en  $x$  con  $y$  constante y luego en  $y$ , vamos a acercarnos al punto  $\vec{x} = \vec{x}_0$  por una recta  $y = y_0$ , por lo que la ecuación (5.98) resulta en:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left( \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^3} \Big|_{\vec{x}_0} \right) \frac{x - x_0}{((x - x_0)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^3} \Big|_{\vec{x}_0} \quad (5.99)$$

Puede verse cómo dicho límite varía en función de por dónde nos acerquemos. Sin embargo, el resultado debe ser el mismo independientemente de si se realiza la integral primero en  $x$  y luego en  $y$ , o primero en  $y$  y luego en  $x$ . Así, cuanto más fina es la malla, menos peso toma en la integral el valor del integrando justo en el punto de colocación, por lo que su valor no es a priori relevante ya que, dicha discontinuidad debe salvarse mediante un aumento del refinado de la malla y, por tanto, del número de puntos de colocación.

Si resolvemos el problema tridimensional usando el segundo método, el concepto es totalmente análogo, con la salvedad de que ahora, el integrando en cada punto de colocación  $\vec{x} \neq \vec{x}_0$  va a valer lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \phi'}{\partial x} - \frac{\partial \phi'}{\partial x} \Big|_{\vec{x}_0} - (x - x_0) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}_0} - (y - y_0) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} - \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^3} \Big|_{\vec{x}_0} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (y - y_0)^2 \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} - (x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \right) \frac{x - x_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & + \left( \frac{\partial \phi'}{\partial y} - \frac{\partial \phi'}{\partial y} \Big|_{\vec{x}_0} - (x - x_0) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} - (y - y_0) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} - \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{\vec{x}_0} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (y - y_0)^2 \frac{\partial^3 \phi'}{\partial y^3} \Big|_{\vec{x}_0} - (x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x \partial y^2} \Big|_{\vec{x}_0} \right) \frac{y - y_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (5.100)$$

Sin embargo, en el límite cuando  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$ , dicho integrando va a ser idénticamente nulo, ya que, independientemente de por donde nos acerquemos, al tender ambos paréntesis al término de orden tres del polinomio de Taylor, el numerador va a ser un grado mayor que el denominador. Esto hace que el límite sea idénticamente nulo.

Por último, es preciso destacar que la integral se resolverá de la misma forma que en dos dimensiones, esto es, multiplicando la matriz resultante del integrando en función del método por un vector de pesos para integrar en una dirección, y posteriormente por otro vector de pesos para integrar en la otra dirección.

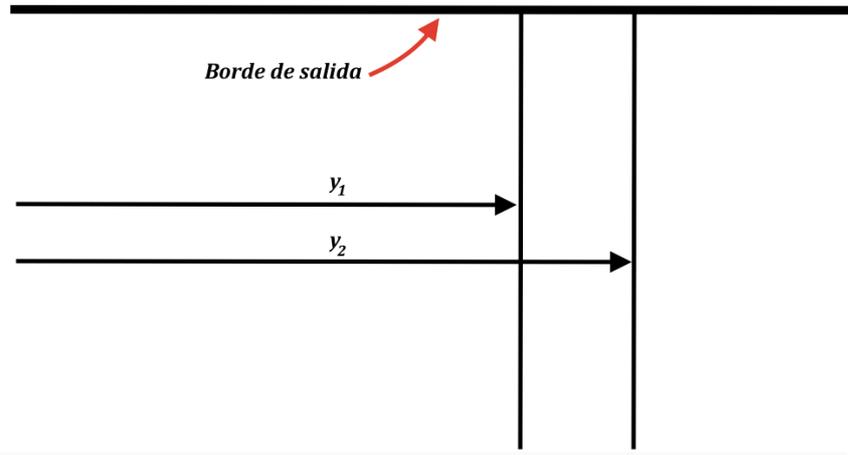
### 5.5.5 Integral en la estela

En este subapartado del método de resolución numérica tridimensional va a resolverse el cálculo de la última integral restante, esta es, la correspondiente a las velocidades de perturbación transversales en la estela. Recordemos que la integral a calcular es la siguiente:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{estela}} \vec{v}' \cdot \nabla \psi_0 d\sigma \quad (5.101)$$

Dado que las velocidades longitudinales en la estela son idénticamente nulas en el caso estacionario debido a la igualdad de presiones tanto por el extradós como por el intradós (que implicaría que ambas fuesen iguales) y la condición de antisimetría (que implicaría que ambas fuesen iguales en módulo y de sentidos distintos), la ecuación (5.101) también puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_c^\infty v'_2 \frac{y - y_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{3/2}} dx dy \quad (5.102)$$



**Figura 5.7:** Ilustración de cómo se integra la estela

Dicha integral puede dividirse en la suma de  $N_y - 1$  integrales, una por cada incremento de estela en la que ésta se divide. Así, siendo  $y_1$  la coordenada  $y$  a la que empieza un incremento de estela, y siendo  $y_2$  la coordenada  $y$  a la que termina dicho incremento y empieza el siguiente, tal y como se refleja en la Figura 5.7, la integral en dicho incremento de estela puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \int_c^\infty \left[ v_1 + \frac{v_2 - v_1}{\Delta y} (y - y_1) \right] \frac{y - y_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{3/2}} dx dy \quad (5.103)$$

Donde se ha supuesto que las velocidades transversales evolucionan linealmente desde un valor  $v_1$  en la coordenada  $y_1$  hasta un valor  $v_2$  en la coordenada  $y_2$ , y donde  $\Delta y = y_2 - y_1$ . Dado que, como se demuestra en [1], se cumple el resultado:

$$\int_0^\infty \frac{a}{(a^2 + s^2)^{3/2}} ds = \frac{1}{a} \quad (5.104)$$

Y, aproximando las integrales de la siguiente forma:

$$\int_c^\infty \frac{\partial \psi_0}{\partial y} ds \simeq \int_0^\infty \frac{\partial \psi_0}{\partial y} ds \quad (5.105)$$

Tenemos que la integral en un incremento de estela es:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^\infty \left[ v_1 + \frac{v_2 - v_1}{\Delta y} (y - y_1) \right] \frac{y - y_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{3/2}} dx dy = \\ & = \frac{v_1}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y - y_0} dy + \frac{1}{2\pi} \frac{v_2 - v_1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} \frac{(y - y_0) - (y_1 - y_0)}{y - y_0} dy = \\ & = \frac{v_1}{2\pi} \ln \left( \frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} \right) + \frac{1}{2\pi} \frac{v_2 - v_1}{\Delta y} \left[ \Delta y - (y_1 - y_0) \ln \left( \frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} \right) \right] = \\ & = \frac{v_1}{2\pi} \left[ -1 + \ln \left( \frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} \right) + \frac{y_1 - y_0}{\Delta y} \ln \left( \frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} \right) \right] \\ & + \frac{v_2}{2\pi} \left[ 1 - \frac{y_1 - y_0}{\Delta y} \ln \left( \frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.106)$$

Dicha expresión (5.106) sólo es válida si  $y_1, y_2 \neq y_0$ . Para los dos incrementos de estela en los que sí se cumple dicha condición, debe dividirse la suma de ambas integrales en tres:



movimiento, tenemos:

$$\begin{aligned}
 C_L &= \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 S} \int_{\Sigma_{ala}} (p'^- - p'^+) d\sigma = \frac{4}{U_\infty S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^c \left( \frac{\partial \phi'}{\partial x} + \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \phi'}{\partial t} \right) dx dy = \\
 &= \frac{4}{U_\infty S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \phi'_{bs} + \frac{1}{U_\infty} \int_0^c \frac{\partial \phi'}{\partial t} dx \right) dy
 \end{aligned} \tag{5.109}$$

Con esto damos por concluido el capítulo referente al método de resolución numérica y procedemos a obtener resultados con el mismo, resultados que se compararán con los existentes en la literatura en caso de que el método funcione o cuyo mal funcionamiento será explicado en caso de que no.

# 6 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

---

En este capítulo vamos a proceder a la presentación de los resultados obtenidos con los métodos de resolución numérica explicados en el capítulo anterior. Se deja para un capítulo posterior el estudio sobre los errores que comete nuestro método y sobre su mal condicionamiento, hecho que se demostrará posteriormente. Los resultados que se obtengan se compararán con la literatura con el fin de darlos por válidos o no según el caso.

Organizaremos este capítulo en dos apartados principales: caso bidimensional de un perfil y caso tridimensional de un ala. Además, dentro del primero se distinguirá entre caso estacionario y no estacionario, y dentro del segundo entre método 1 o método 2. Dentro de cada subapartado se desarrollarán diferentes resultados tanto de la forma del potencial como del coeficiente de sustentación y se compararán con resultados reportados por la literatura y/o analíticos. Para finalizar el capítulo, se incluirá un último apartado para comprobar la fiabilidad de los métodos espectrales utilizados y poder así excluirlos como posible causa del mal condicionamiento del problema aerodinámico.

## 6.1 Problema aerodinámico bidimensional

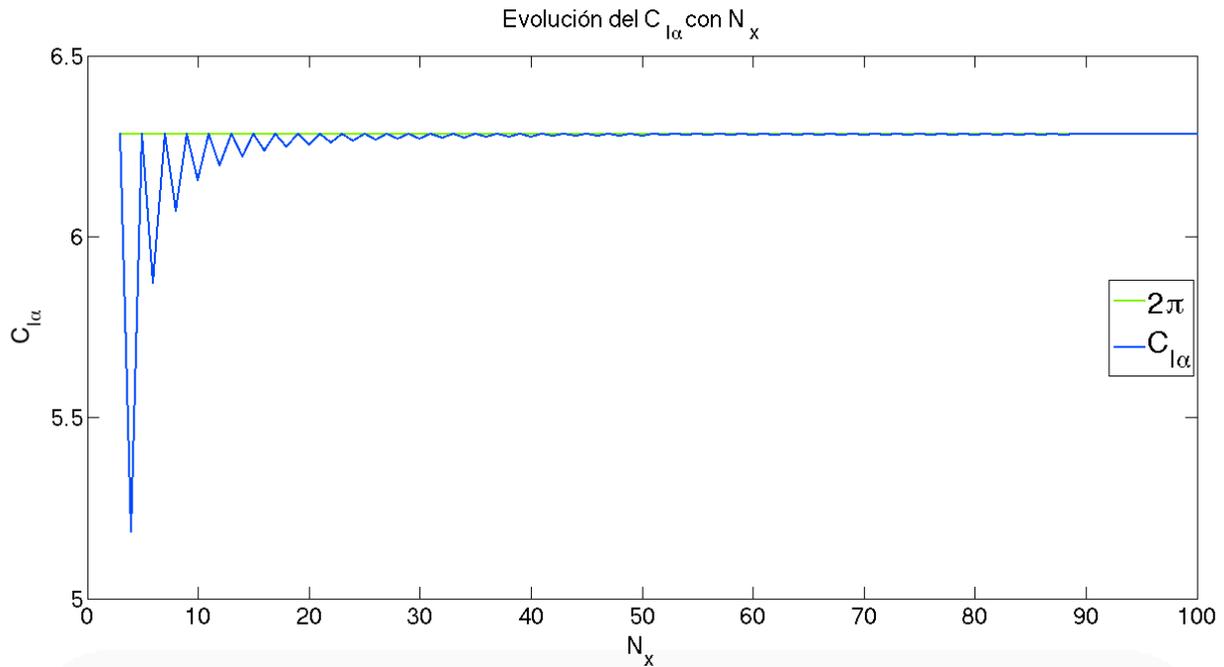
En este apartado va a estudiarse los resultados obtenidos para un perfil sin curvatura, es decir, una placa plana, que se encuentra a un ángulo de ataque  $\alpha$  con la corriente incidente  $U_\infty$ . Estudiaremos así tanto el régimen estacionario como el no estacionario, estando interesados no sólo en los resultados del coeficiente de sustentación que dicho método proporcione, sino también en la forma del potencial sobre el perfil y, en el caso no estacionario, sobre la estela. Empecemos entonces con el régimen estacionario.

### 6.1.1 Régimen estacionario

Como bien es conocido, y se demuestra en [1], la pendiente de la curva de sustentación para una placa plana es idénticamente igual a  $C_{l_\alpha} = 2\pi \approx 6,2832$ . Así, dicho valor es independiente del ángulo de ataque y es fácilmente demostrable haciendo uso de la teoría potencial linealizada. En nuestro caso, para  $N_x = 21$  tenemos que:

$$C_{l_\alpha} = 6,283185307179609 \quad (6.1)$$

Valor que presenta una precisión de doce cifras decimales. A continuación se muestra en la Figura 6.1 la evolución del  $C_{l_\alpha}$  con el número de puntos de colocación  $N_x$



**Figura 6.1:** Evolución del  $C_{l\alpha}$  con  $N_x$

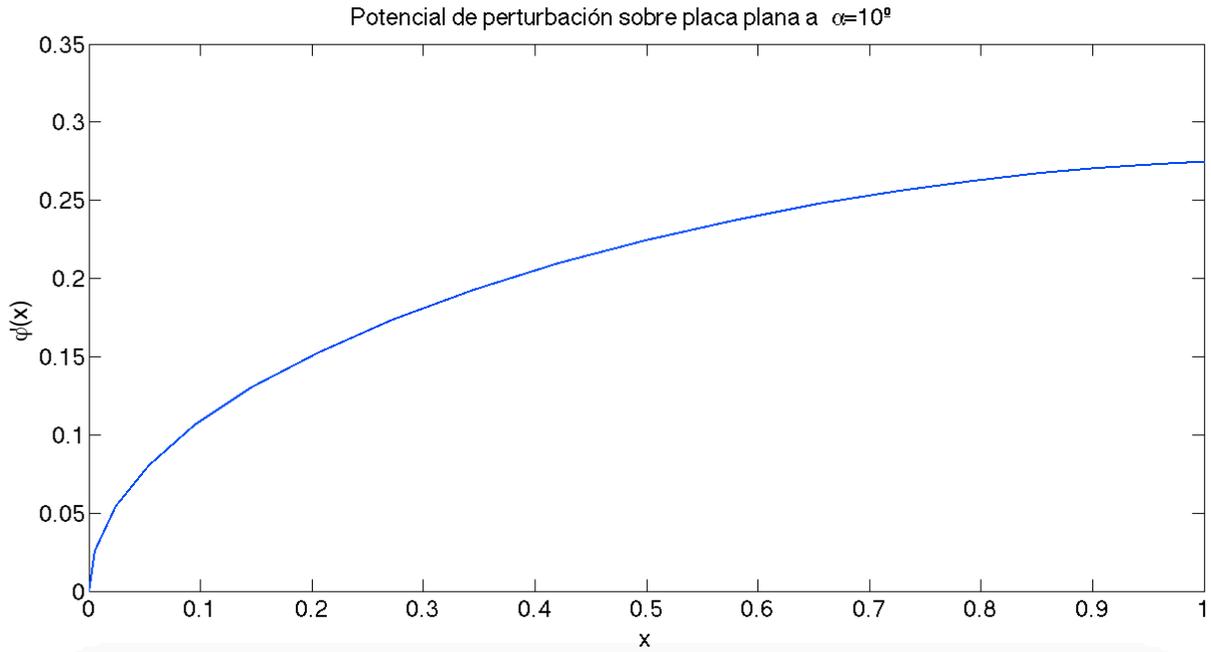
Como puede observarse, si elegimos un  $N_x$  impar, el resultado que obtenemos de la pendiente de la curva de sustentación es prácticamente exacta independientemente del número de puntos que se tomen. De manera opuesta, al elegir un  $N_x$  par, los resultados son bastante más inexactos y su precisión sí aumenta de forma considerable al aumentar el número de puntos de colocación, siendo una buena estimación a partir de los 30 puntos. Esto es debido principalmente a la forma de calcular la derivada en el borde de salida mediante el método espectral. Si el número es par, la condición de Kutta-Joukowski que implica que la derivada del potencial de perturbación en el borde de salida sea nula equivale a imponer que el valor del potencial en el borde de salida sea exactamente igual al del punto de colocación anterior. Esto implica que, especialmente cuando existen pocos puntos de colocación, el potencial es prácticamente constante en un elevado porcentaje de la cuerda, lo que aproxima de manera más imprecisa el potencial en el borde de salida y, consecuentemente, la pendiente de la curva de sustentación.

Consecuentemente, para los cálculos que se han realizado en esta sección se ha considerado un número de puntos  $N_x = 21$  ya que, no sólo aproxima bien la pendiente de la curva de sustentación, sino que también aproxima de manera precisa el potencial a lo largo de la cuerda, como veremos a continuación.

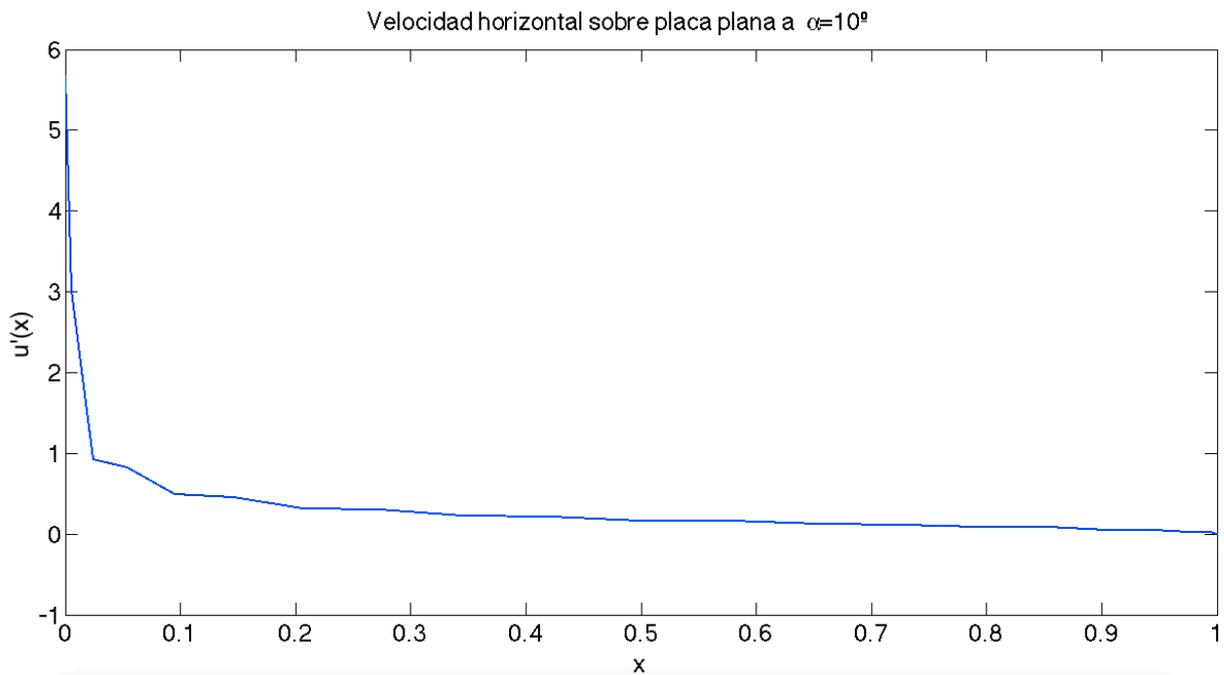
Pasamos ahora a representar en la Figura 6.2 la forma del potencial a lo largo de la cuerda para una placa plana a ángulo de ataque  $\alpha = 10^\circ$ .

Observando la Figura 6.2, se comprueba como el potencial sobre una placa plana tiende localmente a evolucionar según  $x^{1/2}$  en el borde de ataque, tal y como se demuestra en [1], y aumenta a lo largo de la cuerda hasta terminar con pendiente nula (condición de Kutta-Joukowski).

Representamos ahora, en la Figura 6.3, la evolución de la velocidad de perturbación a lo largo de la cuerda para esta misma placa plana. Como era de esperar, la velocidad horizontal tiende a infinito en el borde de ataque ya que éste es un punto de remanso y las velocidades de perturbación son del orden de la velocidad de la propia corriente incidente, por lo que deja de ser válida la teoría linealizada. Dicha velocidad horizontal disminuye conforme nos acercamos al borde de salida y se anula en él, como también era de esperar según la condición de Kutta-Joukowski. Puede verse, que al haberse calculado las velocidades horizontales como la derivada de nuestras incógnitas (los potenciales de perturbación en cada punto de colocación) su precisión es un orden menor que la de éste.



**Figura 6.2:** Evolución del potencial sobre placa plana infinita en régimen estacionario



**Figura 6.3:** Evolución de la velocidad de perturbación horizontal sobre placa plana infinita en régimen estacionario

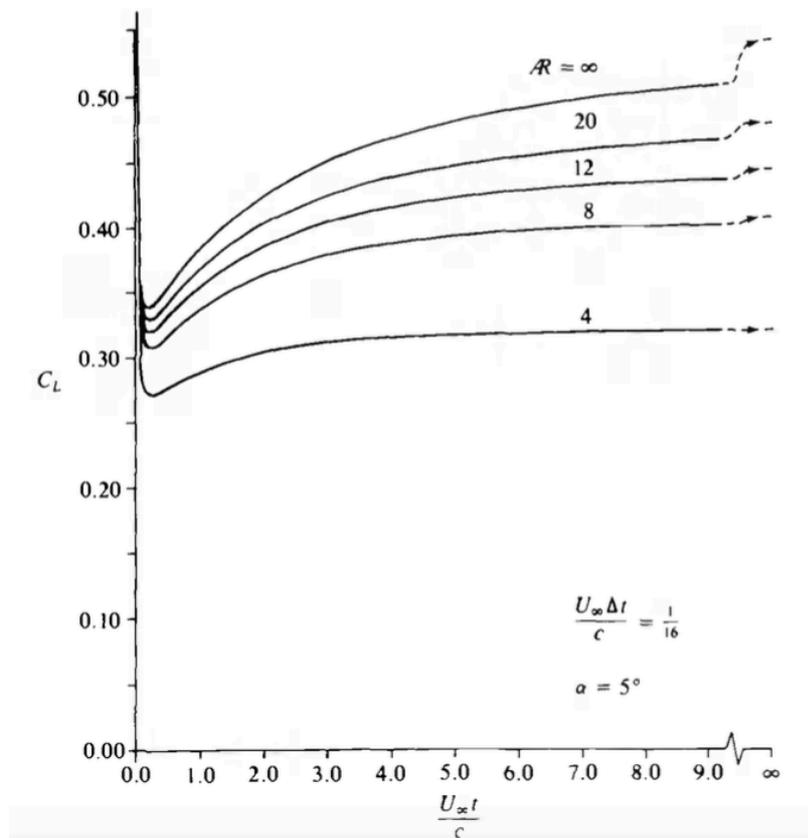
Por tanto, podemos dar por buenos los resultados obtenidos para el problema aerodinámico bidimensional en régimen estacionario y procedemos a mostrar los resultados obtenidos para el régimen no estacionario.

## 6.1.2 Régimen no estacionario

En régimen no estacionario, existen multitud de casos dignos de estudio y mostrar los resultados para todos ellos implicaría alargar demasiado este Trabajo. Por ello vamos a comentar aquí los resultados para dos casos concretos que consideramos más relevantes: una placa plana que sufre una aceleración repentina desde su estado de reposo hasta una velocidad constante  $U_\infty$  y una placa plana oscilante que ve una corriente incidente de velocidad  $U_\infty$ .

### 6.1.2.1 Aceleración repentina de placa plana infinita.

Como se ha comentado, va a estudiarse aquí los resultados obtenidos en el caso de que una placa plana sufra una aceleración repentina desde un estado de reposo hasta una velocidad  $U_\infty$  formando un ángulo de ataque  $\alpha = 5^\circ$  con la cuerda. Así podemos ver en la Figura 6.4 los resultados presentes en la literatura, más específicamente en [3], para este caso:

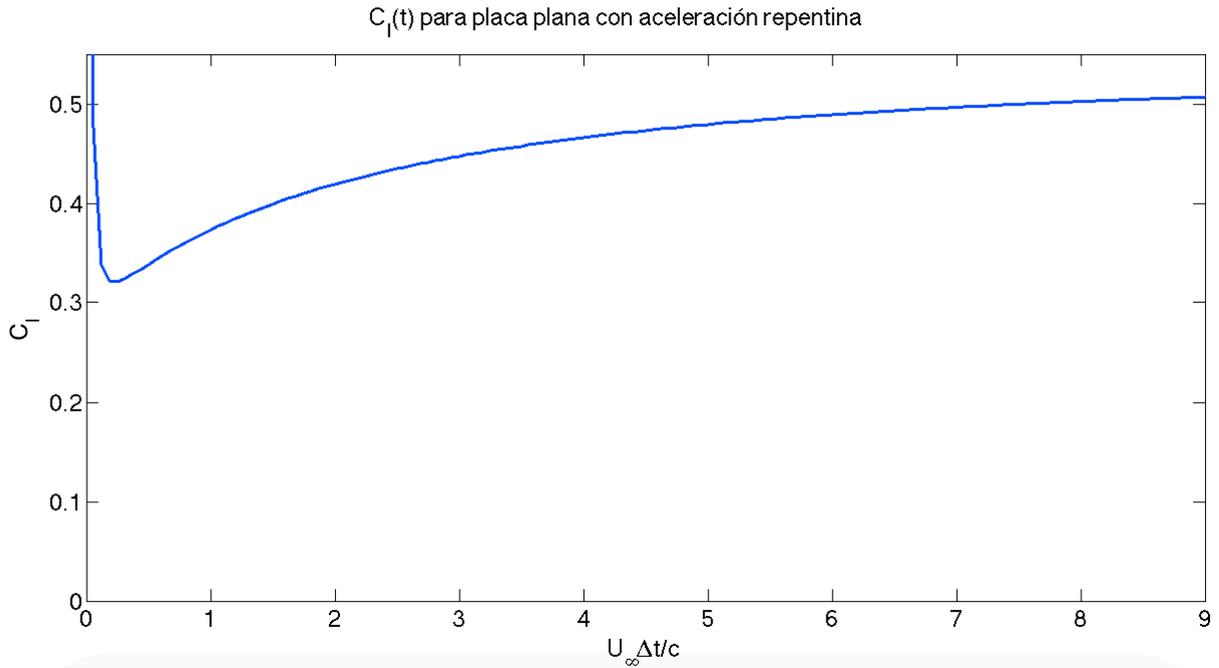


**Figura 6.4:** Evolución del coeficiente de sustentación con el tiempo para el caso de una placa plana infinita que sufre una aceleración repentina desde el reposo hasta una velocidad  $U_\infty$  según la literatura [2]

Como podemos ver, la solución que aplica en este caso es la de  $AR = \infty$ , ya que estamos trabajando en el caso bidimensional. Se observa como dicho coeficiente de sustentación parte del infinito, alcanza un mínimo en el tiempo, y aumenta hasta que, para un tiempo suficientemente grande, alcanza el valor del coeficiente de sustentación del régimen estacionario.

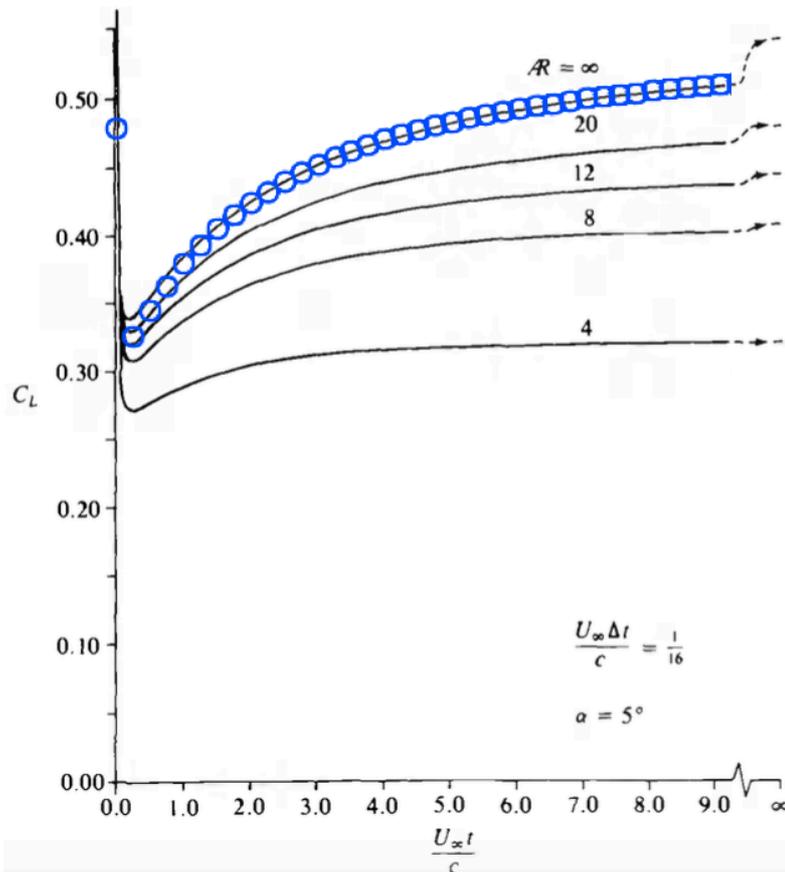
Los resultados obtenidos mediante nuestro método pueden observarse en la Figura 6.5. Cabe destacar que, para garantizar la máxima semejanza con los resultados de la literatura, se ha elegido el mismo paso de tiempo entre una iteración y otra, esto es:

$$\frac{U_\infty \Delta t}{c} = \frac{1}{16} \quad (6.2)$$



**Figura 6.5:** Evolución del coeficiente de sustentación con el tiempo para el caso de una placa plana infinita que sufre una aceleración repentina desde el reposo hasta una velocidad  $U_\infty$  según nuestro método

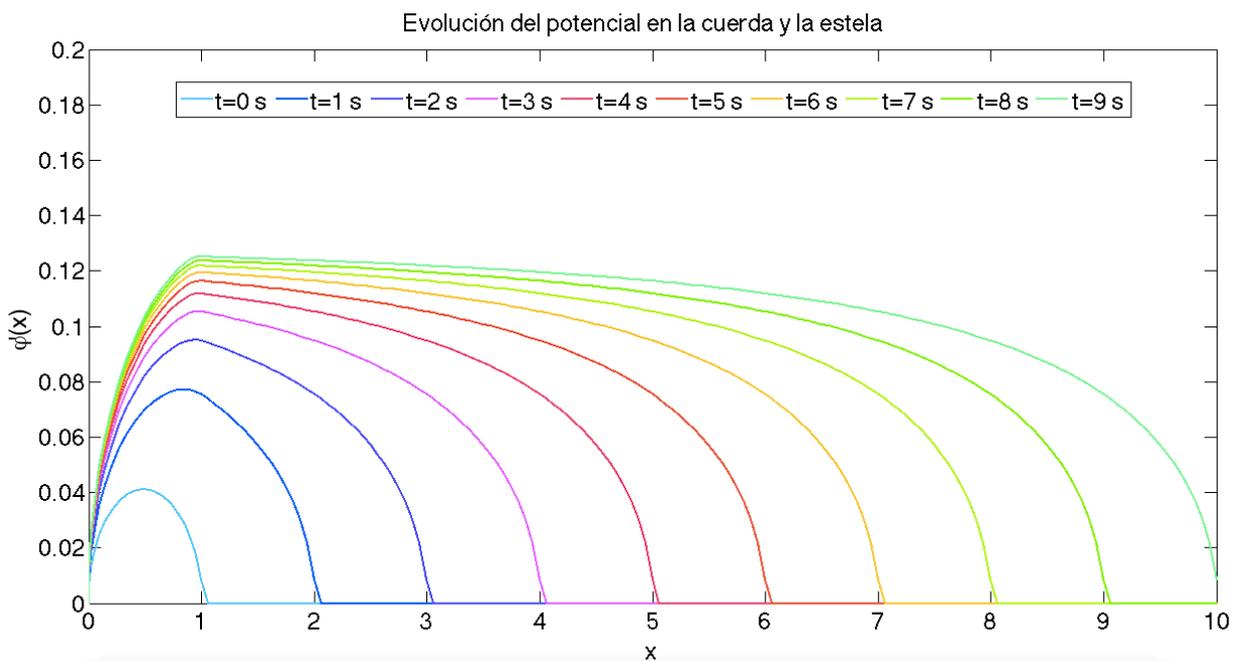
Como puede observarse, la solución es, a simple vista, prácticamente idéntica a los resultados reportados por la literatura. Con el fin de poder comparar mejor unos con otros, en la Figura 6.6 se representan ambos resultados superpuestos, en los que se ha representado con círculos azules los resultados obtenidos con nuestro método.



**Figura 6.6:** Comparación de los resultados del método numérico y los reportados por la literatura

Como puede observarse, los resultados obtenidos por nuestro método son prácticamente idénticos a los reportados por la literatura en [2]. La mayor diferencia tiene lugar en el mínimo que alcanza el coeficiente de sustentación con el tiempo, mínimo que según la literatura tiene un valor algo menor de 0,35, mientras que nuestro método disminuye ese mínimo a aproximadamente 0,32. Aunque la diferencia es mínima, se ha comprobado que ésta no depende con el número de puntos que situemos en la placa. Siendo así, dicha diferencia puede deberse a cómo se ha calculado las derivadas temporales del potencial en el borde de salida en pos de calcular el coeficiente de sustentación, debiendo disminuir el salto temporal para mejorar la solución.

Queda, por último, representar la evolución temporal del potencial tanto de la placa plana como de la estela en este caso. Dicha solución no ha podido ser comparada con la literatura al no encontrarse éstos resultados. Dicha evolución puede observarse en la Figura 6.7.



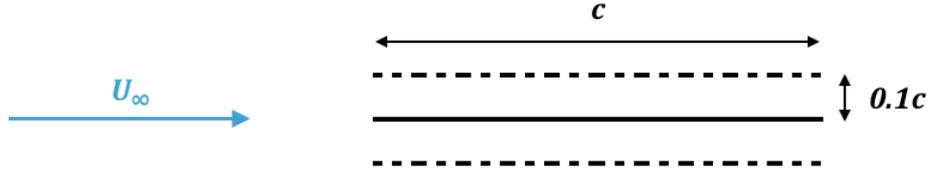
**Figura 6.7:** Evolución del potencial en la cuerda y la estela en caso de aceleración repentina de una placa plana infinita desde el reposo a  $U_\infty$

En la Figura 6.7, la cuerda vale unidad, por lo que a partir del punto  $x = 1$  ya se considera estela. Como puede observarse, el potencial va creciendo poco a poco en la placa plana hasta llegar prácticamente al del caso estacionario. A su vez, también va aumentando el potencial en la estela como consecuencia de la convección de torbellinos aguas abajo por el perfil. En un tiempo suficientemente grande, el potencial en la cuerda sería prácticamente el del régimen estacionario y el potencial de perturbación en la estela sería constante y cuyo valor sería idéntico al del existente en el borde de salida.

Con esta representación del potencial, damos por válidos los resultados obtenidos por nuestro método en el caso de aceleración repentina de una placa plana infinita y procedemos a mostrar los resultados para el caso de una placa plana oscilante.

### 6.1.2.2 Placa plana infinita oscilante.

En este apartado, va a estudiarse la evolución del coeficiente de sustentación de una placa plana a ángulo de ataque nulo, oscilando verticalmente una distancia equivalente a un 10% de la cuerda. El esquema de este problema queda representado en la Figura 6.8.



**Figura 6.8:** Esquema del problema de una placa plana oscilante a ángulo de ataque nulo

A lo largo de este subapartado se variará la frecuencia de oscilación para comprobar la validez de los resultados. Así, se define la frecuencia reducida de oscilación como:

$$k = \frac{\omega c}{2U_\infty} \quad (6.3)$$

La solución a este problema en función del valor de la frecuencia reducida puede obtenerse de manera analítica utilizando la función de Theodorsen. Así, en [3] puede encontrarse la expresión general para un perfil que oscile verticalmente y cuyo ángulo de ataque varíe en torno a un ángulo constante alrededor de un punto concreto de la cuerda, y en [4] puede encontrarse la solución analítica concreta para el caso que estamos estudiando. Así, simplificando la ecuación general de [3] para nuestro caso concreto, obtenemos:

$$l(t) = -\pi\rho U_\infty c C(k) \dot{h}(t) - \frac{\pi\rho c^2}{4} \ddot{h}(t) \quad (6.4)$$

Donde  $C(k)$  es la función de Theodorsen y puede ponerse en función de funciones de Hankel de segunda especie de órdenes 0 y 1 de la siguiente forma:

$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} \quad (6.5)$$

Y donde  $h(t)$  son números complejos cuya parte real representa la evolución de la amplitud de la oscilación de la placa con respecto al tiempo:

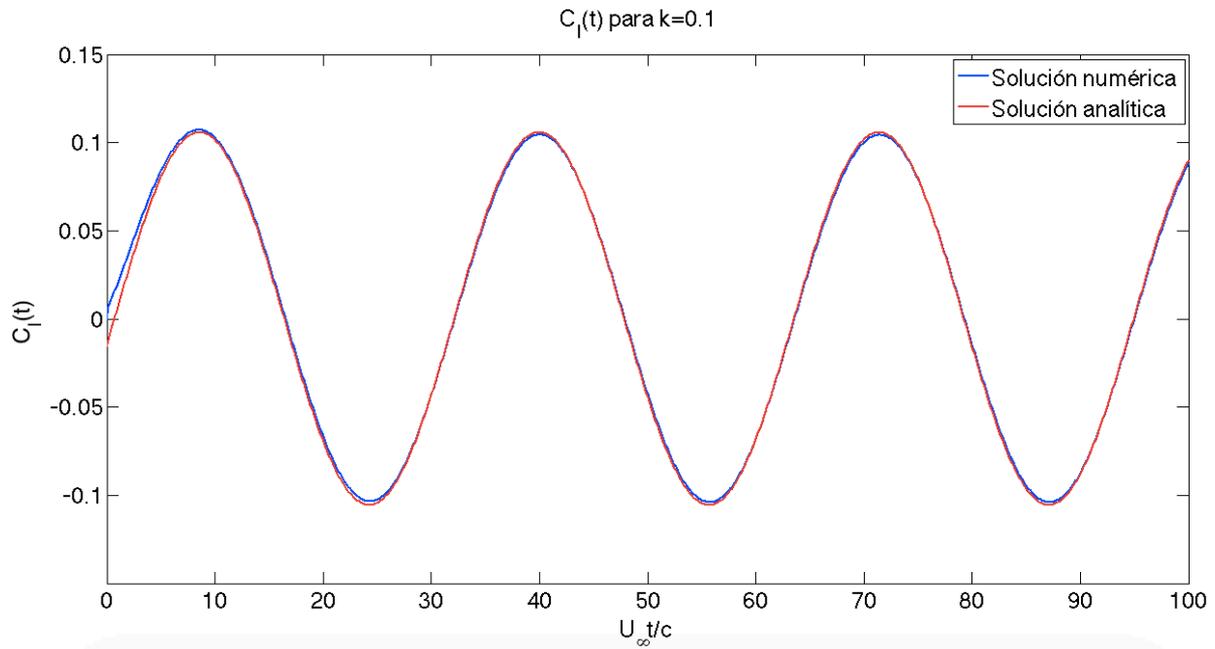
$$h(t) = 0.1ce^{i\omega t} \quad (6.6)$$

Nótese que  $\dot{h}$  indica la derivada temporal de  $h$  y que la función de Theodorsen tiene valor unidad cuando la frecuencia reducida es idénticamente nula, y su valor va decreciendo hacia 0.5 conforme aumenta dicha frecuencia reducida.

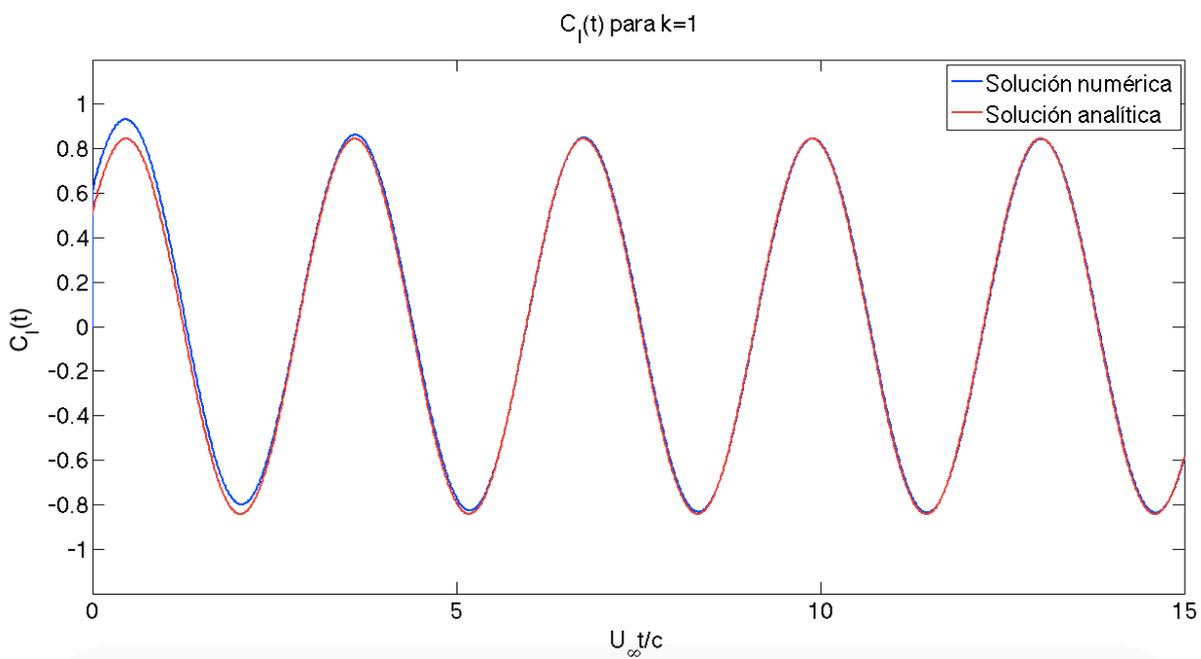
Adimensionalizando la ecuación (6.4), el coeficiente de sustentación queda de la siguiente forma:

$$C_l(t) = -\frac{2\pi C(k)}{U_\infty} \dot{h}(t) - \frac{\pi c}{2U_\infty^2} \ddot{h}(t) \quad (6.7)$$

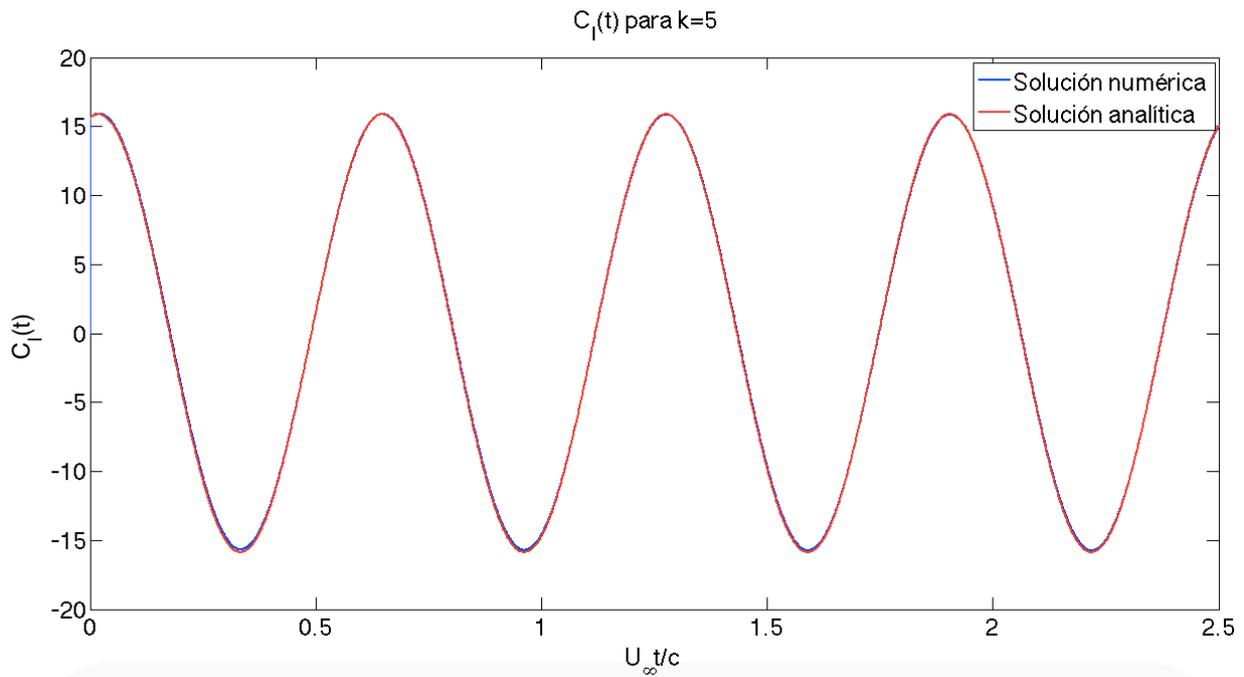
A continuación va a representarse los resultados obtenidos tanto con nuestro método, como con la expresión analítica (6.7) para varios valores de la frecuencia reducida.



**Figura 6.9:** Evolución del coeficiente de sustentación de una placa plana oscilante a ángulo de ataque nulo con frecuencia reducida  $k = 0.1$



**Figura 6.10:** Evolución del coeficiente de sustentación de una placa plana oscilante a ángulo de ataque nulo con frecuencia reducida  $k = 1$



**Figura 6.11:** Evolución del coeficiente de sustentación de una placa plana oscilante a ángulo de ataque nulo con frecuencia reducida  $k = 5$

Como puede observarse en las Figuras 6.9-11, nuestro método aproxima de manera extraordinariamente precisa la evolución del coeficiente de sustentación de una placa plana oscilante independientemente del valor de la frecuencia a la que ésta oscile. En los primeros instantes de tiempo existe una relativa variación de nuestra solución con la analítica debido, principalmente, a que la solución analítica es válida para régimen permanente y nuestra solución ha de pasar por un transitorio. Dicho transitorio es debido a que, al inicio, el potencial de perturbación en la estela es nulo, por lo que hasta que no se modifiquen dichos valores hasta una distancia lo suficientemente grande en comparación con la cuerda no estará nuestra solución en régimen permanente.

Con este subapartado concluye los resultados obtenidos con el método numérico deducido en el capítulo anterior para el problema aerodinámico bidimensional. Procedemos ahora a comentar y representar los resultados obtenidos en el caso tridimensional

## 6.2 Problema aerodinámico tridimensional

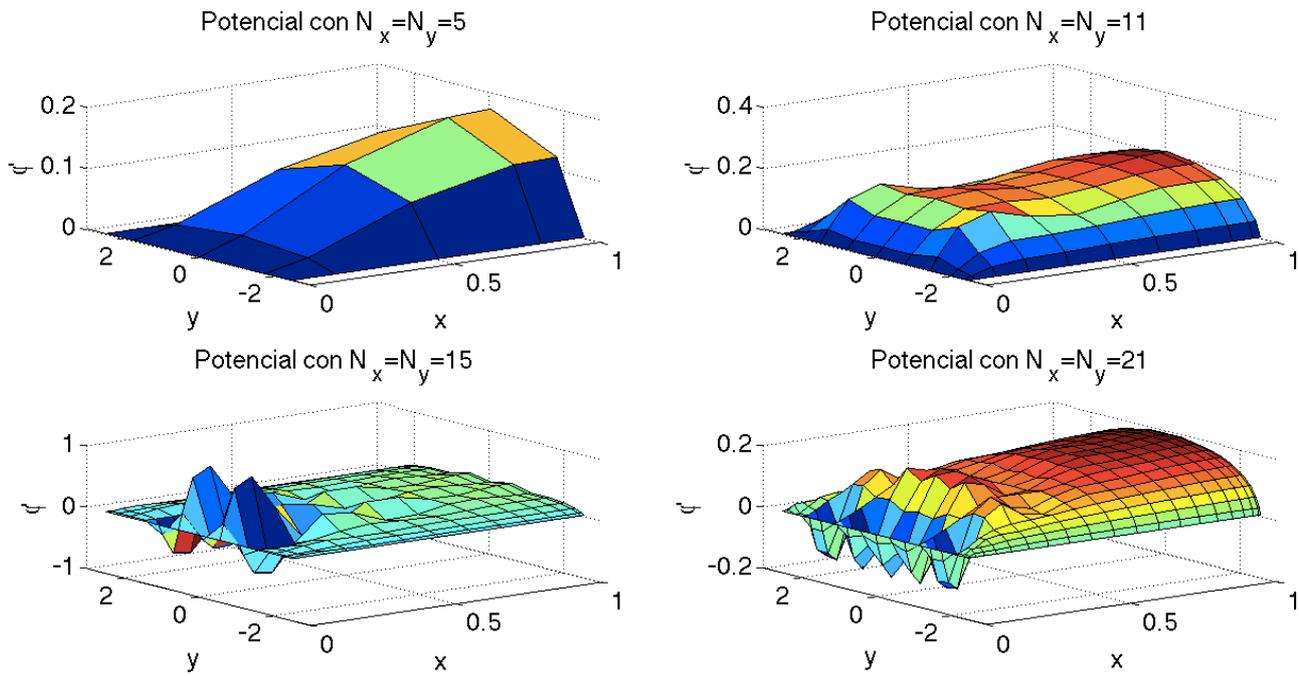
En este apartado va a mostrarse los resultados obtenidos de la resolución de una placa plana rectangular que forma un ángulo de ataque  $\alpha$  con la velocidad de la corriente incidente  $U_\infty$  mediante los dos métodos de resolución explicados en el capítulo anterior para régimen estacionario. Como va a comprobarse, ambos métodos están demasiado mal condicionados en el problema tridimensional, por lo que los resultados obtenidos no podrán darse por válidos. Aun así, en el capítulo posterior se mostrará el mal condicionamiento de las matrices resultantes y se intentará dar una explicación a dicho fenómeno.

Vamos a distinguir dos apartados, por un lado los resultados obtenidos con el denominado método 1 en el capítulo anterior, y por otro lado los obtenidos con el método 2.

### 6.2.1 Método 1

En este apartado va a mostrarse los resultados obtenidos para el caso tridimensional mediante el método 1, que recordemos que consistía en restar en el numerador de la integral el desarrollo de primer orden de Taylor de la velocidad de perturbación horizontal.

Mostramos a continuación, en la Figura 6.12, los potenciales obtenidos de la resolución de una placa plana rectangular de alargamiento  $AR = 5$  y ángulo de ataque  $\alpha = 10^\circ$  mediante este método para distintos valores de  $N_x$  y  $N_y$ .



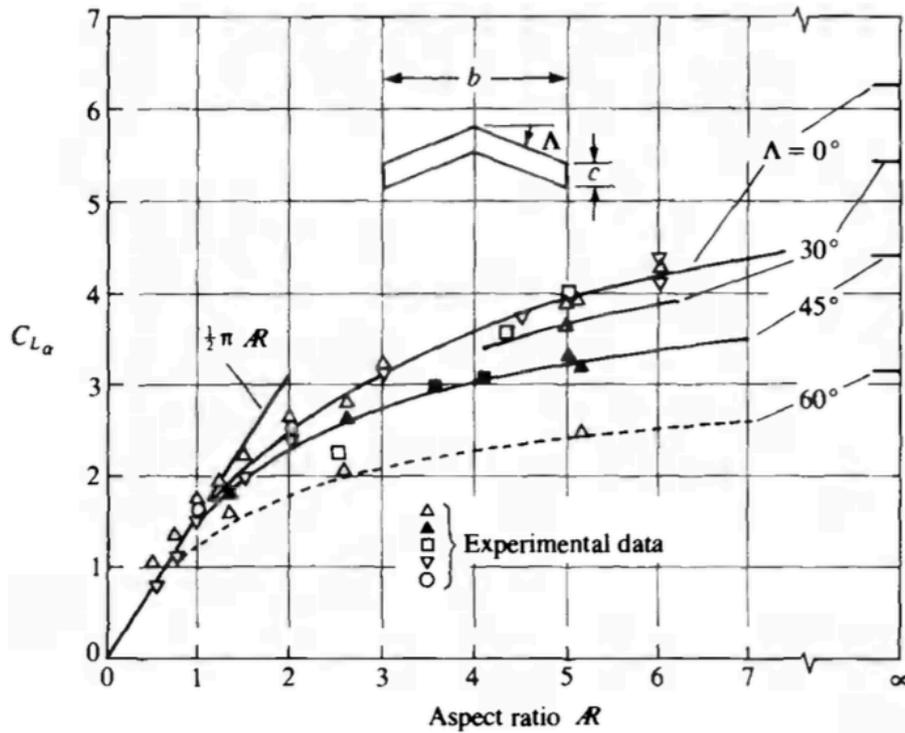
**Figura 6.12:** Representación del potencial en un ala de alargamiento  $AR = 5$  a ángulo de ataque  $\alpha = 10^\circ$  para distintos números de puntos de colocación obtenidos con el método 1

Como puede observarse en la Figura 6.12, a medida que aumentamos la densidad de puntos de colocación en el ala, el potencial sobre el mismo empieza a oscilar tanto en el eje  $x$  como en el eje  $y$  debido al mal condicionamiento que tiene el método. Para una densidad de puntos de colocación pequeña, parece que el potencial tiene la forma correcta y que sólo es preciso aumentar dicha densidad para mejorar la precisión del método, pero ocurre lo contrario, la única forma de potencial que podemos dar por buena es la que tiene pocos puntos de colocación, aunque obviamente es muy imprecisa.

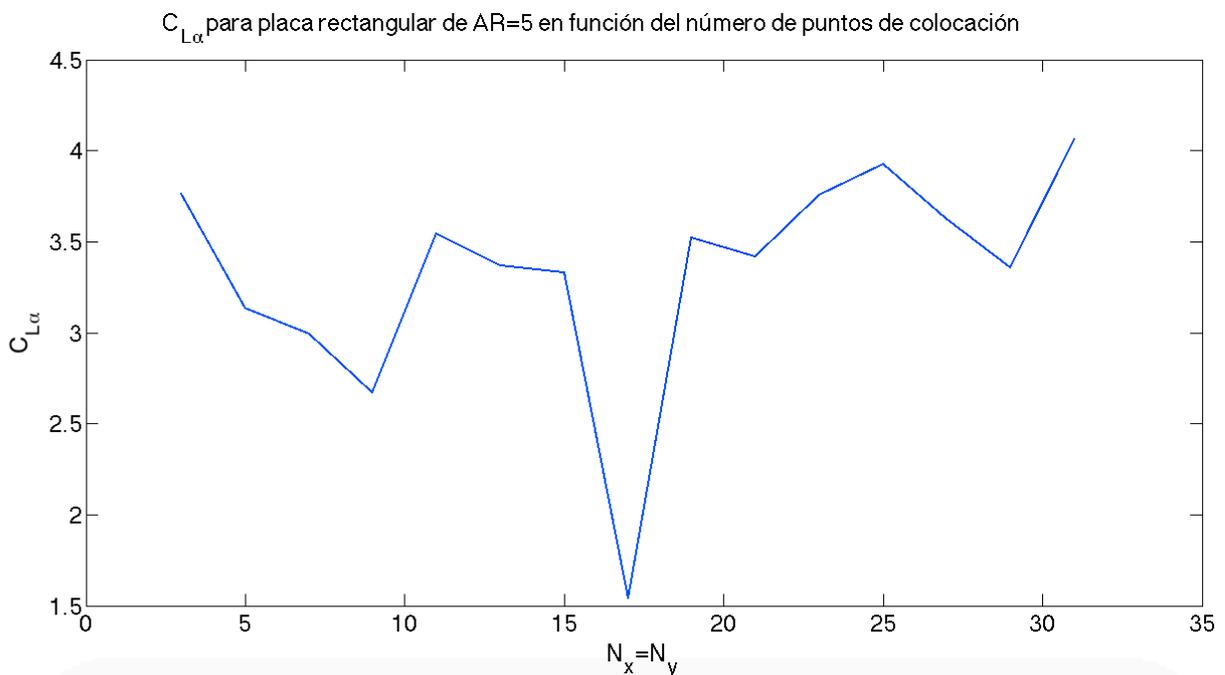
Nótese que se han elegido números impares de puntos de colocación a lo largo del eje  $y$  para garantizar la simetría con respecto al plano  $y = 0$ . El número de puntos de colocación en el eje  $x$  se ha elegido igual al número de puntos de colocación en el eje  $y$ , aunque no tienen por qué valer lo mismo. Una variación de uno respecto al otro no produce una mejora del condicionamiento de la matriz como se demostrará posteriormente.

Pasemos ahora a hablar de la pendiente del coeficiente de sustentación. En la Figura 6.13 extraída de [2] se muestra cómo evoluciona dicho valor en función del alargamiento del ala para varios valores de flecha diferentes. Así, para un ala rectangular de alargamiento  $AR = 5$ , la pendiente del coeficiente de sustentación ha de ser aproximadamente  $C_{L,\alpha} \approx 4$ .

Si calculamos dicho valor de la pendiente de la curva de sustentación con este método en función del número de puntos de colocación obtenemos la Figura 6.14. Como era de esperar, este método nos otorga resultados completamente aleatorios y que no convergen a ningún valor a medida que se aumenta el número de puntos de colocación a lo largo de los dos ejes horizontales. Se observa cómo, para valores elevados del número de puntos de colocación, esta gráfica muestra una cierta tendencia de aproximarse al valor real. Sin embargo, esto no es eficiente ya que el tiempo de ejecución del programa aumenta de manera exponencial al aumentar la densidad de puntos de colocación. En la Tabla 6.1 se muestra cómo evoluciona dicho tiempo de ejecución del programa de Matlab.



**Figura 6.13:** Evolución de la pendiente de la curva de sustentación con el alargamiento para alas rectangulares con diferentes flechas según la literatura [2]



**Figura 6.14:** Pendiente de la curva de sustentación de un ala rectangular de alargamiento  $AR = 5$  para diferentes números de puntos de colocación obtenidas con el método 1

$N_x = N_y$	Tiempo de ejecución (s)
7	0,216
13	1,054
19	11,697
25	117,716
31	1.005,565

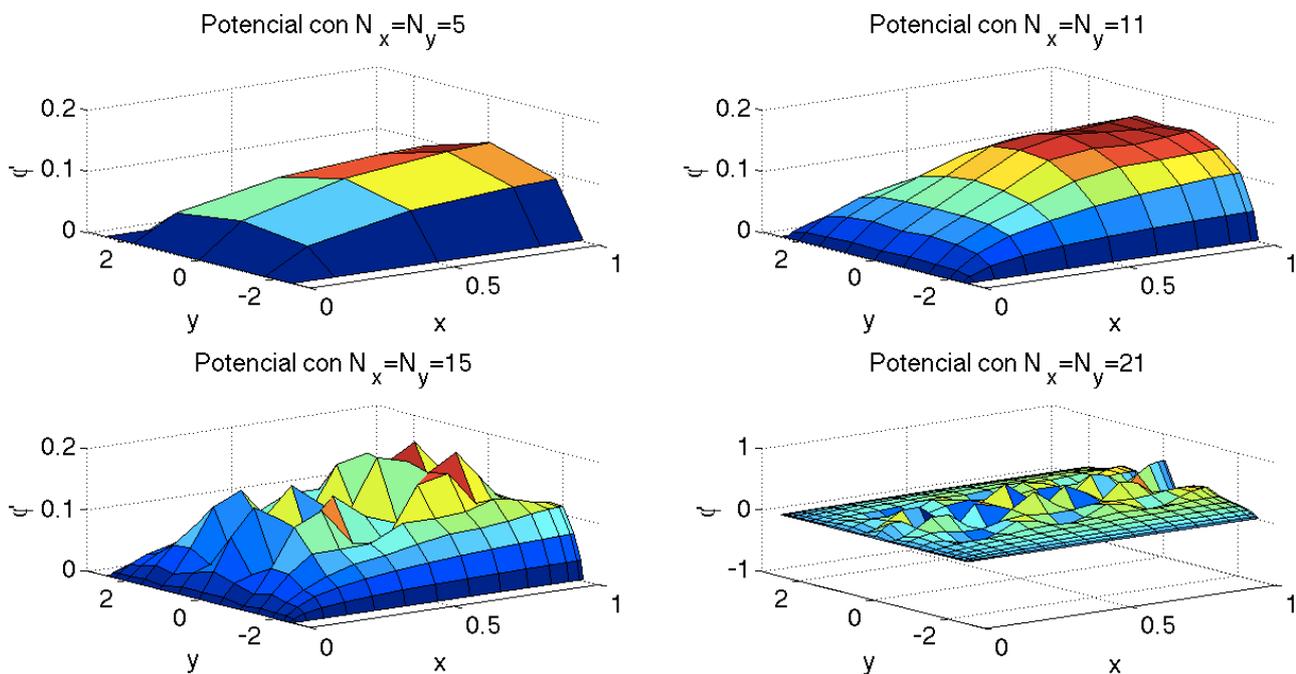
**Tabla 6.1:** Tiempo de ejecución del programa del método 1 del problema tridimensional en función del número de puntos de colocación

Una vez que hemos visto y comprobado que el método 1 no da resultados fiables, procedemos a la resolución del problema aerodinámico mediante el método de resolución numérica 2.

## 6.2.2 Método 2

En este apartado se mostrarán los resultados obtenidos para la resolución del problema tridimensional mediante el método de resolución numérica 2, que recordemos que restaba en el numerador de la integral a resolver el desarrollo de segundo orden del polinomio de Taylor que aproxima la velocidad de perturbación horizontal.

De esta forma, los resultados obtenidos para el caso de una placa plana rectangular de alargamiento  $AR = 5$  que forma un ángulo de ataque  $\alpha = 10^\circ$  con la velocidad de la corriente incidente  $U_\infty$  son los mostrados en la Figura 6.15 para diferentes valores del número de puntos de colocación.

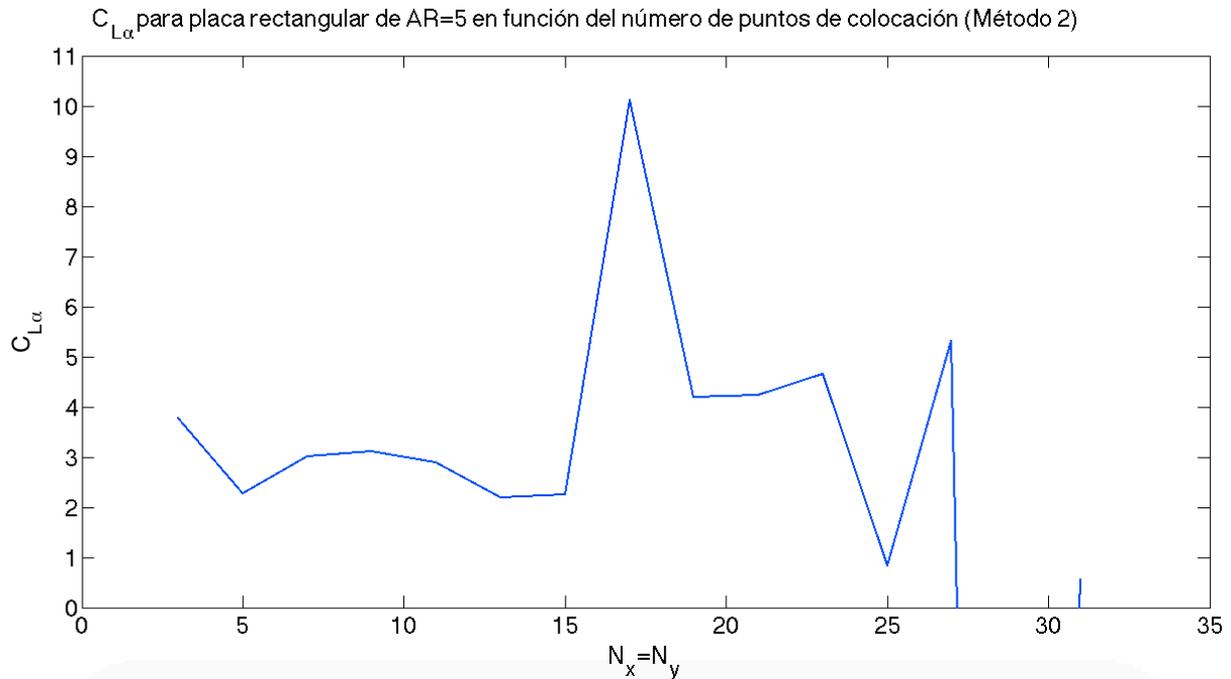


**Figura 6.15:** Representación del potencial en un ala de alargamiento  $AR = 5$  a ángulo de ataque  $\alpha = 10^\circ$  para distintos números de puntos de colocación obtenidos con el método 2

Observamos en la Figura 6.15 como en este caso se reproduce el mismo fenómeno que ocurría con el método 1, e incluso se agrava, ya que el potencial pierde su forma prácticamente a partir de los 15 puntos de colocación en cada eje. Todo esto es de nuevo debido al mal condicionamiento de la matriz del sistema a resolver, hecho que se agrava conforme aumentamos la densidad de puntos de colocación, provocando la enorme oscilación del

potencial en las dos direcciones horizontales. Se han elegido los mismos números de puntos tanto en el eje  $x$  como en el eje  $y$  para facilitar su comparación con el método anterior.

Comprobemos ahora la evolución de la pendiente de la curva de sustentación con el número de puntos de colocación al igual que se hizo en el método 1. Como se vio en la Figura 6.13, el valor de la pendiente de la curva de sustentación para un ala de alargamiento  $AR = 5$  es aproximadamente  $C_{L_\alpha} \approx 4$  según la literatura. Se muestra ahora en la Figura 6.16 dicha evolución para el caso del método 2.



**Figura 6.16:** Pendiente de la curva de sustentación de un ala rectangular de alargamiento  $AR = 5$  para diferentes números de puntos de colocación obtenidas con el método 2

De nuevo, obtenemos resultados totalmente aleatorios, producido por el hecho de la enorme oscilación que experimenta el potencial, oscilación que ahora, además, es divergente, no conservando ni siquiera la forma general del mismo. Además en este caso, se agrava incluso más, produciendo incluso valores de la pendiente de la curva de sustentación negativos en algún número de puntos de colocación concreto. De nuevo, por comparación con el método anterior, se muestra en la Tabla 6.2 los tiempos de ejecución del programa de Matlab para el método 2.

$N_x = N_y$	Tiempo de ejecución (s)
7	0,227
13	2,675
19	30,039
25	372,017
31	2.310,986

**Tabla 6.2:** Tiempo de ejecución del programa del método 2 del problema tridimensional en función del número de puntos de colocación

Como puede comprobarse, este método no sólo proporciona peores resultados sino que, además, su tiempo de ejecución es prácticamente el doble que el método 1 independientemente del número de puntos de colocación.

Este aumento es debido, principalmente, al hecho de tener que calcular una integral analítica más en cada punto de colocación en comparación con el método anterior.

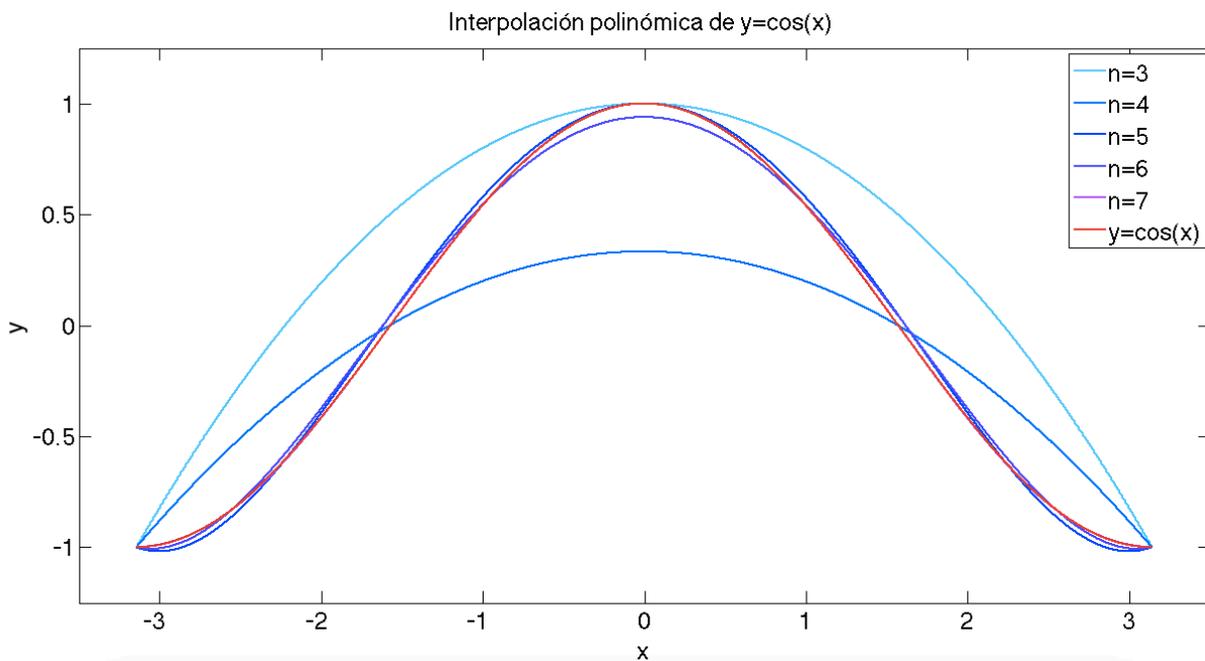
Tras mostrar los resultados obtenidos tanto en dos como en tres dimensiones, procedemos a analizar la fiabilidad de los métodos espectrales utilizados, con el fin de poder descartarlos como causantes de los resultados aleatorios obtenidos en este último apartado.

### 6.3 Comprobación métodos espectrales

Como ya hemos comentado, la inclusión del cálculo de derivadas e integrales mediante métodos espectrales es una novedad desarrollada en este método de resolución numérica para los problemas aerodinámicos. Ante los resultados obtenidos en el problema tridimensional a la hora de aproximar una función lo suficientemente suave como es el potencial en un ala, cabe preguntarse si son estos métodos espectrales utilizados los causantes de dichas oscilaciones. Así, va a comprobarse en este apartado la validez de los métodos espectrales y su capacidad para aproximar funciones de una y dos variables.

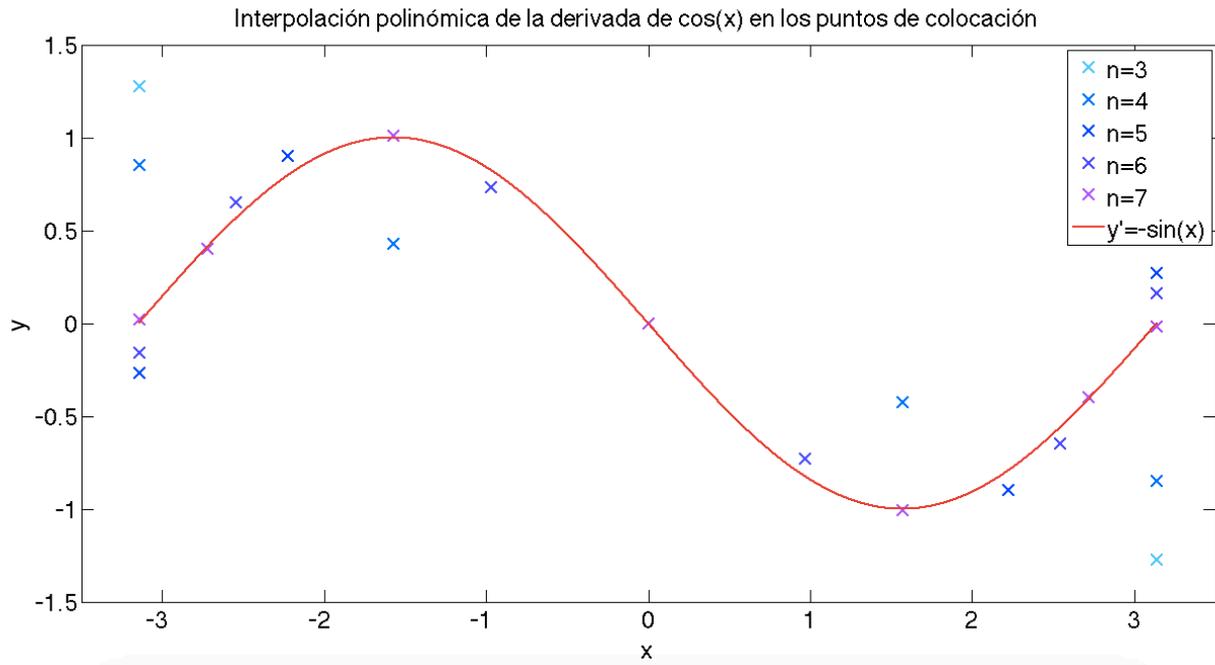
#### 6.3.1 Funciones de una variable

Procedemos ahora a la comprobación de la validez de los métodos espectrales en funciones de una variable. Así, en la Figura 6.17 se muestra la aproximación de la función  $y = \cos(x)$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$  por los polinomios de Lagrange obtenidos en base a  $n$  puntos de colocación de Chebyshev.



**Figura 6.17:** Interpolación polinómica de diversos órdenes de la función  $y = \cos(x)$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$

Puede observarse cómo, para  $n = 7$ , el polinomio interpolador ni siquiera es capaz de verse en la gráfica al coincidir de manera casi perfecta con la función real a interpolar. Pasemos ahora a comprobar cómo de bien se aproxima, mediante este método, el valor de la derivada en los puntos de colocación. Dicha representación se muestra en la Figura 6.18 para diferentes números de puntos del polinomio interpolador.



**Figura 6.18:** Aproximación del valor de la derivada en los puntos de colocación de la función  $y = \cos(x)$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$  mediante el polinomio interpolador de Lagrange

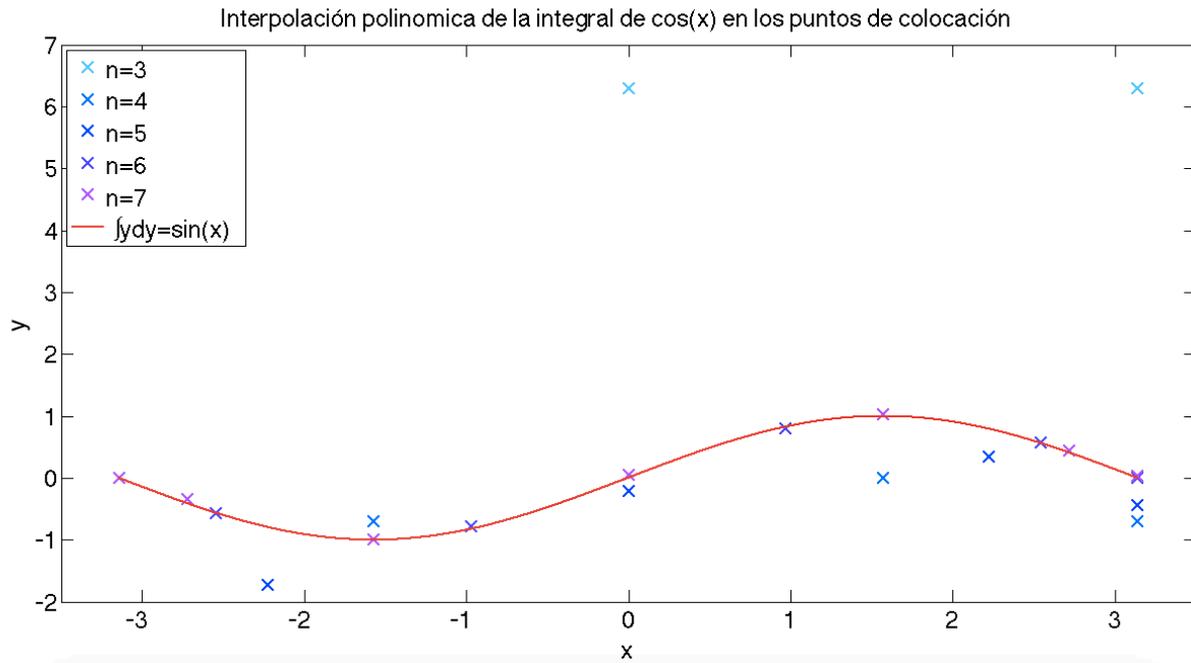
De nuevo es inmediato ver cómo, a medida que aumentamos el orden del polinomio interpolador, los valores de las derivadas en los puntos de colocación de Chebyshev se aproximan con mayor precisión, siendo para  $n = 7$  una aproximación prácticamente exacta.

Queda entonces preguntarnos si la integral, calculada de la forma explicada en el capítulo anterior, también es una buena aproximación de la integral real. En la Figura 6.19 se muestra los valores de la integral en los puntos de colocación frente al real para diferentes órdenes del polinomio interpolador.

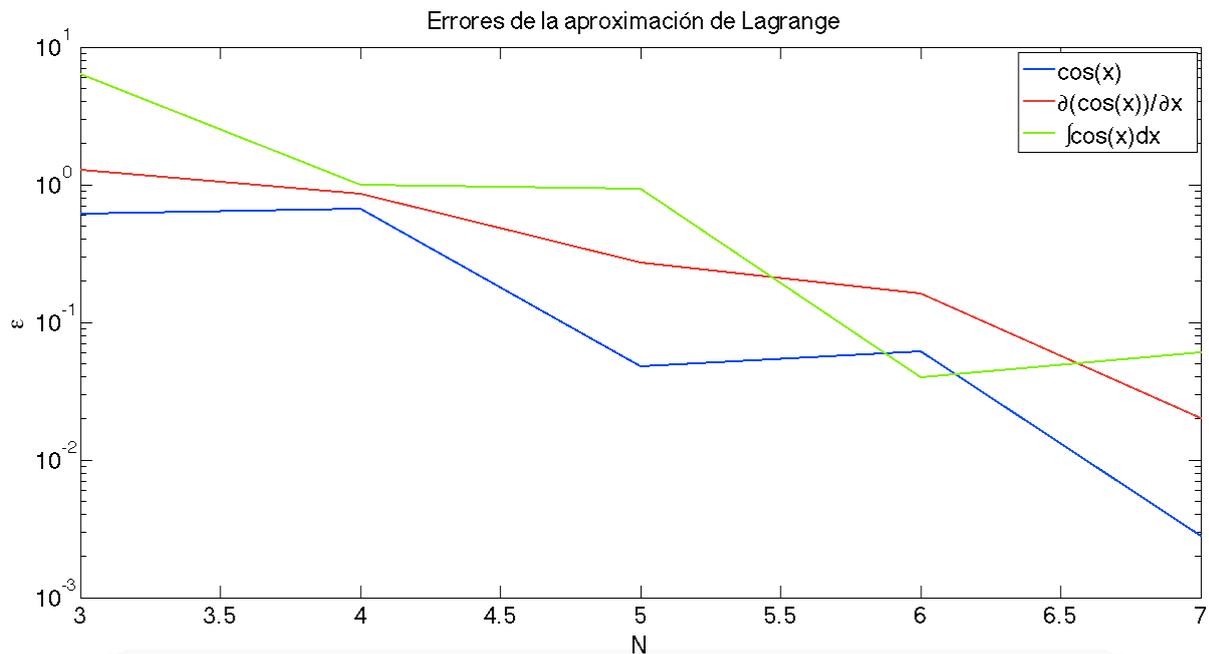
Como se observa, aunque para números de puntos de colocación bajos la aproximación de la integral no es demasiado precisa, conforme aumentamos el orden del polinomio interpolador dichos valores de la integral tienden a aproximar de manera bastante fiable los reales.

Por último, en la Figura 6.20 se muestra la evolución del error máximo cometido tanto al aproximar la función a interpolar, como al aproximar la derivada y la integral en los puntos de colocación con el número de dichos puntos colocados en el intervalo.

Como era de esperar, dichos errores disminuyen de manera exponencial con el número de puntos de Chebyshev en los que se interpola. Puede observarse en dicha Figura 6.20 cómo los errores de la derivada y la integral son, en general, un orden de magnitud mayores que los de la función, estando éstos situados para  $n = 7$  puntos de colocación en el orden de  $O(10^{-3})$ .



**Figura 6.19:** Aproximación del valor de la integral en los puntos de colocación de la función  $y = \cos(x)$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$  mediante el polinomio interpolador de Lagrange



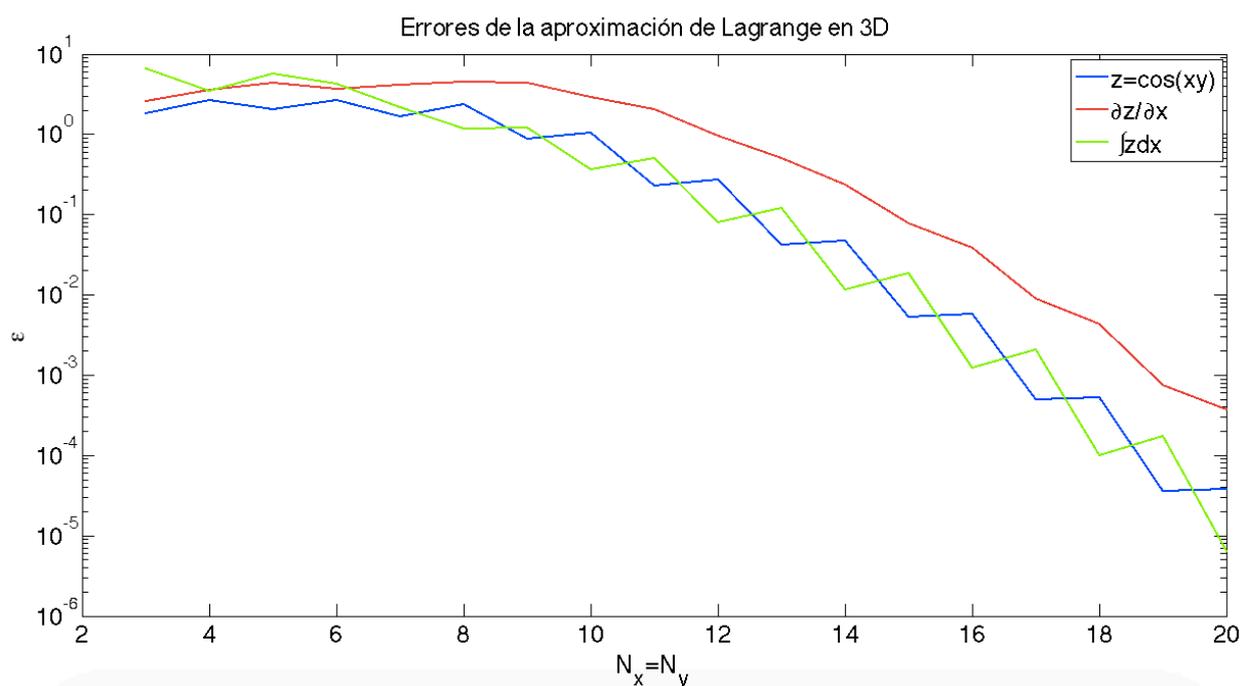
**Figura 6.20:** Evolución de los errores máximos cometidos al aproximar la función  $y = \cos(x)$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$  y su derivada y su integral en los puntos de colocación

Tras haber comprobado que los métodos espectrales utilizados para interpolar tanto una función como su derivada y su integral son lo suficientemente precisos, pasamos ahora a comprobar si este fenómeno también se reproduce en funciones de dos variables.

### 6.3.2 Funciones de dos variables

Procedemos ahora a la comprobación de la validez de los métodos espectrales en funciones de dos variables. En este caso se ha aproximado la función  $z = \cos(xy)$ ,  $x, y \in [-\pi, \pi]$ , función no tan suave en tres dimensiones pero que nos permitirá, sin lugar a dudas, corroborar la precisión de los métodos espectrales utilizados.

En este apartado no va a representarse la función tridimensional y sus aproximaciones polinómicas superpuestas tal y como hicimos en el apartado anterior dado que no se vería con claridad ninguna. Sin embargo, se han calculado las aproximaciones de la función antes mencionada, de su derivada en  $x$  y de su integral en  $x$  también, de manera análoga al apartado anterior. Siendo así, los resultados obtenidos para los errores de las tres aproximaciones pueden verse en la Figura 6.21.



**Figura 6.21:** Evolución de los errores máximos cometidos al aproximar la función  $z = \cos(xy)$ ,  $x, y \in [-\pi, \pi]$  y su derivada y su integral con respecto a  $x$  en los puntos de colocación

Puede observarse cómo el hecho de que la función sea poco suave en el dominio en el que se ha interpolado, provoca que los errores aumenten en comparación con los que teníamos en el caso bidimensional. Sin embargo, conforme aumentamos el número de puntos de colocación dichos errores caen considerablemente, siendo del orden de la milésima a partir de los 16 puntos en cada eje. Puede observarse en dicha Figura 6.21 cómo también aquí la derivada presenta un orden mayor de errores que los de la propia función, siendo los errores cometidos por la integral del orden de los de la interpolación de la propia función.

De esta forma, podemos dar por adecuados los métodos espectrales de aproximación utilizados tanto como para interpolar una función como su derivada y su integral en los puntos de colocación, descartándose así que éstos sean la causa del mal funcionamiento del método en el caso tridimensional.

Una vez vistos los resultados obtenidos tanto para el problema bidimensional como para el tridimensional, y la posterior comprobación de los métodos espectrales, pasemos ahora a comprobar la validez del método y a justificar por qué en dos dimensiones dicho método sí proporciona resultados más que aceptables mientras que en tres dimensiones el método es completamente desastroso.



# 7 VALIDEZ DEL MÉTODO

---

**H**abiendo presentado los resultados obtenidos por nuestro método de resolución numérica para los problemas aerodinámicos bidimensional en regímenes estacionario y no estacionario y tridimensional en régimen estacionario, en este capítulo se pretende justificar por qué, mientras que en dos dimensiones el método funciona de manera bastante precisa, en tres dimensiones obtenemos resultados que de ninguna de las maneras podemos dar por válidos.

Como ya adelantamos en el capítulo anterior, este fenómeno es debido, principalmente, al mal condicionamiento que presentan las matrices de los sistemas de ecuaciones a resolver, condicionamiento que, como veremos ahora, empeora conforme afinamos la malla.

Antes de proceder a analizar los resultados, debemos entender que es el condicionamiento de una matriz. Cuando el determinante de una matriz tiende a cero, al menos dos de las ecuaciones que conforman el sistema son muy parecidas, tanto más parecidas cuánto más pequeño sea el determinante de la matriz. Esto implica que pequeñas variaciones de las condiciones de contorno impuestas al problema provocan un cambio sustancial en los resultados. Es por ello que se busca, para la resolución numérica, matrices que estén bien condicionadas a fin de tener una solución robusta al problema que se quiere resolver.

Así, en este apartado se va a representar el número de condición recíproco para los diferentes casos estudiados. Dicho número de condición tiende a cero cuando la matriz está muy cerca de ser singular y tiende a la unidad cuando la matriz está perfectamente condicionada, esto es, cuando es diagonal.

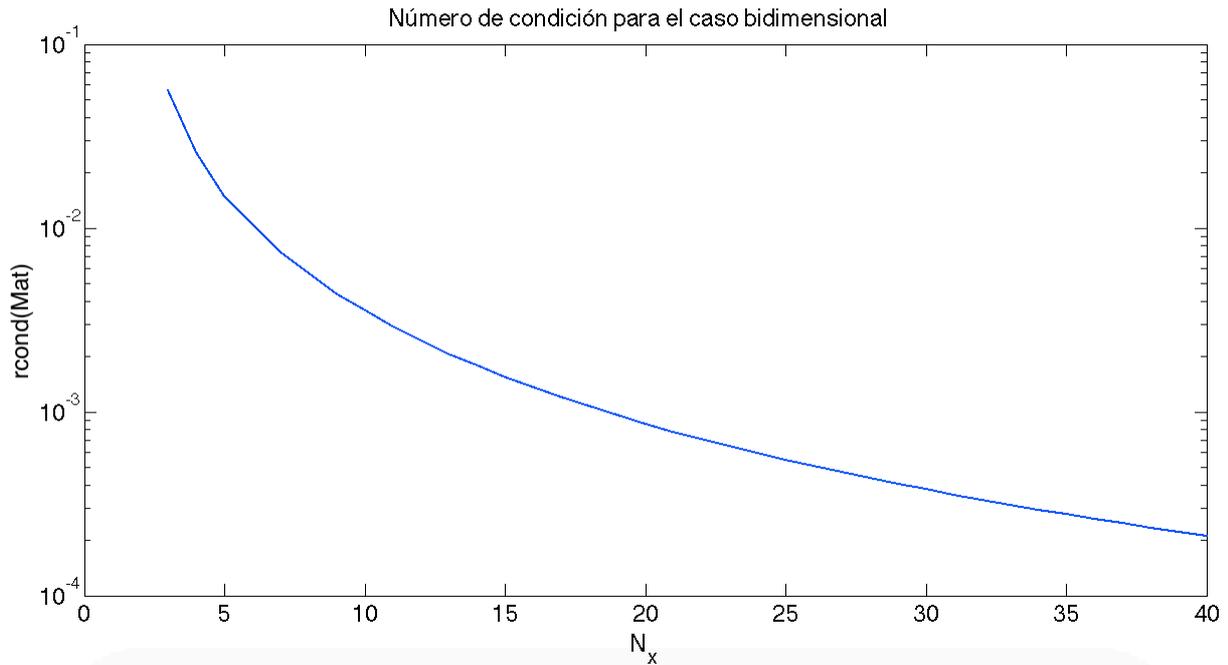
## 7.1 Validez del problema bidimensional

En este primer apartado se va a proceder al análisis de los errores relativos y de los números de condición obtenidos para el problema aerodinámico bidimensional, tanto en régimen estacionario como en no estacionario.

### 7.1.1 Régimen estacionario

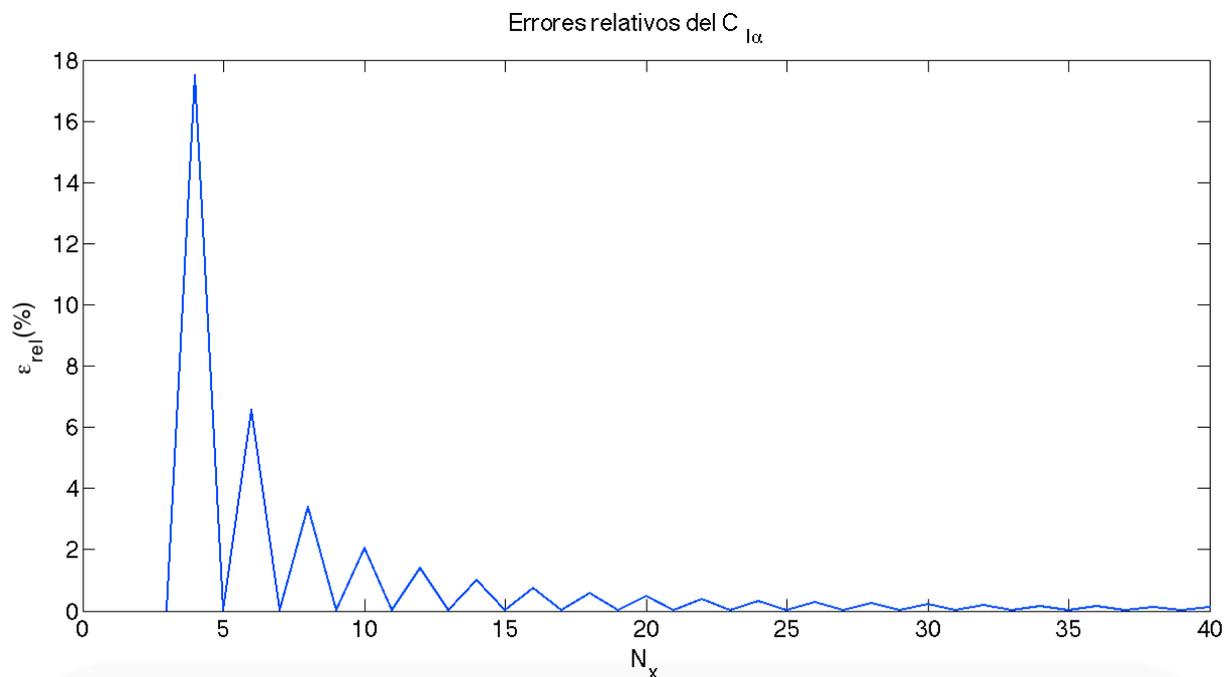
Empezamos analizando los resultados obtenidos para el régimen estacionario en el caso de una placa plana infinita a ángulo de ataque constante. En la Figura 7.1 puede observarse la evolución del número de condición de la matriz del sistema a resolver en función del número de puntos de colocación sobre el perfil.

Observamos en dicha Figura 7.1 que, aunque el método de resultados buenos, éste está mal condicionado, siendo el número de condición siempre de orden menor o igual a 2. Aun así, para la posterior comparación con el caso tridimensional, para  $N_x = 40$  el número de condición es del orden de  $O(10^{-4})$  que, aunque pequeño, mayor que los obtenidos para el caso tridimensional como se verá en el apartado posterior.



**Figura 7.1:** Evolución del número de condición recíproco de la matriz del sistema para el caso bidimensional en régimen estacionario en función del número de puntos de colocación

Aunque ya vimos en el capítulo anterior que el método daba resultados bastante fiables en término de la pendiente del coeficiente de sustentación, en la Figura 7.2 se muestra los errores relativos obtenidos en función del número de puntos de colocación.



**Figura 7.2:** Evolución de los errores relativos obtenidos para el caso bidimensional en régimen estacionario en función del número de puntos de colocación

Tal y como esperábamos de los resultados obtenidos en el apartado anterior, los errores relativos son mayores para el caso de un número par de puntos de colocación, y los errores relativos globales disminuyen al aumentar la densidad de puntos de colocación.

Por comparación con las Tablas 6.1-2, mostramos en la Tabla 7.1 los tiempos de ejecución del programa bidimensional en función de  $N_x$ .

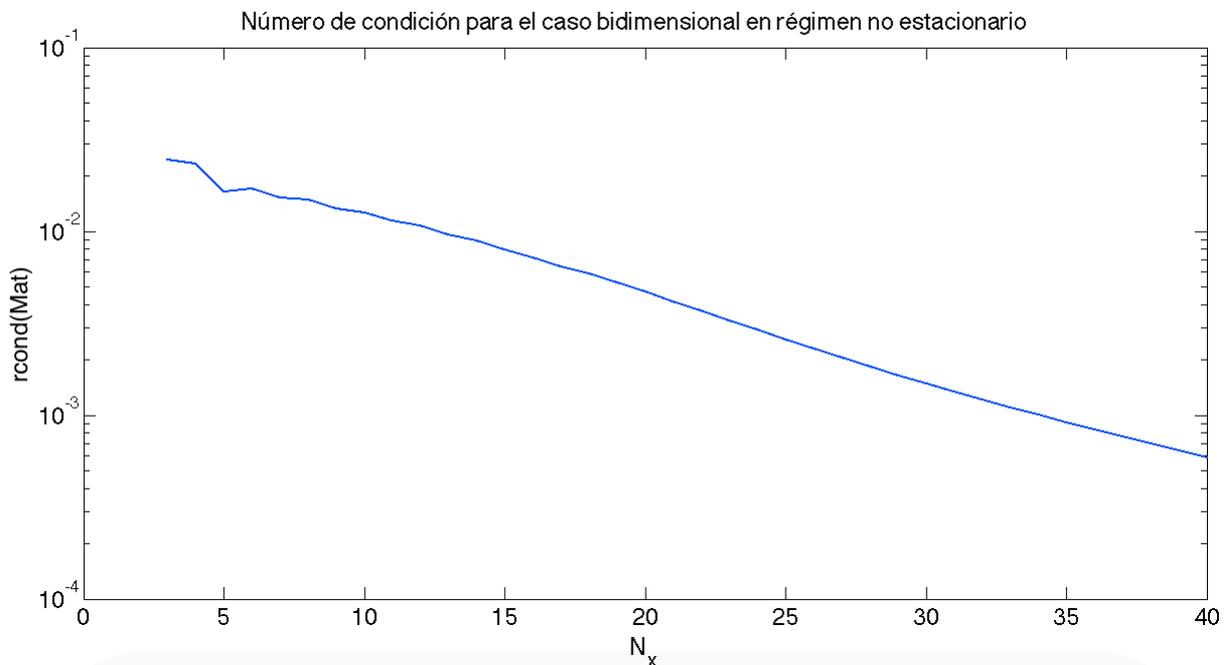
$N_x = N_y$	Tiempo de ejecución (s)
7	4,184
13	8,958
19	13,757
25	18,495
31	23,536

**Tabla 7.1:** Tiempo de ejecución del programa del método del problema bidimensional en función del número de puntos de colocación

Como puede verse en la tabla, los tiempos de ejecución son sustancialmente menores que los del caso tridimensional, sufriendo ahora un crecimiento prácticamente lineal con  $N_x$  y no exponencial, como ocurría en tres dimensiones.

### 7.1.2 Régimen no estacionario

En este apartado va a estudiarse el número de condición de la matriz de resolución del problema no estacionario, matriz que es independiente del caso concreto en el que estemos (aceleración repentina de una placa en reposo o placa plana oscilando). Así, en la Figura 7.3 se representa la evolución de dicho número de condición recíproco frente al número de puntos de colocación.



**Figura 7.3:** Evolución del número de condición recíproco de la matriz del sistema para el caso bidimensional en régimen estacionario en función del número de puntos de colocación

Como puede observarse en la Figura, el número de condición sigue siendo bastante bajo para el caso no estacionario, aunque dicha disminución ahora es más progresiva que para el régimen estacionario. De nuevo, el número de condición es lo suficientemente pequeño como para afirmar que el problema está mal condicionado, pero a pesar de ello es sensiblemente mayor al caso tridimensional como se verá posteriormente.

No va a realizarse en este apartado un estudio de los errores relativos, al no considerarse necesario al verse en las Figuras 6.6 y 6.9-11 que el método es tremendamente preciso en régimen permanente, independientemente del caso concreto de estudio.

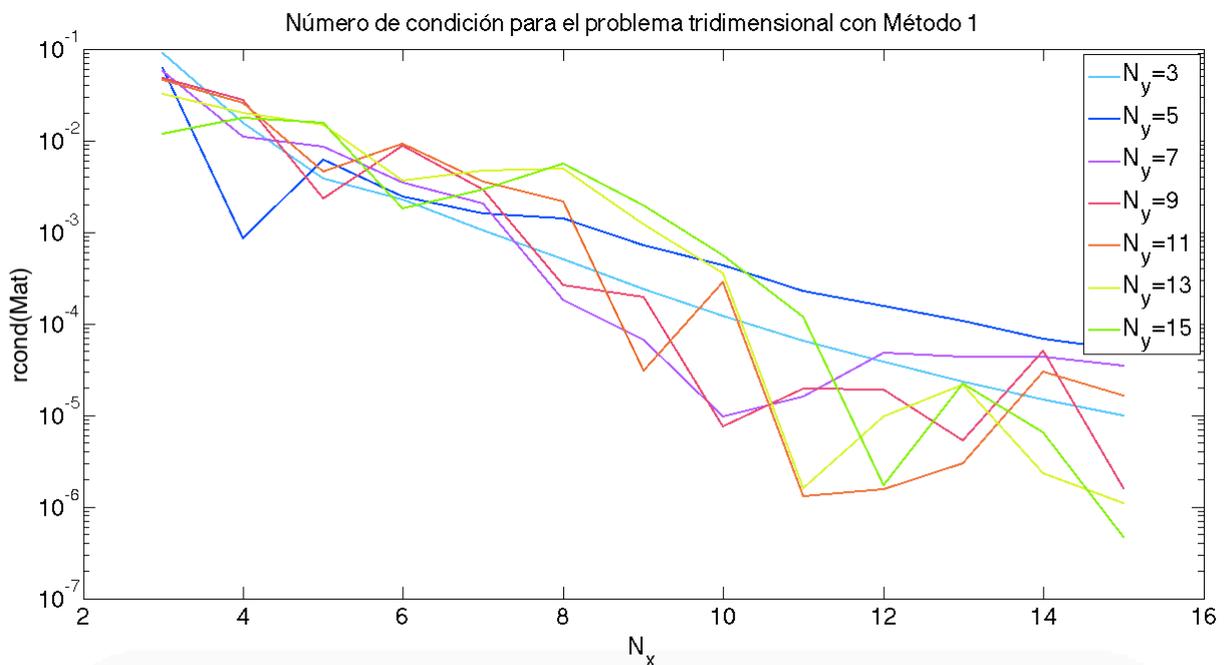
Procedemos a continuación a estudiar la validez del método numérico para la resolución del problema aerodinámico tridimensional.

## 7.2 Validez del problema tridimensional

Al igual que en los apartados anteriores, vamos a estudiar aquí la evolución del número de condición recíproco de la matriz del sistema a resolver proporcionada por los dos métodos numéricos de resolución del problema tridimensional en régimen estacionario.

### 7.2.1 Método 1

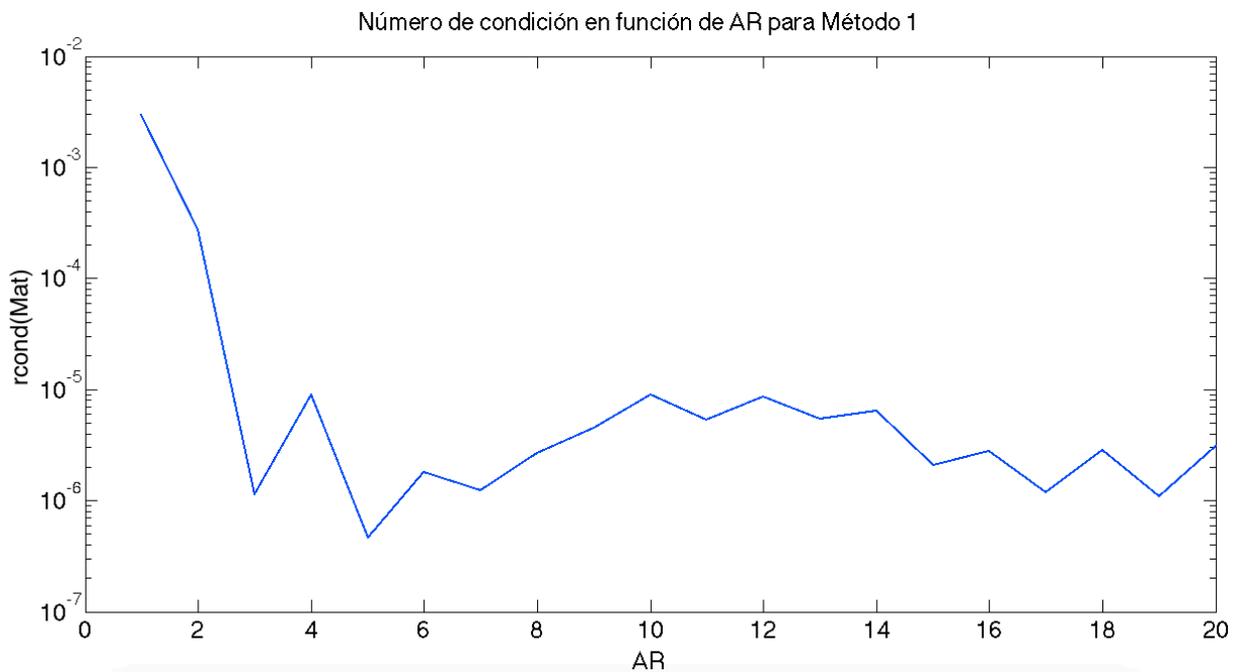
Para el primer método de resolución, obtenemos la evolución de los números de condición representados en la Figura 7.4 con el número de puntos de colocación a lo largo del eje  $x$ ,  $N_x$ , para diferentes valores del número de puntos de colocación a lo largo del eje  $y$ ,  $N_y$ .



**Figura 7.4:** Evolución del número de condición recíproco de la matriz del sistema para el caso tridimensional en régimen estacionario en función del número de puntos de colocación para el método 1

Puede verse cómo el número de condición de la matriz cae sustancialmente en comparación con el del problema bidimensional, llegando a ser para una malla de  $N_x = N_y = 15$  del orden de  $O(10^{-7})$ , mientras que en el caso bidimensional para  $N_x = 15$  era cuatro órdenes de magnitud superior. Este mal condicionamiento de nuestro método está provocado sustancialmente por un aumento del orden de las derivadas a introducir en la integral numérica. Cuanto mayor sea el orden de las derivadas, peor condicionado estará el problema.

En la Figura 7.5 se representa la evolución del número de condición recíproco con el alargamiento, para una malla de puntos de colocación de  $N_x = N_y = 15$ .



**Figura 7.5:** Evolución del número de condición recíproco de la matriz del sistema para el caso tridimensional en régimen estacionario en función del alargamiento para el método 1

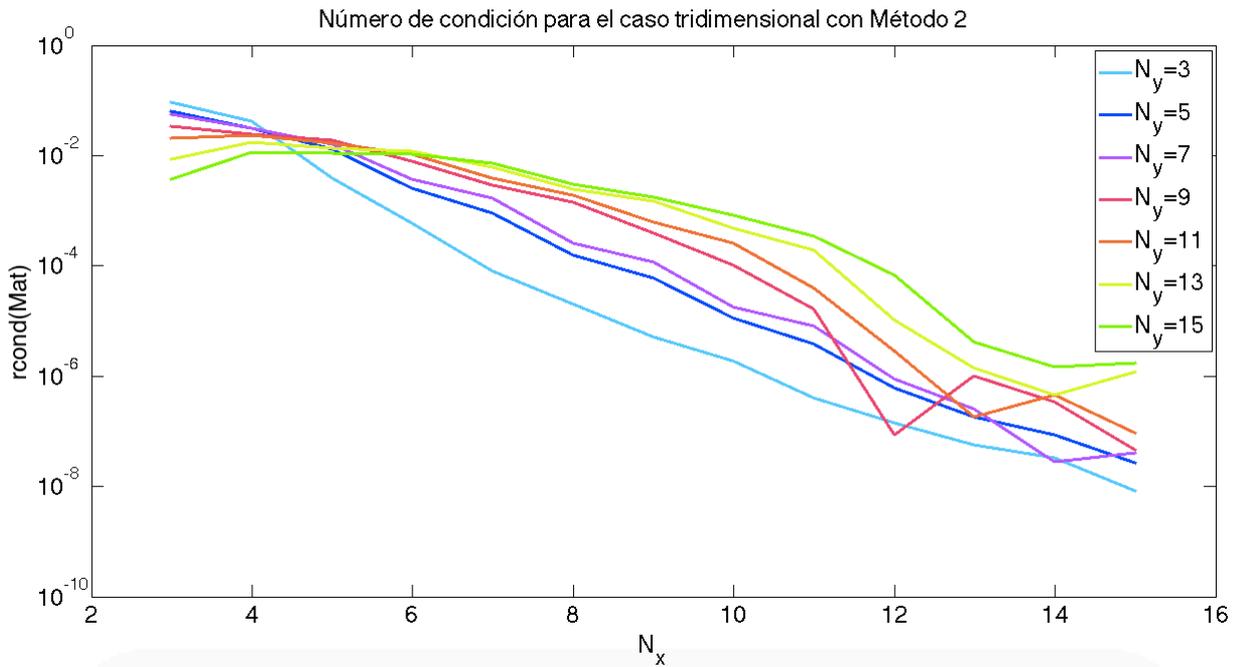
Puede observarse como el número de condición, si bien decae en un principio, es prácticamente constante con el alargamiento del ala, por lo que no lo consideraremos un parámetro relevante para el condicionamiento de la matriz.

Procedemos ahora a estudiar el mismo resultado obtenido con el método 2. No se ha representado en este apartado los errores relativos de la pendiente de la curva de sustentación ya que, al ser éstos totalmente aleatorios, sus errores lo serán también y no será representativo.

### 7.2.2 Método 2

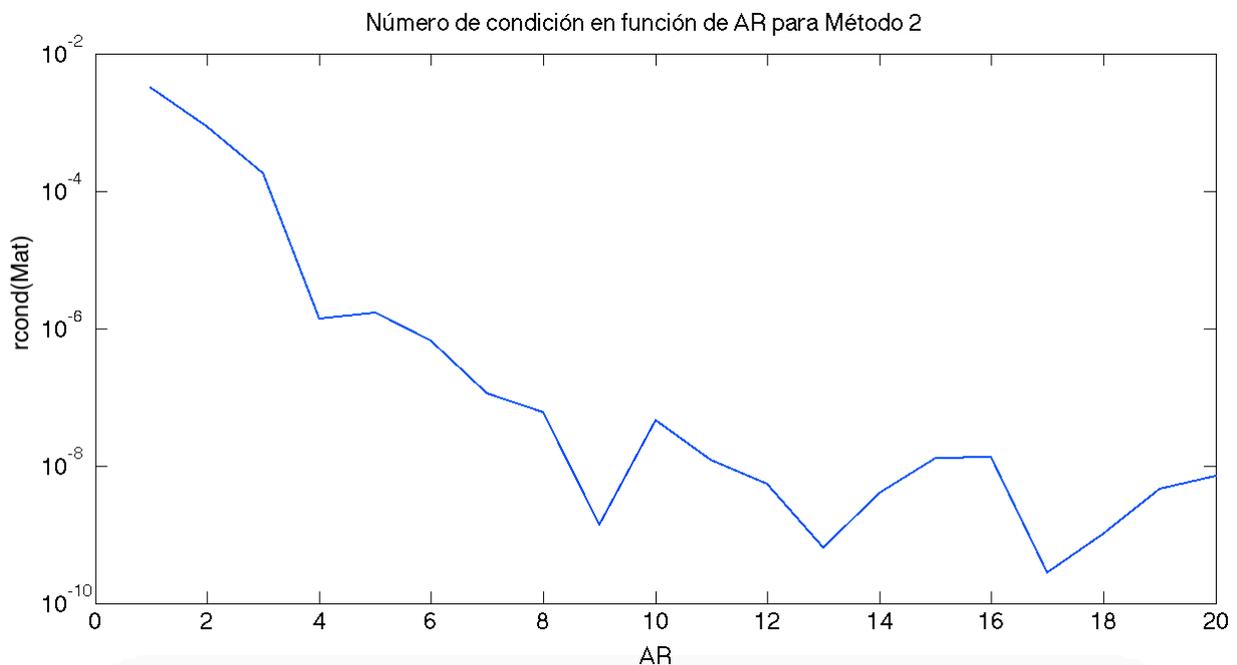
De manera análoga al apartado anterior, procedemos a representar en la Figura 7.6 la evolución del número de condición con el refinado de la malla de puntos de colocación, es decir, con el aumento de puntos en el eje  $x$ , manteniendo constantes los valores en el eje  $y$ .

Como puede observarse, aunque los valores son similares a los obtenidos en el subapartado anterior, puede verse cómo, de manera general, el número de condición de la matriz obtenida mediante el método 2 es un orden de magnitud menor que los obtenidos mediante el método 1. Además, es necesario destacar el hecho de que, a partir de un número de divisiones en  $x$  de  $N_x = 6$ , el número de condición aumenta hasta un orden de magnitud al aumentar el refinamiento en el eje  $y$ . A pesar de ello, puede comprobarse fácilmente que los números de condición obtenidos en el caso tridimensional con este método son sustancialmente menores a los obtenidos para el caso bidimensional. De nuevo esto es debido al aumento del orden de las derivadas que aparecen en el numerador de la integral analítica, que provoca un peor condicionamiento de la matriz resultante.



**Figura 7.6:** Evolución del número de condición recíproco de la matriz del sistema para el caso tridimensional en régimen estacionario en función del alargamiento para el método 2

A continuación mostramos en la Figura 7.7 la evolución del número de condición recíproco con el alargamiento para una malla constante de puntos de colocación de  $N_x = N_y = 15$ .



**Figura 7.7:** Evolución del número de condición recíproco de la matriz del sistema para el caso tridimensional en régimen estacionario en función del alargamiento para el método 2

Como puede observarse, ocurre lo mismo que para el método 1, aunque al principio el número de condición decae, posteriormente oscila en torno a un valor del orden de  $O(10^{-9})$  para valores del alargamiento lo

suficientemente elevados, por lo que no se considera el alargamiento como un causante del mal condicionamiento del método.



## 8 CONCLUSIONES

---

Para finalizar este trabajo, van a exponerse en este último capítulo las conclusiones más importantes que se han obtenido a lo largo de la realización del mismo. Asimismo, se abrirán futuras líneas de trabajo a fin de mejorar el condicionamiento del método aquí desarrollado, así como se expondrán futuras ampliaciones de este trabajo.

Siendo así, empezamos con las conclusiones extraídas de la realización de este trabajo:

- Todas las hipótesis realizadas tanto como para la obtención de las ecuaciones simplificadas como para su posterior linealización pueden darse por válidas tras haber comprobado que los resultados obtenidos, al menos en dos dimensiones, son los correctos y los que se corresponden con los existentes en la literatura.
- La ecuación obtenida mediante el desarrollo del método de Green en términos de la velocidad de perturbación proporciona un método mucho menos robusto que en el caso de que se hiciese en términos del potencial. Dicha disminución de la robustez se ve reflejada en un inequívoco peor condicionamiento de la matriz del sistema de ecuaciones a resolver, tal y como se ha comprobado con los resultados obtenidos. Es necesario destacar que, sin embargo, dicho método de Green en términos de la velocidad sí proporciona un buen condicionamiento en algunos otros métodos de resolución, como el Vortex-Lattice, siempre y cuando se elijan como puntos de colocación unos concretos.
- Los métodos espectrales empleados a la hora de aproximar las funciones, sus derivadas o calcular integrales, son de suma precisión en funciones suficientemente sencillas sin discontinuidades asociadas, por lo que su empleo en otros métodos de resolución tanto de problemas aerodinámicos como de cualquier otra índole está claramente aconsejado.
- Tras haber visto los resultados obtenidos, podemos afirmar que la idea fundamental de este método es una idea claramente innovadora y eficaz, aunque, como se ha explicado, proporcione matrices mal condicionadas. El hecho de saltar la discontinuidad del integrando restando los términos necesarios para poder aproximarlos por Taylor y calcular dichos términos mediante integrales analíticas es sin duda una de las más brillantes ideas en las que se apoya este trabajo.

Una vez comentadas las conclusiones, procedemos a plantear futuras líneas de trabajo y mejoras del método en aras de avanzar con la investigación y el desarrollo de métodos fiables de resolución de problemas aerodinámicos linealizados en regímenes estacionario y no estacionario en dos y tres dimensiones:

- Una primera idea consiste en comprobar si la colocación de los puntos de colocación en otros que no coincidan con las fuentes, tal y como hace el Vortex-Lattice, proporciona un mejor condicionamiento de las matrices obtenidas. Dicho estudio permitiría discernir si es el hecho de colocar los puntos de colocación y las fuentes en los mismos puntos es lo que provoca el mal condicionamiento, o si por el contrario éste es debido al método de Green en términos de la velocidad de perturbación en sí mismo.
- Además, se insta a que se realice un estudio aproximando todas las derivadas por diferencias finitas y las integrales por el método de los trapecios en lugar de utilizar métodos espectrales. Esto ayudaría

también a estudiar si dichos métodos espectrales contribuyen o no al mal condicionamiento de las matrices obtenidas.

- Dado que los resultados obtenidos en el problema dimensional son válidos, se deja también para estudios posteriores el resolver problemas aeroelásticos mediante este método aquí desarrollado, lo que nos permitirá aumentar, o no, la validez de dicho método.
- Por último, se deja también como futura línea de trabajo estudiar con este método, no sólo la sustentación de un perfil bidimensional o un ala, sino el cálculo y el análisis de la resistencia de esto y su comparación con resultados ya existentes en la literatura.

## REFERENCIAS

---

- [1] José Manuel Gordillo Arias de Saavedra y Guillaume Riboux Acher, *Introducción a la Aerodinámica Potencial*, Paraninfo, 2012.
- [2] Antonio Barrero Ripoll y Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, *Fundamentos y aplicaciones de la Mecánica de Fluidos*, McGraw-Hill, 2005.
- [3] Joseph Katz y Allen Plotkin, *Low-Speed Aerodynamics: From Wing Theory to Panel Methods*, McGraw-Hill, 1991.
- [4] Yung-Cheng Fung, *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*, Dover Publications, Inc., 1969.



## ANEXO A. CÓDIGO MATLAB INTERPOLACIÓN LAGRANGE

```
function y0=interp_lagrange(x,y,x0)

% x son los nodos de la interpolacion.
% y son el valor de la funcion en dichos nodos.
% x0 son los valores dónde quiero interpolar la función
% y0 es el resultado de la interpolacion
y0=0;
n=length(x);
for j=1:n
    t=1;
    for i=1:n
        if i~=j
            t=t.*(x0-x(i))./(x(j)-x(i));
        end
    end
    y0=y0+t.*y(j);
end

end
```



## ANEXO B. CÓDIGO MATLAB DERIVADA LAGRANGE

```
function [Lpxn]=matriz_derivada(n,x)
m=length(x);
Lpx=zeros(m);

for i=1:m
    for j=1:m
        Lpx(i,j)=0;
        for k=1:m-1
            if k<j
                t=k;
            else
                t=k+1;
            end
            sum=1;
            for l=1:m
                if l~=j && t~=1
                    sum=sum*(x(i)-x(l));
                end
            end
            for l=1:m
                if l~=j
                    sum=sum/(x(j)-x(l));
                end
            end
            Lpx(i,j)=Lpx(i,j)+sum;
        end
    end
end
Lpxn=eye(m);

for i=1:n
    Lpxn=Lpxn*Lpx;
end
end
```



## ANEXO C. CÓDIGO MATLAB PROBLEMA 2D

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%  
% Este programa calcula el potencial de velocidades de perturbación para %  
% una placa plana bidimensional en regímenes estacionario y no %  
% estacionario así como el coeficiente de sustentación generado %  
%  
% Miguel Ángel Flores Caballero %  
%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
clear all,close all, clc  
tic  
  
noest=1; % 0 es estacionario y 1 es no estacionario  
  
% número de puntos en x  
Nx=21;  
Nx_incog=Nx-2;  
  
% parámetros del problema  
cuerda=1;  
alpha0=10*pi/180;  
Uinf=1;  
  
% defino geometria placa plana  
xv(1:Nx)=cuerda/2-cuerda/2*cos(pi*((1:Nx)-1)/(Nx-1));  
zv(1:Nx)=(cuerda-xv(1:Nx))*sin(alpha0);  
  
% defino geometria estela  
if noest==1  
    tiempo=50;  
    Dt=50e-3;  
    finT=fix(tiempo/Dt);  
    Incx=Dt*Uinf;  
    L_estela=Incx*finT;  
    Nx_estela=fix(L_estela/Incx);  
else  
    finT=0;  
    Nx_estela=50;  
    Incx=10*cuerda/Nx_estela;  
    Dt=Incx/Uinf;
```

```

end

xv((Nx+1):(Nx+Nx_estela))=xv(Nx)+(1:Nx_estela)*Incx;
zv((Nx+1):(Nx+Nx_estela))=0;

% pinto placa plana y estela
plot(xv,zv)
hold on
plot(xv,zv,'ro')
xlim([0 2])
ylim([0 1])

% inicializo la phi a 0 en el borde de salida y estela
phiestela(1:Nx_estela,1)=0;
phiestelatm1(1:Nx_estela,1)=0;
phisoltm1(1:Nx,1)=0;
phibs=0;
phibstm1=0;

% calculo matrices necesarias posteriormente
Dx_perfil=matriz_derivada(1,xv(1:Nx));
Dx2_perfil=matriz_derivada(2,xv(1:Nx));

Intx_perfil=inv(Dx_perfil(2:Nx,2:Nx));
pesos1=Intx_perfil(Nx-1,:);

Dx_estela=zeros(Nx_estela,Nx_estela+1);

for i=1:Nx_estela-1
    Dx_estela(i,i:i+1)=[-1/Incx, 1/Incx];
end
Dx_estela(Nx_estela,Nx_estela-1:Nx_estela)=[-1/Incx,1/Incx];
pesos2(1,1:Nx_estela+1)=[1/2, ones(1,Nx_estela-1), 1/2]*Incx;

% matrices derivada
Dx=zeros(Nx+Nx_estela);
Dx2=zeros(Nx,Nx+Nx_estela);

Dx(1:Nx,1:Nx)=Dx_perfil;
Dx(Nx+1:Nx+Nx_estela,Nx:Nx+Nx_estela)=Dx_estela;
Dx2(1:Nx,1:Nx)=Dx2_perfil;

% pesos
pesos=zeros(1,Nx+Nx_estela-1);
pesos(1:Nx-1)=pesos1;
if noest==1
    pesos(Nx-1:Nx+Nx_estela-1)=pesos(Nx-1:Nx+Nx_estela-1)+pesos2;
end

Dx0=zeros(Nx+Nx_estela);
Mat1=zeros(Nx_incog,Nx+Nx_estela);
Mat2=zeros(Nx_incog,Nx+Nx_estela);
Mat3=zeros(Nx_incog,Nx+Nx_estela);

```

```

for k=2:(Nx_incog+1)

    for l=1:Nx+Nx_estela
        if l==k
            Dx0(l,:)=Dx2(l,:);
        else
            Dx0(l,:)=(Dx(l,:)-Dx(k,:))./(xv(l)-xv(k));
        end
    end

    % calculo integral numerica
    Mat1(k-1,1:Nx+Nx_estela)=1/pi*pesos*Dx0(2:Nx+Nx_estela,:);

    % calculo integral analitica
    if noest==1
        Mat2(k-1,1:Nx+Nx_estela)=1/pi*Dx(k,:)*log((xv(Nx+Nx_estela)-xv(k))/xv(k));
    else
        Mat2(k-1,1:Nx+Nx_estela)=1/pi*Dx(k,:)*log((xv(Nx)-xv(k))/xv(k));
    end

    Mat3(k-1,1:Nx+Nx_estela)=Mat1(k-1,1:Nx+Nx_estela)+Mat2(k-1,1:Nx+Nx_estela);
end

if noest==0
    Mat3(Nx-1,:)=Dx(Nx,:);
else
    Mat3(Nx-1,:)=Uinf/2*Dx(Nx,:);
    Mat3(Nx-1,Nx)=Mat3(Nx-1,Nx)+1/Dt;
end

if noest==0
    for i=1:Nx_estela
        Mat3(:,Nx)=Mat3(:,Nx)+Mat3(:,Nx+i);
    end
end
Mat=Mat3(:,2:Nx);

Mat_estela=Mat3(1:Nx_incog,Nx+1:Nx+Nx_estela);

cont=-1;
while cont<finT
    cont=cont+1;
    tiempo(cont+1)=Dt*cont;
    z(cont+1,:)=zv+0.1*cuerda*cos(2*Uinf*0.5/cuerda*tiempo(cont+1));

    if noest==0
        alpha=Uinf*alpha0;
    else
        k=0.5;
        alpha=Uinf*alpha0+2*Uinf*k/10*sin(2*Uinf*k/cuerda*tiempo(cont+1));
    end

    % velocidades verticales
    w(1:Nx_incog)=-alpha-Mat_estela*phiestela;

```

```

if noest==0
    w(Nx_incog+1)=0;

else
    w(Nx_incog+1)=phibstm1/Dt-Uinf/2*Dx(Nx,1:Nx)*phisoltml1;
end

% calculo la solución del problema
phisol=[0; Mat\w'];
phibs=phisol(Nx);

if noest==1
    Cl(cont+1)=4/cuerda/Uinf*((phibs+phibstm1)/2+1/Uinf*pesos1*(phisol(2:Nx)-
phisoltml1(2:Nx))/Dt);
else
    Cl(cont+1)=4/cuerda/Uinf*phibs;
end

Cl_alpha(cont+1)=Cl(cont+1)/alpha0;
Cla(Nx-2)=Cl_alpha(cont+1);
u=Dx*[phisol; phiestela];
figure(4)

if noest==1
    subplot(2,1,1)
    plot(xv,[phisol; phiestela]);
    xlim([0 11])
    ylim([0 0.5])
    subplot(2,1,2)
    plot(xv,z(cont+1,:))
    xlim([0 11])
    ylim([-0.5 0.5])
else
    plot(xv(1:Nx),u(1:Nx))
end

% actualizo
phiestelatml=phiestela;
if noest==0
    phiestela(1:Nx_estela)=phibs;
else
    phiestela(2:Nx_estela)=phiestelatml(1:Nx_estela-1);
    phiestela(1)=phibs;
end
phibstm1=phibs;
phisoltml1=phisol;

end
clear i
c_k=besselh(1,2,k)/(besselh(1,2,k)+i*besselh(0,2,k));

omega=2*Uinf*k/cuerda;

```

```
h=(cuerda/10*exp(i*omega*tiempo));  
h1=(cuerda/10*i*omega*exp(i*omega*tiempo));  
h2=(-cuerda/10*omega^2*exp(i*omega*tiempo));  
  
Cltheo=real(2*pi/Uinf*(Uinf*alpha0-h1*c_k)-pi*cuerda/2/Uinf^2*h2);  
  
figure  
plot(Uinf/cuerda*tiempo,Cl)  
hold on  
plot(Uinf*tiempo/cuerda,Cltheo,'k')  
  
t=toc
```



## ANEXO D. CÓDIGO MATLAB PROBLEMA 3D MÉTODO 1

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%  
% Este programa calcula el potencial de velocidades de perturbación para %  
% una placa plana rectangular en régimen estacionario así como el %  
% coeficiente de sustentación generado %  
% Método 1 %  
% %  
% Miguel Ángel Flores Caballero %  
% %  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
clear all, close all, clc  
tic  
  
noest=0; % 0 es estacionario y 1 es no estacionario  
  
AR=5;  
  
cuerda=1;  
b=cuerda*AR;  
alpha0=10*pi/180;  
S=b*cuerda;  
Uinf=1;  
  
Nx=5;  
Ny=5;  
Nx_incog=Nx-2;  
Ny_incog=Ny-2;  
  
for i=1:Nx  
    yv(i,1:Ny)=-0.5*b*cos(pi*((1:Ny)-1)/(Ny-1));  
    xv(i,1:Ny)=cuerda/2-cuerda/2*cos(pi*(i-1)/(Nx-1));  
end  
  
% Defino geometría de la estela  
if noest==1  
    finT=4000;  
    Dt=0.05;  
    Incx=Dt*Uinf;
```

```

    Nx_estela=fix(10*cuerda/Incx);
else
    finT=0;
    Nx_estela=10;
    Incx=10*cuerda/Nx_estela;
    Dt=Incx/Uinf;
end

for i=1:Nx_estela
    yv(Nx+i,1:Ny)=-0.5*b*cos(pi*((1:Ny)-1)/(Ny-1));
    xv(Nx+i,1:Ny)=xv(Nx+i-1,1:Ny)+Incx;
end

% pinto ala y estela
figure(2)
hold off
for i=1:(Nx_estela+Nx)
    plot(xv(i,:),yv(i,:))
    hold on
end
for j=1:Ny
    plot(xv(:,j),yv(:,j))
    hold on
end

% matrices derivada
Dy_simple=matriz_derivada(1,yv(1,1:Ny));
Dy2_simple=matriz_derivada(2,yv(1,1:Ny));
Dy3_simple=matriz_derivada(3,yv(1,1:Ny));

for i=1:Nx
    Dy((i-1)*Ny+1:i*Ny,(i-1)*Ny+1:i*Ny)=Dy_simple;
    Dy2((i-1)*Ny+1:i*Ny,(i-1)*Ny+1:i*Ny)=Dy2_simple;
    Dy3((i-1)*Ny+1:i*Ny,(i-1)*Ny+1:i*Ny)=Dy3_simple;
end

Dy_estela(1:Ny,1:Nx*Ny)=Dy((Nx-1)*Ny+1:Nx*Ny,1:Nx*Ny);

Dx_simple=matriz_derivada(1,xv(1:Nx,1));
Dx2_simple=matriz_derivada(2,xv(1:Nx,1));
Dx3_simple=matriz_derivada(3,xv(1:Nx,1));

for j=1:Ny
    Dx(j:Ny:(Nx*Ny),j:Ny:(Nx*Ny))=Dx_simple;
    Dx2(j:Ny:(Nx*Ny),j:Ny:(Nx*Ny))=Dx2_simple;
    Dx3(j:Ny:(Nx*Ny),j:Ny:(Nx*Ny))=Dx3_simple;
end

% vectores integrales

Intx=inv(Dx_simple(2:Nx,2:Nx));
pesosx=Intx(Nx-1,:);

```

```

Inty=inv(Dy_simple(2:Ny,2:Ny));
pesosy=Inty(Ny-1,:);

Matl=zeros(Nx_incog*Ny_incog,Nx*Ny);

cont=0;
for i=1:Nx
    for j=1:Ny
        I=(i-1)*Ny+j;
        xpto(I)=xv(i,j);
        ypto(I)=yv(i,j);
        if i>1 && j>1 && j<Ny && i<Nx
            cont=cont+1;
            xcol(cont)=xpto(I);
            ycol(cont)=ypto(I);
            Dxcol(cont,:)=Dx(I,:);
            Dx2col(cont,:)=Dx2(I,:);
            Dx3col(cont,:)=Dx3(I,:);
            Dycol(cont,:)=Dy(I,:);
            Dy2col(cont,:)=Dy2(I,:);
            Dy3col(cont,:)=Dy3(I,:);
        end
    end
end

Dx0=zeros(Nx*Ny);
Dy0=zeros(Nx*Ny);

for k=1:(Nx_incog*Ny_incog)
    % k es el x0

    % Integral numérica

    for l=1:Nx*Ny
        if xpto(l)==xcol(k) && ypto(l)==ycol(k)
            Dx0(l,:)=1/2*Dx3col(k,:);
            Dy0(l,:)=0;
        else
            Dx0(l,:)=(Dx(l,:)-Dxcol(k,)-(xpto(l)-xcol(k))*Dx2col(k,:)-...
                (ypto(l)-ycol(k))*Dxcol(k,)*Dy).*...
                (xpto(l)-xcol(k))./((xpto(l)-xcol(k)).^2+(ypto(l)-
                ycol(k)).^2)^(3/2));
            Dy0(l,:)=(Dy(l,:)-Dycol(k,)-(xpto(l)-xcol(k))*Dxcol(k,)*Dy-...
                (ypto(l)-ycol(k))*Dy2col(k,)).*...
                (ypto(l)-ycol(k))./((xpto(l)-xcol(k)).^2+(ypto(l)-
                ycol(k)).^2)^(3/2));
        end
    end

end

Int0=Dx0+Dy0;
Int1y=zeros(Nx,Nx*Ny);

% primero en x luego en y

```

```

for i=1:Ny
    Int1y(i,:)=pesosx*Int0(i+Ny:Ny:(Nx-1)*Ny+i,:);
end

Int2y=pesosy*Int1y(2:Ny,:);
Int2x=zeros(1,length(Int2y));

% primero en y luego en x
% Int1x=zeros(Nx,Nx*Ny);
% for i=1:Nx
%     Int1x(i,:)=pesosy*Dx0((i-1)*Ny+2:(i-1)*Ny+Ny,:);
% end
%
% Int2x=pesosx*Int1x(2:Nx,:);

Mat1(k,:)=1/2/pi*(Int2x+Int2y);

% Integral analitica 1
x_esq=[xv(1,Ny),xv(1,1),xv(Nx,1),xv(Nx,Ny),xv(1,Ny)];
y_esq=[yv(1,Ny),yv(1,1),yv(Nx,1),yv(Nx,Ny),yv(1,Ny)];

for i=1:4
    l2(i)=sqrt((x_esq(i+1)-x_esq(i))^2+(y_esq(i+1)-y_esq(i))^2);
    l1(i)=sqrt((x_esq(i)-xcol(k))^2+(y_esq(i)-ycol(k))^2);
    l3(i)=sqrt((x_esq(i+1)-xcol(k))^2+(y_esq(i+1)-ycol(k))^2);
end

sen1=- (l2.^2+l1.^2-l3.^2) ./ (2.*l1.*l2);
sen2=(l2+l1.*sen1) ./ l3;

A=log((1+sen2(1))/(1+sen1(1)))-log((1-sen2(1))/(1-sen1(1)))-
log((1+sen2(3))/(1+sen1(3)))+log((1-sen2(3))/(1-sen1(3)));
B=log((1+sen2(2))/(1+sen1(2)))-log((1-sen2(2))/(1-sen1(2)))-
log((1+sen2(4))/(1+sen1(4)))+log((1-sen2(4))/(1-sen1(4)));

Mat1(k,:)=Mat1(k,:)+1/4/pi*(A*Dxcol(k,:)+B*Dycol(k,:));

% Integral analitica 2
cos1=sqrt(1-sen1.^2);
cos2=sqrt(1-sen2.^2);

l12=xcol(k);
l23=b/2+ycol(k);
l34=cuerda-xcol(k);
l14=b/2-ycol(k);

C=l34*(sen2(3)-sen1(3))+l12*(sen2(1)-sen1(1))+...
    l23*(0.5*(log((1+sen2(2))/(1+sen1(2)))-log((1-sen2(2))/(1-sen1(2))))-(sen2(2)-
sen1(2)))+...
    l14*(0.5*(log((1+sen2(4))/(1+sen1(4)))-log((1-sen2(4))/(1-sen1(4))))-(sen2(4)-
sen1(4)));

D=-l12*(cos2(1)-cos1(1))+l23*(cos2(2)-cos1(2))-l34*(cos2(3)-cos1(3))+l14*(cos2(4)-
cos1(4));

```

```

E=123*(sen2(2)-sen1(2))+114*(sen2(4)-sen1(4))+...
    134*(0.5*(log((1+sen2(3))/(1+sen1(3)))-log((1-sen2(3))/(1-sen1(3))))-(sen2(3)-
sen1(3)))+...
    112*(0.5*(log((1+sen2(1))/(1+sen1(1)))-log((1-sen2(1))/(1-sen1(1))))-(sen2(1)-
sen1(1)));

Mat1(k,:)=Mat1(k,:)+1/2/pi*(C*Dx2col(k,:)+D*2*Dycol(k,:)*Dx+Dy2col(k,:)*E);

Matestela(k,1:Nx*Ny)=0;

for i=1:Ny-1
    y1=yv(1,i);
    y2=yv(1,i+1);
    incy=y2-y1;
    if y1~=ycol(k) && y2~=ycol(k)
        F=-1+log((y2-ycol(k))/(y1-ycol(k)))+(y1-ycol(k))/incy*log((y2-
ycol(k))/(y1-ycol(k)));
        G=1-(y1-ycol(k))/incy*log((y2-ycol(k))/(y1-ycol(k)));
        Matestela(k,:)=Matestela(k,:)+Dy((Nx-1)*Ny+i,:)*F+Dy((Nx-1)*Ny+i+1,:)*G;
    elseif y2==ycol(k)
        Dy1=y2-y1;
        v1=Dy((Nx-1)*Ny+i,:);
    elseif y1==ycol(k)
        Dy2=y2-y1;
        v2=Dy((Nx-1)*Ny+i+1,:);
    end
end
Matestela(k,:)=Matestela(k,:)-v1+v2-Dycol(k,:)*log(Dy2/Dy1);
Mat1(k,:)=Mat1(k,:)+1/2/pi*Matestela(k,:);

end

if noest==0
    Mat1(((Nx_incog*Ny_incog)+1):((Nx_incog+1)*Ny_incog),:)=Dx(((Nx-1)*Ny+2):(Nx*Ny-
1),:);
end

Mat2(:,1:(Nx-1)*Ny)=Mat1(:,(Ny+1):(Nx*Ny));

for i=1:(Nx-1)
    Mat3(:,(i-1)*Ny_incog+1:i*Ny_incog)=Mat2(:,(i-1)*Ny+2:i*Ny-1);
end

if noest==0
    alpha=Uinf*alpha0;
end

w(1:Nx_incog*Ny_incog)=-alpha;
w(Nx_incog*Ny_incog+1:(Nx_incog+1)*Ny_incog)=0;

sol=Mat3\w';
phisolv=zeros(Ny,1);
for i=2:Nx
    phisolv=[phisolv; 0; sol((i-2)*(Ny-2)+1:(i-1)*(Ny-2)); 0];
end

```

```
n=length(sol);
phibs=[0; sol((n-Ny_incog)+1:n); 0];
uv=Dx*phisolv;
for i=1:Nx
    for j=1:Ny
        I=(i-1)*Ny+j;
        phisolm(i,j)=phisolv(I);
        um(i,j)=uv(I);
    end
end
figure(3)
surf(xv(1:Nx,1),yv(1,1:Ny),phisolm')

CL=4/S*pesosy*phibs(2:Ny);
CLalpha=CL/alpha0;

t=toc
```

## ANEXO E. CÓDIGO MATLAB PROBLEMA 3D MÉTODO 2

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%  
% Este programa calcula el potencial de velocidades de perturbación para %  
% una placa plana rectangular en régimen estacionario así como el %  
% coeficiente de sustentación generado %  
% Método 2 %  
% %  
% Miguel Ángel Flores Caballero %  
% %  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
clear all, close all, clc  
tic  
  
noest=0; % 0 es estacionario y 1 es no estacionario  
  
AR=5;  
  
cuerda=1;  
b=cuerda*AR;  
alpha0=10*pi/180;  
S=b*cuerda;  
Uinf=1;  
  
Nx=5;  
Ny=5;  
Nx_incog=Nx-2;  
Ny_incog=Ny-2;  
  
% Defino geometria del ala  
  
for i=1:Nx  
    yv(i,1:Ny)=-0.5*b*cos(pi*((1:Ny)-1)/(Ny-1));  
    xv(i,1:Ny)=cuerda/2-cuerda/2*cos(pi*(i-1)/(Nx-1));  
end  
  
% Defino geometría de la estela  
if noest==1  
    finT=4000;
```

```

Dt=0.05;
Incx=Dt*Uinf;
Nx_estela=fix(10*cuerda/Incx);
else
    finT=0;
    Nx_estela=10;
    Incx=10*cuerda/Nx_estela;
    Dt=Incx/Uinf;
end

for i=1:Nx_estela
    yv(Nx+i,1:Ny)=-0.5*b*cos(pi*((1:Ny)-1)/(Ny-1));
    xv(Nx+i,1:Ny)=xv(Nx+i-1,1:Ny)+Incx;
end

% pinto ala y estela
figure(2)
hold off
for i=1:(Nx)
    plot(xv(i,:),yv(i,:))
    hold on
end
for j=1:Ny
    plot(xv(1:Nx,j),yv(1:Nx,j))
    hold on
end
for i=1:(Nx)
    plot(xv(i,:),yv(i,:), 'rx')
    hold on
end

% matrices derivada
Dy_simple=matriz_derivada(1,yv(1,1:Ny));
Dy2_simple=matriz_derivada(2,yv(1,1:Ny));
Dy3_simple=matriz_derivada(3,yv(1,1:Ny));

for i=1:Nx
    Dy((i-1)*Ny+1:i*Ny,(i-1)*Ny+1:i*Ny)=Dy_simple;
    Dy2((i-1)*Ny+1:i*Ny,(i-1)*Ny+1:i*Ny)=Dy2_simple;
    Dy3((i-1)*Ny+1:i*Ny,(i-1)*Ny+1:i*Ny)=Dy3_simple;
end

Dy_estela(1:Ny,1:Nx*Ny)=Dy((Nx-1)*Ny+1:Nx*Ny,1:Nx*Ny);

Dx_simple=matriz_derivada(1,xv(1:Nx,1));
Dx2_simple=matriz_derivada(2,xv(1:Nx,1));
Dx3_simple=matriz_derivada(3,xv(1:Nx,1));

for j=1:Ny
    Dx(j:Ny:(Nx*Ny),j:Ny:(Nx*Ny))=Dx_simple;
    Dx2(j:Ny:(Nx*Ny),j:Ny:(Nx*Ny))=Dx2_simple;
    Dx3(j:Ny:(Nx*Ny),j:Ny:(Nx*Ny))=Dx3_simple;
end

```

```

% vectores integrales

Intx=inv(Dx_simple(2:Nx,2:Nx));
pesosx=Intx(Nx-1,:);

Inty=inv(Dy_simple(2:Ny,2:Ny));
pesosy=Inty(Ny-1,:);

Mat1=zeros(Nx_incog*Ny_incog,Nx*Ny);

cont=0;
for i=1:Nx
    for j=1:Ny
        I=(i-1)*Ny+j;
        xpto(I)=xv(i,j);
        ypto(I)=yv(i,j);
        if i>1 && j>1 && j<Ny && i<Nx
            cont=cont+1;
            xcol(cont)=xpto(I);
            ycol(cont)=ypto(I);
            Dxcol(cont,:)=Dx(I,:);
            Dx2col(cont,:)=Dx2(I,:);
            Dx3col(cont,:)=Dx3(I,:);
            Dycol(cont,:)=Dy(I,:);
            Dy2col(cont,:)=Dy2(I,:);
            Dy3col(cont,:)=Dy3(I,:);
        end
    end
end

Dx0=zeros(Nx*Ny);
Dy0=zeros(Nx*Ny);

for k=1:(Nx_incog*Ny_incog)
    % k es el x0

    % Integral numérica

    for l=1:Nx*Ny
        if xpto(l)==xcol(k) && ypto(l)==ycol(k)
            Dx0(l,:)=0;
            Dy0(l,:)=0;
        else
            Dx0(l,:)=(Dx(l,:)-Dxcol(k,:)-(xpto(l)-xcol(k))*Dx2col(k,:)-...
                (ypto(l)-ycol(k))*Dxcol(k,:)*Dy-0.5*(xpto(l)-xcol(k))^2*Dx3col(k,:)-
            ...
                0.5*(ypto(l)-ycol(k))^2*Dy2col(k,:)*Dx-...
                (xpto(l)-xcol(k))*(ypto(l)-ycol(k))*Dx2col(k,:)*Dy).*...
                (xpto(l)-xcol(k))./((xpto(l)-xcol(k)).^2+(ypto(l)-
                ycol(k)).^2)^(3/2));
            Dy0(l,:)=(Dy(l,:)-Dycol(k,:)-(xpto(l)-xcol(k))*Dxcol(k,:)*Dy-...
                (ypto(l)-ycol(k))*Dy2col(k,:)-0.5*(xpto(l)-xcol(k))^2*Dx2col(k,:)*Dy-
            ...

```

```

        0.5*(ypto(1)-ycol(k))^2*Dy3col(k,:)-...
        (xpto(1)-xcol(k))*(ypto(1)-ycol(k))*Dy2col(k,:)*Dx).*...
        (ypto(1)-ycol(k))./(((xpto(1)-xcol(k)).^2+(ypto(1)-
ycol(k)).^2)^(3/2));
    end
end

Int0=Dx0+Dy0;
Int1y=zeros(Nx,Nx*Ny);
Int2y=zeros(1,Nx*Ny);

% primero en x luego en y
for i=1:Ny
    Int1y(i,:)=pesosx*Int0(i+Ny:Ny:(Nx-1)*Ny+i,:);
end

Int2y=pesosy*Int1y(2:Ny,:);

% primero en y luego en x
Int2x=zeros(1,length(Int2y));
Int1x=zeros(Nx,Nx*Ny);
% for i=1:Nx
%     Int1x(i,:)=pesosy*Dx0((i-1)*Ny+2:(i-1)*Ny+Ny,:);
% end
%
%     Int2x=pesosx*Int1x(2:Nx,:);

Mat1(k,:)=1/2/pi*(Int2x+Int2y);

% Integral analitica 1
x_esq=[xv(1,Ny),xv(1,1),xv(Nx,1),xv(Nx,Ny),xv(1,Ny)];
y_esq=[yv(1,Ny),yv(1,1),yv(Nx,1),yv(Nx,Ny),yv(1,Ny)];

for i=1:4
    l2(i)=sqrt((x_esq(i+1)-x_esq(i))^2+(y_esq(i+1)-y_esq(i))^2);
    l1(i)=sqrt((x_esq(i)-xcol(k))^2+(y_esq(i)-ycol(k))^2);
    l3(i)=sqrt((x_esq(i+1)-xcol(k))^2+(y_esq(i+1)-ycol(k))^2);
end

sen1=- (l2.^2+l1.^2-l3.^2)./(2.*l1.*l2);
sen2=(l2+l1.*sen1)./l3;

A=log((1+sen2(1))/(1+sen1(1)))-log((1-sen2(1))/(1-sen1(1)))-
log((1+sen2(3))/(1+sen1(3)))+log((1-sen2(3))/(1-sen1(3)));
B=log((1+sen2(2))/(1+sen1(2)))-log((1-sen2(2))/(1-sen1(2)))-
log((1+sen2(4))/(1+sen1(4)))+log((1-sen2(4))/(1-sen1(4)));

Mat1(k,:)=Mat1(k,:)+1/4/pi*(A*Dxcol(k,:)+B*Dycol(k,:));

% Integral analitica 2
cos1=sqrt(1-sen1.^2);
cos2=sqrt(1-sen2.^2);

l12=xcol(k);
l23=b/2+ycol(k);

```

```

l34=cuerda-xcol(k);
l14=b/2-ycol(k);

C=l34*(sen2(3)-sen1(3))+l12*(sen2(1)-sen1(1))+...
    l23*(0.5*(log((1+sen2(2))/(1+sen1(2)))-log((1-sen2(2))/(1-sen1(2))))-(sen2(2)-
sen1(2)))+...
    l14*(0.5*(log((1+sen2(4))/(1+sen1(4)))-log((1-sen2(4))/(1-sen1(4))))-(sen2(4)-
sen1(4)));

D=-l12*(cos2(1)-cos1(1))+l23*(cos2(2)-cos1(2))-l34*(cos2(3)-cos1(3))+l14*(cos2(4)-
cos1(4));

E=l23*(sen2(2)-sen1(2))+l14*(sen2(4)-sen1(4))+...
    l34*(0.5*(log((1+sen2(3))/(1+sen1(3)))-log((1-sen2(3))/(1-sen1(3))))-(sen2(3)-
sen1(3)))+...
    l12*(0.5*(log((1+sen2(1))/(1+sen1(1)))-log((1-sen2(1))/(1-sen1(1))))-(sen2(1)-
sen1(1)));

Mat1(k,:)=Mat1(k,:)+1/2/pi*(C*Dx2col(k,:)+D*2*Dycol(k,:)*Dx+Dy2col(k,:)*E);

% Integral analítica 3
H=0.5*l34^2*(sen2(3)-sen1(3))-0.5*l12^2*(sen2(1)-sen1(1))+...
    0.5*l23^2*((cos2(2)-cos1(2))+(1/cos2(2)-1/cos1(2)))-...
    0.5*l14^2*((cos2(4)-cos1(4))+(1/cos2(4)-1/cos1(4)));
J=0.5*l34^2*((cos2(3)-cos1(3))+(1/cos2(3)-1/cos1(3)))+...
    -0.5*l12^2*((cos2(1)-cos1(1))+(1/cos2(1)-1/cos1(1)))-...
    0.5*l23^2*(sen2(2)-sen1(2))+0.5*l14^2*(sen2(4)-sen1(4));
K=-1.5*l34^2*(cos2(3)-cos1(3))+1.5*l12^2*(cos2(1)-cos1(1))+...
    1.5*l23^2*((sen2(2)-sen1(2))-0.5*(log((1+sen2(2))/(1+sen1(2)))-log((1-
sen2(2))/(1-sen1(2))))) -...
    1.5*l14^2*((sen2(4)-sen1(4))-0.5*(log((1+sen2(4))/(1+sen1(4)))-log((1-
sen2(4))/(1-sen1(4))))) ;
L=-1.5*l34^2*((sen2(3)-sen1(3))-0.5*(log((1+sen2(3))/(1+sen1(3)))-log((1-
sen2(3))/(1-sen1(3))))) +...
    1.5*l12^2*((sen2(1)-sen1(1))-0.5*(log((1+sen2(1))/(1+sen1(1)))-log((1-
sen2(1))/(1-sen1(1))))) -...
    1.5*l23^2*(cos2(2)-cos1(2))+1.5*l14^2*(cos2(4)-cos1(4));
Mat1(k,:)=Mat1(k,:)+1/4/pi*(H*Dx3col(k,:)+J*Dy3col(k,:)+K*Dx2col(k,:)*Dy+...
    L*Dy2col(k,:)*Dx);

% Integral analítica estela

Matestela(k,1:Nx*Ny)=0;

for i=1:Ny-1
    y1=yv(1,i);
    y2=yv(1,i+1);
    incy=y2-y1;
    if y1~=ycol(k) && y2~=ycol(k)
        F=-1+log((y2-ycol(k))/(y1-ycol(k)))+(y1-ycol(k))/incy*log((y2-
ycol(k))/(y1-ycol(k)));
        G=1-(y1-ycol(k))/incy*log((y2-ycol(k))/(y1-ycol(k)));
        Matestela(k,:)=Matestela(k,:)+Dy((Nx-1)*Ny+i,:)*F+Dy((Nx-1)*Ny+i+1,:)*G;
    elseif y2==ycol(k)
        Dy1=y2-y1;

```

```

        v1=Dy((Nx-1)*Ny+i,:);
    elseif y1==ycol(k)
        Dy2=y2-y1;
        v2=Dy((Nx-1)*Ny+i+1,:);
    end
end
Matestela(k,:)=Matestela(k,:)-v1+v2-Dycol(k,:)*log(Dy2/Dy1);
Mat1(k,:)=Mat1(k,:)+1/2/pi*Matestela(k,:);

end

if noest==0
    Mat1((Nx_incog*Ny_incog)+1:((Nx_incog+1)*Ny_incog),:)=Dx((Nx-1)*Ny+2:(Nx*Ny-1),:);
end

Mat2(:,1:(Nx-1)*Ny)=Mat1(:,(Ny+1):(Nx*Ny));

for i=1:(Nx-1)
    Mat3(:,(i-1)*Ny_incog+1:i*Ny_incog)=Mat2(:,(i-1)*Ny+2:i*Ny-1);
end

if noest==0
    alpha=Uinf*alpha0;
end

w(1:Nx_incog*Ny_incog)=-alpha;
w(Nx_incog*Ny_incog+1:(Nx_incog+1)*Ny_incog)=0;

sol=Mat3\w';
phisolv=zeros(Ny,1);
for i=2:Nx
    phisolv=[phisolv; 0; sol((i-2)*(Ny-2)+1:(i-1)*(Ny-2)); 0];
end
n=length(sol);
phibs=[0; sol((n-Ny_incog)+1:n); 0];
uv=Dx*phisolv;
for i=1:Nx
    for j=1:Ny
        I=(i-1)*Ny+j;
        phisolm(i,j)=phisolv(I);
        um(i,j)=uv(I);
    end
end
end
figure(3)
surf(xv(1:Nx,1),yv(1,1:Ny),phisolm')

CL=4/S*pesosy*phibs(2:Ny);
CLalpha=CL/alpha0

t=toc

```

