FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

La categoría de Lusternik-Schnirelmann de los espacios finitos. Enunciado y discusión de un problema

Un Trabajo Fin de Grado realizado por Álvaro Pavón Díaz

Dirigido por los tutores:
Antonio Quintero Toscano
Jose Antonio Vilches Alarcón

Presentación

El estudio de los espacios finitos es muy apropiado como fuente de trabajos fin de grado pues, aunque el lenguaje básico es accesible a los alumnos de último año, lleva casi inmediatamente a problemas abiertos de interés.

Este trabajo es una aproximación elemental al uso de invariantes numéricos del tipo Lusternik-Schnirelmann en la topología de los espacios finitos (o, equivalentemente, en teoría de conjuntos , de acuerdo con la conocida identificación debida a P.S. Alexandrov). El desarrollo del mismo ha sido prácticamente simultáneo con la aparición de trabajos de investigación centrados en este tipo de invariantes u otros de tipo combinatorio muy relacionados, como se puede comprobar en la bibliografía.

Los tutores

Los tutores y el alumno agradecen la ayuda de Ramón Flores y su interés en el trabajo.

Índice general

1. Definiciones de topología general **7**
1.1. Base de y para una topología 8
1.2. Axiomas de separación 9
1.3. Construyendo nuevos espacios a partir de otros dados 10
1.3.1. Topología unión 10
1.3.2. Topología producto 10
1.3.3. Espacio cociente 11
1.3.4. Ejemplos 11
1.4. Conexión y contractibilidad 12

2. Espacios de Alexandrov **15**
2.1. Definición de A-espacio. Abierto mínimo. 15
2.2. Conexión y homotopía en A-espacios. Modelo T_0 de un A-espacio. 15
2.3. Conjuntos parcialmente ordenados (posets) y A-espacios. 16
2.4. Homotopía y orden 18
2.5. A-espacios y poliedros 19
2.5.4. Poliedros asociados a espacios finitos 22
2.5.5. Espacios finitos asociados a complejos. F-modelos de poliedros . . . 24

3. La categoría de Lusternik-Schnirelmann **25**
3.1. Definición de la categoría LS. Invariancia por homotopía 25
3.2. Ejemplos 26
3.3. LS-recubrimientos relativos a un punto 26
3.4. Versión de la categoría LS en el sentido de Whitehead 28

4. La categoría LS de los espacios finitos **33**
4.1. Definición, ejemplos y observaciones 33
4.2. Arboricidad y la categoría simplicial en grafos 39
4.3. El problema de la caracterización de la categoría LS de espacios finitos de altura uno 39

Resumen

El trabajo presenta el invariante homotópico conocido como categoría de Lusternik-Schnirelmann (categoría LS, para simplificar) para espacios finitos. La topología y homotopía de estos espacios se resumen en un capítulo inicial y se continúa con los elementos de la categoría LS clásica. El capítulo final está abierto, ya que plantea problemas sobre la categoría LS de espacios finitos de los que desconocemos la solución. Una serie de ejemplos, comentarios y resultados conocidos sirven para presentar los problemas.

Abstract

This work focuses on the homotopical invariant termed Lusternik-Schnirelmann category (LS category, for short) of finite spaces. A brief account of the topology and homotopy of this class of spaces is followed by an introduction of the basics of classical LS category. The last chapter contains several open questions together with a series of related examples, observations and known results.

Introducción

La observación de que los conjuntos ordenados poseen una topología intrínseca se debe a P.S. Alexandrov (ver [1]) y A.W. Tucker (ver [14]), que de manera independiente descubrieron que los conjuntos ordenados (llamados posets) podían ser identificados con aquellos espacios topológicos en los que las intersecciones arbitrarias de abiertos también son conjuntos abiertos. Estos espacios son llamados *espacios de Alexandrov* o *A-espacios*.

Es claro que los A-espacios con la propiedad de separación de Hausdorff son sólo los espacios discretos, esto es, desde el punto de vista de la topología métrica del análisis y la geometría, los A-espacios carecerían de interés. No obstante, la topología algebraica de estos espacios no es trivial en absoluto.

De hecho, M.McCord ([11]) probó que los invariantes algebraicos de cualquier poliedro compacto (por ejemplo el grupo fundamental o la homología) pueden ser realizados por un espacio finito. Mas explícitamente, este autor probó que existe una correspondencia natural que a cada espacio finito X le asigna un poliedro $|\mathcal{O}(X)|$ y una equivalencia de homotopía débil natural $\psi_X : X \to |\mathcal{O}(X)|$. De hecho, el proceso puede ser revertido salvo equivalencia de homotopía débil.

Una equivalencia de homotopía débil $f : X \to Y$ induce isomorfismos entre los invariantes algebraicos de X e Y que estén construidos a partir de poliedros (como son el grupo fundamental y la homología). Para ilustrar con un ejemplo esta noción, consideremos la aplicación $f : X \to Y$ que recoge la semirrecta $X = \mathbb{R}_+$ en el espacio compacto Y, que es conocido como círculo polaco, y que está descrito en la siguiente figura.

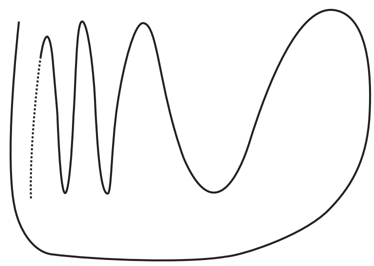


Figura 1: Círculo polaco

Se puede comprobar que f es una equivalencia de homotopía débil de acuerdo con la definición en Subsección 2.5.4. Sin embargo, f no es una equivalencia de homotopía, pues para ello ha de existir una aplicación $f' : Y \to X$ tal que $f \circ f' \simeq id_Y$ y $f' \circ f \simeq id_X$. Ahora bien, el espacio Y es conexo y compacto, $f'(Y)$ sería un arco y una homotopía $H : f' \circ f \simeq id_Y$ no podría ser continua en los puntos del segmento recto. En efecto, dados un punto a de este segmento y una sucesión $x_n \to a$ fuera del segmento, para cada n la restricción $H|_{\{x_n\}\times I}$ es un camino en Y que comienza en x_n y termina en algún punto del arco $f'(Y)$. La única forma de desplazarse de x_n, para n suficientemente grande, debe ser hacia la derecha. Igualmente, $H|_{\{a\}\times I}$ es un camino con inicio en a y terminación en $f'(Y)$.

Pero esto entra en contradicción con la continuidad de H, ya que a sólo puede moverse usando el segmento y el arco inferior.

Además de los invariantes algebraicos, hay otros invariantes que lo son del tipo de homotopía, pero no del tipo de homotopía débil. Un ejemplo es la llamada *categoría de Lusternik-Schnirelmann* (o categoría LS) que surgió como una cota inferior para funciones diferenciables arbitrarias de una variedad. La categoría LS (definida como el menor número de abiertos de un espacio cuya inclusión es homotópicamente trivial) encontró su lugar dentro de la topología tras los trabajos de R.H. Fox, y actualmente es el prototipo de los llamados invariantes numéricos de la topología algebraica. Ver [4] para una referencia muy completa sobre estos invariantes.

A diferencia del grupo fundamental o la homología, la categoría LS no es invariante del tipo de homotopía débil. Por ejemplo, nuestro espacio Y tiene categoría LS infinita mientras $X = \mathbb{R}_+$ tiene categoría 1 por ser contráctil.

Por tanto, el teorema de McCord pierde su papel esencial para la categoría LS, y la consideración de la categoría LS para espacios finitos amplía los temas de estudio de la teoría de homotopía de estos espacios incluidos en [2] y [9].

Este es un trabajo abierto que presenta algunos ejemplos y plantea varios problemas relativos a la categoría LS de los espacios finitos: su relación con la categoría LS clásica y con un nuevo invariante numérico de tipo simplicial dado en [7]. Las soluciones a estos problemas no parecen inmediatas.

Pasamos a detallar el contenido de esta memoria: el capítulo 1 recoge los resultados de topología general necesarios en el resto del trabajo, mientras que el capítulo 2 es una recopilación de la topología de los A-espacios. Ambos capítulos han sido resumidos de [3] y ampliados con aquellos resultados puntuales necesarios para el último capítulo. La casi totalidad de los resultados recogidos en ellos sólo necesitan el conocimiento de las asignaturas del grado.

El capítulo 3 es una breve introducción a la categoría LS clásica. Aquí nuestro trabajo ha consistido en adaptar los resultados necesarios para que puedan ser enunciados con sólo los conocimientos del grado.

El capítulo 4 presenta de la categoría LS de los espacios finitos, dando ejemplos y algunos resultados contenidos en [7] y [8], y en particular su relación con la llamada categoría LS simplicial. El trabajo queda abierto, pues la última sección de este capítulo plantea una serie de problemas sobre la categoria LS de espacios finitos.

Capítulo 1

Definiciones de topología general

Este capítulo introductorio recoge los diferentes conceptos básicos de topología necesarios en este trabajo. Los detalles se pueden encontrar en cualquier libro de de topología general (por ejemplo, [13]).

Recordemos que una *topología*, $\mathcal{T}$, sobre un conjunto X es una colección de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

1. $\emptyset$ y X están en $\mathcal{T}$.

2. La intersección finita de conjuntos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

3. La unión arbitraria de conjuntos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Al par $(X, \mathcal{T})$ se le llama *espacio topológico*. Los conjuntos de $\mathcal{T}$ son llamados *conjuntos abiertos* de $(X, \mathcal{T})$. Al complementario de un conjunto abierto se le llama *conjunto cerrado*.

Notación 1.0.1. Cuando la topología $\mathcal{T}$ se supone implícitamente, o no es relevante en el contexto, denotamos simplemente por X al espacio topológico, que también es abreviadamente referido como "espacio".

Los dos ejemplos extremos de topología son la *topología discreta* en la que todos los conjuntos son abiertos, (o equivalentemente todos los conjuntos unitarios son abiertos) y la *topología indiscreta* o *trivial* que es la topología en la que únicamente $\emptyset$ y X son los abiertos. Es obvio que la topología discreta es la mayor topología posible, y la indiscreta, la menor. Recordemos que un espacio topológico X se dice *compacto* si de todo recubrimiento de X por abiertos se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, dados $A \subseteq X$ y $x \in X$, se dice que x es *interior a* A en $(X, \mathcal{T})$ (o que A es *entorno* de x) si existe un abierto G con $x \in G \subseteq A$. Se llama *interior* de A en $(X, \mathcal{T})$ al conjunto $int(A) = \{x \in X; x \text{ es interior a } A\}$. Una familia $\mathcal{V}$ de entornos de x se dice *base de entornos* de x si para todo entorno N de x, existe $V \in \mathcal{V}$ con $V \subseteq N$.

Igualmente, $x \in X$ es llamado *punto adherente* a A si todo abierto G con $x \in G$ cumple $G \cap A \neq \emptyset$. Se llama *clausura* de A al conjunto $\overline{A} = \{x \in X; x \text{ es adherente a } A\}$. Un subconjunto A de un espacio X se dice que es *denso* en X si $\overline{A} = X$.

Se cumple que $int(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$. Un conjunto $A \subseteq X$ es *cerrado* en $(X, \mathcal{T})$ si y sólo si $\overline{A} = A$ y es abierto si y sólo si $int(A) = A$.

La topología relativa a un subconjunto $A \subseteq X$ se define de la siguiente manera: sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y sea $A \subseteq X$. La topología sobre A,

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap G; G \in \mathcal{T}\}$$

se denomina *topología relativa* a A. Al par $(A, \mathcal{T}_A)$ se le llama *subespacio topológico* de $(X, \mathcal{T})$. Obsérvese que si A es abierto en $(X, \mathcal{T})$, entonces todo abierto de $(A, \mathcal{T}_A)$ lo es de $(X, \mathcal{T})$.

Por medio de una topología se da una estructura de proximidad entre los puntos de un conjunto. La aplicaciones continuas entre espacios topológicos son aquellas que preservan dicha estructura de proximidad. Recordamos que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos es *continua* si $f^{-1}(V)$ es un abierto de X para cada abierto V de Y. Una aplicación continua es un *homeomorfismo* si f es biyectiva y su inversa f^{-1} es también continua.

Los espacios topológicos de mayor interés en la geometría y en el análisis son los espacios métricos. Una distancia en un conjunto X es una función

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$.

2. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

3. $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$

4. (*Desigualdad triangular*) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ para todos $x, y, z \in X$

Al par (X, d) se le llama *espacio métrico*. En cualquier espacio métrico se definen la bola abierta de radio $\epsilon > 0$ y centro x como el conjunto $B_d(x, \epsilon) = \{y | d(x, y) < \epsilon\}$ y la bola cerrada como $B_d[x, \epsilon] = \{y | d(x, y) \leq \epsilon\}$.

La *topología de un espacio métrico* (X, d) está formada por el conjunto vacío y todos aquellos conjuntos $A \subseteq X$ tales que para todo $a \in A$ existe $\epsilon > 0$ con $B_d(a, \epsilon) \subseteq A$.

1.1. Base de y para una topología

En la definición de la topología de un espacio métrico los abiertos no están dados explícitamente, sino descritos a partir de ciertos abiertos generadores (las bolas abiertas), ajustándose este hecho a la siguiente definición.

Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, una subfamilia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ se dice que es una *base* de la topología $\mathcal{T}$ (o *base de abiertos*) si todo abierto no vacío de $\mathcal{T}$ es unión de abiertos de $\mathcal{B}$. Equivalentemente, $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ si y sólo si para cada abierto U y para cada $x \in U$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Si $\mathcal{B}$ es una base de $(X, \mathcal{T})$ y $A \subseteq X$, entonces $\mathcal{B}_A = \{B \cap A; B \in \mathcal{B}\}$ es una base de la topología relativa $\mathcal{T}_A$.

En un espacio métrico (X, d) la familia de las bolas abiertas de centro x y radio r para todo $x \in X$ y $r > 0$ es una base de la topología de (X, d).

Una *base* $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ se dice *minimal* si para cualquier $B \in \mathcal{B}$ la familia $\mathcal{B} \backslash \{B\}$ deja de ser base de $\mathcal{T}$. Por ejemplo, una base de la topología discreta es la formada por todos los conjuntos unitarios $\{x\}$, $x \in X$. Además, esta base es minimal.

La siguiente definición nos da un método para construir una topología a partir de una familia dada de conjuntos. Una *base para una topología* sobre X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X, llamados *elementos básicos*, que cumplen las siguientes propiedades:

1. Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x.

2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x, tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Si $\mathcal{B}$ satisface estas dos condiciones, la familia $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ formada por los conjuntos $U \subseteq X$ tales que para cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subseteq U$, es la única topología sobre X que tiene a $\mathcal{B}$ como base y se denomina *topología generada por* $\mathcal{B}$.

Añadiendo una tercera condición a la definición de base se tiene la siguiente caracterización de base minimal para una topología. Un conjunto $\mathcal{B}$ de subconjuntos no vacíos de X es una *base minimal* para una topología si y sólo si se cumplen las tres propiedades siguientes:

1. Todo punto de X está en algún conjunto B de $\mathcal{B}$.
2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
3. Si una unión de conjuntos B_i de $\mathcal{B}$ está también en $\mathcal{B}$, entonces la unión es igual a uno de los B_i.

Todo homeomorfismo $f : X \to Y$ transforma una base $\mathcal{B}$ de abiertos de X en una base de abiertos de Y, $\mathcal{B}_f = \{f(B); B \in \mathcal{B}\}$. Si $\mathcal{B}$ es una base minimal de X, entonces $\mathcal{B}_f$ también es minimal.

1.2. Axiomas de separación

Es bien sabido que la unicidad de puntos límite, crucial en tantos resultados de análisis, es consecuencia de la famosa *propiedad de separación de Hausdorff*, llamada T_2 en la siguiente jerarquía de propiedades de separación:

1. X es un *espacio* T_0 si para dos puntos distintos $x, y \in X$, existe un abierto G tal que, o bien $x \in G$ e $y \notin G$, o bien $y \in G$ y $x \notin G$.
2. X es un *espacio* T_1 si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existen abiertos G_1, G_2 tales que: $x \in G_1, y \notin G_1$, y también $y \in G_2, x \notin G_2$.
3. X es un *espacio* T_2 (o *espacio de Hausdorff*) si existe en X un par de abiertos disjuntos de modo que uno contiene a x y el otro a y.
4. X es un *espacio* T_3 (o *espacio regular*) si es un *espacio* T_1 y para cada punto $x \in X$ y cualquier cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$ existen abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.
5. X es un *espacio* T_4 (o *espacio normal*) si es un *espacio* T_1 y para cada par de cerrados disjuntos $F_1, F_2 \subseteq X$ existen abiertos disjuntos U y V tales que $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$.

Obviamente, $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$. Además, $(A, \mathcal{T}_A)$ es un espacio T_i si $(X, \mathcal{T})$ también es un espacio T_i, para $i = 0, 1, 2$. Se tienen las siguientes equivalencias:

1. X es T_0 si y sólo si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ o bien $x \notin \overline{\{y\}}$, o bien $y \notin \overline{\{x\}}$.
2. X es T_1 si y sólo si para todo $x \in X$, entonces $\{x\}$ es cerrado, es decir, $\{x\} = \overline{\{x\}}$, lo que a su vez equivale a pedir que $\{x\} = \cap_{x \in \mathcal{G}_x} G$, siendo $\mathcal{G}_x$ la familia de abiertos que contiene a x.

3. X es T_2 si y sólo si para todo $x \in X$, $\{x\} = \cap_{G \in \mathcal{G}_x} \overline{G}$.

Definición 1.2.1. Sea X un espacio topológico T_1. Se dirá que X es *funcionalmente normal* si para todo par de cerrados disjuntos A, B existe una aplicación continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.

El conocido como Lema de Urysohn ([13]; Teorema 33.1) prueba que un espacio es normal si y sólo si es funcionalmente normal. En el siguiente lema se establece que los espacios métricos son funcionalmente normales.

Lema 1.2.2. Todo espacio métrico (X, d) es funcionalmente normal.

Demostración. Recordemos que la distancia de un punto $x \in X$ a un conjunto $A \subseteq X$ está definida como $d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a); a \in A\}$ y que la función $x \mapsto d(x, A)$ es continua en x. Además, si A es cerrado $x \in A \Leftrightarrow d(x, A) = 0$. Así que dados dos cerrados disjuntos $A, B \subseteq X$, se puede definir la siguiente función

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

La buena definición de f sigue de que $d(x, A) = d(x, B) = 0$ lleva a $x \in A \cap B = \emptyset$. Evidentemente, los valores de f están en el intervalo $[0, 1]$. Más aún, dado $x \in A$, se tiene $f(x) = 0$ pues $d(x, A) = 0$. Mientras que si $x \in B$, $d(x, B) = 0$ y $f(x) = 1$. □

1.3. Construyendo nuevos espacios a partir de otros dados

1.3.1. Topología unión

Sean X e Y espacios topológicos disjuntos. La *topología de la unión disjunta* sobre $X \sqcup Y$ tiene como base la familia formada por los conjuntos abiertos de X y los conjuntos abiertos de Y.

En particular, si $\mathcal{B}_1$ es una base de la topología de X y $\mathcal{B}_2$ una base de la topología de Y, entonces $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 = \{B \sqcup B'; B \in \mathcal{B}_1, B' \in \mathcal{B}_2\}$ es base de la topología de la unión $X \sqcup Y$. Se puede comprobar que si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son minimales, también lo es $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$.

1.3.2. Topología producto

Sean X e Y espacios topológicos. La *topología producto* sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como base los productos $U \times V$, siendo U un abierto de X y V un abierto de Y.

En particular, si $\mathcal{B}_1$ es una base de la topología de X y $\mathcal{B}_2$ una base de la topología de Y, entonces $\mathcal{B}_1 \star \mathcal{B}_2 = \{B \times B'; B \in \mathcal{B}_1, B' \in \mathcal{B}_2\}$ es base de la topología producto $X \times Y$. Se puede comprobar que si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son minimales, también lo es $\mathcal{B}_1 \star \mathcal{B}_2$.

Para la topología producto las proyecciones $p_1 : X \times Y \to X$, $p_1(x, y) = x$, y $p_2 : X \times Y \to Y$, $p_2(x, y) = y$, son continuas. Por otro lado, si $f : X \to Z$ y $g : Y \to W$ son aplicaciones continuas, entonces

$$\begin{aligned} (f, g) : \quad X \times Y &\longrightarrow Z \times W \\ (x, y) &\longmapsto (f(x), g(y)), \end{aligned}$$

es continua.

1.3.3. Espacio cociente

Sean X e Y espacios topológicos y sea $p : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación p se denomina *aplicación cociente* (o *de identificación*) si un subconjunto $U \subseteq Y$ es abierto en Y si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X.

Así pues, si X es un espacio topológico e Y es un conjunto, cualquier aplicación sobreyectiva $p : X \to Y$ induce una topología $\mathcal{T}$ sobre Y respecto a la cual p es una aplicación cociente. Se la denomina *topología cociente* inducida por p.

En particular, si "$\sim$" es una relación de equivalencia sobre un espacio topológico X, el conjunto cociente $X/\sim$ con la topología cociente inducida por la proyección natural $p : X \longrightarrow X/\sim$ se denomina *espacio cociente* de X.

Podemos describir la topología cociente de otro modo: un subconjunto U de $X/\sim$ es una colección de clases de equivalencia, y el conjunto $p^{-1}(U)$ es justo la unión de los representantes de las clases en U. Así, un conjunto abierto de $X/\sim$ es una colección de clases de equivalencia cuya unión es un conjunto abierto de X.

Nótese que $p : X \longrightarrow Y$ es una aplicación de identificación si y sólo si Y es homeomorfo al espacio cociente $X/\sim$ donde "$\sim$" es la relación de equivalencia definida por $x \sim x'$ si $p(x) = p(x')$.

La propiedad característica de los espacios cocientes es la siguiente: sea "$\sim$" una relación de equivalencia sobre un espacio X y sea $f : X \to Z$ una aplicación continua compatible con "$\sim$", es decir, $f(x) = f(x')$ si $x \sim x'$. Entonces la *aplicación inducida* por f, $\widetilde{f} : X/\sim \longrightarrow Y$, $\widetilde{f}([x]) = f(x)$, es continua para la topología cociente.

Si $A \subseteq X$, se denota por X/A al espacio cociente definido por la relación $x \sim y$ si o bien $x = y$ o bien $x, y \in A$.

1.3.4. Ejemplos

Dado un espacio topológico X, se define al *cilindro* como el espacio producto $X \times [0,1]$. El *cono* CX se define a partir del cilindro como el espacio cociente $CX = X \times [0,1]/X \times \{1\}$. Análogamente se puede realizar la construcción con la otra base del cilindro : $X \times [0,1]/X \times \{0\}$.

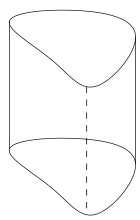
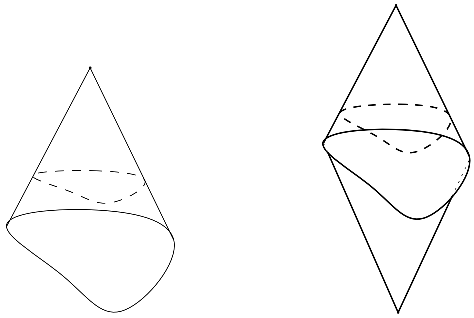


Figura 1.1: Cilindro de un espacio topológico X

La suspensión SX de un espacio X es el espacio cociente sobre el cilindro $X \times [0,1]$ por la relación que identifica el subconjunto $X \times \{0\}$ a un punto y el subconjunto $X \times \{1\}$ a otro punto. Esto puede visualizarse como la unión de dos copias de CX por su base común X.

Sean ahora dos espacios topológicos disjuntos X e Y con puntos base fijados $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Se define la *unión por un punto* (o *wedge*) como el espacio cociente de la unión de X e Y, $X \sqcup Y/\{x_0, y_0\}$. Se denota por $X \vee Y$.



(a) (b)

Figura 1.2: Cono y suspensión de X

Obsérvese que $X \vee Y$ es homeomorfo al subespacio del producto $X \times Y$ de la forma $X \times \{x_0\} \cup \{y_0\} \times Y$. En particular las proyecciones del producto se restringen a aplicaciones $p_1 : X \vee Y \to X$ y $p_2 : X \vee Y \to Y$ que llevan (x, y_0) en x y (y_0, x) en y respectivamente. También, si $f : (X, x_0) \to (X', x'_0)$ y $g : (Y, y_0) \to (Y', y'_0)$ son aplicaciones continuas entre espacios punteados, la aplicación producto $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ se restringe a una aplicación continua $(f, g) : X \vee Y \to X' \vee Y'$ dada por $(f, g)(x, y_0) = (f(x), y'_0)$ y $(f, g)(x_0, y) = (x'_0, g(y))$.

Fijado un punto base $x_0 \in X$ no podemos elegir un punto base canónico para el cono CX o la suspensión SX ya que tenemos todo un intervalo $\{x_0\} \times I$ de posibles puntos bases. Por ello se construye el *cono reducido* cX y la *suspensión reducida* sX como los siguientes espacios cocientes:

$$cX = \frac{X \times I}{X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I} \quad \text{y} \quad sX = \frac{X \times I}{X \times \{0, 1\} \cup \{x_0\} \times I}$$

De esta forma cX y sX quedan canónicamente punteados por la clase de x_0.

1.4. Conexión y contractibilidad

Un *camino* en un espacio X con punto inicial $x \in X$ y punto final $x' \in X$ es una aplicación continua $\sigma : I \longrightarrow X$, donde $I = [0, 1]$ es el intervalo unidad euclídeo, tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = x'$. En tal situación diremos que los puntos x y x' se pueden unir por un camino. Un espacio es *conexo por caminos* si dos puntos arbitrarios de él se pueden unir por un camino. Un subconjunto $A \subseteq X$ se llamará conexo por caminos si lo es con respecto a su topología relativa.

Un espacio X es *localmente conexo por caminos* si para todo $x \in X$ y todo entorno N de x existe otro entorno de N' de x tal que $N' \subseteq N$ que es conexo por caminos.

Se llama *componente conexa por caminos* de $x \in X$ al conjunto de puntos que pueden ser conectados a x por un camino en X.

La conexión por caminos es una noción mas fuerte que la conexión topológica. Recordemos que un espacio X se dice *disconexo* si se puede descomponer como la unión disjunta de dos conjuntos abiertos (o, equivalentemente, cerrados) disjuntos y no vacíos. En caso contrario se dirá que es *conexo*. Es claro que X es conexo si y sólo si los únicos conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados son X y $\emptyset$.

Puesto que todo intervalo euclídeo es conexo, se sigue inmediatamente que todo espacio conexo por caminos es conexo. Para los espacios localmente conexos por caminos se tiene la equivalencia de ambas nociones; esto es, un espacio localmente conexo por caminos es conexo si y sólo si es conexo por caminos.

Una noción mucho más fuerte que la conexión por caminos es la contractibilidad. Para ello recordemos que dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ se dicen *homotópicas* si existe una aplicación continua

$$H : X \times [0, 1] \to Y$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. La aplicación H se llama *homotopía* entre f y g, y la relación de ser homotópicas se denotará por $f \simeq g$. Una *homotopía* se dice *relativa* a un conjunto $A \subseteq X$ si $H(a, t) = f(a) = g(a)$ para todo t y $a \in A$. Una aplicación se dice *homotópicamente trivial* si es homotópica a una constante.

Es bien conocido que la relación de homotopía es una relación de equivalencia compatible con la composición de funciones.

Si Y^X denota el conjunto de las aplicaciones continuas de X en Y, toda homotopía $h : X \times I \to Y$ induce una aplicación $\widehat{h} : I \to Y^X$ definida por $\widehat{h}(t)(x) = h(x, t)$. De esta manera, si se dota a Y^X de una topología apropiada para que la aplicación $\widehat{h}$ sea continua, se podrán identificar las homotopías entre f y g con caminos en Y^X uniendo f y g.

Lo anterior se consigue con la llamada *topología compacto-abierta*, que es la topología que tiene por base la familia de todas las intersecciones finitas de la forma $\cap_{i=1}^n \langle K_i, U_i \rangle$ siendo, para cada i, K_i y U_i conjuntos compactos y abiertos de X e Y, respectivamente, y $\langle K, U \rangle = \{f \in Y^X; f(K) \subseteq U\}$. Para la topología compacto-abierta se tiene el siguiente resultado, conocido como *ley exponencial*; ver ([13]; Teorema 46.11). Recordemos que un espacio X se dice *localmente compacto* si para todo punto $x \in X$ y para todo entorno N de x existe un entorno más pequeño de x, $K \subseteq N$, que es compacto. El teorema dado en ([13]) exige la propiedad de Hausdorff, pero esta propiedad no es necesaria; ver Teorema 1.5.10 en [3], donde se puede encontrar una demostración del siguiente resultado.

Teorema 1.4.1. Sean Y y Z espacios topológicos cualquiera y sea X localmente compacto (no necesariamente de Hausdorff). Entonces si Y^X está dotado de la topología compacto-abierta, la continuidad de $h : X \times Z \to Y$ es equivalente a la continuidad de la aplicación $\widehat{h} : Z \to Y^X$. Es decir, la aplicación $h \mapsto \widehat{h}$ induce una biyección $Y^{X \times Z} \cong (Y^X)^Z$.

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, si tomamos $Z = [0, 1]$, el intervalo unidad euclídeo, se tiene la siguiente identificación de las homotopías como caminos entre aplicaciones.

Corolario 1.4.2. Sea X un espacio localmente compacto. Entonces para todo espacio Y, dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ son homotópicas si y sólo si están conectadas por un camino en Y^X con la topología compacto-abierta.

La noción de homotopía permite debilitar las equivalencias topológicas u homeomorfismos mediante la noción de equivalencias de homotopía. Recordemos que una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es una *equivalencia de homotopía* (o que X e Y son *homotópicamente equivalentes*) si existe $g : Y \longrightarrow X$ continua tal que $f \circ g \simeq id_Y$ y $g \circ f \simeq id_X$.

Un subespacio $A \subseteq X$ se dice un *retracto* de X si existe una aplicación continua $r : X \to A$ (llamada *retracción*) tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$, esto es, $r \circ i = id_A$ para la inclusión $i : A \to X$. Se dice que A es un *retracto de deformación* de X si además la composición $i \circ r$ es homotópica a la identidad de X. Cuando la homotopía es relativa a A, se dice que es *retracto de deformación fuerte.*

Un espacio X se dice que es *contráctil* si es homotópicamente equivalente a un espacio formado por un único punto. Es inmediato que esta condición es equivalente a afirmar que la identidad id_X es homotópicamente trivial, o bien, que X admite un punto como retracto de deformación. Un espacio X se dice localmente contráctil si para todo $x \in X$ y todo N entorno de x existe un entorno más pequeño $N' \subseteq N$ que es contráctil.

Lema 1.4.3. Si $f, g : X \to Y$ son aplicaciones homotópicas y $X_0 \subseteq X$ es una componente conexa por caminos de X, entonces $f(X_0)$ y $g(X_0)$ están en la misma componente conexa por caminos de Y. En particular, toda equivalencia de homotopía induce una biyección entre las familias de componentes conexas por caminos.

Demostración. Sea $H : X \times I \to Y$ una homotopía entre f y g. Entonces $X_0 \times I$ es una componente conexa por caminos de $X \times I$ y $f(X_0) \cup g(X_0) \subseteq H(X_0 \times I)$. Por ello $f(X_0)$ y $g(X_0)$ están en la componente conexa por caminos que contiene a $H(X_0 \times I)$.

Supongamos ahora que $f : X \to Y$ es equivalencia de homotopía. Entonces existe $g : Y \to X$ con $f \circ g$ y $g \circ f$ homotópicas a las correspondientes identidades.

Sean $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(Y)$ las familias de las componentes conexas por caminos de X e Y, respectivamente. Si $x \in X$ e $y \in Y$, sean C_x y D_y las componentes de x e y, respectivamente. Entonces se define la aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}(x) &\longrightarrow \mathcal{C}(Y) \\ C_x &\longmapsto D_{f(x)} \end{aligned}$$

Igualmente se define $\psi : \mathcal{C}(Y) \to \mathcal{C}(X)$ por $\psi(D_y) = C_{g(y)}$. Ahora, se tiene $\psi \circ \varphi = id_{C(X)}$. En efecto, $\psi \circ \varphi(C_x) = C_{g(f(x))}$. Por la primera parte del lema tenemos que $C_{g(f(x))} = C_x$, y análogamente $\varphi \circ \psi$. $\square$

Capítulo 2

Espacios de Alexandrov

Este capítulo es una breve introducción a la topología de los espacios finitos, y se ha extraído de [3].

2.1. Definición de A-espacio. Abierto mínimo.

Un espacio topológico es un *espacio de Alexandrov*, (o *A-espacio*) si la topología $\mathcal{T}$ es cerrada también bajo intersecciones arbitrarias. Es decir, la intersección arbitraria de abiertos es un conjunto abierto. Una consecuencia inmediata es que todo A-espacio T_1 es discreto.

Es obvio que todo espacio finito es un A-espacio, ya que toda intersección de abiertos se puede expresar como una intersección finita. Por tanto, todo lo que se establezca para A-espacios, seguirá siendo válido para espacios finitos.

Un hecho crucial en el tratamiento de los A-espacios es la existencia de abiertos mínimos. En efecto, si X es un A-espacio se define el *abierto mínimo* U_x de $x \in X$ como la intersección de todos los conjuntos abiertos que contienen a x. De hecho se tiene que los A-espacios son exactamente aquellos espacios topológicos con abiertos mínimos.

Lema 2.1.1. *Si X es un A-espacio, entonces $U_x = U_y$ si y sólo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. En particular, X es T_0 si y sólo si $U_x = U_y$ es equivalente a $x = y$.*

La familia de los conjuntos abiertos mínimos es una base del A-espacio X. De hecho, es la única base minimal (y por tanto mínima) de X.

Proposición 2.1.2. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre A-espacios. Entonces f es continua si y sólo si $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$ para todo $x \in X$.*

Proposición 2.1.3. *Sean X e Y dos A-espacios. Entonces $X \times Y$ es un A-espacio. Además, $\{U_x \times U_y\}_{(x,y)\in X\times Y}$ es base mínima de $X \times Y$.*

2.2. Conexión y homotopía en A-espacios. Modelo T_0 de un A-espacio.

Sorprendentemente, las propiedades relacionadas con la conexión de los A-espacios son muy similares a las de algunos espacios de interés en la topología algebraica, como son los poliedros y las variedades. Así, si X es un A-espacio e $y \in U_x$, entonces $\alpha : [0,1] \to X$ dada por $\alpha(t) = y$ si $t < 1$ y $\alpha(1) = x$ es un camino en U_x entre y y x. En particular, todos los abiertos mínimos de X son conexos por caminos y, por tanto, todo A-espacio X es localmente conexo por caminos.

Teorema 2.2.1. Sea X un A-espacio. Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. X es conexo.
2. Dados $x, y \in X$, existe una secuencia $x = z_1, \ldots, z_s = y$, tal que $z_i \in U_{z_{i+1}}$ ó $z_{i+1} \in U_{z_i}$ para $i < s$.
3. X es conexo por caminos.

Lema 2.2.2. Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas, siendo Y un A-espacio. Supongamos que $U_{f(x)} \subseteq U_{g(x)}$ (o, equivalentemente, $f(x) \in U_{g(x)}$), para todo $x \in X$. Entonces f y g son homotópicas por una homotopía relativa al conjunto $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$.

Corolario 2.2.3. Si Y es un A-espacio tal que para algún $y_0 \in Y$ se tiene $U_{y_0} = Y$, entonces Y es contráctil.

Corolario 2.2.4. Todo A-espacio X es localmente contráctil.

Teorema 2.2.5. El espacio cociente X_0 de un A-espacio X por la relación $x \sim y$ si $U_x = U_y$ es un A-espacio T_0. Más aún, la aplicación cociente $p : X \to X_0$ es una equivalencia de homotopía con inversa homotópica cualquier aplicación $f : X_0 \to X$ que elija para cada clase de X_0 un representante de la misma.

Al espacio X_0 se le llama el *modelo* T_0 de X.

2.3. Conjuntos parcialmente ordenados (posets) y A-espacios.

La teoría de los conjuntos parcialmente ordenados se puede considerar parte de la Topología, ya que los posets son exactamente los A-espacios T_0. A continuación se describe esta equivalencia con detalle.

Un *preorden* $\mathcal{R}$ en un conjunto X es una relación reflexiva y transitiva. Si un preorden $\mathcal{R}$ en X es además antisimétrico, se llamará *orden parcial* (o simplemente *orden* en X) y se dice que $(X, \mathcal{R})$ es un *conjunto parcialmente ordenado* (o *poset*).

Dos elementos x e y del conjunto preordenado $(X, \leq)$ se dicen que están *relacionados* si $x \leq y$ o $x \geq y$. Un elemento x es un *elemento maximal (minimal)* si para cada z en X, $x \leq z$ ($z \leq x$, respectivamente) implica $x = z$. Se denotará por $Max(X)$ ($Min(X)$, respectivamente) el conjunto de los elementos maximales (minimales, respectivamente) de X. En general, cualquier subconjunto totalmente ordenado se llamará *cadena*. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice una *anticadena* si ningún par de su elementos están relacionados. Nótese que tanto $Max(X)$ como $Min(X)$ son anticadenas.

Una aplicación entre conjuntos preordenados $f : (X, \leq) \to (Y, \preceq)$ se dice que *preserva el orden* (o que es una *aplicación ordenada*) si para $x \leq x'$ se tiene $f(x) \preceq f(x')$. Se dice que *invierte el orden* (o es *antiordenada*) si para $x \leq x'$ se tiene $f(x') \preceq f(x)$. La aplicación anterior se dice que es un *isomorfismo* entre conjuntos preordenados si es una biyección tal que f y f^{-1} son aplicaciones ordenadas. Si son antiordenadas se llama *antiisomorfismo.*

Un subconjunto $S \subseteq X$ se llama *conjunto decreciente* si $y \leq x \in S$ implica $y \in S$. Dado $x \in X$, $\downarrow\! x = \{y \in X; y \leq x\}$ es un conjunto decreciente, llamado el *ideal principal generado* por x. Dualmente, un subconjunto $S \subseteq X$ se llama *conjunto creciente* si $y \geq x \in S$ implica $y \in S$ para $x, y \in X$. Como caso particular, $\uparrow\! x = \{y \in X; y \geq x\}$ es un conjunto creciente para todo $x \in X$, llamado *filtro principal* generado por x.

Si "$\leq$" es un preorden en X, entonces no es difícil comprobar que la familia de los ideales principales en X es base mínima para una A-topología sobre X para la cual los abiertos son exactamente los conjuntos decrecientes (o, equivalentemente, los cerrados son los conjuntos crecientes). Más aún, si "$\leq$" es un orden parcial, entonces esta topología es T_0. A esta topología se le llama *topología del preorden de "$\leq$"* y se denota por $\mathcal{T}_{\leq}$.

También es base mínima para una topología sobre X la familia de filtros principales $\uparrow x$, que sería la topología del preorden opuesto definido por $x \leq^{op} y$ si $y \leq x$.

Recíprocamente, dado un A-espacio $(X, \mathcal{T})$ se puede definir un preorden $\leq_{\mathcal{T}}$ (*preorden de especialización* de $\mathcal{T}$) estableciendo $x \leq_{\mathcal{T}} y$ si se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:

$$y \in \overline{\{x\}} \Leftrightarrow x \in U_y \Leftrightarrow \overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$$

Más aún, si $(X, \mathcal{T})$ es T_0, entonces el preorden $\leq_{\mathcal{T}}$ es de hecho un orden parcial.

Se tiene el siguiente teorema que da la equivalencia entre preorden y A-espacio.

Teorema 2.3.1. Toda relación de preorden "$\leq$" sobre un conjunto X coincide con el preorden de especialización de su topología. Más aún, toda A-topología $\mathcal{T}$ sobre X es la topología de su preorden de especialización. Además, $f : (X, \leq) \longrightarrow (Y, \preceq)$ es ordenada si y sólo si $f : (X, \mathcal{T}_{\leq}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_{\preceq})$ es continua.

Esta equivalencia se restringe a una equivalencia entre los A-espacios T_0 y los conjuntos parcialmente ordenados.

A partir de esta equivalencia, los elementos minimales de un conjunto preordenado $(X, \leq)$ son abiertos unitarios de la A-topología asociada al preorden. Igualmente, los elementos maximales de X son conjuntos cerrados unitarios. En particular, $Min(X)$ es un subespacio abierto discreto y $Max(X)$ es un subespacio cerrado discreto. Como todo poset finito tiene algún elemento maximal y minimal, todo espacio finito T_0 posee al menos un punto que es subconjunto cerrado y otro punto que es abierto.

A partir del Teorema 2.3.1 se puede reescribir el Teorema 2.2.1 como sigue:

Teorema 2.3.2. Un A-espacio X es conexo (o, equivalentemente, conexo por caminos) si y sólo si existe una secuencia de elementos relacionados para el orden de especialización entre dos puntos cualesquiera de X.

La equivalencia entre conjuntos preordenados y A-espacios lleva a la siguiente caracterización de los abiertos de un espacio finito en términos del preorden.

Proposición 2.3.3. Los abiertos de un espacio finito $(X, \mathcal{T})$ están en correspondencia biunívoca con las anticadenas de su preorden asociado. Más precisamente, la anticadena asociada a un abierto G es el conjunto $Max(G)$.

Usando la proposición anterior se pueden dar las siguientes condiciones suficientes para obtener homeomorfismos entre espacios finitos:

Proposición 2.3.4. Sean X un espacio finito y $f : X \to X$ continua e inyectiva, o bien sobreyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

Dado un poset $(X, \leq)$, se llama *diagrama de Hasse asociado a X* al grafo dirigido $\mathcal{H}(X)$, en el que los vértices son los elementos de X y las aristas son los pares ordenados (a, b) tales que $a < b$ y no existe $c \in X$ con $a < c < b$.

Como cada espacio topológico finito $(X, \mathcal{T})$ puede ser identificado con un poset, se llama diagrama de Hasse del espacio al diagrama del poset que determina.

Usualmente, $\mathcal{H}(X)$ se dibuja en el plano de tal manera que si $a < b$, el vértice que representa a b está por encima del vértice que represente a a, quedando la dirección de la arista de a a b bien definida por el dibujo.

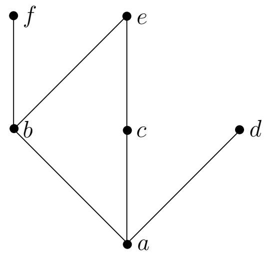


Figura 2.1:

Ejemplo 2.3.5. Para $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ con $a < b$, $a < c$, $a < d$, $a < e$, $a < f$, $b < e$, $b < f$ y $c < e$, el diagrama de Hasse de X está descrito en la Figura 2.1. Obsérvese que en $\mathcal{H}(X)$ no se reflejan las relaciones $a < e$ y $a < f$. Puesto que $\mathcal{H}(X)$ contiene a todas las anticadenas del orden, la topología del orden puede obtenerse a partir del diagrama de Hasse por medio de la Proposición 2.3.3, de forma que los abiertos mínimos son los correspondientes a los anticadenas unitarias, esto es, $U_a = \{a\}$, $U_b = \{a, b\}$, $U_c = \{a, c\}$, $U_d = \{a, d\}$, $U_e = \{a, b, c, e\}$ y $U_f = \{a, b, f\}$.

2.4. Homotopía y orden

Ya comentamos en la Sección 1.4 que si se denota por Y^X al espacio de aplicaciones continuas de X en Y con la topología compacto-abierta, entonces las homotopías entre aplicaciones $f, g \in Y^X$ son exactamente los caminos entre f y g en Y^X. Si X e Y son ahora A-espacios (o, equivalentemente, conjuntos preordenados), también se puede dotar a Y^X con el orden:

$$f \leq g \text{ si } f(x) \leq g(x) \text{ en el preorden de } Y \text{ para todo } x \in X. \tag{2.1}$$

Para la topología de Alexandrov asociada a este preorden, la conexión por caminos se corresponde a la conexión por secuencias de aplicaciones relacionadas por ese orden (Teorema 2.3.2). En general la ley exponencial no se cumple para esta topología, por lo que a una homotopía no siempre se le podrá asociar una secuencia de aplicaciones relacionadas. Esto sí ocurre para los espacios finitos. Más explícitamente,

Proposición 2.4.1. Si X es un espacio finito e Y es cualquier A-espacio, la topología compacto-abierta sobre Y^X coincide con la A-topología del orden en (2.1).

Como consecuencia, si $f, g : X \to Y$ son aplicaciones continuas del espacio finito X en el A-espacio Y, f es homotópica a g si y sólo si existe una secuencia de aplicaciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ donde $f_1 = f$, $f_n = g$ y f_i y f_{i+1} están relacionadas para el preorden en (2.1) para $1 \leq i \leq n - 1$.

Otra particularidad de los espacios finitos es que el tipo de homotopía de cualquier espacio finito tiene un representante minimal único salvo homotopía.

Sea X un A-espacio. Un punto $x \in X$ se dice que es *eliminable ascendentemente* si existe $y \in X$ con $y > x$ tal que $z \geq x$ implica $z \geq y$. De forma similar, un punto $x \in X$ se dice que es *eliminable descendentemente* si existe $y \in X$ con $y < x$ tal que $z \leq y$ para todo $z \leq x$. Se dirá que un punto x es *eliminable* si lo es ascendentemente o descendentemente.

Un A-espacio se dice *minimal* si es T_0 y no tiene puntos eliminables. La siguiente caracterización de los espacios minimales finitos es ([2], Proposición 1.3.9).

Proposición 2.4.2. Sea X un espacio finito T_0. Entonces X es un espacio minimal si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que cada $z \in X$ relacionado con x está relacionado con y, se sigue $x = y$.

Demostración. Si X no es minimal, existe un punto eliminable x. Sin pérdida de generalidad asumimos que x es un punto eliminable descendentemente. Esto quiere decir que existe un $y < x$ tal que para todo $z \leq x$, $z \leq y$. Esto contradice la condición dada.

Recíprocamente, supongamos que existen $x \neq y$ tal que todo elemento relacionado con x lo está también con y. En particular x está relacionado con y, y se puede asumir que $x > y$. Si suponemos $x > y$, sea A el conjunto:

$$A = \{z \in X; z > y \text{ y si } w \text{ está relacionado con } z \text{ entonces } w \text{ está relacionado con } y\}$$

Este conjunto no es vacío ya que $x \in A$. Sea z_0 un elemento minimal de A, veamos que z_0 es un punto eliminable descendentemente, lo que llevará a contradicción.

De hecho afirmamos, que si $p < z_0$ entonces $p \leq y$. En efecto, como $z_0 \in A$, la definición de A nos dice que p debe estar relacionado con y. En el caso que $p \leq y$ ya tendríamos la afirmación.

En otro caso $p > y$ y si w está relacionado con p puede ocurrir $w \leq p < z_0$ y, como $z_0 \in A$, w estará relacionado con y, o bien $w \geq p > y$. Por tanto p está relacionado con y en cualquier caso y así $p \in A$, lo que contradice la minimalidad de z_0, ya que $p < z_0$. Así pues siempre $p \leq y$ y z_0 es efectivamente un punto eliminable descendentemente. □

A todo subespacio minimal de un A-espacio que sea retracto de deformación de X se le llama un *alma* de X.

Teorema 2.4.3. Sea X un espacio finito. Entonces X admite un alma.

De hecho, las almas de un mismo espacio finito son todas homeomorfas como consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 2.4.4. Sea X un espacio minimal finito y sea $f : X \to X$ homotópica a la identidad. Entonces f es la identidad. En particular, toda equivalencia de homotopía entre espacios minimales finitos es un homeomorfismo.

También el teorema anterior implica que dos espacios finitos T_0 son homotópicamente equivalentes si y sólo si tienen almas homeomorfas.

2.5. A-espacios y poliedros

El estudio topológico de los poliedros constituye una rama de la Topología conocida como Topología Simplicial o Poliedral. En esta sección recordaremos las definiciones básicas de esta disciplina. Para los detalles se puede consultar [12].

Recordemos que una colección de puntos $\{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ se dice *afínmente independiente* si los vectores $\{a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0\}$ son linealmente independientes. El *n-símplice* generado por $\{a_0, \ldots, a_n\}$ es el conjunto convexo:

$$\sigma^n = \{x \in \mathbb{R}^m; x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \text{ con } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0\}.$$

Así un 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento, un 2-símplice es un triángulo y un 3-símplice es un tetraedro.

Los coeficientes λ_i son llamados *coordenadas baricéntricas*. El punto de σ con todas sus coordenadas iguales a $\frac{1}{n+1}$ se llama *baricentro* de σ y se denota $b(\sigma)$. El *interior (afín)* de σ es el conjunto $\mathring{\sigma} = \{x \in \sigma; \lambda_i > 0\}$. Los puntos a_i $(0 \leq i \leq n)$ se llaman *vértices* de σ y se escribirá $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ para dar explícitamente los vértices de σ.

Sean σ y τ dos símplices en $\mathbb{R}^m$. Se dice que τ es *cara* de σ, y lo denotaremos por $\tau \leq \sigma$, si los vértices de τ son vértices de σ. Si $\tau \neq \sigma$ y $\tau \leq \sigma$ diremos que τ es una *cara propia* de σ y escribiremos entonces $\tau < \sigma$. Si $\tau \leq \sigma$, se dirá que $\mathring{\tau}$ es una *cara abierta* de σ. La unión de las caras propias de un n-símplice $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ se llama *borde* de σ, y lo denotaremos por $\dot{\sigma}$. Nótese que $\dot{\sigma} = \{x \in \sigma;\ x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$ tal que $\lambda_j = 0$ para algún $j\}$ y por tanto $\mathring{\sigma} = \sigma - \dot{\sigma}$. Se tienen las dos propiedades siguientes:

a) Todo símplice es unión disjunta de sus caras abiertas.

b) Dos caras de un un mismo símplice o son disjuntas o se encuentran en una cara.

Se llama *complejo simplicial* a una colección K finita de símplices en algún espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ verificando:

1. Si $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ entonces $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ ó $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara común de σ_1 y σ_2.
2. Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in K$.

La *dimensión* de K es el número $\text{máx}\{\dim \sigma; \sigma \in K\}$.

Nótese que todo símplice σ determina un complejo simplicial al considerar σ y todas sus caras. En lo que sigue, σ denotará indistintamente un símplice o el complejo simplicial determinado por él.

Un *subcomplejo* $L \subseteq K$ es un conjunto de símplices de K que es a su vez un complejo simplicial. Se llama *m-esqueleto* de K y se denota K^m al subcomplejo

$$K^m = \{\sigma \in K;\ \dim \sigma \leq m\}.$$

A K^0 se le llama el *conjunto de vértices* de K y los 1-símplices serán llamados las *aristas* de K. El conjunto de los puntos de los símplices de K se le denomina *poliedro subyacente* de K, denotado por $|K|$, es decir, $|K| = \cup\{\sigma;\ \sigma \in K\}$. Es una consecuencia inmediata de la propiedad a) dada más arriba que todo $x \in |K|$ está en el interior de un único símplice de K, llamado *símplice soporte* de x.

Se define el *cono* de un complejo simplicial K en $\mathbb{R}^n$ como el complejo simplicial resultante del proceso de añadir un vértice $v \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \mathbb{R}^n \times \{0\}$ y crear todos los símplices posibles entre K y v. Se le denotará vK.

Sean K_1 y K_2 complejos simpliciales y φ una aplicación definida entre los vértices de K_1 y K_2. Se dice que φ es *aplicación simplicial* si para todo símplice de K_1 $\sigma = (v_0, \ldots, v_n)$, los vértices $\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_n)$ están en un mismo símplice de K_2.

Al referirnos a una aplicación simplicial φ entre K y L, escribiremos $\varphi : K \to L$. También denotaremos por φ a la aplicación continua $\varphi : |K| \to |L|$ definida entre los poliedros subyacentes al tomar sobre cada símplice $\sigma \in K$ la extensión lineal de φ $\varphi(\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi(v_i)$ si $\sigma = (v_0, \ldots, v_n)$. Obsérvese que la composición de aplicaciones simpliciales es siempre una aplicación simplicial.

Un *isomorfismo simplicial* entre dos complejos simpliciales K_1 y K_2 es una biyección φ entre los vértices tal que $(v_0, \ldots, v_n)$ es un símplice de K_1 si y sólo si $(\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_n))$ es un símplice de K_2.

Sea K un complejo simplicial y $\sigma \in K$ un símplice. Se llama *estrella* de σ en K al subcomplejo:

$$st(\sigma; K) = \{\tau \in K;\ \text{existe } \rho \in K \text{ con } \tau, \sigma \leq \rho\}.$$

Obsérvese que $|st(\sigma; K)| = \bigcup\{\mu \in K; \sigma \leq \mu\}$.

Si $x \in |K|$ se define la *estrella* de x en K como el subcomplejo $st(x; K)$ de K formado por los símplices que contienen a x y todas sus caras. Si $\sigma \in K$ es el símplice soporte de x se tiene $st(x; K) = st(\sigma; K)$. Asimismo, se define la *estrella abierta* de $x \in |K|$ como el conjunto

$$\overset{\circ}{st}(x; K) = \bigcup\{\overset{\circ}{\mu}; \mu \in K \text{ y } x \in \mu\}. \tag{2.2}$$

Se define el *engarce* (o *link*) de $x \in |K|$ como el subcomplejo:

$$lk(x; K) = \{\sigma \in st(x; K); x \notin \sigma\}.$$

Notesé que $|lk(x; K)| = |st(x; K)| \backslash \overset{\circ}{st}(x; K)$.

La propiedad clave de la estrella abierta es que define un abierto de la topología de $|K|$ a partir de la estructura simplicial. Esto se debe al hecho de que cuando la intersección $\overset{\circ}{st}(x; K) \cap \sigma$ no es vacía, entonces $x \in \sigma$ y esa intersección es justamente la diferencia $\sigma - \sigma_x$, donde σ_x es el símplice soporte de x, que es un abierto de σ.

Sean K y K' complejos simpliciales. Se dice que K' es una *subdivisión* de K si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $|K| = |K'|$.

2. Todo símplice de K es unión de símplices de K'. En particular los vértices de K son vértices de K'.

Sea K un complejo simplicial. Dada una secuencia de símplices de K ordenada por la relación de cara $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots \sigma_n \in K$, el conjunto de sus baricentros $\{b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_n)\}$ es afínmente independiente y determina así un símplice contenido en σ_n. La *subdivisión baricéntrica* de K, sdK, es el complejo simplicial formado por estos símplices de vértices los baricentros $b(\sigma)$ con $\sigma \in K$.

Nótese que si σ es de dimensión n, los n-símplices de sdK contenidos en σ están en biyección con las permutaciones de los vértices de σ.

Las subdivisiones baricéntricas reiteradas se denotarán por $sd^m K = sd(sd^{m-1}K)$ $(m \geq 1)$ con $sd^0 K = K$. Los diámetros de los símplices de subdivisiones baricéntricas reiteradas tienden a 0, y la familia $\mathcal{V} = \{\overset{\circ}{st}(x, sd^n K)\}_{n \geq 0}$ es una una base encajada de entornos, para cada punto $x \in |K|$.

Dada una aplicación continua entre poliedros $f : |K_1| \to |K_2|$, se llama *aproximación simplicial* de f a una aplicación simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ tal para todo $x \in |K_1|$, $\varphi(x)$ pertenece al símplice soporte de $f(x) \in K_2$. Equivalentemente si $f(x) \in \sigma \in |K_2|$ entonces $\varphi(x) \in \sigma$.

Es sabido que f siempre es homotópica a cualquiera de sus aproximaciones simpliciales, que existen por el siguiente teorema:

Teorema 2.5.1. (Teorema de aproximación simplicial). Sean K_1 y K_2 complejos simpliciales y $f : |K_1| \to |K_2|$ continua. Entonces existen un n suficientemente grande y una aplicación $\varphi : sd^n K_1 \to K_2$ que es aproximación simplicial de f.

Dado un conjunto V, un *complejo abstracto* $\mathcal{A}$ con vértices en V consiste en una colección no vacía de partes finitas de V verificando las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{A}$ contiene todos los subconjuntos unitarios de V.

2. Dado $\Sigma \in \mathcal{A}$, todo subconjunto de Σ pertenece a $\mathcal{A}$.

A los elementos de V se les llama *vértices* de $\mathcal{A}$, y a los subconjuntos de $\mathcal{A}$, *símplices* de $\mathcal{A}$. La *dimensión* de $\mathcal{A}$ es el número (posiblemente infinito):

$$\dim \mathcal{A} = \sup\{\text{card } (\Sigma); \Sigma \in \mathcal{A}\} - 1$$

Es claro que todo complejo simplicial K determina un complejo abstracto $\mathcal{A}(K)$ donde los vértices de $\mathcal{A}(K)$ son los vértices de K y los símplices de $\mathcal{A}(K)$ son los conjuntos de vértices de K situados en un mismo símplice de K.

La definición de aplicación simplicial entre complejos abstractos es inmediata: dados dos complejos abstractos $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ una aplicación entre sus conjuntos de vértices $\varphi : V_1 \to V_2$ se dice *aplicación simplicial* si para todo símplice s de $\mathcal{A}_1$ $\varphi(s)$ es un símplice de $\mathcal{A}_2$. De esta manera, φ será un *isomorfismo simplicial* si además es una biyección entre V_1 y V_2. Como es habitual, escribimos $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ para indicar que φ es una aplicación simplicial.

Una *realización geométrica* de un complejo abstracto $\mathcal{A}$ es un complejo simplicial K cuyo complejo abstracto $\mathcal{A}(K)$ es simplicialmente isomorfo a $\mathcal{A}$.

Teorema 2.5.2. Todo complejo abstracto finito y de dimensión $\leq n$ admite una realización geométrica en $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Notación 2.5.3. A partir de ahora todo complejo abstracto se identificará con una realización geométrica suya.

2.5.4. Poliedros asociados a espacios finitos

Sea X un espacio finito T_0, se llama complejo de orden de X al complejo abstracto $\mathcal{O}(X)$ cuyos vértices son los puntos de X y cuyos símplices son las cadenas finitas del orden de especialización de X (ver Sección 2.3). Más aun, toda aplicación continua $f : X \to Y$ entre espacios finitos T_0 define una aplicación simplicial $\mathcal{O}(f) : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$ que envía la cadena $x_0 \leq x_1 \leq \dots x_n$ en la cadena $f(x_0) \leq f(x_1) \leq \cdots \leq f(x_n)$.

Nótese que la dimensión de $\mathcal{O}(X)$ coincide con la altura máxima del diagrama de Hasse $\mathcal{H}(X)$. Siendo la *altura* del digrama de Hasse el número de niveles menos uno. Más aún, si la altura de $\mathcal{H}(X)$ es 1, entonces $\mathcal{O}(X)$ coincide con el diagrama de Hasse de X.

Para el poliedro $|\mathcal{O}(X)|$ siempre es posible definir una aplicación $\psi_X : |\mathcal{O}(X)| \to X$ de la siguiente manera: dado $z \in |\mathcal{O}(X)|$, sea $s = \{x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n\}$ el símplice soporte de z en $|\mathcal{O}(X)|$. Entonces se toma $\psi_X(z) = x_0 = \min s$. La continuidad de ψ_X se sigue de que, para todo $x \in X$, $\psi^{-1}(U_x) = \cup_{y \leq x} \overset{\circ}{st}(y, \mathcal{O}(X))$. Más aún, ψ_X hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} |\mathcal{O}(X)| \arrow[r, "\mathcal{O}(f)"] \arrow[d, "\psi_X"'] & |\mathcal{O}(Y)| \arrow[d, "\psi_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

La conmutatividad sigue de la observación de que si $s = (x_0 \leq x_1, \leq \cdots \leq x_n)$ es el símplice soporte de z, entonces, por definición, $\mathcal{O}(f)(z)$ tiene a $\mathcal{O}(f)(s)$ como símplice soporte; además, por preservar f el orden, $f(\min s) = \min f(s)$.

McCord demostró en [11] que para todo espacio finito X la aplicación ψ_X tiene la siguiente propiedad homotópica:

Teorema 2.5.4.1. Para todo espacio X finito y T_0, la aplicación ψ_X es una equivalencia de homotopía débil.

Recordemos la noción de equivalencia de homotopía débil: i $[X, Y]$ denota el conjunto cociente $Y^X/\simeq$ por la relación de homotopía, toda aplicación $f : Y \to Z$ induce una aplicación $f_* : [X, Y] \to [X, Z]$ dada por $f_*([g]) = [f \circ g]$. Observése que si si $g \simeq g'$ y $f \simeq f'$ se tiene que $f \circ g \simeq f' \circ g'$ por la compatibilidad de la relación de homotopía con la composición de aplicaciones. En particular f_* está bien definida y $f_* = f'_*$.

Una aplicación continua se llama una *equivalencia de homotopía débil* si para todo complejo simplicial finito K se tienen que $f_* : [|K|, X] \to [|K|, Y]$ es una biyección. Dos espacios X e Y son del *mismo tipo de homotopía débil* (o *débilmente homotópicamente equivalentes*) si existe una secuencia de espacios $X = X_0, X_1, \ldots, X_n = Y$ tal que para cada $1 \leq i \leq n$ hay equivalencias débiles $X_i \to X_{i+1}$ ó $X_{i+1} \to X_i$. Es claro que toda equivalencia de homotopía es una equivalencia de homotopía débil. Más aún, el recíproco es cierto para los poliedros.

Es inmediato que comprobar que si el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

es conmutativo salvo homotopía (es decir, $h \circ f \simeq g$) y si dos de las tres aplicaciones son equivalencias de homotopía débiles, entonces también lo es la tercera. Como consecuencia se obtiene si X e Y son espacios finitos T_0 del mismo tipo de homotopía débil, entonces sus complejos de orden definen poliedros del mismo tipo de homotopía.

Nota 2.5.4.2. Si bien ψ_X es siempre una equivalencia de homotopía débil, sólo puede ser una equivalencia de homotopía cuando $|\mathcal{O}(X)|$ es una unión disjunta de poliedros contráctiles. En efecto, si X no es conexo y $X_1, \ldots, X_m$ son sus componentes conexas, se tiene por construcción que ψ_X es la unión de las aplicaciones $\psi_{X_i} : |\mathcal{O}(X_i)| \to X_i$. Así pues, sea X conexo y supongamos que existe $g : X \to |\mathcal{O}(X)|$ tal que las composiciones $\psi_X \circ g$ y $g \circ \psi_X$ son homotópicas a las correspondientes identidades. En particular, la imagen de $g \circ \psi_X : |\mathcal{O}(X)| \to |\mathcal{O}(X)|$ debe ser un subconjunto conexo de un poliedro (y por tanto Hausdorff) y contener sólo una cantidad finita de puntos. Esto sólo es posible si es un único punto, luego la identidad de $|\mathcal{O}(X)|$ es homotópica a una constante y por tanto este poliedro debe ser contráctil.

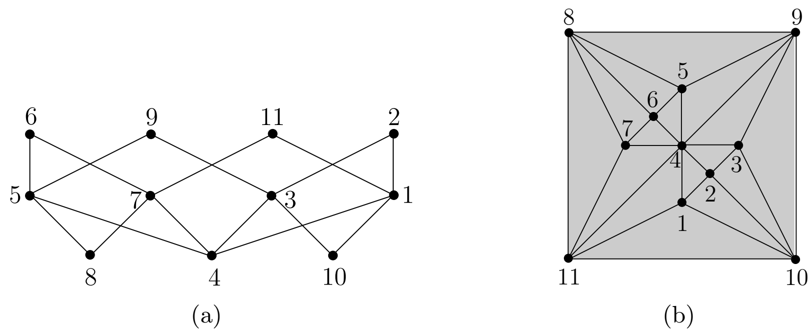


Figura 2.2: A la izquierda el espacio finito y a la derecha el poliedro asociado.

Aún siendo el poliedro $|\mathcal{O}(X)|$ contráctil, es posible dar ejemplos para los que ψ_X no es una equivalencia de homotopía. El espacio finito X de la Figura 2.2(a) es minimal, ya que no tiene puntos eliminables, mientras que su realización es contráctil por ser el cuadrado de la Figura 2.2(b).

2.5.5. Espacios finitos asociados a complejos. F-modelos de poliedros

La estructura combinatoria de un complejo simplicial K da lugar de manera natural a un poset finito $F(K) = (F(K), \leq)$, al considerar como puntos de $F(K)$ a los símplices de K y la relación de orden $\leq$ como la inclusión de símplices. De esta forma, en el espacio finito asociado a este orden el abierto minimal U_s de $s \in F(X)$ coincide el subcomplejo de K formado por s y todas sus caras. Dada una aplicación simplicial $f : K \to L$, se define $F(f) : F(K) \to F(L)$ por $F(f)(s) = f(s)$. Nótese que $F(f)$ preserva el orden y por tanto es continua entre los espacios finitos. A $F(K)$ se le llama *F-modelo* de K.

En cada nivel $n \geq 0$ del diagrama de Hasse del F-modelo $F(K)$ se colocan tantos puntos como símplices de dimensión n haya en K y se dibuja una arista de cada uno de ellos a los puntos del nivel inmediatamente superior que lo contengan como cara.

Existe un isomorfismo simplicial $t_K : \mathcal{O}(F(K)) \to sd(K)$ que asocia a cada cadena $\sigma_0 \leq, \ldots, \leq \sigma_n$ el símplice $(b(\sigma_0), \ldots, b(\sigma_n))$. Mas aún, si $\varphi : K \to L$ es una aplicación simplicial, el siguiente diagrama es conmutativo, donde $sd(\varphi) : sd(K) \to sd(L)$ es la aplicación simplicial inducida por φ que lleva el baricentro $b(\sigma)$ en el baricentro $b(\varphi(\sigma))$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(F(K)) \arrow[r, "\mathcal{O}(\varphi)"] \arrow[d, "t_K"', "\cong"] & \mathcal{O}(F(L)) \arrow[d, "\cong"', "t_L"] \\ sdK \arrow[r, "sd(\varphi)"'] & sdL \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

De acuerdo con el Teorema 2.5.4.1 tenemos una equivalencia de homotopía débil $\psi_{F(K)} : |\mathcal{O}(F(K))| \to F(K)$. Usando el isomorfismo simplicial t_K se obtiene una equivalencia de homotopía débil $\Phi_K = t_k^{-1} \circ \psi_{F(K)} : |K| = sdK \to |\mathcal{O}(F(K)| \to F(K)$.

De hecho la aplicación es natural en el sentido de que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} {|sdK|} \arrow[r, "sd(\varphi)"] \arrow[d, "\Phi_K"', "\cong"] & {|sdL|} \arrow[d, "\cong"', "\Phi_L"] \\ F(K) \arrow[r, "F(\varphi)"'] & F(L), \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

donde $\varphi : K \to L$ es aplicación simplicial. Esto es consecuencia de la conmutatividad de los diagramas 2.3 y 2.4 .

Aunque $|K| = |sdK|$, el diagrama anterior no es conmutativo si se sustituye $sd(\varphi)$ por φ, pues en general $sd(\varphi)$ y φ no coinciden como aplicaciones entre poliedros. No obstante, $\varphi : K \to L$ es aproximación simplicial de $sd(\varphi) : |K| = |sdK| \to |sdL| = |L|$, ya que el símplice soporte de $sd(\varphi)(x)$ en L coincide con el de $\varphi(x)$. Así, ambas aplicaciones son homotópicas y se tiene por tanto que $\Phi_L \circ \varphi \simeq F(\varphi) \circ \Phi_K$.

Mediante los operadores F y $\mathcal{O}$ se definen y desarrollan para espacios finitos T_0 herramientas análogas a las que la topología simplicial basa en las ideas de subdivisión baricéntrica y aproximación simplicial. Así, se define la *F-subdivisión* del espacio finito T_0 X como el espacio finito $X' = F \circ \mathcal{O}(X)$. Esta construcción se puede iterar y se define la *n-ésima F-subdivisión* de X como $sd_F^n = (F \circ \mathcal{O})^n(X)$ Además, toda aplicación $h : X \to Y$ entre espacios finitos T_0 define una aplicación $sd_F^n h = (F \circ \mathcal{O})^n(h)$. Si el isomorfismo simplicial t_K del diagrama 2.3 se usa como identificación, sd^n y sd_F^n están ligados por la igualdad $\mathcal{O} \circ sd_F^n(X) = sd^n \circ \mathcal{O}(X)$.

Capítulo 3

La categoría de Lusternik-Schnirelmann

Damos aquí una breve introducción al invariante numérico conocido como categoría de Lusternik-Schnirelmann (categoría LS para abreviar). La referencia mas completa sobre este invariante es [4], de donde hemos seleccionado el contenido del capítulo.

3.1. Definición de la categoría LS. Invariancia por homotopía

Definición 3.1.1. Sea X un espacio topológico. Un recubrimiento $\mathcal{U}$ de un espacio X se dice *LS-recubrimiento* si para todo $U \in \mathcal{U}$ la inclusión $U \hookrightarrow X$ es homotópicamente trivial.

Definición 3.1.2. Sea X un espacio topológico. Se define la *categoría de Lusternik-Schnirelmann* (o *categoría LS*) $cat(X)$ de X como el mínimo cardinal de los LS-recubrimientos de X por abiertos. Si no existe el entero mínimo, se conviene $cat(X) = \infty$.

Notación 3.1.3. Otra forma de denotar la categoría cuando se la compara con otros invariantes numéricos es $cat_{LS}(X)$.

Nota 3.1.4. De acuerdo con la definición, $cat(X) = 1$ si y sólo si X es contráctil. Por ello muchos autores definen la categoría una unidad menos para hacer que los espacios contráctiles tengan categoría nula.

El siguiente teorema muestra que la categoría LS es un invariante del tipo de homotopía del espacio.

Teorema 3.1.5. Si X e Y son del mismo tipo de homotopía, entonces $cat(X) = cat(Y)$.

Demostración. Supongamos que $f : X \to Y$ es equivalencia de homotopía con una inversa homotópica $g : Y \to X$. Sean $H : X \times I \to X$ una homotopía entre id_X y $g \circ f$. Análogamente, sea $H' : Y \times I \to Y$ una homotopía entre id_Y y $f \circ g$.

Dado un LS-recubrimiento de Y por abiertos $\mathcal{U}_Y = \{U_i\}$, es claro que $\mathcal{U}_X = \{f^{-1}(U_i)\}$ es un recubrimiento por abiertos de X, ya que f es continua.

Veamos que $\mathcal{U}_X$ es un LS-recubrimiento, con lo que se probará $cat(X) \leq cat(Y)$. Análogamente se prueba $cat(Y) \leq cat(X)$, empezando con un LS-recubrimiento de X.

Sea $G_i : U_i \times I \to Y$ una homotopía entre la inclusión $U_i \subseteq Y$ y una aplicación constante y_i. Entonces se define $F_i : f^{-1}(U_i) \times I \to X$ como la homotopía:

$$F_i(x,t) = \begin{cases} H(x, 2t), \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ g \circ G_i(f(x), 2t-1), \text{ si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La aplicación F_i está bien definida, pues $H(x,1) = g(f(x)) = g(G_i(f(x),0))$. Además $F_i(x,0) = H(x,0) = x$ y $F_i(x,1) = g(G_i(f(x),1)) = g(y_i)$. Es decir, F_i es una homotopía entre la inclusión $f^{-1}(U_i) \subseteq X$ y la constante $g(y_i)$. □

Nota 3.1.6. Es natural preguntarse si los LS-recubrimientos por abiertos pueden ser sustituidos por LS-recubrimientos por cerrados para determinar la categoría LS. Esto es así para cualquier poliedro, ver Proposición 1.10 en [4]. En este trabajo sólo usaremos LS-recubrimientos por abiertos.

3.2. Ejemplos

1. El cono CX de cualquier espacio X es contráctil y por tanto $cat(CX) = 1$.

2. Sea X un espacio con $X = A \cup B$ donde A y B son conjuntos abiertos. Entonces $cat(X) \leq cat(A) + cat(B)$. En efecto, si $\{U_i\}$ y $\{W_j\}$ son LS-recubrimientos por abiertos de A y B, respectivamente, por ser A y B abiertos de X se sigue que U_j y W_j son abiertos en X y por tanto $\{U_i\} \cup \{W_j\}$ es un LS-recubrimiento de X por abiertos. Esto implica $cat(X) \leq cat(A) + cat(B)$.

3. Si $X = S^1$, como la circunferencia no es contráctil se tiene que $cat(S^1) > 1$. Por otro lado, en la Figura 3.1 se da un LS-recubrimiento con dos abiertos, así que $cat(S^1) = 2$. En general, $cat(S^n) = 2$. Es inmediato también que $cat(S^n \vee S^n) = 2$.

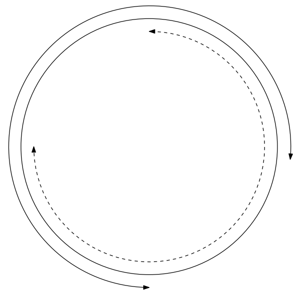


Figura 3.1: Un LS-recubrimiento de S^1

4. En general, para la suspensión SX de X se tiene $cat(SX) \leq 2$. Basta tomar como LS-recubrimiento los dos conos que se forman al realizar la suspensión.

5. Si T es la superficie tórica, $cat(T) \leq 3$. En efecto, se toman dos conjuntos D_1, D_2 homeomorfos al disco abierto y tales que $\overline{D_1} \subseteq D_2$. Entonces $T = (T \backslash \overline{D}_1) \cup D_2$, y de acuerdo con (2) se sigue $cat(T) \leq cat(T \backslash \overline{D_1}) + cat(D_2) = cat(T \backslash \overline{D}_1) + 1$ pues D_2 es contráctil. Además, por el Teorema 3.1.5, al ser $T \backslash \overline{D}_1$ del mismo tipo de homotopía que $S^1 \vee S^1$, se sigue $cat(T \backslash \overline{D}_1) = 2$ y, por tanto, $cat(T) \leq 3$.

3.3. LS-recubrimientos relativos a un punto

En el caso de espacios con buenas propiedades topológicas, la categoría LS puede obtenerse por LS-recubrimientos cuyos abiertos tienen un punto en común al cual se deforman todos ellos por una deformación que no altera el punto elegido. Comenzamos con un lema de topología que será útil en algunas demostraciones que siguen.

Lema 3.3.1. Sea (X,d) un espacio métrico y $\{U_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento por abiertos de X. Entonces existe un recubrimiento por abiertos $\{W_i\}_{i=1}^n$ de X tal que $W_j \subseteq \overline{W_j} \subseteq U_j$, para todo $j \in \{1,2,...,n\}$.

Demostración. Para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$, sea la aplicación $f_j : X \to [0,1]$ dada por $f_j(x) = \frac{d(x, X\setminus U_j)}{\sum_{i=1}^n d(x, X\setminus U_i)}$. Nótese que $X = \cup_{i=1}^n U_i$ implica que el denominador nunca se anula. Por tanto, cada f_j es continua. Además $f_j(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ y $f_j(x) > 0$ si y sólo si $x \in U_j$.

Si $h(x) = \max_{1\leq j\leq n} f_j(x)$, sea $\tilde{f}_j(x) = \max\{0, f_j(x) - \frac{2}{3}h(x)\}$ y tomemos $W_j = \tilde{f}_j^{-1}((0,1])$. La continuidad de $\tilde{f}_j$ nos dice que W_j es abierto. Si $x \in X$, sea j_0 con $h(x) = f_{j_0}(x) > 0$; entonces $\tilde{f}_{j_0}(x) > 0$ y por tanto $x \in W_{j_0}$. Esto demuestra $X = \cup_{j=1}^n W_j$.

Finalmente se tiene $\overline{W_j} \subseteq f_j^{-1}((0,1]) \subseteq U_j$. La segunda contención es evidente por la observación sobre f_j más arriba. Sea $x_n \in W_j$ una sucesión que converge a $x \in \overline{W_j}$. Entonces, para todo $n \geq 1, \tilde{f}_j(x_n) > 0$ y $f_j(x_n) > \frac{2}{3}h(x_n)$. Por continuidad, $f_j(x) \geq \frac{2}{3}h(x) > 0$, luego $x \in f_j^{-1}((0,1])$. □

Definición 3.3.2. Se dice que un LS-recubrimiento $\{U_j\}_{j=1}^n$ de X es *relativo a* $x_0 \in X$ si $x_0 \in U_i$, para todo $i \in 1, 2, ...n$ y la homotopía $H_j : U_j \times I \to X$ que hace la inclusión de $U_j \subseteq X$ homotópicamente trivial es relativa a x_0; esto es, $H_j(x_0, t) = x_0$, para todo $t \in I$.

Definición 3.3.3. Un punto $x_0 \in X$ se dice *no degenerado* si para toda aplicación $f : X \to Y$ y todo camino $\gamma : I \to Y$ con $\gamma(0) = f(x_0)$ existe una homotopía $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x_0, t) = \gamma(t)$

Lema 3.3.4. Sea X un espacio topológico y sea $x_0 \in X$. Si x_0 es no degenerado, entonces existe un entorno abierto U de x_0 en X tal que la aplicación inclusión $i : U \hookrightarrow X$ es homotópicamente trivial relativamente a x_0.

Demostración. Sea $Y = X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I \subseteq X \times I$. Se define la aplicación $f : X \to Y$ por $f(x) = (x, 0)$ y $\gamma : I \to Y$ por $\gamma(t) = (x_0, t)$. Por hipótesis existe una homotopía $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x, 0) = (x, 0)$ y $H(x_0, t) = \gamma(t) = (x_0, t)$. Por continuidad de $H|_{X\times\{1\}}$ existe un abierto $U \subset X$ tal que $H(U \times \{1\}) \subseteq \{x_0\} \times (2/3, 1]$. Entonces la composición $G = p \circ H|_{U\times I}$:, donde $p : Y \to X$ es la proyección $p(x, t) = x$, cumple $G(x, 0) = x$, $G(x, 1) = x_0$ y $G(x_0, t) = x_0$, para todo $x \in U$ y $t \in I$. □

Nota 3.3.5. Del lema anterior se deduce que todo espacio compacto cuyos puntos sean todos no degenerados (como es el caso de los poliedros) tiene categoría LS finita.

Lema 3.3.6. Sea X un espacio métrico conexo por caminos y $x_0 \in X$ un punto no degenerado. Si $cat(X) \leq n$ entonces existe un LS-recubrimiento de X por abiertos $\{V_i\}_{1\leq i\leq n}$ relativo a x_0.

Demostración. Sea $\{U_j\}_{1\leq j\leq n}$ un LS-recubrimiento de X por abiertos. Sean $H_j : U_j \times I \to X$ homotopías tales que $H_j(x, 0) = 0$ y $H_j(x, 1) = x_j$, para todo $x \in U_j$. Sea $\gamma_j : I \to X$ un camino con $\gamma_j(0) = x_j$ y $\gamma(1) = x_0$.

Por el Lema 3.3.1 se puede encontrar un recubrimiento $\{W_j\}_{1\leq j\leq n}$ de X tal que $W_j \subseteq \overline{W_j} \subseteq U_j$, para todo j. Además, por ser x_0 un punto no degenerado, podemos encontrar un entorno abierto N_0 de x_0 tal que la inclusión $N_0 \subseteq X$ es homotópicamente trivial por una homotopía $G : N_0 \times I \to X$ relativa a x_0.

Podemos suponer que $x_0 \in U_j$ para $j = 1, 2, ..., k$ y $x_0 \notin U_j$ para $j = k+1, k+2, ..., n$. En particular, $x_0 \notin \overline{W_j}$ si $j \geq k+1$ y podemos considerar el entorno abierto de x_0 dado por $N = N_0 \cap (\cap_{j=1}^k U_j) \cap (X\setminus \cup_{j=k+1}^n \overline{W_j})$.

Además la restricción de G a $N \times I$ nos da una homotopía relativa a x_0 entre la inclusión $N \subseteq X$ y la constante x_0.

Por el Lema 3.3.1 existe un entorno abierto M de x_0 tal que $M \subseteq \overline{M} \subseteq N \subseteq U_j$ $(1 \leq j \leq k)$. Definimos los conjuntos abiertos $V_j = U_j \cap (X\setminus\overline{M}) \cup M$ si $1 \leq j \leq k$ y

$V_j = W_j \cup N$ si $k+1 \leq j \leq n$. Nótese que $\mathcal{V} = \{V_j\}_{1\leq j\leq n}$ es un recubrimiento de X, ya que $\overline{M} \subseteq N$. Obsérvese también que $x_0 \in \cap_{j=1}^n V_j$.

Veamos finalmente que $\mathcal{V}$ es un LS-recubrimiento relativo a x_0. Para ello, si $j \leq k$ se observa que V_j es la unión disjunta de los abiertos $\Omega_j = U_j \cap (X\backslash\overline{M})$ y M. Entonces se define $H'_j : V_j \times I \to X$ como $H'_j = G$ sobre M y $H'_j(x,t) = H_j(x,2t)$ si $x \in \Omega_j$ y $t \in [0,1/2]$, mientras que $H'_j = \gamma_j(2t-1)$ si $x \in \Omega_j$ y $t \in [1/2,1]$. Es inmediato ver que H'_j está bien definida y es continua. Además $H'_j(z,0) = z$ y $H'_j(z,1) = x_0$ para todo $z \in V_j$ y $H'_j(x_0,t) = G(x_0,t) = x_0$ para todo t.

Si ahora $j \geq k+1$, se tiene que V_j es la unión disjunta de W_j y N y se define $H'_j : V_j \times I \to X$ como H_j sobre $W_j \times I$ y G sobre $M \times I$. Es inmediato comprobar que H'_j define una homotopía relativa a x_0 entre la inclusión $V_j \subseteq X$ y la constante x_0. □

Gracias a las mejoras introducidas en los lemas anteriores se prueba el siguiente resultado.

Proposición 3.3.7. Sean X e Y espacios métricos y $p_0 \in X$ y $q_0 \in Y$ puntos no degenerados. Entonces si $X \vee Y$ es el wedge obtenido al identificar p_0 y q_0 se tiene $cat(X \vee Y) = max\{cat(X), cat(Y)\}$.

Demostración. Supongamos $cat(X) = n$ y $cat(Y) = m$ con $n \leq m$. Sean $\{U_i\}_{1\leq i\leq n}$ y $\{V_j\}_{1\leq j\leq m}$ LS-recubrimientos por abiertos relativos a p_0 y q_0, respectivamente, dados por el Lema 3.3.6.

Interpretamos $X \vee Y$ como el subespacio $X \times \{q_0\} \cup \{p_0\} \times Y \subseteq X \times Y$, y tomamos los abiertos de $X \vee Y$ dados por $W_j = U_j \vee V_j$ si $1 \leq j \leq n$ y $W_j = U_n \vee V_j$ si $n+1 \leq j \leq m$. Sean H_i y G_j homotopías relativas a los puntos p_0 y q_0, respectivamente. Estas homotopías, a su vez, dan lugar a homotopías $F_j : W_j \times I \to X \vee Y$ definidas por:

a) Si $1 \leq j \leq n$, $F_j((x,q_0),t) = (H_j(x,t), q_0)$ y $F_j((p_0,y),t) = (p_0, G_j(y,t))$

b) Si $n+1 \leq j \leq m$, $F_j((x,q_0),t) = (H_n(x,t), q_0)$ y $F_j((p_0,y),t) = (p_0, G_j(y,t))$

Las aplicaciones F_j están bien definidas pues, para todo t, $F_i((p_0,q_0),t) = (p_0,q_0) = (p_0, G_j(q_0,t)$, para $1 \leq i \leq n$ y $n+1 \leq j \leq m$. Además es inmediato de las definiciones que F_j es una homotopía relativa entre la inclusión $W_j \subseteq X \vee Y$ y la constante (p_0,q_0). Por tanto $cat(X \vee Y) \leq max\{cat(X), cat(Y)\}$.

Para comprobar la otra desigualdad, sean $k : X \to X \vee Y$ y $r : X \vee Y \to X$ las aplicaciones $k(x) = (x,q_0)$, $r(x,q_0) = x$ y $r(p_0,y) = p_0$. Es claro que $r \circ k = id_X$. Si $\{U_i\}$ es un LS-recubrimiento de $X \vee Y$ por abiertos, se tiene que $\{V_i\}$ con $V_i = k^{-1}(U_i)$ es un LS-recubrimiento de X por abiertos. En efecto, si $H_i : U_i \times I \to X \vee Y$ es una homotopía entre la inclusión $U_i \subseteq X \vee Y$ y la constante z_i, entonces $G_i : V_i \times I \to X$ dada por $G_i(x,t) = rH_i(k(x),t)$ es una homotopía entre la inclusión $V_i \subseteq X$ y la constante $r(z_i)$. Por tanto $cat(X) \leq cat(X \vee Y)$. Análogamente $cat(Y) \leq cat(X \vee Y)$ y se tiene la igualdad $cat(X \vee Y) = max\{cat(X), cat(Y)\}$. □

3.4. Versión de la categoría LS en el sentido de Whitehead

Definición 3.4.1. Sea X un espacio topológico y $e \in X$. Se define la *categoría de Whitehead* $cat_{Wh}(X,e)$ de (X,e) como el menor entero n tal que existe una aplicación $\Delta' : X \to T^n(X)$ que hace el siguiente diagrama conmutativo salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta'"] \arrow[dr, "\Delta"'] & T^n(X) \arrow[d, "j"] \\ & X^n \end{tikzcd}$$

Aquí $T^n(X)$ es el subespacio del espacio producto $X^n = X \times ... \times X$(n-veces) dado por:

$$T^n(X) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n | \text{ existe al menos un } i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ tal que } x_i = e\}.$$

Además, j es la inclusión de $T^n(X)$ en X^n y Δ es la aplicación diagonal $x \longmapsto (x, x, ..., x)$.

Obsérvese que para $n = 2$, $T^2(X) = X \vee X$ es el *wedge* habitual.

Ahora veamos que las categorías de Whitehead (cat_{Wh}) y de Lusternik-Schnirelman (cat_{LS}) coinciden cuando e es no degenerado. Para ello se necesita el siguiente lema previo:

Lema 3.4.2. Sea X un espacio métrico. Si $cat_{LS}(X) \leq n$ entonces existe un LS-recubrimiento de X por abiertos $\mathcal{V} = \{V_i\}_{1 \leq i \leq n}$ tal que para cada i se encuentra una homotopía $H_i : X \times I \to X$ con $H_i(x, 0) = x$ para todo $x \in X$ y tal que $H_i(z, 1)$ es una aplicación constante para todo $z \in U_i$.

Mas aún, si $e \in X$ es un punto no degenerado se puede conseguir que $\mathcal{V}$ sea relativo a e.

Demostración. Sea $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ un LS-recubrimiento por abiertos. Sea $F_i : U_i \times I \to X$ una homotopía entre la inclusión $X \subseteq X$ y una constante x_i.

Aplicando dos veces el Lema 3.3.1 encontramos recubrimientos por abiertos de X $\{V_i\}_{1 \leq i \leq n}$ y $\{W_i\}_{1 \leq i \leq n}$ tales que $V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq W_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq U_i$ para todo i.

En particular, $V_i \cap (X \backslash W_i) = \emptyset$ y por el Lema 1.2.2 encontramos una función $\lambda_i : X \to [0, 1]$ tal que $\lambda_i(\overline{V_i}) = 1$ y $\lambda_i(X \backslash W_i) = 0$. Se define entonces $H_i : X \times I \to X$ por $H_i(x, t) = x$ si $x \in X \backslash W_i$ y $H_i(x, t) = F_i(x, t\lambda_i(x))$ si $x \in \overline{W_i}$. Para ver que H_i está bien definida y es continua se observa que está definida en dos subconjuntos cerrados de X cuya intersección es $\overline{W_i} \backslash W_i \subseteq W_i \subseteq X \backslash W_i$. Por tanto λ_i se anula en dicha intersección y si $x \in \overline{W_i} \backslash W_i$, $F_i(x, t\lambda_i(x)) = F_i(x, 0) = x$.

Además, por definición, $H_i(x, 0) = x$ para todo $x \in X$, y para $x \in V_i$ tenemos que $\lambda_i(x) = 1$. Por tanto, $H_i(x, t) = F_i(x, t\lambda_i(x)) = F_i(x, t)$ para todo t. En particular, $H_i(x, 1)$ es la constante x_i para todo $x \in V_i$.

Si ahora $e \in X$ es un punto no degenerado entonces el LS-recubrimiento $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ con el que se comenzó la demostración pueda ser elegido relativo a e por el Lema 3.3.6. La misma demostración anterior nos da una extensión H_i de F_i, y por tanto H_i también es relativa a e. □

Teorema 3.4.3. Sea X un espacio métrico conexo por caminos y $e \in X$ un punto no degenerado. Entonces $cat_{Wh}(X, e) = cat_{LS}(X)$.

Demostración. Se supone $cat_{Wh}(X, e) = n$. Por definición, existe una aplicación $\Delta' : X \to T^n(X)$ tal que $\Delta \simeq \Delta' \circ j$ vía una homotopía $H : X \times I \to X^n$. Sea $p_i : X^n \to X$ la i-ésima proyección. Entonces la homotopía $p_i \circ H : X \circ I \to X$ hace homotópicas a id_X con la composición $h_i = p_i \circ j \circ \Delta'$. Sea N un entorno abierto de e y $U_i = h_i^{-1}(N)$ para $1 \leq i \leq n$. Como $T^n(X) = \cup_{i=1}^n p_i^{-1}(e)$, para todo $x \in X$ se tiene $\Delta'(x) \in p_{i_0}^{-1}(e)$ para algún i_0 y por tanto $x \in U_{i_0}$. Esto prueba que $\mathcal{U} = \{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es un recubrimiento de X por abiertos.

Veamos que $\mathcal{U}$ es un LS-recubrimiento de X. Para ello se elige N de forma que exista una homotopía relativa a e, $G : N \times I \to X$, entre la inclusión $N \subseteq X$ y la constante e. Aquí se usa el Lema 3.3.4. Ahora se define $L_i : U_i \times I \to X$ por $L_i(x, t) = p_i \circ H(x, 2t)$ si $t \in [0, 1/2]$ y $L_i(x, t) = G(h_i(x), 2t - 1)$ si $t \in [1/2, 1]$. La aplicación está bien definida pues $p_i \circ H(x, 1) = h_i(x) = G(h_i(x), 0)$. Además, $L_i(x, 0) = p_i \circ H(x, 0) = x$

y $L_i(x,1) = G(h_i(x),1) = e$. Por tanto $\mathcal{U}$ es un LS-recubrimiento de X por abiertos y $cat_{LS}(X) \leq cat_{Wh}(X,e)$.

Para ver la otra desigualdad, se supone $cat_{LS}(X) = n$. Entonces por el Lema 3.3.6 se puede encontrar un LS-recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{1\leq i\leq n}$ y homotopías $H_i : X\times I \to X$ tales que $H_i(x,0) = x$ para todo $x \in X$ y $H_i(x,1) = e$, con $H_i(e,t) = e$ para todo $t \in I$.

Sea $H : X\times I \to X^n$ la homotopía $H(x,t) = (H_i(x,t))_{1\leq i\leq n}$. Entonces $H(x,0) = \Delta(x)$ para todo $x \in X$ y $H(x,1) \in T^n(X)$ pues $X = \cup_{i=1}^n U_i$ y por tanto dado $x \in X$ existe algún i con $H_i(x,1) = e$. Sea $h : X \to T^n(X)$ la aplicación $h(x) = H(x,1)$. Entonces H es una homotopía entre Δ y $j \circ h$. Por tanto h es la factorización requerida en la Definición 3.4.1 y $cat_{Wh}(X,e) \leq cat_{LS}(X)$. □

Del Teorema 3.4.3 se desprende la siguiente caracterización de los espacios con categoría LS menor o igual que 2.

Corolario 3.4.4. Sea X un espacio métrico con $e \in X$ un punto no degenerado. Entonces $cat(X) \leq 2$ si y sólo si (X,e) es co-H-espacio.

Recordemos la noción de co-H-espacio.

Definición 3.4.5. Sea X un espacio topológico y $e \in X$. Se dice que (X,e) es *co-H-espacio* si existe una aplicación $\mu : X \to X \vee X$ (llamada *comultiplicación*) que hace conmutativo salvo homotopía el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "id"'] \arrow[d, "\mu"] \arrow[dr, "id"] & \\ X & X \vee X \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & X \end{tikzcd}$$

donde id es la identidad y p_1 y p_2 son las correspondientes proyecciones.

Ejemplo 3.4.6. Ejemplos de co-H-espacios son las suspensiones reducidas. Si sX es la suspensión reducida de X y $e \in sX$ es el punto base, se define la comultiplicación $\mu : sX \to sX \vee sX$ por $\mu([x,t]) = ([x,2t],e)$ si $0 \leq t \leq 1/2$ y $\mu([x,t]) = (e,[x,2t-1])$ si $1/2 \leq t \leq 1$.

Demostración del Corolario 3.4.4. Si $cat(X) \leq 2$ entonces por el Teorema 3.4.3 la diagonal $\Delta : X \to X \times X$ factoriza salvo homotopía en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X \vee X \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[ur, "\Delta'"] \arrow[r, "\Delta"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

Tenemos que $\mu = \Delta'$ es una comultiplicación pues si $p_i : X \times X \to X$ es la proyección, $p_i = p_i \circ j : X \vee X \to X$ es la proyección del *wedge* y entonces $id = p_i \circ \Delta \simeq p_i \circ j \circ \Delta' = p_i \circ \mu$.

Recíprocamente, si (X,e) es un co-H-espacio con comultiplicación $\mu : X \to X \vee X$ y $id \simeq p_i \circ \mu$ (por medio de la homotopía H_i), la homotopía $H : X \times I \to X \times X$ dada por $H(x,t) = (H_1(x,t), H_2(x,t))$ verifica $H(x,0) = (H_1(x,0), H_2(x,0)) = (x,x) = \Delta(x)$ y $H(x,1) = (H_1(x,1), H_2(x,1)) = (p_1 \circ \mu(x), p_2 \circ \mu(x)) = j \circ \mu$, donde $j : X \vee X \to X \times X$ es la inclusión. □

Se concluye la sección con dos propiedades básicas de los co-H-espacios que se usarán en el último capítulo.

Proposición 3.4.7. Sea $f : X \to Y$ una equivalencia de homotopía. Si (X, e) es un co-H-espacio, entonces (Y, e') es también co-H-espacio para $e' = f(e)$.

Demostración. Sea g una inversa homotópica de f y sea μ_X la comultiplicación de X. Se considera el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] & X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[dr, "id_X"'] & X \vee X \arrow[r, "f \vee f"] \arrow[d, "p_1^X"] & Y \vee Y \arrow[d, "p_1^Y"] \\ & & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Del diagrama se extrae la composición $\mu_Y = (f \vee f) \circ \mu_X \circ g$. Como $p_1^Y \circ \mu_Y = f \circ id_X \circ g = f \circ g \simeq id_Y$, μ_Y es una comultiplicación para Y. Análogamente se razona para p_2^Y. $\square$

Proposición 3.4.8. Todo co-H-espacio es conexo por caminos.

Demostración. Sea $x \in X$. Si $\mu(x) = (y_x, e)$ entonces si H es una homotopía entre $p_2 \circ \mu$ e id_X, la restricción de H a $\{x\} \times I$ define un camino entre $x = H(x, 0)$ y $e = p_2\mu(x) = H(x, 1)$. Análogamente se encuentra un camino entre x y e si $\mu(x) = (e, y_x)$ usando $p_1 \circ \mu \simeq id$. Por tanto todo $x \in X$ se puede unir siempre a e, y por ello X es conexo por caminos. $\square$

También es conocido el siguiente resultado (ver [4], Ejercicio 1.21).

Teorema 3.4.9. El grupo fundamental de todo co-H-espacio es un grupo libre.

Ejemplo 3.4.10. Como el grupo fundamental de la superficie tórica T es el grupo abeliano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se sigue que T no es co-H-espacio y por ello $cat(T) \geq 3$. Como ya vimos en la Sección 3.2 que $cat(T) \leq 3$, se concluye que $cat(T) = 3$.

Capítulo 4

La categoría LS de los espacios finitos

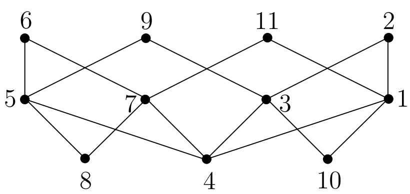
4.1. Definición, ejemplos y observaciones

Para un espacio finito X tiene sentido preguntarse por su categoría LS. Como los espacios finitos son equivalentes a los posets, se tiene la posibilidad así de aplicar la categoría LS a la teoría del orden.

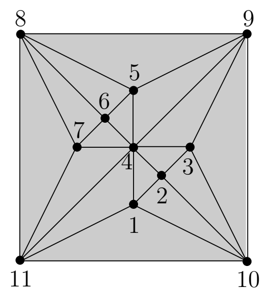
Esta sección es una recopilación de ejemplos y observaciones sobre el comportamiento de la categoría LS en estos espacios, y se plantean varios problemas que que quedan abiertos.

La categoría LS es un invariante del tipo de homotopía del espacio, por lo que se puede asumir siempre que trabajamos con los modelos minimales y sus diagramas de Hasse. En particular, si X es un espacio finito (minimal o no) la categoría queda acotada por el número de elementos maximales; esto es, se tiene $cat(X) \leq \#(Max(X))$. Esto se sigue de que los abiertos de un punto son contráctiles y que los abiertos mínimos de los maximales cubren todo el espacio.

Ejemplo 4.1.1. Se puede apreciar que el espacio X representado por la Figura 4.1(a) tiene cuatro elementos maximales, pero es suficiente con tomar los abiertos $U_{x_6} \cup U_{x_2}$ y $U_{x_9} \cup U_{x_{11}}$. El primer abierto es contráctil a un punto siguiendo la siguiente sucesión de eliminación de puntos x_1, x_3, x_7, x_5, y sobrevive únicamente x_6. El segundo abierto es contráctil a un punto siguiendo la misma sucesión de eliminación de puntos, y queda únicamente x_9. Así que $cat(X) \leq 2 < 4 = \#(Max(X))$.



(a)



(b)

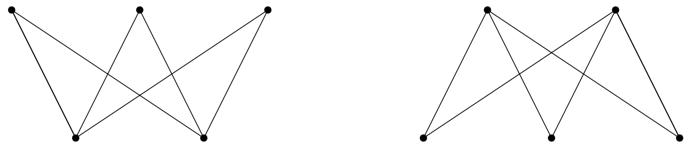
Figura 4.1:

Se comprueba que no es contráctil viendo que no hay ningún punto eliminable. Por tanto $cat(X) = 2$.

También este ejemplo nos muestra que, en general, $cat(X) \neq cat(|\mathcal{O}(X)|)$, ya que el $|\mathcal{O}(X)|$ de la Figura 4.1(b) es un cuadrado y por tanto su categoría LS es 1.

En el siguiente ejemplo se ve que, en general, $cat(X) \neq cat(X^{op})$, donde X^{op} indica el espacio asociado al orden opuesto al de X. En particular, los maximales de X^{op} son los minimales de X.

Ejemplo 4.1.2. El espacio finito X representado por la Figura 4.2(a) tiene tres elementos maximales y sus correspondientes abiertos son los que nos sirven para dar un LS-recubrimiento minimal, ya que ninguna unión de dos abiertos mínimos de elementos maximales contiene puntos eliminables. El espacio finito X^{op} representado por la figura 4.2(b) tiene dos maximales, y por lo tanto $cat(X^{op}) \leq 2$.

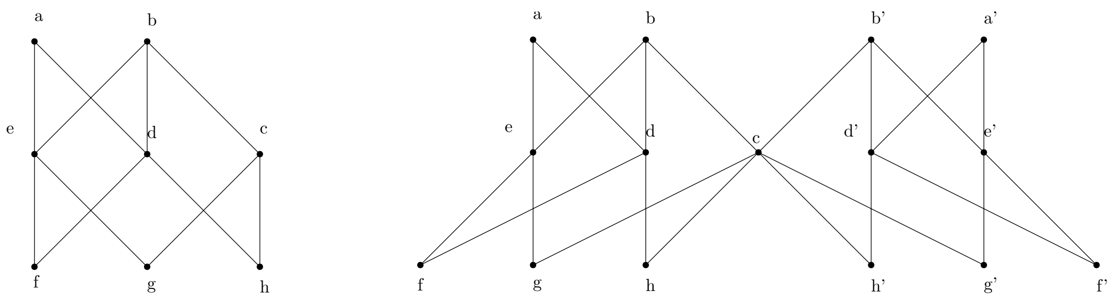


(a) (b)

Figura 4.2:

Ejemplo 4.1.3. El espacio X representado por la Figura 4.3(a) se puede contraer al punto a siguiendo la sucesión de puntos eliminables c, g, e, d.

La Figura 4.3(b) representa a la unión por el punto c, $X \vee X$, lo que provoca que el punto que se empezaba eliminando ahora no se pueda eliminar y no existe otro punto posible para empezar; por tanto, $cat(X \vee X) \geq 2$. Por otro lado, si consideramos los abiertos $U_a \cup U_b$ y $U_{a'} \cup U_{b'}$, cada uno de ellas se puede llevar por eliminación de h' y g' y h y g, respectivamente, a X. Por tanto, son contráctiles en $X \vee X$.



(a) (b)

Figura 4.3:

Si comparamos este ejemplo con la Proposición 3.3.7, vemos que el hecho de que $X \vee X$ no sea contráctil (lo que seguiría de ser cierta dicha proposición en este caso) se debe a que el punto de unión es degenerado en el ejemplo. De hecho, la presencia de puntos degenerados es un problema intrínseco de la teoría de homotopía de los espacios finitos (ver [10]).

Se puede comprobar que la diferencia entre $cat(X)$ y $cat(|\mathcal{O}(X)|)$ puede ser arbitrariamente grande (ver Ejemplo 4.1.12 más adelante). Esto nos lleva a preguntarnos si existe algún invariante numérico del tipo de la categoría LS que interpole la categoría LS de un espacio finito y la de su realización como poliedro. Para ello se va a presentar el invariante numérico denominado categoría simplicial en [7].

Definición 4.1.4. Sea K un complejo simplicial. Se define la *categoría simplicial* ($scat(K)$) de K como el menos número entero tal que existen $K_1, K_2, ..., K_n$ subcomplejos que recubren a K y cuya inclusiones $K_i \hookrightarrow K$ están en la misma clase de contigüidad que una constante.

Recordemos la noción de contigüidad. Se dice que dos aplicaciones simpliciales $\varphi, \psi : K \to L$ son *contiguas* si para cada símplice $\sigma \in K$, sus imágenes $\varphi(\sigma)$ y $\psi(\sigma)$ están en un mismo símplice de L. Se dice que están en la *misma clase de contigüidad* si existe una secuencia $\varphi = \varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n = \psi$ tal que φ_i y φ_{i+1} son contiguas para todo $0 \leq i \leq n-1$.

Teniendo en cuenta que dos aplicaciones simpliciales contiguas son homotópicas (ver [12]) y que se pueden usar recubrimientos por cerrados para determinar la categoría LS de un poliedro (Nota 3.1.6) entonces se sigue la desigualdad

$$scat(K) \leq cat(|K|).$$

Dos complejos simpliciales K y L se dicen que *están en la misma clase de contigüidad* si existen aplicaciones simpliciales $\varphi : K \to L$ y $\psi : K \to L$ tales que $\varphi \circ \psi$ y $\psi \circ \varphi$ están en la misma clase de contigüidad que las correspondientes identidades.

Se demuestra en [7] que si K y L están en la misma clase de contigüidad entonces $scat(K) = scat(L)$.

Pasamos a relacionar la categoría LS de un espacio finito X con la categoría simplicial de su complejo asociado $\mathcal{O}(X)$. Para ello empezaremos comprobando que la relación de homotopía de los espacios finitos pasa a ser la de contigüidad entre sus complejos asociados. Esta parte está tomada de la Sección 2.1 de [2].

Lema 4.1.5. Sean $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones homotópìcas entre espacios finitos T_0. Entonces se puede encontrar una secuencia $f = f_0, f_1, ..., f_n = g$ tal que para cada $0 \leq i \leq n$ existe un punto $x_i \in X$ con las siguientes propiedades:

1. f_i y f_{i+1} coinciden en $X \backslash \{x_i\}$.

2. $f_i(x_i) \leq f_{i+1}(x_i)$ ó $f_{i+1}(x_i) \leq f_i(x_i)$.

Demostración. Por ser f y g homotópicas existe una secuencia $f = f_0, f_1, ..., f_n = g$ de aplicaciones tales que f_i está relacionada con f_{i+1} $(1 \leq n \leq n-1)$ para el orden entre aplicaciones en la Sección 2.4.

Sin pérdida de generalidad se puede tomar $f \leq g$. Sea $A(f,g) = \{x \in X; f(x) \neq g(x)\}$. Si este conjunto es vacío no hay nada que decir. En otro caso, sea x_0 un elemento maximal de $A(f,g)$, así que $f(x_0) < g(x_0)$. Se define ahora $f_1 : X \to Y$ por $f_1 = f$ sobre $X \backslash \{x_0\}$ y $f_1(x_0) = g(x_0)$. Obviamente f y f_1 cumplen las condiciones 1) y 2). Queda ver que f_1 es continua. En efecto, $x \leq z$ en X y tenemos los siguientes casos:

- Si $x = x_0$, por ser x_0 maximal en $A(f,g)$ se sigue que $z \notin A(f,g)$ y por tanto $f(x) = g(z)$. Tenemos por la continuidad de g que $f_1(x) = f_1(x_0) = g(x_0) \leq g(z) = f(z) = f_1(z)$. Así pues f_1 preserva el orden en este caso.

- Si $z = x_0$, entonces por la continuidad de f se tiene que $f_1(x) = f(x) \leq f(z) = f(x_0) < g(x_0) = f_1(x_0) = f(x)$. También f_1 preserva el orden.

- Si $x, z \neq x_0$. De nuevo, f_1 preserva el orden pues por la continuidad de f, ya que $f_1(x) = f(x) \leq f(z) = f_1(z)$.

Obsérvese que por definición $f_1 \leq g$ y $A(f_1, g) = A(f,g) \backslash \{x_0\}$. Podemos entonces reiterar el proceso hasta que, para algún n, $A(f_n, g) = \emptyset$, esto es, $f_n = g$. Aquí usamos la finitud de $A(f,g)$. $\square$

Proposición 4.1.6. Sean $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones homotópicas entre espacios finitos T_0. Entonces las aplicaciones simpliciales $\mathcal{O}(f), \mathcal{O}(g) : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$ están en la misma clase de contigüidad.

Demostración. Por el Lema 4.1.5, se puede asumir que existe $x \in X$ tal que $f(z) = g(z)$ para cada $z \neq x$ y $f(x) < g(x)$. Por lo tanto, para toda cadena en X $C = \{x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n\}$ es claro que $f(C) = g(C)$ es una cadena en Y si $x \notin C$, y si $x = x_i$ en C, entonces $f(C) \cup g(C)$ es la cadena $y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_{i-1} \leq y_i \leq y_{i+1} \leq ... \leq y_{n+1}$ donde $y_j = f(x_j) = g(x_j)$ si $j \leq i - 1$; $y_i = f(x_i)$; $y_{i+1} = g(x_i)$, y $y_j = g(x_{j-1}) = f(x_{j-1})$ si $j \geq i + 2$. Es decir, si $\sigma \in \mathcal{O}(X)$ es el símplice representado por la cadena C, sus imágenes $\mathcal{O}(f)(\sigma)$ y $\mathcal{O}(g)(\sigma)$ están en un mismo simplice de $\mathcal{O}(Y)$. □

Proposición 4.1.7. Sean $\varphi, \psi : K \to L$ aplicaciones simpliciales de la misma clase de contigüidad. Entonces $F(\varphi)$ y $F(\psi)$ son homotópicas.

Demostración. Supongamos que φ y ψ son contiguas. Entonces la aplicación $f : F(K) \to F(L)$ que lleva σ en el símplice generado por los vértices de $\varphi(\sigma)$ y $\psi(\sigma)$ está bien definida y es continua. Más aún, $F(\varphi) \leq f \geq F(\psi)$ y entonces $F(\varphi)$ y $F(\psi)$ son homotópicas. □

Teorema 4.1.8. Sea X un espacio finito. Se tiene la cadena de desigualdades

$$cat(X) \geq scat(\mathcal{O}(X)) \geq cat(sd_F X) \geq scat(\mathcal{O}(sd_F X)) \geq ... \geq cat(|\mathcal{O}(X)|)$$

Recordemos que la subdivisión n-ésima de un espacio finito X $sd_F^n X$ está definida como la composición reiterada n veces del operador $F \circ \mathcal{O}$, ver el final de la subsección 2.5.5.

Demostración. Por la definición de sd_F^n basta con demostrar las dos desigualdades siguientes:

- $cat(X) \geq scat(\mathcal{O}(X))$. Sea $cat(X) = n$ y $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ LS-recubrimiento por abiertos de X. Sea H_i una homotopía que hace a la correspondiente inclusión homotópicamente trivial.

  Por otra parte cada U_i debe contener elementos maximales de X, pues en caso contrario podría ser eliminado del LS-recubrimiento. Entonces, para $M_i = Max(X) \cap U_i$ se tiene $U_i = \cup_{x \in M_i} U_x$; ver Proposición 2.3.3.

  Ahora bien, para cada $x \in X$ $\mathcal{O}(U_x)$ es el subcomplejo de $\mathcal{O}(X)$ generado por los vértices menores o iguales a x. Además si $i : U_x \to X$ es la inclusión, $\mathcal{O}(i)$ es la inclusión del correspondiente subcomplejo. Entonces $\{\mathcal{O}(U_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ es un recubrimiento de $\mathcal{O}(X)$ por subcomplejos tales que cada inclusión $\mathcal{O}(i) : \mathcal{O}(U_i) \to \mathcal{O}(X)$ es contigua a la constante. Aquí usamos la Proposición 4.1.6. Se concluye que $n \geq scat(\mathcal{O}(X))$.

- $scat(K) \geq cat(F(K))$. Se supone que $scat(K) = n$, entonces existen $K_1, K_2, ..., K_n$ subcomplejos simpliciales que recubren a $\mathcal{O}(X)$ tal que la inclusión de cada K_i está en la misma clase de contigüidad que una constante.

  Para cada i, $F(K_i)$ es la unión de los abiertos mínimos de los símplices maximales de K_i. En efecto, si $\sigma \in K_i$ y τ es un símplice maximal de K_i con $\sigma \leq \tau$ entonces $\sigma \in U_\tau$ en la topología de $F(K)$. Recíprocamente, si $\mu \in U_\tau$ entonces $\mu \leq \tau$ y por ser K_i complejo simplicial $\mu \in K_i$, es decir $\mu \in F(K_i)$. Por tanto $\{F(K_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ forma un recubrimiento por abiertos de $F(K)$. Además es LS-recubrimiento por la Proposición 4.1.7. Se concluye que $n \geq cat(F(K))$

□

Para el caso de categoría LS uno las desigualdades del Teorema 4.1.8 son todas igualdades como consecuencia de los siguientes teoremas (ver Corolario 5.2.7 de [2]). Las demostraciones dadas en [2] son indirectas (ver Corolario 5.2.8 y 5.1.11 de [2]). Aquí presentamos una demostración directa para el primero. No hemos encontrado una demostración similar para el segundo.

Teorema 4.1.9. Sea X un espacio topológico finito T_0. Entonces $cat(X) = 1$ si y sólo si $scat(\mathcal{O}(X)) = 1$.

Teorema 4.1.10. Sea K un complejo simplicial. Entonces $scat(K) = 1$ si y sólo si $cat(F(K)) = 1$.

Demostración del Teorema 4.1.9. Si $cat(X) = 1$, es inmediato que $scat(\mathcal{O}(X)) = 1$ por el Teorema 4.1.8.

Para el recíproco podemos suponer que X es minimal. Sea $\varphi : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$ contigua a la identidad. Entonces si $v \in \mathcal{O}(X)$ es cualquier vértice y σ es un símplice maximal con $v \in \sigma$, tenemos por contigüidad que $\varphi(\sigma) \cup \sigma$ está contenido en algún símplice que debe coincidir con σ. Por tanto $\varphi(\sigma) \subseteq \sigma$, así que $\varphi(v) \in \sigma$. Deducimos que $\varphi(v)$ está en todo símplice maximal que contenga a v, o lo que es lo mismo, a todo simplice maximal de $lk(v; \mathcal{O}(X))$. así que $lk(v; \mathcal{O}(X))$ es un cono desde $\varphi(v)$. De aquí se sigue que todo elemento de X relacionado con x está relacionado con $\varphi(x)$, ya que si z está relacionado con x entonces aparece como vértice de $lk(v; \mathcal{O}(X))$. Este engarce es un cono desde $\varphi(v)$, así que se sigue que z también está relacionado con $\varphi(v)$. Por la Proposición 2.4.2 se concluye de ser X minimal que $\varphi(v) = v$. Luego $\varphi = id$.

Como $scat(\mathcal{O}(X)) = 1$ existe una cadena $id = \varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n = cte$ con φ_i contigua a φ_{i+1}. Por el resultado anterior, $\varphi_i = id$ para todo i y por tanto $\varphi_n = cte = id$. Concluimos que X es un punto. □

Ejemplo 4.1.11.

1. Sea X el espacio finito de la Figura 4.2(a). Se sabe que $cat(X) = 3$, pero la categoría simplicial del poliedro asociado es dos, ya que $|\mathcal{O}(X)|$ es homotópicamente equivalente a $S^1 \vee S^1$.

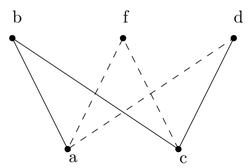


Figura 4.4: Poliedro asociado a X

También $scat(\mathcal{O}(X)) = 2$. Para ello basta tomar los dos subcomplejos de la Figura 4.4, uno en línea continua y otro en línea discontinua. Las correspondientes identidades de estos subcomplejos están en la misma clase de contigüidad de una constante y se tiene así que la cadena de desigualdades del Teorema 4.1.8 tiene únicamente un salto al principio y después queda constante $3 = cat(X) \geq 2 = scat(\mathcal{O}(X)) = ... = cat(|\mathcal{O}(X)|)$.

2. Con el opuesto de X (ver Figura 4.2(b)), la cadena de desigualdades del Teorema 4.1.8 se convierte en una cadena de igualdades: $2 = cat(X^{op}) = scat(\mathcal{O}(X^{op})) = ... = cat(|\mathcal{O}(X^{op})|) = 2$. Obsérvese que $|\mathcal{O}(X^{op})|$ es también homotópicamente equivalente a $S^1 \vee S^1$.

El siguiente ejemplo muestra que se pueden encontrar espacios finitos con categoría LS grande y tales que su complejo asociado tenga una categoría simplicial pequeña.

Ejemplo 4.1.12. Si consideramos el espacio X en la Figura 4.2(a) y un conjunto con $n \geq 1$ elementos $L_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, podemos definir el espacio finito $L_n(X)$ al considerar $x \geq a_i$ para todo $x \in X$ y todo $1 \leq i \leq n$.

No es difícil comprobar que $\mathcal{O}(L_n(X))$ es el cono simultáneo desde los vértices a_i sobre el complejo $\mathcal{O}(X)$ en la Figura 4.4.

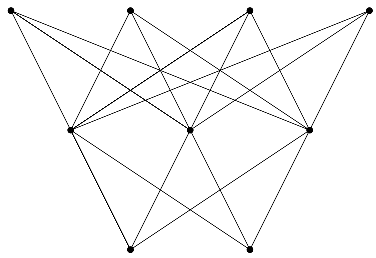
Por otra parte, si U es la unión de dos o más abiertos mínimos U_{a_i}, $\mathcal{O}(U)$ es el cono simultáneo desde los puntos en $Max(U)$ sobre $\mathcal{O}(X)$. Por tanto, en homología simplicial con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ la inclusión $i : \mathcal{O}(U) \hookrightarrow \mathcal{O}(L_n(X))$ es un homomorfismo inyectivo

$$i_* : \bigoplus_{2(\#(Max(U)-1)} \mathbb{Z}_2 \cong H_2(\mathcal{O}(U), \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_2(\mathcal{O}(L_n(X)), \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{2(n-1)} \mathbb{Z}_2$$

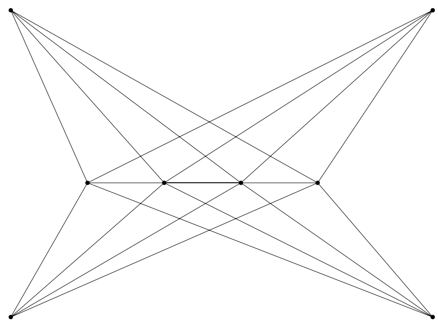
Así, $i : U \hookrightarrow L_n(X)$ no puede ser homotópicamente trivial, pues por la Proposición 4.1.6 i sería contigua (y por tanto homotópica) a una constante.

Como consecuencia el único LS-recubrimiento de $L_n(X)$ está formado por los abiertos mínimos U_{a_i} y tenemos que, necesariamente, $cat(L_n(X)) = n$.

En contraste, $\mathcal{O}(L_n(X))$ se puede descomponer en dos subcomplejos J_1 y J_2 dados por dos conos reiterados desde los a_i sobre los subcomplejos indicados en trazos de línea discontinua y continua en la Figura 4.4. Las inclusiones de los J_i en $\mathcal{O}(L_n(X))$ están en la misma clase de contigüidad que una constante siguiendo el empuje de un extremo hacia el otro (dando igual desde cual de los dos se comience). Concluimos así que $scat(\mathcal{O}(L_n(X))) = 2$ para todo $n \geq 2$. Si $n = 1$, $scat(\mathcal{O}(L_1(X))) = 1$, por ser $\mathcal{O}(L_n(X))$ un cono.



(a)



(b)

Figura 4.5: A la izquierda $L_4(X)$ y a la derecha uno de los dos subcomplejos de la descomposición de $\mathcal{O}(L_4(X))$.

Los ejemplos anteriores son sólo una pequeña parte de la solución a los siguientes problemas sugeridos por la secuencia de desigualdades en el Teorema 4.1.8.

Problema 4.1.13. Dado $n \geq 1$ y $m \leq n - 1$, ¿existe algún espacio finito X para el cual se puedan encontrar m saltos en la secuencia del Teorema 4.1.8?

Más generalmente,

Problema 4.1.14. Dados $n \geq 1$ y $m \leq n - 1$ como antes y una secuencia de enteros $k_1, k_2, ..., k_m$ tal que $\sum_{i=1}^{m} k_i \leq n - 1$, ¿existe algún espacio finito X para el cual se puedan encontrar m saltos en la secuencia del Teorema 4.1.8 y la diferencia del i-ésimo salto sea k_i?

4.2. Arboricidad y la categoría simplicial en grafos

Esta sección trata sobre la categoría simplicial para complejos simpliciales de dimensión 1 (*grafos*) y su relación con la noción de arboricidad.

Sea G un grafo. Un *ciclo* es una secuencia alternada $v_0, e_1, v_1, ..., v_{n-1}, e_n, v_n$ de vértices y aristas, donde los vértices de cada arista e_i son v_{i-1} y v_i, y tal que $v_0 = v_n$.

Un *bosque* es un grafo sin ciclos. Un *árbol* es un bosque conexo. Dado un grafo G, un bosque $F \subseteq G$ se dice *maximal* si contiene a todos los vértices de G. La *arboricidad* de un grafo G se denota $\Upsilon(G)$ y es el mínimo número de bosques maximales disjuntos por aristas en que puede ser descompuesto G.

El siguiente teorema determina la arboricidad de un grafo cualquiera.

Teorema 4.2.1. (Teorema 8.1.4 de [8]) Sea G un grafo no trivial y sea q_n el máximo número de aristas en cualquier subgrafo de G con n vértices. Entonces

$$\Upsilon(G) = \lceil \frac{q_n}{n-1} \rceil.$$

Notación 4.2.2. Para un número real x, se define $\lceil x \rceil$ como el primer entero mayor o igual que x.

La relación entre Υ y la categoría simplicial de un grafo viene dada por el siguiente teorema, que es el Corolario 8.3.2 en [8].

Teorema 4.2.3. Sea G un grafo, entonces $scat(G) = \Upsilon(G)$

El siguiente resultado (Proposición 8.4.1 y Corolario 8.4.3 de [8]) nos dice que después de una sola subdivisión la categoría simplicial resulta ser la categoría LS del grafo.

Proposición 4.2.4. Sea G un grafo conexo. Si G es un árbol, entonces $scat(G) = cat(|G|) = 1$. En otro caso, entonces $scat(sdG) = cat(|G|) = 2$.

El Teorema 2 de [5] y sus observaciones posteriores dan una estimación de la arboricidad (y por tanto la categoría simplicial) de los grafos sin ciclos de longitud 3. Explícitamente,

Teorema 4.2.5. Si G es un grafo sin ciclos de longitud 3, se tiene que $\Upsilon(G) \leq \lceil \frac{\sqrt{e}}{2} \rceil$, con e el número de aristas de G. Más aún, la igualdad sólo se alcanza si G es un grafo bipartito con el mismo número de elementos en cada nivel.

4.3. El problema de la caracterización de la categoría LS de espacios finitos de altura uno

Se llama altura (denotada $h(X)$) de un espacio finito T_0 al numero de niveles del diagrama de Hasse asociado a X.

Como aplicación de los resultados sobre arboricidad de la sección anterior damos la solución al Problema 4.1.14 con $n = 5$, $m = 2$, $k_1 = 2$ y $k_2 = 1$. Para ello se considera el grafo bipartito completo $K_{5,5}$, que procede de un espacio finito X de altura uno y que tiene categoría LS $cat(X) = 5$, ya que la unión de dos abiertos mínimos de puntos de altura uno contiene un ciclo. Además sabemos que $cat(sdK_{5,5}) = 2$ por la Proposición 4.2.4.

A raiz del Teorema 4.2.5 se puede concluir que $scat(K_{5,5}) = \lceil \frac{\sqrt{25}}{2} \rceil = 3$. Resumiendo, tenemos:

$$5 = catX \geq 3 = scat(K_{5,5}) \geq cat(F(K_{5,5})) \geq scat(sdK_{5,5}) = ... = cat(|K_{5,5}|) = 2$$

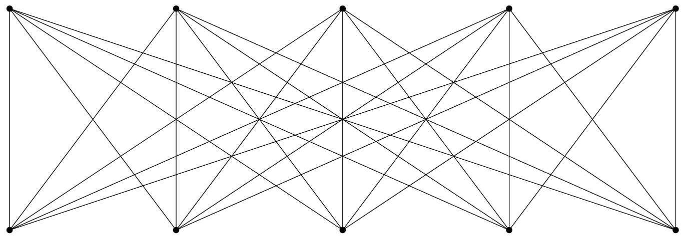


Figura 4.6: Poliedro asociado a X

¿Qué ocurre con $cat(sd_F(X)) = cat(F(K_{5,5}))$? ¿Se estabiliza en dos o aún es tres? Por la definición de la subdivisión baricéntrica, el espacio finito que genera tiene 25 vértices de altura uno (uno por cada arista del original) y 10 vértices de altura cero (los originales de $K_{5,5}$). Por medio de la conocida característica de Euler-Poincaré podemos concluir que los arboles maximales de 10 vértices tienen 9 aristas (elementos maximales de $F(K)$). Esto nos obliga a necesitar al menos tres abiertos para recubrir $F(K_{5,5})$, y por tanto $cat(F(K_{5,5})) = 3$.

Como tenemos ejemplos de espacios finitos de altura uno con $cat(X) > scat(\mathcal{O}(X))$ (Ejemplo 4.1.12), es claro que de poderse caracterizar los espacios finitos de altura uno por medio de una arboricidad, esta debe ser relativa a la topología de X. Es decir, que si un árbol en $\mathcal{O}(X)$ contiene a un elemento maximal, entonces debe contener a todos los inferiores. Así, en el Ejemplo 4.1.11 hay dos árboles que cubren al grafo $\mathcal{O}(X)$ (indicados en los dos tipos de trazos en la Figura 4.4), pero no relativos en el sentido indicado, pues el abierto mínimo del elemento maximal de la derecha está repartido entre los dos árboles.

Así pues, el problema de determinar la categoría LS de un espacio finito de altura uno parece ser equivalente a considerar $\mathcal{O}(X)$ como grafo dirigido (digrafo) y encontrar una estimación de la siguiente arboricidad relativa definida para digrafos bipartitos:

Definición 4.3.1. Sea G un digrafo y $A \subseteq G$ un conjunto de vértices. Un árbol $T \subseteq G$ se dice *relativo* a A si cuando $a \in T$ el conjunto de vértices que queda por debajo de a está contenido en T. Un *bosque* se dice *relativo* a A si lo son todos sus árboles.

En estas condiciones se define la *arboricidad relativa* a A, $\Upsilon_A(G)$ como el mínimo número de bosques maximales relativos necesarios para cubrir a G.

Se plantean aquí los siguientes problemas.

Problema 4.3.2. Si G es un digrafo estimar $\Upsilon_A(G)$.

Problema 4.3.3. Si X es un espacio finito de altura uno, ¿es cierta la igualdad $cat(X) = \Upsilon_{Max}(\mathcal{O}(X))$?

Otro problema sugerido por el Corolario 3.4.4 es el siguiente:

Problema 4.3.4. ¿Qué propiedades topológicas de un espacio finito X caracterizan la desigualdad $cat(X) \leq 2$?

Intentar repetir el camino que lleva al Corolario 3.4.4, incluso para espacios finitos de altura uno, queda descartado por el siguiente resultado probado en [6]:

Teorema 4.3.5. Sea X un espacio finito minimal. Entonces X admite una estructura de co-H-espacio si y sólo si es un punto.

Demostración. Supongamos que X admite estructura de co-H-espacio respecto a un punto $e \in X$, X es conexo por caminos (Proposición 3.4.8). Además por el Teorema 2.4.4 se tiene que $p_1 \circ \mu = id_X = p_2 \circ \mu$. Así pues, si $\mu(x) = (y, e)$ se sigue $x = p_2\mu(x) = e$. En el otro caso, $\mu(x) = (e, y)$ y $x = p_1\mu(x) = e$. Se concluye entonces que $x = e$, para todo $x \in X$, y por tanto $X = \{e\}$. $\square$

Como consecuencia inmediata de los Teoremas 2.4.3 y 2.4.4, junto al Lema 3.4.2 se tiene:

Corolario 4.3.6. Todo espacio finito X admite una estructura de co-H-espacio si y sólo si X es contráctil.

Demostración. Si (X, e) es un co-H-espacio y X_0 es su alma (Teorema 2.4.3), sea $f : X \to X_0$ una equivalencia de homotopía y $e_0 = f(e)$. Se tiene que (X_0, e_0) es un co-H-espacio por la Proposición 3.4.7, y por el Teorema 4.3.5 X_0 es un punto, luego X es contráctil. $\square$

Bibliografía

[1] P. S. Alexandrov (1937). "Discrete Räume", *Mathematiceskii Sbornik* 2(3), 501–519.

[2] J. A. Barmak (2011). "Algebraic topology of finite topological spaces and applications", Lecture Notes in Math., Vol. 2032, *Springer.*

[3] A. Luque (2014). "Espacios de Alexandrov : el puente entre poliedros y conjuntos ordenados", *Trabajo Fin de Grado.* Tutor: Antonio Quintero Toscano.

[4] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, D. Tanré (2003). "Lusternik-Schnirelmann category", *American Mathematical Society.*

[5] A. M. Dean, J. P. Hutchinson, E. R. Scheinerman (1991). "On the thickness and arboricity of a graph", *Journal of Combinatory Theory* Volume 52, 147–151.

[6] R. D. Helmstutler, R. M. Vaughn (2010). "Finite co-H-spaces are contractible: A Dual to a Stong". http://files.umwblogs.org/blogs.dir/4710/files/2010/10/RDH-RMV-co-H.pdf

[7] D. Férnandez-Ternero, E. Macías-Virgós J. A. Vilches (2015). "Lusternik-Schnirelmann category of simplicial complexes and finite spaces" *Topology and its Appl.*, 194, 37-50.

[8] D. Férnandez-Ternero, E. Macías-Virgós J. A. Vilches, E. Minuz (2016). "Simplicial Lusternik-Schnirelmann category" *arXiv*, 1605.01322.

[9] J. P. May (2014). "Finite spaces and larger contexts", preliminary draft submitted to the AMS.
http://math.uchicago.edu/∼may/FINITE/FINITEBOOK/FiniteAugBOOK.pdf .

[10] P. May, M. Stephan, I. Zakharevich (2016), "The homotopy theory of equivariant posets", *arXiv*, 1601.02521v2.

[11] M. McCord (1966). "Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces", *Duke Math.*, (33):465-474.

[12] J. R. Munkres (1984). "Elements of algebraic topology", *Addison-Wesley Reading.*

[13] J. R. Munkres (2001). "Topología", *Pearson Educación.*

[14] A. W. Tucker (1936). "Cell spaces", *Ann. of Math.* 37, 92–100.