

*Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n° 29(2004), 89–132*

## Modelos de Localización Continua

J. PUERTO<sup>1</sup> Y A. M. RODRÍGUEZ-CHÍA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Estadística e Investigación Operativa.  
Universidad de Sevilla.

<sup>2</sup>Departamento de Estadística e Investigación Operativa.  
Universidad de Cádiz.

`puerto@us.es antonio.rodriuezchia@uca.es`

### Resumen

En este trabajo se revisan tres modelos de problemas de localización continua: (1) un problema general de localización con respecto a regiones de demanda; (2) el problema de la mediana ordenada y (3) un problema de localización multiobjetivo. Con ellos se pretende dar una amplia muestra de los problemas que aparecen en el ámbito de la Teoría de Localización continua, así como estudiar propiedades que permitan caracterizar los conjuntos de soluciones. El trabajo incluye una larga lista de referencias que facilitarán al lector adentrarse más profundamente en éstos y otros modelos de la Teoría de Localización.

**Palabras clave:** *Continuous location theory, ordered median function.*

**Clasificación por materias AMS:** *90-B85, 52B55, 90C25*

## 1 Introducción

Un problema de localización consiste en determinar la posición de uno o más servidores que optimicen alguna *medida de efectividad* con respecto a un conjunto de ubicaciones conocidas “a priori”. Estas ubicaciones son usualmente denominadas centros de demanda.

La Teoría de Localización, como cualquier otra disciplina de la Investigación Operativa, desarrolla modelos matemáticos que reflejan con la máxima fidelidad posible la situación real que se está considerando, con soluciones adecuadas al problema real que se modela.

---

Fecha de recepción: 19 de febrero de 2004

Aunque a veces resulta difícil realizar una clasificación de los problemas considerados dentro de un campo de investigación, los problemas de localización pueden agruparse en tres familias: (1) de localización continua; (2) de localización discreta y (3) de localización en redes.

La localización continua considera problemas en los cuales las ubicaciones se consideran inmersas en un espacio *continuo*, típicamente en un espacio Euclídeo. La localización discreta impone que el conjunto de lugares candidatos para ubicar el servicio o servicios es finito. Finalmente, cuando los puntos de demanda están sobre un grafo y los servicios deben posicionarse sobre los nodos o aristas del mismo se denominan problemas de localización en redes.

Por motivos de extensión, este trabajo se restringe a considerar algunos modelos de localización continua. Excelentes referencias que cubren todas las vertientes de la Teoría de Localización son [9, 10, 16, 24, 32].

El origen de la Teoría de Localización se puede atribuir a la Grecia antigua, donde se estudiaron por primera vez las propiedades de puntos singulares dependiendo de la configuración de unos puntos dados. Se cree que, cuando la armada Sarracena en el 638 destruyó la Biblioteca de Alejandría, ésta contenía al menos tres soluciones diferentes a lo que hoy se denomina *problema de Fermat* (1601–1665). Éste, al final de su célebre trabajo sobre máximos y mínimos, enuncia el siguiente problema, al que no encuentra solución:

*“Dados tres puntos  $A, B$  y  $C$  en el plano, encontrar un cuarto punto  $P$  tal que la suma de las distancias a los otros tres sea mínima”.*

Este problema fue “resuelto” geoméricamente por Torricelli (1608–1647). Su procedimiento consiste en trazar un triángulo equilátero a partir de cada lado del triángulo que se obtiene al unir los puntos dados y trazar después las circunferencias que circunscriben a cada uno de ellos. El punto donde intersecan estas tres circunferencias, llamado punto de Torricelli, es la solución.

En 1834, Heinen probó que la solución propuesta por Torricelli no era correcta de forma general. En el caso de que uno de los ángulos que forman los tres puntos iniciales sea igual o superior a  $120^\circ$ , el vértice correspondiente a este ángulo es la solución del problema.

En su *Doctrine and Application of Fluxions* (1750), Simpson generalizó este problema para así obtener el punto que minimiza la suma ponderada de las distancias a tres puntos dados.

En 1857, Sylvester consideró un problema equivalente de localización bajo el criterio *minimax*, donde se buscaba el menor círculo que contenía un conjunto de puntos. Una solución geométrica, atribuida a Pierce, fue dada en 1860.

A principios del siglo XX, A. Weber [46] propuso como criterio para la localización de las industrias la minimización de los costes de transporte o, equivalentemente, las distancias de viaje. Es por ello que el problema consistente en minimizar la suma de distancias se conoce hoy día como problema de Fermat-Weber.

Debido a que estos autores no disponían de ordenador, sus métodos de resolución no podían ser iterativos sino geométricos. Uno de los primeros

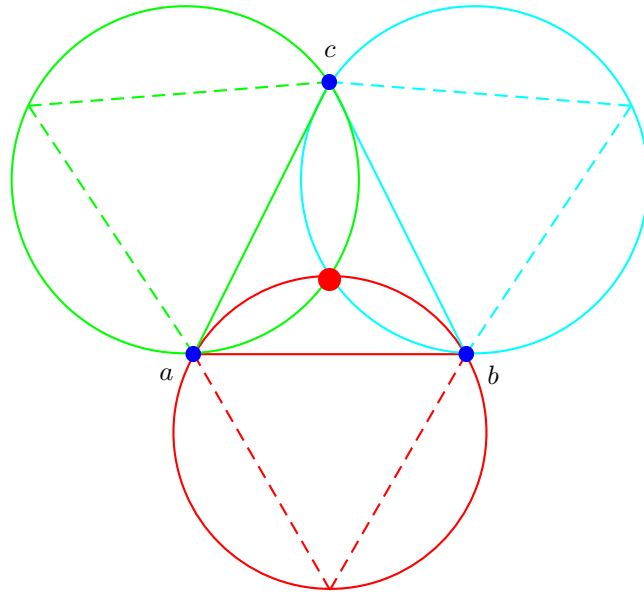


Figura 1: Punto de Torricelli

métodos analíticos para resolver el problema de Fermat-Weber se debe a Weiszfeld y se encuentra en su artículo “*Sur le point le quel la somme des distances de  $n$  points donnés est minimum*” en *Tohoku Mathematics Journal*. Se trata de un procedimiento iterativo para localizar un nuevo servicio que minimiza la suma ponderada de las distancias Euclídeas a los puntos de demanda. Este artículo escrito en francés, enviado desde Praga y publicado en una revista japonesa en 1937, fue virtualmente desconocido hasta finales de los sesenta. Por esta razón, el método fue redescubierto por otros investigadores a finales de los cincuenta y principios de los sesenta.

A finales de los años sesenta la Teoría de Localización se diversificó y comenzó a interesar a arquitectos, economistas, ingenieros, geógrafos, especialistas en ciencias de la empresa, investigadores operativos, analistas de sistemas, planificadores urbanos, etcétera, convirtiéndose así en una cuestión multidisciplinar. Aunque el interés por este tema ha venido creciendo desde los años sesenta, ha sido en las dos últimas décadas cuando el número de trabajos publicados en revistas científicas ha aumentado considerablemente. Así desde 1991 pueden encontrarse en el *Mathematics Subject Classification* los epígrafes 90B85 Localización continua y 90B80 Localización discreta entre los 19 títulos de la sección 90Bxx de *Operations Research and Management Science*.

Para obtener una mejor comprensión de la estructura de los problemas de localización, a continuación se describen brevemente los elementos comunes a todos ellos.

### El espacio solución:

Es el espacio soporte donde se define el problema. La elección de un espacio solución apropiado es crucial, porque determina aspectos tan importantes como la precisión o la resolubilidad del modelo. Entre los espacios más usuales se encuentran:

- *Espacios discretos*: Cuando existe un número finito de candidatos a solución.
- *Redes*: Los candidatos a solución se encuentran sobre un grafo, usualmente representando una red de comunicación. Los nodos correspondientes representan elementos importantes, como ciudades o cruces. Los arcos representan conexiones entre nodos, como carreteras, calles, conexiones de luz, etc.
- *Espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^n$* : Se emplea cuando el problema presenta aspectos regionales que no pueden ser discretizados. Además, puede ser utilizado para aproximar redes cuando el número de nodos y arcos es muy grande. Los casos  $n = 2$  y  $n = 3$  tienen un claro significado físico. Los casos en que  $n \geq 4$  han sido usados para modelar y resolver problemas de estimación estadística.
- *Esfera*: Es útil para aquellas situaciones reales que hacen aparecer distancias de grandes magnitudes.
- *Superposición de un grafo sobre un espacio continuo*: Éste es un espacio solución donde una red, que representa conexiones de alta velocidad, se superpone sobre un espacio Euclídeo o una esfera. Está motivado por el auge de las Nuevas Tecnologías en la sociedad actual y ha recibido gran atención recientemente.

### Las ubicaciones existentes:

En términos de Teoría de Localización, las *ubicaciones existentes* representan los usuarios que requieren ser servidos. Por ello, se les denomina puntos de demanda. Usualmente se modelan mediante un conjunto  $A$  y una *función de intensidad* asociada que es una medida de probabilidad sobre  $A$ .

Existen dos formas diferentes de representar la demanda: por un conjunto finito de puntos o por regiones del espacio solución.

En el primer caso, se considera un conjunto de puntos  $A = \{a_1, \dots, a_M\}$  y un conjunto de *pesos*  $\{w_1, \dots, w_M\}$  que representan la importancia (o intensidad) de la demanda generada en cada punto.

En el modelo regional, la demanda se representa mediante una región  $\mathcal{R}$  (no necesariamente conexas) incluida en el espacio solución y una medida de probabilidad con soporte en  $\mathcal{R}$ . Ésta representa la importancia de cada subconjunto medible de  $\mathcal{R}$ .

**La nueva ubicación:**

La localización de la nueva ubicación es la incógnita o variable de decisión del problema general de localización. Esta variable está caracterizada por:

- a) El número y la cualidad de los servicios que se ubican. Si es más de uno, será necesario especificar las características de cada uno de ellos. Cuando son idénticos, como por ejemplo buzones de correo, el modelo que se considera es un modelo multiservicio. Por otro lado, como en el caso de servicios de salud (centros de emergencia, centros de salud, hospitales, etc.), se pueden considerar problemas de localización jerarquizados.
- b) La naturaleza del servicio. Se puede hacer una distinción entre servicios *atractivos* y *repulsivos*.

Un servicio es atractivo cuando todos los puntos de demanda valoran positivamente la proximidad al nuevo servidor. Se pueden considerar centros atractivos aquéllos que produzcan beneficios de tipo económico, cultural, etc. a los puntos de demanda, como por ejemplo una biblioteca o un hospital.

Sin embargo, desde la segunda mitad del siglo XX han ido apareciendo diferentes centros o lugares de almacenamiento de distintos tipos que pueden causar daños o perjuicios a la salud, que deterioran el medio ambiente o que constituyen una amenaza a nuestro bienestar o estilo de vida. En definitiva, centros de actividad que se prefiere tener lo más lejos posible. Así ocurre con la ubicación de centrales nucleares, cementerios de residuos radiactivos, fábricas que producen contaminación ambiental por gases, ruidos, radiaciones, plantas de tratamiento de desechos de los centros urbanos (basureros), etc. A este tipo de servicios se les denomina repulsivos o semi-repulsivos.

**La función objetivo:**

Debido a que el estudio de la Teoría de Localización que se lleva a cabo en este trabajo es de tipo cuantitativo, los problemas que se consideran tienen la siguiente formulación común:

$$\text{opt}_{x=(x_1, \dots, x_N) \in S} F\left(d(a, (x_1, \dots, x_N))_{a \in A}\right)$$

donde

$F$  es una función globalizadora (no necesariamente escalar),

“opt” significa optimizar, es decir, minimizar o maximizar,

$S$  es el espacio solución,

$x$  es la nueva ubicación (variable de decisión),

$A$  es el conjunto de ubicaciones existentes,

$a$  es una ubicación existente,

$d(\cdot, \cdot)$  es una medida de la distancia de una ubicación existente a una nueva ubicación.

La elección de la función objetivo a utilizar es a veces difícil. Evidentemente, la solución final depende fuertemente de esta elección (ver [4]), por lo que resulta esencial cuidar esta parte del proceso de modelado.

La propuesta más aceptada para su selección consiste en establecer unos principios de racionalidad (axiomas) que debe verificar la solución y entonces intentar obtener funciones objetivo a través de un proceso basado en esa axiomática.

Diferentes funciones objetivo han dado lugar a los problemas clásicos considerados en Teoría de Localización:

1. *Problema de Fermat-Weber o modelo "minisum"*. El problema consiste, como hemos indicado anteriormente, en la minimización de la distancia esperada a una nueva ubicación  $x$ :

$$\inf_{x \in S} \int_A d(x, a) d\nu(a),$$

donde  $d\nu(a)$  es una medida de probabilidad sobre  $A$ . Cuando  $A$  es finito,  $A = \{a_1, \dots, a_M\}$ , el problema es

$$\inf_{x \in S} \sum_{i=1}^M \mu(a_i) d(x, a_i),$$

donde los  $\mu(a_i) > 0$  y  $\sum_{i=1}^M \mu(a_i) = 1$ .

El modelo "minisum" tiene sentido cuando intentamos hacer valer un criterio económico, en el sentido de minimizar el coste promedio que soporta la localización de un nuevo servicio.

2. *Problema del centro o modelo "minimax"*. Es similar al problema anterior, pero ahora, minimizando la máxima distancia ponderada por  $\mu$ , es decir,

$$\inf_{x \in X} \left( \sup_{a \in A} \mu(a) d(x, a) \right).$$

El modelo minimax corresponde a aplicar un criterio de calidad del servicio proporcionado.

3. *Problema "cent-dian"*, [4, 17]. Dado  $\lambda \in (0, 1)$ , la función objetivo es ahora la correspondiente combinación convexa de las funciones objetivo suma y máximo. Es decir, el problema es

$$\inf_{x \in X} \left\{ \lambda \int_A d(x, a) d\mu(a) + (1 - \lambda) \sup_{a \in A} \mu(a) d(x, a) \right\}.$$

El modelo “cent-dian” corresponde a un compromiso entre los modelos “minimax” y “minisum”. Está justificado por el hecho de que estos criterios son contrapuestos en la mayoría de los casos.

4. *Problema de la mediana ordenada.* Dado un número finito de ubicaciones existentes  $A = \{a_1, \dots, a_M\}$  y dados unos pesos  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ , ordenados en orden no decreciente, el problema consiste en minimizar la siguiente suma de distancias ordenadas:

$$\inf_{x \in X} \sum_{i=1}^M \lambda_i d_{(i)}(x).$$

Aquí,  $d_{(i)}(x) = d(x, a_{\sigma_i})$  es el  $i$ -ésimo elemento en la lista ordenada de distancias, es decir,

$$d(x, a_{\sigma_1}) \leq \dots \leq d(x, a_{\sigma_M}),$$

donde  $\sigma$  es una permutación de  $\{1, \dots, M\}$ . Nótese que este problema incluye como casos particulares todos los problemas mencionados anteriormente. Hablaremos de este problema en la sección 4.

5. *Problema multiobjetivo.* Los problemas anteriores establecen “a priori” el criterio bajo el cual se localizarán los servicios. Sin embargo, existen situaciones reales donde sería razonable utilizar simultáneamente varios criterios. Esto implica encontrar soluciones que sean óptimas frente a varios criterios al mismo tiempo. Este tipo de problema se denomina problema de localización multiobjetivo. La solución ideal rara vez existe, ya que los objetivos suelen ser contrapuestos, así pues, el concepto de solución ideal es poco operativo. Esto impone la necesidad de introducir soluciones de compromiso y de aceptar como solución el concepto de *elemento no dominado*. Con las soluciones de compromiso se asegura que no existen soluciones mejores (en todos los criterios) que las que se han encontrado. Para una discusión detallada sobre la naturaleza multiobjetivo del problema de localización, véase [27, 36]. Volveremos sobre los problemas multiobjetivo en la sección 5.

### Las distancias:

La ubicación de un nuevo centro va a depender de la posición relativa de éste, a través de la noción de distancia, con respecto a los puntos de demanda.

La distancia (o métrica) en un espacio métrico  $X$ , es una función que asigna un valor real no negativo  $d(x, y)$  a cada par  $(x, y)$ . Recuérdese que debe verificar las propiedades siguientes:

1.  $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$ .
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  (simetría).
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$  (desigualdad triangular).

Cuando el objetivo perseguido es resolver problemas de optimización, como es nuestro caso,  $X$  es generalmente un espacio vectorial y se suelen exigir a  $d(\cdot, \cdot)$  algunas propiedades adicionales, como la convexidad, que tenga expresión analítica o que sea lineal a trozos. De forma que, para su resolución, se puedan usar herramientas del Análisis Convexo, del Análisis Matemático o de la Programación Lineal, respectivamente.

Un calibrador  $\gamma(\cdot)$  es una función definida sobre un espacio vectorial  $X$  que toma valores reales y que verifica las siguientes propiedades;

1.  $\gamma(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$ .
2.  $\gamma(x) = 0$  si y sólo si  $x = 0$ .
3.  $\gamma(\lambda x) = \lambda \gamma(x)$  cuando  $\lambda > 0$ .
4.  $\gamma(x + y) \leq \gamma(x) + \gamma(y) \quad \forall x, y \in X$ .

Se dice que una distancia procede de un calibrador  $\gamma$ , cuando para todo  $x, y \in X$  se verifica que  $d(x, y) = \gamma(y - x)$ . Dado un calibrador  $\gamma(\cdot)$  sobre  $X$ , la bola unidad asociada es el conjunto  $B_\gamma = \{x \in X : \gamma(x) \leq 1\}$ . Si  $B_\gamma$  es simétrica (i.e.  $-B_\gamma = B_\gamma$ ), entonces  $\gamma(\cdot)$  es una norma en  $X$ .

Dado un espacio vectorial  $X$ , toda función  $d(\cdot, \cdot)$  definida sobre  $X \times X$  que toma valores reales y verifica las propiedades de una métrica (excepto quizá la simetría) y además es convexa, procede de un calibrador.

Entre las distancias más usuales destacan la distancia Euclídea, que procede de la norma Euclídea ( $\gamma(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ) y tiene la ventaja de tener como bola unidad el círculo, que permanece invariante bajo rotaciones.

En segundo lugar, destaca la *distancia rectangular* o *distancia de Manhattan* derivada de la norma rectangular (o norma  $l_1$ )  $\gamma(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$ . Se usa para modelar situaciones en redes ortogonales o movimientos de *robots*, que generalmente tienen sus desplazamientos restringidos a dos direcciones ortogonales. En estos casos, cada movimiento está generado por motores independientes que no pueden trabajar simultáneamente y que tienen velocidades constantes e iguales.

También resulta interesante citar la *distancia de Tchebycheff*, que procede de la norma del máximo o norma  $l_\infty$ , es decir,  $\gamma(x) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$  y cuya bola unidad en  $\mathbb{R}^2$  es la resultante de aplicar un giro de  $45^\circ$  más una homotecia a la bola unidad de la distancia rectangular.

Como es bien sabido, las distancias mencionadas anteriormente son casos particulares de las distancias  $l_p$ , que proceden de la norma  $\gamma_p(x) = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ .

Finalmente, mencionamos explícitamente las distancias que proceden de calibradores poliédricos y que fueron introducidas en [49]. Sea  $X = \mathbb{R}^n$  y sea  $\gamma(\cdot)$  un calibrador en  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que  $\gamma(\cdot)$  es poliédrico si la correspondiente bola unidad  $B_\gamma$  es un politopo convexo (envolvente convexa de un número finito de puntos, ver figura 2). Como casos particulares de estos calibradores volvemos a encontrar las normas  $l_1$  y  $l_\infty$ .



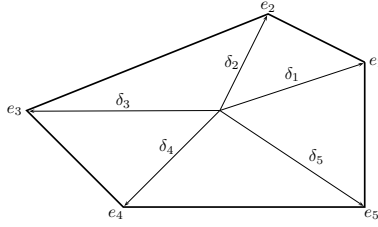


Figura 2: Ejemplo de bola unidad de calibrador poliédrico.

A continuación y para finalizar esta introducción, se describe el esquema general del resto del artículo. Los contenidos han sido divididos en seis secciones. En la segunda sección se recuerdan algunos resultados, principalmente de Análisis Convexo, que se van a utilizar a lo largo del trabajo. En las secciones tercera, cuarta y quinta, se analizan tres modelos generales de localización continua, obteniéndose caracterizaciones de sus respectivos conjuntos de soluciones. La sexta sección está dedicada a conclusiones, finalizando el trabajo con una lista de referencias bibliográficas que permitirán al lector profundizar en los contenidos.

## 2 Preliminares

Esta sección se dedica a preliminares matemáticos. Así, se revisan una serie de definiciones y resultados que facilitarán el entendimiento del resto del trabajo. Por simplicidad, los resultados analizados se han planteado en  $\mathbb{R}^n$ , aunque en su mayoría sigan siendo válidos con mucha mayor generalidad.

Sea  $\gamma$  un calibrador con bola unidad  $B \subset \mathbb{R}^n$ , siendo  $B$  un conjunto convexo y compacto que contiene al origen en su interior.

La bola polar de  $B$ , denominada  $B^0$ , viene dada por

$$B^0 := \{p \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \leq 1 \quad \forall x \in B\}.$$

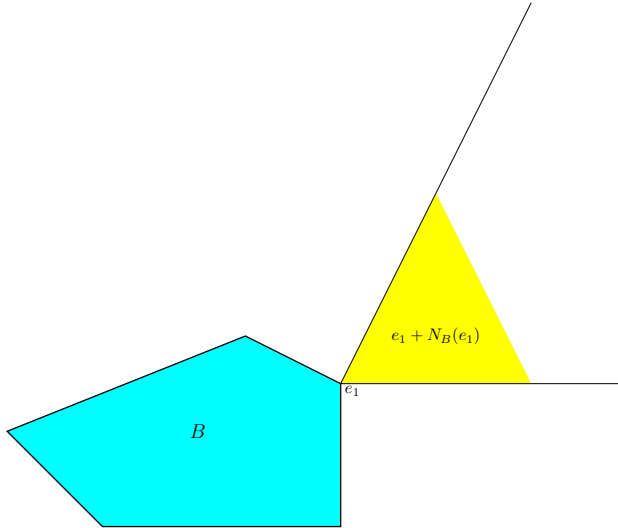
Dado un calibrador poliédrico  $\gamma$  cuya bola unidad es  $B$ , se denota por  $Ext(B) := \{e_1, \dots, e_G\}$  al conjunto de puntos extremos de  $B$  y se llaman direcciones fundamentales de  $B$ ,  $\delta_1, \dots, \delta_G$ , a las direcciones definidas por 0 y los  $e_1, \dots, e_G$  (véase figura 2). La bola polar asociada es entonces también un politopo, ver [45, 12].

El cono normal a  $B$  en  $x$  viene dado por (véase figura 3)

$$N_B(x) := \{p \in \mathbb{R}^n : \langle p, y - x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in B\}. \quad (1)$$

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Un vector  $p$  es un subgradiente de  $f$  en  $x$  si

$$f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Figura 3: Cono normal a  $B$  en  $e_1$ .

Evidentemente, si  $f$  es, por ejemplo, continuamente diferenciable en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , para cada  $x \in U$  el único subgradiente de  $f$  en  $x$  es  $p = f'(x)$ . El conjunto de todos los subgradientes de  $f$  en  $x$  se llama subdiferencial de  $f$  en  $x$  y se denota  $\partial f(x)$ .

Dado un conjunto cerrado  $C$ , se denota por  $I_C(\cdot)$  su función *indicatriz*, es decir,

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

y se denota por  $\sigma_C(\cdot)$  la función soporte del conjunto  $C$ :

$$\sigma_C(p) = \sup_{x \in C} \langle p, x \rangle \quad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

Se verifica que  $\gamma(x) = \sigma_{B^0}(x)$ . Además, se tiene que

$$\partial \gamma(x) = \begin{cases} B^0 & \text{si } x = 0 \\ \{p \in B^0 : \langle p, x \rangle = \gamma(x)\} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\partial I_C(x) = N_C(x) \quad \forall x \in C, \quad (3)$$

(véase [21] para una prueba de estas igualdades). Sea  $f$  una función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  no idénticamente igual a  $+\infty$  y minimizada por una función afín. La conjugada  $f^*$  de  $f$  es la función definida por

$$f^*(p) = \sup\{\langle p, x \rangle - f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \quad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

Es conocido que

$$u \in \partial f(x) \iff x \in \partial f^*(u).$$

Asimismo, se verifica la siguiente igualdad entre la función conjugada de la función indicatriz y la función soporte:

$$I_C^*(p) = \sigma_C(p) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

El análisis de problemas de localización de naturaleza regional que se llevará a cabo en secciones posteriores hace aconsejable que a continuación, analicemos algunas propiedades de la función inf-distancia, es decir, la función que calcula la mínima distancia de un punto a un conjunto. Para ello, se consideran un conjunto convexo  $A_i \subset \mathbb{R}^n$  y un calibrador arbitrario  $\gamma_i$ . La distancia de un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  al conjunto  $A_i$  con el calibrador  $\gamma_i$  viene definida por

$$d_i(x, A_i) = \inf\{\gamma_i(x - a_i) : a_i \in A_i\}.$$

Al conjunto  $\text{proj}_{A_i}(x) := \{a_i \in A_i : d_i(x, A_i) = \gamma_i(x - a_i)\}$  se le denomina proyección de  $x$  sobre  $A_i$  con el calibrador  $\gamma_i$ . Nótese que este conjunto no es necesariamente un punto, e incluso puede ser vacío cuando  $A_i$  no es cerrado. Para asegurar que la proyección es un conjunto no vacío, impondremos desde ahora que el conjunto  $A_i$  sea compacto (obsérvese que todo calibrador  $\gamma$  es una función continua, ya que es convexa).

La función inf-distancia se puede expresar como sigue:

$$d_i(x, A_i) = \inf_{a_i \in A_i} \gamma_i(x - a_i) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{I_{A_i}(y) + \gamma_i(x - y)\} =: (I_{A_i} * \gamma_i)(x) \quad (5)$$

(usualmente a  $(I_{A_i} * \gamma_i)(x)$  se le llama producto de inf-convolución de las funciones  $I_{A_i}$  y  $\gamma_i$ ). Gracias a esta representación, es fácil comprobar que  $d_i(\cdot, A_i)$  es una función convexa (puesto que es el resultado de una inf-convolución de dos funciones convexas). Además, por el corolario VI.4.5.5 de [21], se obtiene la siguiente expresión del subdiferencial de  $d_i(\cdot, A_i)$

$$\partial d_i(\cdot, A_i)(x) = \partial I_{A_i}(a_i) \cap \partial \gamma_i(x - a_i) \quad \forall a_i \in \text{proj}_{A_i}(x).$$

Nótese que, cuando  $x \in A_i$ ,  $\text{proj}_{A_i}(x) = \{x\}$  y puesto que  $\partial \gamma_i(0) = B_i^\circ$ , se tiene que  $\partial d_i(\cdot, A_i)(x) = N_{A_i}(x) \cap B_i^\circ$  si  $x \in A_i$ . Mientras que, en general, usando (2) y (3), se obtiene que

$$\partial d_i(\cdot, A_i)(x) = N_{A_i}(a_i) \cap \{p_i \in B_i^\circ : \langle p_i, x - a_i \rangle = \gamma_i(x - a_i)\} \quad \forall a_i \in \text{proj}_{A_i}(x). \quad (6)$$

Denotemos  $d_i^*$  la función conjugada de  $d_i(\cdot, A_i)$ . La representación (5) nos permite además calcular  $\partial d_i^*(p_i)$ . En efecto, puesto que  $d_i(x, A_i) = (I_{A_i} * \gamma_i)(x)$ , aplicando el teorema 1 de la sección 3.4 de [22], vemos que  $d_i^* = I_{A_i}^* + \gamma_i^*$ . Ahora bien, usando (4), resulta que  $I_{A_i}^*$  es la función soporte de  $A_i$  (es decir  $I_{A_i}^* = \sigma_{A_i}$ ) y la función conjugada de  $\gamma_i$  es la función indicatriz de su bola dual, es decir,  $\gamma_i^* = I_{B_i^\circ}$ . Por tanto, puesto que se verifica la hipótesis de cualificación de Moreau (se requiere que una de las funciones sea continua en un punto del dominio de la otra función, ver por ejemplo [22]), se tiene:

$$\partial d_i^*(p_i) = \partial(I_{A_i}^* + \gamma_i^*)(p_i) = \partial I_{A_i}^*(p_i) + \partial \gamma_i^*(p_i) = \partial \sigma_{A_i}(p_i) + N_{B_i^\circ}(p_i) =: C_i(p_i). \quad (7)$$

Una propiedad interesante de esta familia de conjuntos  $(C_i(p_i))$  es que constituyen dominios de linealidad de la función  $d_i(\cdot, A_i)$ . Esto es lo que se prueba en el siguiente lema:

**Lema 2.1** *Para cada  $p_i \in B_i^o$ ,  $d_i(\cdot, A_i)$  es una función afín en  $\partial d_i^*(p_i)$ .*

**Demostración:**

Por la identidad de Fenchel se tiene que

$$x \in \partial d_i^*(p_i) \iff p_i \in \partial d_i(x, A_i).$$

Por tanto, aplicando (6), para cada  $x \in \partial d_i^*(p_i)$  se obtiene que

$$d_i(x, A_i) = \langle p_i, x - a_i \rangle = \langle p_i, x \rangle - \langle p_i, a_i \rangle \quad \forall a_i \in \text{proj}_{A_i}(x).$$

Ahora bien, puesto que  $p_i \in \partial d_i(x, A_i)$ , se cumple que  $p_i \in N_{A_i}(a_i) = \partial \sigma_{A_i}^*(a_i)$ , siendo esto equivalente a que  $a_i \in \partial \sigma_{A_i}(p_i)$ . Por tanto,  $\langle p_i, a_i \rangle = \sigma_{A_i}(p_i)$  para cualquier  $a_i \in \partial \sigma_{A_i}(p_i)$ , es decir,  $\langle p_i, a_i \rangle$  es constante para cualquier  $a_i \in \partial \sigma_{A_i}(p_i)$ . Además, puesto que  $p_i \in N_{A_i}(a_i)$  para cualquier  $a_i \in \text{proj}_{A_i}(x)$ , entonces  $\langle p_i, a \rangle \leq \langle p_i, a_i \rangle$  para todo  $a \in A_i$ , es decir,  $\text{proj}_{A_i}(x) \subseteq \partial \sigma_{A_i}(p_i)$ . De este modo, para  $x \in \partial d_i^*(p_i)$  se verifica

$$d_i(x, A_i) = \langle p_i, x \rangle - \sigma_{A_i}(p_i) = \langle p_i, x - a_i \rangle \quad \forall a_i \in \text{proj}_{A_i}(x),$$

lo que prueba el resultado. □

Indiquemos finalmente que, en el resto del trabajo,  $co(A)$  denotará la envolvente convexa del conjunto  $A$ .

### 3 Un modelo general de localización continua

En esta sección se analizará un modelo de localización con demanda regional y función objetivo dependiendo de las distancias entre los conjuntos. Esta formulación permite caracterizar geoméricamente el conjunto solución de una amplia gama de problemas de localización que se pueden obtener como casos particulares de este modelo.

Sea  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_M\}$  una familia de conjuntos en  $\mathbb{R}^n$ , donde cada  $A_i$  es un conjunto convexo y compacto. Sea  $\Phi(\cdot)$  una norma monótona sobre  $\mathbb{R}^M$ . Recordemos que una norma  $\Phi$  se dice que es monótona si  $\Phi(u) \leq \Phi(v)$  para cada  $u, v$  verificando que  $|u_i| \leq |v_i|$  para todo  $i = 1, \dots, M$  (ver [2]). Con esta notación, la formulación del problema considerado en esta sección es:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) := \Phi(d(x)), \quad (P_{\Phi}(\mathcal{A}))$$

donde  $d(x) = (d_1(x, A_1), \dots, d_M(x, A_M))$ .

Funciones objetivo similares a ésta han sido consideradas en problemas estándar de localización, i.e. cuando los centros de demanda son puntos (ver

[6, 13, 14]). La novedad de este modelo proviene de considerar demanda regional. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $\cap_{i=1}^M A_i = \emptyset$  ( $d(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ). En efecto, si  $\cap_{i=1}^M A_i \neq \emptyset$  entonces el conjunto solución sería  $\cap_{i=1}^M A_i$  con valor objetivo cero.

Recuérdese que para un problema de minimización sin restricciones con función objetivo  $f$  convexa,  $\hat{x}$  es una solución si y sólo si  $0 \in \partial f(\hat{x})$ . Esto hace esencial la caracterización del subdiferencial de la función objetivo  $F$ .

**Lema 3.1** *Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . El punto  $q \in \partial F(x)$  si y sólo si existen  $a_i \in \text{proj}_{A_i}(x)$ ,  $p_i \in N_{A_i}(a_i) \cap B_i^o$   $1 \leq i \leq M$  y  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M) \geq 0$  tales que*

1.  $x \in \bigcap_{i=1}^M (a_i + N_{B_i^o}(p_i))$ ,
2.  $\Phi^o(\lambda) = 1$  y  $\sum_{i=1}^M \lambda_i d_i(x, A_i) = F(x)$ , donde  $\Phi^o$  es la norma dual de  $\Phi$ ,
3.  $q = \sum_{i=1}^M \lambda_i p_i$ .

### 3.1 Caracterización geométrica del conjunto de soluciones

Para caracterizar geoméricamente el conjunto de soluciones del problema  $(P_\Phi(\mathcal{A}))$ , se introducen las siguientes familias:

**Definición 3.1** *Dados  $p = (p_1, \dots, p_M) \in (\mathbb{R}^n)^M$  con  $p_i \in B_i^o$  e  $I \subseteq \{1, \dots, M\}$ , denotemos*

$$C_I(p) := \bigcap_{i \in I} \partial d_i^*(p_i),$$

donde  $d_i^*$  es la función conjugada de  $d_i(x, A_i)$ . Por otra parte, para cualquier  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M) \geq 0$ , llamaremos  $D_I(\lambda)$  al conjunto siguiente:

$$D_I(\lambda) := \{x : \sum_{i \in I} \lambda_i d_i(x, A_i) = F(x)\}.$$

Nótese que  $C_I(p)$  es no vacío solamente para algunas elecciones de  $I$  y  $p$ . Estos conjuntos son llamados convexos elementales cuando las funciones distancias son normas (diferentes definiciones de convexos elementales pueden verse en [12, 26, 31, 35]). Por esta razón, los conjuntos  $C_I(p)$  se denominan convexos elementales generalizados (g.e.c.s.). Los g.e.c.s. son convexos, pues están definidos por intersecciones de conjuntos convexos (recuérdese que los subdiferenciales son conjuntos convexos).

En el caso de que las bolas unidad consideradas sean polítopos, entonces los g.e.c.s. pueden ser obtenidos como intersecciones de los conos generados por las direcciones fundamentales de estas bolas.

De este modo, usando el lema 2.1 y la compacidad del conjunto solución (ver [30]), el problema de Fermat-Weber con distancias ínfimas poliédricas tiene una solución en el conjunto de vértices de los g.e.c.s. Esta caracterización es una generalización de la propiedad de *puntos de intersección* obtenida en [47] para la norma  $l_1$  en  $\mathbb{R}^2$ , en [41] para el caso de una norma poliédrica y en [12] para el problema de Fermat-Weber con coste lineal.

Sea  $M_\Phi(\mathcal{A})$  el conjunto de soluciones de  $(P_\Phi(\mathcal{A}))$ . Se dice que  $(I, \lambda, p)$  es una tripleta admisible si

1.  $I \neq \emptyset, I \subseteq \{1, \dots, M\}$ .
2.  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$  con  $\lambda_i > 0$  ( $i \in I$ ) y  $\lambda_i = 0$  ( $i \notin I$ ) y además  $\Phi^\circ(\lambda) = 1$ .
3.  $p = (p_1, \dots, p_M)$  con  $p_i \in B_i^\circ \cap N_{A_i}(y_i)$  para cualquier  $y_i \in \partial\sigma_{A_i}(p_i)$  ( $i \in I$ ) y  $\sum_{i \in I} \lambda_i p_i = 0$ .

**Lema 3.2**  $\hat{x} \in M_\Phi(\mathcal{A})$  si y sólo si existe una tripleta admisible  $(I, \lambda, p)$  satisfaciendo

$$\hat{x} \in C_I(p) \cap D_I(\lambda).$$

**Demostración:**

Observemos que  $\hat{x} \in M_\Phi(\mathcal{A})$  si y sólo si  $0 \in \partial F(\hat{x})$ . De este modo, aplicando el lema 3.1 y las definiciones de  $C_I(p)$  y  $D_I(\lambda)$ , el resultado queda probado.  $\square$

Nótese que el lema 3.2 implica que para cada  $\hat{x} \in M_\Phi(\mathcal{A})$  existe un tripleta admisible tal que

$$C_I(p) \cap D_I(\lambda) \subseteq M_\Phi(\mathcal{A}).$$

El siguiente resultado prueba que en realidad la inclusión anterior es una igualdad y además dicha igualdad es independiente de la elección de la tripleta admisible  $(I, \lambda, p)$  siempre que  $C_I(p) \cap D_I(\lambda) \neq \emptyset$ :

**Teorema 3.1**

1. Si  $M_\Phi(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ , entonces existe una tripleta admisible  $(I, \lambda, p)$  tal que  $M_\Phi(\mathcal{A}) = C_I(p) \cap D_I(\lambda)$ .
2. Para cualquier tripleta admisible  $(I, \lambda, p)$  tal que  $C_I(p) \cap D_I(\lambda) \neq \emptyset$ , se tiene que  $M_\Phi(\mathcal{A}) = C_I(p) \cap D_I(\lambda)$ .

**Demostración:**

Sea  $(I, \lambda, p)$  una tripleta admisible con

$$\emptyset \neq C_I(p) \cap D_I(\lambda) \subseteq M_\Phi(\mathcal{A}).$$

La existencia de esta tripleta está garantizada por el lema 3.2 cuando  $M_\Phi(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ . Veamos que cualquier  $\bar{x} \in M_\Phi(\mathcal{A})$  verifica  $\bar{x} \in C_I(p) \cap D_I(\lambda)$ .

Sea  $\bar{x} \in M_{\Phi}(\mathcal{A})$  y sea  $x^* \in C_I(p) \cap D_I(\lambda)$ . Entonces existe  $a_i(x^*) \in \text{proj}_{A_i}(x^*)$  tal que

$$F^* := F(x^*) = \sum_{i=1}^M \lambda_i \langle p_i, x^* - a_i(x^*) \rangle = - \sum_{i=1}^M \lambda_i \langle p_i, a_i(x^*) \rangle.$$

Por otro lado, puesto que  $F^*$  es el mínimo valor de la función  $F$ , se tiene que  $\langle p_i, a_i(x^*) \rangle = \sup_{a_i \in A_i} \langle p_i, a_i \rangle$ , es decir,  $a_i(x^*) \in \partial\sigma_{A_i}(p_i)$  para todo  $i \in I$ .

Ahora bien, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que

$$\begin{aligned} F^* &= - \sum_{i=1}^M \lambda_i \langle p_i, a_i(x^*) \rangle \leq - \sum_{i=1}^M \lambda_i \langle p_i, a_i(x) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^M \lambda_i \langle p_i, x - a_i(x) \rangle \quad \forall a_i(x) \in \text{proj}_{A_i}(x). \end{aligned}$$

Puesto que  $d_i(x, A_i) = \sup_{q_i \in B_i^o} \langle q_i, x - a_i(x) \rangle = \gamma_i(x - a_i(x))$ , usando que  $\Phi(\cdot)$  es una norma y  $\Phi^o(\lambda) = 1$ , se obtiene que

$$F^* \leq \sum_{i=1}^M \lambda_i \langle p_i, x - a_i(x) \rangle \leq \sum_{i=1}^M \lambda_i d_i(x, A_i) \leq F(x). \quad (8)$$

Debido a que la desigualdad anterior es cierta para todo  $x$ , si se toma en particular  $x = \bar{x} \in M_{\Phi}(\mathcal{A})$ , todas las desigualdades se convierten en igualdades, es decir,

$$F^* = \sum_{i=1}^M \lambda_i \langle p_i, \bar{x} - a_i(\bar{x}) \rangle = \sum_{i=1}^M \lambda_i d_i(\bar{x}, A_i) \quad \forall a_i(\bar{x}) \in \text{proj}_{A_i}(\bar{x})$$

y

$$\sum_{i=1}^M \lambda_i \langle p_i, a_i(x^*) \rangle = \sum_{i=1}^M \lambda_i \langle p_i, a_i(\bar{x}) \rangle.$$

Esto, junto con las desigualdades existentes entre los correspondientes términos, conduce a que para todo  $i \in I$  se verifica: (1)  $\langle p_i, \bar{x} - a_i(\bar{x}) \rangle = d_i(\bar{x}, A_i)$  y (2)  $\langle p_i, a_i(\bar{x}) \rangle = \langle p_i, a_i(x^*) \rangle$ .

Por (1), se obtiene que

$$d_i(\bar{x}, A_i) = \gamma_i(\bar{x} - a_i(\bar{x})) = \langle p_i, \bar{x} - a_i(\bar{x}) \rangle \quad \forall i \in I.$$

De esta forma,  $p_i \in \partial\gamma_i(\bar{x} - a_i(\bar{x}))$ , lo que equivale a tener  $\bar{x} - a_i(\bar{x}) \in \partial\gamma_i^*(p_i)$  para todo  $i \in I$ . Por (2) y puesto que  $a_i(x^*) \in \partial\sigma_{A_i}(p_i)$ , se deduce que  $a_i(\bar{x}) \in \partial\sigma_{A_i}(p_i)$  para todo  $i \in I$ . Por tanto,

$$\bar{x} \in a_i(\bar{x}) + \partial\gamma_i^*(p_i) \subset \partial\sigma_{A_i}(p_i) + \partial\gamma_i^*(p_i) = C_i(p_i) \quad \forall i \in I,$$

(ver (7) para la definición de  $C_i(p_i)$ ). Además, puesto que  $\bar{x} \in M_{\Phi}(\mathcal{A})$ , usando la última desigualdad en (8), se tiene que  $F(\bar{x}) = \sum_{i \in I} \lambda_i d_i(\bar{x}, A_i)$ , lo que implica  $\bar{x} \in D_I(\lambda)$ . Por tanto,  $\bar{x} \in C_I(p) \cap D_I(\lambda)$  y el resultado queda demostrado.  $\square$

### 3.2 Aplicación a dos problemas clásicos de localización

En esta sección se particularizan las caracterizaciones obtenidas anteriormente al problema de Fermat-Weber y al problema minimax. Para ello, al igual que antes, se considera una familia de conjuntos  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_M\}$  donde cada  $A_i$  es compacto y convexo, un conjunto de pesos positivos  $W = \{w_1, \dots, w_M\}$  y un conjunto de normas en  $\mathbb{R}^n$   $\{\gamma_1(\cdot), \dots, \gamma_M(\cdot)\}$ , cada una con bola unidad  $B_i$ .

#### 3.2.1 El problema de Fermat-Weber

Este problema, también denominado problema de Weber, problema de Fermat-Steiner-Weber, problema de la mediana o problema minisum, tiene sus orígenes, como se mencionó en la sección 1, en el trabajo de Pierre Fermat.

El problema de Fermat-Weber con distancias ínfimas con respecto a  $\mathcal{A}$  y  $W$  es el siguiente:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} G(x) := \sum_{i=1}^M w_i d_i(x, A_i), \quad (P_W(\mathcal{A}))$$

donde  $d_i(x, A_i) = \inf_{a_i \in A_i} \gamma_i(x - a_i)$ .

Nuestro principal objetivo será caracterizar el conjunto de soluciones  $M_W(\mathcal{A})$  de  $P_W(\mathcal{A})$ . Los resultados siguientes son casos particulares del lema 3.1 y el teorema 3.1, tomando como  $\Phi$  la norma rectangular en  $\mathbb{R}^M$  y tomando  $\gamma'_i = w_i \gamma_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, M\}$ . Por ello, las demostraciones son omitidas.

**Lema 3.3** *Para cualquier  $x \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $q \in \partial G(x)$  si y sólo si existen  $a_i \in \text{proj}_{A_i}(x)$ ,  $p_i \in N_{A_i}(a_i) \cap B_i^\circ$   $1 \leq i \leq M$ , tales que*

1.  $x \in \bigcap_{i=1}^M (a_i + N_{B_i^\circ}(p_i))$ ,
2.  $q = \sum_{i=1}^M w_i p_i$ .

#### Teorema 3.2

1. Si  $M_W(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ , entonces existe una tripleta admisible  $(I, \lambda, p)$  con  $\lambda_i = w_i$   $\forall i \in I$  tal que  $M_W(\mathcal{A}) = C_I(p) = \bigcap_{i \in I} (\partial \sigma_{A_i}(p_i) + N_{B_i^\circ}(p_i))$ .
2. Si existe una tripleta admisible  $(I, \lambda, p)$  con  $\lambda_i = w_i$   $\forall i \in I$  tal que  $C_I(p) \neq \emptyset$ , entonces  $M_W(\mathcal{A}) = C_I(p)$ .

**Ejemplo 3.1** (Ver la figura 4) Consideremos tres conjuntos en  $\mathbb{R}^2$ , con  $\gamma_i = l_1$  para cada  $i$ . Dichos conjuntos son  $A_1 := \text{co}\{(0, 1), (-1, 2), (1, 2)\}$ ,  $A_2 := \text{co}\{(2, -0'5), (2, 0'5), (3, 0'5), (3, -0'5)\}$  y  $A_3 := \text{co}\{(-2, -2), (-2, -1), (-3, -1), (-3, -2)\}$ . Tomamos  $w_1 = w_2 = w_3 = 1$ .

En este caso es fácil comprobar que los *g.e.c.s.*  $C_I(p)$ , son los conjuntos delimitados por las líneas dibujadas en la figura 4. Así por ejemplo para



$p = (p_1, p_2, p_3)$  con  $p_1 = (0, -1)$ ,  $p_2 = (-1, 0)$  y  $p_3 = (1, 1)$ , se tiene que:  $C_{\{1\}}(p) = \{(0, 1 - x) : x \geq 0\}$ ,  $C_{\{2\}}(p) = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq 2, -0'5 \leq x_2 \leq 0'5\}$  y  $C_{\{3\}}(p) = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq -2, x_2 \geq -1\}$ . Además, se tiene que el conjunto de soluciones viene dado por:

$$M_W(A) = C_{\{1,2,3\}}((p_1, p_2, p_3)) = co\{(0, -0'5), (0, 0'5)\}.$$

Obsérvese que efectivamente  $(I, \lambda, p)$  con  $I = \{1, 2, 3\}$ ,  $(w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 1)$  y  $p = (p_1, p_2, p_3)$  es una tripleta admisible.

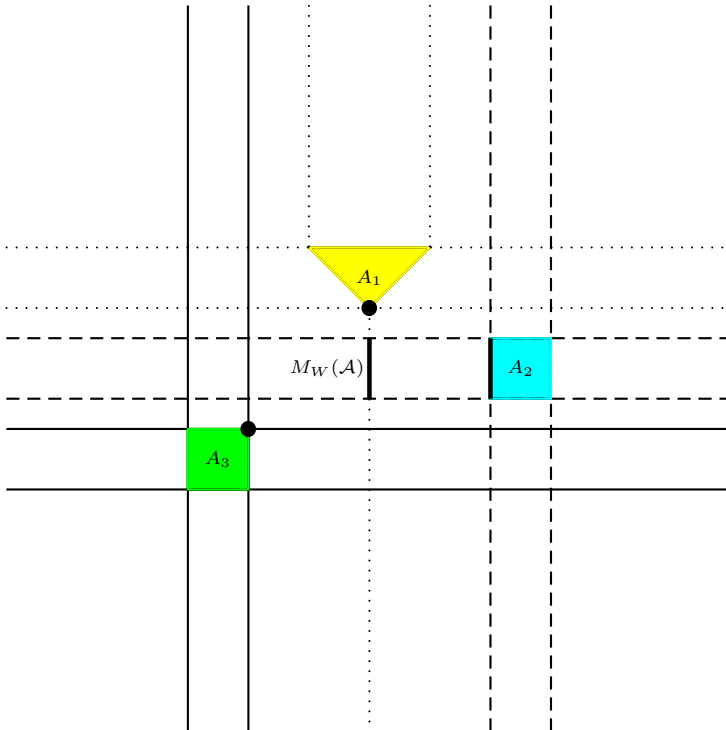


Figura 4: Ilustración del Ejemplo 3.1

El lector puede comprobar que los resultados que caracterizan el conjunto de soluciones del problema de Fermat-Weber en el caso puntual (ver [12]) pueden obtenerse como caso particular del anterior al considerar conjuntos unitarios.

**Corolario 3.1** *El problema de Fermat-Weber con distancias mínimas siempre tiene una solución en el conjunto de puntos extremos de los correspondientes g.e.c.s.*

El siguiente resultado es similar al Teorema de la “Mayoría”, bien conocido en el caso puntual. Para ello, se supone que  $\gamma_i = \gamma$  para todo  $i = 1, \dots, M$  y que  $d(x, y) = \gamma(x - y)$  (todas las distancias coinciden y son generadas por una única norma).

**Teorema 3.3** *Si  $\gamma$  es una norma en  $\mathbb{R}^n$ ,  $M_W(\mathcal{A}) \neq \emptyset$  y existe  $A_i \in \mathcal{A}$  tal que  $w_i \geq \sum_{i \neq j} w_j$ , entonces existe una solución en  $A_i$ .*

**Demostración:**

Sea  $x^* \in M_W(\mathcal{A})$  y supongamos que  $x^* \notin A_i$ . Si  $\hat{x} \in \text{proj}_{A_i}(x^*)$ , entonces se tiene que

$$G(x^*) = \sum_{i=1}^M w_i d(x^*, A_i) \leq G(\hat{x}) = \sum_{j \neq i} w_j d(\hat{x}, A_j).$$

Ahora bien, por la desigualdad triangular, se tiene también que

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} w_j d(\hat{x}, A_j) &\leq \sum_{j \neq i} w_j (\gamma(\hat{x} - x^*) + d(x^*, A_j)) \\ &\leq w_i \gamma(\hat{x} - x^*) + \sum_{j \neq i} w_j d(x^*, A_j) \\ &= G(x^*). \end{aligned}$$

Por tanto,  $\hat{x}$  es también una solución. □

## El caso puntual

En el caso particular en que los conjuntos  $A_i$  son unitarios, es posible dar mejores caracterizaciones del conjunto solución. En este apartado se revisan resultados de coincidencia de soluciones con puntos de demanda, además del problema de Fermat-Weber con norma  $l_1$  y  $l_2$ , en este caso. Denotemos  $A = \{a_1, \dots, a_M\}$ .

### Soluciones coincidentes con los puntos de demanda

En primer lugar se estudian los casos donde alguna solución del problema de Fermat-Weber puntual coincide con un punto de demanda. Por cuestión de simplicidad, pondremos  $\varphi_i(x) = w_i \gamma_i(x - a_i)$ .

**Teorema 3.4** *Se verifica que  $a_j \in A$  es una solución de  $(P_W(A))$  si y sólo si existe  $p_i \in \partial \varphi_i(a_j) \forall i \in \{1, \dots, M\} \setminus \{j\}$  tal que  $\gamma_j^0(-\sum_{i \neq j} w_i p_i) \leq w_j$ .*

**Demostración:**

Por el teorema 3.2,  $a_j \in M_W(A)$  si y sólo si existen  $p_i \in \partial \varphi_i(a_j)$  ( $1 \leq i \leq M$ ), tales que  $\sum_{i=1}^M w_i p_i = 0$  y  $\bigcap_{i=1}^M a_i + N_{B^0}(p_i) \neq \emptyset$ .

Puesto que  $p_i \in \partial\varphi_i(a_j) \forall i \in \{1, \dots, M\} \setminus \{j\}$ , se tiene que  $\gamma_i^0(p_i) = 1$ . Además, para cada  $a_j$  se cumple que  $p_j \in \partial\varphi_j(a_j) = \partial\gamma_j(a_j - a_j) = \partial\gamma_j(0)$ ; lo que implica que  $\gamma_j^0(p_j) \leq 1$ .

De esta forma,

$$a_j \in M_W(A) \Leftrightarrow \exists p_i \in \partial\varphi_i(a_j) \quad (1 \leq i \leq M) \text{ tales que } w_j p_j = - \sum_{i \neq j} w_i p_i.$$

Entonces, puesto que  $\gamma_j^0(w_j p_j) = \gamma_j^0(-\sum_{i \neq j} w_i p_i)$ , se tiene que

$$w_j \geq w_j \gamma_j^0(p_j) = \gamma_j^0 \left( - \sum_{i \neq j} w_i p_i \right).$$

Recíprocamente, si se supone que  $w_j \geq \gamma_j^0(-\sum_{i \neq j} w_i p_i)$ , se tiene que  $-\sum_{i \neq j} w_i p_i \in w_j B_j^0$ . De esta forma, existe  $p_j \in B_j^0$  tal que  $w_j p_j = -\sum_{i \neq j} w_i p_i$ , con lo que el resultado queda probado.  $\square$

El teorema anterior permite reducir el problema clásico de Fermat a un simple ejercicio.

**Ejemplo 3.2** (Problema de Fermat en el plano; véase la figura 1). Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  tres puntos de demanda no alineados en el plano, donde las distancias vienen medidas con la norma Euclídea. El problema clásico de Fermat se formula así:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|x - a\|_2 + \|x - b\|_2 + \|x - c\|_2.$$

En primer lugar, se establecen las condiciones necesarias y suficientes para que  $a$ ,  $b$  ó  $c$  sea solución del problema anterior. Sin pérdida de generalidad, se obtiene que  $c$  es óptima si y sólo si:

$$\left\| \frac{c - a}{\|c - a\|_2} + \frac{c - b}{\|c - b\|_2} \right\|_2 \leq 1,$$

lo que ocurre si y sólo si

$$\left\| \frac{c - a}{\|c - a\|_2} + \frac{c - b}{\|c - b\|_2} \right\|_2^2 \leq 1.$$

Se denota por  $u^t v$  el producto escalar de los vectores  $u$  y  $v$ . Desarrollando el lado izquierdo de la desigualdad anterior se obtiene que

$$2 + 2 \left( \frac{c - a}{\|c - a\|_2} \right)^t \left( \frac{c - b}{\|c - b\|_2} \right) \leq 1,$$

de donde se deduce que

$$c \text{ es óptimo si y sólo si } \left( \frac{c - a}{\|c - a\|_2} \right)^t \left( \frac{c - b}{\|c - b\|_2} \right) \leq -\frac{1}{2}.$$

Esto quiere decir que el ángulo de vértice  $c$  asociado al triángulo  $T$  de vértices  $a$ ,  $b$  y  $c$  tiene más de  $120^\circ$ .

En segundo lugar, se supone que ningún ángulo es de más de  $120^\circ$ , es decir, la solución no está en ningún vértice. Entonces la solución se encuentra en un punto de diferenciabilidad de la función objetivo. Además, se sabe que la solución está en el punto donde se anula el gradiente.

Si se definen los vectores

$$p_a(x) = \frac{x - a}{\|x - a\|_2}, \quad p_b(x) = \frac{x - b}{\|x - b\|_2}, \quad p_c(x) = \frac{x - c}{\|x - c\|_2},$$

se tiene que

$$\hat{x} \text{ es óptimo si y sólo si } p_a(\hat{x}) + p_b(\hat{x}) + p_c(\hat{x}) = 0.$$

Multiplicando por  $p_a(\hat{x})$ ,  $p_b(\hat{x})$  y  $p_c(\hat{x})$ , se obtiene que:

$$\begin{cases} p_a(\hat{x})^t p_b(\hat{x}) + p_a(\hat{x})^t p_c(\hat{x}) = -1 \\ p_b(\hat{x})^t p_a(\hat{x}) + p_b(\hat{x})^t p_c(\hat{x}) = -1 \\ p_c(\hat{x})^t p_a(\hat{x}) + p_c(\hat{x})^t p_b(\hat{x}) = -1 \end{cases}$$

de donde

$$p_a(\hat{x})^t p_b(\hat{x}) = p_a(\hat{x})^t p_c(\hat{x}) = p_b(\hat{x})^t p_c(\hat{x}) = -\frac{1}{2}.$$

Puesto que  $p_a(\hat{x})$ ,  $p_b(\hat{x})$  y  $p_c(\hat{x})$  son vectores unitarios, la igualdad anterior implica que el punto  $\hat{x}$  forma ángulos de  $120^\circ$  con los vértices del triángulo  $T$ . En consecuencia,  $\hat{x}$  ha de ser el punto de Torricelli del triángulo determinado por  $a$ ,  $b$  y  $c$  (véase la sección 1).

### El caso $n$ -dimensional con norma $\|\cdot\|_1$

El problema de Fermat-Weber con distancia rectangular es un modelo con muchas aplicaciones (localización en zonas urbanas, localización de componentes trasladados por “robots”, etc.). Además de su aplicabilidad, destaca su fácil resolución, ya que

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^M w_i \|x - a_i\|_1 = \sum_{k=1}^n \min_{x_k \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^M w_i |x_k - a_{ik}|.$$

Es decir, la resolución del problema de Fermat-Weber con norma  $\|\cdot\|_1$  en  $\mathbb{R}^n$  es equivalente a resolver  $n$  problemas de Fermat-Weber en  $\mathbb{R}$  con la norma habitual.

Aunque el procedimiento anterior proporciona un método de resolución eficiente, es posible desarrollar un método alternativo para resolver este problema que además se puede extender a cualquier calibrador poliédrico. En primer lugar, se observa que

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 \leq 1\} = \text{co}\{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\},$$

y que su bola dual,  $B_1^0$ , viene dada por:

$$B_1^0 = \{(u_1, u_2) : -1 \leq u_1 \leq 1, -1 \leq u_2 \leq 1\}.$$

De esta forma,  $\|\cdot\|_1$  tiene como expresión alternativa

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \max\{\langle u, x \rangle : u \in \text{ext}(B_1^0)\} \\ &= \max\{x_1 + x_2, -x_1 + x_2, -x_1 - x_2, x_1 - x_2\}. \end{aligned}$$

Por tanto, el problema original se puede reformular como

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^M w_i \|x - a_i\|_1 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^M w_i \max_{u \in \text{ext}(B_1^0)} \{\langle u, x - a_i \rangle\}$$

y éste a su vez puede ser formulado como un problema de Programación Lineal. Para ello, se introducen unas variables auxiliares  $z_i$  tales que  $\max\{\langle u, x - a_i \rangle : u \in \text{ext}(B_1^0)\} \leq z_i$ . Entonces el problema anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^M w_i z_i \\ \text{sujeto a} \quad & \langle (1, 1), x - a_i \rangle \leq z_i \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \\ & \langle (-1, 1), x - a_i \rangle \leq z_i \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \\ & \langle (-1, -1), x - a_i \rangle \leq z_i \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \\ & \langle (1, -1), x - a_i \rangle \leq z_i \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \\ & x \in \mathbb{R}^n, \quad z_i \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

El lector puede comprobar que el problema de Fermat-Weber con cualquier otro calibrador poliédrico también se transforma en un problema de Programación Lineal (de forma general, con mayor número de restricciones).

### El problema de Fermat-Weber con distancia Euclídea

Sin duda la norma Euclídea es la que podría considerarse como norma natural en las aplicaciones del problema de Fermat-Weber. Por ello, esta sección está dedicada a analizar este problema con la norma Euclídea,  $\|\cdot\|_2$ . Es decir,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) := \sum_{i=1}^M w_i \|x - a_i\|_2.$$

Para resolver este problema, se calcula el subdiferencial de dicha norma. Denotando  $\varphi_i(x) = w_i \|x - a_i\|_2$ , se obtiene que

$$\partial\varphi_i(x) = \begin{cases} w_i \frac{x - a_i}{\|x - a_i\|_2} & \text{si } x \neq a_i \\ a_i + B_2 & \text{si } x = a_i. \end{cases}$$

Ahora bien, utilizando el teorema 3.4, se obtiene que  $a_j \in A$  es solución si y sólo si para cada  $i \neq j$  existe  $p_i \in \partial\varphi_i(a_j)$  tal que

$$\left\| \sum_{i \neq j} w_i p_i \right\|_2 \leq w_j,$$

es decir si y sólo si

$$\left\| \sum_{i \neq j} w_i \frac{a_j - a_i}{\|a_j - a_i\|_2} \right\|_2 \leq w_j.$$

Por otro lado, suponiendo que la solución no está sobre ningún punto de demanda, la condición necesaria de optimalidad (en este caso, debido a la convexidad, también suficiente) viene dada por

$$\sum_{i=1}^M w_i \frac{x - a_i}{\|x - a_i\|_2} = 0$$

o, equivalentemente,

$$x = \frac{\sum_{i=1}^M w_i \frac{a_i}{\|x - a_i\|_2}}{\sum_{i=1}^M w_i \frac{1}{\|x - a_i\|_2}}.$$

una ecuación de punto fijo. A partir de ella, queda sugerido el siguiente proceso iterativo

$$x^{(l+1)} = \frac{\sum_{i=1}^M w_i \frac{a_i}{\|x^{(l)} - a_i\|_2}}{\sum_{i=1}^M \frac{w_i}{\|x^{(l)} - a_i\|_2}} = x^{(l)} - \frac{\sum_{i=1}^M w_i \frac{x^{(l)} - a_i}{\|x^{(l)} - a_i\|_2}}{\sum_{i=1}^M \frac{w_i}{\|x^{(l)} - a_i\|_2}}.$$

Esto es conocido en la literatura como el algoritmo de Weiszfeld. Del argumento precedente se deduce que es un algoritmo de descenso y se puede demostrar que converge a una solución, supuesto que ésta no es un punto de demanda.

Este algoritmo se puede extender al caso de normas  $l_p$  con  $p \in [1, 2]$  (ver [24]).

### 3.2.2 El problema min max con inf-distancias.

El otro problema clásico de localización es la minimización de la distancia máxima o problema de círculo de menor radio (Sylvester 1857). La versión de este problema con inf-distancias consiste en hallar el mínimo círculo que incluya las regiones de demanda y su formulación es:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} H(x) := \max_{1 \leq i \leq M} w_i d_i(x, A_i), \quad (9)$$

donde  $d_i(x, A_i) = \inf_{a \in A_i} \gamma_i(x - a)$  para cada  $i$ . Denotamos  $M_W^{l_\infty}(\mathcal{A})$  el conjunto de soluciones de (9) y definimos para cada  $I \subseteq \{1, \dots, M\}$  y cada  $\alpha \geq 0$  el siguiente conjunto:

$$AS_I(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : w_i d_i(x, A_i) = \alpha \ \forall i \in I, \quad w_i d_i(x, A_i) < \alpha \ \forall i \notin I\}.$$

El siguiente teorema proporciona una caracterización de  $M_W^{l_\infty}(\mathcal{A})$ .

### Teorema 3.5

1. Si  $M_W^{l_\infty}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ , entonces existen una tripleta admisible  $(I, \lambda, p)$  y un número  $\alpha \geq 0$  tales que

$$M_W^{l_\infty}(\mathcal{A}) = C_I(p) \cap AS_I(\alpha).$$

2. Para cualquier tripleta admisible  $(I, \lambda, p)$  y cualquier  $\alpha \geq 0$  tales que  $C_I(p) \cap AS_I(\alpha) \neq \emptyset$ , se verifica

$$M_W^{l_\infty}(\mathcal{A}) = C_I(p) \cap AS_I(\alpha).$$

### Demostración:

La demostración consiste en aplicar el teorema 3.1 con  $\Phi = \|\cdot\|_\infty$  en  $\mathbb{R}^M$  y  $\gamma'_i = w_i \gamma_i$  para todo  $i$ .

Puesto que  $\Phi = \|\cdot\|_\infty$ , esto implica  $\Phi^o = \|\cdot\|_1$ . De este modo,  $\gamma^o(\lambda) = 1$  si y sólo si existe  $I \subseteq \{1, \dots, M\}$  tal que  $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ . Por tanto, decir que  $\alpha = H(x) = \max_{1 \leq i \leq M} w_i d_i(x, A_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i d_i(x, A_i)$  con  $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$  es equivalente a decir que  $w_i d_i(x, A_i) = \alpha$  para cualquier  $i \in I$  y  $w_i d_i(x, A_i) < \alpha$  para cualquier  $i \notin I$ . En otras palabras,  $x \in D_I(\lambda)$  si y sólo si  $x \in AS_I(\alpha)$  para  $\alpha = H(x)$  y la demostración queda concluida.  $\square$

**Nota 3.1** El valor de  $\alpha$  que define el conjunto solución  $AS_I(\alpha)$  en el teorema anterior, es el valor óptimo del problema (9).  $\square$

**Ejemplo 3.3** (Ver la figura 5) Consideremos un problema en  $\mathbb{R}^2$  con:

1.  $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$ .
2. Conjuntos de demanda  $\mathcal{A} = \{A_1 := \text{co}\{(5, 1), (5, -1), (3, -1), (3, 1)\}, A_2 := \text{co}\{(1, -3), (0, -5), (-1, -3)\}, A_3 := \text{co}\{(-3, 3), (-3, 5), (-5, 4)\}$ .
3. Conjunto de pesos  $W = \{1, 1, 1\}$  y  $\gamma_i = l_\infty$  para  $i = 1, 2, 3$ .

Por tanto, la formulación como problema min max viene dada por:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} H(x) := \max_{i=1,2,3} d_i(x, A_i).$$

Tomando  $I = \{2, 3\}$ ,  $p_2 = (0, 1)$ ,  $p_3 = (0, -1)$ , se sigue que:

$$C_I(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq -3, x_1 + x_2 \leq 0, x_1 + x_2 \geq -4, x_1 - x_2 \geq -6, x_1 - x_2 \leq 4\}.$$

Para  $\alpha = 3$ , se tiene que  $AS_I(3) = \{(0, 0)\}$ , que coincide con  $D_I((0, 0'5, 0'5))$  (obsérvese que para  $\lambda = (0, 0'5, 0'5)$  se tiene que  $\Phi^o(\lambda) = 1$ ). De hecho, este conjunto se define como

$$\begin{aligned} D_I((0, 0'5, 0'5)) &= \{x : \max_{1 \leq i \leq 3} d_i(x, A_i) = \frac{1}{2} \langle (0, 1), x - a_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle (0, -1), x - a_3 \rangle\} \\ &= \{(0, 0)\}, \end{aligned}$$

donde  $a_2 = (0, -3)$  y  $a_3 = (-3, 3)$ . Por tanto, el conjunto de soluciones es

$$M_W^{l\infty}(\mathcal{A}) = C_I(p) \cap AS_I(\alpha) = \{(0, 0)\}.$$

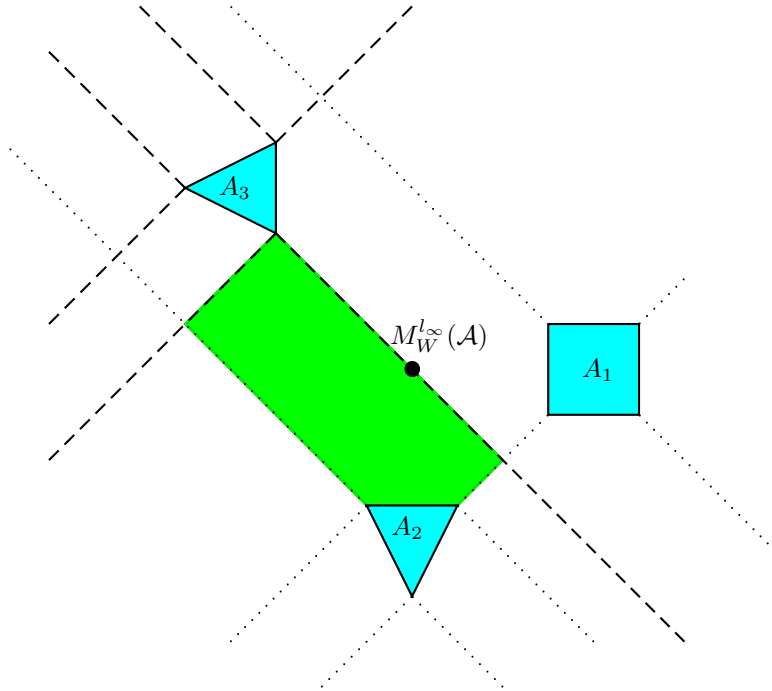


Figura 5: Ilustración del ejemplo 3.3



## 4 El problema de mediana ordenada

Esta sección está dedicada al estudio de otro problema genérico dentro de la Teoría de Localización. El modelo corresponde a una formulación relativamente reciente de una familia de problemas [31, 35] cuya principal característica es permitir, en cierto modo, un tratamiento algebraico unificado.

Por simplicidad en la exposición, se considera el modelo puntual en espacios de dimensión finita. El lector interesado puede consultar [35, 37] para un tratamiento más general.

Sean  $A = \{a_1, \dots, a_M\}$  un conjunto de puntos de demanda y  $W = \{w_1, \dots, w_M\}$  y  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}$  dos conjuntos de escalares no negativos tales que el elemento  $w_i$  de  $W$  representa la importancia del punto de demanda  $a_i$  y los elementos de  $\Lambda$  diseñan la función objetivo. Para facilitar la comprensión de este modelo, se usará un sólo calibrador para medir las distancias, pudiéndose extender todos los resultados obtenidos al caso de calibradores diferentes.

Dada una permutación  $\sigma$  del conjunto  $\{1, \dots, M\}$  verificando

$$w_{\sigma_1} \gamma(x - a_{\sigma_1}) \leq w_{\sigma_2} \gamma(x - a_{\sigma_2}) \leq \dots \leq w_{\sigma_M} \gamma(x - a_{\sigma_M}),$$

se denota por

$$d_{(i)}(x) = w_{\sigma_i} \gamma(x - a_{\sigma_i}),$$

el elemento  $i$ -ésimo de la lista ordenada de distancias ponderadas.

Como indicamos en la sección 1, la formulación del problema de mediana ordenada es la siguiente:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) = \sum_{i=1}^M \lambda_i d_{(i)}(x), \quad (10)$$

donde  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_M$ .

Obsérvese que esta función objetivo, dependiendo del punto evaluado, puede tener diferentes expresiones como suma ponderada de las distancias. En otras palabras, dado que  $\sigma$  depende de  $x$ , su forma funcional está definida puntualmente (hay en cierto modo dependencia “no local”). Esto significa que la manipulación de  $F$  va a tener una dificultad añadida que se ve compensada por su flexibilidad, esto es, por la gran cantidad de modelos que se pueden considerar como casos particulares. Este hecho queda reflejado en la observación siguiente.

### Nota 4.1

- i) El problema de Fermat-Weber es un problema de mediana ordenada donde  $\lambda_1 = \dots = \lambda_M = 1$ .
- ii) El problema cent-dian es un problema de mediana ordenada donde  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{M-1} = \lambda$  y  $\lambda_M = 1 - \lambda$ .
- iii) El problema minimax es un problema de mediana ordenada donde  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{M-1} = 0$  y  $\lambda_M = 1$ .

- iv) El problema del  $k$ -centrum es el problema de mediana ordenada con  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{M-(k+1)} = 0$  y  $\lambda_{M-k} = \dots = \lambda_M = 1$ .
- v) El problema *lexicográfico* es el problema de mediana ordenada con  $\lambda_M \gg \lambda_{M-1} \gg \dots \gg \lambda_1$  ( $a \gg b$  significa que  $a$  es “mucho mayor” que  $b$ ).

Por tanto, a través del estudio del problema de mediana ordenada se puede:

- a) Caracterizar el conjunto de soluciones de varios modelos simultáneamente.
- b) Desarrollar un algoritmo eficiente único que resuelva todos estos problemas.  $\square$

En la subsección que sigue, se presenta el caso en que las distancias son medidas a través de calibradores poliédricos. Abordaremos a continuación el caso general a través de un método de aproximación basado en el caso poliédrico.

#### 4.1 El problema de mediana ordenada con calibradores poliédricos

En primer lugar, queremos insistir en que, a pesar de que la función objetivo del problema (10) es similar a la del problema de Fermat-Weber, no existe una representación unificada en todo el espacio como suma de distancias. En este apartado, se caracterizan los conjuntos donde la representación como suma de distancias permanece invariante.

**Definición 4.1** *Sea  $i \neq j$ . Al conjunto  $B_\gamma(a_i, a_j)$ , formado por los puntos  $\{x : w_j \gamma(x - a_j) = w_i \gamma(x - a_i)\}$ , se le llama mediatriz de  $a_i$  y  $a_j$  con respecto a  $\gamma$ .*

Como ilustración de la definición 4.1, se puede ver en la figura 6 la mediatriz para los puntos  $a_1 = (1, 4)$  y  $a_2 = (5, 1)$  con norma  $l_1$  y pesos  $w_1 = w_2 = 1$ .

Seguidamente se analizan algunas propiedades que permiten describir geoméricamente las mediatrices.

**Proposición 4.1** *La mediatriz de  $a_i$  y  $a_j$  es un conjunto de puntos que verifican una ecuación lineal dentro de cada convexo elemental.*

#### **Demostración:**

En un convexo elemental,  $\gamma(x - a_i)$  y  $\gamma(x - a_j)$  pueden ser escritos como  $l_i(x - a_i)$  y  $l_j(x - a_j)$  respectivamente, donde  $l_i(\cdot)$  y  $l_j(\cdot)$  son funciones lineales. De esta forma, decir que  $w_i \gamma(x - a_i) = w_j \gamma(x - a_j)$  es equivalente a decir que  $w_i l_i(x - a_i) = w_j l_j(x - a_j)$ , de donde se sigue el resultado.  $\square$

En el caso bidimensional esta descripción puede ser más precisa.

**Proposición 4.2** *La mediatriz de  $a_i$  y  $a_j$  con respecto a un calibrador poliédrico con  $G$  puntos extremos contiene a lo más  $O(G)$  subconjuntos diferentes definidos por ecuaciones lineales.*

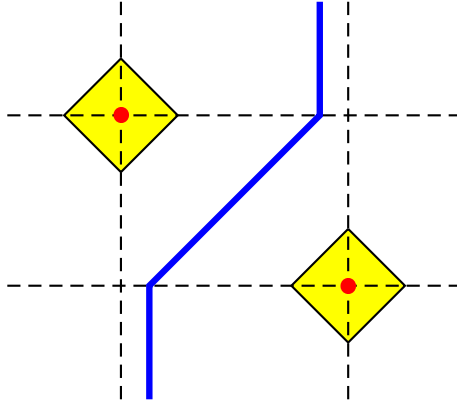


Figura 6: Mediatriz

La demostración de este resultado puede verse en [37].

Este resultado implica que el número de expresiones lineales que definen cualquier mediatriz es también lineal en  $G$  (el número de direcciones fundamentales). Obsérvese que no hay ninguna razón por la cual la mediatriz debe tener interior vacío. Ver por ejemplo la figura 7, donde se muestra la mediatriz definida por los puntos  $(0,0)$  y  $(4,0)$  con la norma de Tchebychev.

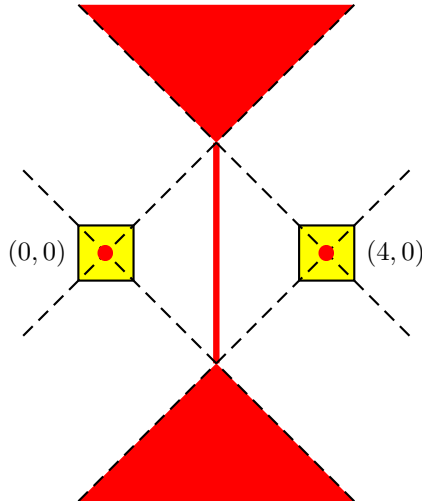


Figura 7: Mediatriz

Cuando el orden de la secuencia ordenada de distancias no varía, la expresión de la función objetivo del problema de mediana ordenada como suma de distancias ponderadas no cambia. Con el objetivo de describir esas regiones

donde la expresión de la función objetivo es invariante, se da la siguiente definición.

**Definición 4.2** *Dada una permutación  $\sigma$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, M\}$ , la región ordenada  $O_\sigma$  es el conjunto*

$$O_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : w_{\sigma_1} \gamma(x - a_{\sigma_1}) \leq \dots \leq w_{\sigma_M} \gamma(x - a_{\sigma_M})\}.$$

**Nota 4.2** Nótese que estas regiones no son necesariamente convexas, véase la figura 8. □

La importancia de las regiones ordenadas radica en que el problema de mediana ordenada dentro de cada región se reduce a un problema de Fermat-Weber.

**Definición 4.3** *Un convexo elemental ordenado es cualquier conjunto resultante de la intersección de un convexo elemental y una región ordenada. Los vértices de los convexos elementales ordenados se denominan puntos de intersección ordenados.*

**Nota 4.3** Nótese que estos conjuntos son convexas, ya que las mediatrices tienen un comportamiento lineal en cada convexo elemental. Por tanto, los convexos elementales ordenados son el resultado de aplicar restricciones lineales a un conjunto convexo. □

La importancia de los convexos elementales ordenados viene dada por el comportamiento lineal de la función objetivo dentro de cada uno de ellos. Ello se debe a que resultan de la intersección de una región ordenada (donde el comportamiento del problema de mediana ordenada es igual al de un problema de Fermat-Weber) y un convexo elemental (donde el comportamiento del problema de Fermat-Weber es lineal).

Para concluir con la descripción de las regiones ordenadas, se puede observar que dichas regiones están definidas a lo más por  $M - 1$  mediatrices.

Sin embargo, la principal desventaja de tratar con estas regiones es su complejidad. Un análisis simplista, podría conducir a concluir que el número de regiones ordenadas es  $M!$ , lo que haría que el problema fuera intratable. Afortunadamente, cuando la dimensión del espacio es fija, se puede obtener una cota polinomial del número de regiones ordenadas. En el caso más simple de  $\mathbb{R}^2$ , el resultado es el siguiente:

**Teorema 4.1** *Una cota superior sobre el número de regiones ordenadas es  $O(M^4 G^2)$ .*

**Demostración:**

Dadas dos mediatrices con  $O(G)$  tramos lineales, el máximo número de intersecciones es  $O(G^2)$ . El número total de mediatrices entre  $M$  puntos es  $\binom{M}{2}$ , entonces, el máximo número de intersecciones entre ellas es

$$O(G^2 \binom{M}{2}).$$

Puesto que el número de intersecciones tiene la misma complejidad que el número de regiones, una cota superior para el número de regiones ordenadas es  $O(M^4 G^2)$ .  $\square$

Un análisis detallado de este teorema muestra que esta cota no es demasiado elevada, a pesar de tener orden  $O(M^4 G^2)$ . Se observa que el número de mediatrices entre los puntos de  $A$  es  $\binom{M}{2}$ , que es de orden  $O(M^2)$ . Por tanto, incluso en el caso más favorable en que las mediatrices son líneas rectas, el número de regiones en el análisis del peor caso es de orden  $O(\binom{M}{2}^2)$ , es decir, de orden  $O(M^4)$ . Debido a que cada mediatriz podría tener  $G$  tramos lineales, esta cota es bastante ajustada.

**Ejemplo 4.1** La figura 8 muestra las regiones ordenadas determinadas por los puntos  $a_1 = (0, 11)$ ,  $a_2 = (3, 0)$  y  $a_3 = (16, 8)$  con la norma hexagonal  $\gamma(\cdot)$ , cuyo conjunto de puntos extremos es  $Ext(B) = \{(2, 0), (1, 2), (-1, 2), (-2, 0), (-1, -2), (1, -2)\}$  y con pesos  $w_1 = w_2 = w_3 = 1$ . Por ejemplo, la región  $O_{(3,2,1)}$  es el conjunto de puntos

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \gamma(x - a_3) \leq \gamma(x - a_2) \leq \gamma(x - a_1)\}.$$

Veremos a continuación que, a pesar de que no existe una representación global única de la función objetivo, ésta es convexa. Usando las herramientas del Análisis Convexo junto con las descripciones geométricas introducidas anteriormente, podremos así desarrollar un algoritmo eficiente para resolver el problema.

**Lema 4.1** *Se tiene que*

$$F(x) = \sum_{i=1}^M \lambda_i d_{(i)}(x) = \max_{\sigma \in P(M)} \sum_{i=1}^M \lambda_i w_{\sigma_i} \gamma(x - a_{\sigma_i}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

siendo  $P(M)$  el conjunto de permutaciones de  $\{1, \dots, M\}$ .

La demostración de este resultado es una consecuencia del teorema 386 de [20].

Nótese que el lema precedente implica en particular que  $F$  es convexa, por ser máximo de funciones convexas.

A continuación se muestra un problema similar al de mediana ordenada, pero con pesos no ordenados, para el que la función objetivo no es convexa. En este problema, el conjunto solución no es convexo.

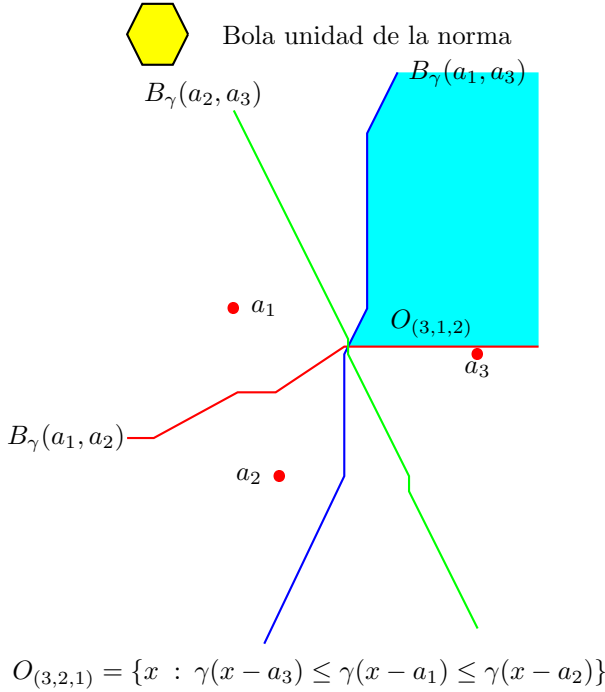


Figura 8: Regiones Ordenadas

**Ejemplo 4.2** Sea  $A := \{a_1 = (3, 0), a_2 = (16, 8)\}$  y sea  $\gamma(\cdot)$  la norma hexagonal definida en el ejemplo 4.1. La función

$$G(x) = 2d_{(1)}(x) + d_{(2)}(x)$$

no es una función convexa porque, en la región ordenada  $O_{(1,2)}$ ,

$$G(x) = 2\gamma(x - (3, 0)) + \gamma(x - (16, 8))$$

y, en  $O_{(2,1)}$ ,

$$G(x) = 2\gamma(x - (16, 8)) + \gamma(x - (3, 0)).$$

Por tanto, usando el Teorema de la “Mayoría” se obtiene que las soluciones de estos problemas son  $(3, 0)$  y  $(16, 8)$  respectivamente. Es decir, el conjunto solución no es convexo, lo que implica que  $G$  no es convexa. En la figura 9, se presenta una ilustración gráfica de este ejemplo.

En [31, 35] se prueba que el conjunto solución del problema (10) coincide con un convexo elemental ordenado. Sin embargo, la existencia de un gran número de convexos elementales ordenados requiere un procedimiento de enumeración a partir del cual se pueda deducir un algoritmo que nos permita la resolución de dicho problema.

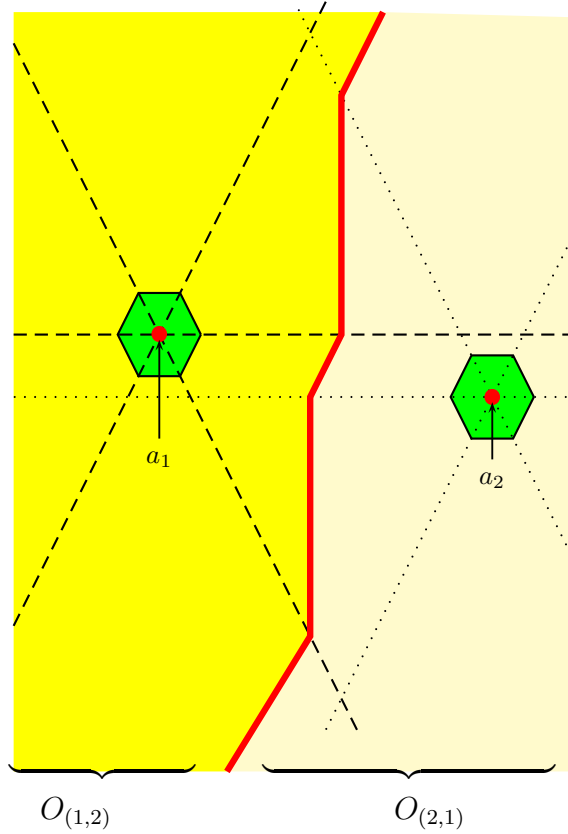


Figura 9: No convexidad de la función objetivo.

Esto es posible en el caso de normas poliédricas. En efecto, dentro de cada región ordenada,  $O_\sigma$ , se considera el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^M \lambda_i w_{\sigma_i} z_{\sigma_i} \\ \text{sujeto a} \quad & w_i \langle b_g^0, x - a_i \rangle \leq z_i \quad b_g^0 \in B^0, \quad 1 \leq i \leq M, \\ & z_{\sigma_i} \leq z_{\sigma_{i+1}} \quad 1 \leq i \leq M - 1, \end{aligned} \quad (P_\sigma)$$

donde las  $b_g^0$  son las direcciones fundamentales de  $B^0$ .

**Lema 4.2** *Sea  $x^*$  una solución de  $(P_\sigma)$ .*

- i) Si  $x^* \in O_\sigma$ , entonces  $x^*$  es también una solución del problema de la mediana ordenada restringido a  $O_\sigma$ .*
- ii) Si  $x^* \in O_{\sigma'}$  donde  $O_{\sigma'} \neq O_\sigma$ , entonces la solución del problema de la mediana ordenada restringido a  $O_{\sigma'}$  es mejor (i.e. el valor, en ella de la función objetivo es menor) que la solución del problema de la mediana ordenada restringido a  $O_\sigma$ .*

**Demostración:**

Si  $x^* \in O_\sigma$  se tiene que

$$w_i \langle b_{g_i}^o, x - a_i \rangle = z_i, \quad \text{para algún } g_i = 1, \dots, G \text{ y para todo } i = 1, 2, \dots, M$$

lo que significa que  $z_i = w_i \gamma(x - a_i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, M$ , de donde se obtiene el resultado.

Si  $x^* \in O_{\sigma'}$  ( $O_{\sigma'} \neq O_\sigma$ ), se tiene que

$$w_i \langle b_{g_i}^o, x - a_i \rangle < z_i \quad \text{para todo } g_i = 1, \dots, G \text{ y para al menos un } i.$$

Esto significa que la función objetivo del problema ( $P_\sigma$ ) en  $x^*$  es menor que el valor objetivo de ( $P_{\sigma'}$ ) en  $x^*$ .  $\square$

A continuación, usando los lemas previos y el hecho de que la función objetivo es globalmente convexa, se desarrollará un algoritmo que resuelve el problema de la mediana ordenada.

Para cada región ordenada,  $O_\sigma$ , se resolverá el problema de programación lineal ( $P_\sigma$ ), pudiendo darse dos casos: (1) la solución está en el interior de la región considerada (en  $\mathbb{R}^n$ ), lo que por convexidad implica que esta solución es el óptimo global; (2) la solución está sobre la frontera o en otra región ordenada; entonces se tiene que hacer una nueva búsqueda local en alguna región vecina a la que pertenece este punto.

**ALGORITMO 4.1**

*PASO 1: ELEGIR una región ordenada  $O_\sigma$ .*

*PASO 2: RESOLVER el problema ( $P_\sigma$ ) y elegir una solución  $y^*$ .*

*PASO 3:*

- *SI  $y^* \notin O_\sigma$ , ENTONCES  $\sigma := \sigma'$  donde  $y^* \in O_{\sigma'}$  e IR AL PASO 2.*
- *SI  $y^* \in \text{int}(O_\sigma)$ , ENTONCES  $x^* := y^*$  e IR AL PASO 4.*
- *SI  $y^*$  pertenece a la frontera de  $O_\sigma$ , ELEGIR una región adyacente no visitada  $O_{\sigma'}$  tal que  $y^* \in O_{\sigma'}$  e ir al PASO 2 con  $\sigma := \sigma'$ . SI todas las regiones adyacentes han sido visitadas, ENTONCES  $x^* := y^*$  e IR AL PASO 4.*

*PASO 4: SALIDA  $x^*$ .*

El algoritmo anterior es eficiente en el sentido de que está polinomialmente acotado. Una vez que se ha fijado la dimensión del problema, su complejidad está dominada por la complejidad de resolver un problema lineal en cada región ordenada. El número de regiones ordenadas está polinomialmente acotado y la resolución de un problema de programación lineal se puede hacer en tiempo polinomial mediante algoritmos de punto interior, ver [42]. Por tanto, el Algoritmo 4.1 es polinomial.

Otros algoritmos más eficientes que hacen uso de técnicas propias de Geometría Computacional pueden hallarse en [23].



**Ejemplo 4.3** Para  $A = \{(3, 0), (0, 11), (16, 8)\}$ ,  $w_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, M$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  y  $\lambda_3 = 3$ , el problema ordenado tiene la siguiente formulación:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \left( d_{(1)}(x) + 2d_{(2)}(x) + 3d_{(3)}(x) \right),$$

donde  $\gamma_B(\cdot)$  es la norma hexagonal definida en el Ejemplo 4.1.

La figura 10 muestra los convexos elementales ordenados para este problema. Nótese que las líneas gruesas representan las mediatrices entre los puntos de  $A$ , mientras las líneas delgadas son las direcciones fundamentales de la norma sobre cada punto de demanda. Se resuelve el problema usando el Algoritmo 4.1. Comenzando con el punto  $x^0 = (0, 11)$  se obtiene la solución en dos iteraciones. En la primera, se obtiene el punto  $x^1 = (6.5, 8)$  con valor objetivo 26.5. En la segunda iteración, se obtiene  $x^2 = (7, 8)$  con valor objetivo 26. Este punto no puede ser mejorado en su entorno, con lo cual es la solución del problema. Las iteraciones del algoritmo para este ejemplo se muestran en la figura 11.

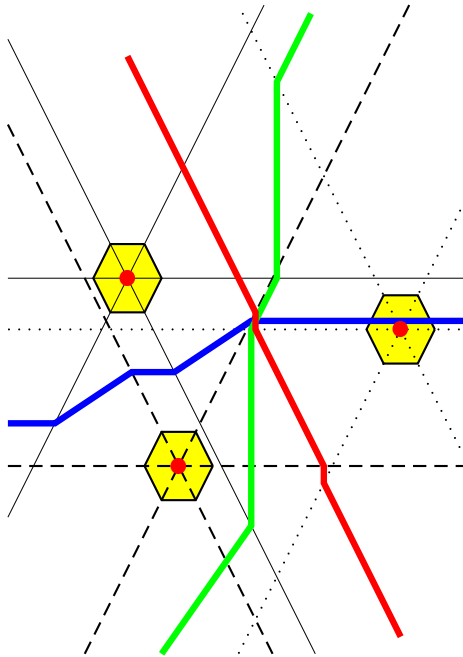


Figura 10: Convexos elementales generalizados

## 4.2 Caso no poliédrico

En los apartados anteriores se ha desarrollado una metodología para resolver el problema de la mediana ordenada en el caso de calibradores poliédricos. En esta sección, se resuelve el problema con un calibrador general, no necesariamente poliédrico. Para ello se prueba que las soluciones de estos problemas pueden

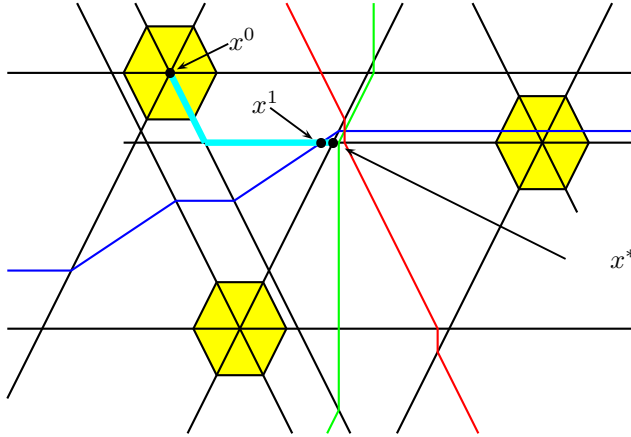


Figura 11: Solución óptima

ser arbitrariamente aproximadas por una sucesión de soluciones de problemas con calibradores poliédricos cuyas bolas unidad convergen, en la métrica de Hausdorff, ver [39], a la bola unidad del problema no poliédrico.

Sea  $B$  la bola unidad del calibrador  $\gamma_B(\cdot)$ ,  $\{B_m\}$  una sucesión creciente de polígonos convexos incluidos en  $B$  y  $\{B^m\}$  una sucesión decreciente de polígonos convexos que incluyen a  $B$ :

$$B_m \subset B_{m+1} \subset B \subset B^{m+1} \subset B^m.$$

Sean  $\gamma_{B_m}(\cdot)$  y  $\gamma_{B^m}(\cdot)$  los calibradores cuyas bolas unidad son  $B_m$  y  $B^m$ , respectivamente.

**Proposición 4.3** *Si  $B_m \subset B \subset B^m$  se tiene que*

$$\gamma_{B_m}(x - y) \geq \gamma_B(x - y) \geq \gamma_{B^m}(x - y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

La demostración se sigue directamente de la definición de calibrador.

**Proposición 4.4** *Sea  $K$  un conjunto compacto. Si  $B_m$  converge a  $B$  y  $B^m$  converge a  $B$  en el sentido de la métrica de Hausdorff, entonces para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que, para todo  $m \geq n_0$ ,*

$$\begin{aligned} \max_{x \in K} |F_m(x) - F_B(x)| &< \varepsilon, \\ \max_{x \in K} |F^m(x) - F_B(x)| &< \varepsilon, \end{aligned}$$

siendo  $F_m(x) := \sum_{i=1}^M \lambda_i d_{(i)}^{B_m}(x)$ ,  $F^m(x) := \sum_{i=1}^M \lambda_i d_{(i)}^{B^m}(x)$  y  $F_B(x) := \sum_{i=1}^M \lambda_i d_{(i)}(x)$ .

**Demostración:**

Sólo se probará la primera desigualdad. La segunda se demuestra de forma análoga.

Puesto que  $B_m$  converge a  $B$ ,  $B_m \subset B_{m+1}$  para todo  $m$  y  $K$  es un conjunto compacto, dados  $\varepsilon > 0$  y  $a \in A$ , existe  $n_a$  tal que, si  $m > n_A := \max_{a \in A} n_a$ , se verifica que

$$\left| \gamma_B(x - a) - \gamma_{B_m}(x - a) \right| < \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^M w_i \sum_{i=1}^M \lambda_i} \quad \forall x \in K.$$

Por continuidad se tiene que, cualesquiera  $i$  y  $j$ , y cualquier  $x \in K$  verificando que  $w_i \gamma_B(x - a_i) < w_j \gamma_B(x - a_j)$ , existe  $n_o > n_A$  tal que

$$w_i \gamma_{B_m}(x - a_i) < w_j \gamma_{B_m}(x - a_j) \quad m > n_o$$

y tal que, para cualesquiera  $i, j$  y  $x \in K$  con  $w_i \gamma_B(x - a_i) = w_j \gamma_B(x - a_j)$ , se tiene  $\gamma_B(x - A)_{(i)} = w_{\sigma_i^m} \gamma_B(x - a_{\sigma_i^m})$ , donde  $w_{\sigma_i^m} \gamma_{B_m}(x - a_{\sigma_i^m}) = d_{(i)}^{B_m}(x)$  para cada  $m > n_o$ . De aquí se deduce que, para cualquier  $x \in K$  y cualquier  $m > n_o$ ,

$$\begin{aligned} |F_m(x) - F(x)| &= \sum_{i=1}^M \lambda_i |d_{(i)}(x) - d_{(i)}^{B_m}(x)| \\ &= \sum_{i=1}^M \lambda_i w_{\sigma_i^m} |\gamma_B(x - a_{\sigma_i^m}) - \gamma_{B_m}(x - a_{\sigma_i^m})| < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

#### Corolario 4.1

- i) Si  $B_m$  converge a  $B$  en el sentido de la métrica de Hausdorff, entonces  $F_m$  converge a  $F_B$  uniformemente sobre compactos. Además, la sucesión  $\{F_m(x)\}$  es decreciente.
- ii) Si  $B^m$  converge a  $B$  en el sentido de la métrica de Hausdorff, entonces  $F^m$  converge a  $F_B$  uniformemente sobre compactos. Además, la sucesión  $\{F^m(x)\}$  es creciente.

Este resultado será utilizado para demostrar el siguiente teorema.

#### Teorema 4.2

- i) Sea  $\{x_m\}$  una sucesión tal que  $x_m \in \arg \min F_m$  para cada  $m \geq 1$ . Entonces cualquier punto de acumulación de  $\{x_m\}$  pertenece a  $\arg \min F_B$ .
- ii) Sea  $\{x^m\}_{m \in \mathbb{N}}$  una sucesión tal que  $x^m \in \arg \min F^m(x)$ , para cada  $m \geq 1$ . Entonces cualquier punto de acumulación de  $\{x^m\}_{m \in \mathbb{N}}$  pertenece a  $\arg \min F_B$ .

**Demostración:**

Sólo se probará la primera parte, puesto que la demostración de la segunda es análoga.

En primer lugar, debido a que la sucesión  $\{F_m\}$  es decreciente, se puede aplicar el teorema 2.46 en [1], obteniéndose que  $\{F_m\}$  es epi-convergente.

Además se obtiene por la proposición 2.4.8 en [1] que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{x \in \mathbb{R}^2} F_m(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} F_B(x). \quad (11)$$

Finalmente, por el teorema 2.12 de [1], deducimos que cualquier punto de acumulación de la sucesión  $\{x_m\}$  es una solución de  $F_B$ .  $\square$

El resultado anterior prueba que la solución del problema ordenado de Weber con un calibrador general puede ser arbitrariamente aproximada por las soluciones del mismo problema con calibradores poliédricos.

## 5 El problema multiobjetivo

En cualquier problema de localización donde el criterio para localizar un servicio sea atractivo, todos los usuarios quieren tener simultáneamente el servicio tan cercano como sea posible. Por ello, una característica intrínseca de los problemas de localización es su naturaleza multiobjetivo.

El propósito de los problemas multiobjetivo es el de optimizar simultáneamente varias funciones objetivo. Sin embargo, debido a que rara vez existe un punto simultáneamente óptimo en todas las funciones objetivo, tratamos de caracterizar el conjunto de soluciones no dominadas o, equivalentemente, el conjunto de puntos para los que no existe otro mejor en cada función objetivo considerada en el problema. En Teoría de Localización, la caracterización del conjunto de soluciones no dominadas en problemas multiobjetivo ha sido ampliamente estudiada, aunque esta cuestión ha sido sólo parcialmente resuelta. Una formulación general del problema multiobjetivo es la que viene dada por la siguiente expresión:

$$v - \min(F_1(x), \dots, F_k(x)),$$

donde  $v - \min$  representa la minimización vectorial y las  $F_1, \dots, F_k$  son las funciones objetivo.

Al problema donde cada función  $F_i$  es la distancia al punto fijo  $a_i$ , medida con la misma norma, se le llama problema de localización punto-objetivo. Este problema fue tratado por primera vez en [47] para la norma  $l_2$ . Posteriormente, Durier en [11] resolvió este problema para calibradores poliédricos. Otras referencias dedicadas a estudiar diferentes versiones del problema de localización punto-objetivo son [3, 5, 7, 15, 19, 25, 29, 44, 48].

El caso en que cada  $F_i$  es una suma ponderada de distancias medidas con la norma  $l_1$  (el problema de Fermat-Weber con norma rectangular) fue resuelto en

[18, 33]. El problema en que las  $F_i$  son sumas ponderadas de distancias medidas con normas arbitrarias fue resuelto en [34].

Por otro lado, el caso donde existe una demanda regional y las funciones  $F_i$  para  $i = 1, \dots, k$  son funciones inf-distancias (es decir, la distancia al punto más próximo de cada conjunto de demanda) fue resuelto en [40].

De esta forma, aunque el problema ha sido estudiado en numerosas ocasiones y por diferentes autores, las caracterizaciones obtenidas se aplican sólo en casos particulares. En esta sección, se proporciona una solución geométrica para esta clase de problemas, donde la única condición que se impone a las funciones objetivo consideradas es que sean convexas e inf-compactas. A pesar de la generalidad del problema considerado, los resultados son fáciles de comprender y en las demostraciones se usan, casi exclusivamente, herramientas del Análisis Convexo.

### 5.1 El modelo

Sean  $F_1, \dots, F_k$  funciones reales convexas e inf-compactas definidas por simplicidad en  $\mathbb{R}^2$  que reperesentan diferentes criterios o escenarios. Recuérdese que una función  $f$  es inf-compacta si los conjuntos de nivel inferior  $\{x : f(x) \leq \rho\}$  son compactos para cada  $\rho \in \mathbb{R}$ . Nuestro objetivo es encontrar el conjunto de puntos  $x \in \mathbb{R}^2$  tales que no existe  $y \in \mathbb{R}^2$  que mejore el valor de  $F_i$  en  $x$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ . De esta forma, la formulación del problema viene dada por:

$$v - \min_{x \in \mathbb{R}^2} (F_1(x), \dots, F_k(x)). \quad (12)$$

El conjunto solución que se va a considerar para este problema viene dado por:

$$\text{WE}(F_1, \dots, F_k) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \forall y (\neq x) \in \mathbb{R}^2, \exists i, 1 \leq i \leq k, \text{ con } F_i(x) \leq F_i(y)\}.$$

Usualmente este conjunto es llamado conjunto de *puntos débilmente eficientes*.

Con el objetivo de facilitar el entendimiento del resto de la sección, se usa la siguiente notación. El conjunto de nivel inferior de la función  $F$  para un valor  $\rho \in \mathbb{R}$  es

$$L_{\leq}(F, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^2 : F(x) \leq \rho\}$$

y el conjunto de nivel estrictamente inferior

$$L_{<}(F, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^2 : F(x) < \rho\}.$$

Para una función convexa e inf-compacta  $F_i$ , se usará la notación

$$\mathcal{X}^*(F_i) := \arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} F_i(x). \quad (13)$$

Nótese que este conjunto es convexo por la convexidad de  $F_i$ .

En esta sección se estudia el problema (12), probándose que la estructura geométrica de  $\text{WE}(F_1, F_2, F_3)$  viene dada por la región delimitada por las cadenas de soluciones “biobjetivo” asociadas a cada par de funciones  $F_i$

y  $F_j$ , con  $1 \leq i, j \leq 3$ . Este resultado permite caracterizar el conjunto  $WE(F_1, \dots, F_k)$  mediante la unión de los conjuntos solución de cada problema con tres objetivos. A continuación se enuncia una caracterización teórica del conjunto  $WE(F_1, \dots, F_k)$  que será utilizada a lo largo de esta sección.

**Teorema 5.1** *Se verifica que:*

$$\hat{x} \in WE(F_1, \dots, F_k) \iff \bigcap_{i=1}^k L_{<}(F_i, F_i(\hat{x})) = \emptyset.$$

La demostración de este resultado puede verse en [38].

**Nota 5.1** En el caso  $k = 2$ , el resultado previo establece que  $WE(F_1, F_2)$  coincide con el lugar geométrico de los puntos de tangencia de los conjuntos de nivel inferior de las funciones  $F_1$  y  $F_2$  unión con  $\mathcal{X}^*(F_1) \cup \mathcal{X}^*(F_2)$ . Para comprender bien esta afirmación, véase el ejemplo 5.1.  $\square$

**Ejemplo 5.1** (ver figura 12) Sean  $a_1 = (0, 0)$ ,  $a_2 = (10, 0)$ ,  $a_3 = (14, 6)$ ,  $F_1(x) = \|x - a_1\|_2$ ,  $F_2(x) = \|x - a_2\|_1$  y  $F_3(x) = \|x - a_3\|_1$ . Por el teorema 5.1,  $WE(F_1, F_2)$  es el segmento definido por  $a_1$  y  $a_2$ . En efecto, se trata del conjunto de puntos  $\hat{x}$  tales que no hay ningún otro punto que esté más cerca que él de  $a_1$  en norma  $\|\cdot\|_2$  y más cerca que él de  $a_2$  en norma  $\|\cdot\|_1$ . Por otra parte,  $WE(F_2, F_3)$  es el rectángulo sombreado con vértices opuestos  $a_2$  y  $a_3$ .

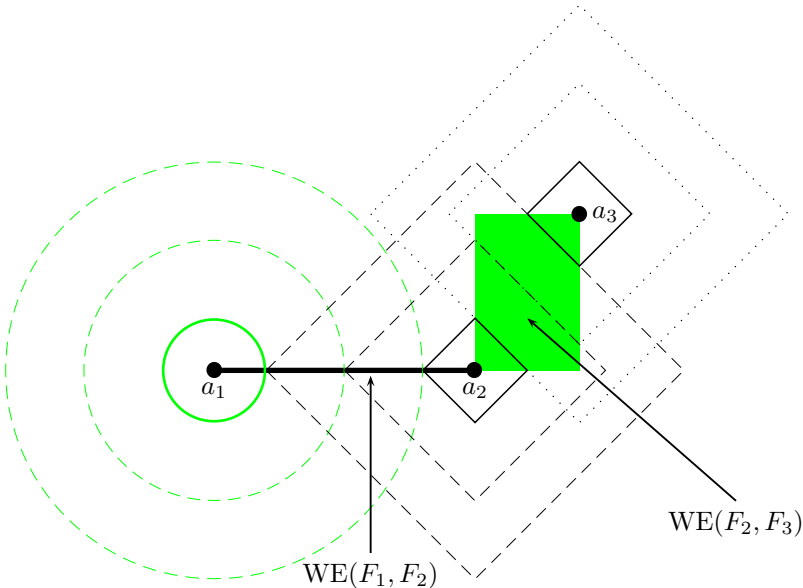


Figura 12: Ilustración del ejemplo 5.1.

Usando las caracterizaciones precedentes, se obtiene una descripción geométrica del conjunto  $\text{WE}(F_1, F_2, F_3)$ . El próximo resultado muestra que el conjunto solución del problema 3-criterio es una especie de envolvente definida por el conjunto de soluciones biobjetivo.

Sea

$$\text{WE}(2) := \bigcup_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} \text{WE}(F_i, F_j)$$

(la unión de todas las cadenas bicriterio para los tres criterios  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  considerados).

### Teorema 5.2

$$\text{WE}(F_1, F_2, F_3) = \text{encl}(\text{WE}(2))$$

donde  $\text{encl}(\text{WE}(2))$  es la región acotada rodeada por  $\text{WE}(2)$  unión con  $\text{WE}(2)$ .

El lector interesado puede encontrar la demostración en [38].

**Nota 5.2** Nótese que  $\text{encl}(\text{WE}(2))$  está bien definida porque  $\text{WE}(2)$  es conexo (ver [43]). Además, esta región puede ser equivalentemente definida como el conjunto de puntos tales que si  $x \in \text{encl}(\text{WE}(2)) \setminus \text{WE}(2)$  no existe una curva continua  $c(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$  con  $c(0) = x$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|c(t)\| = +\infty$ , tal que  $c(t) \notin \text{WE}(2)$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$ .  $\square$

Como ilustración de los resultados anteriores se muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.2** Sean  $a_1 = (0, 0)$ ,  $a_2 = (3, -1)$ ,  $a_3 = (3, 3)$  y las funciones  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  tales que,

$$\begin{aligned} L_{\leq}(F_1, 1) &= \left\{ (x_1, x_2) : \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1 \right\} \\ L_{\leq}(F_2, 1) &= \left\{ (x_1, x_2) : (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 1 \right\} \\ L_{\leq}(F_3, 1) &= \left\{ (x_1, x_2) : \frac{(x_1 - 3)^2}{9} + \frac{(x_2 - 3)^2}{4} \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Es inmediato que estas tres funciones son convexas e inf-compactas. Por consiguiente, aplicando los resultados previos se obtiene que el conjunto  $\text{WE}(F_1, F_2, F_3)$  es la región delimitada por las curvas que unen  $a_1$  con  $a_3$ ,  $a_1$  con  $a_2$  y el segmento que une  $a_2$  con  $a_3$  en la figura 13.

Los resultados anteriores nos permiten demostrar el que sigue, que proporciona una caracterización geométrica del problema general con  $k$  objetivos.

### Teorema 5.3

$$\text{WE}(F_1, \dots, F_k) = \bigcup_{i,j,\ell \in \{1, \dots, k\}} \text{WE}(F_i, F_j, F_\ell)$$

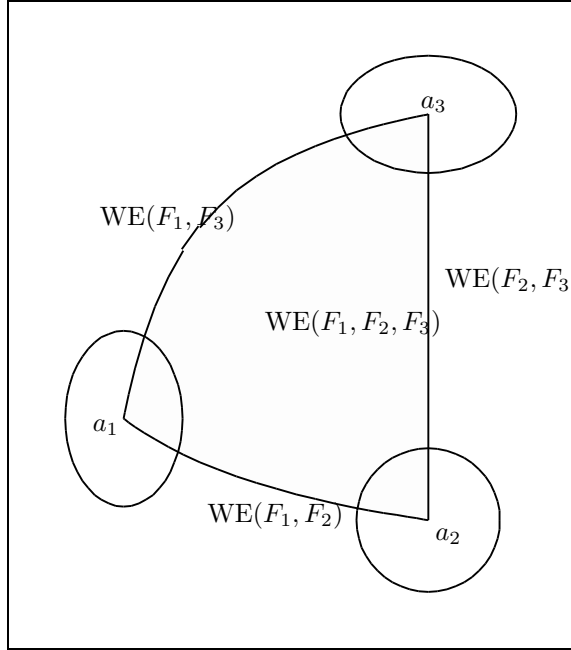


Figura 13: Ilustración del ejemplo 5.2.

**Demostración:**

Por el teorema 5.1,  $\hat{x} \in WE(F_1, \dots, F_k)$  si y sólo si  $\bigcap_{1 \leq i \leq k} L_{<}(F_i, F_i(\hat{x})) = \emptyset$ . Aplicando el teorema de Helly (ver [39]), esta intersección es vacía si y sólo si existen  $i, j, \ell \in \{1, \dots, k\}$  tales que  $L_{<}(F_i, F_i(\hat{x})) \cap L_{<}(F_j, F_j(\hat{x})) \cap L_{<}(F_\ell, F_\ell(\hat{x})) = \emptyset$  y esto es equivalente a  $\hat{x} \in WE(F_i, F_j, F_\ell)$ . Esto prueba que

$$WE(F_1, \dots, F_k) \subseteq \bigcup_{i, j, \ell \in \{1, \dots, k\}} WE(F_i, F_j, F_\ell).$$

Puesto que en cualquier caso se tiene que

$$\bigcup_{i, j, \ell \in \{1, \dots, k\}} WE(F_i, F_j, F_\ell) \subseteq WE(F_1, \dots, F_k),$$

el resultado es cierto. □

**Ejemplo 5.3** (Ver figura 14) Sean  $a_1 = (7, 5)$ ,  $a_2 = (18, 2'5)$ ,  $a_3 = (22, 6'5)$ ,  $F_1(x) = \|x - a_1\|_\infty$ ,  $F_2(x) = \|x - a_2\|_1$  y  $F_3(x) = \|x - a_3\|_1$ . Por el teorema 5.1,  $WE(F_1, F_2)$  es el camino en negrita que une  $a_1$  y  $a_2$ ,  $WE(F_1, F_3)$  es el camino en negrita uniendo  $a_1$  y  $a_3$ , y  $WE(F_2, F_3)$  es el cuadrado sombreado con  $a_2$  y  $a_3$  como extremos opuestos. De esta forma, por el teorema 5.2,  $WE(F_1, F_2, F_3)$



es la región sombreada que encierra la unión de los tres conjuntos definidos previamente. Nótese que este conjunto es unión de convexos elementales de dimensión completa.

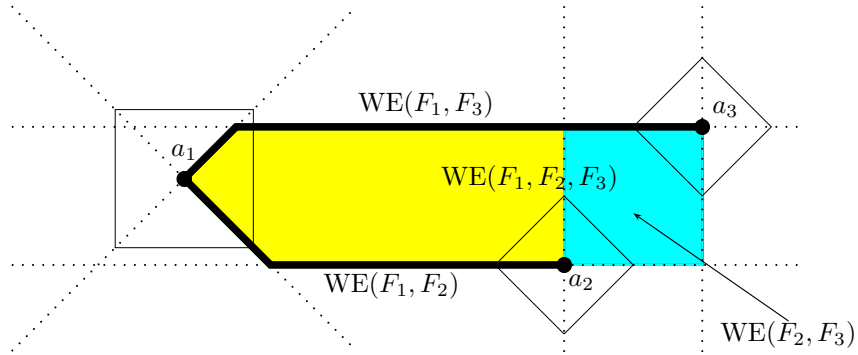


Figura 14: Ilustración del ejemplo 5.3.

## 6 Conclusión

En este trabajo se han revisado problemas de localización continua de tres tipos, cuya generalidad incluye como casos particulares un gran número de modelos clásicos considerados en la literatura. En cada caso se ha presentado el modelo matemático y se han estudiado propiedades que permiten caracterizar su conjunto solución. En la presentación se ha utilizado una amplia bibliografía que permitirá al lector interesado profundizar en el estudio de la Teoría de Localización.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos del Ministerio de Ciencia y Tecnología BFM2001-2378 y BFM2001-4028.

## Referencias

- [1] ATTOUCH H. *Variational Convergence for Functions and Operators*, Pitman Advanced Publishing Program, 1984.
- [2] BAUER F.L., STOER J., AND WITZGALL C. Absolute and monotonic norms, *Numer. Math.*, 3:257–264, 1961.

- [3] CARRIZOSA E., CONDE E., FERNÁNDEZ F.R. AND PUERTO J. Efficiency in euclidean constrained location problems, *Oper. Res. Letters*, 14: 291–295, 1993.
- [4] E. CARRIZOSA, E. CONDE, F.R. FERNÁNDEZ, AND J. PUERTO. An axiomatic approach to the cent-dian criterion, *Location Science*, 2:165–171, 1994.
- [5] CARRIZOSA E., CONDE E., FERNÁNDEZ F.R. AND PUERTO J. Efficiency in spatial location problems with non convex constraint, *J. Global Optimization*, 6:77–86, 1995.
- [6] CARRIZOSA E. AND PUERTO J. A discretizing algorithm for location problems, *European J. Oper. Research*, 80:166–174, 1995.
- [7] CARRIZOSA E. AND PLASTRIA F. A characterization of efficient points in constrained location with regional demand, *Oper. Res. Letters*, 19, 3:129–134, 1996.
- [8] CROUZEIX J.P. AND KEBBOUR R. On the convexity of some simple functions of ordered samples, *Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science (JORBEL)*, 36, 1:11–25, 1996.
- [9] DREZNER Z. *Facility Location. A Survey of Applications and Methods*, Springer Series in Operations Research, 1995.
- [10] DREZNER Z. AND HAMACHER H.W. *Facility Location. Applications and Theory*. Springer–Verlag, Berlin 2002.
- [11] DURIER R. On pareto optima, the Fermat-Weber problem and polyhedral gauges, *Math. Programming*, 47:65–79, 1990.
- [12] DURIER R. AND MICHELOT C. Geometrical properties of Fermat-Weber problem, *European J. Oper. Research*, 20:332–343, 1985.
- [13] DURIER R. A general framework for the one center location problem, in “*Advances in Optimization, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*”, 382:441–457, Springer Verlag, Heidelberg 1992.
- [14] DURIER R. The general one center location problem, *Math. Oper. Research*, 20:400–414, 1995.
- [15] DURIER R. AND MICHELOT C. Set of efficient points in a normed space, *J. Math. Anal. and Appl.*, 117:506–528, 1986.
- [16] FRANCIS R.L., MCGINNIS L.F. AND WHITE, J.A. *Facility Layout and Location: An Analytical Approach*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York 1992.
- [17] HALPERN J. The location of a centdian convex combination on a undirected tree, *J. Regional Science*, 16:237–245, 1976.

- [18] HAMACHER H.W. AND NICKEL S. Multicriteria planar location problems, *European J. Oper. Research*, 94:66–86, 1996.
- [19] HANSEN P., PERREUR J. AND THISSE J.F. Location theory, dominance and convexity: some further results, *Oper. Research*, 28, 5:1241–1250, 1980.
- [20] HARDY G. H., LITTLEWOOD J. E. AND PÓLYA, G. *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge 1952.
- [21] HIRIART-URRUTY J.B. AND LEMARÉCHAL C. *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*. Springer-Verlag, Berlin 1993.
- [22] IOFFE A.D. AND TIHOMIROV V.M. *Theory of Extremal Problems*, North-Holland, Amsterdam-New York 1979.
- [23] KALCSICS J., NICKEL S., PUERTO J. AND TAMIR, A. Algorithmic results for ordered median problems, *Oper. Res. Letters*, 30, 3:149–158, 2002.
- [24] LOVE R.F., MORRIS J.G. AND WESOLOWSKY G.O. *Facilities Location: Models and Methods*, North Holland, New York 1988.
- [25] NDIAYE M. AND MICHELOT C. Efficiency in constrained continuous location. *European J. Oper. Research*, 104, 2:288–287, 1998.
- [26] NICKEL S., PUERTO J. AND RODRÍGUEZ-CHÍA A.M. An approach to location models involving sets as existing facilities. *Mathematics of Oper. Research*, 28, 4:693–715.
- [27] NICKEL S., PUERTO J. AND RODRÍGUEZ-CHÍA A.M. *MCDM Location Problems*. Kluwer Academic Publishers, aparecerá.
- [28] NICKEL S., PUERTO J., RODRÍGUEZ-CHÍA A.M., AND WEISSLER A. *Multicriteria ordered Weber problems*, Technical Report, University of Kaiserslautern, Report in Wirtschaftsmathematik No. 53, 1999
- [29] PELEGRÍN R. AND FERNÁNDEZ F.R. Determination of efficient points in multiple-objective location problems. *Naval Research Logistics*, 35:697–705, 1988.
- [30] PLASTRIA F. Localization in single facility location. *European J. Oper. Research*, 18:215–219, 1984.
- [31] PUERTO J. AND FERNÁNDEZ F.R. The symmetrical single facility location problem, *preprint*. Universidad de Sevilla, 1995.
- [32] PUERTO J. *Lecturas en Teoría de Localización*. Secretariado de Publicaciones, Universidad de Sevilla, 1996.
- [33] PUERTO J. AND FERNÁNDEZ F.R. A convergent approximation scheme for efficient sets of the multicriteria Weber location problem, *TOP*, 6, 2:195–204, 1998.

- [34] PUERTO J. AND FERNÁNDEZ F.R. Multicriteria Weber location problems, *J. Multicriteria Decision Anal.*, 18:268–280, 1999.
- [35] PUERTO J. AND FERNÁNDEZ F.R. Geometrical properties of the symmetrical single facility location problem, *J. Nonlinear Convex Anal.*, 3:321–342, 2000.
- [36] REVELLE C., COHON J.L. AND SHOBRY D. Multiple objectives in facility location: A review, *Lecture Notes in Economics and Math. Systems*, 190:320–337, Springer-Verlag, 1981.
- [37] RODRÍGUEZ-CHÍA A.M., NICKEL S., PUERTO J., AND FERNÁNDEZ F.R. A flexible approach to location problems. *Math. Methods Oper. Research*, 51:69–89, 2000.
- [38] RODRÍGUEZ-CHÍA A.M. AND PUERTO J. Geometrical Description of the Weakly Efficient Solution Set for Multicriteria Location Problem. *Annals of Operations Research*, 111:179–194, 2002.
- [39] ROCKAFELLAR R.T. *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [40] RODRÍGUEZ-CHÍA A.M. Avances del problema de localización continua de un único centro. *Tesis, Universidad de Sevilla 1998*.
- [41] THISSE J.-F. WARD J.E. AND WENDELL R.E. Some properties of location problems with block and round norms, *Oper. Research*, 32:1309–1327, 1984.
- [42] VANDERBEI R.J. *Linear Programming: Foundations and Extensions*, Kluwer Academic Publisher, Second Edition, Boston 2001.
- [43] WARBURTON A.R. Quasiconcave vector maximization: Connectedness of the sets of pareto-optimal and weak Pareto-optimal alternatives, *J. Optim. Theory Appl.*, 40, 4:537–557, 1983.
- [44] WARD, J.E. Structure of efficient sets for convex objectives, *Math. Oper. Research*, 2, 14:249–257, 1989.
- [45] WARD J.E. AND WENDELL R.E. Using block norms for location modelling, *Oper. Research*, 33:1074–1090, 1985.
- [46] WEBER A. “Über den Standort der Industrien”. *Tübingen. Theory of the location of industries*, University of Chicago Press, Chicago 1909.
- [47] WENDELL R.E. AND HURTER A.P. Location theory, dominance and convexity, *Oper. Research*, 21:314–321, 1973.
- [48] WENDELL R.E., HURTER A.P. AND LOWE T.J. Efficient points in location problems. *AIIE Transactions*, 9:238–246, 1977.
- [49] WITZGALL, C. On convex metrics. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 69:175–177, 1965.