Análisis de tareas que pueden promover el desarrollo de la comprensión de la derivada*

Claudio Fuentealba
Universidad Austral de Chile

Gloria Sánchez-Matamoros
Universidad de Sevilla

Edelmira Badillo
Universidad Autónoma de Barcelona

PALABRAS CLAVE
- COMPRENSIÓN
- DERIVADA
- MODOS DE REPRESENTACIÓN
- BACHILLERATO

Uno de los tópicos del análisis matemático que más dificultades muestran a los estudiantes de bachillerato y primeros cursos universitarios es el concepto de derivada. En este trabajo, se presenta una tarea analizada desde las características propias de este concepto matemático, con el propósito de ayudar al profesor a centrar su atención en los aspectos matemáticos relevantes para que el estudiante alcance niveles altos de comprensión de dicho concepto.

El concepto de *derivada*, es sin lugar a dudas, una de las nociones fundamentales de cualquier curso de análisis matemático. Su importancia se ve reflejada en su inclusión en el currículo de bachillerato de diferentes especialidades y en los primeros cursos de carreras universitarias. Artigue (1995) plantea que la enseñanza tradicional de los conceptos relevantes de análisis matemático se centra, mayoritariamente, en una práctica procedimental, basada en la resolución de problemas con cálculos algorítmicos. Este hecho ha tenido y tiene graves consecuencias en la comprensión del concepto de *derivada* por parte de los estudiantes.

Las dificultades y carencias constatadas en la comprensión este concepto se hacen más evidentes cuando la resolución de problemas requiere el uso del significado de la derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o de su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente. Los resultados de investigaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la derivada revelan que, para favorecer niveles altos de comprensión del concepto, es fundamental que el diseño de enseñanza esté basado en la resolución de tareas que requieran del uso del significado de la derivada en distintos modos de representación y las conversiones entre ellos (García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011; Badillo, Azcárate y Font, 2011).

UNA APROXIMACIÓN A LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE *DERIVADA* DESDE LA TEORÍA APOE

Debido a la importancia del concepto de *derivada* y a las dificultades presentes en su comprensión, se han realizado numerosas investigaciones que abordan la problemática desde diversos enfoques teóricos. Uno de ellos es la teoría APOE (Arnon y otros, 2014). Tomando en consideración las ideas de APOE se asume que la comprensión de un concepto matemático por parte de un estudiante se desarrolla a través de un esquema. Un esquema es considerado como una estructura matemática formada por los elementos matemáticos y las relaciones que se establecen entre ellos, y puede ser evocado en la resolución de un problema (García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011)

La comprensión de un concepto matemático por parte de un estudiante se desarrolla a través de un esquema

En relación al esquema de la derivada, la teoría APOE plantea que el esquema crece y se desarrolla pasando por tres niveles de comprensión, intra-inter-trans, que se suceden según un orden fijo y se caracterizan por el grado de construcción de relaciones entre los elementos matemáticos constitutivos del concepto de derivada. Los elementos matemáticos, según García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2011), son de distinta naturaleza y se configuran atendiendo tanto a los modos de representación (analítico y gráfico) como al carácter de dichos elementos (puntual y global). Los elementos matemáticos puntuales son los que hacen referencia a una propiedad específica en un punto. Los elementos matemáticos globales corresponden a una propiedad en un intervalo. Así, para caracterizar el esquema de la derivada es necesario considerar los elementos matemáticos, los modos de representación y las relaciones entre dichos elementos.

Trigueros (2005) considera que niveles altos de comprensión están asociados a la coherencia del estudiante en el uso del esquema cuando resuelven problemas. En este sentido, considera que el estudiante muestra coherencia del esquema cuando es capaz de decidir qué problemas pueden resolverse utilizando el esquema y cuáles no.

Los profesores, en ocasiones, tienen la idea de que la construcción de las relaciones entre los elementos matemáticos que conforman el concepto de *derivada* emerge de manera espontánea; es decir, sin que se promueva explícitamente la reflexión por parte del profesor. Sin embargo, los resultados de investigaciones sobre la comprensión de dicho concepto muestran su complejidad y la necesidad de crear situaciones de enseñanza donde se promueva la construcción de estas relaciones (García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011).

Atendiendo al desarrollo de niveles altos de comprensión de la derivada, la tarea que analizamos a continuación forma parte de una secuencia de enseñanza, basada en investigaciones previas (García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011), que requieren el uso coherente de las relaciones entre los elementos matemáticos en distintos modos de representación y las conversiones entre ellos. Los elementos matemáticos presentes en los procesos de resolución de dichas tareas se esbozan en el cuadro 1.

1. Si $f'(a)=0$, entonces en $x=a$ existe un máximo, un mínimo o un punto de inflexión de f
2. Si f'' es continua en $x=a$, y f tiene un cambio de curvatura en $x=a$ entonces en (a (a, $f(a)$) existe un punto de inflexión
3. Si $f'>0$ en un intervalo I, entonces f es estrictamente creciente en I
4. Si $f'<0$ en un intervalo I, entonces f es estrictamente decreciente en I
5. Si $f'>0$ en un intervalo I, entonces f es convexa en I
6. Si $f''<0$ un intervalo en I, entonces f es cóncava en I

Cuadro 1. Elementos matemáticos puntuales y globales

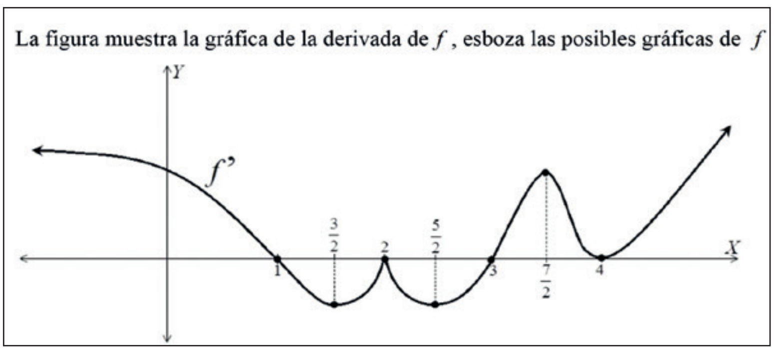
ANÁLISIS DE UNA TAREA

La tarea que se muestra a continuación con enunciado en modo gráfico (cuadro 2), consiste en construir la gráfica de f a partir de la gráfica de f'. La gráfica de f' contempla varios cambios de signo, crecimiento, ceros, puntos de tangencia horizontal y un punto anguloso. El objetivo de la tarea es que se establezcan relaciones entre elementos matemáticos que vinculan los ceros y valores extremos de f' con los valores extremos y puntos de inflexión de f (1 y 2, cuadro 1); el signo de con la monotonía de f (3 y 4, cuadro 1); y el crecimiento de f' con la convexidad de f (5 y 6, cuadro 1).

Una posible resolución de la tarea usando relaciones entre f y f'

Para esbozar la gráfica de la función f, un estudiante de bachillerato puede empezar realizando un cambio de modo de representación (de gráfico a analítico) para obtener información sobre la función. Considerar la posición relativa de la gráfica de f' con respecto al eje X permite obtener información global referente a la monotonía de f; es decir, los intervalos en los que f' queda por encima del eje X se corresponden con los intervalos donde f es estrictamente creciente, y viceversa (3 y 4, cuadro 1). En la gráfica de la tarea, la información obtenida a partir de estos elementos es:

- f' es positiva ($f'>0$) en los intervalos $(-\infty, 1)$, $(3,4)$ y $(4, +\infty)$, por lo tanto f es estrictamente creciente en dichos intervalos.



Cuadro 2. Enunciado de la tarea

- *f’* es negativa (*f’<0*) en los intervalos (1,2) y (2,3), por lo tanto *f* es estrictamente decreciente en dichos intervalos.

El analizar los ceros de *f’* permite obtener información puntual sobre los posibles valores extremos o puntos de inflexión de *f* (1, cuadro 1). En la gráfica de la tarea, la información obtenida a partir de este elemento es:

- *f’* tiene ceros en los puntos de abscisa x=1, x=2, x=3 y x=4, por lo tanto es probable que f tenga un valor extremo o punto de inflexión en dichos puntos.

El establecimiento de relaciones entre los elementos matemáticos anteriores (1, 3 y 4, cuadro 1) permite al estudiante considerar que si *f’* tiene signos distintos a la izquierda y a la derecha del punto de abscisa x=a, entonces en x=a existe un valor extremo de *f*, así como asegurar que, en nuestro caso, f tiene un máximo local en x=1 y un mínimo local en x=3.

Con la información proporcionada por los elementos matemáticos 1, 3 y 4 (cuadro 1), el estudiante esbozará la gráfica del cuadro 3 como una posible gráfica de f. En general, un estudiante de bachillerato considerará que la gráfica realizada es correcta, aunque no lo es, ya que no toma en consideración el estudio de la curvatura de f (vinculado a) en los distintos intervalos de su dominio.

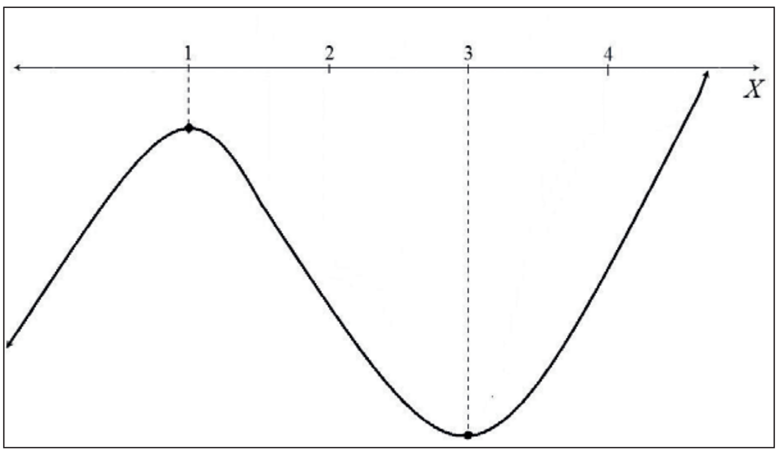
Una posible resolución de la tarea usando relaciones entre *f*, *f’* y *f’’*

Para realizar el esbozo correcto de la gráfica de *f* que pide la tarea, el estudiante deberá inferir el comportamiento de *f’’* a partir de la gráfica de *f’* de la tarea. Los elementos matemáticos que dan información sobre la curvatura de *f* son aquellos que los vinculan con el signo de *f’’*; es decir: en aquellos intervalos en los que *f’’* es positiva, la función es convexa y viceversa (5 y 6, cuadro 1). Si el estudiante quiere obtener información sobre la curvatura de *f*, tendrá que usar la información proporcionada por la gráfica de *f’*. Esto implica considerar *f’’* como la derivada de *f’* y establecer relaciones entre ellas; es decir, en aquellos intervalos en los que *f’* es creciente se debe considerar que *f’’*>0 y, por tanto, se corresponde con intervalos en los que *f* es convexa y, viceversa. En la gráfica de la tarea, la información obtenida a partir de estos elementos es:

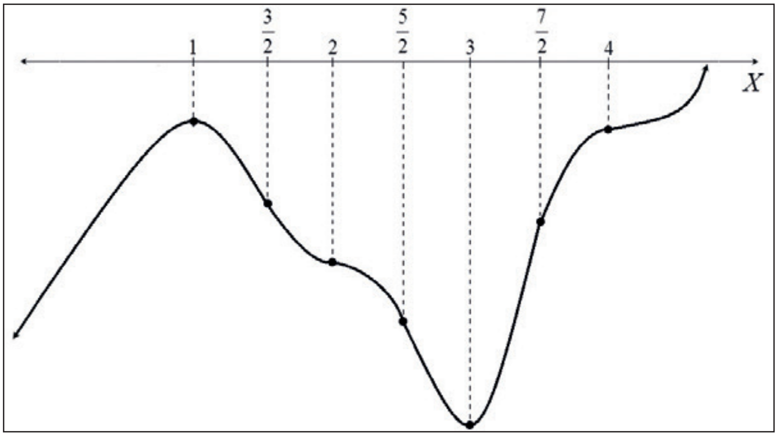
- *f’* es estrictamente decreciente en los intervalos
  $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right),\left(2,\frac{5}{2}\right)$ y $\left(\frac{7}{2},4\right)$,
  luego *f’’*<0, por lo tanto *f* es cóncava en dichos intervalos.
- *f’* es estrictamente creciente en los intervalos
  $\left(\frac{3}{2},2\right),\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$ y $(4,+\infty)$,
  luego *f’’*>0, por lo tanto *f* es convexa en dichos intervalos.

De la información obtenida se desprende que en los puntos de abscisas

$$x=\frac{3}{2},\ x=2,\ x=\frac{5}{2},\ x=\frac{7}{2}$$



Cuadro 3. Esbozo de la gráfica de *f* considerando las relaciones entre *f’* y *f’’*



Cuadro 4. Esbozo de la gráfica de *f* considerando las relaciones entre *f*, *f'* y *f''*

y x=4, hay cambios de curvatura en la función f (2, cuadro 1), de lo que se puede deducir:

- *f* posee puntos de inflexión en $\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right), (2, f(2)), \left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right),$ $\left(\frac{7}{2}, f\left(\frac{7}{2}\right)\right)$, y (4,*f*(4)).

De esta forma, y considerando en conjunto la información proporcionada por las relaciones entre los distintos elementos matemáticos *f*, *f'* y *f''* podemos establecer el siguiente esbozo de la gráfica de *f* que se muestra en el cuadro 4.

Lo que permite al estudiante llegar al esbozo correcto de la gráfica de *f* (cuadro 4) no es solo el establecimiento de relaciones entre *f* y *f'*, sino que también es fundamental coordinar dicha información con el establecimiento de relaciones entre *f'* y *f''*. En esta tarea es fundamental que los estudiantes observen que para poder relacionar *f'* con *f*, debe analizarse necesariamente qué sucede con la relación entre *f'* y *f''*. Por lo tanto, debe considerarse a *f'* como una función y a *f''* como su derivada. Es justamente en la comprensión de estas últimas relaciones en las que el profesor debe focalizar la atención de los estudiantes.

A MANERA DE CONCLUSIÓN

El análisis de esta tarea nos permite inferir la importancia de la gestión del profesor durante la resolución de tareas. El establecimiento de relaciones entre los distintos elementos matemáticos relacionados con *f*, *f'* y *f''* contribuye a que el estudiante consiga una comprensión mayor del concepto de *derivada*. Consideramos que es en la comprensión de las relaciones entre *f'* y *f''* donde el profesor debe focalizar la atención de los estudiantes, ya que el comportamiento habitual del estudiante se relaciona con la obtención de la mayor cantidad de información de *f* a partir de *f'*; lo cual provoca que las interpretaciones de las implicaciones gráficas y analíticas con *f''* no sean comprendidas o tenidas en cuenta en la resolución de tareas por parte de los estudiantes. Esto se constata como un obstáculo para la comprensión del concepto de *derivada* en niveles superiores de enseñanza.

La resolución de este tipo de tareas en el aula, gestionadas por el profesor, contribuye a que se alcancen unos niveles altos de comprensión del concepto de *derivada*. Algunas preguntas complementarias al enunciado durante la resolución de la tarea en el aula, como por ejemplo: a partir de la gráfica de *f'*, ¿podrías obtener alguna información adicional sobre el comportamiento de *f''* ? se podrían plantear para que el estudiante pudiera ver la necesidad de considerar las relaciones entre *f'* y *f''*. ◄

Nota

* AGRADECIMIENTOS: Este trabajo se enmarca en la agenda científica del Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática (GIPEAM); en particular, dentro del Proyecto EDU2012-31464.

Referencias bibliográficas

ARNON, I.; COTTRILL, J.; DUBINSKY, E.; OKTAÇ, A.; FUENTES, S. R.; TRIGUEROS, M.;WELLER, K. (2014): *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Nueva York. Springer.

ARTIGUE, M. (1995): «La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos», en GÓMEZ, P. (ed.): *Ingeniería didáctica en educación matemática.* México. Grupo Editorial Iberoamericano, pp.97-140.

BADILLO, E.; AZCÁRATE, C.; FONT, V. (2011): «Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas». *Enseñanza de Las Ciencias,* núm. 29(2), pp.191-206.

GARCÍA, M.; LLINARES, S.; SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. (2011): «Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures». *International Journal of Science and Mathematics Education*, núm. 9(5), pp.1023-1045.

TRIGUEROS, M. (2005): «La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior». *Educación Matemática,* núm. 17(1), pp. 5-31.

Direcciones de contacto

Claudio Fuentealba
Universidad Austral de Chile
cfuentealba@uach.cr

Gloria Sánchez-Matamoros
Universidad de Sevilla
gsanchezmatamoros@us.es

Edelmira Badillo
Universidad Autónoma de Barcelona
edelmira.badillo@uab.cat

Este artículo fue recibido en UNO: REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS en septiembre de 2015 y aceptado en octubre de 2015 para su publicación.