

*Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n°31(2005), 31–52*

## Sobre la paralelización de problemas elípticos

M. C. CALZADA<sup>1</sup>, I. I. ALBARREAL<sup>2</sup>,  
J. L. CRUZ<sup>1</sup>, E. FERNÁNDEZ-CARA<sup>2</sup>,  
J. R. GALO<sup>1</sup>, M. MARÍN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Universidad de Córdoba, Campus de Rabanales, Ed. C2-3, E-14071 Córdoba

<sup>2</sup> Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, Apto. 1106, 41080 Sevilla

`malcanam@uco.es, iignacio@us.es, jlcruz@uco.es,`  
`cara@us.es, malgasaj@uco.es, merche@uco.es`

### Resumen

En este trabajo se recogen dos de los problemas que aparecen a la hora de resolver numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes. La discretización en la variable temporal en dichas ecuaciones nos conduce, en cada etapa de tiempo, a un problema de Burgers y un problema de Stokes generalizado, en las variables espaciales. La aplicación de un método de punto fijo y un método de tipo gradiente conjugado, respectivamente, nos lleva a la resolución de un elevado número de problemas de tipo Helmholtz. Así, en una primera parte, recordamos un algoritmo paralelo que resuelve numéricamente la ecuación de Helmholtz. Por otro lado, la utilización de diferencias finitas centradas sobre un mismo mallado regular para la velocidad y la presión en la resolución del problema de Stokes puede generar soluciones oscilantes, en particular presiones espúreas. En una segunda parte, por tanto, se presenta un esquema de discretización para el problema de Stokes, demostrándose mediante un análisis asintótico del error que éste regulariza la solución<sup>1</sup>.

---

Fecha de recepción: 31/01/05

<sup>1</sup>Una versión previa de este trabajo aparecerá en las Actas del I Workshop sobre “Recientes Avances en el Análisis y Control de Ecuaciones Diferenciales No Lineales”, celebrado en Córdoba en febrero de 2004.

## 1 Introducción

En la resolución de muchos problemas de gran complejidad, aparecen de forma frecuente ecuaciones de tipo Helmholtz:

$$\alpha u - \beta \Delta u = f \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

siendo  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $f$  una función conocida y  $\Omega$  un dominio acotado bi o tridimensional. La ecuación se completa con condiciones de contorno, que pueden ser de tipo Dirichlet,

$$u = g \quad \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega, \quad (2)$$

de tipo Neumann, Fourier o una mezcla de ambas. Aunque éste es uno de los problemas más conocidos y estudiados, es claro que una pequeña ganancia en el tiempo de resolución de (1) puede en la práctica suponer una gran mejora en el tratamiento de problemas más complejos. Pensemos en las ecuaciones de Navier-Stokes, para las cuales hemos desarrollado varios algoritmos donde este hecho se pone de manifiesto (véase por ejemplo [3, 4]). El método que se presenta sigue la idea de los denominados métodos ADI (*Alternating Directions Implicit methods*). Estos métodos fueron formulados inicialmente por Peaceman y Rachford [15] en el caso bidimensional y por Douglas y Rachford [7] en el caso tridimensional y, posteriormente, fueron generalizados al caso  $N$ -dimensional por Douglas y Gunn [6]. Para describir la idea de estos métodos, consideremos por ejemplo el problema de Helmholtz (1)–(2). Consideremos fijados una descomposición del operador  $L = \alpha I - \beta \Delta$  en la forma

$$L = L_1 + L_2 \quad \text{con} \quad L_n = \frac{\alpha}{2} I - \beta \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (n = 1, 2) \quad (3)$$

y un esquema en diferencias finitas centradas con paso de discretización  $h$  en las dos direcciones espaciales. Un método de paso fraccionado (de tipo de Peaceman-Rachford) para esta descomposición es un método iterativo que comienza con  $U^0$  arbitrario y, para  $m \geq 0$ , calcula  $U^{m+1}$  en dos pasos. Así, para  $U^m$  dado, primero se obtiene  $U^{m+\frac{1}{2}}$  como solución de

$$(I + \tau A_1) U^{m+\frac{1}{2}} = \tau f + (I - \tau A_2) U^m \quad (4)$$

y en segundo lugar se resuelve

$$(I + \tau A_2) U^{m+1} = \tau f + (I - \tau A_1) U^{m+\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Aquí,  $\tau > 0$ , y  $A_n$  es la matriz correspondiente a la discretización del operador  $L_n$ <sup>2</sup>. Así, en el primer paso se resuelve un problema discreto correspondiente al operador

$$\frac{\alpha}{2} I - \beta \frac{\partial^2}{\partial x_1^2},$$

---

<sup>2</sup>Por simplicidad, hemos denotado de nuevo  $f$  la función discretizada.

es decir, un problema en la dirección  $x_1$ . Análogamente, en el segundo paso se resuelve un problema en la dirección  $x_2$ . Esto es lo que motiva el nombre de **método de direcciones alternadas**. Con una adecuada ordenación de los nodos del mallado, se consigue que las matrices  $I + \tau A_n$  ( $n = 1, 2$ ) sean diagonales por bloques, siendo cada bloque una matriz tridiagonal. Esta idea se puede aplicar, en general, a la hora de resolver un sistema algebraico

$$Au = f \quad (6)$$

resultante (por ejemplo) de la discretización de un problema elíptico, siempre que la matriz  $A$  se pueda descomponer en la forma<sup>3</sup>

$$A = \sum_{n=1}^p A_n, \quad (7)$$

siendo las matrices  $A_n$  ( $1 \leq n \leq p$ ) más fáciles de invertir que la propia  $A$ . Esta generalización da lugar a los llamados **métodos de descomposición** o **métodos secuenciales de paso fraccionado** (véase [13]). En este caso, para  $m \geq 0$ , conocido  $U^m$ , el cálculo de  $U^{m+1}$  se realiza resolviendo los siguientes sistemas:

$$\frac{U^{m+\frac{1}{p}} - U^m}{\tau_m} + A_1 \left( U^{m+\frac{1}{p}} - U^m \right) = -\alpha \left( \sum_{n=1}^p A_n U^m - f \right), \quad (8)$$

$$\frac{U^{m+\frac{n}{p}} - U^{m+\frac{n-1}{p}}}{\tau_m} + A_n \left( U^{m+\frac{n}{p}} - U^m \right) = 0, \quad n = 2, \dots, p$$

siendo  $\alpha > 0$  y  $\{\tau_m\}$  una sucesión de parámetros reales. Como acabamos de ver, los métodos de paso fraccionado (8) son algoritmos iterativos *secuenciales*, en los que cada iteración se subdivide en  $p$  pasos que se realizan sucesivamente según el esquema:

$$U^m \rightarrow U^{m+\frac{1}{p}} \rightarrow U^{m+\frac{2}{p}} \rightarrow \dots \rightarrow U^{m+\frac{p-1}{p}} \rightarrow U^{m+1}. \quad (9)$$

Es decir, hasta que no se calcula  $U^{m+\frac{i}{p}}$  no se puede calcular  $U^{m+\frac{i+1}{p}}$ . Por ello, la paralelización de estos algoritmos sólo puede llevarse a cabo al más bajo nivel, a la hora de resolver los sistemas (ver por ejemplo [18] y [11]). Nosotros abordamos la resolución de los problemas de Helmholtz generalizando y ampliando a dominios arbitrarios un método introducido por Lu y otros [12] formulado para problemas con condiciones de tipo Dirichlet y para dominios que resultan de la unión de rectángulos. Nuestro objetivo global es desarrollar un esquema numérico que permita la paralelización al nivel de las variables espaciales. Este método, que denominamos **método implícito de direcciones simultáneas** o **SDI** (*Simultaneous Directions Implicit method*), descompone

<sup>3</sup>En general,  $p$  no tiene porqué coincidir con la dimensión  $N$  en la que se trabaje.

el problema original, independientemente de la dimensión espacial del dominio en el que esté formulado, en un conjunto de problemas unidimensionales. Se sustituye así un problema en derivadas parciales por una familia de problemas diferenciales ordinarios todos ellos con la misma estructura y por tanto con las mismas dificultades numéricas, independientemente de la dimensión espacial en la que se trabaje. Además, los problemas resultantes son independientes entre sí y pueden resolverse en paralelo. El método SDI que hemos desarrollado es aplicable a dominios  $\Omega$  arbitrarios. En [17] se aplica en el caso bidimensional, efectuándose previamente una “rectificación” del abierto  $\Omega$ , de tal manera que se aproxima el dominio original por una unión de rectángulos. En nuestro caso no se efectúa esta rectificación y el mallado se construye a partir de una retícula ortogonal de partición arbitraria, admitiendo todo tipo de condiciones de contorno. Para ello se ha desarrollado un mallador (ver [9]), tanto en el caso 2D como en el 3D, que permite disponer de una estructura de datos que contribuye a una mayor eficiencia del método. El método es económico en sus necesidades de almacenamiento, por lo que es compatible con problemas de gran talla. Además, en [9] se demuestra su carácter “smoother”, que explica que se adapte muy bien al uso de técnicas multigrad para acelerar la convergencia sea cual sea la geometría del dominio considerado. Aquí solo expondremos el algoritmo paralelo propuesto cuando la ecuación de Helmholtz se completa con condiciones de contorno de tipo Dirichlet. La consideración de otro tipo de condiciones de contorno rompe en general, con fronteras no necesariamente paralelas a los ejes coordenados, la independencia por direcciones al ser condiciones netamente interespaciales. En [9] se encuentra desarrollada una técnica válida para condiciones de otro tipo. Ésta consiste en un método iterativo que inicialmente necesita la resolución de una sucesión de problemas con condiciones de Dirichlet y posteriormente se reduce a la aplicación del método SDI a un único problema con condiciones de Dirichlet dependientes de la iteración. Recientemente se ha demostrado la convergencia de este método. Hay que destacar que la resolución de los problemas de Helmholtz con condiciones de Neumann tiene interés no sólo por sí misma, sino también cuando se buscan preconditionadores que permiten acelerar la convergencia del gradiente conjugado al aplicar éste, por ejemplo, a la resolución de un problema de Stokes. Como es de preveer, disponer de un método paralelo eficiente para la resolución de los problemas de Helmholtz conduce a una notable mejora en la resolución de problemas más complejos, como puede ser el caso de los problemas de Stokes o Navier-Stokes. En nuestro caso, para resolver el problema de Stokes, reformulamos éste como un problema de mínimos al que aplicamos un método iterativo de tipo gradiente conjugado propuesto en [10] y [5]. Este método conduce a la resolución de un gran número de problemas de Helmholtz y/o Poisson. Por lo tanto, disponemos de una manera de **resolver un problema de Stokes  $N$ -dimensional exclusivamente a partir de problemas unidimensionales independientes** (problemas diferenciales ordinarios), con igual esquema de resolución y dificultad numérica independientemente de la dimensión del problema original. Se observa entonces que la paralelización del método es posible a tres niveles, respectivamente correspondientes a la

descomposición de los problemas vectoriales por componentes y a los dos niveles de paralelización implícitos al método SDI. En [5], se resuelven los problemas de Helmholtz y Poisson discretizando por elementos finitos, usándose un mallado el doble de fino para las velocidades que para la presión, al objeto de verificar la condición *inf-sup*. En nuestro caso, discretizamos los problemas unidimensionales resultantes utilizando diferencias finitas y el mismo mallado para todas las incógnitas. Esto hace que no se verifique la condición *inf-sup*, lo que provoca la aparición de presiones *espúreas*, que disminuyen la precisión de la aproximación de la presión calculada sin que la aproximación de la velocidad tenga que verse afectada. Las presiones espúreas se manifiestan en la representación gráfica de las isobaras como líneas de contorno con oscilaciones. En la práctica, según la discretización que se efectúe, el tipo de “test” considerado y el carácter de su solución, puede que explícitamente no se observe la presencia de las mismas. En la sección 3.2 efectuaremos un análisis de esta dificultad introduciendo el desarrollo asintótico del error cometido y siguiendo la metodología propuesta por Wetton [19] en su estudio del método de proyección. Wetton explica la causa de la aparición de presiones espúreas en base a la existencia de “errores alternantes” unidireccionales. Aquí realizaremos un análisis similar, contemplando la existencia de estos errores pero con un carácter multidireccional. Identificaremos los modos espúreos y, de esta manera, podremos buscar el filtrado adecuado para las presiones que haga que las oscilaciones se reduzcan. Este filtrado (ver [9]) se realiza siguiendo cada una de las direcciones espaciales, manteniendo el esquema conceptual establecido de reducir todo el tratamiento a problemas unidimensionales.

## 2 Un esquema paralelo para la ecuación de Helmholtz

Como acabamos de ver, los métodos de paso fraccionado (8) son algoritmos iterativos *secuenciales*, en los que cada iteración se subdivide en  $p$  subetapas que se realizan sucesivamente. En [12], Lu et al. proponen un esquema de descomposición para la resolución de (6) en el que los pasos fraccionados son independientes entre sí. A partir de una descomposición de la matriz  $A$  dada por (7) y de un parámetro  $\tau > 0$ , el paso de  $U^m$  a  $U^{m+1}$  se realiza calculando  $U^{m+1,n}$  ( $1 \leq n \leq p$ ) a partir de

$$(I + \tau A_n) U^{m+1,n} = \left( I - \tau \sum_{k=1, k \neq n}^p A_k \right) U^m + \tau f, \quad n = 1, \dots, p, \quad (10)$$

y haciendo, posteriormente,

$$U^{m+1} = \frac{\omega}{p} \sum_{n=1}^p U^{m+1,n} + (1 - \omega) U^m, \quad (11)$$

donde  $\omega$  es un parámetro dado. Se trata de un método de descomposición en el cual los  $p$  pasos fraccionados pueden resolverse simultáneamente y la

paralelización se realiza a un nivel más alto, siendo esto mucho más interesante y efectivo. A este método lo denominaremos **método paralelo de paso fraccionado** o **PFS** (*Parallel Fractional Step method*). Esquemáticamente puede representarse como sigue:

$$U^m \begin{array}{c} \swarrow \\ \dots \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} U^{m+1,1} \\ \dots \\ U^{m+1,p} \end{array} \begin{array}{c} \swarrow \\ \dots \\ \searrow \end{array} U^{m+1} \quad (12)$$

Cuando se aplica este método al problema de Helmholtz-Dirichlet  $N$  dimensional

$$\begin{cases} Lu = \alpha u - \beta \Delta u = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (13)$$

considerando la siguiente descomposición del operador

$$L = \sum_{n=1}^N L_n = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\alpha}{N} I - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right),$$

se tiene que, en cada paso (10) se resuelven  $N$  problemas independientes correspondiente cada uno de ellos al operador

$$\frac{\alpha}{N} I - \beta \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

al igual que sucedía con el método ADI pero, en este caso, los cálculos se hacen en todas las direcciones simultáneamente. De aquí que a este método lo denominemos **método implícito de direcciones simultáneas** o **SDI** (*Simultaneous Directions Implicit method*)<sup>4</sup>. Como ya indicamos en el método ADI, la descomposición elegida es conveniente, ya que las matrices resultantes  $I + \tau A_n$  son más fáciles de invertir que la matriz  $A$  del problema original. En este caso, la obtención de cada  $U^{m+1,n}$  puede efectuarse resolviendo en paralelo  $s$  sistemas independientes con  $s$  del orden de  $h^{-1}$ , lo que se corresponde con la resolución simultánea en cada una de las líneas del mallado en la dirección  $x_n$ . Se tienen por tanto dos niveles de paralelismo que conducen a  $N \cdot s$  posibles procesos simultáneos y, dado que  $s$  es un número elevado al ser en la práctica  $h$  pequeño, obtenemos un algoritmo con un alto índice de paralelización. Además, los problemas a resolver para la obtención de las  $U^{m+1,n}$  tienen todos la misma estructura y presentan idénticas dificultades numéricas. Los métodos paralelos de paso fraccionado en general y los SDI en particular, según la descripción (10)–(11) efectuada, dependen de dos parámetros (que pueden variar en cada iteración en el caso no estacionario); el parámetro  $\tau$  denominado **parámetro de evolución** y el parámetro  $\omega$ , conocido como **parámetro de coordinación**. En [9] se encuentra un estudio exhaustivo de los valores de estos parámetros,

<sup>4</sup>En general, llamaremos métodos SDI a los métodos paralelos de paso fraccionado aplicados a problemas en los que en cada  $L_n$  intervengan derivadas en una única dirección.

que hacen que el método sea convergente y además su velocidad de convergencia sea lo mayor posible. En [1] aparece un estudio del error para un caso particular del algoritmo totalmente discretizado.

## 2.1 Resolución efectiva

En esta sección efectuamos un análisis de los elementos necesarios para la resolución efectiva de los problemas de tipo Helmholtz-Dirichlet.

### Mallado

Como es natural, para la resolución del problema (13) efectuaremos una discretización espacial. A partir de una retícula cartesiana  $R(\Delta)$ , obtenemos un mallado de Dirichlet  $M(\Delta) = M_1(\Delta) \cup \dots \cup M_N(\Delta)$ , de nodos  $N(\Delta) = N_I(\Delta) \cup N_F(\Delta)$ , donde  $N_I(\Delta)$  contiene los nodos interiores,  $N_F(\Delta)$  contiene los nodos frontera y

$$M_n(\Delta) = \bigcup_{j=1}^{M_n} \left( \bigcup_{l=1}^{\tilde{n}(n,j)} I_n^{j,l} \right), \quad 1 \leq n \leq N,$$

siendo  $I_n^{j,l} = ((a_l), (b_l))$  un segmento de  $\mathbb{R}^N$  en la dirección espacial  $e_n$  isomorfo al intervalo de  $\mathbb{R}$   $(a_l, b_l)$ . En las Figuras 1 y 2, aparece un ejemplo de  $M(\Delta)$  para un dominio bidimensional y en la Figura 3 un dominio tridimensional análogo.

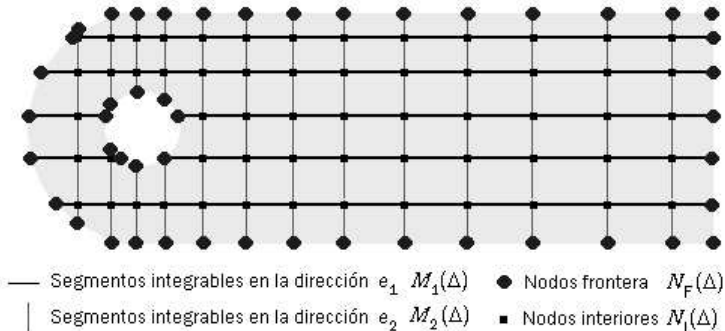


Figura 1: Un mallado  $M(\Delta) = M_1(\Delta) \cup M_2(\Delta)$ , para un dominio bidimensional.

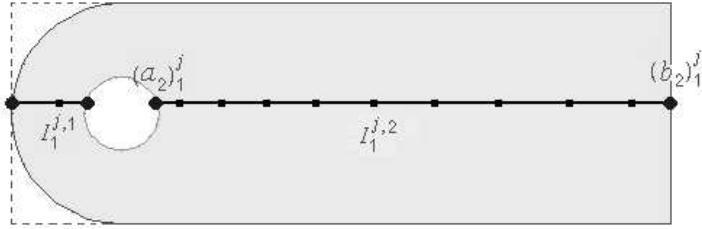


Figura 2: Dos segmentos integrables en la dirección  $e_1$ .

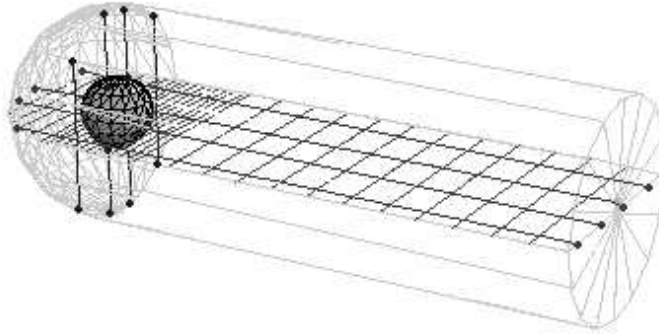


Figura 3: Algunos segmentos integrables en un dominio 3D.

### Detalle del algoritmo

#### \* Etapa de resolución

La etapa de resolución del algoritmo (10), aplicada al problema (13), se corresponde con  $N$  subproblemas del tipo

$$\begin{cases} (\mathbf{I} + \tau \mathbf{L}_n) u^{m+1,n} = \left( \mathbf{I} - \tau \sum_{k=1, k \neq n}^N \mathbf{L}_k \right) u^m + \tau f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u^{m+1,n} = g & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \quad (14)$$

donde  $\mathbf{L}_n = \frac{\alpha}{N} \mathbf{I} - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ ,  $1 \leq n \leq N$  y  $u^m$  es conocida. Para el mallado  $M(\Delta)$ , como  $\mathbf{L}_n$  es unidimensional, para cada uno de los problemas (14) se tiene el correspondiente problema discreto

$$\begin{cases} (\mathbf{I} + \tau \delta_n) U^{m+1,n} = \left( \mathbf{I} - \tau \sum_{k=1, k \neq n}^N \delta_k \right) U^m + \tau f & \text{en } M_n(\Delta), \\ U^{m+1,n} = g & \text{en } N_F(\Delta), \end{cases} \quad (15)$$

donde  $\delta_n$  es el operador discreto correspondiente a  $\mathbf{L}_n$ . Dado que las condiciones de contorno son de tipo Dirichlet, (15) es un conjunto de problemas



independientes<sup>5</sup>

$$\begin{cases} (I + \tau\delta_n)U^{m+1,n} = \left(I - \tau \sum_{k=1, k \neq n}^N \delta_k\right)U^m + \tau f & \text{en } I_n^{j,l} = ((a_l), (b_l)), \\ U^{m+1,n}((a_l)) = g((a_l)), & U^{m+1,n}((b_l)) = g((b_l)), \end{cases} \quad (16)$$

definidos en cada uno de los segmentos integrables  $I_n^{j,l}$  que constituyen  $M_n(\Delta)$ . A su vez, cada problema (16) es un problema discreto correspondiente a un problema de contorno ordinario (unidimensional) en la variable  $x_n$  del tipo

$$\begin{cases} \left(1 + \tau \frac{\alpha}{N}\right)v - \tau\beta v'' = \tilde{f} & \text{en } (a_l, b_l), \\ v(a_l) = v_a, & v(b_l) = v_b, \end{cases} \quad (17)$$

donde  $v''$  es la segunda derivada en la variable  $x_n$  y  $\tilde{f}$  es un segundo miembro genérico. Así pues,  $U^{m+1,n}$  en (16) queda determinada mediante la resolución de, al menos,  $M_n$  problemas de contorno ordinarios del tipo (17), cada uno de ellos en el correspondiente intervalo de  $\mathbb{R}$ , isomorfo al segmento integrable  $I_n^{j,l} \in M_n(\Delta)$ . Haciendo  $n = 1, \dots, N$ , vemos que (16) es una familia de, al

menos,  $M = \sum_{n=1}^N M_n$  problemas del tipo (17). Todos ellos poseen la misma estructura y, por tanto, presentan igual dificultad numérica. Además, son independientes entre sí por lo que pueden teóricamente resolverse de forma simultánea. Hagamos notar que  $M$  es un número relativamente grande, ya que depende del número de puntos de las particiones consideradas en cada dirección espacial. Así pues, se tiene un alto nivel de paralelismo posible.

\* *Etapa de coordinación*

Determinadas las  $U^{m+1,n}$ , con  $n = 1, \dots, N$ , en los nodos  $N(\Delta)$  del mallado, la etapa de coordinación del algoritmo (11) es también un proceso paralelizable ya que el cálculo

$$U^{m+1}(P) = \frac{\omega}{N} \sum_{n=1}^N U^{m+1,n}(P) + (1 - \omega)U^m(P) \quad (18)$$

se puede realizar de forma simultánea para cada  $P \in N(\Delta)$ . Esta etapa de coordinación es realmente la que nos obliga a utilizar una retícula cartesiana como base para la construcción del mallado.

\* *“Test” de parada*

El “test” de parada considerado en el proceso iterativo es:

$$\|U^m - U^{m+1}\|_\infty = \max_{x \in N(\Delta)} |U^m(x) - U^{m+1}(x)| < \varepsilon,$$

donde  $\varepsilon$  es una tolerancia dada.

<sup>5</sup>La matriz del problema discreto es una matriz diagonal por bloques.

## 2.2 Resultados numéricos

En este apartado se presentan los resultados obtenidos al aplicar el método SDI a los siguientes problemas “test”:

- Un problema bidimensional ( $N = 2$ ). Se ha resuelto el problema (13) en  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  con  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  y  $f \equiv 2$ . La solución exacta viene dada por

$$u(x_1, x_2) = \sinh(\pi x_1) \operatorname{sen}(\pi x_2) + x_1(1 - x_1).$$

- Un problema tridimensional ( $N = 3$ ). En este caso  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  y  $f \equiv 4$ . La solución exacta es la función

$$u(x_1, x_2, x_3) = \sinh(\pi x_1) \operatorname{sen}(\pi x_2) + \sinh(\pi x_1) \operatorname{sen}(\pi x_3) \\ + x_1(1 - x_1) + x_3(1 - x_3).$$

Las condiciones de contorno impuestas en ambos casos se deducen a partir de la restricción de la solución a  $\partial\Omega$ . Aunque, como ya indicamos, el algoritmo es aplicable a dominios arbitrarios, hemos considerado aquí los casos más sencillos, un cuadrado y un cubo, con objeto de poder obtener un análisis comparativo para diferentes particiones regulares, ya que el tamaño de los problemas unidimensionales (número de puntos de la partición en cada intervalo) y el número de éstos, tiene una incidencia directa en los resultados obtenidos. El algoritmo ha sido implementado en un ordenador SGI Origin 2000 con 8 procesadores, utilizando el modelo de computación paralela del Consorcio OpenMP. La versión de las herramientas de paralelización utilizadas no admite regiones paralelas anidadas, por lo que no se ha podido aprovechar todo el paralelismo inherente al método descrito. Es de esperar, por tanto, que los resultados que se presentan puedan mejorarse. Para medir el comportamiento del algoritmo paralelo se introducen dos parámetros, la ganancia en velocidad  $S_{NP}$ , definida por

$$S_{NP} = \frac{\text{Tiempo de resolución con 1 procesador}}{\text{Tiempo de resolución con NP procesadores}}$$

y la eficiencia

$$\eta = \frac{S_{NP}}{NP},$$

que representa la ganancia en velocidad por procesador. Idealmente, si todo el código se ejecutara en paralelo, la ganancia en velocidad debería coincidir con el número de procesadores empleados. Pero siempre hay un fracción que se debe ejecutar en forma secuencial, lo que hace que este ideal teórico nunca se alcance en la práctica. En las Figuras 4 y 5 se muestran la ganancia en velocidad y la eficiencia correspondiente a los dos “tests” anteriormente señalados. El comportamiento observado es muy similar en dimensión dos y tres. Para mallados gruesos, la paralelización no mejora sustancialmente los resultados numéricos. De hecho, en el caso 2D de un mallado  $65 \times 65$ , los resultados

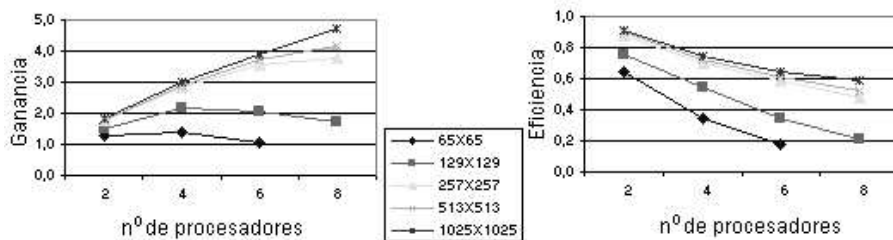


Figura 4: Ganancia en velocidad y eficiencia. “Test” 2D.

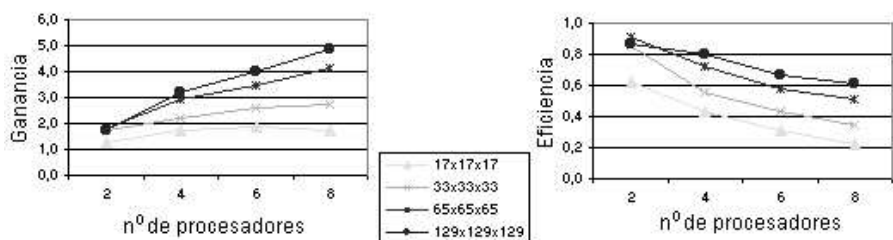


Figura 5: Ganancia en velocidad y eficiencia. “Test” 3D.

correspondientes a 8 procesadores son peores que los que se obtienen trabajando en forma secuencial. Esto se justifica por el hecho de que, para este mallado, el coste de lanzar los procesos es posiblemente mayor que el beneficio obtenido, ya que el trabajo computacional de cada procesador es demasiado pequeño. Por el contrario, cuando el número de nodos es grande, tanto la ganancia en velocidad como la eficiencia aumentan de forma considerable.

Hemos comprobado que el método SDI es eficiente, pero también necesitamos acelerar su convergencia en las situaciones de mayor interés. Para ello nos planteamos la inclusión adicional de técnicas multigríd. En [9] se realiza un estudio detallado del algoritmo, buscando su buena adaptabilidad a este tipo de técnicas, demostrándose mediante un análisis local de Fourier que, efectivamente, el método SDI aplicado al problema de Helmholtz se comporta como un “smoother”. En las aplicaciones prácticas se incorpora la técnica de *Iteración Anidada* (IA), que consiste en comenzar con un grid “grueso” e ir refinando hasta llegar al grid deseado, de tal manera que la solución parcial en un nivel se obtiene partiendo de la solución encontrada en el nivel anterior. Con esta estrategia conseguimos obtener unas buenas aproximaciones iniciales con poco coste computacional. Aunque veremos que se acelera considerablemente la convergencia, no se aprovecha totalmente el carácter “smoother” que posee el método. Para poder comparar los resultados obtenidos considerando iteración

anidada, definimos el factor de mejora

$$\text{Mejora} = \frac{\text{Tiempo sin IA y P procesadores}}{\text{Tiempo con IA y P procesadores}},$$

que se calcula para cada número de procesadores empleando la paralelización y refleja la mejora obtenida por el uso de esta técnica. Análogamente, el factor de mejora conjunta

$$\text{Mejora conjunta} = \frac{\text{Tiempo secuencial sin IA}}{\text{Tiempo paralelo con IA y P procesadores}}$$

refleja la mejora obtenida cuando usamos conjuntamente paralelización e iteración anidada. En las gráficas 6 y 7 se comparan los resultados obtenidos con iteración anidada y sin iteración anidada, de los ejemplos “tests” anteriores con un mallado de  $1025 \times 1025$  nodos en el caso 2D y de  $129 \times 129 \times 129$  en 3D.

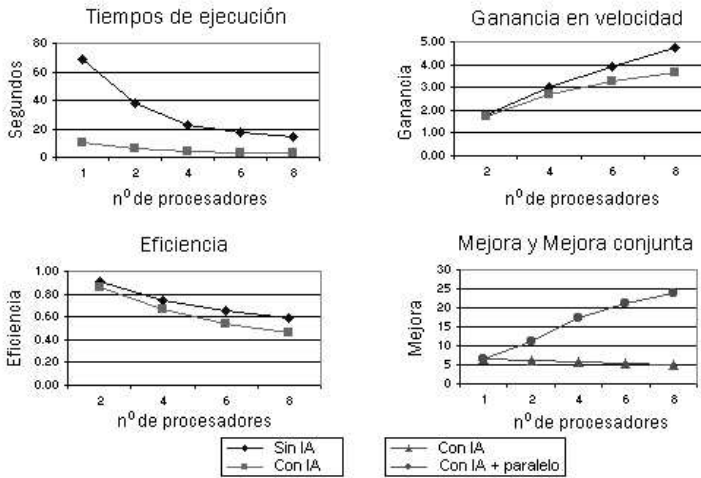


Figura 6: Comparación algoritmo sin IA y con IA. Caso  $N = 2$ .

Del análisis de estos datos, podemos observar que, la aplicación de iteración anidada (IA) conduce a una sustancial reducción de los tiempos de ejecución. El tiempo en secuencial en este caso es incluso inferior que sin IA utilizando ocho procesadores. La ganancia en velocidad, donde reflejamos la ganancia correspondiente a la paralelización de cada uno de los procesos de manera independiente, es algo inferior en la gráfica 6 al aplicar IA, debido a que el mayor número de iteraciones se efectúa en los niveles con menor número de nodos, que ya indicamos eran menos eficientes. El factor de mejora disminuye al aumentar el número de procesadores y la mejora conjunta aumenta al aumentar el número de procesadores, siendo en el caso bidimensional 20 veces más rápido (30 en 3D) con IA y 8 procesadores que sin IA y en secuencial. Presentamos

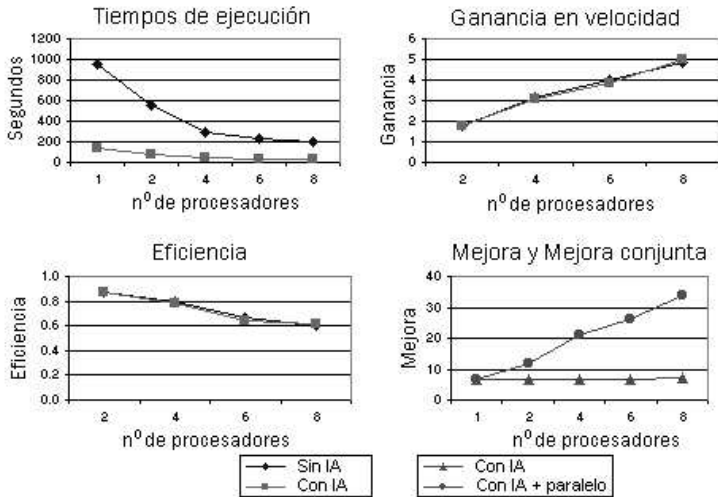


Figura 7: Comparación algoritmo sin IA y con IA. Caso  $N = 3$ .

por último en la gráfica 8 una comparación de los resultados que se obtienen cuando aplicamos el método SDI con y sin iteración anidada a otros problemas bidimensionales cuyas soluciones son, respectivamente, una función exponencial, una función senusoidal, una función parabólica y la solución del problema “test” 2D reflejado en los estudios anteriores (un seno hiperbólico). En todos los casos se obtiene una mejora conjunta superior a 20.

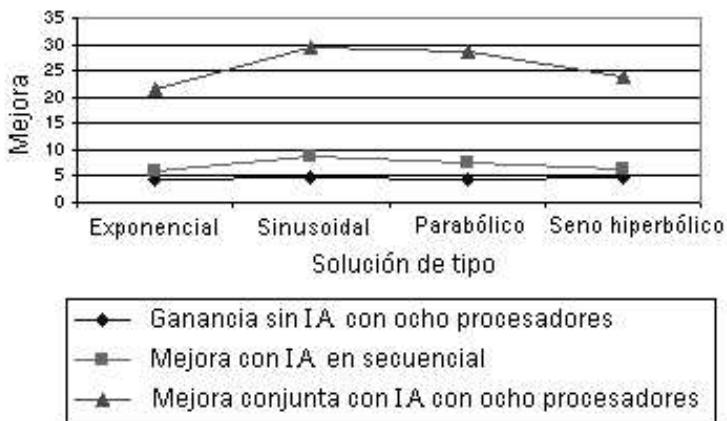


Figura 8: Mejora obtenida para otros “tests” 2D.

### 3 El problema de Stokes

Consideremos el problema de Stokes estacionario

$$\begin{cases} \alpha \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \quad (19)$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  es un dominio acotado de frontera  $\Gamma$  suficientemente regular,  $\alpha \geq 0$ ,  $\nu > 0$ ,  $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una función conocida y las incógnitas son

$$\mathbf{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \quad \text{y} \quad p : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}.$$

El problema (19) es un sistema lineal, elíptico de segundo orden, caracterizado porque una de sus incógnitas, la presión  $p$ , sólo aparece a través de sus derivadas de primer orden y no está sometida a condiciones de contorno y también por estar acopladas las diferentes componentes de la velocidad  $\mathbf{u}$  por la condición de incompresibilidad  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Se trata de un modelo estacionario para el estudio del fluidos incompresibles con viscosidades grandes (y por tanto velocidades lentas). También se corresponde con un modelo físico para problemas de elasticidad incompresible. Independientemente de ello, la resolución de este problema es un paso previo a la resolución de las ecuaciones evolutivas de Navier-Stokes, ya que sirve como modelo lineal que incluye las dificultades inherentes al tratamiento de la condición de incompresibilidad. Si  $\Omega_h$  es una discretización regular del dominio  $\Omega$  de paso  $h$ , el problema (19) puede ser aproximado por un problema discreto (20), que depende de la elección que efectuemos de los *operadores discretos*  $\Delta_h$ ,  $\mathbf{G}_h$  y  $\mathbf{D}_h$ , siendo éstos aproximaciones consistentes de los operadores Laplaciano, gradiente y divergencia habituales, respectivamente:

$$\begin{cases} \alpha \mathbf{U} - \nu \Delta_h \mathbf{U} + \mathbf{G}_h P = \mathbf{f} & \text{en } \Omega_h, \\ \mathbf{D}_h \cdot \mathbf{U} = 0 & \text{en } \Omega_h, \\ \mathbf{U} = \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma_h = \partial\Omega_h. \end{cases} \quad (20)$$

La aplicación en el mallado  $\Omega_h$  de estos operadores discretos requiere, en general, una aproximación adecuada sobre la frontera  $\Gamma_h$  y la elección de ésta determina problemas discretos diferentes. En el contexto de las técnicas de diferencias finitas, la elección más simple es utilizar diferencias centradas sobre un mismo mallado regular tanto para la velocidad como la presión (“non-staggered grid”); pero esta elección puede generar soluciones oscilantes, ver [8], que como ya hemos comentado suelen manifestarse en la presión. Para no generar dichas soluciones oscilantes, una técnica ampliamente utilizada consiste en acoplar las componentes de la velocidad y la presión con mallados diferentes (“staggered grid” o “semi-staggered grid”). Como ejemplo, podemos citar el método “Marker and Cell” (MAC), formulado por Harlow and Welch en 1965, véase [8]. Sin embargo, el uso de mallados de este tipo lleva consigo algunas desventajas, principalmente a nivel de codificación e implementación, alcanzando su máxima dificultad cuando se consideran dominios no rectangulares. A continuación,

efectuaremos el análisis del error cometido al resolver el problema de Stokes utilizando la técnica del desarrollo asintótico del error de Strang [16], distinguiendo en este desarrollo los denominados términos “regulares” señalados por este autor y términos “alternantes” señalados por Wetton [19]. Hay que destacar el carácter descriptivo de la técnica empleada, que permite identificar qué ocurre en la discretización de un problema continuo, cómo y cuándo se generan presiones espúreas en el problema de Stokes y por qué éstas no se manifiestan explícitamente en determinados casos en los que deberían presentarse. Este estudio es más difícil de abordar si, en lugar de utilizar diferencias finitas se emplearan, por ejemplo, elementos finitos para discretizar las variables espaciales.

### 3.1 Desarrollo asintótico del error en un problema discreto

Para introducirnos en el tema, consideremos el problema de contorno unidimensional

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{en } \Omega, \\ \ell u = g & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \quad (21)$$

donde  $\Omega = (0, 1)$ . Tomemos una discretización regular  $\Omega_h$ , de paso  $h$ , constituida por  $n+1$  nodos  $\{(ih)\}_{i=0}^n$ , por simplicidad tomaremos  $n$  par. Aproximamos (21) por el problema discreto

$$\begin{cases} \mathcal{L}_h U^h = f_h & \text{en } \Omega_h, \\ \ell_h U^h = g_h & \text{sobre } \Gamma_h, \end{cases} \quad (22)$$

siendo  $\mathcal{L}_h$  y  $\ell_h$  aproximaciones consistentes de orden  $h^s$ , de los operadores continuos  $\mathcal{L}$  y  $\ell$ , respectivamente, obtenidas utilizando diferencias finitas. Denotando  $U_i^h$  una aproximación de  $u(ih)$ , diremos que la solución discreta  $U_i^h$  converge con orden  $h^s$  y con un desarrollo asintótico regular (véase [16]), si

$$U_i^h = u(ih) + h^s u^{(s)}(ih) + O(h^{s+1}), \quad \text{para } 0 \leq i \leq n \quad (23)$$

donde  $u^{(s)}$  es una función regular, independiente de  $h$ . Si el operador  $\mathcal{L}_h$  desacopla el mallado  $\Omega_h$  en dos submallados independientes constituidos, respectivamente, por los nodos de numeración par e impar y, además, la aproximación en la frontera respeta este desacoplamiento, introduciendo aproximaciones diferentes en cada submallado, obtenemos un problema diferente en cada uno de ellos. De esta manera, la solución aproximada  $U_i^h$  en el *submallado par* tiene un desarrollo regular

$$u + h^s u^{(sp)} + \dots$$

y en el *impar*

$$u + h^s u^{(si)} + \dots$$

Las funciones  $u^{(sp)}$  y  $u^{(si)}$  son regulares e independientes de  $h$ , pero diferentes entre sí, por lo que la solución  $U_i^h$  de (22) tiene un desarrollo asintótico que puede expresarse como:

$$U_i^h = u(ih) + h^s u^{(s)}(ih) + h^s \widehat{u}^{(s)}(ih)(-1)^i + \dots, \quad (24)$$

donde las

$$\widehat{u}^{(s)} = \frac{u^{(sp)} - u^{(si)}}{2}, \quad u^{(s)} = \frac{u^{(sp)} + u^{(si)}}{2}$$

son regulares e independientes de  $h$ . Decimos que este tipo de desarrollo es *alternante*. Esto da una explicación precisa de qué es lo que ocurre cuando se pierde la regularidad discreta. Así pues, aparece una solución global que oscila al cambiar de submallado ya que el desarrollo asintótico del error contiene términos *alternantes* que, en caso de que predominen frente a los términos *regulares*, causan la pérdida de precisión, véase [19]. Notemos que el desacoplamiento es debido a la discretización elegida del operador y el orden en el que aparece el término alternante es el orden en el que difieren las aproximaciones frontera consideradas en cada submallado. Los tipos de desarrollo asintótico del error indicados pueden extenderse a cualquier problema de contorno bi o tridimensional. Como conclusión, se tiene que mediante este análisis podemos averiguar si un esquema de discretización es regularizante y, en el caso de tener un desarrollo alternante, se puede determinar, mediante una adecuada ponderación de los valores de nuestra incógnita en un nodo y sus adyacentes, un patrón de filtrado que permita aminorar la pérdida de precisión indicada. En [19] se efectúa un análisis del esquema de discretización de Chorin [2] aplicado, en este caso, al problema de Stokes. Se demuestra que el error es de segundo orden para la velocidad (con errores de tipo alternante de tercer orden) y sólo de primer orden en la presión debido a la presencia de errores alternantes, que predominan sobre el término regular de segundo orden. Sin embargo, este esquema es aplicable sólo a dominios rectangulares o compuestos por unión de rectángulos, dado que es preciso calcular una *divergencia discreta* en los nodos frontera.

### 3.2 El esquema regularizante propuesto

Para no extender la exposición, haremos el desarrollo en el caso bidimensional. De forma análoga puede hacerse para el caso  $N$ -dimensional. Para la resolución de (19), definido en un dominio arbitrario, con objeto de obtener un esquema regularizante, consideraremos el problema discreto (20), donde:

- $\Omega_h$  es el dominio discreto determinado a partir de una retícula cartesiana regular, que será el mismo para la velocidad y la presión.
- $\Delta_h$  es el operador de Laplace discreto bidimensional, definido por la aproximación de cinco puntos de orden  $h^2$ , es decir:

$$\Delta_h z_{i,j} = \frac{z_{i-1,j} + z_{i+1,j} - 4z_{i,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1}}{h^2}. \quad (25)$$

- $\mathbf{G}_h = (G_h^x, G_h^y)$  y  $\mathbf{D}_h$  son los operadores gradiente y divergencia discreta, obtenidos mediante aproximaciones de segundo orden basadas



en diferencias centradas:

$$G_h^x P_{i,j} = \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2h}, \quad (26)$$

$$G_h^y P_{i,j} = \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j-1}}{2h}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_h \cdot \mathbf{U} &= \mathbf{D}_h \cdot (U, V)_{i,j} \\ &= \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} + \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2h}. \end{aligned} \quad (28)$$

Calcularemos *la presión exclusivamente en los nodos interiores*, por lo que sólo es necesario evaluar la divergencia y el gradiente discreto en dichos nodos. De aquí que este esquema puede aplicarse en problemas con dominios no necesariamente rectangulares. Además, se tiene lo siguiente:

- El operador divergencia discreta  $\mathbf{D}_h$  desacopla el mallado 2D en cuatro submallados (ocho en 3D), pero éste sólo se aplica en los nodos interiores. Dado que los valores de la velocidad son conocidos sobre  $\Gamma_h$ , todos los submallados “ven” igual aproximación en la frontera.
- El operador gradiente discreto  $\mathbf{G}_h$  (26)–(27) respeta los submallados anteriores, pero su aplicación en los nodos adyacentes a la frontera requiere la elección de una adecuada aproximación. Por ejemplo, en los nodos de referencia  $(1, j)$ , según la notación habitual, la aplicación de (26) conduciría a

$$G_h^x P_{1,j} = \frac{P_{2,j} - P_{0,j}}{2h}, \quad (29)$$

es decir, sería necesario conocer la presión  $P_{0,j}$  en los nodos frontera de referencia  $(0, j)$ . Pero en estos nodos hemos excluido el cálculo de la presión y, por consiguiente, debemos realizar una aproximación que efectuaremos mediante una extrapolación unidireccional, dada por

$$P_{0,j} = 3P_{1,j} - 3P_{2,j} + P_{3,j}. \quad (30)$$

El error de truncamiento asociado es

$$e_{0,j} = p(0, jh) - P_{0,j} = h^3 p_{xxx} + O(h^4). \quad (31)$$

Así pues, de (29) y (30) se tiene que

$$G_h^x P_{1,j} = \frac{-3P_{1,j} + 4P_{2,j} - P_{3,j}}{2h}, \quad (32)$$

que no es más que la fórmula de *diferencias progresivas* de segundo orden. Fórmulas análogas a ésta (diferencias progresivas o regresivas) se obtienen en los nodos adyacentes al resto de la frontera.

Según (31), (32) y expresiones análogas, cada uno de los submallados antes citados “ve” diferentes condiciones de contorno para la presión, que se

diferencian en términos de orden  $h^3$ . Por consiguiente, el desarrollo asintótico de la presión, aproximada por este esquema, tiene un término alternante de orden  $h^3$ , es decir, un término de la forma

$$\begin{aligned} \widehat{p}_{i,j}^{(3)} &= p^{(3)}(ih, jh) + (-1)^i p^{(3i)}(ih, jh) + (-1)^j p^{(3j)}(ih, jh) \\ &+ (-1)^{i+j} p^{(3ij)}(ih, jh) \end{aligned}$$

donde las  $p^{(3)}$ ,  $p^{(3i)}$ ,  $p^{(3j)}$  y  $p^{(3ij)}$  son funciones regulares e independientes de  $h$ . Se tiene entonces el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en [9]:

**Teorema 1** *Si la solución  $(\mathbf{u}, p)$  del problema de Stokes (19) es suficientemente regular, entonces la solución  $(\mathbf{U}, P)$  del problema discreto (20), correspondiente a los operadores (25)–(28) actuando en los nodos interiores y tomando sobre la frontera los valores extrapolados para la presión, tiene un desarrollo asintótico del error dado por*

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + h^2 \mathbf{u}^{(2)} + h^5 \widehat{\mathbf{u}}^{(5)} + \dots, \quad (33)$$

$$P = p + h^2 p^{(2)} + h^3 \widehat{p}^{(3)} + \dots, \quad (34)$$

donde  $\mathbf{u}^{(2)}$  y  $p^{(2)}$  son términos regulares y  $\widehat{\mathbf{u}}^{(5)}$  y  $\widehat{p}^{(3)}$  son términos alternantes. Por tanto, las aproximaciones de  $\mathbf{U}$  y de  $P$  son ambas de segundo orden en  $h$ .

### 3.3 Experiencias numéricas

#### “Test” en dominio rectangular

Con objeto de comprobar el comportamiento numérico del esquema propuesto y compararlo con el esquema de discretización de Chorin (aplicable sólo en dominios rectangulares), consideraremos inicialmente el “test” con solución analítica propuesto por J.T. Oden en [14]. Consiste en la resolución de (19) en el cuadrado  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , con  $\alpha = 0$ ,  $\nu = 1$  y  $\mathbf{f}$  elegida para que la solución exacta venga dada por:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= 8x^2(1-x)^2y(y-1)(2y-1), \\ u_2(x, y) &= 8y^2(1-y)^2x(x-1)(1-2x), \\ p(x, y) &= 4(x-x^2). \end{aligned} \quad (35)$$

La presión toma valores en el intervalo  $[0, 1]$ , siendo las isobaras segmentos verticales. La implementación práctica se efectúa aplicando un algoritmo tipo gradiente conjugado en el que se integra el método SDI (ver [9]), de aquí que el método sea iterativo. En la Figura 9 resumimos los resultados obtenidos al aplicar los esquemas anteriormente citados: el método de Chorin sin filtrar las presiones, el método de Chorin filtrando las presiones según el patrón obtenido en [9] y el esquema regularizante propuesto. En concreto, en cada columna de la gráfica, representamos:

- El comportamiento, respecto al número de iteraciones, de la norma infinito del error exacto tanto del campo de velocidades como de la presión, para diferentes valores del paso de discretización  $h$ .

- Las isobaras para el caso  $h = 0,05$ .
- El error exacto de la presión mediante un gráfico de superficie cuando  $h = 0,05$ .

Para el primer esquema (primera fila de gráficos en la Figura 9), podemos observar que la existencia de un término alternante de primer orden en la presión conduce a la pérdida de precisión, que se refleja en la situación final alcanzada en el error exacto y que es del orden teórico demostrado en [19]. La velocidad no se ve afectada. Son muy significativas las oscilaciones de las isobaras, así como el predominio del error de tipo alternante frente al regular, que se aprecia en el gráfico de superficie. También se puede observar que el error está asociado a los diferentes submallados. En el segundo esquema, el filtro aplicado a la presión logra que el término alternante de primer orden se traslade al tercer orden, por lo que pasa a predominar el término regular de segundo orden y, por tanto, se regulariza la presión (este hecho está demostrado en [9]).

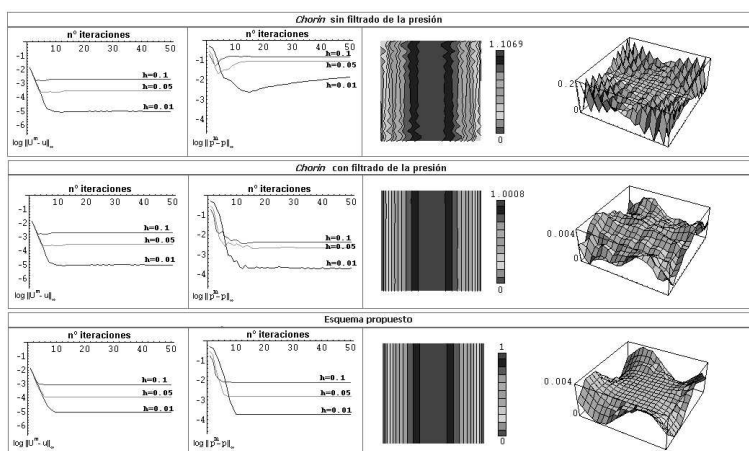


Figura 9: Resultados del “test” de Oden para diferentes esquemas.

Podemos observar en la segunda fila de esa misma figura que el comportamiento de la velocidad es el mismo, pero la presión mejora su precisión, alcanzándose el orden indicado y manifestándose pequeños cambios en la convergencia debido al término alternante, ya de tercer orden. Las isobaras reflejan leves oscilaciones, debido más al error propio de un método aproximado que a la presencia de presiones espúreas. En el gráfico de superficie, se observa el predominio del término regular de segundo orden y la presencia del error alternante en un orden superior. No se aprecia ya distinción entre los diferentes submallados. En el tercer caso, de acuerdo con lo demostrado anteriormente, se logra alcanzar el error regular de segundo orden, tanto para la velocidad como para la presión, no apareciendo oscilaciones en las isobaras. El gráfico de superficie también refleja el comportamiento regular del error y no se observa

dependencia de los submallados. Hemos realizado un número de iteraciones muy superior al necesario, para poder intuir el comportamiento asintótico del algoritmo. Omitimos la representación gráfica del campo de velocidades dado que, según lo descrito anteriormente, éste no se ve afectado en la práctica.

### “Tests” 2D y 3D en dominios no rectangulares

Como ejemplo de “tests” bidimensional y tridimensional definidos en dominios no rectangulares, consideraremos la determinación de un fluido estático (“No Flow”) sobre el que actúa una fuerza gravitacional. En la Figura 10, reflejamos las presiones obtenidas mediante líneas y superficies isobáricas, respectivamente. Se puede comprobar, de nuevo, el carácter regularizante del esquema propuesto, no apareciendo presiones espúreas. En [9], pueden encontrarse resultados con otros “tests” efectuados.

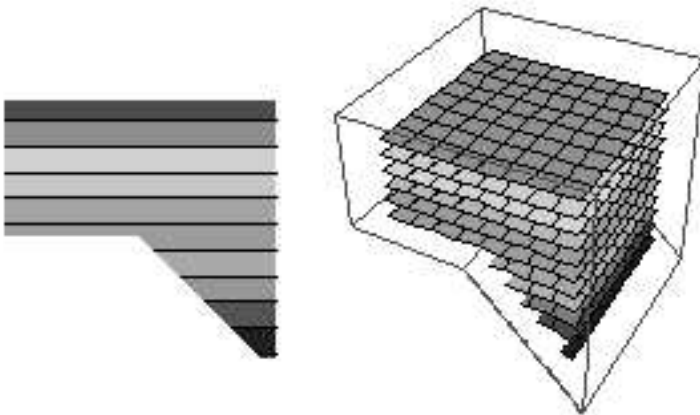


Figura 10: Isobaras y superficies isobáricas en los “tests” “No Flow” 2D y 3D.

### Agradecimientos

Trabajo parcialmente financiado por la D.G.E.S., Proyecto BFM2003-06446-C02-02 y por la Junta de Andalucía, ACC-1204-FQM124.

### Referencias

- [1] I.I. ALBARREAL - *Paralelización en tiempo y espacio de la resolución numérica de algunas ecuaciones en derivadas parciales*, Tesis, Universidad de Sevilla (2004).
- [2] A.J. CHORIN - *On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations*, Math. Comp, **22** (1968), 745-762.

- [3] J.L. CRUZ, M.C. CALZADA, E. FERNÁNDEZ-CARA, M. MARÍN - *A parallel algorithm for solving the incompressible Navier-Stokes problem*, Comp. Math. with Appl., **25 (9)** (1993), 51–28.
- [4] J.L. CRUZ, M.C. CALZADA, E. FERNÁNDEZ-CARA, M. MARÍN - *A convergence result for a parallel algorithm for solving the Navier-Stokes equations*, Comp. Math. with Appl., **35 (4)** (1998), 71–88. 1995.
- [5] E.J. DEAN, R. GLOWINSKI - *On Some Finite Element Methods for the Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flow*, Incompressible computational fluid dynamics (M.D. Gunzburger and R.A. Nicolaides, Eds.), Cambridge U.P., USA 1993, 17–65.
- [6] J. DOUGLAS JR., J.E. GUNN - *Alternating direction methods for parabolic systems in  $m$  space variables*, J. Assoc. Comput. Mach., **9** (1962), 450–456.
- [7] J. DOUGLAS JR., H.H. RACHFORD JR. - *On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables*, Trans. Amer. Math. Soc., **82** (1956), 421–439.
- [8] C. FLETCHER - *Computational techniques for Fluids Dinamics. Vol 2. Specific techniques for different flow categories*, Springer-Verlag, Berlin (1991).
- [9] J.R. GALO - *Resolución en paralelo de las ecuaciones de Navier-Stokes 2D y 3D mediante el método de direcciones simultáneas*, Tesis, Universidad de Sevilla (2002).
- [10] R. GLOWINSKI - *Supercomputing and the finite element approximation of the Navier-Stokes equations for incompressible viscous fluids*, Recent advances in computational fluid dynamics (Princeton, NJ, 1988), Springer, Berlin 1989, 277–315.
- [11] S.L. JOHANSSON, Y. SAAD, M.H. SCHULTZ - *Alternating direction methods on multiprocessors*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., **8 (5)** (1987), 686–700.
- [12] T. LU, P. NEITTAANMAKI, X.C. TAI - *A parallel splitting-up method for partial differential equations and its applications to Navier-Stokes equations*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., **Vol. 26 (6)** (1992), 673–708.
- [13] G.I. MARCHUK - *Splitting and alternating direction methods*, Handbook of numerical analysis, Vol. I, North-Holland, Amsterdam 1990, 197–462.
- [14] J.T. ODEN, O. JACQUOTE - *Stability of some mixed finite element methods for Stokesian flows*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **43(2)** (1984), 231–247.
- [15] D.W. PEACEMAN, H.H. RACHFORD JR. - *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations*, J. Soc. Indust. Appl. Math., **3** (1955), 28–41.

- [16] G. STRANG - *Accurate partial difference methods. I. Non-linear problems*, Numer. Math., **6** (1964), 37–46.
- [17] X.C. TAI, P. ÑEITTAANMAKI - *Parallel finite element splitting-up method for parabolic problems*, **7 (3)** (1991), 209–225.
- [18] R.S. VARGA - *Matrix iterative analysis*, Springer-Verlag, Berlin 2000.
- [19] B.R. WETTON - *Analysis of the spatial error for a class of finite difference methods for viscous incompressible flow*, SIAM J. Numer. Anal., **2** (1997), 723–755.