

**EL PROCESO DE DEFINIR EN MATEMÁTICAS DESDE UNA
PERSPECTIVA COMOGNITIVA**
**DEFINING PROCESS IN MATHEMATICS FROM COMMOGNITIVE
PERSPECTIVE**

Gavilán, J. M.

Sánchez-Matamoros, G.

Escudero, I.

Universidad de Sevilla

Resumen. Los procesos de construcción de conocimiento matemático, tales como definir, probar y modelar son elementos clave en el aprendizaje del conocimiento matemático. En esta comunicación nos centraremos en el aprendizaje matemático del proceso de definir, entendido como cambios en el discurso matemático, desde una perspectiva sociocultural, concretamente, el enfoque comognitivo. Los resultados muestran que dichos cambios se han podido caracterizar a través de las relaciones identificadas entre las herramientas teóricas propias de este enfoque.

Palabras claves: definir, aprendizaje matemático, discurso, perspectiva sociocultural.

Abstract. The processes of construction of mathematical knowledge, such as defining, proving and modeling are key elements in the learning of mathematical knowledge. In this paper we focus on the mathematical learning about defining, understood as changes in mathematical discourse from a sociocultural perspective, specifically, the focus commognitive. The results show that these changes have been characterized through the relationships identified between the theoretical tools to this approach.

Key words: defining, mathematical learning, discourse, sociocultural perspective.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, dentro del campo de la Educación Matemática se viene desarrollando una corriente de investigación sobre aspectos sociales involucrados en las prácticas matemáticas. En este sentido, han surgido numerosos trabajos donde las teorías socioculturales tienen un papel destacado tanto a nivel internacional (Lerman, 2006; Sfard, 2007, 2008) como a nivel nacional (Llinares, 2008; García y Sánchez, 2008, Sánchez y García, 2011, Planas y Civil, 2009; Planas, 2010). En particular, en los últimos simposios de la SEIEM se han presentado trabajos dentro de la perspectiva sociocultural (Civil, 2009; Planas, 2010; Chico y Planas, 2011). Como señala Planas (2010) en nuestro país se observa una presencia de las teorías socioculturales en distintos ámbitos, como por ejemplo proyectos de investigación, becas, tesis y artículos en revistas científicas con autores españoles, lo que según esta autora “informa sobre el reconocimiento de estas teorías a muy distintos niveles”. En dichos trabajos hay una concepción del conocimiento matemático como construcción social y cultural (Lerman, 2006) y muchos de ellos centran la atención en el análisis de los procesos por los cuales se produce dicha construcción social. En esta construcción social tiene un papel preponderante el discurso, que tiene que ver con compartir significados y modos de interpretar cómo actuar en ciertos contextos. En relación al discurso, [Sfard \(2007, 2008\)](#) considera que las matemáticas son un tipo especial de discurso y aprender matemáticas significa cambiar el discurso matemático. Durante los últimos años se ha desarrollado una línea de investigación que ocupa la aproximación teórica conocida como

socioepistemología, la cual estudia los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, que considera cuatro componentes fundamentales en el aprendizaje, entre ellas la dimensión sociocultural (Cantoral & Farfán, 2003).

Nuestra investigación, que forma parte de un proyecto de investigación (ver agradecimientos) desarrollado en la Universidad de Sevilla por un grupo de profesores del Dpto. de Didáctica de las Matemáticas, se sitúa en una perspectiva sociocultural, concretamente en el enfoque comognitivo propuesto por Sfard (2007, 2008) (commognitive en versión original), para abordar el aprendizaje matemático de estudiantes de niveles no obligatorios (16-18 años y estudiantes para Maestro). De acuerdo con Sfard (2007, p. 573), “el desarrollo discursivo de individuos o clases enteras puede entonces ser estudiado a través de las transformaciones identificadas en cada una de sus cuatro características discursivas, uso de palabras características del discurso, uso de mediadores, narrativas asumidas y rutinas”. El contexto matemático utilizado es el proceso de definir y su producto la definición.

De manera más concreta, en esta comunicación nos centraremos, esencialmente en el aprendizaje matemático del proceso de definir, entendido como cambios en el discurso matemático, desde la perspectiva indicada. En primer lugar, describiremos las ideas que conforman el marco teórico utilizado, pasando a continuación al diseño metodológico adoptado, para terminar presentando los primeros resultados y conclusiones.

MARCO TEÓRICO

Teniendo en cuenta que hemos querido indagar sobre el aprendizaje de definir (y su producto la definición) en estudiantes, desde una perspectiva comognitiva, en nuestro marco teórico vamos a explicitar la forma de entender el aprendizaje desde dicha perspectiva, y como hemos entendido el proceso de definir y su producto la definición.

Como hemos indicado en la introducción, desde la perspectiva comognitiva el aprendizaje lo vamos a caracterizar a través de los cambios en el discurso matemático. Estos cambios se analizarán a través de las herramientas teóricas propuestas por Sfard (2007, 2008), que ya hemos utilizado en otros trabajos (Sánchez y García, 2011; Sánchez-Matamoros, Escudero y Gavilán, 2011).

Palabras matemáticas (‘mathematical words’ en el original): aquellas utilizadas en el discurso matemático, incluyendo términos no propiamente matemáticos con significado y utilidad matemático/a.

Mediadores visuales (‘visual mediators’ en el original): entendidos como los medios con los que los participantes del discurso identifican los objetos de los que están hablando y coordinan su comunicación. En los discursos matemáticos, entre los mediadores se incluyen los artefactos simbólicos.

Narrativas asumidas (‘narratives’ en el original): son cualquier texto hablado o escrito que da una descripción de los objetos, de relaciones entre objetos, o de actividades con los objetos y que está sujeta a la aceptación o rechazo. A veces se utiliza el término narrativas asumidas/aceptadas (‘endorsed narratives’) para referirse a las que se etiquetan como verdaderas por una comunidad dada.

Rutinas (‘routines’ en el original): son patrones repetitivos bien definidos en las acciones de los interlocutores, característicos de un discurso dado. Las regularidades específicamente matemáticas pueden ser identificadas si uno ve el uso de las palabras

matemáticas y mediadores matemáticos o sigue el proceso de crear y fundamentar narrativas asumidas. Las rutinas pueden ser de naturaleza algorítmica.

Por otro lado, en relación a definir/definición, consideramos “definir” como el “proceso para llegar a establecer una definición”, teniendo en cuenta que esta última prescribe el significado de una palabra o frase de forma específica en términos de una lista de características que tienen que ser todas verdaderas (Sánchez, García, Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros, 2008). Estudios como los de Borasi (1991), Mamona-Dows y Dows (2002), Van Dormolen y Zaslavsky (2003) y los de Zaslavsky y Shir (2005), se han ocupado de la naturaleza de tales definiciones y de los atributos y roles que debe cumplir una definición matemática.

En este trabajo, la pregunta de investigación que pretendemos responder es: ¿Podemos a través del uso de las herramientas teóricas caracterizar el aprendizaje matemático, entendido como los cambios en el discurso de los estudiantes?

METODOLOGÍA

Participantes

Los sujetos participantes en la investigación fueron 51 estudiantes de enseñanza no obligatoria (13 de segundo curso de Bachillerato de edad entre 16 y 18 años, y 38 estudiantes para profesor de primaria de edad entre 18 y 21 años). La participación en el estudio fue voluntaria y los estudiantes se organizaron en grupos de tres o cuatro según su libre elección (los grupos los hemos denominado como G1 a G15). De esta forma, consideramos como sujetos de análisis a los grupos de estudiantes resolviendo tareas.

Tarea

La tarea utilizada aborda el proceso de definir y la definición en un contexto geométrico, en particular, la definición y clasificación de paralelogramos. Dicho contexto se ha identificado como un campo relevante y fructífero para las investigaciones sobre definiciones y clasificaciones (De Villiers, 1998). La tarea se planteó por escrito al grupo de estudiantes y en ella se presentaban las figuras de tres cuadriláteros (cuadrado, rectángulo y rombo) y una serie de preguntas, con las que se trataba de ir identificando elementos (lados, ángulos interiores y exteriores entre lados, diagonales y ángulos entre diagonales...) y características o propiedades que llevasen a definir los conceptos de cuadrado, rombo y rectángulo.

Fuentes de datos

Se realizaron grabaciones en audio (y algunas en video) de los grupos de estudiantes durante la resolución de la tarea y se recogieron los documentos utilizados por los grupos. Los datos son las transcripciones de los diálogos verbales de los grupos de estudiantes cuando resuelven la tarea propuesta (entendida como una iniciativa concreta con unas determinadas características y diseñada en base a un objetivo) y los documentos escritos facilitados por los estudiantes sobre la resolución de la tarea.

Proceso de Análisis

El proceso de análisis realizado para caracterizar el procedimiento de cambio en el discurso consta de dos niveles:

- i) Nivel 1: Identificación de las herramientas teóricas: palabras matemáticas, mediadores visuales, narrativas y rutinas
- ii) Nivel 2: Identificación de relaciones entre las herramientas teóricas identificadas, que nos permite dar cuenta de los cambios producidos en el discurso matemático.

A continuación, en la sección de resultados mostraremos con un ejemplo la forma en la que hemos realizamos el proceso de análisis descrito.

RESULTADOS

A partir del análisis de los datos provenientes de los 15 grupos analizados, identificamos diferentes procedimientos de cambio en el discurso mediante las relaciones encontradas entre narrativas asumidas y rutinas. Dadas las limitaciones de espacio de la comunicación, en esta sección, vamos a considerar uno de los grupos y mostraremos los resultados obtenidos en los distintos niveles de análisis

En el nivel 1º procedimos a la identificación de las herramientas teóricas a partir de los datos (como ejemplo usamos un protocolo del grupo considerado). En el protocolo seleccionado, aparecen las **herramientas teóricas**, que se han identificado en el primer nivel. Para facilitar la lectura, hemos destacado en negrita las palabras matemáticas identificadas, en cursiva las rutinas, y subrayadas las narrativas. En relación a los mediadores visuales, los estudiantes se apoyan continuamente en las figuras proporcionadas en el enunciado de la tarea.

Protocolo:

527. A1: Definir cada una de las figuras. Figura 1: **Polígono regular** de
528. **cuatro lados iguales**
529. A2. **Polígono regular** de **cuatro lados iguales**
530. A1: Es decir, un **cuadrado**
531. A2. Pero, exactamente
532. A4: **cuadrado, rectángulo**
533. (Risas)
534. A2: Es que yo creo que aquí lo que pide es el **nombre** y ya está
535. A1, A3, A4: No,
536. A2: Eso no sería **definir**
537. A4: No, sería **nombrar**
538. A2: Pero es que aquí preparaos porque pregunta por otra **definición**
539. A3: Podría dar otra definición ¡ostras!
540. (RISAS)
541. A1: ¡Ah bueno! aquí lo ponemos superficial y ya está
542. A2: No, aquí ponemos **polígono regular, polígono regular, polígono regular**
543. (RISAS)
544. A1. Y aquí ponemos **polígono regular** de **cuatro lados**
545. A2: Voy a preguntar si se refiere al **cuadrado**. A ver si vamos a estar aquí quebrándonos
546. la cabeza inútilmente
547. A1: ¡Vale!
548. P: De distintas maneras ...
549. *A1: ¡Vale! **Polígono regular** de **cuatro lados iguales**. O sea que **definas** el **cuadrado**.*
550. ***Polígono regular** de **cuatro lados iguales** y eso hace ya que se formen los **ángulos de 90***

551. A3: *Pero es que eso no es una definición*
552. A1: *Como que no, polígono regular de cuatro lados iguales*
553. A3: pero lo de los **ángulos** ¿Y eso ya hace que...?
- 554.A1: No. No pero
- 555.A3: Espera a ver que dice José
556. A1: **Polígono regular de cuatro lados iguales.**
.../...
578. A1: *Pues nada, polígonos regular de cuatro lados iguales*
579. A2: *De cuatro lados que forman ángulos de noventa grados*
580. A1. Es que si son cuatro lados iguales ya ...
581. A2: Es que ya estamos hablando de características
582. A3: Polígono regular de cuatro lados iguales

Lo que hemos destacado en cursiva en el protocolo constituye una secuencia de acciones, que se observa cuando los estudiantes están dando las características del cuadrado, por ejemplo “lados iguales, ángulos de 90 grados,...” (líneas 549-550). Esta secuencia de acciones, que vamos a denominar “Identificar características de los objetos”, se aprecia en el discurso del grupo varias veces, como puede observarse en las líneas 549-550 y 578-579. Este carácter repetitivo confiere a este conjunto de acciones la denominación de rutina. Así, este grupo de estudiantes considera como elementos relevantes lados y ángulos, adquiriendo la rutina, en este grupo, la forma siguiente:

miran la figura,

identifican número de lados y ángulos entre lados,

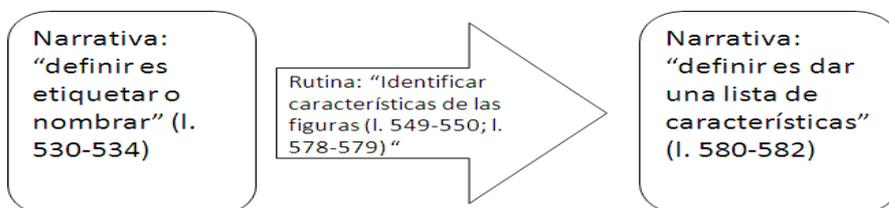
enunciar propiedades de lados y ángulos (lados iguales, polígono regular, ángulos de 90°, ...).

De forma esquemática, en general, esta rutina consta de las siguientes acciones: miran la figura, identifican elementos relevantes de la misma (lados, ángulos, etc) y enuncian propiedades o características de la figura objeto de estudio. Esta rutina la hemos denominado rutina *Identificar características*.

En el nivel 2º procedimos a identificar relaciones entre las herramientas teóricas. La identificación de relaciones entre las distintas herramientas nos permite caracterizar los cambios en el discurso matemático. Así, si observamos el protocolo anterior, el grupo de estudiantes comienza considerando que es suficiente con poner un nombre para definir un concepto (líneas 530-534, 536-537), lo que desde nuestro punto de vista es asumir la narrativa *Etiquetar*, entendida como que “definir es etiquetar, poner un nombre a una clase, más o menos amplia, de objetos”. Posteriormente, se pone de manifiesto que se asume la narrativa “definir es dar una lista de características de los objetos que se pretenden definir”, que vamos a denominar *Listado de características* (líneas 580-582).

El cambio de narrativa se produce porque los estudiantes hacen uso de la rutina “Identificar características de los objetos” (rutina *Identificar características*) (líneas 549-550; 578-579). Se puede decir que la rutina *Identificar características* juega un papel relevante para que se produzca este cambio entre las narrativas asumidas *Etiquetar* y *Listado de características*, lo que caracteriza el cambio en el discurso matemático del grupo de estudiantes.

En este cambio de narrativas asumidas, se observa además que se amplía el significado de algunas palabras matemáticas. Por ejemplo, en un primer momento, la palabra “cuadrado” se utiliza para etiquetar una determinada forma geométrica en el sentido de “la figura es un cuadrado” (ver línea 530); sin embargo, cuando asumen la narrativa *Listado de características* el término “cuadrado” es una palabra que se utiliza para designar a una figura geométrica que cumple unas determinadas características (línea 549). En el siguiente diagrama mostramos el esquema del procedimiento de cambio.



Este cambio en el discurso lo denominamos “De nombrar a listar” y queda caracterizado por el cambio de narrativas mediante el uso de una determinada rutina y el cambio en el significado de determinadas palabras matemáticas. Entre los primeros resultados encontramos que el procedimiento de cambio expuesto en esta comunicación, puede observarse en aproximadamente el 40% de los grupos analizados. Además en el 100% de estos grupos se hace través de la misma rutina, “Identificar características de los objetos”.

La siguiente tabla recoge globalmente una primera aproximación a los procedimientos de cambio en el discurso que se ponen de manifiesto en los grupos de nuestro estudios:

PROCEDIMIENTOS DE CAMBIO	NÚMERO DE GRUPOS
Invariantes en el discurso	4
De nombrar (N1) a listar (N2): N1 → N2	9
De listado de características (N2) a listado minimal de características(N3): N2 → N3	3
De listado mínimo de características (N3) a listado equivalente de características (N4): N3 → N4	1

En el número total de grupos aparecen 17 en lugar de 15 grupos, porque hay 2 grupos contabilizados dos veces ya que se en ellos se ha observado más de un procedimiento de cambio.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El trabajo que aquí hemos presentado intenta acercarse al proceso de definir, en estudiantes de enseñanza no obligatoria, mediante una aproximación sociocultural, pretendiendo hacer operativas ideas provenientes de la perspectiva comognitiva propuesta por [Sfard \(2007, 2008\)](#). Mostramos como el uso de determinada rutina, *Identificar características de los objetos*, ha permitido que se produzca el cambio de narrativas aceptadas por parte de los estudiantes, lo que nos permite inferir que se ha

producido aprendizaje matemático, entendido como cambios en el discurso. El uso de esta rutina conlleva el cambio de significado de algunas palabras matemáticas.

Las relaciones entre diferentes herramientas teóricas, como son narrativas y rutinas y el cambio de significado de las palabras matemáticas, pueden ser consideradas como una manera de inferir aprendizaje matemático. El cambio de narrativas y de significado vinculado a las palabras matemáticas se produce en los estudiantes por el uso de rutinas. Pensamos que es necesario profundizar en el papel que pueden tener los mediadores visuales en estos procedimientos de cambio.

El análisis mostrado en este trabajo pensamos que tiene potencial para profundizar en los cambios en el discurso de los estudiantes. En esta comunicación hemos mostrado el caso de un cambio de discurso realizado en “una etapa”, en el sentido de un cambio de una narrativa a otra por el uso de determinadas rutinas, pero este tipo de cambios puede ser la base para cambios de narrativas en más de una etapa, es decir, entre al menos tres narrativas, lo que produciría posibles cambios en el discurso en dos o más etapas.

Lo que hemos mostrado en este trabajo es un ejemplo que nos permite pensar en proyectos de futuro, en la línea de tratar de caracterizar procedimientos de cambios en el discurso matemático de los estudiantes a través de las herramientas teóricas consideradas, tanto en el proceso de definir, como en otros procesos.

Investigaciones en esta línea, ayudan a ampliar la forma de aproximarse al aprendizaje y a las dificultades de los estudiantes que conlleva la construcción y el uso de definiciones (Rasmussen, Zandieh, [King y Teppo, 2005](#); [Edwards y Ward, 2004](#)).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con el apoyo del proyecto PSI2008-02289 del Plan Nacional de I+D del Ministerio de Ciencia y Tecnología

Referencias

- Borasi, R. (1991). *Learning Mathematics Through Inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann Educational Books, Ins.
- Civil, M. (2009). Inmigración y diversidad: implicaciones para la formación de profesores de matemáticas. En M.T. González, J. Murillo, L. Blanco, T. Sierra, M. Pelarea y J. Carrillo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII*, pp. 63-88. Santander: SEIEM.
- Chico, J. y Planas, N. (2011). Interpretación de indicadores discursivos en situaciones de aprendizaje matemático en pareja. En M. Marín, G Fernández, L. J. Blanco y M. Pelarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*, pp. 319-328. Ciudad Real: SEIEM.
- De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th PME International Conference. 2*, 248-255.
- Edwards, B. S. & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, 111(5), 411- 424.
- Lerman, S. (2006). Cultural psychology, anthropology and sociology: the developing “strong”, social turn. En J. Maasz y W. Schloeglmann (Coords.), *New mathematics education research and practice*, pp. 171-188. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde “ISI-Web of Knowledge” y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII*, pp. 25-53. Badajoz: SEIEM.
- Mamona-Downs, J. y Downs, M. (2002). Advanced Mathematical Thinking With a Special Reference to Reflection on Mathematical Structure. En L.D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 165-195). Mahwah, NY, USA: Lawrence Erlbaum.
- Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: reflexiones y datos bibliométricos. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIV*, pp. 163-195. Lleida: SEIEM.
- Planas N. y Civil, M. (2009). Working with mathematics teachers and immigrant students: an empowerment perspective. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(6), 391-409.
- Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K. y Teppo, A. (2005). Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical thinking and learning*, 7(1), 51-73.
- García, M. y Sánchez, V. (2008). *El aprendizaje matemático como un proceso social*. En I Seminario Hispano-Portugués sobre la Teoría Sociocultural en Investigación Educativa. Sevilla.
- Sánchez, V. y García, M. (2011). Socio-Mathematical and Mathematical norms in pre-service primary teachers’ discourse. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th PME International Conference*, 4, 105-112.
- Sánchez, V., García, M., Escudero, I., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2008). Una aproximación a las matemáticas en el bachillerato. ¿Qué se pretende que aprendan los alumnos? *Enseñanza de las Ciencias*, 26(2), 267-276.
- Sánchez-Matamoros, G., Escudero, I. y Gavilán, J. M. (2011). Defining from sociocultural approach. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th PME International Conference*, 1, 500-500.
- Sfard, A. (2007). When the Rules of Discourse Change, but Nobody Tells You: Making Sense of Mathematics Learning From a Commognitive Standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, 16(4), 565-613.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourse, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Van Dormolen, J. y Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 91-106.
- Zaslavsky, O. y Shir, K. (2005). Students’ Conceptions of a Mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (4), 317-347.