

O SURGIMENTO DA ABORDAGEM CONJUNTISTA EM MATEMÁTICA

José Ferreirós

Universidad de Sevilla - Espanha

(aceito para publicação em março de 2002)

Resumo

Este artigo faz uma revisão de algumas das idéias centrais que o autor apresentou em uma tentativa para analisar o desenvolvimento da abordagem conjuntista em matemática, entre os anos 1850 e 1920. O foco central são pontos de vista que podem ser considerados como representantes de novos direcionamentos na historiografia de matemática recente, como a ênfase em escolas de pesquisa e a atenção para os contextos institucionais. Para complementar a já famosa história do trabalho de Cantor e Dedekind, nós discutimos principalmente a contribuição pioneira de Riemann, e o papel de Hilbert na virada do século.

Abstract

This paper reviews some of the central ideas that the author has offered in an attempt to analyze the rise of the set-theoretical approach in mathematics, from the 1850s to the 1920s. We focus on viewpoints that may be regarded as representative of new directions in the recent historiography of mathematics, such as emphasis on research schools and attention to the institutional contexts. To complement the rather well-known history of the work of Cantor and Dedekind, we discuss mainly the pioneering contribution of Riemann, and the guiding role played by Hilbert at the turn of the century.

Introdução

Provavelmente, nenhum aspecto da Matemática do século XIX foi estudado tanto e com tanto detalhe como a teoria de conjuntos. A atraente e intrigante figura de Cantor e sua vida e sua obra capital foram descritas e analisadas um grande número de vezes¹. Mas aqui não vamos nos concentrar no desenvolvimento da teoria de conjuntos transfinitos, grande contribuição de Cantor, mas, sim, em como foi aparecendo paulatinamente uma nova compreensão dos conceitos, problemas e métodos matemáticos, o que chamaremos de *ênfase conjuntista*. A teoria de conjuntos como linguagem básica da Matemática e como marco metodológico: este é nosso tema, que deve se distinguir da investigação das propriedades dos conjuntos infinitos em abstrato.

¹ Ver por exemplo as biografias de Meschkowski (1983), Dauben (1979), Purkert & Ilgauds (1987).

O leitor encontrará um esquema dos desenvolvimentos principais na tabela cronológica que incluímos como Apêndice. Uma exposição detalhada do tema pode ser encontrada no livro *Labyrinth of Thought: A history of set theory and its role in modern mathematics* (1999). Mas seria muito longo e tedioso discutir todos os detalhes mencionados no Apêndice, e parece mais indicado neste breve trabalho proceder somente à discussão de algumas características centrais de meu estudo, que apresentam novas orientações historiográficas.

Sobre as perguntas que fiz e tentei responder, não há nenhuma grande novidade. Eram perguntas como: por quê? como? pra quê? Certamente, as perguntas mais tradicionais na velha tradição da História da Ciência: quando? e quem? foram deixadas de lado, mas isso tem sido comum nas "novas" tendências durante talvez os últimos 50 anos. Hoje, nós já não consideramos a História da Matemática como uma pesquisa para determinar os pais, os precursores, uma cronologia esquemática, e fornecer um razoável repertório de anedotas. Muitos de nós tentamos buscar respostas no passado rico do conhecimento matemático, com a esperança de *entender melhor o modo no qual ele evoluiu*. Em minha própria versão dessa tentativa, há uma preocupação séria sobre os *programas de pesquisa* em que vários matemáticos individuais – Riemann, Dedekind, Cantor, etc. – tentaram avançar. A análise deve certamente buscar evitar interpretações anacrônicas e teleológicas: seus trabalhos foram feitos em suas próprias épocas, situados dentro do conhecimento matemático contemporâneo a eles; eles não foram conduzidos por nosso presente, isso tem que ser considerado.

Embora meu trabalho sobre História da Teoria dos Conjuntos tenha crescido em uma tentativa bastante ambiciosa para analisar seu nascimento, e a forma como ela contribuiu para o aparecimento da Matemática Moderna, meu ponto de partida foi muito mais concreto. Tendo feito algumas pesquisas sobre o trabalho de fundamentação de Dedekind, estava claro que, antes de 1872, ele tinha um entendimento conjuntista da Matemática consciente e bastante avançado. Ele considerou a Matemática Pura (inclusive Análise e Álgebra, entretanto, não Geometria) como um edifício construído com base em dois conceitos – conjuntos e aplicações –; isso o conduziu a procurar por estruturas e morfismos como elementos fundamentais sobre os quais basear os diversos ramos da Matemática². Naquele mesmo ano de 1872, Dedekind conheceu Cantor, um homem 14 anos mais jovem, que tinha justamente começado a explorar noções de Teoria dos Conjuntos em Topologia Métrica e nos Fundamentos da Aritmética. Minha pergunta foi: Dedekind e Cantor discutiram suas reflexões? Houve uma influência por contato direto que escapou à atenção dos historiadores?

Eu responderia hoje taxativamente com um "não", mas essas perguntas ainda prematuras me levaram a concentrar a atenção sobre os programas de pesquisa de Dedekind e Cantor. Havia muitos trabalhos realizados por historiadores anteriores sobre ambos os

² *Labyrinth of Thought*, caps. III e VII.

homens, Cantor, que tem sido uma figura fundamental e um herói durante muitas décadas, e Dedekind, (por volta de 1985) um destaque na recente onda de interesse. Um destes historiadores ensinou-me que poderia ser sábio enfatizar as *diferenças* nas teorias dos conjuntos desenvolvidas por Cantor e Dedekind.³ A tempo, eu cheguei à conclusão que havia ainda mais; eu aprendi a estabelecer o que parecia para mim uma diferença crucial:

Uma coisa é a Teoria dos Conjuntos como uma subdivisão da Matemática (Teoria dos Conjuntos abstrata ou até mesmo Teoria dos Conjuntos descritiva), outra é a abordagem conjuntista como um modo novo e abstrato para formular questões Matemáticas e apresentar soluções e provas.

Não tendo feito esta distinção, alguns escritores anteriores assumiram que a reorientação conjuntista da Matemática foi uma consequência do trabalho de Cantor. Mas existem amplas evidências de que a reorientação conjuntista foi anterior ao trabalho de Cantor.

1. Matemática abstrata e abordagem conjuntista.

É surpreendente perceber que a necessidade de diferenciar a Teoria dos Conjuntos da abordagem conjuntista da Matemática freqüentemente não tem sido clara na mente dos historiadores. Talvez isso se dê devido a um preconceito, certa imagem que se faz da Matemática como uma coleção de teorias completamente desenvolvidas, o que, na verdade, é completamente alheio à História. Essa imagem clássica sugestionou um modelo simplista, unidirecional, de desenvolvimentos, de acordo com o qual, trocas teóricas na pesquisa Matemática seriam sempre o *efeito de uma aplicação* de teorias novas. O caso da Teoria dos Conjuntos – e, eu acredito, muitos outros casos – mostra que, ao contrário dessa expectativa, é um fenômeno bastante freqüente que teorias novas desenvolvem após mudanças na prática Matemática. Também é importante frisar que, no relativo esquecimento de algumas figuras (notavelmente Riemann) há o fato de que muitos, talvez a maioria, dos matemáticos e historiadores não concordam com a opinião de Cantor que “em Matemática, a arte de propor questões é mais importante que a arte de resolvê-las”.⁴

A própria história da Teoria dos Conjuntos cantoriana é, sem dúvida, imensamente atraente e rica. Mas a história da abordagem conjuntista foi previamente explorada apenas de um modo incompleto e desequilibrado. A Matemática baseada na linguagem dos conjuntos é amplamente difundida – nós a encontramos em qualquer curso introdutório de Análise ou Álgebra – e teve grande importância como um elemento unificador e sistematizador, como um referencial básico. Uma das muitas expressões típicas disso apareceu em 1948, no Congresso da Association for Symbolic Logic, quando um porta-voz de Bourbaki disse:

³ Medvedev em um pequeno trabalho [1984].

⁴ Tese defendida na ocasião do seu doutorado em 1967, ver Cantor [1932], 31.

*"Como todos nós sabemos, todas as teorias Matemáticas podem ser consideradas como extensões da Teoria Geral dos Conjuntos."*⁵

O mais importante (apesar de freqüentemente esquecido) é que a Teoria dos Conjuntos como um sistema mostra a grande riqueza de possibilidades inerentes à Matemática Moderna – pense-se no Axioma da Escolha, nos subconjuntos e funções arbitrários, nas provas abstratas de existência –. Assim, pareceu-me que o esforço foi bem válido para tentar fornecer uma análise clara e detalhada do aparecimento desta abordagem. Eu fiz isso de um modo limitado, enquanto estudava apenas os autores alemães, sobretudo Riemann, Dedekind e Cantor. Mas parece que o resultado de minha pesquisa é satisfatório e promove entendimento.

Evitarei discutir os casos que são mais conhecidos (Dedekind e Cantor) e me concentrarei em dois gigantes da Matemática, Riemann e Hilbert. Estes matemáticos não deram contribuições importantes para a Teoria de Conjuntos abstrata, mas seu papel no desenvolvimento da abordagem conjuntista foi sem dúvida considerável.

A abordagem de Riemann para a teoria das funções já ficou basicamente estabelecida em sua dissertação de 1851. No século XIX, ela foi chamada de "abordagem geométrica", mas eu acredito que este é um modo antiquado de ver, em parte devido às dificuldades conceituais que ela causou aos seus contemporâneos. Para começar, o ponto de vista de Riemann é radicalmente *abstrato* e moderno, ele evita as fórmulas e os cálculos em favor de concepções abstratas.⁶ Uma função analítica não está definida como aquela que pode ser desenvolvida localmente em séries de potências: as equações Cauchy-Riemann são o ponto de partida adequado, já que oferecem uma caracterização abstrata do conceito de função analítica. Depois, Riemann inspira-se no trabalho de Gauss sobre números complexos e aplicações conformes, e dá o passo crucial para introduzir as superfícies de Riemann. As funções analíticas são agora aplicações conformes entre superfícies de Riemann. O conceito de aplicação [Abbildung] é usado explicitamente, e Riemann endossa a concepção de Dirichlet de função ou aplicação como uma correspondência abstrata.

Vocês podem perguntar agora: isto é realmente Teoria dos Conjuntos? Parece que temos a noção moderna de função, mas não temos a noção moderna de conjunto. A isso eu respondo o seguinte. Com base em um manuscrito que foi cuidadosamente datado e editado por Erhard Scholz, proponho que foi precisamente tentando esclarecer os fundamentos da sua noção de superfície, que Riemann foi conduzido ao seu conceito moderno de uma variedade.⁷ A questão agora é, o que era então uma variedade para Riemann? Na minha interpretação de suas definições, contextualizada nas visões matemáticas e lógicas de sua época, concluo que as variedades de Riemann são simplesmente classes. Elas não são (em

⁵ Bourbaki [1949], 7.

⁶ *Labyrinth*, 27–31 e cap. II.

⁷ *Labyrinth*, 57–60.

geral) as variedades diferenciáveis de hoje, nem mesmo (em geral) variedades topológicas, e uma indicação clara disto é que ele fala de variedades contínuas e discretas.⁸

Em uma palavra, as novas concepções abstratas de Riemann sobre a Teoria de Funções e a Geometria Diferencial o levaram a avançar para uma concepção moderna e conjuntista da Matemática. Ele sugeriu que variedades e aplicações deveriam ser consideradas como os objetos básicos da Matemática, mas não viveu o suficiente para desenvolver esta abordagem nova. A empreitada foi levada adiante por Dedekind e Cantor. Em *Labyrinth of Thought*, as evidências de que, se Cantor usou também a palavra "variedade" significando conjunto, não foi absolutamente coincidência, mas o resultado da influência dos escritos de Riemann.⁹

Hilbert entra no quadro na década de 1880 (ainda não tinha 30 anos), quando nós já encontramos autores desenvolvendo a abordagem conjuntista em Análise (por exemplo, os conceitos da topologia conjuntista e a medida exterior em teoria da integração) e em Álgebra (a teoria dos corpos e ideais de Dedekind, e sua extensão para funções algébricas, por Dedekind e Weber). Encontramos também as sementes da Teoria dos Conjuntos pura em Cantor (conjuntos bem ordenados, os números transfinitos, a hipótese do contínuo), e o trabalho nos fundamentos conjuntistas da Matemática, por Frege e, especialmente, por Dedekind. Homem de conhecimento enciclopédico, Hilbert vem conhecer tudo isso, mas ele também está muito ciente da discussão acalorada entre os partidários desta nova Matemática e os partidários de um estilo matemático mais tradicional, algorítmico.

Como vocês bem sabem, Hilbert tornou-se o defensor mais visível da matemática abstrata conjuntista. Isso está claro, não só em seu conhecido clamor de 1925 em defesa do paraíso de Cantor,¹⁰ mas já nos trabalhos que ele publicou em torno de 1900, seu famoso *Mathematische Probleme* inclusive. De fato, sua adesão à matemática abstrata estava explícita no primeiro artigo importante que ele publicou, com a prova do teorema da base finita, em 1888. Era uma prova de existência abstrata, obtida por redução ao absurdo, e foi atacada por Gordan como sendo mais "Teologia" que Matemática. Depois, mais maduro, Hilbert relembrou que como matemático jovem ele gostava de formular teoremas matemáticos explicitamente de um modo anti-Kroneckeriano. Em 1893, Hilbert declarou que o efeito global do seu processo de refazer a Teoria dos Invariantes foi incluí-la dentro da Teoria dos Corpos de Funções Algébricas, desenvolvida por Dedekind e Weber.

Em seu *Zahlbericht*, de 1897, Hilbert adotou uma abordagem próxima a Dedekind, empregando os conceitos abstratos de corpos, anéis e ideais.¹¹ De passagem, deveríamos

⁸ *Labyrinth*, 62–70. As variedades contínuas são concebidas por Riemann como variedades topológicas, e ele introduz logo como algo natural a hipótese de que freqüentemente tenham uma estrutura diferencial.

⁹ *Labyrinth*, 72–74.

¹⁰ No artigo *Über das Unendliche*, que pode ver-se em Hilbert [1930], apêndice VIII.

¹¹ Hilbert [1932–35], vol. 1.

mencionar que Hilbert não era apenas outro Dedekind: ele não se mostrava tão inflexível acerca da pureza metodológica, o que lhe permitiu incorporar elementos interessantes da tradição de Kronecker; estava mais interessado em propor problemas novos e inter-relacionar teorias Matemáticas, fertilizando-as reciprocamente, o que o levou a dar um grande impulso na disciplina.

O lugar mais interessante para observar a adesão de Hilbert à abordagem conjuntista é no seu trabalho sobre axiomática, no livro *Grundlagen der Geometrie* e na célebre conferência *Mathematische Probleme*, de 1900.¹² É importante aqui considerar que devemos diferenciar entre axiomatização normal, do tipo que habitualmente se encontra em Matemática, e axiomatização estritamente formal, aquela normalmente encontrada em lógica Matemática. Só nos anos de 1920, Hilbert vem trabalhar com sistemas de axiomas estritamente formais. Por contraste, os sistemas de axiomas que ele produziu em 1899 e 1900 podem ser analisados como axiomatização no marco da Teoria dos Conjuntos.

Em *Mathematische Probleme*, Hilbert usou livremente as idéias da Teoria dos Conjuntos, na verdade combinando as terminologias de Cantor e Dedekind. Ele chamou a atenção aos problemas abertos mais importantes em Teoria dos Conjuntos – a hipótese do contínuo, o teorema de boa-ordenação –, inseriu uma indicação da existência de paradoxos, e expressou confiança na viabilidade de uma prova da consistência das distintas classes de ordinais transfinitos de Cantor.

No *Grundlagen*, e em seu sistema de axiomas para os números reais, Hilbert adotou a terminologia de Dedekind para Teoria dos Conjuntos [Ding, System]. E o mais importante, ele se sentia livre para recorrer a conjuntos de elementos em seus axiomas; o exemplo conspícuo é o axioma de "completude", que não pode ser formalizado diretamente em lógica de primeira ordem. Eu proponho que deveríamos considerar que isso mostra como Hilbert considerou a Teoria dos Conjuntos como pertencente à lógica subjacente na qual o sistema de axiomas estava formulado.¹³ Embora isso tenha mudado no trabalho de fundamentação posterior de Hilbert, a Teoria dos Conjuntos continuou cumprindo este papel de base para a atividade matemática tradicional.

2. Escolas de pesquisa

Até este ponto, eu tenho falado como se os matemáticos fossem gênios individuais que criam (ou descobrem?) seus grandes resultados em isolamento, como se tudo fosse produto do pensamento puro. Mas uma das doutrinas básicas da recente historiografia é que fatores contextuais, incluindo os marcos institucionais, determinam pelo menos parcialmente a evolução do conhecimento matemático. Permita-me formular isto explicitamente:

¹² Hilbert [1930], primeira edição 1899, segunda 1903; o sistema axiomático para os números reais está em Hilbert [1930], apêndice VI; *Mathematische Probleme* em Hilbert [1932–35], vol. 3, 290–339.

¹³ *Labyrinth*, 301–02.

O conhecimento é social. Pode existir uma sabedoria estritamente individual, mas a menos que algo seja compartilhado e socialmente aceito (mesmo que por um grupo pequeno) não pode ser chamado conhecimento.

Eu gostaria de tornar explícito que não defendo uma forma de sociologismo. Quando eu digo que o conhecimento é social, estou longe de dizer que todos os fatores que afetam o conhecimento são de natureza social. O ponto de partida da pesquisa é o conhecimento prévio, e como fazer pesquisa se aprende com os especialistas; no passado, por aprendizagem ou leitura cuidadosa; em tempos recentes, isso se dá dentro das instituições científicas. Como é bem sabido, institucionalização e profissionalização eram características fundamentais da Ciência e da Matemática do século XIX.

Quaisquer que sejam os fatores envolvidos, os investigadores recebem sua educação como membros de um grupo, e isso normalmente faz com que compartilhem de pontos de vista com relação aos objetos básicos da Matemática, a metodologia básica, quais problemas são importantes, qual é o modo apropriado para atacar um problema, etc. (É claro que uma pessoa pode sentir rejeição pela orientação de um grupo, e neste caso, mudar de grupo; pode haver mais de uma abordagem influente em volta, e a pessoa produzir uma combinação especial própria de orientações; no decorrer da pesquisa, ela está sujeita a abandonar algumas das doutrinas do grupo; pode ser fortemente influenciada por alguns autores pela leitura, não por contato pessoal; etc.)

No meu caso, foi importante ler Hawkins sobre as características da pesquisa na Escola de Berlim, Edwards, sobre a "filosofia" da pesquisa Matemática de Kronecker, e alguns historiadores da ciência sobre *research schools*.¹⁴ Ficou claro que seria esclarecedor analisar minha história do ponto de vista de tais escolas de pesquisa. Ainda mais, no curso da pesquisa, eu fui confrontado com a percepção de que algumas características metodológicas profundas do trabalho de Riemann foram cruciais para a Matemática de Dedekind. Também estava claro que este estilo de fazer Matemática era antagônico ao de Kronecker, e até certo ponto ao de Weierstrass. Era então natural que Cantor e Dedekind se confrontassem com Kronecker e seus seguidores.

De fato, no século XIX era freqüente falar de "escolas". O fenômeno foi percebido claramente e era importante na experiência cotidiana dos matemáticos pesquisadores. Evidentemente, isso incluía aspectos sociopolíticos por serem membros de uma determinada escola, mas também aspectos cognitivos. Às vezes, como na "Escola de Berlim", o termo tinha um toque negativo, significando parcialidade, tendência a considerar somente um aspecto dos assuntos matemáticos.¹⁵ Às vezes era usado em um sentido diferente, como na "escola combinatória", na Matemática alemã ou na "escola sintética", de

¹⁴ Hawkins [1981], Edwards [1989].

¹⁵ Embora o próprio fenômeno histórico seja muito interessante, esta conotação está ausente de minha terminologia.

Geometria Projetiva. (Neste sentido, eu prefiro usar uma outra palavra, "tradição", desde que nós não estamos já falando de um grupo que freqüentemente se reúne e estabelece um contato pessoal próximo num marco institucional, mas, de um certo modo de fazer Matemática, o que pode ser encontrado em vários autores através do tempo, e se expande por sinais escritos.¹⁶⁾

Dedekind aprendeu de Riemann uma concepção metodológica fundamental que seria aplicada em pesquisa. Uma abordagem conceitual seria a preferida em relação a uma abordagem algorítmica. Isso significa que, em toda teoria Matemática, deveríamos procurar por um (ou vários) conceito(s) básico(s) que deveriam ser definidos através de propriedades abstratas. Estes conceitos caracterizariam o que é geral o que é invariante nos objetos de estudo. Algoritmos, fórmulas, representações explícitas deveriam ser derivadas dos conceitos básicos; idealmente falando, nunca deveríamos derivar uma propriedade geral de uma fórmula. E sempre que um "truque" abriu o caminho para uma solução, deveríamos repensar e refazer, até que o truque fosse substituído por idéias gerais.¹⁷ Algum tempo depois, em junho de 1876, Dedekind escreveu em uma carta para Lipschitz:

"Meus esforços na teoria de números estão dirigidos para basear a investigação, não para formas acidentais de representação ou fórmulas, mas para conceitos básicos simples, e através disso – apesar desta comparação poder parecer pretenciosa – atingir neste campo algo semelhante ao que Riemann fez no campo da teoria das funções".¹⁸

(Dedekind continua a dizer que a maioria dos autores não aplica corretamente os princípios de Riemann, que eles "deformam" a teoria com a utilização indevida de expressões analíticas.)

Esta concepção significou um afastamento radical dos modos tradicionais de fazer Matemática. Foi ocasionalmente expressa por Gauss, Jacobi ou Dirichlet, mas ela nunca tinha sido aplicada de modo estrito e fortemente abstrato como Riemann e Dedekind elaboraram. A *metodologia conceitual abstrata* exige elaborar métodos novos de prova e de resolução de problemas, adequados aos conceitos gerais básicos (resp. aos objetos abstratos) que são tomados como ponto de partida. Esta meta estava clara na mente de Riemann, embora ele não tenha sido capaz de terminá-la. Dedekind viveu mais tempo, e chegou a ser um mestre neste tipo de fazer sistemático.

Foi precisamente tentando esclarecer seus objetos abstratos novos, e os métodos de prova necessários a eles, que Riemann e Dedekind gradualmente se voltaram para a abordagem conjuntista. Riemann, desenvolvendo idéias de Dirichlet e Gauss, concebeu as

¹⁶ Sobre escolas e tradições, ver *Labyrinth*, xvii–xx.

¹⁷ *Labyrinth*, 100–04.

¹⁸ Dedekind [1930–32], vol. 3, 468.

funções como aplicações, e utilizou superfícies de Riemann como ferramenta indispensável. Tentando entender o que estas superfícies multidimensionais podem ser, ele foi conduzido a sua noção de uma *variedade* – significando inicialmente um conjunto, bem discreto, bem dotado de uma topologia n -dimensional contínua – Dedekind foi conduzido aos conceitos de corpo numérico e dos ideais, e para elaborar métodos conjuntistas abstratos (métodos que, de passagem, eu acredito sejam a razão principal para a célebre frase ”tudo já está em Dedekind”, de Emmy Noether). Ele também explorou os elementos da Teoria dos Conjuntos e os fundamentos conjuntistas do sistema de números.

Estas características metodológicas tiveram um impacto em Cantor. Embora vindo da escola de Berlim, tão distinta, ele foi influenciado fortemente pela tradição de Göttingen, representada nos escritos de Riemann e Dedekind. Em sua biografia de Cantor, Fraenkel escreveu:

*”Muito mais ... que é visível das cartas, as diferenças de caráter entre as primeiras e últimas publicações de Cantor sobre Teoria dos Conjuntos mostram indiretamente a profunda influência do estilo mais abstrato e preferencialmente analítico de Dedekind, que se esforça por uma sistematização harmoniosa, em contraste com o estilo mais construtivo do jovem Cantor, que tende a um avançar através de um único golpe.”*¹⁹

Nós não discutiremos mais este assunto, mas está claro que os *Beiträge* de 1895–97, em que Cantor resumiu seu trabalho vitalício, são uma contribuição muito mais ao estilo de Dedekind que, digamos, o *Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* de 1878, contendo a prova de que \mathbb{R} e \mathbb{R}^n são equipolentes.²⁰

As características peculiares da abordagem abstrata e da metodologia que emergiram em Göttingen durante os 1850s – expressando-se pela linguagem de conjuntos – e até que ponto representaram um desvio da tradição suavemente *construtiva* da Matemática anterior, explicam por que era inevitável que surgissem polêmicas. Os debates de fundamentação não começaram em torno de 1903; eles estavam claros nos anos 1870s e 1880s, por exemplo, quando Kronecker declarou que o teorema de Bolzano-Weierstrass era um ”sofisma óbvio.”²¹

Uma característica obviamente contenciosa era a tendência para produzir provas existenciais, procedendo abstratamente e sem definir exemplos. A reação de Gordan para a aplicação de Hilbert desta abordagem na Teoria dos Invariantes é bem conhecida: aquela era ”Teologia” e não Matemática.²² Hilbert continuou a trabalhar deste modo em Teoria

¹⁹ Fraenkel [1932], 456-57.

²⁰ Cantor [1932], 119–33, 282–351.

²¹ Carta para Schwarz, 6 Junho 1870; ver *Labyrinth*, 37.

²² Klein [1926], vol. 1, 330–31.

dos Números e nos Fundamentos de Geometria. Ele patrocinou as ricas possibilidades inerentes em Matemática Moderna, defendendo tanto a nova axiomática (um aperfeiçoamento da abordagem conjuntista) como o "paraíso de Cantor". Desse modo, ele avançava na tradição de Göttingen, de meados do século XIX, mas já temos dito que Hilbert não era outro Dedekind. Autores como Kronecker e Hurwitz o influenciaram poderosamente, e, em conseqüência, seu modo de trabalhar misturava características da tradição conceitual abstrata com um certo relaxamento em relação ao uso de fórmulas, com uma ênfase forte na exploração de problemas particulares como um modo de obter novas perspectivas gerais.

3. Marcos institucionais e orientações disciplinares.

O que precede pode bastar, espero, para esclarecer a importância da abordagem conjuntista como paradigma da reorientação moderna e abstrata da Matemática. Mas, antes de fechar, eu gostaria de mencionar um aspecto adicional de meu trabalho. Desde o princípio, eu estava surpreso e intrigado pelo seguinte fato. Os matemáticos alemães no século XIX mostraram bom conhecimento de assuntos filosóficos, e uma clara tendência para os levar em conta é considerar suas implicações para o conhecimento matemático. Era fácil pensar em conexões entre esta característica e fenômenos históricos como o aparecimento da abordagem conceitual abstrata, a aceitação do infinito atual, ou até mesmo a orientação para a Matemática Pura.

Lendo sobre mudanças institucionais na Alemanha, e, especialmente, a reforma universitária prussiana,²³ eu alcancei a seguinte imagem da situação. A educação matemática superior na Alemanha não foi moldada no contexto das escolas técnicas, mas no da Universidade reformada. Podemos usar aqui a oposição entre *civilisation* francesa e *Kultur* alemã, explorada por Fritz Ringer, podemos nos opor aos objetivos mais utilitários do ensino superior francês, no estilo de Esclarecimento, o neo-humanismo e, às vezes, as influências idealistas da reforma da universidade alemã. Na Universidade de Berlim, História, Filologia e Filosofia estabeleceram o tom da Faculdade de Filosofia, a qual pertenceu a Matemática. Esperava-se que uma disciplina acadêmica estivesse interessada no conhecimento contemplativo puro, e que a Universidade promovesse os ideais de Humboldt de "viver as ciências", de cultivar a ciência pela ciência.

Considere, também, que na muito bem qualificada Universidade de Berlim em 1825 havia 2 professores *ordinários* para Matemática, 1 para Física, 2 para Química, sentando ao redor da mesma mesa de reuniões da Faculdade com Hegel e outros filósofos, historiadores, etc. Quando descrevemos esta situação, e consideramos além disso como era fechado e inter-relacionado este ambiente universitário, a conclusão óbvia a que se chega é que os matemáticos tiveram que se adaptar ao novo ambiente. Ser professor universitário era muito diferente de ser pesquisador privado, ou sócio de um observatório astronômico,

²³ Em obras como Klein [1926], McClelland [1980], Jungnickel & McCormmach [1986]. Ver *Labyrinth*, 4–24.

ou talvez professor na Academia de Artilharia. Agora, era imperativo para provar que a ocupação mereceu a honra de ser um assunto acadêmico superior. Não é de se estranhar que o *Journal für die reine und angewandte Mathematik* de Crelle tenha se transformado (como dizia a anedota) em um jornal de Matemática "pura não aplicada" [reine un-angewandte].

Então, surge outro aspecto da situação. Como vocês sabem, apesar das dificuldades e desavenças, a situação das Ciências Naturais e Ciências Humanas, vivendo debaixo do mesmo teto, continuou bem até no século XX (por volta de 1925).²⁴ Isso e mais o *Lernfreiheit* (liberdade de estudo) significaram que os estudantes interessados em Matemática podiam assistir a conferências sobre filosofia e diversas ciências. Esse foi o caso de Riemann, Kronecker, Weierstrass, Dedekind, e Cantor (para listar apenas nomes previamente mencionados). O caso em que encontramos uma concentração mais forte, inter-relação e fertilização de interesses, é aquele de Riemann. Mas em todo caso, não é de se estranhar que os matemáticos alemães pudessem se interessar mais por assuntos e sutilezas filosóficos que os franceses ou italianos.

Como um final adequado, eu gostaria de citar um trecho de um documento universitário escrito pelo físico Wilhelm Weber em 1866. Riemann acabava de morrer e era preciso buscar um substituto adequado. Em um escrito acadêmico administrativo, Weber declarava que, com Gauss, Dirichlet, e Riemann, Göttingen tinha-se tornado "a plantação para a mais profunda orientação filosófica em pesquisa Matemática".²⁵ Ele estava pensando, acho eu, na volta abstrata e conceitual que conduziu à Matemática Moderna e, nesse processo, à Teoria dos Conjuntos.

Bibliografia.

- Bourbaki, N. *Foundations of Mathematics for the Working Mathematician*, *Journal of Symbolic Logic* **14** (1949), 1–8.
- Cantor, G. *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, ed. E. Zermelo, Berlin, Springer, 1932. Reimpreso em Hildesheim, G. Olms, 1966
- Dedekind, R. *Gesammelte mathematische Werke*, ed. R. Fricke, E. Noether and Ö. Ore, Braunschweig, 3 vols., 1930–32. Reimpreso em 2 vols.: New York, Chelsea, 1969. Existe tradução espanhola de alguns trabalhos em Madrid, Alianza, 1998, inglesa em New York, Dover, 1963.
- Dauben, J. *Georg Cantor: His mathematics and philosophy of the infinite*, Harvard University Press, 1979.

²⁴ A Universidade de Tübingen foi uma exceção, já que abriu uma Faculdade de Ciências em 1863; Hedelberg fez lo mesmo em 1890, mas no caso de Göttingen e Halle se esperou até 1922–23, em Berlin e Bonn até 1936.

²⁵ Citado em Dugac [1976], 196.

- Dugac, P. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques (avec de nombreux textes inédits)*, Paris, Vrin, 1976.
- Edwards, H. Kronecker's Views on the Foundations of Mathematics, em D. Rowe & J. McCleary, eds., *The History of Modern Mathematics*, vol. 1 (Boston, Academic Press, 1989), 67–77.
- Ferreirós, J. *Labyrinth of Thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*, Basel/Boston, Birkhäuser, 1999.
- Fraenkel, A. Das Leben Georg Cantors, en Cantor [1932], 452–483. Versão ampliada em *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **39** (1930), 189–266.
- Hawkins, T. The Berlin School of Mathematics, em H. Bos, H. Mehrrens & I. Schneider, eds., *Social history of nineteenth century mathematics* (Boston, Birkhäuser, 1981), 233–245.
- Hilbert, D. *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vols., Berlin, Springer, 1932–35.
- Hilbert, D. *Grundlagen der Geometrie*, 7ª ed., Leipzig, Teubner, 1930.
- Jungnickel, Ch. & McCormmach, R. *Intellectual Mastery of Nature. Theoretical Physics from Ohm to Einstein*, vol. 1, University of Chicago Press, 1986.
- Klein, F. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, 2 vols., Berlin, Springer, 1926–27, reimpresso em 1979.
- McClelland, Ch. *State, Society, and University in Germany, 1700–1914*, Cambridge University Press, 1980.
- Medvedev, F. A. Über die Abstrakten Mengenlehren von Cantor und Dedekind, *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte* **7** (1984), 195–200.
- Meschkoswki, H. *Georg Cantor. Leben, Werk und Wirkung*, Mannheim, Bibliographisches Institut, 1983 (original 1967).
- Purkert, W. Ilgands, H. J. *Georg Cantor 1845–1918*, Basel/Boston, Birkhäuser, 1987.
- Riemann, B. *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, ed. H. Weber em colaboração com R. Dedekind, Berlin, Springer/Teubner, 1990. Ed. original 1876, reimpresso em 1892, e com acréscimos em 1953.

Apêndice - Um Esboço de Desenvolvimentos

1854 Tentando esclarecer os fundamentos de sua teoria de funções, Riemann é conduzido ao conceito de variedade (conjunto). Considera as variedades como objetos básicos da Matemática, e as usa para compreender e generalizar a geometria (variedades diferenciáveis contínuas). Sua abordagem "geométrica" da teoria de funções, inspirada por Gauss e Dirichlet, estava já de fato baseada nas aplicações.

- 1858 Dedekind desenvolve sua definição de corte dos números reais, e pouco antes disserta em Göttingen sobre a teoria de Galois, discutindo grupos abstratos e corpos numéricos. É provável que ele foi influenciado pelo paradigmático exemplo da teoria de funções de Riemann, que havia estudado nos anos anteriores.
- 1868 Publicação do trabalho de Riemann sobre geometria e da sua tese sobre séries trigonométricas. Isto estimula um crescimento repentino da atividade sobre funções reais e conjuntos de pontos; aqui Cantor (1871, 1872) se destaca.
- 1871 Aparece a teoria dos números moderna com a teoria de ideais de Dedekind, introduzindo os conceitos de corpo, anel, módulo, ideal, homomorfismo, isomorfismo.
- 1872 Publicação de definições rigorosas dos números reais. Cantor apresenta o conceito de conjunto derivado de um conjunto de números reais ou conjunto de pontos, usando-o por generalizar um teorema sobre a unicidade da representação de funções reais através de séries trigonométricas.
- NESTE MOMENTO, A ABORDAGEM CONJUNTISTA ESTÁ PRESENTE EM ARITMÉTICA, ÁLGEBRA, ANÁLISE, TEORIA DE FUNÇÕES, E GEOMETRIA.
- 1874 Cantor descobre o não-enumerabilidade do conjunto \mathbb{R} dos números reais. Isto, e os seus trabalhos posteriores de 1878, etc. (especialmente o de 1883), estabelecem a Teoria dos Conjuntos abstrata, intimamente ligada com os números transfinitos (ordinais e cardinais).
- 1882 Dedekind e Weber generalizam a teoria dos ideais a corpos de funções algébricas.
- 1884 Cantor introduz noções fundamentais em topologia de conjuntos de pontos e prova resultados como o teorema de Cantor-Bendixson. Mittag-Leffler e Poincaré aplicam estas idéias em problemas centrais da análise. Vários autores desenvolvem a noção de conteúdo exterior de conjuntos de pontos para teoria da integração.
- 1888 Dedekind e Peano axiomatizam os números naturais usando a Teoria dos Conjuntos. Dedekind avança a visão de Matemática pura como o estudo dos conjuntos com estrutura analisada por meio de morfismos, onde as noções fundamentais são conjuntos e aplicações.
- 1893 Publicação do Programa de Erlangen de Klein, que apresenta as geometrias como estudo das invariantes dos grupos de transformações. Weber escreve sobre grupos abstratos e corpos em Teoria de Galois. Hilbert publica sobre invariantes.

- 1897 O *Zahlbericht* de Hilbert desenvolve a teoria dos números algébricos. Hadamard e Hurwitz discutem ideais da Teoria dos Conjuntos no Primeiro Congresso Internacional de Matemáticos em Zurich.
- 1899 Hilbert axiomatiza a geometria do ponto de vista da abordagem conjuntista. Surge o trabalho de Borel sobre teoria de funções, incluindo ideias sobre Teoria dos Conjuntos e sobre integração, depois desenvolvidas por Lebesgue (1903).
- 1900 Hilbert defende a abordagem axiomática e a Teoria dos Conjuntos no Segundo Congresso Internacional de Matemáticos em Paris.
- 1903/04 Contradições da teoria ingênua dos conjuntos e polêmicas em torno do Axioma da Escolha. Uma crise nos fundamentos “resolvida” em 1908 com a teoria dos tipos de Russell e a axiomatização de Zermelo.
- 1910 Pesquisas de Steinitz sobre teoria abstrata de corpos, usando o Axioma de Escolha.
- 1914 *Grundzüge der Mengenlehre* de Hausdorff, manual muito importante que inclui a definição moderna de espaço de topológico (algo similar com Weyl em 1913, *Die Idee der Riemannschen Fläche*).
- 1920s Desenvolvimentos da axiomatização da Teoria dos Conjuntos, da topologia abstrata, da álgebra estrutural moderna. A maioria dos matemáticos considera a Teoria dos Conjuntos como a base da Matemática. Críticas e polêmicas devido a Brouwer, Weyl, Skolem.
- 1930s Fim gradual das polêmicas, em parte devido aos surpreendentes resultados de Gödel (problemas para o programa de Hilbert, consistência relativa da Matemática ‘classica’ com respeito ao intuicionismo). O abismo entre a Matemática abstrata e a construtiva se consolida, mas as opções são explícitas e claras. Ganha claramente o abstrato, a abordagem através da Teoria dos Conjuntos.

José Ferreiros: Departamento de Filosofía y Lógica. Universidad de Sevilla.
Camilo José Cela, s/n
E-41018 Sevilla – ESPANHA